

Raciocínio lógico na aprendizagem da matemática

Wilhelm Alexander Cardoso Steinmetz

Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais

wacs@ufmg.br

11 de fevereiro de 2025



Raciocínio lógico na aprendizagem da matemática

Plano:

- I. Introdução
- II. Linguística Cognitiva
- III. Erros
- IV. Ensino de Lógica

Raciocínio lógico na aprendizagem da matemática

I. Introdução

Raciocínio lógico na aprendizagem da matemática

Raciocínio lógico

- a atividade de um agente cognitivo de tirar inferências para chegar a conclusões tidas por ele como verdadeiras

Aprendizagem matemática

- o processo pelo qual um agente cognitivo se torna participante competente da comunidade dos praticantes de matemática

Vou focar em:

- Agentes cognitivos que são **Alunos do Ensino Fundamental e Médio**
- Matemática do Ensino Fundamental e Médio, em particular **Aritmética e Álgebra**

Raciocínio Lógico

Raciocínio **irrevogável** (indefeasible):

- Dedução
 - Necessária preservação da verdade
 - Auditabilidade (Perspicuity)
 - Contenção de crenças (Belief Bracketing)

Raciocínio **revogável** (defeasible), ampliativo:

- Indução
 - Abdução (inferência a favor da **melhor** explicação)
 - Modelos: lógicas não-monotônicas, raciocínio bayesiano
- (Dutilh Novaes, 2021)

Raciocínio Dedutivo

Antes se acreditava:

- Paradigma Piagetiano/Neo-Kantiano: dedução forma (parte) da base do raciocínio humano, como ‘leis *a priori* de pensamento’

Porém...



Tarefa de Seleção de Wason (1966):

- Quatro cartas estão em uma mesa, cada uma com um número em uma face e uma cor na outra.
- As faces visíveis das cartas mostram 3, 8, azul e vermelho.
- Que carta(s) você deve virar para testar que, se uma carta mostra um número par em uma face, então sua face oposta é azul?

Só ~15% respondem corretamente. (Dutilh Novaes, 2021)

Raciocínio Dedutivo

Hoje sabemos:

- Experimentos empíricos: humanos costumam ser pouco habilidosos em tarefas de raciocínio dedutivo (até graduandos de universidades)
- Raciocínio dedutivo não costuma ser utilizado no dia-a-dia
- Contenção de crenças versus Projeção de crenças
- Dedução necessita treinamento específico e parece restrito a poucos nichos de especialistas:
 - Matemática: Lógica matemática, provas matemáticas
 - Física Teórica e outras Ciências

Raciocínio Indutivo ou Abduativo

Onde encontramos?

- Dia-a-dia
- Prática científica (Latour & Woolgar, 1997)
- Prática matemática (Dutilh Novaes, 2021)

Ensino e aprendizagem da matemática, e.g. o professor espera que alunos aprendam por **indução ou abdução** quando o professor

- dá exemplos,
- passa listas de exercícios

Raciocínio Matemático

Atenção!!

Raciocínio lógico na **Aprendizagem da Matemática**

≠

Raciocínio lógica na **Matemática**

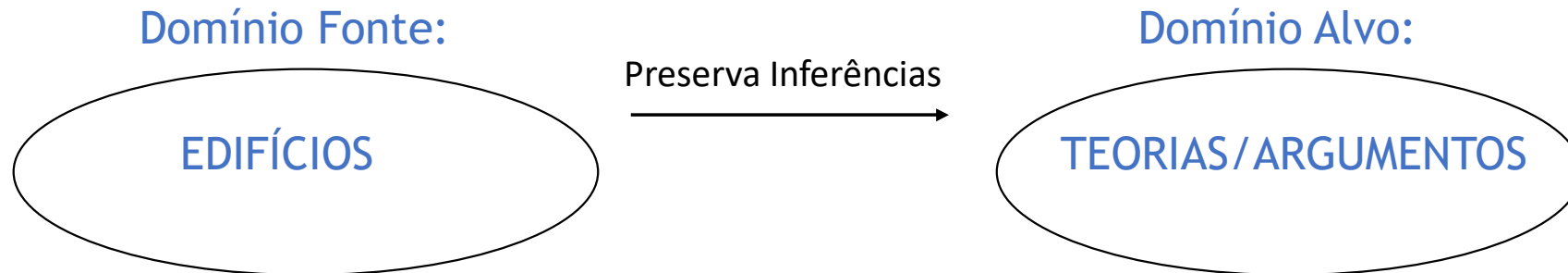
Como podemos saber como os alunos raciocinam?

- Analisar a **produção pública** dos alunos: falas, escritos e gestos...
- Ciência Cognitiva e Linguística Cognitiva:
 - Lakoff & Johnson (1980), *Metaphors We Live By*
 - Lakoff & Núñez (2000), *Where Mathematics Comes From - How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*
- Wittgenstein: “Não pense, mas olhe!”

Raciocínio lógico na aprendizagem da matemática

II. Linguística Cognitiva

Metáforas Conceituais



TEORIAS/ARGUMENTOS são EDIFÍCIOS:

“A sua teoria não tem uma base sólida.”

“Seu argumento é frágil/bem-construído.”

“Esse é o fundamento da sua teoria?”

“Você precisa construir um argumento forte.”

Mapeamento que **preserva inferências**:

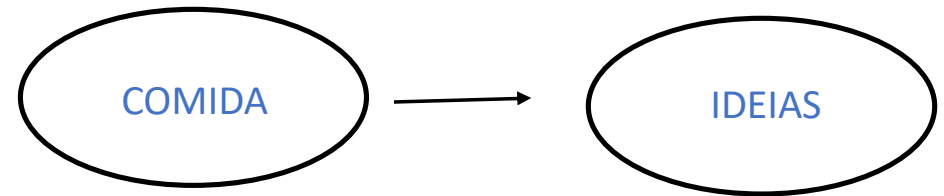
O que não possui uma base sólida e não foi cuidadosamente construído, pode ser facilmente derrubado e/ou vai simplesmente cair por terra.

(Lakoff & Johnson, 1980)

Metáforas Conceituais

IDEIAS são COMIDA:

- “Preciso digerir essa ideia.”
- “Essa é uma ideologia requentada.”
- “O que você disse deixou um sabor ruim na boca.”
- “Ela devorou o livro / é um leitor voraz.”



(Lakoff & Johnson, 1980)

Nem todos aspectos são mapeados!

- “Esse livro deveria ser comido com um garfo.”

“Alguns argumentos você não deveria engolir imediatamente, melhor deixar amadurecer.”

PALAVRAS são RECIPIENTES:

- “Ponha mais ideias em menos palavras.”
- “Suas palavras soam tão ocas para mim.”

(Reddy, 1979)

Metáforas Conceituais

TEMPO é conceitualizado espacialmente:

“Lá atrás, quando eu era pequeno...” / “Você precisa enfrentar o futuro!”

1) O tempo é um objeto em **movimento** e nós somos **estacionários**:

➤ “O tempo voa/está andando devagar.”, “Natal está chegando.”

2) O tempo é **estacionário** e nós estamos em **movimento**:

➤ “Estamo-nos aproximando do final do ano.”, “Estamos chegando perto de Natal.”

Conceitualizações inconsistentes: (qual é a lógica atrás disso?)

“O tempo passa tão rapidamente, estamos quase chegando no final do ano.”

(Lakoff & Johnson, 1980)

Metáforas Conceituais

RELACIONAMENTOS são conceitualizados em termos de SAÚDE:

- “O relacionamento deles é doente/saudável”, “Eles ressuscitaram o seu casamento”

RELACIONAMENTOS são conceitualizados em termos de VIAGENS:

- “Eles partiram caminhos”, “O seu casamento está indo para lugar algum.”

Novamente: Metáforas inconsistentes

Nem todas as inferências lógicas transferem para o domínio alvo:

- Você pode ressuscitar um relacionamento, mas não uma pessoa.

(Lakoff & Johnson, 1980)

Metáforas Conceituais

Metáforas conceituais possuem **evidências neurocientíficas**:

“Evidências de estudos de **imagens cerebrais, estimulação cerebral e lesões**, em geral, mostram que quando conceitos abstratos são expressos como metáforas linguísticas para domínios sensório-motores, eles **são compreendidos em termos desses domínios**. As metáforas são corporificadas e fundamentadas em domínios sensório-motores.”

“Há evidências neurais de que alguns conceitos e relações abstratas, como **poder** e **afiliação**, têm uma organização metafórica **mesmo na ausência de metáforas linguísticas**. Alguns componentes do sistema conceitual abstrato podem, de fato, ter uma base metafórica subjacente, pelo menos sob certas condições. O esclarecimento dos limites dessa organização - por exemplo, os tipos precisos de conceitos abstratos que são organizados dessa forma, sua flexibilidade e as condições e o contexto necessários - aguarda uma investigação mais aprofundada.”

(Desai, 2022) - os grifes coloridos são meus

Metáforas Conceituais

Metáforas conceituais **importam**, pois podem fundamentar e justificar políticas públicas durante décadas através da sua estrutura inferencial:

POLÍTICA DE DROGAS como GUERRA:

- “Precisamos ganhar a Guerra às Drogas.”

FINANÇAS ESTATAIS como FINANÇAS FAMILIARES:

- “O governo não pode gastar mais do que tem”
- “O estado não pode contrair mais dívidas do que pode pagar”

Inferências lógicas são transferidas do **domínio fonte** (Guerra, Finanças Familiares) para o **domínio alvo** (Políticas Públicas, Finanças Estatais)

Metáforas Conceituais na Matemática

ARITMÉTICA é COLEÇÃO DE OBJETOS:

- “Juntando 2 e 3, nós obtemos 5.”

ARITMÉTICA é CONSTRUÇÃO DE OBJETOS :

- “3 e 4 faz(em) 7”, “20 pode ser **decomposto** em 4 vezes 5”

NÚMEROS são PONTOS NUMA RETA:

- “7 fica à direita 3”, “A distância de 0 a 3 é curta.”

(Lakoff & Núñez, 2000)

Metáforas Conceituais na Matemática

CONJUNTOS são RECIPIENTES:

- “**Toma/Pega** um elemento neste conjunto”, “Este conjunto contém todos números naturais.”

CONJUNTOS são CLUBES/GRUPOS:

- “a,b,c são membros do conjunto X.”
- “O elemento x pertence a ambos, A e B.”

CONJUNTOS são OBJETOS A SEREM CONSTRUÍDOS:

- “Nós podemos **construir** um conjunto com as seguintes propriedades.”

(Lakoff & Núñez, 2000)

Metáforas Conceituais na Matemática

FUNÇÕES são OBJETOS QUE SE MOVEM NO ESPAÇO:

- “A função está se aproximando do limite/cruzando/tocando no eixo de baixo.”

FUNÇÕES são PROCEDIMENTOS:

- “Aplicando a função coseno a 0, você obtém 1.”

FUNÇÕES são AGENTES:

- “A função leva x para y .”

Metáforas Conceituais na Matemática

EQUAÇÕES são BALANÇAS EQUILIBRADAS:

“Tirando de um lado $2x$, você precisa tirar $2x$ do outro lado também, senão não teremos mais igualdade.”

EQUAÇÕES são DOIS CAMPOS COM UMA CERCA NO MEIO:

“O 7 pula a cerquinha e troca de sinal.”

Montagem Conceitual



Crianças ainda a serem educadas

Cirurgiões que já estudaram e estão prestes a realizar uma cirurgia cardíaca

Você, a pessoa lendo a propaganda

O paciente necessitando de uma cirurgia cardíaca

Espaço Mesclado:

- Crianças e Cirurgiões fundidos
- Leitor e paciente fundidos
- 20 anos de tempo comprimidos

Fauconnier & Turner 2002

Montagem Conceitual na Matemática

A reta real

Pontos no Numa Reta

Números Reais

Pontos-números numa reta dos números reais:

- “2 fica a direita de -1.”
- “4,9 é perto de 5 mais é longe de 110”
- “conte até 20 sem pular nenhum número”

Fauconnier & Turner, 2002

Montagem Conceitual na Matemática

O plano complexo

- Pontos no Plano Cartesiano
- Vetores
- Transformações de vetores

- Números Reais
- Adição e Multiplicação de Números Reais

- Números complexos com partes reais e imaginárias e como vetores no plano cartesiano
- Argumento
- Magnitude
- Adição e Multiplicação de Números Complexos

Fauconnier & Turner, 2002

Raciocínio lógico na aprendizagem da matemática

III. Erros

Um rebelião coordenada

“[...] as mesmas concepções errôneas são mantidas por crianças que falam idiomas diferentes, aprendem com professores diferentes e de acordo com currículos diferentes, e usam livros didáticos diferentes. Como é possível que as crianças “com concepções errôneas” concordem entre si sobre como discordar da definição? Uma **rebelião tão bem coordenada** contra as regras geralmente aceitas de uso de palavras não pode ser descartada como um simples “erro” acidental.”

(Sfard, 2008, p. 16-17, grifes meus)

Erros: uma janela para um mundo conceitual

Ver erros como:

- um *fenômeno positivo* ou sintomas de um fenômeno positivo, i.e. não definido de forma negativa ou antitética
- uma *janela* para o mundo conceitual do educando, sua maneira de tirar inferências lógicas

Compare com as críticas de *Merleau-Ponty a Jean Piaget* (Rojcewicz, 1987):

- a criança não pode apenas ser visto como um *adulto incompleto*, a estrutura da consciência da criança é outra

Na matemática:

- O educando de matemática não pode apenas ser visto como *matemático incompleto* com uma *conceitualização da matemática incompleta ou errônea*, a concepção da matemática do educando é outra

Análise de Erros de Alunos

Referências principais:

- Gomes, Maria Laura Magalhães. Álgebra e funções na educação básica, 2013
- Socas, M. M. et al. Iniciación al Algebra. Madrid: Editorial Síntesis, 1996.
- Hart, Kathleen. Strategies and Errors in Secondary Mathematics, 1987
- Usiskin, Zalman. Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. 1988

O sinal de igualdade '='

A matemática é a arte de dar o mesmo nome a coisas diferentes
(Henri Poincaré)

O sinal de igualdade ‘=’

Na aritmética escolar:

- o sinal ‘+’ é interpretado como um **pedido ou comando para realizar uma operação** e
- o sinal ‘=’ é interpretado como um **pedido ou comando para informar o resultado**:

$$2 + 3 = \square$$

$$2 + 3 = 5$$

Lembra as metáforas conceituais:

- “Juntando 2 e 3, nós obtemos 5”
- “2 e 3 faz(em) 5”

Aqui ‘2 + 3’ é o **problema** e ‘5’ é o **resultado**.

O sinal de igualdade ‘=’

Na aritmética escolar:

O sinal ‘=’ **conecta** um problema a um resultado ou une uma sequência de passos que conduzem a um resultado final:

$$2 + 3 = 5$$

ou

$$2 \cdot (7 - 4) = 2 \cdot 3 = 6$$

Esquematicamente:

$$2 + 3 \rightarrow 5$$

ou

$$2 \cdot (7 - 4) \rightarrow 2 \cdot 3 \rightarrow 6$$

O sinal de igualdade ‘=’

No entanto, na **Álgebra e na Matemática Formal** o sinal ‘=’ é **bidirecional**:

‘ $2 + 3 = 5$ ’ e ‘ $5 = 2 + 3$ ’ possuem exatamente o **mesmo significado**

Erro comum de alunos:

Eles afirmam que $x + 2 = 4 \Rightarrow 2 = x$ está **errado**

e que $x + 2 = 4 \Rightarrow x = 2$ está **certo**

Uma instanciação do **paradoxo do seguimento de regras** (Wittgenstein/Kripke)?

Só quando o aluno começa a fazer álgebra, se percebe que ele não usa o sinal ‘=’ como deveria.

O sinal de igualdade ‘=’

Outro erro comum:

Eles escrevem: $3x + 4 = 7x$ ou $2x + 5y = 10xy$

Porque?

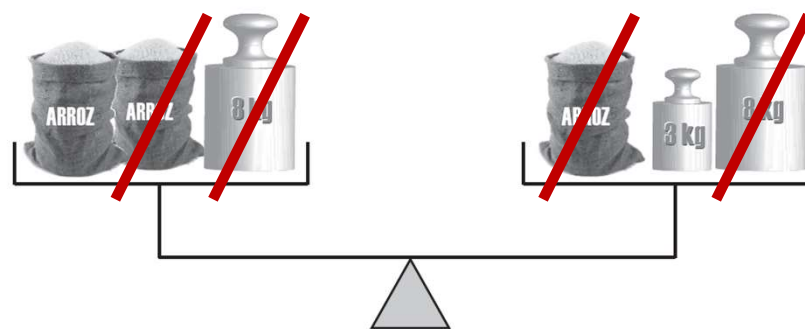
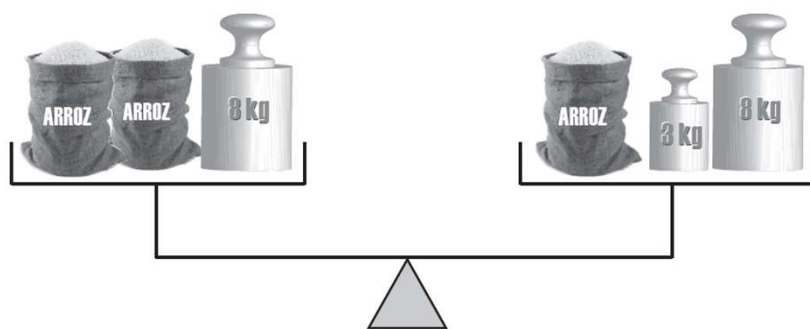
- ‘ $3x+4$ ’ e ‘ $2x+5y$ ’ não têm ‘cara’ de **resultado**, eles têm ‘cara’ de **problema**.
- Dificuldade cognitiva em aceitar a **falta de fechamento**.
- Uma cadeia de inferências lógicas precisa ser **auditável** e **esclarecedora**. Um resultado precisa ser **compreensível**, senão, não pode ser resultado.

O sinal de igualdade '='

Como os alunos aprendem a **bidirecionalidade** de '=' ?

Por exemplo, com a **metáfora conceitual** da balança equilibrada:

$$2x + 8 = x + 11$$



O sinal de igualdade ‘=’

$$2x + 8 = x + 11$$

Repare que ‘=’ é aqui uma igualdade entre resultados de **procedimentos** (dedutivos) diferentes:

“O procedimento tomar uma quantidade x , dobrá-la e somar 8 leva ao mesmo resultado que o procedimento de tomar a quantidade x e somar a ela 11”

O sinal de igualdade ‘=’

Supomos que temos uma função real: $f(x) = x + 3$

Pondo $x = 2$, então $f(x) = 5$
(hipótese) (tese)

Pondo $f(x) = 5$, então $x = 2$
(hipótese) (tese)

Inferência de regras dedutivas por generalização

Ao aprender as primeiras regras, alunos parecem adquirir as primeiras noções de **raciocínio dedutivo** (na matemática).

Mas, estas regras costumam ser aprendidas técnicas e conceitos por um tipo raciocínio abduativo, por exemplo, '**generalização**':

1) A professora passa um lista de exemplos ou uma lista para de exercícios.

2) A partir destes, aluna 'generaliza', ela infere regras por **abdução**.

$\begin{array}{r} 10 \\ + 12 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 13 \\ + 23 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 24 \\ + 12 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 33 \\ + 15 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 14 \\ + 35 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 44 \\ + 22 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 50 \\ + 32 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 82 \\ + 17 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ + 22 \\ \hline \end{array}$

Generalização equivocada

Problemas na **generalização** (abdução equivocada):

1) Se $(x + 4) \cdot (x - 2) = 0$, então $x + 4 = 0$ ou $x - 2 = 0$

Lista de exemplos: $(3 - x) \cdot (y - 1) = 0 \Rightarrow 3 - x = 0$ ou $y - 1 = 0$

$$(2x - 3) \cdot (11x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \text{ ou } 11x = 0$$

$$(x + 13) \cdot x = 0 \Rightarrow x + 13 = 0 \text{ ou } x = 0$$

O aluno conclui: $(x + 4) \cdot (x - 2) = 1 \not\Rightarrow x + 4 = 1$ ou $x - 2 = 1$

Generalização equivocada

Problemas na **generalização** (abdução equivocada):

- 2) O aluno sabe que “x representa um valor numérico”.
- Logo, conclui que se $x = 6$, então $4x = 46$.

Nestes casos parece haver **abdução** (equivocada!) de uma suposta regra que serviria para pseudo-inferência **dedução**

Argumento dedutivo:

- Necessária preservação da verdade
- Auditabilidade (perspicuity)
- Contenção de crenças (belief bracketing)

Procedimentos Informais

Erros devidos a procedimentos idiossincráticos:

1) $x + 7 = 20$

“x tem que ser 13 pela decomposição de 20 em 13 e 7”

2) $4x + 3 = 7x$

“3 tem que ser igual a 3x por ser o que falta a 4x para valer 7x, daí $x = 1$.”

3) $5x + 4 = 6x$

“4 se identifica com o x que falta a 5 x para o total 6 x”

4) $3x + 2 = 14$,

aqui os alunos decompõem o segundo membro de maneira semelhante ao primeiro, obtendo $3x + 2 = 12 + 2$ e, portanto, $x = 4$.

O aluno conclui:
(equivocadamente)

$$\frac{x+2}{x+5} = \frac{6}{7} \implies x \text{ pode ser 4 ou 2} \quad \text{e} \quad \frac{x+2}{x+5} = \frac{4+2}{2+5} = \frac{6}{7}$$

Paradoxo do seguimento de regras (Wittgenstein/Kripke):

Só quando o aluno erra, se percebe que ele não aplica a regra que achávamos...

Abdução

Se o resultado final de um cálculo é um número “complicado” ou “extravagante”, por exemplo:

$$x = \frac{7649}{63193} \cdot \sqrt{499}$$

O aluno costuma achar que errou nos cálculos ([projeção de crenças](#)).

Dedução e abdução na aprendizagem

Argumento dedutivo:

- Necessária preservação da verdade
- Auditabilidade (perspicuity)
- Contenção de crenças (belief bracketing)

Matemática Moderna (movimento de ensino)

$$7x + 5 = 7 - 3x$$

$$\Leftrightarrow 7x = 2 - 3x$$

$$\Leftrightarrow 10x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{10}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

Dedução

Aplicar regras dedutivas de forma habilidosa não é fácil:

1) em cada ponto de um procedimento dedutivo, há um número enorme de possibilidades como continuar:

$$64^{\frac{1}{6}} = (64^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$$

chega ao resultado

$$64^{\frac{1}{6}} = 64^{0,1666666...}$$

entra em um beco sem saída...

O sinal de igualdade ‘=’

2) Aprender os padrões adequados de **auditabilidade** (relacionado a **falta de fechamento**):

Os alunos escrevem: $\frac{8}{24} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

E depois começam a dividir 1 por 3 na mão:

Three hand-drawn long division problems showing 1 divided by 3. The first shows 1.0 with a remainder of 1. The second shows 1.00 with a remainder of 1. The third shows 1.000 with a remainder of 1. Each problem has a purple quotient, a blue divisor, and green subtractions and remainders.

$\begin{array}{r} 3 \overline{) 1.0} \\ \underline{-9} \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \overline{) 1.00} \\ \underline{-9} \downarrow \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \overline{) 1.000} \\ \underline{-9} \downarrow \\ 10 \\ \underline{-9} \downarrow \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 1 \end{array}$
--	--	--

➤ Tartaruga e Aquiles de Lewis Carroll

Variáveis, Incógnitas e muito mais

1) $A = b \cdot h$

2) $40 = 50x$

3) $\sin x = \cos x$. $\tan x$

4) $1 = n \cdot (1/n)$

5) $y = kx$

1) **Fórmula:** A, b e h representam a área, a base e a altura de um retângulo ou paralelogramo e têm o caráter de uma **coisa conhecida**

2) **Equação:** tendemos a pensar em x como uma **incógnita** a ser encontrada ou conhecida

3) **Identidade:** x é o **argumento** de uma função, e uma identidade vale para todos ou um grande número de x

4) **Propriedade:** generaliza um modelo aritmético (o produto de um número por seu inverso é 1, e.g. $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$)

5) **Expressão de uma função:** x é o **argumento** de uma função, y o valor da função e k uma **constante** ou **parâmetro**, dependendo de como a letra é usada

Correção de Erros

“O estudante deve participar ativamente no processo de superar seus próprios erros; para isso, o professor deve **provocar conflito em sua mente a partir da inconsistência dos seus erros**, forçando-o a participar ativamente na resolução do conflito, substituindo os conceitos falsos pela compreensão conceitual adequada. O professor deve raramente indicar a seus alunos qual é a resposta correta; deve pedir-lhes comprovações e provas com a intenção de provocar contradições que resultam de falsos conceitos dos estudantes. A partir daí, eles devem ser dirigidos a conseguir resolver a contradição mediante a solicitação de mais comprovações e provas. O objetivo não é tanto fazer com que os estudantes escrevam a fórmula ou regra de procedimento adequada, mas fazê-los enfrentar a contradição e eliminar seus falsos conceitos de forma que não voltem a aparecer.” (Gomes, 2013), baseado em (Socas, 1996)

- Serve para revisar “inferências para a melhor explicação” dos alunos. O conflito cognitivo pode fazer o aluno enxergar que não foi a “melhor explicação”.

Raciocínio lógico na aprendizagem da matemática

IV. Ensino de Lógico

Ensinar lógica para o alunos de matemática?

Pode ajudar os alunos:

- a fazerem sentido do que fazem
- a enxergarem o componente epistêmico de procedimentos matemáticos (e.g. cálculos como explicações)
- a refletirem criticamente sobre como chegaram às suas conclusões e a legitimidades dos seus métodos de inferência
- a discutirem sobre seus métodos de raciocínio entre eles

$$\begin{aligned} 7x + 5 &= 7 - 3x \\ \Leftrightarrow 7x &= 2 - 3x \\ \Leftrightarrow 10x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{10} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Porém: não se deve só focar na lógica dedutiva da matemática formal

Ensinar lógica para o alunos de matemática?

- Matemática é muitas vezes vista e ensinada como uma relativamente autocontida caixa de ferramentas com muitas aplicações em várias áreas de conhecimento e onde ferramentas = conteúdos nas tabelas da BNCC
- Reflexões críticas, meta-matemáticas dos alunos sobre o próprio raciocínio lógico utilizado na processo de aprendizagem da matemática pode ajudar na aquisição destas ferramentas e na sua aplicabilidade

Mais informações / Questões:

wacs@ufmg.br ou abc120241@gmail.com

References

- Desai, Rutvik H. (2022) Are Metaphors Embodied? The Neural Evidence. Psychol Res. November; 86(8): 2417-2433. doi:10.1007/s00426-021-01604-4.
- Dutilh Novaes, Catarina (2021) The Dialogical Roots of Deduction. Historical, Cognitive, and Philosophical Perspectives on Reasoning. 2021.
- Fauconnier, G; Turner, M (2002) The Way We Think - Conceptual Blending and the Mind's Hidden Complexities, Basic Books
- Gomes, Maria Laura Magalhães (2013) Álgebra e funções na educação básica / Maria Laura Magalhães Gomes. - Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2013
- Hart, Kathleen (1987) Strategies and Errors in Secondary Mathematics. Mathematics in School, Vol. 16, No. 2 (Mar., 1987), pp. 14-17
- Lakoff, G; Johnson, M (1980) Metaphors We Live By. University of Chicago Press.
- Lakoff, G; Núñez, R (2000) Where Mathematics Comes From - How the Embodied Brings Mathematics Into Being, Basic Books
- Latour, B.; Woolgar, S. (1997). Vida de Laboratório. Relume Dumará

References

- Lave, J; Wenger, E (1991) Situated Learning - Legitimate Peripheral Participation. Cambridge University Press.
- Matlock, T (2004) Fictive motion as cognitive simulation. *Memory & Cognition* 32 (8), 1389-1400. 2004.
- Reddy, MJ (1979) The conduit metaphor: A case of frame conflict in our language about language, In: Ortony, A (1979) *Metaphor and Thought*, Cambridge University Press.
- Rojcewicz, Richard. (1997). Merleau-Ponty and Cognitive Child Psychology. *Journal of Phenomenological Psychology*, 18, No. 2, 1987, p. 201-222
- Sfard, A (2008) Thinking as Communicating - Human Development, the Growth of Discourses and Mathematizing. Cambridge University Press.
- Socas, M. M. et al. (1996) *Iniciación al Algebra*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Usiskin, Zalman. (1988) Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. Em: *The Ideas of Algebra, K-12*, 1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Arthur F. Coxford and Albert P. Shulte, 8-19. Reston, Va.: The Council, 1988.
- Wason, Peter Cathcart (1966). "Reasoning". In Foss, B. M. (ed.). *New horizons in psychology*. Vol. 1. Harmondsworth: Penguin. LCCN 66005291.