

**Lógica pra pessoas que sabem
resolver $2 + x = 5$ mas não sabem
substituir x por 3 em $2 + x = 5$**

(World Logic Day 2026)

<https://anggtwu.net/2026-logica-para-pessoas.html>
<https://anggtwu.net/math-b.html#2026-wld>

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

Índice

Dedicatória	4	“A small variation in notation”	38	A resposta da Ana Isabel	71
Abstract (ou quase)	5	Maturidade	39	O Apocalipse Zumbi	72
Apresentação	6	Equações diferenciais: um caso arquetipal	40	O Apocalipse Zumbi 2: os aipims	73
Apresentação (2)	7	Equações diferenciais: um caso arquetipal (2)	41	Apocalipse Zumbi: 1984	74
Sanfonas	8	Maxima: árvores e substituição	42	As revisões de prova de 2025.1	75
Jogo da Velha	9	Maxima: mais exemplos da substituição	43	Critérios de correção: Ana Isabel	76
Contas expandíveis	10	Substituição: detalhes técnicos	44	Critérios de correção: Reginaldo	77
Contas expandíveis: um diálogo	11	“GUIs are antisocial”	45	Critérios de correção: Fernando	78
Set comprehensions	12	Porque não Lean?	46	Pedagogia do Decorar	79
Set comprehensions (2)	13	Porque Maxima?	47	Indícios fortes de cola	80
Set comprehensions (3)	14	Digital Literacy / Letramento Digital	48	Material sobre chutar e testar	81
Set comprehensions (4)	15	Prioridades	49	Chutar e testar	82
Set comprehensions (5)	16	Perguntas boas e ruins	50	In any group of 30 children...	83
Set comprehensions (6)	17	“Releia a dica 7”	51	Alfabetização e chutar-e-testar	84
O que os alunos não sabiam	18	Halmos	52	“Abaixo do nível deles”	85
Equações diferenciais	19	Bob e o sistema	53	O seu filho é burro	86
Feynman (1952, CBPF)	20	Dois jeitos de ser foda	54	Material sobre assombrações	87
A prova do Feynman	21	Mangas	55	Assombrações	88
Tipos de alunos	22	Process/object duality	56	Como lidar com assombrações?	89
Um curso sem assombrações	23	Derive como um macaco	57	Como lidar com assombrações (2)?	90
Precisamos de mais Patrícias e menos Anas Isabéis	24	Critérios de correção	58	Como lidar com assombrações (3)	91
Cálculo 2 é horrível	25	Variáveis e ‘=’	59	Assombrações do tipo ‘M’	92
Testes de nivelamento	26	Comece por um problema menor	60	Assombrações do tipo ‘R’	93
Testes de nivelamento: modelagem	27	“Vire-se”	61	Níveis de alfabetização	94
O teste de nivelamento 3	28	Justificativas ruins	62	Assombrações do tipo ‘T’	95
“É só notação”	29	Aipim	63	O problema do “é óbvio”	96
Métodos e memória: a regra da cadeia	30	Material sobre zumbis	64	Sobre estudar só Matemática	97
Level reduction	31	Eles vão me matar?	65	Discurso pras assombrações	98
Crystalline concepts	32	Eles vão me matar? (2)	66	Termos improvisados: três alunos imaginários	99
A regra da cadeia	33	Reajam!	67	Termos improvisados: três alunos imaginários (2)	100
“ f é uma função qualquer”	34	...que você não agiu de má fé, que você é burra sim?	68	Viciados em ChatGPT	101
Tipos de memória	35	Zumbis e processos	69	Bibliografia	102
AI is Destroying...	36	Precisamos de mais Patrícias e menos Anas Isabéis (de novo)	70		
The Gains and Pitfalls of Reification	37				

Links

Dedicatória

Para Walter Machado Pinheiro,
que não leu e não vai ler
documento nenhum, e se ler
não vai entender

Abstract (ou quase)

O convite do Wacs
(Wilhelm Alexander Cardoso Steinmetz):

Bom dia, Eduardo!

Tudo bem?

Eu, Abílio Rodrigues (da UFMG) e Guilherme Araújo Cardoso (da UFOP) estamos organizando umas palestras online no dia da lógica 2026, dia 14/01/2026.

O tema será: "O que é a lógica, afinal?"

Nós ficaríamos muito felizes em ter a sua contribuição em forma de uma palestra remota relacionada a este assunto. Você pode abordar esse tema tanto de uma perspectiva matemática, quanto de uma perspectiva filosófica, a seu critério.

Por favor, me informe se você teria disponibilidade.

Cordialmente,

Alex

Obs:

[Steinmetz2025]

[OchsEBL2025]

[OchsEmacsConf2024]

[OchsPanic2024]

A minha resposta:

Opa!!!

Quero sim!!!

A coisa que eu poderia apresentar melhor teriam mais a ver com as coisas de Educação Matemática que eu estou estudando, que é: qual é a ordem mais natural pra aprender as regras lógicas quando você chega em Cálculo sabendo só o método pra resolver $2 + x = 5$ mas não sabendo substituir x por 3 em $2 + x = 5$?

Eu não sou um especialista de verdade em Educação Matemática mas eu tou há meses baixando maniacamente livros e artigos sobre EM e seguindo referências bibliográficas e as pessoas com as quais eu conversei me disseram que acham que agora eu conheço a literatura sobre EM melhor do que elas... e umas das funções da minha apresentação seria apresentar essa literatura pra mais gente.

Você pode perguntar aí pro Zoto se eles gostam dessa idéia pra apresentação?

Obs: eu pus links pra alguns dos melhores livros e artigos aqui:
<https://anggtwu.net/2025.2-C2.html#o-metodo>

[[]] =),

Eduardo...

Apresentação

Dxô me apresentar...

Meu nome é Eduardo Ochs, eu trabalho num campus pequeno que a UFF tem em Rio das Ostras – o PURO, Pólo Universitário de Rio das Ostras, que é um lixo é tá infestado de **zumbis** (← mais sobre isso em breve)...

A minha área de pesquisa é (era?) principalmente Categorias, e eu passei anos empacado na minha pesquisa porque eu vi que na verdade eu não entendia direito os livros e artigos que eu deveria entender... e eu desempaquei quando eu comecei a encontrar técnicas pra fazer contas em vários níveis de detalhes em paralelo. Tem um exemplo à direita – ele é do melhor artigo que eu já escrevi, “On the Missing Diagrams in Category Theory (First-Person Version)” ([OchsMD]).

$$\begin{array}{ccc}
 f^*G & \leftarrow & G \\
 \downarrow & \longleftrightarrow & \downarrow \\
 H & \mapsto & f_*H \\
 \mathcal{E} & \begin{array}{c} \xleftarrow{f^*} \\ \xrightarrow{f_*} \end{array} & \mathcal{F}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\begin{array}{ccc} & G_1 & \\ G_2 \swarrow & & \searrow G_3 \\ & G_4 & \\ & & G_5 \end{array} \right) & \leftarrow & \left(\begin{array}{ccc} & G_1 & \\ G_2 \swarrow & & \searrow G_3 \\ & G_4 & \\ & & G_5 \\ & & & G_6 \end{array} \right) \\
 \downarrow & \longleftrightarrow & \downarrow \\
 \left(\begin{array}{ccc} & H_2 & \\ H_2 \swarrow & & \searrow H_3 \\ & H_4 & \\ & & H_5 \end{array} \right) & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} & H_2 \times H_4 & \\ H_2 \swarrow & & \searrow H_3 \\ & H_4 & \\ & & H_5 \\ & & & 1 \end{array} \right) \\
 \text{Set}^A & \begin{array}{c} \xleftarrow{f^*} \\ \xrightarrow{f_*} \end{array} & \text{Set}^B \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Apresentação (2)

Eu disse que eu desempaquei – *na minha pesquisa* – quando eu comecei a encontrar técnicas pra fazer contas em vários níveis de detalhes em paralelo...

Essas técnicas também me ajudaram muito nas aulas que eu dou no PURO, que são principalmente Cálculo 2 e Cálculo 3. Tem um exemplo “básico” à direita; ele é da introdução do “Internal Diagrams and Archetypal Reasoning in Category Theory”, que é um artigo meu de 2013 ([OchsIDARCT]).

Os alunos têm piorado muito, e da pandemia pra cá a gente começou a ter muitos, muitos, MUITOS alunos que acham que o objetivo de cada problema é só “chegar no resultado”, e “chegar no resultado o mais rápido possível”... então, por exemplo, pra eles a resposta pra uma questão como esta

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = ?$$

é só:

$$\frac{1}{2} \left(\arcsen(x) + x\sqrt{1-x^2} \right)$$

$$\begin{aligned} 2^{n+1} - 2^n &= 2^{1+n} - 2^n \\ &= 2 \cdot 2^n - 1 \cdot 2^n \\ &= (2 - 1) \cdot 2^n \\ &= 2^n \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2^{100} - 2^{99} &= 2^{1+99} - 2^{99} \\ &= 2 \cdot 2^{99} - 1 \cdot 2^{99} \\ &= (2 - 1) \cdot 2^{99} \\ &= 2^{99} \end{aligned}$$



$$2^{100} - 2^{99} = 2^{99}$$

Sanfonas

Nós que somos lógicos estamos acostumados com objetos que são como sanfonas com muita coisa estampada no tecido do fole. Quando esses objetos estão fechados a gente não vê nenhum detalhe do fole; quando a gente abre eles a gente vê tudo.

Em árvores de dedução é comum a barra dupla significar “aqui o fole tá fechado”, ou “aqui a gente tá omitindo alguns passos”, ou “aqui a gente tá omitindo alguns passos que são ‘óbvios’ em algum sentido”.

Os dois exemplos à direita são do “*On the Missing Diagrams in Category Theory (First-Person Version)*”, que fala bastante sobre essa noção de “óbvio”.

$$\frac{f : A' \rightarrow A}{(\times B)_1 f : A' \times B \rightarrow A \times B} \Rightarrow \frac{\frac{[p : A' \times B]^1}{\pi p : A'} \quad f : A' \rightarrow A \quad \frac{[p : A' \times B]^1}{\pi' p : B}}{f(\pi p) : A \quad \pi' p : B}}{(f(\pi p), \pi' p) : A \times B}}{(\lambda p : A' \times B. (f(\pi p), \pi' p)) : A' \times B \rightarrow A \times B}^1$$

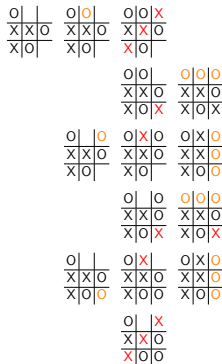
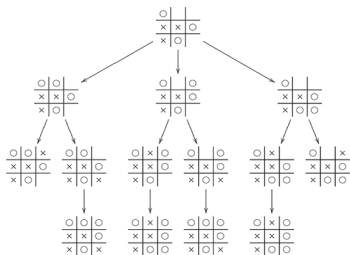
$$\frac{P \rightarrow Q}{P \wedge R \rightarrow Q \wedge R} \Rightarrow \frac{\frac{[P \wedge R]^1}{P} \quad P \rightarrow Q \quad \frac{[P \wedge R]^1}{R}}{Q \quad R}}{P \wedge R \rightarrow Q \wedge R}^1$$

Jogo da Velha

Um bom jeito da gente introduzir essa idéia pra pessoas que sabem pouca matemática é começar por “game trees”, e começar por um pedacinho da árvore do Jogo da Velha.

A figura no meio da página é do “Programming in Haskell, 2nd ed”, do Graham Hutton. O Hutton sabe usar bem programas de desenho que fazem setas bonitas, mas eu não; a figura mais à direita é uma tradução minha da figura dele pra uma que eu achei mais fácil de fazer em \LaTeX , em que os descendentes de cada nó são desenhados assim, $\begin{bmatrix} 1 & 1.1 & 1.1.1 \\ & 1.1.2 & \\ & 1.2 & 1.2.1 \end{bmatrix}$, e as cores indicam a última jogada e quem completou uma linha.

Daria pra desenhar a árvore toda, *mas a gente não quer*. Também daria pra apertar um botão que desativa as cores, ou apertar outros botões que mudam o jeito de desenhar a árvore.



Contas expandíveis

Pra gente é óbvio que dá pra expandir isso aqui

$$((6x^3)(7x^4))' = 294x^6$$

até chegar numa série de igualdades como a da direita, em que cada passo é fácil de justificar e a justificativa do passo (4) está escrita com todos os detalhes – esse passo usa a regra [RPot] com $n := 3$...

Mas pra muitos alunos isso é assustador, ELES NUNCA VIRAM ALGO TÃO ABSTRATO NA VIDA, e eles vão fazer de tudo pra deixar pra aprender isso depois, ou mais depois, ou mais depois ainda, ou se possível nunca.

Isso é uma “*pons asinorum*” bem conhecida do pessoal de Educação Matemática. Eu não conhecia nada da literatura sobre isso até um ano atrás, e um dos meus objetivos nessa apresentação vai ser mostrar um pouco disso pra vocês – com links pros melhores livros e artigos que eu encontrei.

$$\begin{aligned}
 ((6x^3)(7x^4))' &\stackrel{(1)}{=} \frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4)) \\
 &\stackrel{(2)}{=} (6x^3) \frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4) \frac{d}{dx}(6x^3) \\
 &\stackrel{(3)}{=} (6x^3) \frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4) \cdot 6 \cdot \frac{d}{dx}x^3 \\
 &\stackrel{(4)}{=} (6x^3) \frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4) \cdot 6 \cdot 3x^2 \quad \text{por } \underbrace{\left[\text{RPot} \right]}_{\left(\begin{array}{c} \frac{d}{dx} x^n \\ = n x^{n-1} \end{array} \right)} \quad [n := 3] \\
 &\stackrel{(5)}{=} (6x^3) \frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)(18x^2) \\
 &\stackrel{(6)}{=} (6x^3) \cdot 7 \frac{d}{dx}x^4 + (7x^4)(18x^2) \\
 &\stackrel{(7)}{=} (6x^3) \cdot 7 \cdot 4x^3 + (7x^4)(18x^2) \\
 &\stackrel{(8)}{=} (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) \\
 &\stackrel{(9)}{=} (6x^3)(28x^3) + 126x^6 \\
 &\stackrel{(10)}{=} 168x^6 + 126x^6 \\
 &\stackrel{(11)}{=} 294x^6
 \end{aligned}$$

Contas expandíveis: um diálogo

Nesta historinha os personagens são o Bob e o Fessôr. O Bob tá aprendendo derivada, e ele e o Fessôr têm esse diálogo aqui:

B: Eu tou tentando fazer esse exercício aqui, “calcule $\frac{d}{dx}(x^2 + x^{20})$ ”, e não tou conseguindo... você pode me dar alguma dica?

F: Usa a regra da derivada da soma!

B: Tá... ó, eu cheguei a $2x + \frac{d}{dx}x^{20}$ mas não consigo sair daí.

F: Como você chegou ao $2x$?

B: Eu lembrei que o livro mostra que $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$.

F: Logo depois que o livro mostra isso esse mostra uma fórmula que generaliza isso... dá uma olhada?

B: ‘ $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ ’?

F: Isso! Tenta usar essa fórmula!

B: Consegui! Dá $2x + 20x^{19}$!

Será que a gente consegue expandir isso e fazer uma animação que mostre o que cada um fala e mais o que cada um tem na cabeça? Eu acho que sim, e acho que a gente pode usar contas com ‘?’ , como à direita... mas eu **ainda** não tentei fazer essas figuras e animações, elas me parecem bem mais complicadas do que as do animação do “Example 6” do slide anterior...

(Veja também [Sfard, p.277])

$$(1) \quad \frac{d}{dx}(x^2 + x^{20}) = ?$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx}(x^2 + x^{20}) = \frac{d}{dx} ? + \frac{d}{dx} ?$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 + x^{20}) &= \frac{d}{dx} ? + \frac{d}{dx} ? \\ &= ? + \frac{d}{dx} ? \\ &= ? + ? \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 + x^{20}) &= \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}x^{20} \\ &= 2x + \frac{d}{dx}x^{20} \\ &= 2x + ? \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 + x^{20}) &= \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}x^{20} \\ &= 2x + \frac{d}{dx}x^{20} \\ &= 2x + ? \end{aligned}$$

$$\text{por } \frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 + x^{20}) &= \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}x^{20} \\ &= 2x + \frac{d}{dx}x^{20} \\ &= 2x + 20x^{19} \end{aligned}$$

$$\text{por } \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\text{por } \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Set comprehensions

$$\begin{aligned}
 \{a \in \{2, 3, 4\} \mid a^2 < 10\} &= \underbrace{\{a \in \{2, 3, 4\}\}}_{\text{gen}} \mid \underbrace{a^2 < 10}_{\text{filt}} \\
 &= \underbrace{\{a \in \{2, 3, 4\}\}}_{\text{gen}}; \underbrace{a^2 < 10}_{\text{filt}}; \underbrace{a}_{\text{expr}} \\
 &= \{4, 9\}
 \end{aligned}$$

```

for a=2,4 do
  if a^2<10 then
    print(a)
  end
end
  
```

$$\begin{aligned}
 \{10a \mid a \in \{2, 3, 4\}\} &= \underbrace{\{10a\}}_{\text{expr}} \mid \underbrace{a \in \{2, 3, 4\}}_{\text{gen}} \\
 &= \underbrace{\{a \in \{2, 3, 4\}\}}_{\text{gen}}; \underbrace{10a}_{\text{expr}} \\
 &= \{20, 30, 40\}
 \end{aligned}$$

```

for a=2,4 do
  print(10*a)
end
  
```

$$\underbrace{\{x \in \{1, \dots, 5\}\}}_{\text{gen}}; \underbrace{\{y \in \{x, \dots, 6-x\}\}}_{\text{gen}}; \underbrace{(x, y)}_{\text{expr}} = \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

Set comprehensions (4)

Eu uso set comprehensions nos meus cursos desde 2010 e bolinha. Eu tenho um material com as idéias dos últimos slides e um montãããã de exercícios como estes aqui,

$$\begin{aligned} \{x \in \{1, 2\}; (x, 3 - x)\} &= ? \\ \{x \in \{1, 2, 3\}; (x, 3 - x)\} &= ? \\ \{x \in \{0, 1, 2, 3\}; (x, 3 - x)\} &= ? \\ \{x \in \{0, 0.5, 1, \dots, 3\}; (x, 3 - x)\} &= ? \\ \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3\}^2 \mid y = 3 - x\} &= ? \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3 - x\} &= ? \end{aligned}$$

...que costumava servir pros alunos relembrem coisas como a equação da reta, pra eles começarem a treinar como fazer exercícios em grupo, pra eles verem como aproximar figuras com infinitos pontos por figuras como um número finito de pontos, e pra um monte de outras coisas...

E aí quando um aluno fazia um passo errado como o da terceira igualdade daqui,

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 - 16} + 5 \\ &= \sqrt{x^2 - 4^2} + 5 \\ &= x - 4 + 5 \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

...eu costumava dizer: vamos desenhar esses dois conjuntos daqui,

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x^2 - 4^2} + 5\} &= ? \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 4 + 5\} &= ? \end{aligned}$$

e eles viam que o primeiro era um semicírculo e o segundo era uma reta, e eles entendiam o que eles tinham errado.

Hoje em dia quando eu mostro isso eles não entendem **NADA**.

Set comprehensions (5)

De [VanHiele, p.120]:

In this guided learning process, leading from intuition to first abstraction, the concept of 'set' is of no use. 'Set' is the terminal point of an abstraction: It is the loosest link facilitating "counting." It is easy to see that 'set' has no intuitive contents by consulting the textbooks that introduce sets. Some speak of "elements with a common property." Indeed, the only real common property is that they all are elements of the same set. Other textbooks start with a set of stamps or a set of boulders. This also creates confusion, for "collecting" does not play a part in a mathematical set. The identity of the elements of such sets is often problematic, as well. A concept is likely to be element of a set if it is defined in such a way that it can be recognized. This condition is necessary and sufficient. But sets used as examples in textbooks almost always have elements that are very difficult to recognize.

Quando a gente começa com set comprehensions os alunos passam a ver conjuntos como objetos que são *construídos*, e que são *ferramentas*...

Set comprehensions (6)

Opiniões dos meus coleguinhas sobre set comprehensions, em 2018... link:

[http://anggtwu.net/
2025-5-minutos-da-p-do-seu-tempo.html](http://anggtwu.net/2025-5-minutos-da-p-do-seu-tempo.html)

Reginaldo:

Eduardo, sinceramente, vc acha que as pessoas tem tempo ou interesse em ler esse seu material de GA? Essa quinta não vamos simplesmente discutir os horários de MD e GA, como vc colocou. Na minha visão vamos nos reunir pra perder 1h do dia pra discutir um problema que VC criou e que sozinho poderia resolver, bastaria simplesmente seguir um material regular, como diversas vezes já te recomendamos fazer. E o pior disso tudo é que, enquanto perdemos essa 1h, que poderíamos estar usando em outros projetos, vc estará viajando para um congresso, francamente...

Rômulo:

Eu dedico a p_____ do meu tempo para abrir espaço no conteúdo da minha disciplina e revisar o que devia ter sido dado em GA.

Eu dediquei 30 min da p_____ do meu tempo para olhar o material complementar disponibilizado.

Faço e fiz isso em consideração aos estudantes.

Minha opinião é de que o tempo gasto com a familiarização com a linguagem vai faltar para dar o conteúdo e por fim não beneficia o aprendizado continuado dos alunos.

O que os alunos não sabem

Então: os alunos estavam chegando nas minhas turmas de Cálculo 2 “sem saberem nada”, e eu comecei a documentar isso, dando testes de nivelamento e fotografando esses testes e as provas deles e relendo esses testes e provas dezenas de vezes pra entender os erros...

...e eu acabei descobrindo que eles “*não sabiam*” coisas que eu achava “*que era impossível alguém não saber*”.

Lembre que o título desta apresentação é:

Lógica pra pessoas que sabem resolver $2 + x = 5$ mas não sabem substituir x por 3 em $2 + x = 5$

A coluna do meio deste slide é do [Hewitt1, p.6] –

“**Arbitrary and Necessary** Part 1: a Way of Viewing the Mathematics Curriculum”. Repare no “his actions are informed by a memory of something to ‘do’”...

rightfully returns to the realm of awareness. All too often, however, a student just accepts this received wisdom and treats it as something to be memorised or, indeed, forgotten

In a lesson I observed, some 14-15-year-olds were working on solving simultaneous equations, and one student was having difficulties with re-arranging an equation. He had written:

$$x - y = 2$$

$$y = 2 - x$$

I asked him about the ‘-’ sign in front of the y and his response was to re-write the second equation as:

$$y = 2 + x$$

I said that I felt he had done the correct thing when taking away the x , but that there was still a ‘-’ sign in front of the y . I wrote a ‘-’ in front of the y in the original second equation:

$$-y = 2 - x$$

He then changed both the subtractions to additions saying “two negatives make a positive”:

$$+y = 2 + x$$

This is one example of a student remembering some received wisdom – “two negatives make a positive” – but not remembering the situations in which this received wisdom is appropriate. This is a phrase he has remembered, but he has not got the awareness to accompany the memorised phrase. Rather than basing his actions on a mathematical awareness of inverse, his actions are informed by a memory of something to ‘do’ when there are two negatives present

Transformations of equations are concerned with what is necessary and a teacher providing such a phrase turns such awareness into received wisdom which a student may then try to memorise. The problem with memory is that it gives the opportunity to forget. In this case, the phrase is remembered, but the associated situation it relates to (which is relatively complex) is forgotten.

Muitos alunos estão chegando em Cálculo 2 com a certeza absoluta de que *Matemática é decorar métodos*, e acho que eles acham que “entender” e “deduzir” é só pra gênios, e que eles não têm tempo pra isso...

De [SchoenfeldWhenGood, p.7]:

Belief 3: Only geniuses are capable of discovering, creating, or really understanding mathematics. Corollary: Mathematics is studied passively, with students accepting what is passed down “from above” without the expectation that they can make sense of it for themselves.

De [EngelbrechtBergsten, p.140]:

It has also been observed that students who, for example, solve an equation correctly, sometimes do not know what to do if the task is to decide if a given number is a solution to the same equation, indicating a poor conceptual understanding of equations.

Equações diferenciais

No final do curso de C2 a gente vê um pouco de equações diferenciais, e eu via que 70% dos alunos não entendiam certas idéias que deveriam ser básicas... e **desistiam de entender**.

Considere esse problema aqui:

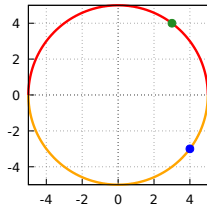
Encontre a solução geral da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Depois encontre a solução particular que passa pelo ponto $(3, 4)$ e a que passa pelo ponto $(4, -3)$. Teste as suas respostas.

A solução particular que passa pelo $(3, 4)$ é o semicírculo de cima, e a que passa pelo $(4, -3)$ é o semicírculo de baixo.

70% dos alunos até entendiam que o método às vezes dava uma solução “positiva” e uma “negativa”, mas eles **não faziam idéia** de como testar as duas pra ver qual era a que passava por um certo ponto, não faziam idéia do que era “testar a solução” – e **erravam nas contas do teste de propósito pra fingir que tudo tinha dado certo**.

Se eu mantivesse o critério de correção óbvio esses alunos só perderiam 1.0 numa questão de 5.0 pontos – e eles nunca teriam motivação suficiente pra aprender algo importante mas difícil.

Eu queria encontrar critérios de correção que medissem o quanto eles sabiam, e não quantos % dos problemas-padrão eles conseguiam resolver...



...e eu queria que esses critérios fizessem eles **aprenderem** certas coisas **rápido** ao invés de deixarem elas **sempre pra depois**. Os critérios estabeleceriam **prioridades**.

Feynman (1952, CBPF)

De [FeynmanBrinc]:

Depois de muito investigar, descobri que os alunos tinham memorizado tudo, mas não sabiam o que aquilo significava. Quando ouviam dizer “luz que é refletida de um meio com um índice”, não sabiam que isso significava um material como a água. Eles não sabiam que “o sentido da luz” é o sentido em que o sujeito vê alguma coisa quando está olhando para ela, e assim por diante. **Tudo estava perfeitamente decorado**, mas significado nenhum fora absorvido. Assim, se eu perguntasse “O que é ângulo de Brewster?”, estaria entrando no computador com a senha correta. Mas se dissesse “Olhem para a água”, nada acontecia — não havia resposta ao comando “Olhem para a água!”

Depois assisti a uma aula na escola de engenharia. A aula foi mais ou menos assim: “Dois corpos... são considerados equivalentes... se torques iguais... gerarem aceleração igual. Dois corpos

são considerados equivalentes se torques iguais gerarem aceleração igual.” Os alunos estavam lá sentados, escrevendo o ditado, e, quando o professor repetia a sentença, verificavam se tinham escrito tudo certo. E aí escreviam a próxima sentença e por aí vai. Eu era o único que sabia que o professor estava falando sobre corpos com o mesmo momento de inércia, e era difícil concluir isso.

Eu não conseguia vislumbrar como eles iam aprender com aquele método, fosse qual fosse o conteúdo. Ali estava o professor, falando de momento de inércia, mas não havia discussão sobre como varia a dificuldade de abrir uma porta quando do outro lado dela se põe um peso mais perto ou mais longe das dobradiças — nada!

(...)

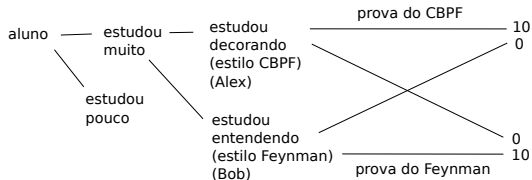
Dei um curso de métodos matemáticos aplicados à física na escola de engenharia, durante o qual tentei ensinar os

alunos a resolver problemas por tentativa e erro. É uma coisa que eles normalmente não aprendem, então comecei com alguns exemplos simples de aritmética para introduzir o método. Fiquei surpreso porque apenas 10% dos alunos resolveu a primeira tarefa proposta. Então fiz uma grave preleção dizendo que eles **precisavam tentar** em vez de ficarem apenas sentados me vendo fazer.

Depois da aula, alguns alunos vieram a mim numa pequena delegação e disseram que eu não entendia a formação deles, **que eles eram capazes de estudar sem resolver problemas, que já tinham aprendido aritmética e que as coisas que eu estava dizendo estavam abaixo do nível deles**.

Então continuei com o curso, e, por mais complexa ou avançada que a matéria estivesse ficando, eles nunca me entregaram nenhum trabalho. Claro que percebi o que era aquilo: eles não conseguiam!

A prova do Feynman



O Alex pensa:
preciso aprender
outros jeitos de
estudar!

Alunos que estudam entendendo

Alunos que estudam decorando

alguns viram

Assombrações
(viciados em
ChatGPT?)

Tipos de alunos

Eu costumo preparar os meus cursos pensando na “demografia” das turmas – quais vão ser os tipos de alunos que vão aparecer naquela turma, e quantos alunos eu vou ter de cada tipo.

As duas colunas à direita são de abril/2025 – “Resposta ao ofício da Engenharia de Produção”. Deixa eu contar um pouco da história desse texto...

Em ago/2024 os alunos fizeram umas reclamações contra mim na coordenação do curso de Engenharia de Produção. A EP preparou um ofício e mandou pro meu departamento, o RCN. Eu só soube da existência dessas reclamações e desse ofício 5 meses depois; eu pedi cópia dele pra poder ler e responder e o chefe do RCN na época, o Fabinho, me disse “não vou te mandar”. Eu só consegui a cópia mais 3 meses depois, e escrevi uma resposta grande, detalhada e cheia de links, e deixei pública e mandei pra EP e pro RCN.

Depois disso a demografia dos cursos mudou muito – TALVEZ por causa do ChatGPT – e agora os nossos cursos mais básicos têm pelo menos 50% de **assombrações**.

Obs: em 2025.2 eu dei uma optativa de λ -Cálculo pra uma turma com 80% de assombrações e Cálculo 3 numa turma em que as assombrações não vinham nas aulas, e as aulas eram como na foto do próximo slide.

- O aluno A já estudou Cálculo 2 pelo material do MIT,
- O aluno B fez Cálculo 2 no CEDERJ e passou, mas não conseguiu dispensa de disciplina,
- O aluno C também não conseguiu dispensa de disciplina, e ele aprendeu integração e EDOs em uma outra universidade, com o Professor Fulano, que é infinitamente melhor do que eu, mas o Professor Fulano não tem página na internet e o aluno C não guardou nada do material dos cursos dele, e **portanto** esse aluno C não pode me mostrar nada sobre como era o curso do professor Fulano,
- O aluno D fica perdido nas aulas e deixa pra estudar em casa por vídeos do Youtube,
- O aluno E trabalha, chega super atrasado nas aulas em que vem, e acha que os seus erros nas provas têm que ser considerados como erros pequenos porque afinal o objetivo do curso é inserir os estudantes no mercado de trabalho,
- O aluno F responde as questões da prova com umas contas que são 50% umas coisas incompreensíveis e 50% uns erros gritantes, e na vista de prova ele fica berrando “MAS TÁ CERTO, PORRA!!!” e dizendo que eu tou de marcação com ele,
- O aluno G fez Cálculo 1 com o Antônio, e **segundo ele** o Antônio tem um método de correção que é o melhor do mundo, em que se o aluno vem na vista de prova e justifica cada passo que ele, Antônio, não tinha entendido então ele, aluno, ganha um monte de pontos. Aí na vista de prova eu peço pra esse aluno G justificar um passo errado, e o diálogo é o seguinte:
 - Eu aprendi esse método no Youtube!
 - Onde? Você pode me dar o link?
 - Eu não lembro!
 E esse aluno considera que conseguiu justificar o seu passo, e que **portanto** ele merece um montão de pontos.
- O aluno H sabe que teve um ensino médio péssimo mas é super dedicado, faz perguntas sempre que precisa e estuda o que a gente recomendar.
- O aluno I é parecido com o aluno H mas ele geralmente ignora recomendações e estuda pelos materiais que ele escolhe.

Todos esses personagens são inspirados em alunos que eu já tive. Os alunos parecidos com os personagens A, B e C são raros, mas os alunos parecidos com os personagens D, E, F, G, H e I são muito comuns...

Um curso sem assombrações

Uma foto da minha turma de Cálculo 3 em 2025.2...



Precisamos de mais Patrícias e menos Anas Isabéis

Antigamente todo mundo tinha medo dos cursos com muita Matemática, como Engenharia de Produção e Ciência da Computação, e as pessoas só entravam nesses cursos quando elas sabiam que “levavam jeito pra Matemática”... e elas descobriam que levavam jeito pra Matemática na escola, quando elas viam que conseguiam descobrir muita coisa sozinhas.

Aí a educação piorou muito, e primeiro começaram a aparecer nos nossos cursos alguns alunos como os dessas historinhas daqui – a do “professor, qual é a fórmula?”, e a do Gênio da Turma... link:

Slogans#01:10

E de uns tempos pra cá os alunos que queriam só decorar fórmulas se tornaram tão numerosos que eles nem reparam mais que alguns colegas deles já conhecem algumas técnicas pra descobrir os métodos sozinhos... e aí acontecem coisas como essa reclamação daqui,

<https://anggtwu.net/>

2025-oficio-da-EP-resp.html#macaco

que a coordenação não fazia idéia de como responder e repassou pra mim.

A GENTE PRECISA DE TODA AJUDA QUE PUDER, e eu tou conversando sobre isso com tipo *todo mundo*, porque eu sei que muitas das pessoas que podem me ajudar estão espalhadas por aí, disfarçadas de pessoas comuns...

...e nisso a Patrícia do Hortifruti Sabor da Fruta virou uma referência pra mim, porque a gente sempre conversava quando eu ia lá comprar coisas com a minha catchorrinha, e um dia eu contei essas histórias dos meus alunos pra ela e eu descobri que ela já tinha trabalhado como professora de alfabetização, e ela me disse pra eu ler os livros da Emília Ferrero, e eu achei eles fantásticos, e durante muito tempo eles foram os únicos livros sobre Educação EM PORTUGUÊS que eu conhecia e que eu achava muito bons e muito úteis pro que eu tava fazendo...

O meu departamento tá um lixo, né? A gente tem a Ana Isabel, que todo mundo do campus considera como a nossa grande especialista em Educação, e o Reginaldo, que é menos famoso mas que fez licenciatura... e em 2025.1, que foi o semestre em que eu disse pra todos os meus alunos fazerem requerimentos de revisão de prova...

...a Ana Isabel só me recomendou um livro que eu achei uma **BOSTA**, e o Reginaldo não recomendou nada, só mandou um “O professor Eduardo **já deveria saber**”...

Pensa na seguinte situação: você tá numa mesa com um monte de gente e você fala pra pessoa do seu lado “**passa o sal?**”, e

ela responde “**NÃO**”. Isso é meio inconcebível, né? Por mais que as pessoas tenham éticas um pouco diferentes acho que todo mundo vai concordar que pega incrivelmente mal responder “NÃO!” quando o seu vizinho de mesa te pede “passa o sal?”...

Eu vou usar a Patrícia como símbolo, e vou usar o termo “Patrícia” pra me referir às pessoas que acham natural as pessoas trocarem idéias, compartilharem conhecimento e se ajudarem, e vou usar o termo “Ana Isabel” pra me referir às pessoas que acham natural não “passar o sal” pra um colega de departamento que está com dificuldades EM ALGO EM QUE VOCÊ É ESPECIALISTA.



Versão completa:

Cálculo 2 é horrível

Obs: este slide é só pra quem já estudou Cálculo...

$$\begin{aligned}
 \int \cos x^2 (2x) dx &= \int \cos u du \\
 \int \underbrace{\cos x^2}_u \underbrace{(2x) dx}_{\frac{du}{dx}} &= \int \cos \underbrace{u}_{x^2} \underbrace{\frac{du}{dx}}_{2x} dx \\
 \int \cos x^2 (2x) dx &= \int \sin x^2 \frac{du}{dx} dx \\
 &= \int \sin u du \\
 &= -\cos u + C \\
 \int_{x=a}^{x=b} \cos x^2 (2x) dx &= -\cos x^2 \Big|_{x=a}^{x=b} \\
 &= -\cos b^2 + \cos a^2 \\
 &= \cos a^2 - \cos b^2 \\
 &= \int_{u=a^2}^{u=b^2} \cos u du
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \int f'(g(x)) g'(x) dx &= \int f'(u) du \\
 \int \underbrace{f'(g(x))}_u \underbrace{g'(x) dx}_{\frac{du}{dx}} &= \int f'(\underbrace{u}_{g(x)}) \underbrace{\frac{du}{dx}}_{g'(x)} dx \\
 \int f'(g(x)) g'(x) dx &= \int f(g(x)) \frac{du}{dx} dx \\
 &= \int f(u) du \\
 &= \int f'(u) du \\
 \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x)) g'(x) dx &= f(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\
 &= f(g(b)) - f(g(a)) \\
 &= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du
 \end{aligned}$$

Testes de nivelamento

Em cada semestre a partir de 2024.1 eu dava pelo menos um dos testes TN1, TN2 e TN3 abaixo. Os resultados eram **catastróficos**, e depois a gente passava pelo menos uma hora discutindo pra eu tentar entender o que os alunos sabiam e o que não sabiam – e o que eles conseguiam descobrir (ou pelo menos entender) e o que não.

Este teste é só pra eu descobrir o quanto vocês sabem de certas técnicas de Cálculo 1 – eu vou usar as informações daqui pra decidir como organizar o curso.

Por favor escrevam:

- seu nome legível (em todas as folhas),
- com quem você fez GA, C1 e Prog1 no semestre em que você passou em cada uma, e em qual semestre foi,
- as respostas dos exercícios e tudo que você conseguir fazer pra tentar resolver eles.

TN1) Represente graficamente:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{quando } x \leq 2 \\ x - 2, & \text{quando } 2 < x \end{cases}$$

TN2) $\frac{d}{dx} f(\sin(x^4) + \ln x) = ?$

TN3) Represente o limite abaixo como $f'(a)$. Quem são f e a ?

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(1 + \varepsilon)^{10} - 1}{\varepsilon}$$

Obs: o TN3 é cópia exata de um exercício do Stewart...

StewPtCap2p62 (p.133) Definição da derivada

StewPtCap2p67 (p.138) Exercícios 33–38

Dicas (que você não é obrigado a usar!):

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

$$f'(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) \Big|_{x=a}$$

Testes de nivelamento: modelagem

Em C1 e GA os alunos deveriam aprender a resolver problemas em português, como esse aqui...

Dê a equação da reta que passa pelos pontos $(1, 2)$ e $(3, -4)$ e confira o seu resultado.

Mas isso tava tão *obviamente acima* do nível dos meus alunos de C2 que eu nem dei um teste de nivelamento pra confirmar que eles não sabiam como lidar com problemas assim. Deixa eu explicar.

Uma solução pra ele em português começa assim: “sejam $P = (1, 2)$, $Q = (3, -4)$, e seja $f(x) = ax + b$ uma reta que passa pelos pontos A e B ”.

Pros meus alunos de Cálculo 2 isso é apavorante, porque tá cheio de operações que eles não entendem e que o texto da solução trata como óbvias, mas que são conceitos tão complicadas quanto “variável” e “=”. tem o “seja”, tem a “escolha de nomes” como P , Q , f , a e b pra certos objetos do problema, tem o “que passa pelos pontos A e B ”, que a gente usa pra encontrar os valores de a e b ...

Eu **acho** que é mais fácil entender a solução em português se a gente começa também com a solução em Maxima – à direita – e a gente compara a solução em português com a solução em Maxima.

Na solução em Maxima fica claro como o estado do sistema muda a cada passo, e várias perguntas são naturais... por exemplo, a gente pode responder a pergunta “eu poderia ter usado outros nomes ao invés de P , Q e f ?” trocando os nomes P , Q e f , que são “bons” no sentido de que seguem as convenções dos livros, por nomes como “Drácula”, “mãe”, “repolho” e “deus”, que são nomes “ruins”, mas o computador não sabe disso...

Eu **acho** que pros alunos que estão chegando nas minhas turmas de C2 hoje em dia o problema em português à esquerda fica mais bem fácil de resolver se a gente acrescenta instruções como estas: “Comece tentando fazer um programa em Maxima que funcione. Não se preocupe se você usou nomes bons ou não. Não se preocupe se o seu problema tem linhas desnecessárias ou não. Consulte os programas tais e tais pra ter exemplos de comandos que funcionam. Depois tente traduzir a sua solução pra ‘Português com Matematicuês’ seguindo o estilo dos exemplos tais e tais. *Esta é a parte mais difícil, porque o significado dos termos como “seja” e “que passa pelos pontos tais e tais” não está explicado precisamente em lugar nenhum – você vai ter se virar.*”

```
(%i1) P : [1,2]$
(%i2) Q : [3,-4]$
(%i3) f(x) := a*x + b$
(%i4) eq1 : f(P[1]) = P[2];
(%o4)
      b + a = 2

(%i5) eq2 : f(Q[1]) = Q[2];
(%o5)
      b + 3 a = -4

(%i6) ab : solve([eq1,eq2], [a,b]);
(%o6)
      [[a = -3, b = 5]]

(%i7) subst(ab, f(x));
(%o7)
      5 - 3 x

(%i8) define(g(x), %);
(%o8)
      g(x) := 5 - 3 x

(%i9) g(1);
(%o9)
      2

(%i10) g(3);
(%o10)
      -4
```

O teste de nivelamento 3

$$\frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=a} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon}$$

$$\frac{d}{dx} x^{10} \Big|_{x=1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(1+\epsilon)^{10} - 1^{10}}{\epsilon}$$

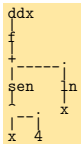
“É só notação”

O TN2 era assim:

$$\frac{d}{dx} f(\sin(x^4) + \ln x) = ?$$

Os alunos achavam que isso era “a derivada da função $\sin(x^4) + \ln x$ ”, e que o f “era só notação”.

No diagrama à direita – $\frac{1}{3} \xrightarrow{1} \frac{2}{4}$ – eles conheciam a fórmula 1 e conseguiam usar a regra da cadeia pra chegar na 4, mas não entendiam nem as fórmulas 2 e 3 e nem isso aqui:



Talvez eles não entendessem a idéia de “ f é uma função qualquer”...

$$\begin{array}{ccc} \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = \right) & \rightarrow & \left(\frac{d}{dx} f(42x) = \right) \\ f'(g(x))g'(x) & & f'(42x) \cdot 42 \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \left(\frac{d}{dx} \sin(g(x)) = \right) & \rightarrow & \left(\frac{d}{dx} \sin(42x) = \right) \\ \cos(g(x))g'(x) & & \cos(42x) \cdot 42 \end{array}$$

Métodos e memória: a regra da cadeia

Uma coisa que eu descobri era que os meus alunos de Cálculo 2 tinham uma lembrança beeeem vaga de que a fórmula da Regra da Cadeia era esta,

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

E em Cálculo 1 eles tinham decorado algum método que era parecido com isso aqui,

$$\underbrace{\frac{d}{dx} f}_{\text{função de fora}} \underbrace{(g(x))}_{\text{avaliada na função de dentro}} = \underbrace{f'}_{\text{derivada na função de fora}} \underbrace{(g(x))}_{\text{avaliada na função de dentro}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{derivada da função de dentro}}$$

e que servia pra fazer contas como esta,

$$\frac{d}{dx} \sin(42x) = \cos(42x) \cdot 42$$

mas no método que eles tinham aprendido – e que já tinham esquecido quase que totalmente – eles tinham que guardar na memória quais era “a função de fora”, “a função de dentro”, “a derivada da função de fora” e a “derivada da função de dentro”...

...eles não tinham nenhum truque pra escrever num cantinho do papel quais eram essas quatro funções, então esse método só funcionava quando eles lembravam o método tão bem que sobrava espaço mental suficiente pra um pouco de “memória de trabalho” (“working memory”) pra eles lembrarem as quatro funções.

Esse método acabava só funcionando em casos muito simples, e falhava em vários casos mais complicados, como:

- $\frac{d}{dx} \sin(\tan x)$, em que eles não conseguiam escolher o melhor modo de escrever a “derivada da função de dentro”,
- $\frac{d}{dx} \sin(\cos 42x)$, em que eles não conseguiam escolher se a “função de fora” seria $\sin(u)$ ou $\sin(\cos u)$,
- $\frac{d}{dx} \sin(\cos(\tan(42x)))$, em que mesmo se eles conseguissem escolher qual era a “função de fora” e a “função de dentro” eles não conseguiriam calcular as derivadas das duas de cabeça – e eles não sabiam os truques pra calcular as derivadas em outra parte do papel,
- $\frac{d}{dx} f(x^4)$, que eu vou discutir daqui a pouco.

A figura com underbraces à esquerda é do [Stewart7, p.181], Os alunos tinham aprendido uma “level reduction” dela.

Level reduction

O trecho abaixo é de [TallLongTerm, pp.58–59].

Sobre níveis de van Hiele, veja [VanHiele] e [GutierrezJaimeEV].

In geometry, this development is formulated in terms of successive **van Hiele levels**. For instance, at the first visual level, squares and rectangles are seen as being different, but at the next level, a square is a special case of a rectangle. Likewise in arithmetic and algebra, expressions that represent different processes are later seen as representing the same **crystalline concept**. As the number systems become more sophisticated through whole numbers, fractions, signed numbers, infinite decimals, real numbers, and complex numbers, the crystalline structure sub-

tly changes.

In practice, new ideas are often introduced by learning how to carry out procedures. For example, in the United States, the acronym “FOIL” is introduced to calculate $(a + b)(c + d)$ by multiplying the first elements in the brackets $a \times c$, then the outside elements $a \times d$, then the inside elements $b \times c$, then the last elements $b \times d$. We also teach a more subtle technique to factorize an expression such as $x^2 + 5x + 6$ by seeking two numbers whose product is 6 and sum is 5.

This may have the unintended consequence that what is happening is the translation of one expression into a different expression, without realizing that these are just different ways of repre-

senting the same underlying **crystalline concept**. In this case, **level reduction** has occurred in which the student has learnt to carry out the procedures without grasping the rich flexibility of the mathematical structure.

In the United States, there are many examples of level reduction in teaching college algebra where textbooks are laid out using various devices such as color coding text or placing significant statements in boxes to remind the learner what should be remembered to be able to pass the test. As a result, there are more and more disconnected ideas to be remembered that increase the longer-term likelihood of overload and error.

Crystalline concepts

De [TallCrystalline, p.5]:

Relationships with other theoretical frameworks

The term “crystalline” first arose in a conversation with Anna Sfard in my home in 1990, as we discussed her use of the term “condensation” to refer to the ability to deal with a given process in terms of input/output without necessarily considering its component steps ([SfardDualNature]). I suggested that the metaphor of “condensation” changes a gas into a liquid that could be put in a container and poured. I put forward the idea that this metaphor could be extended to speak of “crystallization” into a solid object that could be manipulated. At the time, there were already competing terms for the process of transforming mental processes into objects, including “reification” ([SfardDualNature]) and “encapsulation” ([DubinskyReflAbs]), so a further term was hardly welcome.

I now use the term “crystalline” with a far wider meaning than the encapsulation of a process as an object, just as Dubinsky ([CzarnochaDubinsky]) recognized that, in his APOS theory, an object could be encapsulated not only from a process, but also from a schema. (...)

Tem um montão de “frameworks” que nos ajudam a pegar um conceito matemático e encontrar o que “é” a essência dele... e o [TallCrystalline], à esquerda, discute vários desses frameworks a partir da página 5 dele.

Eu não conhecia nada desse material até pouco tempo atrás, e *por enquanto* o meu modo preferido de definir o que é a essência de um conceito matemático é a idéia de “esqueleto” o que eu explico nas seções 1 e 2 do [OchsMD]... o “esqueleto” de uma entidade matemática como uma definição ou uma demonstração é a figura que eu “preciso lembrar” – e a partir desse esqueleto eu consigo reconstruir todos os outros detalhes.

A regra da cadeia

O que era a regra da cadeia pra esses alunos?
Eles sabiam que a **fórmula** era essa,

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

e que isso valia “**pra qualquer f e qualquer g** ”...
Será que eles pensavam de algum destes jeitos?

$$\begin{array}{l} \text{[RC1]} \quad \forall f, g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}). \frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \\ \text{[RC2]} \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}). \frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \\ \text{[RC3]} \quad \forall f \in C^1(J, \mathbb{R}). \forall g \in C^1(I, J). \frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \end{array}$$

Variáveis livres são um conceito bem complicado – pra mim
— e eu geralmente me livro delas usando quantificadores...

Na **[RC3]** aparecem duas variáveis livres novas,
os intervalos I e J ...

O que esses alunos viram em C1?
Será que eles viram teoremas e demonstrações? **Talvez sim, ó:**

Reginaldo: O Edwin por exemplo já deu cálculo 1.
Duvido q ele tenha dado uma única ideia de demonstração no curso todo. Não deve nem ter provado q se a função tem derivada zero ela tem q ser constante.
Quem dirá o TVM.

Mas como a gente entende os teoremas de C1 sem entender **caso particular**?

“ f é uma função qualquer”

De [PuigRojano, p.216] (2004):

As one follows the developments of the solutions in the examples just given, in the Trattato di Fioretti (abbaco) and in De Numeris Datis, one observes that these mediaeval works correspond to two clearly differentiated levels of language, but one also observes that a characteristic that they have in common is the fact that **in them there is no systematic treatment of the operations performed on the terms (of the equation) that involve unknown quantities. That is, there is no operation on the unknown.** An indication of operation between literals that appears in De Numeris Datis is the juxtaposition of characters to indicate a sum of magnitudes, but this symbolisation of an operation does not go beyond the level of the expression, that is, it is not translated into syntax rules applied to these new symbols.

De [FillojRojano, p.19] (1989):

These observations make it feasible to hypothesize certain lines of evolution from arithmetical to algebraic language which correspond to the notions and the forms of representation of the objects and operations involved in the changeover. **The changes which the learner has to make to gain access to algebraic language can then be visualized, on each of these lines, as cut-points separating one kind of thought from the other.**

One of these cuts is particularly interesting for the theme of problem solving: it is suggested by an analysis of the strategies and methods of solving systems of equations found in the pre-symbolic algebra textbooks of the 13th, 14th and 15th centuries...

Tipos de memória

De [Hewitt2] (“*Arbitrary and Necessary Part 2: Assisting Memory*”):

1. Curriculum divide: arbitrary and necessary

In part 1 ([Hewitt1], 1999), I put forward a way of viewing the mathematics curriculum in terms of those things which cannot be known by a student without that student being informed (arbitrary), and those things which *someone* can work out and know to be correct (necessary) without being informed by others.

What is arbitrary is arbitrary for everyone, in that no one can know the arbitrary without being informed by others. The arbitrary concerns names and conventions which have been established within a culture and which need to be adopted by students if they are to participate and communicate successfully within this culture. **The arbitrary is in the realm of memory as students cannot work out these things through their own awareness. So the students’ role is to memorise the arbitrary.**

A teacher needs to inform students of the arbitrary and to assist with the task of memorisation. If teachers do not do so, students are left to invent names and conventions, which they are perfectly able to do, and which may serve an educational purpose, **but are unlikely to coincide with the names and conventions adopted within the mathematical culture.**

De ([ChangBeilock, p.34]):

(Obs: eu encontrei esse artigo googlando por “working memory” BEM amadoristicamente...)

Working memory is a limited short-term memory system that enables one to attend to the relevant task at hand while inhibiting irrelevant information. Math-anxious individuals perform poorly on **math tasks that rely substantially on working memory, such as addition that involves carrying**, but do not show decrements when the problems can be solved via simple fact retrieval. Consequently, it is hypothesized that worries and intrusive thoughts associated with math anxiety reduce working memory resources needed for cognitively demanding math tasks.

AI is Destroying...

De [Purser] (“AI is Destroying the University and Learning Itself”):

A recent MIT study, “*Your Brain on ChatGPT: Accumulation of Cognitive Debt when Using an AI Assistant for Essay Writing Task*,” provides sobering evidence. When participants used ChatGPT to draft essays, brain scans revealed a 47 percent drop in neural connectivity across regions associated with memory, language, and critical reasoning. Their brains worked less, but they felt just as engaged—a kind of metacognitive mirage. **Eighty-three percent of heavy AI users couldn’t recall key points from what they’d “written,” compared to only 10 percent of those who composed unaided.** Neutral reviewers described the AI-assisted writing as “soulless, empty, lacking individuality.” Most alarmingly, after four months of reliance on ChatGPT, participants wrote worse once it was removed than those who had never used it at all.

The study warns that when writing is delegated to AI, the way people learn fundamentally changes. As computer scientist Joseph Weizenbaum cautioned decades ago, the real danger lies in humans adapting their minds to machine logic. **Students aren’t just learning less; their brains are learning not to learn.**

Author and podcaster Cal Newport calls this “cognitive debt”—mortgaging future cognitive fitness for short-term ease. His guest, Brad Stulberg, likens it to using a forklift at the gym: you can spend the same hour lifting nothing and still feel productive, but your muscles will atrophy. Thinking, like strength, develops through resistance; the more we delegate our mental strain to machines, the more we lose the capacity to think at all.

This erosion is already visible in classrooms. Students arrive fluent in prompting but hesitant to articulate their own ideas. Essays look polished yet stilted—stitched together from synthetic syntax and borrowed thought. The language of reflection—I wonder, I struggle, I see now—is disappearing. In its place comes the clean grammar of automation: fluent, efficient, and empty.

Compare com [Boaler, p.118]:

JB: When you do something with maths in it outside of school does it feel like when you are doing maths in school or does it feel different?

G: No, I think I can connect back to what I done in class so I know what I’m doing.

JB: What do you think?

J: **It just comes naturally, once you’ve learned it you don’t forget.** (Gavin and John, Phoenix Park, Year 9, MC)

The Gains and Pitfalls of Reification

De [SfardLinchevskiGPR, p.191], de 1994:

If the context changes, $3(x + 5) + 1$ may become yet another thing: a function...

(...)

The things look still more complicated when a letter appears instead of one of the numerical coefficients, like in $a(x + 5) + 1$. The resulting expression may now be treated as an entire family of functions from \mathbb{R} to \mathbb{R} . Alternatively, one may claim that what hides behind the symbols is a function of two variables, from \mathbb{R}^2 to \mathbb{R} .

There is, of course, a much simpler way of looking at $3(x + 5) + 1$: it may be taken at its face value, **as a mere string of symbols which represents nothing**. It is an algebraic object in itself. Although semantically empty, the expression may still be manipulated and combined with other expressions of the same type, according to certain well-defined rules.

The plurality of perspectives which one may assume while looking at such a seemingly simple thing as $3(x + 5) + 1$ is certainly confusing. In the next sections it will be argued that it is also a source of algebra's strength.

(...)

Algebraic symbols do not speak for themselves. What one actually sees in them depends on the requirements of the specific problem to which they are applied. Not less important, it depends on what one is prepared to notice and able to perceive. It is this last observation which will be the leading theme of the present article. The main focus will be on the versatility and adaptability of the algebraic knowledge of the student. The question that will be addressed is to what extent the learner is capable of seeing and using the variety of possible interpretations of algebraic constructs.

Hoje em dia eu acho melhor a gente ver expressões como árvores. Por exemplo:

```
(%i1) listreemq(3*(x+5)+1);
(%o1)
```



```
(%i2) 3*(x+5)+1;
(%o2)
```

$$3(x + 5) + 1$$

```
(%i3) f(x) := 3*(x+5)+1;
(%o3)
```

$$f(x) := 3(x + 5) + 1$$

```
(%i4) f(0);
(%o4)
```

$$16$$

```
(%i5) f(195);
(%o5)
```

$$601$$

“A small variation in notation”

[GrayTall]

As duas colunas do meio deste slide são da primeira página do artigo “*Duality, Ambiguity, and Flexibility: A ‘Proceptual’ View of Simple Arithmetic*”, do Eddy Gray e do David Tall, de 1994. Esse artigo deles começa com a citação do William Thurston que eu pus na segunda coluna e depois tem a introdução deles, que eu pus na terceira coluna...

A quarta coluna é uma mini-introdução ao Maxima. Repare que quando a gente bate ‘Enter’ ele executa um comando e mostra o resultado, e geralmente o comando quer dizer “simplifique essa expressão aqui o máximo possível”.

I remember as a child, in fifth grade, coming to the amazing (to me) realization that the answer to 134 divided by 29 is $134/29$ (and so forth). What a tremendous labor-saving device! To me, “134 divided by 29” meant a certain tedious chore, while $134/29$ was an object with no implicit work. I went excitedly to my father to explain my major discovery. He told me that of course this is so, a/b and a divided by b are just synonyms. To him it was just **a small variation in notation**.

– William P. Thurston, Fields Medalist, 1990

Mathematics has been notorious over the centuries for the fact that so many of the population fail to understand what a small minority regard as being almost trivially simple. In this article we look at the way in which mathematical ideas are developed by learners and come to the conclusion that the reason why some succeed and a great many fail lies in the fact that the more able are doing qualitatively different mathematics from the less able. The mathematics of the more able is conceived in such a way as to be – for them – relatively simple, whereas the less able are doing a different kind of mathematics that is often intolerably hard. “**A small variation in notation**” will be seen to hide **a huge gulf in thinking** between those who succeed and those who eventually fail.

Maturidade

[FerreiroCTL, p.19]:

Por mais que se repita nas declarações iniciais dos métodos, manuais ou programas, que a criança aprende em função de sua atividade, e que se tem que estimular o raciocínio e a criatividade, as práticas de introdução à língua escrita desmentem sistematicamente tais declarações. O ensino neste domínio continua apegado às práticas mais envelhecidas da escola tradicional, aquelas que supõem que só se aprende algo através da repetição, da memorização, da cópia reiterada de modelos, da mecanização.

Toda essa prática transmite certas mensagens, frequentemente contraditórias. Ao mesmo tempo que se apresenta a escrita como um objeto imutável (não como o produto de uma prática histórica) e como um objeto “em si” quase sacralizado (não

como um poderoso instrumento nas ações sociais), se propõem à criança orações para ler e para copiar que constituem uma afronta à inteligência infantil. Há crianças que chegam à escola sabendo que a escrita serve para escrever coisas inteligentes, divertidas ou importantes. **Essas são as que terminam de alfabetizar-se na escola, mas começaram a alfabetizar-se muito antes, através da possibilidade de entrar em contato, de interagir com a língua escrita.** Porém, há outras crianças, precisamente aquelas de quem se fala no Projeto Principal, que necessitam da escola para apropriar-se da escrita. Essas práticas escolares, entretanto, não lhes permitem apropriar-se de nada: acabam por ser meras reproduzoras de signos estranhos.

[FerreiroCTL, p.50]:

5. **A noção de maturidade tem-se prestado para encobrir os fracassos metodológicos. Efetivamente, se são as crianças que estão imaturas, o método é inocente.** As condições de aprendizagem ficam fora de questão.

6. Finalmente, a noção de maturidade tem funcionado para discriminar as crianças dos setores marginalizados. Qualquer que seja o teste de maturidade que se aplique e quaisquer que sejam os critérios de prontidão que se utilizem, os imaturos são sempre os mesmos: os filhos dos analfabetos. Como os testes se aplicam com critério seletivo (para deixar fora da escola primária ou para formar classes especiais), esta “maturidade”, definida como algo que o sujeito deve trazer consigo, e que é independente das condições de aprendizagem escolar, tem sempre as mesmas consequências.

Equações diferenciais: um caso arquetipal

Eu abrevio “equação diferencial ordinária com variáveis separáveis” como “**EDOVS**”.

Uma EDOVS é algo como:

$$(*) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$


$$(**) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$


A EDOVS (*) é o caso geral.


A EDOVS (**) é a minha EDOVS preferida, “**arquetipal**” em que tudo é fácil de visualizar.

A gente resolve ela usando as contas do [A], que tem vários passos que são gambiarras em que a gente não confia, mas que chegam em resultados que fazem sentido...

$$[A] = \left(\begin{array}{lcl} \frac{dy}{dx} & = & \frac{-(2x)}{2y} \\ 2y \, dy & = & -(2x) \, dx \\ \int 2y \, dy & = & \int -(2x) \, dx \\ \parallel & & \parallel \\ y^2 + C_1 & = & -x^2 + C_2 \\ y^2 & = & -x^2 + C_3 \\ \sqrt{y^2} & = & \sqrt{-x^2 + C_3} \\ \parallel & & \\ y & & \end{array} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow$$


$$x^2 + y^2 = C_3 \Rightarrow$$


$$y = \sqrt{C_3 - x^2} \Rightarrow$$


Equações diferenciais: um caso arquetipal (2)

Se a gente generaliza as contas do caso arquetipal, [A], a gente obtém um método geral, [M], que **deve servir** pra resolver qualquer EDOVS...

Será que o [A] é um caso particular do [M]? Seja:

$$[S5] = \begin{cases} g(x) := -(2x) \\ h(y) := 2y \\ G(x) := -x^2 \\ H(y) := y^2 \\ H^{-1}(y) := \sqrt{y} \end{cases}$$

$$[A] = \begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} = \frac{-(2x)}{2y} \\ 2y \, dy = -(2x) \, dx \\ \int 2y \, dy = \int -(2x) \, dx \\ \parallel \\ y^2 + C_1 = -x^2 + C_2 \\ y^2 = -x^2 + C_3 \\ \sqrt{y^2} = \sqrt{-x^2 + C_3} \\ \parallel \\ y \end{pmatrix} \quad [M] = \begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y) \, dy = g(x) \, dx \\ \int h(y) \, dy = \int g(x) \, dx \\ \parallel \\ H(y) + C_1 = G(x) + C_2 \\ H(y) = G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{pmatrix}$$

Será que [M][S5] = [A]? Não exatamente... se a gente calcula [M][S5] no Maxima ele simplifica $H^{-1}(H(y))$ para $|y|$, e aí fica bem claro que $H^{-1}(H(y)) = y$ só vale para $y \geq 0$...

Compare com:

[Stewart7vol2, p.538]

O “Exemplo 1” do Stewart, na p.539, é bem mais difícil que o meu, **e ele não transforma o método num objeto manipulável**.

Maxima: mais exemplos da substituição

```
(%i5) S1 : [f=h,g=k]$
(%i6) S2 : [h=g,k=f]$
(%i7) S3 : [x=t]$
(%i8) S4 : [f=g,g=f,x=t]$
(%i9) S1b : [f=h,g=k,fp=hp,gp=kp]$
(%i10) S2b : [h=g,k=f,hp=gp,fp=kp]$
(%i11) S4b : [f=g,g=f,fp=gp,gp=fp,x=t]$
(%i12)
```

```
RCL_ssu_S1_usu_S2_usu_S3;
```

```
(%o12)
```

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) \begin{matrix} [f := h] \\ [g := k] \end{matrix} \begin{matrix} [h := g] \\ [k := f] \end{matrix} [x := t]$$

$$\underbrace{\frac{d}{dx} h(k(x))}_{\frac{d}{dx} g(f(x))} \frac{d}{dt} g(f(t))$$

```
(%i13) RCL_ssu_S1b_usu_S2b_usu_S3;
```

```
(%o13)
```

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) \begin{matrix} [f := h] \\ [g := k] \\ [f' := h'] \\ [g' := k'] \end{matrix} \begin{matrix} [h := g] \\ [k := f] \\ [h' := g'] \\ [k' := f'] \end{matrix} [x := t]$$

$$\underbrace{\frac{d}{dx} h(k(x))}_{\frac{d}{dx} g(f(x))} \frac{d}{dt} g(f(t))$$

```
(%i14) RCV_ssu_S1b_usu_S2b_usu_S3;
```

```
(%o14)
```

$$\left(= \frac{\frac{d}{dx} f(g(x))}{f'(g(x)) g'(x)} \begin{matrix} [f := h] \\ [g := k] \\ [f' := h'] \\ [g' := k'] \end{matrix} \begin{matrix} [h := g] \\ [k := f] \\ [h' := g'] \\ [k' := f'] \end{matrix} \right) [x := t]$$

$$\underbrace{\left(= \frac{\frac{d}{dx} h(k(x))}{h'(k(x)) k'(x)} \right)}_{\left(= \frac{\frac{d}{dx} g(f(x))}{g'(f(x)) f'(x)} \right)}$$

$$\left(= \frac{\frac{d}{dt} g(f(t))}{g'(f(t)) f'(t)} \right)$$

```
(%i15) RCL_ssu_S4;
```

```
(%o15)
```

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) \begin{matrix} [f := g] \\ [g := f] \\ [x := t] \end{matrix}$$

$$\frac{d}{dt} g(f(t))$$

```
(%i16) RCV_ssu_S4b;
```

```
(%o16)
```

$$\left(= \frac{\frac{d}{dx} f(g(x))}{f'(g(x)) g'(x)} \begin{matrix} [f := g] \\ [g := f] \\ [f' := g'] \\ [g' := f'] \\ [x := t] \end{matrix} \right)$$

$$\left(= \frac{\frac{d}{dt} g(f(t))}{g'(f(t)) f'(t)} \right)$$

```
(%i17)
```

Substituição: detalhes técnicos

Em alguns casos, como este,

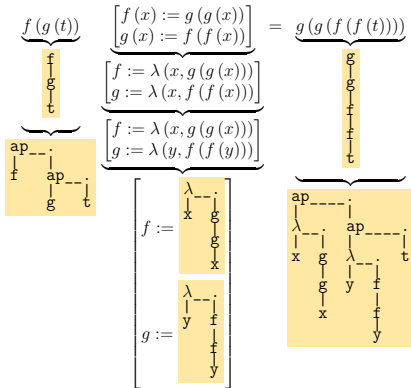
$$f(g(t)) \left[\begin{array}{l} f(x) := g(g(x)) \\ g(x) := f(f(x)) \end{array} \right] = g(g(f(f(t))))$$

só matemáticos experientes, que estão acostumados a pensar em termos de “qual DEVE SER a definição certa”, conseguem dizer qual deve ser o resultado dessa substituição sem fazer as contas...

Na verdade aqui as contas são bem complicadas. A definição do ‘[:=]’ “que todo mundo usa” é a que está na p.7 do [HindleySeldin2008], e ela tem umas cláusulas que “chang[e] bound variables to avoid clashes”. Mas a definição mais natural no Maxima é essa aqui,

```
"_s_"(obj, substs) := psubst(substs, obj);
infix("_s_");
```

com uma melhoria pra operação ‘_s_’ aceitar substituir funções. No exemplo à direita a substituição é calculada assim, $\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \rightarrow \uparrow \end{array} \right)$, e o Maxima cuida das β -reduções. “Todo mundo” sabe β -redução e Church-Rosser: veja [HindleySeldin2008], páginas 11 e 14.



“GUIs are antisocial”

De [Snover] (podcast com transcrição, jul/2024):

Um, yeah. realized at some point, like, oh, yeah, this is, this is familiar. You know, computing used to be fun. And then it sort of wasn't fun anymore, but this is fun again. And as I thought about that, I realized that, you know, that the mouse is antisocial, The GUI is antisocial, So what's that mean? you have a problem to solve and you solve it with the GUI. What do you have? A problem solved. But when you solve it with a command line interface in a scripting environment, you have an artifact. **And all of a sudden that artifact can be shared with someone.** By the way, the way you did it can show cleverness.

I've never seen anybody use a GUI in a clever way. Ever. There's no cleverness to it. No, like, Oh my God, you should see the way Adam clicked that mouse. Oh my God. Guys, guys, guys, guys, come on, check it out. Adam's going to click the button. Oh my God. That's amazing. It just doesn't happen.

Scripting, you're using a language, right? You're communicating.

It's like, Oh my God, did you see what, Proust did, that's phenomenal. This guy's a freaking genius. And then, Hey, give that to me. I'm going to steal that technique and apply it to my code. Or then I have this artifact and I publish it and people are using it. **There's a debt of gratitude. Like they owe me a beer.**

Porque não Lean?

Uma das coisas que eu tentei fazer foi mostrar – como curiosidade – o que eram “contas que um computador entende”. Eu tentei aprender Lean, mas acabei aprendendo muito pouco.

[OchsEBL2025]

[Yalep]

[YalepSurvey]

```

variable (a b c d e : Nat)
variable (h1 : a = b)
variable (h2 : b = c + 1)
variable (h3 : c = d)
variable (h4 : e = 1 + d)

include h1 h2 h3 h4 in
theorem T1 : a = e :=
  by rw [h1, h2, h3, Nat.add_comm, h4]

include h1 h2 h3 h4 in
theorem T2 :
  a = e      := calc
  a = d + 1 := by rw [h1, h2, h3]
  _ = 1 + d := by rw [Nat.add_comm]
  _ = e      := by rw [h4]

include h1 h2 h3 h4 in
theorem T3 :
  a = e      := calc
  a = b      := by rw [h1]
  _ = c + 1 := by rw [h2]
  _ = d + 1 := by rw [h3]
  _ = 1 + d := by rw [Nat.add_comm]
  _ = e      := by rw [h4]

include h1 h2 h3 h4 in
theorem T4 :
  a = e      := calc
  a = b      := h1
  _ = c + 1 := h2
  _ = d + 1 := congrArg Nat.succ h3
  _ = 1 + d := Nat.add_comm d 1
  _ = e      := Eq.symm h4

```

Porque Maxima?

[OchsEBL2025]

[OchsEmacsConf2024]

Em C2 entram muitos alunos que até sabem usar celular bem, mas que têm pouquíssima experiência com computadores – e que não sabem que o teclado tem uma tecla chamada F8, não sabem o que é um arquivo de texto, e que não sabem que links têm URLs, e que URLs são texto...

Se um desses alunos tiver que ensinar algo pros outros num grupo do Whatspp ele vai fazer estas coisas:

- “É fácil, usa o programa tal”,
- “Procura no YouTube um tutorial sobre [palavras chave]”,
- Vai mandar instruções em português tipo “clica no icone dos três pontinhos, vai na opção [tal], clica em [blá]”,
- Vai conversar com os colegas no Discord.

E eles costumam preferir os programas que...

- “dá pra aprender em 5 minutos” e que
- “é intuitivo, não tem nada pra aprender”...

Digital Literacy / Letramento Digital

[TallThomas, p.134]: cardboard machine

De: [GuzdialMorrisonGr, p.32]:

What can we expect a first-year undergraduate to learn in a single term CS class if they have no previous computing experience?

(...)

We first realized in the early 1980s that we often overestimate what firsttime CS students can do.

“Letramento Digital” tem muitos componentes ([NgCanWeTeach]), e eu precisava me focar em alguns, que os alunos dificilmente aprenderiam sozinhos no mundo de hoje em dia, de celulares e interfaces gráficas, em que os alunos costumam escolher o programa que “dá pra aprender em 5 minutos” e que “é intuitivo, não tem nada pra aprender”...

Eu precisava forçar eles a usarem interfaces textuais, em que links fossem URLs e programas e exemplos fossem textos de três linhas – **que fossem fáceis de copiar e colar no grupo de WhatsApp ou Telegram da turma.**

Prioridades

Pros alunos:

Aprender a perguntar

Aprender a fazer perguntas boas

Instalar o Maxima

Aprender substituição

Aprender a chutar e testar

Pra mim: **me livrar das assombrações**
(convencendo elas a mudarem de turma)

De [JonassenRohrerMurphy, p.62] (1999):

“Learning occurs only in the context of meaningful activity”

Outros links sobre practice/drill/activity:

1990: [Buchberger, p.11]

1990: [CohenMrsOublier, p.313]

1991: [SfardDualNature, p.32]

1991: [TallThomas, p.127]

1994: [Sierpinska, p.101]

1996: [SteffeNesherCobb, p.91]

2000: [CobbYackelMcClain, p.135]

2002: [BerryDMM, p.215]

2008: [Sfard, p.17, p.20, p.79, p.81]

2017: [Lehtinen, p.626]

2022: [BoalerMindsets, p.41 e p.48]

2022: [FreudenthalChina, p.14, p.97, pp.111–112]

Perguntas boas e ruins

Alguns exemplos de perguntas ruins:

1. “How do you do problem 6?” ([Krantz, p.13 e p.60])
2. “Will this be on the test?” ([Krantz, p.84])
3. “Faz um vídeo explicando esse capítulo?”
4. “PROFESSOR, QUAL É A FÓRMULA?” (Slogans02:36)
5. “Professor, a raiz quadrada de um número ao quadrado mais outro número ao quadrado é o número mais o outro número?”
6. “Fessôr, se eu escrever desse jeito na prova o senhor aceita?”
7. Perguntas de 10 minutos em português, cheias de termos errados, e com o aluno perguntando “Entendeu? Entendeu? Até aqui ok, né?”, o tempo todo...

As perguntas 1, 2 e 3 são ruins porque não revelam nada sobre o que o aluno sabe – então eu não tenho como encontrar o nível certo pra resposta. De [SchoenfeldWhatCounts, p.66]:

The reason this is important is that there's a large body of research that says that when students find things difficult and ask for help, the modal response from teachers is to say “Here, do it this way”—thereby removing the challenge for the student. This is a problem: if the teacher is the one doing the heavy lifting, then the students aren't developing their mathematical muscles. The real art of teaching is in providing the appropriate scaffolding for students. You don't want to spoon-feed them, and you don't want them at sea. If a student is confused, can you provide just enough structure or guidance so that the student can now grapple productively with the mathematics in front of him or her?

A pergunta 4 é ruim porque mostra que a pessoa ainda nem entendeu que o curso é sobre *entender e descobrir*, e não sobre *decorar*.

A pergunta 5 é ruim porque mostra que a pessoa ainda nem entendeu porque é que a gente aprende, e treina, e usa, notação matemática – e são muitos motivos.

A pergunta 6 mostra que a pessoa não entendeu que ela tem que treinar escrever em vários níveis de detalhe diferentes e que ela tem que treinar ler o que ela escreveu como se ela fosse vários personagens diferentes – os da **Dica 7**.

A pergunta 7 mostra que a pessoa não tá conseguindo se imaginar no lugar do outro, e talvez ela seja uma mala sem alça.

“Releia a dica 7”

Do [MPG, p.5], de 2017/2020 –
mas eu tenho usado isso em todos os meus cursos:

7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas:

- a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara;
- b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu;
- c) um colega que seja seu amigo;
- d) um colega que seja menos seu amigo que o outro;
- e) o monitor ou o professor.

Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; **se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal.** *GA é um curso de escrita matemática:* se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

Comentários do Reginaldo (2018):
[https://anggtwu.net/
2025-5-minutos-da-p-do-seu-tempo.
html](https://anggtwu.net/2025-5-minutos-da-p-do-seu-tempo.html)

Halmos

Será que os meus alunos que “**só**” não sabiam conferir a solução mereciam 9 na prova?

Será que eles eram que nem o Halmos, que na citação na coluna do meio conta que aprendeu um método primeiro e entendeu ele depois?

Será que o erro deles era pequeno, como o que o Krantz fala sobre “a small arithmetic slip” em [Krantz, p.46]?

Será que existe um modo “óbvio” de pontuar a questão desses alunos? Não! Veja a citação na última coluna...

De [Sfard, p.29] (ela cita [Halmos]):

I was a student, sometimes pretty good and sometimes less good. Symbols didn't bother me. I could juggle them quite well... [but] I was stumped by the infinitesimal subtlety of epsilonic analysis. I could read analytic proofs, remember them if I made an effort, and reproduce them, sort of, but I didn't really know what was going on.

(...)

One afternoon something happened. I remember standing at the blackboard in Room 213 of the mathematics building talking with Warren Ambrose and suddenly I understood epsilons. I understood what limits were, and all of the stuff that people had been drilling into me became clear. I sat down that afternoon with the calculus textbook by Granville, Smith, and Longley. **All of that stuff that previously had not made any sense became obvious.**

De [McGowen, p.35]:

Faculty participants discussed how they would grade this work. Some instructors maintained that they would give the students no credit because he hadn't solved the linear system algebraically. Other instructors argued that the student should receive full credit as the response demonstrated very good understanding of the problem and his responses were correct. When the workshop facilitator asked participants: “Given the technology available today when will students be asked to solve a 3×3 linear system using pencil and paper outside of the classroom?” No one provided an answer to the question.

Bob e o sistema

O Alex, o Bob, o Carlos, o Daniel e o Evandro começar a estagiar na mesma empresa. Eles têm que pôr dados no sistema da empresa, o **FuDados**, que foi feito pelo programador Fulano, e é super mal documentado.

O Bob começa a fazer perguntas pro Fulano por e-mail com cópia pra todo mundo. O Fulano dá respostas super boas, e ele começa a reescrever a documentação do FuDados, e ela fica bem melhor.

O problema do Fulano era que antes ele não sabia pra quem estava escrevendo, e quando a gente escreve algo sem conveguir imaginar pra quem a gente tá escrevendo em geral fica horrível.

Agora o Fulano escreve imaginando que está escrevendo pro Bob – e o Carlos, o Daniel e o Evandro também se inspiraram no estilo do Bob e estão conseguindo escrever boas perguntas e bons relatórios.

Agora todo mundo adora o Bob – e todo mundo odeia o Alex, que não conversa com ninguém e tira todas as dúvidas dele com só com o ChatGPT e o Claude Code.

O Alex acaba sendo demitido.

Moral: seja como o Bob, que criou uma rede de pessoas que se ajudam, e não seja como o Alex, que quer só passar nas provas e não quer ajudar ninguém.

Dois jeitos de ser foda

Você tá numa matéria avançada de Matemática, sei lá, uma do mestrado ou do doutorado, e o professor tá demonstrando uma coisa, e tá lá fazendo os passos da demonstração, e de repente tem um passo que um aluno diz: “professor, esse passo não é óbvio”... aí o professor olha e diz: “ué, é óbvio sim”... o aluno diz “não, não é óbvio não”. Aí o professor pensa, pensa um pouquinho mais, anda um pouquinho, sai da sala um instante, volta 30 segundos depois, e diz: “**é óbvio sim!**” E aí ele continua a explicação lá do teorema que ele tava apresentando.

Isso é um piada com fundo de verdade. Dê explicar ela.

Alguns passos em demonstrações de Matemática podem ser explicados em vários níveis de detalhe. Vamos imaginar por um instante que a gente pode numerar os níveis de conhecimento das pessoas... e para uma pessoa no nível 42 aquele passo da historinha não era nada óbvio, mas para pessoas do nível 43 aquele passo é óbvio sim, só que os detalhes são trabalhosos.

Então o que o professor tava dizendo era basicamente “*vá estudar e vire uma pessoa no nível 43 - eu não tenho tempo de apresentar agora os detalhes daquele passo, então VIRE-SE... e essa aula daqui TEM que ser apresentada no nível 43*”.

Imagina que o Alex estudou, estudou, estudou, e virou uma pessoa no nível 43, pra quem aquele passo é óbvio, mas ele não sabe explicar aquilo pra ninguém.

Imagina que o Bob estudou de outro jeito e treinou muito fazer “contas com justificativas”. O Bob sabe conversar com as pessoas, descobrir as dúvidas delas, e expandir os passos complicados até as pessoas entenderem os detalhes deles.

O Alex é foda de um jeito meio egoísta.

O Bob é foda de outro jeito, muito mais legal.

As pessoas que conhecem o Bob e que sabem que dá pra ser como ele detestam o Alex.

Seja como o Bob!

Mangas

Quando o Alex do slide anterior faz uma prova que tem essa questão daqui,

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = ?$$

a resposta dele é só:

$$\frac{1}{2} \left(\arcsen(x) + x\sqrt{1-x^2} \right)$$

porque ele quer ser o **gênio que faz contas difíceis de cabeça e que escreve pra outros gênios que também fazem contas difíceis de cabeça.**

Eu uso o termo “mangas” pra palavras que têm vários significados totalmente diferentes. O ‘=’ é uma manga.

Digamos que o Alex tem que resolver essa questão de integração por frações parciais:

$$\int \frac{2x+3}{(x-4)(x+5)} dx = ?$$

Num certo passo das contas ele chega nisso aqui,

$$\frac{2x+3}{(x-4)(x+5)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+5} \quad (*)$$

O significado default de (*) é:

para todos os valores de A , B e x a igualdade (*) é verdade

...mas no método de frações parciais esse ‘=’ tem que ser interpretado como:

queremos encontrar os valores de A e B que façam a igualdade (*) ser verdade

que é parecido com este terceiro significado, mas é sutilmente diferente:

vamos supor que a igualdade (*) é verdade.

Como a gente pode **cobrar numa prova** que os alunos distingam os ‘=’s que têm o sentido (1) acima dos ‘=’s que têm os sentidos (2) ou (3)? Eu já tentei vários jeitos... já tentei ensinar uma linguagem matemática com algumas partículas em português, como **seja**, **então**, **queremos que** e **suponha que**, mas tudo fica mais concreto quando a gente ensina um pouco de Maxima...

```
(%i1) L : (2*x+3) / ((x-4)*(x+5));
(%o1)
      2x+3
      ----
      (x-4)(x+5)

(%i2) R : A/(x-4) + B/(x+5);
(%o2)
      B      A
      ---- + ----
      x+5    x-4

(%i3) eq1 : L = R;
(%o3)
      2x+3      B      A
      ---- = ---- + ----
      (x-4)(x+5)  x+5  x-4

(%i4) eq2 : eq1 * (x-4)*(x+5);
(%o4)
      2x+3 = (x-4)(x+5) * (B/(x+5) + A/(x-4))

(%i5) eq3 : ratsimp(eq2);
(%o5)
      2x+3 = (B+A)x - 4B + 5A

(%i6) eq4 : subst(x=0, eq3);
(%o6)
      3 = 5A - 4B

(%i7) eq5 : subst(x=1, eq3);
(%o7)
      5 = 6A - 3B

(%i8) AB : solve([eq4,eq5], [A,B]);
(%o8)
      [[A = 11/9, B = 7/9]]

(%i9) subst(AB, eq1);
(%o9)
      2x+3      7      11
      ---- = ---- + ----
      (x-4)(x+5)  9(x+5)  9(x-4)
```

Process/object duality

[DrouhardTeppo, p.238]:

9.3.2.1 Process/object duality

Many collections of symbols can be interpreted either as expressing a *process* or as denoting a mathematical *object*. For example, the expression $2x - 6$ may be viewed procedurally as a set of directions for operating on the variable x . From another perspective, this expression can also be taken as denoting an object in its own right; that which results from carrying out the particular operations. [GrayTall] have coined the term *procept* to describe such symbols that represent both a process and the object of that process.

Sfard and Linchevski (1994) explain the process/object duality of algebraic symbols in terms of hierarchical levels of mathematical understanding involving two modes of thinking—operational and structural. According to their notion of *reification*, moving from a focus on process to seeing that process as an object in its own right (e.g., as an expression or a function) involves a significant cognitive restructuring. Thus, the interpretation of a collection of symbols “depends on what one is *prepared* to notice and *able* to perceive” (p. 192).

Derive como um macaco

Em Cálculo 1 a gente vê um algoritmo pra calcular derivadas de funções elementares que é recursivo, **mas ninguém conta pra gente que ele é recursivo...**

Em Cálculo 2 eu uso uns trechos de um vídeo do Mathologer – “*Why is Calculus so... Easy?*” – que eu que fiz as legendas em Português pra ele.

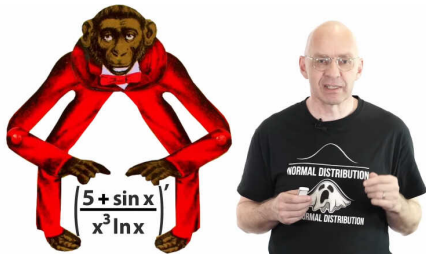
Esse vídeo tem um trecho que mostra um macaco calculando a derivada de uma função elementar complicada – essa aqui:

$$\left(\frac{5 + \sin x}{x^3 \ln x} \right)'$$

usando um algoritmo recursivo.

O Mathologer **não usa árvores** nesse vídeo, mas eu achei que seria bom karma eu fazer uma animação com a tradução dessa conta pra árvores.

Eu até consegui, e eu apresentava essa animação rapidinho na aula sobre “expressões são árvores”, e os alunos consultavam ela pra ver exemplos de expressões representadas como árvores.



Critérios de correção

No **meu** critério de correção...

Multiplicação de números de um dígito

Justificativas “narrativas” valem 0

A P1 ia ter uma questão tipo “justifique este passo”

“Indícios fortes de cola” podem anular a questão

Variáveis e ‘=’

Algumas referências sobre o ‘=’:

- 1989: [FillojRojano]
- 1989: [FischbeinTacit, p.10]
- 1991: [TallThomas, p.140]
- 1999: [FreudenthalDPh, p.477]
- 1999: [Hewitt1, p.6]
- 1999: [Ma, p.95]
- 2004: [PuigRojano, p.216]
- 2008: [Sfard, p.214]
- 2011: [WebbAbels, p.102]
- 2013: [MariaLaura, p.13]
- 2017: [BoothMcGinn, p.64]
- 2017: [McGowen, p.28]
- 2017: [ThomasRethinking, p.180, p.182]
- 2025: [Steinmetz2025]

Algumas referências sobre variáveis:

- 1988: [SchoenfeldArcavi]
- 2001: [EllermeijerHeck, p.6]
- 2001: [WheelerMPT, p.51]
- 2004: [PuigRojano, p.216]
- 2013: [MariaLaura, p.15]

Algumas referências sobre substituição:

- 1994: [SfardLinchevskiBAA, p.298]
- 1999: [FreudenthalDPh, p.482 e p.488]
- 2002: [DrijversLM, p.224]
- 2008: [HindleySeldin2008, p.7]
- 2016: [Harper, p.6 e p.9]
- 2011: [Kindt, p.146, p.149, p.167]

Comece por um problema menor

Derivada por regra da cadeia

“Vire-se”

Os livros de Matemática funcionam na base do “vire-se”

Hewitt

De vez em quando eles introduzem até operações novas

Às vezes eles explicam algo só em português e com muito menos detalhes do que deveriam – você tem que expandir o que eles dizem até chegar num nível suficiente de detalhe

Isso é só pra gênios?

Não, o Maxima já vem com um monte de operações definidas, e qualquer pessoa pode definir mais operações nele...

O ‘[:=]’ é “simples” porque pode ser definido em Maxima em duas linhas – exceto pelo truque dos λ s

Justificativas ruins

Algumas justificativas / argumentos:

“Pô, professor, a resposta tá certa, eu vi num livro e eu lembrava a fórmula, e eu até conferi ela no computador depois”

“Pô, professor, a resposta tá certa, eu fiz as contas de cabeça e pensei tudo direito, eu só não escrevi”

“Eu aprendi isso no YouTube!” “Onde? Me mostra o vídeo? Me manda o link?” “Eu não lembro!!!”

Eu sempre escrevia “Justifique a sua resposta” nas minhas provas, mas isso não funcionava, ou pelo menos não tava funcionando *comigo*, e eu não conseguia descobrir nada sobre como os meus coleguinhas tavam dando as aulas deles...

Eu tava tentando dar provas com contas complicadas, que eu fazia em, tipo, 10 passos, e alguns alunos faziam elas em 3 passos – e *erravam*.

Eu achava que dizer isso aqui pra eles funcionaria: “se você fizer as contas mais devagar e em mais passos você vai conseguir revisar cada passo seu num instante, e não vai errar”... mas não funcionava não.

Aipim

Considere esta fórmula aqui, que eu vou chamar de [Aipim], e que é sobre uma propriedade da raiz quadrada:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$$

Ela nem sempre é verdadeira. Por exemplo, quando $a = 3$ e $b = 4$, temos:

$$\sqrt{\underbrace{a^2}_{\underbrace{3^2}_{9}} + \underbrace{b^2}_{\underbrace{4^2}_{16}}} = \underbrace{a}_{\underbrace{3}_7} + \underbrace{b}_{\underbrace{4}_7}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_5$
F

Em 2024.1 a gente viu várias vezes que a fórmula [Aipim] era falsa, mas mesmo assim um monte de gente usou ela em contas na prova, e essas pessoas chegaram a resultados errados...

Essas pessoas não treinaram as técnicas pra contas fáceis de revisar e nem as técnicas pra revisar contas, então elas fizeram coisas como isso aqui e não conseguiram ver o erro:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 - 16} + 5 \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

Compare com isto,

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 - 16} + 5 \\ &= \sqrt{x^2 - 4^2} + 5 \\ &= x - 4 + 5 \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

em que dá pra ver que a justificativa da terceira igualdade é esta,

$$\sqrt{x^2 - 4^2} = x - 4$$

que é um caso particular disto,

$$\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$$

que é uma espécie de [Aipim] – é uma regra que nem sempre é verdadeira.

MATERIAL SOBRE ZUMBIS

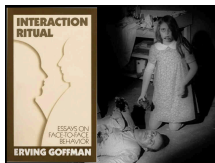
Eles vão me matar?

Eu tinha vários parentes que eu achava sinistros. Um deles era o Tio Dion, que era Coronel Aviador, e uma vez eu sentei do lado dele num sofá numa festa de família e depois de alguns minutos ele tava falando de tortura com um brilho nos olhos. A partir daí eu passei a evitar ele o mais que eu pudesse, porque ele tinha uma noção de certo e errado tão diferente da minha que eu sentia que o diálogo era impossível, e eu sentia que ele podia fazer atrocidades com a maior naturalidade... e eu passei a ver ele como “desumano” ao invés de “humano”.

A imagem da direita é do “The Night of the Living Dead”. A menina é um zumbi no sentido clássico do termo, e a gente tem medo de zumbis porque eles pensam muito diferente da gente e não têm noção de certo e errado... se a gente berra pra menina “VOCÊ TÁ COMENDO O BRAÇO DO MEU AMIGO! ISSO É CRIME!” ela só olha pra gente, diz “HUH?”, e continua...

A gente diz que os zumbis “não pensam”, mas também dá pra considerar que o pensamento deles é **muito curto**.

O meu departamento tá cheio de zumbis – pessoas que dizem algo como o Tio Dion falando de tortura com um brilho nos olhos, e que a partir daí eu passo a achar essas pessoas “desumanas” ao invés de “humanas”, e passo a achar que elas podem cometer atrocidades com a maior naturalidade.



Um exemplo é o Fabinho. Veja aqui:

<https://anggtwu.net/2025-voce-atropelou-a-selana.html#a-reuniaio>

Outro exemplo é o Walter:

<https://anggtwu.net/2025-caraca-ate-o-walter.html#a-base>

A chave tá no “**não vou ler nada, não quero saber nada, não tenho tempo**”. Quando uma pessoa passa a dizer coisas assim a gente vê que ela **pode cometer atrocidades** e **pode apoiar atrocidades**, porque ela **aprendeu a não pensar** – que nem os zumbis do filme, que a gente berra “VOCÊ TÁ COMENDO O BRAÇO DO MEU AMIGO! ISSO É CRIME!” e o zumbi do filme só olha pra gente, diz “HUH?”, e continua fazendo o que tava fazendo antes.

Eles vão me matar? (2)

Outra pessoa que também virou zumbi é a Ana Isabel. Olhe as falas dela aqui:

<http://anggtwu.net/2025-07-24-reuniao-rcn.html>

Aí é óbvio que eu passei a me sentir como se eu estivesse vivendo dentro de um filme de zumbis, né?

Será que eles vão me matar?

Deixa eu reduzir essa pergunta pra:

Será que eles vão contratar um pessoal da milícia pra me matar?

E deixa eu reduzir ela de novo, pra:

Será que eles vão contratar um pessoal da milícia pra quebrar uns ossos meus?

E aí a resposta é: se eles continuarem usando os mesmos argumentos **É ÓBVIO QUE SIM!!!!!!**



Eles só pensam a curtíssimo prazo, eles têm pouquíssima noção do que pega bem e pega mal legalmente, e eles acham que basta dizer “não tenho tempo pra pensar nessas coisas”, e pronto.

Deixa eu chamar “o pessoal da milícia” de “a comissão”. Repare que o Fábio já usou o argumento “a função da comissão não é puni-lo”, e ele pode usar isso de novo, e pronto; e o Walter pode dizer que é de Biomédicas e que não quer pensar nisso, quer pensar só em coisas edificantes, e pronto... e se ele nem nota quando faz acusações falsas então sei lá, né?

Um link:

<https://anggtwu.net/2025-caraca-ate-o-walter.html#nov-2025>

Reajam!

(Oi Etel...)

Deixa eu lembrar umas coisas que aconteceram na reunião de novembro. A Bel falou sobre uma folhinha que eu tava distribuindo por aí – “Precisamos de mais Patrícias e menos Anas Isabéis” – e várias pessoas disseram que o departamento precisava reagir a isso.

Eu disse que eu apoiava a idéia de vocês reagirem, e usei a frase “Eu acho que o único modo da gente resolver isso é produzir documentos e mandar para instâncias superiores”.

Vocês falaram em reagir de três modos: boletim de ocorrência, moção de repúdio, e denúncia à reitoria. Eu gostaria de acrescentar um quarto, que ficou implícito mas ninguém falou explicitamente: processo contra mim na Polícia Federal. Eu acho que vocês têm que reagir, e se possível de todos os quatro modos que eu mencionei:

1. boletim de ocorrência,
2. processo na Polícia Federal,
3. moção de repúdio,
4. denúncia na reitoria.

Se vocês reagirem desses quatro modos vocês vão deixar claro pro mundo “exterior” – o mundo fora do RCN – que vocês estão agindo de boa fé, no seguinte sentido: vocês acreditam na posição de vocês e vocês estão pedindo ajuda. Deixa eu ser mais claro sobre essa “ajuda”: vocês vão pedir pra comunidade do PURO, e pra vários tipos de autoridades externas, que elas interfiram e ajudem vocês a resolver esse problema... e pra conseguir isso vocês vão ter que dialogar com essas pessoas e entidades, e vão ter que contar a versão de vocês da história.

Outra possibilidade é vocês não reagirem - vocês só enrolarem, e enterrarem a cabeça na areia. Eu acho que isso vai pegar MUITO mal - as pessoas de fora que estão acompanhando o que está acontecendo aqui no RCN vão ver:

- que vocês não acreditam nas coisas que vocês próprios falam,
- que vocês não querem que ninguém de fora veja o que está acontecendo aqui no departamento,
- e elas vão ver que vocês são totalmente irresponsáveis.

Isso que eu acabei de falar é a explicação pro link que eu mandei pro grupo do RCN em 02/fev, e que foi a última mensagem que eu mandei pra lá antes do Fernando Saliby restringir as postagens. Eu acho que se vocês reagirem dessas quatro formas vocês vão conseguir resolver um monte de problemas do departamento rápido – acho que em menos de dois anos. Mas vocês são muito enrolados e falar com instâncias superiores dá trabalho, então vocês só vão fazer isso se forem pressionados e se tiverem ajuda pra se organizar. O meu link era pra essas duas coisas, e eu gostaria que ele constasse na ata: <https://anggtwu.net/2025-alguns-motivos-reginaldo.html>.

...que você não agiu de má fé, que você é burra sim?

Etel, em 2022 você abriu um processo administrativo contra mim que era tão mal feito que a única acusação dele que estava suficientemente documentada e que fazia sentido era que no final de 2022.1 eu dei uma segunda VS, extra, no início do período seguinte, bem depois de 2022.1 já ter acabado.

Eu tinha tudo documentado e no dia do meu depoimento eu mostrei pra banca do processo administrativo que eu dei essa VS extra, que violava um montão de regras, porque você pediu, ou mandou... e aí não sobrou praticamente nada das acusações.

Etel, você abriu um processo administrativo contra mim pra me punir por eu ter seguido uma ordem que você deu.

Você fez as pessoas da banca do processo administrativo gastarem centenas de horas de trabalho delas porque você achava que eu tinha que ser punido por eu ter seguido uma ordem que você deu.

Eu acho isso muito grave. Como é que a gente explica isso que você fez? Assim, ó, eu, como leigo em Direito, imagino que a gente tem duas explicações "básicas", e todas as outras vão ser variações e combinações dessas. As explicações básicas são 1) que você agiu desse jeito por burrice, e 2) que você agiu desse jeito por má fé. Que que vai acontecer nos próximos processos? Você vai tentar convencer a reitoria e um juiz da Polícia Federal que você não agiu por má fé não, e que você é burra sim?

Agora deixa eu falar de uma outra coisa que eu também acho muito grave. Eu acabei de falar de coisas do início do processo administrativo; ele foi aberto em setembro/2022. Essa segunda coisa é sobre as reclamações dos alunos contra mim em 2022.2, que foram anexadas, ou "apensadas", ao processo alguns meses depois, e isso é uma história que não foi consertada até agora.

Na página que tem a minha resposta ao ofício 15/2024 da Engenharia de Produção, na seção "Datas" dela, um dos itens, o que tem a data de 07/julho/2023, mostra que em 2023 você nem olhou as provas de que as acusações contra mim eram falsas. Isto também vai ser tratado nos próximos processos... e eu, que, lembra, sou leigo em Direito, fico imaginando que nessa segunda coisa todas as pessoas que vão analisar e julgar o processo, tanto na Reitoria quanto na Polícia Federal, vão começar considerando que você estava agindo de má fé, e imagino que você vá tentar mostrar pra eles que não, que você é burra sim.

Como é que você vê essa história toda, Etel? Você pode explicar o seu ponto de vista? Você pode explicar ele um pouquinho agora e explicar ele melhor nos próximos meses?

Zumbis e processos

Eu comecei a estudar e documentar obsessivamente as dificuldades dos meus alunos por causa de um processo administrativo absurdo que os meus coleguinhas abriram contra mim em 2022...

Esse processo – o “PAD” – tá emperrado, e eu agora tou pressionando eles a abrirem dois outro processos contra mim – um na UFF e outro na Polícia Federal – pro PAD desemperrar.

Resumindo MUITO: em 2022.1 eles me acusaram de ter aprovado alunos demais – que não sabiam o suficiente do conteúdo das matérias – durante a pandemia, e me mandaram reprovar todo mundo que não soubesse o suficiente. Eu fiz isso, e os alunos fizeram um monte de reclamações. Aí a minha chefe na época, a Etel, me mandou dar uma **prova final extra, no início do semestre seguinte.**

Ela – Etel – acabou abrindo um PAD contra mim, e quando eu finalmente tive acesso aos documentos dele eu descobri que **a única acusação bem documentada dele** era que eu dei essa prova final extra, que violava um monte de itens do regulamento... ou seja, a Etel tava me punindo **por eu ter seguido uma ordem que ela deu.**

Isso foi em 2022, e os meus coleguinhas **ainda** estão me tratando como um incompetente irresponsável que precisa ser vigiado, punido, humilhado, e talvez demitido.

Os meus coleguinhas dizem que “não têm tempo” de ler nada e nem de abrir link nenhum – e aí eles “ainda não sabem” que o PAD foi totalmente absurdo.

Eu tou usando o termo “**zumbis**” pra pessoas que “não têm tempo” de ler nada e nem de abrir link nenhum.

A condição de zumbi deveria ser incompatível com a condição de professor universitário.

Precisamos de mais Patrícias e menos Anas Isabéis (de novo)

Antigamente todo mundo tinha medo dos cursos com muita Matemática, como Engenharia de Produção e Ciência da Computação, e as pessoas só entravam nesses cursos quando elas sabiam que “levavam jeito pra Matemática”... e elas descobriam que levavam jeito pra Matemática na escola, quando elas viam que conseguiam descobrir muita coisa sozinhas.

Aí a educação piorou muito, e primeiro começaram a aparecer nos nossos cursos alguns alunos como os dessas historinhas daqui – a do “professor, qual é a fórmula?”, e a do Gênio da Turma... link:

Slogans#01:10

E de uns tempos pra cá os alunos que queriam só decorar fórmulas se tornaram tão numerosos que eles nem reparam mais que alguns colegas deles já conhecem algumas técnicas pra descobrir os métodos sozinhos... e aí acontecem coisas como essa reclamação daqui,

<https://anggtwu.net/>

2025-oficio-da-EP-resp.html#macaco

que a coordenação não fazia idéia de como responder e repassou pra mim.

A GENTE PRECISA DE TODA AJUDA QUE PUDER, e eu tou conversando sobre isso com tipo *todo mundo*, porque eu sei que muitas das pessoas que podem me ajudar estão espalhadas por aí, disfarçadas de pessoas comuns...

...e nisso a Patrícia do Hortifruti Sabor da Fruta virou uma referência pra mim, porque a gente sempre conversava quando eu ia lá comprar coisas com a minha catchorrinha, e um dia eu contei essas histórias dos meus alunos pra ela e eu descobri que ela já tinha trabalhado como professora de alfabetização, e ela me disse pra eu ler os livros da Emília Ferrero, e eu achei eles fantásticos, e durante muito tempo eles foram os únicos livros sobre Educação EM PORTUGUÊS que eu conhecia e que eu achava muito bons e muito úteis pro que eu tava fazendo...

O meu departamento tá um lixo, né? A gente tem a Ana Isabel, que todo mundo do campus considera como a nossa grande especialista em Educação, e o Reginaldo, que é menos famoso mas que fez licenciatura... e em 2025.1, que foi o semestre em que eu disse pra todos os meus alunos fazerem requerimentos de revisão de prova...

...a Ana Isabel só me recomendou um livro que eu achei uma **BOSTA**, e o Reginaldo não recomendou nada, só mandou um “O professor Eduardo **já deveria saber**”...

Pensa na seguinte situação: você tá numa mesa com um monte de gente e você fala pra pessoa do seu lado “**passa o sal?**”, e

ela responde “**NÃO**”. Isso é meio inconcebível, né? Por mais que as pessoas tenham éticas um pouco diferentes acho que todo mundo vai concordar que pega incrivelmente mal responder “NÃO!” quando o seu vizinho de mesa te pede “passa o sal?”...

Eu vou usar a Patrícia como símbolo, e vou usar o termo “Patrícia” pra me referir às pessoas que acham natural as pessoas trocarem idéias, compartilharem conhecimento e se ajudarem, e vou usar o termo “Ana Isabel” pra me referir às pessoas que acham natural não “passar o sal” pra um colega de departamento que está com dificuldades EM ALGO EM QUE VOCÊ É ESPECIALISTA.



Versão completa:

A resposta da Ana Isabel

Links:

<https://anagtwu.net/2026-precisamos.html>

<https://anagtwu.net/2026-11-27-reuniao-rcn.html#1:07:39>

<https://anagtwu.net/2026-11-27-reuniao-rcn.html#1:40:03>

Bel (1:07:39): É o seguinte, eu gostaria aqui de fazer um registro em ata de uma situação de difamação que eu tô passando, né? O servidor Eduardo Ochs imprimiu, utilizando recursos da universidade, múltiplas cópias de um texto de autoria própria, cujo título envolve meu nome... e de forma pejorativa, né... E no corpo do texto, ele envolve meu nome explicitamente, bem como o nome do professor Reginaldo também... as cópias vêm sendo distribuídas pelo polo há mais de... duas semanas aproximadamente... é... o professor usa da metodologia de panfletagem para abordar pessoas, várias do meu convívio, inclusive alunos meus, perguntando se querem saber de uma FOFUCA. A panfletagem desse texto constitui um ato extremamente violento, desrespeitoso, potencialmente danoso à minha imagem profissional... o conteúdo tenta me diminuir, desconsiderando minha trajetória, minha experiência, minha competência profissional... esse tipo de exposição é muito inadequado ao ambiente universitário, fere princípios básicos de convivência institucional, além de causar danos profissionais e emocionais e ainda mais por motivo aparentemente fútil. A situação que eu tou passando é grave por si só, por motivos óbvios, mas eu venho aqui compartilhar com os colegas e faço questão de pedir formalmente esse registro em ata, porque eu ainda tenho algumas dúvidas, né?

Então eu passo às minhas considerações, que são as seguintes. O referido servidor nunca adotou essa prática agressiva com colegas do sexo masculino, ainda que o servidor tenha histórico de conflito dele com tais professores. Eu me pergunto se essa atitude ocorreu em virtude de eu ser mulher. Se for verdade que se trata de um desrespeito motivado por gênero, né, que é uma discriminação, é mais grave ainda. Ainda como o título do texto que eu menciono proclama que devem haver menos Anas Isabéis, eu fico me perguntando se a atitude se trata de um atentado, já que na visão do servidor deve existir menos de mim no mundo, né? Se for verdade que se trata de um atentado, é muito mais grave ainda, né? Então, resumindo, mas não exaurindo o tema, porque eu acho que ninguém aqui tem tempo remunerado para isso, né? Eu afirmo que é lamentável, e mesmo inaceitável, que recurso público, tanto material quanto de tempo, seja usado pra produzir e distribuir esse tipo de conteúdo ofensivo, depreciativo desrespeitoso numa universidade pública que já enfrenta tantos ataques externos, tá? Então fica aqui o meu registro que eu quero, por favor, é, Anderson, que registre a minha fala, entre aspas, na íntegra, por favor, para que medidas que sejam necessárias sejam tomadas.

Eduardo (1:40:03): Eu só queria dizer que eu também concordo com isso. **Eu acho que o único modo da gente resolver isso é produzir documentos e mandar para instâncias superiores.**

O Apocalipse Zumbi

No “Monty Python and the Holy Grail” tem uma cena em que o Rei Arthur chega numa vila em que os habitantes estão tentando descobrir se uma mulher é uma bruxa ou não, e um cavaleiro está ajudando eles.

Com a ajuda do cavaleiro eles descobrem (???) que se a mulher é uma bruxa então ela é feita de madeira, e se ela é feita de madeira ela flutua, e se ela flutua ela pesa o mesmo que um pato. Aí eles põem ela num prato de uma balança, põem um prato na outra balança, descobrem que os dois pesam a mesma coisa, e aí queimam ela.

Na cena seguinte esse cavaleiro já virou o Sir Bedevere, e ele tá conversando com o Rei Arthur, e ele diz “...e foi assim que eu descobri que a Terra tem o formato de uma banana”.

No meu departamento estão acontecendo VÁÁÁÁRIAS coisas assim.

Na reunião de março/2025 eu tentei mostrar pra todo mundo uns absurdos do processo administrativo contra mim. Resumindo: dois inimigos meus, o Reginaldo e o Rômulo, tinham criado uma “comissão de acompanhamento” pras minhas disciplinas, com eles dois e mais o Antônio, que quase não acompanhou o que estava acontecendo. O relatório final dessa comissão tinha umas acusações falsas que dava pra mostrar que eram falsas super facilmente – mesmo pra pessoas com attention span de peixinho dourado – e eu preparei uma página com explicações e link pra todos os documentos, mandei pra mailing list do departamento (o “RCN”), e pedi pra apresentar isso na reunião.

Os meus coleguinhas foram contra a apresentação, e o Walter – que é professor titular e que já foi a pessoas mais íntegra e lúcida do nosso departamento – disse mais ou menos isso aqui (vou resumir um pouquinho)...

- O seu problema não está no RCN,
- o seu problema está na sua relação com seus alunos e com as coordenações de cursos,
- não li e não vou ler documento nenhum,
- ...e se eu ler eu não vou entender.

Eu tou usando alguns termos improvisados, por falta de termos melhores...

Os professores que “não têm tempo” de ler nada e nem de abrir link nenhum são “zumbis”,

O PURO está infestado de professores zumbis – isso é o **Apocalipse Zumbi**,

A revelação de que o Walter virou um zumbi é o **Sinal do Apocalipse**.

Isso tá acontecendo no ensino também – quando eu consigo descobrir algo sobre as técnicas didáticas dos meus coleguinhas eu sempre descubro que eles acham que aulas boas têm que ter o formato de uma banana, e que eu tou fazendo tudo errado.

O Apocalipse Zumbi 2: os aipins

Uma das coisas mais apavorantes de lidar com zumbis é a *impossibilidade de comunicação*. Tipo, a gente diz pro zumbi:

– VOCÊ TÁ COMENDO O BRAÇO DO MEU AMIGO! ISSO É CRIME!

O zumbi olha pra gente, continua mastigando, e só diz:

– HUH?

Muitos alunos viraram zumbis também. Eles me atacam bem menos do que os meus colegas do RCN, mas eu também ficava com a sensação de que a comunicação com eles era impossível, e *eu não sabia porquê*.

Eu vou começar com várias historinhas. Quase todos os meus alunos de C2 erram quando têm que manipular raízes, e eles fazem coisas tipo isso aqui,

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$$

...que é uma regra *errada*.

Eu vou chamar essas regras erradas de **aipins**.

Desde 2024.1 eu digo que um dos objetivos do curso é eles aprenderem a fazer contas sem aipins, e a gente passa um tempão vendo técnicas pra isso, mas mesmo assim 80% dos alunos fazem aipins na P2...

Apocalypse Zumbi: 1984

George Orwell, in 1984:

The Party told you to reject the evidence of your eyes and ears. It was their final, most essential command.

Neutro

As revisões de prova de 2025.1

Cada ‘→’ na coluna da P1 indica uma nota que a banca mudou. Por exemplo, ‘2.0 → 8.1’ na linha do Renan quer dizer que a banca mudou a nota da P1 dele de 2.0 pra 8.1. Logo depois tem um 0.0 e um 0.3, que indicam que o Renan tirou 0.0 na P2 e 0.3 na VS (a prova final).

Notas:	PR1	P1	PR2	P2	VRP1	VRP2	VS	NF/VS	
Ana Luiza dFBS	-	3.2->5.1	-	4.6	-	-	0.0	4.9/0.0	VS/rep
Bruna BdO	2.0	2.5->7.9	-	1.1	-	-	1.5	5.5/1.5	VS/rep
Bruno HdGF	2.0	2.5->6.0	-	-	-	0.5	0.5	4.3/0.5	VS/rep
Davi dMF	-	1.3->4.6	-	4.8	-	-	0.0	4.7/0.0	VS/rep
Eduardo APRG	2.0	6.0	-	4.5	-	-	-	6.3	AP
Erick GMB	-	6.7	-	6.3	-	-	-	6.5	AP
Gabriel ME	-	2.0->5.8	-	6.7	-	-	-	6.3	AP
Gustavo PdSS	-	3.0->8.5	-	7.6	-	-	-	8.1	AP
João HPV	-	1.5->8.0	-	7.2	-	-	-	7.6	AP
Leticia RH	2.0	10.0	-	5.9	-	-	-	8.0	AP
Marcelo FdSJ	2.0	10.0	2.0	-	-	-	-	6.0	AP
Mari Anna	-	-	-	7.0	5.8	-	-	6.4	AP
Maria Eduarda CS	-	3.4->8.6	-	0.9	-	-	0.0	4.7/0.0	VS/rep
Mariana CP	-	-	-	2.3	0.3	-	1.3	4.0/1.3	VS/rep
Matheus FR	-	5.8->7.8	-	0.8	-	-	6.0	4.3/6.0	VS/AP
Paulo Sérgio SC	0.0	5.1->5.3	-	1.6	-	-	7.0	4.0/7.0	VS/AP
Renan FM	-	2.0->8.1	-	0.0	-	-	0.3	4.1/0.3	VS/rep
Taynara LCP	2.0	3.3->7.4	-	7.1	-	-	-	8.3	AP
Vinicios FC	2.0	7.0	-	0.8	-	-	6.0	4.9/6.0	VS/AP
Wallace CBM	2.0	9.2	-	4.3	-	-	-	7.2	AP

Critérios de correção: Ana Isabel

21/mar/2022:

<http://www.youtube.com/watch?v=FxcPKcVqyJU#t=46m12s>

Bel: ...eram problemas difíceis, né? E aí tinha um problema que era saber quantos azulejos cabiam numa parede. Tinha que comprar azulejos e saber quantos cabiam, tava lá nos dados do problema... e o aluno calculou a área correta da parede, que não era retangular, ele calculou adequadamente a área do azulejo, ele percebeu que “quantos cabe” é a idéia da divisão – isso alguns não percebem... ele botou divisão mas é óbvio que dava números decimais... e ele tinha que efetuar aquela conta de decimal. E aí na conta de decimal ele errou. No final! Era uma conta grande que ele errou no final... um dígito. E aí ele tirou zero na questão. Esse aluno nunca vai gostar de Matemática! Porque ele não é valorizado pelo que ele sabe... ele é esculhambado pelo que ele não sabe. Esse menino repetiu o ano! Por algumas vezes acontecia isso. Então você é valorizado pra ser perfeito... e isso pra algumas situações não mudou, né, a gente sabe que alguns professores acabam lidando com esse mesmo tipo de intolerância ao erro, né. A gente fala tanto de intolerância, né, e o erro é tão importante, ele nos dá tanta informação...

Sérgio: Eu acho que isso é a questão do algebrismo, né, Bel. Você fica tão preso no algebrismo e você esquece de perceber o raciocínio.

Bel: É. E o professor não valoriza!

26/jun/2025:

<http://anggtwu.net/2025-06-26-bel.html>

<http://anggtwu.net/2025-06-26-reuniao-rcn.html>

Bel: É... outra devolutiva é que a formulação das questões amarra, né... representações de justificativa, né, que o aluno tem que justificar de uma forma amarrada, que é aquela como exatamente como o professor escreve, senão ela não é considerada. E representações que, por exemplo, muitos de nós nem conhecíamos.

Outra devolutiva é que o tipo de resolução exigida não consta de nenhum livro da bibliografia da disciplina... os alunos é, não podem nem dizer “não entendi isso aqui, eu vou estudar pelo livro”... não pode, porque exatamente o que tem que ser escrito não consta dos livros. E isso, na nossa visão, da banca, acaba fazendo com que os alunos não estudem por livros, isso numa universidade para mim é um contra-senso... eles são obrigados a estudar apenas pelas notas de aula do professor.

Fábio: como é que a gente vai prosseguir... concordando com aquela nota que foi dada, que minimizou... uma resolução que tá claramente mostrando que... que conhece, sabe fazer... sabe aplicar a técnica que tá na... no conteúdo programático da disciplina...

Critérios de correção: Reginaldo

26/jun/2025:

<http://anggtwu.net/2025-06-26-reuniao-rcn.html>

Reginaldo: É... então. Eu queria reforçar essa coisa que o Antônio e o Rômulo falaram, que é o seguinte. É... meu entendimento tá havendo... já tem... já está havendo uma clara descaracterização do recurso de revisão de prova. Quando a Bel fala, eu falo, o Fábio também fala, né, ah mas o aluno pede ele tem direito, né... sim, ele tem direito ao recurso de revisão de prova... mas eu acho que nesse contexto, de vários semestres a mesma coisa, esse recurso no caso do professor Eduardo já está descaracterizado... eu acho que a gente devia pedir uma orientação na universidade a respeito disso. Porque que eu digo que ele tá descaracterizado? Porque o professor ele incentiva os alunos a pedirem essa revisão de prova, e isso já virou um critério de aprovação. No próprio material do Eduardo, que ele tem um material que ele já citou aí, que é Introdução ao Curso, que ele passa pros alunos, tem uma... um... uma parte lá que diz assim: "Como passar em cálculo 2?" E aí ele fala: o método 1, tire suas dúvidas, instale o Maxima... é o método normal, estudar. E o método 2 ele fala: faça uma reclamação para a coordenação dizendo que eu sou maluco, que eu dei provas, nananá, aí fala que a prova vai ser corrigida por uma "Banca Maluca" - ele usa esse termo, né... então, tem no material dele, e agora tem nas provas também, que não tinha antes... que ele descreveu como um método de passar na disciplina. E eu tava falando com a Bel esses dias que no início do semestre teve um aluno que veio na minha turma de Cálculo 3 e falou assim... ele foi meu aluno de GAAL, né, ele foi aprovado em GAAL, e aí agora ele tá fazendo Cálculo 3. Aí ele foi na minha aula e falou assim: "Ah professor, eu tou... vou assistir um pouco da sua aula porque eu quero ver qual turma que eu vou pegar porque na turma do professor Eduardo eu já sei que eu vou passar"... né.

Então, tá tendo esse tipo de coisa, né, então para mim isso descaracteriza o... a questão da revisão de prova. Eu sei que o aluno tem o direito, mas eu não... eu não entendo mais como uma revisão de prova comum, então eu acho que a gente devia consultar a respeito disso, se a gente deve, é... continuar fazendo essas revisões de prova, dado que isso tá virando um método de aprovação, onde está sendo terceirizado para os professores a correção das provas e aplicação de critérios em cima de provas que a gente nem elaborou, né... e a gente nem pode dividir com os colegas o esse peso porque o professor fica atacando a gente... e aí chamando... falando que... acusando a gente de fazer, é... assédio moral, essas coisas, né, perseguição... né? E aí, como é que eu vou fazer? Porque se eu for participar de uma banca depois eu vou ser acusado, eu vou ser processado, entendeu? Então não tem como. Então eu acho que não cabe mais ficar fazendo essas revisões de prova, ainda mais depois das falas do professor Eduardo, porque... dá para entender que... eu não consigo compreender, porque... ele é um professor concursado... né? Professor doutor, concursou... já deu aula, é... em várias disciplinas, e ainda ele não sabe como... como é um critério de correção de prova, como elaborar uma prova? Né, aí a solução pra isso ele quer descobrir como que faz isso a solução é: vou incentivar os alunos a pedir revisão de prova pros meus colegas corrigirem, aí eu vou pegar os relatórios dessas correções para eu tentar descobrir como que corrige prova? Pra mim é uma coisa surreal. Então eu acho que a gente devia como departamento fazer essa consulta e paralisar essas... essa... esses recursos de revisão de prova. Essa é a minha opinião, né. Eu sei que os colegas vão discordar porque o... o aluno tem direito... mas eu ainda coloco nisso - tem direito no... quando o recurso tá sendo usado de forma correta, não como um recurso para obter aprovações, né? É isso.

Critérios de correção: Fernando

Links:

<https://anggtwu.net/2025-2-C2.html#o-metodo>

<https://anggtwu.net/2025-11-27-reuniao-rcn.html#22:21>

<https://anggtwu.net/2025-11-27-reuniao-rcn.html#1:24:34>

Eduardo: Isso. Eu até mandei os detalhes por e-mail... eu vou ler aqui. É uma coisa que eu quero compartilhar com vocês. Na reunião de Junho a Bel me recomendou um livro, o do Luckesi, que eu achei muito ruim. Aí depois disso eu comecei a seguir indicações de outras pessoas em referências bibliográficas para procurar livros e artigos sobre educação matemática que eu gostasse. Achei muita, muita coisa. E aí eu pus as melhores coisas numa determinada sub-página da minha página e tou compartilhando isso com muita gente. Eu achei que seria bom compartilhar esses links com o pessoal do departamento também. e vou pedir que esse link conste na ata. Aí já mandei ele por e-mail e depois a gente pensa em como explicar isso direitinho na ata. Só isso.

Fernando: Ou seja, não foi falta de oportunidade do professor aprender, como ele diz, que tá tão interessado em aprender Pedagogia, pede referências de Didática e Pedagogia... eu acho que de 2009 a 2025, acho que já houve tempo suficiente pro professor aprender. Ah... na minha opinião, o professor não quer aprender como melhorar as aulas, como achar as estratégias pedagógicas melhores... não, ele não quer. Ele, o objetivo dele é outro. Não sei qual, acho até que ele devia fazer um um exame de consciência e se perguntar qual o objetivo dele em tudo isso. E aí não sei, tem até algumas sugestões que podem ser encaradas seriamente ou não. O... o servidor podia pedir afastamento do departamento, por exemplo, e fazer uma graduação ou uma pós-graduação ou um pós-doutorado na área de Pedagogia para interagir com as pessoas que...

eu acho que não vai dar em nada. Eu acho que a mesma coisa vai acontecer lá... ou ainda, é, se o objetivo dele não tem nada a ver com Pedagogia, eu acho que ele podia pedir afastamento ou pedir uma transferência para um departamento, como por exemplo, o departamento de comunicação da reitoria, onde ele pode escrever textos, assim, que certamente vão ser apreciados por uma uma gama de leitores muito mais tolerante do que o departamento. É... porque como a professora Flávia falou, o departamento está exausto disso. E não... não bastando essa... essa agressão contra a professora Ana Isabel, hoje... na reunião de hoje o servidor ainda lança termos ofensivos contra o professor Walter... e, como o professor Rômulo falou, também, é... a realidade é a última... é a primeira vítima aqui e a última preocupação do servidor nas falas dele.

Pedagogia do Decorar

De [SchoenfeldMST]:

In the research reported in Schoenfeld (1988), I spent a year in the classroom of a teacher who laid out the content of instruction very carefully for students, in a step-by-step manner. One day I asked him if he had ever thought of giving his students a problem and letting them play with it. “No”, he said, “that would just confuse them. I do that with my honors students”. I visited his honors class, and that is what he did. What this indicates is that his beliefs were context-specific. He possessed the relevant pedagogical content knowledge, but he only used it in contexts where he felt it was appropriate.

Do slide “Critérios de correção: Reginaldo”:

Então eu acho que não cabe mais ficar fazendo essas revisões de prova, ainda mais depois das falas do professor Eduardo, porque... dá para entender que... eu não consigo compreender, porque... ele é um professor concursado... né? Professor doutor, concursou... já deu aula, é... em várias disciplinas, e ainda ele não sabe como... como é um critério de correção de prova, como elaborar uma prova?

Do [FeynmanBrinc]:

Por fim, eu disse que não conseguia ver como alguém era capaz de se formar nesse sistema de automultiplicação, em que as pessoas são aprovadas em exames e ensinam outras pessoas a passar nos exames, mas ninguém sabe nada. “No entanto”, falei, “devo estar errado. Havia dois alunos muito bons na minha turma, e um dos físicos que conheço se formou inteiramente no Brasil. Portanto, deve ser possível para algumas pessoas abrir caminho em meio a esse sistema, mesmo ele sendo tão ruim.”

(...)

Então aconteceu uma coisa totalmente inesperada. Um dos estudantes se levantou e disse: “Sou um dos alunos a quem o sr. Feynman se referiu. Eu não fui educado no Brasil. Estudei na Alemanha e só vim para o Brasil este ano.”

O outro estudante que tinha se saído bem disse alguma coisa parecida. E o professor que mencionei levantou-se e disse: “Estudei aqui no Brasil durante a guerra, quando, por sorte, todos os professores tinham deixado a universidade, então aprendi tudo estudando sozinho. Assim, não fui na verdade educado dentro do sistema brasileiro”.

Indícios fortes de cola

Na P2 de Cálculo 2 de 2024.1 cinco alunos resolveram um item da prova fazendo exatamente o mesmo passo maluco. Eles fizeram isso aqui,

$$\left(\begin{array}{l} f''(x) - 3f'(x) - 28f(x) = 0 \\ D^2 f - 3Df - 28f = 0 \\ (D^2 - 3D - 28)f = 0 \\ (D - (7 - 4)D - (7 \cdot 4))(C_1 e^{7x} + C_2 e^{-4x}) \end{array} \right)$$

com os parênteses grandões do lado de fora, e a quarta linha da coisa entre parênteses era sempre uma **expressão sem sinal de '='**, e cada pessoa cometia outros erros, como D ao invés de D^2 , parênteses faltando ou sobrando, coisas assim.

Ou:

- eles tinham colado – só que eu não tinha como provar isso – ou:
- eles tinham estudado juntos e decorado um método que eles que tinha um passo que eles não faziam a menor idéia do que queria dizer...

Eu já tinha disponibilizado um monte de material sobre quais seriam os meus critérios de correção, e esse material tinha uma parte que explicava o que eu faria quando vários alunos fizerem o mesmo erro sem pé nem cabeça no mesmo lugar... eu anularia a questão de todos eles e eu recomendaria que eles fizessem requerimentos de revisão de prova, porque as bancas de revisão costumavam corrigir cada prova “individualmente” e costumavam ignorar tudo que eu considerava como “indícios de cola” – e **costumavam desanular** as questões que eu anulava. Veja um exemplo aqui:

<https://anggtwu.net/2025-06-26-bel.html#indicios-fortes-de-cola>

O meu material explicava que eu tinha inventado esse critério pra incentivar eles a estudarem de uma certa forma... estudar decorando passos que eles não entendiam seria tão arriscado que eles teriam muito mais motivação pra tentar entender os passos mais complicados – mesmo que eles fossem do tipo “putz, eu nunca vi algo tão abstrato, vou deixar pra entender isso depois”.

Note que “indícios de cola” não tem **nada a ver** com “eu vi a pessoa colar”.

Material sobre chutar e testar

Chutar e testar

[WebbAbels, p.102, p.108]

[DrijversBoonReeuwijk, p.180]

De [GrayTall, p.135]:

The less able child who is fixed in process can only solve problems at the next level up by coordinating sequential processes. This is, for them, an extremely difficult process. **If they are faced with a problem two levels up, then the structure will almost certainly be too burdensome for them to support** (see Linchevski & Sfard, 1991). Multiplication facts are almost impossible for them to coordinate while they are having difficulty with addition. Even the process of reversing addition to give subtraction is seen by them as a new process (count-back instead of count-up).

The more able, proceptual thinker is faced with an easier task. The symbols for sum and product again represent numbers. Thus counting, addition, and multiplication are operating on the same procept, which can be decomposed into process for calculation purposes whenever desired. A proceptual view that amalgamates process and concept through the use of the same notation therefore collapses the hierarchy into a single level in which arithmetic operations (processes) act on numbers (procepts).

In any group of 30 children...

De [DuckworthTE, p.311]:

What one can assume, without any diagnostic tests at all, is that **in any one group of thirty children** – no matter how much one has tried to homogenize them – there will be enormous variations in levels of understanding and in breadth and depth of knowledge already developed. **Certainly we would want each child to have the occasion to work at his or her own level.** The solution for the teacher, however, is not to tailor narrow exercises for individual children, but rather to offer situations in which children at various levels, whatever their intellectual structures, can come to know parts of the world in new ways. It is not an easy job, but how much more interesting a human enterprise it is. And how much more to the point it is to think of a child's education as knowing and learning about how the world works than to attempt to resolve the dilemma in the title.

Alfabetização e chutar-e-testar

De [FerreiroTebLBS, p.7 e p.8]:

In 1962, extremely important changes arose in our understanding of oral language development in children. There was a virtual revolution in this field which had been dominated by behaviorist models.

(...)

Our current vision of the process is radically different: instead of children who passively await external reinforcement of a response produced at random, **we see children who actively attempt to understand the nature of the language spoken around them, and, in trying to understand it, formulate hypotheses, search for regularities, and test their predictions.** Consequently they form their own grammar, which is not simply a deformed copy of the adult model but an original creation. Instead of receiving bit by bit a language entirely fabricated by others, children reconstruct language for themselves, selectively using information provided by the environment.

De [MendoncaPsicLE, p.38]:

A pesquisa mostrou que o analfabeto adulto, assim como as crianças, sabem, mesmo antes de vir para a escola, que a escrita é um sistema de representação e fazem hipóteses de como se dá tal representação. Entretanto, Fuck (1993, p. 40) verifica: “Diferente das crianças, começamos a observar que o alfabetizando (sic) adulto já superou o nível pré-silábico. Ele tem muito claro que se escreve com letras e qual a função social da escrita, (mas esta é uma observação ainda prematura).” Ocorrência esta que Ferreiro (1983) já havia notado, quando observa que, enquanto é muito fácil conseguir de uma criança pré-alfabetizada produções escritas, no adulto analfabeto a “consciência de não saber” é muito forte e ele se sente incapaz de tentar escrever.

De [MendoncaPsicLE, p.51]:

Pedir ao aluno que escreva do seu jeito: outra orientação era a de pedir aos alunos que escrevessem da forma como sabiam, para que não fossem reprimidos como a cartilha fazia, ao permitir que escrevessem usando apenas elementos dominados. Essa orientação era interessante, **seu objetivo era o de incentivar o aluno a escrever sem medo; entretanto, aos professores era estranho ver alunos rabiscando, pensando que escreviam histórias. Mas o principal problema não era o fato de tentarem escrever sem a mínima noção de escrita, mas a distância que há entre o trabalho de nível pré-silábico para o de nível alfabético (produção de escrita significativa - textos).**

“Abaixo do nível deles”

De <http://anggtwu.net/2026-logica-para-pessoas.html#20:00>:

O Feynman passou pelo Brasil algumas vezes e em 52 ele passou um tempo dando aula no CBPF. Aí ele descobriu que quando ele dava as aulas dele, e quando os outros davam aulas, os alunos não entendiam nada. Os alunos decoravam tudo, mas não absorviam o significado de nada. E ele começou a tentar entender o que tava acontecendo ali... e ele fez uns comentários bem interessantes. É... ele descobriu que... bom, ele tentou ensinar os alunos a resolverem problemas por tentativa e erro, que era uma coisa que eles normalmente não aprendiam... aí ele tentou ensinar o método para para testar coisas... por tentativa e erro, e só 10% dos alunos resolveram a primeira tarefa. Aí o Feynman deu um esporro neles dizendo que eles precisavam tentar... e aí uns alunos fizeram uma delegação depois, e disseram que ele, Feynman, não entendia a formação deles. Eles eram “**capazes de estudar sem resolver problemas**”... eles já tinham aprendido Aritmética e coisas assim, e as coisas que ele tava dizendo estavam “**abaixo do nível deles**”. E é exatamente isso que tá acontecendo com os meus alunos. Eles estão chegando com uma noção bizarra de Matemática em que “entender Matemática” para eles é algo totalmente diferente do que “entender Matemática” para mim. **Então pra alguns deles entender alguma coisa de Matemática é você, por exemplo, saber explicar ela em Por-**

tuguês... Aí eles decoram a explicação em Português e acham que entenderam. Deixa eu fazer um modelinho mental pra eu explicar as coisas que vão vir depois. Vamos pensar num aluno. Bom, tem vários tipos de aluno, né? Então vamos pensar que tem os alunos que estudam muito e os alunos que estudam pouco. Os que estudam pouco não nos interessam. Vamos pensar só nos alunos que estudam muito. A gente pode estar falando de um aluno que “estudou decorando” no sentido do CBPF... eu vou chamar ele de Alex, só porque começa com A, não é o Alex que me convidou para cá... e um outro aluno que “estudou entendendo”. Então esse estudou no estilo CBPF, esse estudou no estilo Feynman... são o Alex e o Bob. Se eles forem fazer a prova do CBPF - vou simplificar um pouquinho, tá? O aluno que estuda decorando tira 10 e o outro tira uma nota muito baixa... digamos 0, pra simplificar. Então o cara que entendeu se ferrou e era para ele ter aprendido que ele não tem tempo pra entender nada, ele tem mesmo é que decorar. Mas se eles forem fazer a prova do Feynman acontece o contrário... O aluno que estudou decorando tira 0 e o aluno que estudou entendendo tira 10. E aí **se tudo der certo** o Alex, que estuda decorando, ele vai pensar: “**Eu preciso aprender outro jeito de estudar**”. Então olha esse diagraminha daqui. Tem alunos que estudam entendendo, alunos que estudam decorando, e **alguns** alunos que estudam decorando viram alunos que estudam entendendo.

O seu filho é burro

Dona Fulana, eu tou dando um curso em que os alunos têm que aprender a descobrir coisas eles mesmos, e a gente tá estudando um monte de técnicas pra reconhecer padrões, fazer hipóteses e testar hipóteses... eu até já mostrei pra todos os alunos – inclusive pro seu filho – todos os artigos e livros dali da direita, mas o seu filho não quer aprender nada disso, e ele também não quis mudar pra outra turma de Cálculo 2, que usa a Pedagogia da Decoreba, e que eu já disse pra ele que ele ia ser dar bem melhor lá...

Dona Fulana, o seu filho não quer aprender o que a gente chama de “chutar e testar”, que é base pra todo o resto, e ele acha que isso é coisa de gente inferior. Ele também não entende o que é “treinar”, não entende o que é “pensar no papel”, não entende pra que serve fazer contas no papel e discutir elas com os colegas... e ele continua na minha turma, Dona Fulana!!!

Dona Fulana, o seu filho é burro, e eu recomendo que a senhora jogue ele fora e faça outro.

Material sobre assombrações

Assombrações

Tem um filme de terror/suspense com a Christina Ricci chamado “The Gathering”, que é sobre uma cidadezinha da Inglaterra em que:

- estão acontecendo umas coisas sinistras,
- e uns arqueólogos estão escavando uma igreja do Século I, recém-descoberta,
- nessa igreja tem um cristo crucificado que fica de costas pro público e pro padre e de frente pra um painel no fundo da igreja,
- esse painel mostra várias figuras que estão assistindo a crucificação passivamente, por pura curiosidade mórbida...
- em cada tragédia que acontece nessa cidadezinha aparece um grupo de pessoas misteriosas que ficam assistindo a tragédia passivamente, *por pura curiosidade mórbida*, e desaparecem depois...
- e no final a gente descobre que essas pessoas são exatamente as que assistiram a crucificação de cristo, que são imortais e estão amaldiçoadas, condenadas a repetirem isso por toda a eternidade.



Como lidar com assombrações?

Na historinha do Feynman no CBPF tem uns alunos que só sabiam estudar “decorando”, não sabiam estudar “entendendo”, e aí eles nem conseguiam perguntar nada...

No meu slide sobre o CBPF o Alex tira 0 na prova do Feynman e pensa: **preciso aprender outros modos de estudar.**

Isso acontece de vez em quando nas minhas aulas, e esses Alexes viram alguns dos meus alunos mais empolgados...

...mas tem um monte de alunos que não interagem de jeito nenhum, e eu só consigo descobrir um *pouquinho* sobre como eles pensam vendo as provas deles – **eu fotografei as provas deles e reli elas dezenas de vezes...**

...e lendo as reclamações que eles fazem na coordenação. A coluna do meio é um trecho do ofício com as reclamações deles; e lembre que eu só recebi isso 8 meses depois do fim de semestre...

4) Metodologia de ensino baseada em repetição (“Integre como um macaco”) e **tentativa e erro**, sem desenvolvimento de pensamento crítico. Essa abordagem vai de encontro ao perfil profissional do egresso em Engenharia de Produção da UFF, que tem como principais características:

I - ter visão holística e humanista, ser crítico, reflexivo, criativo, cooperativo e ético e com forte formação técnica;

II - estar apto a pesquisar, desenvolver, adaptar e utilizar novas tecnologias, com atuação inovadora e empreendedora;

III - ser capaz de reconhecer as necessidades dos usuários, formular, analisar e resolver, de forma criativa, os problemas de Engenharia;

IV - adotar perspectivas multidisciplinares e transdisciplinares em sua prática;

V - considerar os aspectos globais, políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e de segurança e saúde no trabalho;

5) Dificuldade de diálogo com o professor, principalmente para sanar dúvidas.

Compare com este trecho da história do Feynman:

Depois da aula, alguns alunos vieram a mim numa pequena delegação e disseram que eu não entendia a formação deles, **que eles eram capazes de estudar sem resolver problemas**, que já tinham aprendido aritmética e que as coisas que eu estava dizendo estavam abaixo do nível deles.

Como lidar com assombrações (2)?

Até pouco tempo atrás eu achava que a maioria dos “alunos que não interagem” eram só tímidos, inseguros, tinham “math anxiety” e coisas assim... mas hoje em dia o meu modelo mental é diferente.

Hoje em dia eu acho que muitos – talvez 90% – dos “alunos que não interagem” *não vão interagir de jeito nenhum...* nem que eu implore, nem que eles tenham todo o apoio pra começar fazendo perguntas péssimas, nem que eles tirem 0 na P1 e 0 na P2 porque só estudaram “coisas de quem decora”, nem que eles sejam reprovados n vezes, etc, etc...

Um bom jeito pra gente pensar nisso é imaginar que eles são **viciados em ChatGPT**, no sentido do artigo do Ronald Purser na Current Affairs, “*AI is Destroying the University and Learning Itself*” ([Purser])...

Esses alunos querem “passar fazendo o mínimo possível de esforço”, querem “aprender o mínimo possível”, e “não querem que ninguém descubra nada do que eles pensam”...

Até um tempo atrás eu achava que eu podia pedir coisas tipo isso pra eles: “*peçam pra algum amigo músico de vocês, se possível um amigo baterista, tentar tocar só a parte da mão direita do exercício abaixo*” – o exercício 1 do “Syncopation”, do Ted Reed – “*ele provavelmente vai dizer ‘caraca, eu vou precisar de uma semana pra conseguir tocar direito os compassos 10, 11 e 12’... e peçam pra ele explicar pra vocês porque é que ele só vai conseguir tocar isso direito se **treinar** bastante.*”

Como lidar com assombrações (3)

Eu falei *bem rápido* sobre assombrações na minha apresentação no World Logic Day 2026. A transcrição desse trecho está aqui:

<http://anggtwu.net/2026-logica-para-pessoas.html#22:59>

Vamos imaginar que a gente divide os alunos em 6 tipos, ao invés de em 3 tipos como no link acima:

1. Alunos que estudam entendendo,
2. Alunos que estudam decorando,
3. Assombrações tipo **T**,
4. Assombrações tipo **M**:
5. Assombrações tipo **R**.
6. Assombrações tipo **V**.

Na apresentação eu falei que os alunos do tipo 2 às vezes viram alunos do tipo 1. Nesse modelo novo a gente tem 4 tipos de assombrações: as do tipo ‘T’, que são os alunos incrivelmente **T**ímidos, as do tipo ‘M’, que são os alunos que estão acostumados a **M**entir, as do tipo ‘R’, que são os alunos que tentam resolver tudo **R**eclamando na Coordenação, e as do tipo ‘V’, que são os **V**iciados em ChatGPT.

Antigamente eu achava que se eu fosse muito legal e criasse um ambiente muito bacana nas aulas *quase todos* os alunos tímidos iam conseguir participar... mas hoje em dia eu tou bem mais pessimista, e acho que a) eu tenho que me preparar pra lidar com turmas com 50% de assombrações, e b) hoje em dia as assombrações do tipo **T** são uma fração pequena das assombrações todas, e é tão difícil distinguir as assombrações do tipo ‘T’ das dos tipos ‘M’, ‘R’ e ‘V’ que é melhor eu DAR UM JEITO de fazer todas as assombrações decidirem se mudar pras outras turmas de C2 e C3, que são dadas pelo Reginaldo e pelo Rômulo...

Não dá pra dizer “vou dar um curso que prepare vocês pro mercado de trabalho” porque existem vários tipos de trabalhos. Alguns são como o da historinha do Bob e do FuDados, em que vale super a pena ser honesto; em outros o melhor jeito de progredir é apoiar o seu chefe quando ele faz piadas sobre estupro; e em outros o que vai funcionar melhor é você mentir do jeito certo, dizer que foi você que fez as tarefas que os seus colegas fizeram, e convencer o seu chefe de que os seus erros foram culpa de outras pessoas...

Também existem vários tipos de cursos. Por exemplo na historinha do Feynman no CBPF tinha os “cursos de decorar” e os “cursos de entender”...

Eu tou tentando dar um curso que vá funcionar bem pras pessoas que:

- fizeram um ensino médio péssimo,
- aprenderam pouco em Cálculo 1 e GA,
- e tiveram pouco contato até hoje com as técnicas pra “entender” matemática,
- MAS QUE querem aprender mais sobre como “entender” ao invés de “decorar”,
- e que conseguem fazer perguntas, mesmo que – óbvio – ainda não saibam todas as técnicas pra fazer perguntas “boas”...

Pra isso eu vou ter que dar um jeito de me livrar das assombrações. **Como?**

Assombrações do tipo ‘M’

As “pessoas do tipo **M**” são as que estão acostumadas a resolver os problemas delas **M**entindo. Até pouco tempo atrás eu achava que as pessoas do tipo **M** eram raras, mas depois do **Sinal do Apocalipse** – veja o “Material Sobre Zumbis” – eu vi que até o meu departamento, que costumava ser cheio de gente legal, agora tá cheio de pessoas que tentam resolver os problemas delas mentindo... **peelo menos quando o problema delas sou eu.**

Imagina um aluno – o **M**atias – que praticamente só convive com pessoas que estão acostumadas a resolver os problemas delas mentindo, e o plano dele pra quando ele crescer é arranjar um daqueles trabalhos em que a pessoa consegue se dar muito bem fingindo que foi ela que fez o trabalho dos outros e fingindo que cada erro que ela comete na verdade foi culpa de outra pessoa. *Se esse aluno é branco, bonito, e é rico, ou tem cara de rico, não é muito difícil arranjar um trabalho assim.*

Imagina que eu passei uma dinâmica de grupo em que as pessoas vão ter que tentar resolver um quebra-cabeça como esse aqui juntas:



Tem um grupo com 5 alunos – o **M**atias, o Bob, o Carlos, o Daniel e o Evandro – em que a única pessoa do tipo **M** nesse grupo é o **M**atias. Os outros quatro estão discutindo, e eles têm muita prática em falar a verdade... então eles não têm nenhuma dificuldade em dizer “isso eu não sei”, e quando eles dão alguma idéia eles sempre deixam claro qual é o **grau de certeza** que eles têm naquela idéia... por exemplo, “**opa, acho que eu tou vendo** um jeito de completar a figura pondo a peça laranja no canto superior direito!” é bem diferente de “**e se** a gente puser a peça laranja no canto superior direito?”

O **M**atias não consegue falar quase nada que preste... *ele está acostumado a fingir que tem certeza de tudo, e quando ele tenta perguntar uma coisa a linguagem corporal dele é a linguagem corporal de alguém que está acostumado a mentir e mandar, e os outros notam isso.*

Pro **M**atias conseguir discutir direito com os colegas – tanto nessa atividade quanto nos exercícios em grupo que tem em todas as aulas – **ele vai ter que aprender uma linguagem que é totalmente nova pra ele...** e que talvez seja oposta a algumas coisas que ele acredita, porque muitas pessoas do tipo ‘M’ acreditam que “honestidade é coisa de otário” e outras coisas assim. O **M**atias vai ter muita dificuldade no meu curso, e ele provavelmente vai colar na prova e vai fazer reclamações falsas contra mim na coordenação.

Assombrações do tipo ‘R’

Lembre que as assombrações dos tipos ‘M’ e ‘R’ tentam resolver os problemas delas:

- **M**entindo, e
- **R**eclamando na coordenação

Imagina que tem duas alunas na turma de C2 que são assombrações do tipo ‘R’, a **R**enata e a **R**afaela, que são bem diferentes mas se dão muito bem.

A **R**enata é super religiosa, acha que eu sou um demônio comunista, que eu uso métodos paulofreireanos, e coisas assim.

A **R**afaela é de família rica, é uma pessoa de tipo ‘**M**’ além de ser de tipo ‘**R**’, e ela quer fazer reclamações falsas na coordenação de EP porque ela sabe isso que isso não vai dar problema pra ela de jeito nenhum, e ela considera que isso é um bom treino pro futuro profissional dela...

...e aí elas fazem uma reclamação dizendo que eu não dou matéria e que nas minhas aulas a gente faz uma rodinha e fica dançando ciranda.

Isso parece absurdo? Não é não... dê uma olhada nos links na minha página principal pra ler:

- sobre a época em que qualquer reclamação falsa contra mim era aceita automaticamente e tratada como se fosse verdade,
- sobre 2022.2, em que eu segui os regulamentos todos à risca e os meus coleguinhas de departamento ATÉ HOJE se recusavam a ver as provas disso, e
- sobre os meus coleguinhas zumbis – PRINCIPALMENTE O WALTER, que lembrem, já foi o nosso professor mais lúcido e íntegro, mas estragou – que só querem saber se tem reclamações contra mim ou não, mas não querem olhar de jeito nenhum quais reclamações são essas e nem como eu respondi publicamente a elas.

Vou supor que todo mundo leu estas seções:

<https://anggtwu.net/2025-ordens-burras.html#e-obvio>

<https://anggtwu.net/2025-ordens-burras.html#aula-de-chinelo>

A **R**enata “sabe” que os métodos que eu estou usando estão “errados”... mas ela não entende que:

- as minhas “aulas de chinelo” funcionam super bem pra muitos alunos inseguros que não conseguiam terminar uma única frase porque eles sempre achavam que o que eles iam falar ou escrever tava ruim,
- eu não consigo descobrir o que funcionaria com a **R**enata **porque ela não fala comigo, ela só fala com a coordenação**, e eu só fico sabendo das reclamações dela 8 meses depois do curso terminar, e
- **ela tem informações que eu preciso!!!** Se ela me contasse coisas sobre as escolas em que ela estudou eu conseguiria encontrar um método que funcionaria também pras pessoas como ela.

Níveis de alfabetização

De [LemleGTA, p.27]:

A avaliação das falhas de escrita

Da classificação feita a partir dos três diferentes tipos de acoplamento entre sons e letras em nosso sistema de escrita, derivamos um percurso que o aprendiz das letras deve fazer até se assenheorar completamente do sistema.

Por meio desse enfoque, podemos estabelecer objetivamente um critério prático para avaliar os erros de escrita e de leitura cometidos pelo alfabetizando. Além disso, podemos utilizar a avaliação dos erros para diagnosticar com bastante precisão em que etapa do processo de aquisição o aluno se encontra.

Falhas de primeira ordem

Se o aprendiz ainda está na fase de dominar as capacidades prévias da alfabetização, as falhas cometidas são leitura lenta, com soletração de cada sílaba, e escrita com falhas na correspondência linear entre as seqüências dos sons e as seqüências das letras: repetições de letras (ppai em vez de pai, meeu em vez de meu), omissões de letras (trs em vez de três, pota em vez de porta), trocas na ordem das letras (parto em vez de prato, saída em vez de saída), falhas de correntes

do conhecimento ainda inseguro do formato de cada letra (rano em vez de ramo, laqis em lugar de lápis, eua em lugar de lua), falhas decorrentes da incapacidade de classificar algum traço distintivo do som (sabo em vez de sapo, gado em lugar de gato, pita em lugar de fita).

Falhas de segunda ordem

Se o aprendiz está retido na etapa monogâmica da sua teoria da correspondência entre sons e letras, ignora as particularidades na distribuição das letras. Na leitura, pronuncia cada letra escandindo-a no seu uvalor central. Sua escrita é como uma transcrição fonética da fala. As falhas típicas são como as dos exemplos seguintes:

- *matu* em vez de *mato*;
- *bodi* em vez de *bode*;
- *tempo* em vez de *tempo*;
- *azma* em vez de *asma*;
- *genro* em vez de *genro*;
- *eles falão* em vez de *eles falam*.

Falhas de terceira ordem

Se o aprendiz já escalou o terceiro patamar do saber ortográfico e incorporou a terceira versão da teoria da correspondência entre sons e letras, suas falhas se limitarão às trocas entre letras

concorrentes:

- *ação* em vez de *assado*;
- *trese* em vez de *treze*;
- *acim* em vez de *assim*;
- *jigante* em vez de *gigante*;
- *xinelo* em vez de *chinelo*;
- *chingou* em vez de *xingou*;
- *pureza* em vez de *pureza*;
- *sau* em vez de *sal*;
- *craro* em vez de *claro*;
- *operaro* em vez de *operário*.

Na leitura em voz alta, o aprendiz de terceira etapa já é capaz de pronunciar as palavras de maneira natural, reduzindo devidamente as vogais finais.

Esse critério de ponderação das falhas ortográficas e de leitura pode ser muito útil na prática do ensino, servindo para diagnosticar em que estágio da elaboração da teoria da correspondência entre sons e letras o aprendiz se encontra. Em decorrência disso, pode ser transformado em critérios fundamentados de avaliação dos alunos e dos mestres.

O aprendiz que ainda comete falhas de segunda ordem não completou sua alfabetização. Será considerado alfabetizado aquele em cuja escrita só restarem falhas de terceira ordem, que serão superadas gradativamente, com a prática da leitura

e da escrita. Uma expressão espontânea, criativa e cheia de falhas de terceira ordem é preferível a uma escrita correta e atada.

É de fundamental importância que o professor saiba diagnosticar e avaliar as falhas de escrita cometidas por seus alunos, aproveitando-as como evidência do patamar de saber já atingido e do ainda por atingir. O professor só deve cobrar do aluno tarefas compatíveis com a etapa de saber atingida. Assim, se num ditado fica evidente que certos alunos ainda estão cometendo muitas falhas de primeira ordem, o professor não pode propor tarefas de escrita que requerem leitura e compreensão de um texto. Até mesmo tarefas que exigem a leitura das frases do enunciado da questão são prematuras, em casos de alunos que apresentam erros de primeira ordem.

Tarefas como responder perguntas, fornecer sinônimos ou antônimos, escrever formas do plural ou do feminino e redigir por conta própria são prematuras para um aluno que está percorrendo o primeiro patamar do saber da escrita. Para essas tarefas, o estágio adequado é o do segundo patamar. A introdução de tarefas prematuras só servirá para retardar o progresso do aluno.

Assombrações do tipo ‘T’

O **P**edrinho é criança, tá se alfabetizando, e tá na fase **P**ré-silábica. Ele faz um exercício de ditado na escola, e o resultado é assim:



...e ele tem CERTEZA de que escreveu EXATAMENTE o que a professora pediu.

O **A**ndré é um pouco mais velho do que o **P**edrinho, e ele tá aprendendo **A**ritmética. O **A**ndré sabe tanto sobre multiplicação de números de um dígito que ele viu que nem precisa decorar o resultado de 7×8 – ele sabe deduzir esse resultado de vários jeitos.

O **A**ndré ainda não sabe multiplicar números de dois dígitos. Um dia ele faz uma prova sobre multiplicar números de dois dígitos, e nessa prova saber multiplicar números de um dígito não vale ponto nenhum.

Ele tira 0 nessa prova e vai pra casa chorando MUITO.

De:

<https://anggtwu.net/2026-logica-para-pessoas.html#11:20>

...pra muitos alunos esse tipo de coisa aqui é assustador. Eles ficam com cara de pânico e pela cara deles a gente vê que eles nunca viram algo tão abstrato na vida. E a reação deles quando eles fazem essa cara de “eu nunca vi algo tão abstrato na vida” é de pensar: “eu vou deixar pra aprender isso depois, ou mais depois, ou mais depois ainda”...

...e não aprendem **NUNCA**.

De:

<https://anggtwu.net/2026-logica-para-pessoas.html#31:37>

essa é uma fórmula em vários níveis de abstração (...) Cálculo 2 é um curso bizarro porque ele é cheio dessas coisas (...) em que o nível de de abstração fica oscilando loucamente...

De:

<https://anggtwu.net/2026-logica-para-pessoas.html#40:22>

a idéia de níveis de Van Hiele sobre níveis de abstração (...) se a gente tá num determinado nível de abstração a gente consegue fazer as coisas do nível seguinte com *uma certa dificuldade*, e as coisas de dois níveis acima são *praticamente impossíveis* pra gente.

Eu reli as provas dos alunos de C2 de 2025.1 centenas de vezes. Mais ou menos uma semana antes de cada prova eu dava um PDF com dicas pra prova que explicava como ias ser as questões, como eu ia corrigi-las, e o que os alunos tinham que treinar, e os alunos que treinavam em sala e em casa tiravam notas altíssimas na prova, tipo de 8.5 pra cima... mas muitos outros alunos tiravam notas ínfimas porque não faziam idéia do que eram as coisas que valiam ponto em cada questão – que nem o Pedrinho, que não sabia o que era sílaba, e que nem o André, que sabia multiplicar números de um dígito muito bem mas não sabia multiplicar números de dois dígitos, que era o que valia ponto.

A **T**ânia é uma assombração **T**imida. Ela chegou em C2 indo até o nível de abstração 10, que nem quase todo mundo, mas as coisas que valiam pontos na prova estavam no nível 40... e ela estudou 100 horas durante o semestre mas estudou as coisas erradas, e se ferrou nas provas.

Se ela tivesse gasto metade desse tempo “aprendendo a perguntar” teria dado tudo certíssimo.

O problema do “é óbvio”

O **Y**ago estudou numa escola experimental em que os alunos começavam o dia fazendo 20 minutos de ‘Y’oga.

A **O**lívvia estudou numa escola religiosa em que os alunos começavam o dia ‘O’rando por 20 minutos.

A **M**aria estudou num colégio ‘M’ilitar e lá eles começavam o dia fazendo 20 minutos de Ordem Unida.

A **V**erônica estudou numa escola que fazia um “‘V’estibular simulado” todo sábado. Na verdade era um simulado pro ENEM, mas eles mantiveram o termo antigo.

O **B**runo fica PUUUTO quando não tem aula expositiva. Ele é um “maníaco das horas-‘B’unda”, como no texto abaixo...

Nos últimos dias, tem gerado bastante discussão um vídeo (...) gravado por um estudante do curso de Administração da USP. Nele, um grupo de estudantes negros toma alguns minutos da aula para, em linhas gerais, abordar o racismo estrutural da Universidade de São Paulo, mas são interrompidos pela professora e também por alguns alunos que, nas suas palavras, “querem ter aula”. O episódio evoca uma série de temas e, entre todos eles, quero aqui destacar um perfil de estudante que as melhores universidades do País têm selecionado em seus vestibulares e, cumprindo sua função social, seguem formando em seus espaços acadêmicos: o maníaco das horas-bunda.

Todos eles fazem reclamações contra mim na coordenação da EP. Eles todos acham óbvio que o meu modo de dar aula está errado e que o modo com que eles estavam acostumados estava certo... *e eu só fico sabendo das reclamações deles 8 meses depois do curso acabar.*

Deixa eu me concentrar no caso da escola militar. Pra maioria das pessoas de fora começar as aulas fazendo Ordem Unida parece uma idéia de jerico, mas pra Maria era óbvio que isso funcionava muito bem...

Quem costumava comandar a Ordem Unida era o **S**argento, e pra ele também era óbvio que isso era exatamente a coisa certa pra preparar os alunos pra aprenderem direito.

Se a gente pedisse pra Maria explicar como a Ordem Unida funcionava ela não saberia explicar, e o Sargento também não ia saber explicar bem - pra eles isso era óbvio, e quem não entendia era burro. Mas a Maria e o Sargento só achavam isso óbvio porque eles tinham aprendido com outras pessoas...

O **G**eneral do batalhão entendia super bem como a Ordem Unida funcionava “pedagogicamente”, e ele até já tinha dado entrevistas e escrito livros e artigos sobre isso.

O General está acostumado a conversar com pessoas que não acham isso óbvio - e aí eu leio alguns livros, artigos e entrevistas do General e consigo entender porque esse método didático funciona muito bem pra certos tipos de alunos, em certas situações, quando eles precisam aprender certos assuntos de certos jeitos.

Se a Maria tivesse conversado comigo e tivesse me dito o nome do General, ou pelo menos tivesse me dito o nome da escola em que ela estudou, ela teria me dado informações que me ajudariam a melhorar o meu curso... mas tem um monte de tipos de alunos que preferem não me falar comigo de jeito nenhum, que não me dão informações que me ajudariam a melhorar o meu curso de jeito nenhum, e que preferem só reclamar com a coordenação, apesar deles saberem que eu já deixei públicas um monte de histórias sobre como a coordenação é incompetente, e os documentos dessas histórias.

Sobre estudar só Matemática

Pra aprender Cálculo 2 você vai ter que aprender muitas coisas que não são consideradas “Matemática”, e se você tentar estudar só Cálculo 2 você vai se ferir... alguns exemplos:

Como é que o seu colega que nem lembrava direito o que era exponencial conseguiu fazer perguntas que todo achou maravilhosas? Agora todo mundo adora ele, e a turma trata ele como o Bob do FuDados... como ele inventou essas perguntas? Que técnicas ele usou?

Você vai ter que descobrir como a sua cabeça funciona. Os seus professores e colegas te convenceram de que o empregado ideal aguenta pressão e não liga pra gritos e nem pra acusações falsas. Você é bom nisso? Você consegue manter 100% da sua concentração no trabalho quando fazem acusações falsas contra você? Ou quando fazem acusações falsas contra um amigo seu? Ou quando fazem acusações falsas contra alguém que nem é amigo seu *mas que poderia ser você?*

O Bob do FuDados criou uma rede de pessoas que se ajudam. Você acha que o “empregado ideal” do parágrafo anterior conseguiria fazer isso?

Lembra que no slide sobre as assombrações do tipo M eu falei sobre o Matias, que “praticamente só convive com pessoas que estão acostumadas a resolver os problemas delas mentindo, e o plano dele pra quando ele crescer é arranjar um daqueles trabalhos em que a pessoa consegue se dar muito bem fingindo que foi ela que fez o trabalho dos outros e fingindo que cada erro que ela comete na verdade foi culpa de outra pessoa”. Como você acha que o Bob do FuDados lidaria com o Matias?

Releia a Dica 7. Imagina que você é uma pessoa que só sabe estudar pelo ChatGPT e todos os seus colegas odeiam tudo o que você fala e tudo o que você escreve. E agora?

Na greve de 2024 eu dei uma oficina de Software Livre, e como sempre não foi nenhum aluno do ICT... bom, todo mundo sabe que eles não têm nenhum interesse nessas coisas. Só uma pessoa foi – a Nina, uma aluna da Produção Cultural – e ela ADOROU a oficina. No final a gente ficou conversando e eu falei que tem um monte de coisas que eu queria aprender, e que “todos os jovens sabem usar” mas que pra mim são difíceis, porque eu sou um dinossauro acostumado com interfaces antigas, e eu disse “por exemplo, Canva”... E A NINA ME ENSINOU A USAR O CANVA EM 10 MINUTOS, E ISSO MUDOU A MINHA VIDA – eu finalmente entendi que quase todos os alunos do ICT aprendem a não ajudar os outros. Em lugares melhores as pessoas aprendem a se ajudar a criar redes, como o Bob do FuDados, mas no ICT eles aprendem exatamente o contrário disso.

Nas minhas aulas de C2 eu vou repetir muitas vezes que eu quero melhorar o curso e que pra isso eu preciso saber as dúvidas dos alunos. Eu vou escrever isso no quadro mil vezes, vou escrever “PELO AMOR DE DEUS”, e vou dizer que eu vou tratar as pessoas que não me ajudarem com isso como se elas fossem pessoas que o vizinho de mesa delas pede “me passa o sal?” e elas não passam, e o vizinho diz “pelamordedeus, a minha pressão tá super baixa, me passa o sal”, e mesmo assim elas não passam o sal.

Você vai descobrir que você não consegue me ajudar nem que seja pra salvar a sua mão direita, e você não sabe explicar porquê. VOCÊ TÁ FUDIDO.

Discurso pras assombrações

Vamos começar pensando em termos de tipos de cursos, tipos de alunos, tipos de trabalhos, etc...

Não dá pra eu dizer “vou dar um curso que prepare vocês pro mercado de trabalho” porque existem vários tipos de trabalhos. Alguns são como o da historinha do Bob e do FuDados, em que vale super a pena ser honesto; em outros o melhor jeito de progredir é apoiar o seu chefe quando ele faz piadas sobre estupro; e em outros o que vai funcionar melhor é você mentir do jeito certo, dizer que foi você que fez as tarefas que os seus colegas fizeram, e convencer o seu chefe de que os seus erros foram culpa de outras pessoas...

Também existem vários tipos de cursos. Por exemplo na historinha do Feynman no CBPF tinha os “cursos de decorar” e os “cursos de entender”.

Imagina que um aluno A faz uma reclamação na coordenação dizendo “no meu curso de Cálculo 2 a gente viu tudo superficialmente. A gente tem o direito de ter cursos em que a gente aprenda muito”. O aluno B também faz uma reclamação, e a dele é assim: “eu já tou trabalhando, faltam poucas matérias pra eu me formar, e eu considero que o objetivo da faculdade é inserir a gente no mercado de trabalho. Eu tenho direito a um curso de Cálculo 2 em que eu possa ir em poucas aulas e passar estudando pouco e quase só pelo livro, pelo YouTube, e pelo ChatGPT”.

Além disso a gente tem vários tipos de alunos – veja aqui:

<https://anggtwu.net/2025-oficio-da-EP-resp.html#termo>

Por exemplo, temos alunos que não tiveram nenhuma aula de Matemática no Ensino Médio porque a escola deles ficou sem professor, mas que já trabalharam em várias coisas, inclusive comércio, e eles são super bons em “relações interpessoais”, em fazer boas perguntas, e em descobrir coisas sozinhos... e também temos alunos que são o oposto disso, que são incrivelmente tímidos e que querem aulas expositivas em que eles não precisem interagir com ninguém, e que não tenham nem mesmo exercícios em grupo.

Termos improvisados: três alunos imaginários

O **S**teve é um aluno **S**em base.

O **T**iago é um aluno **T**otalmente sem base.

O **Vic**tor é um aluno **Vic**iado em ChatGPT.

O **S**teve não sabe, ou não lembra, coisas como $e^a e^b = e^{a+b} \dots$

Mas o **S**teve sabe fazer boas perguntas.

O **S**teve é ótimo, e turmas cheias de **S**teves são maravilhosas.

O **T**iago acha que Matemática é decorar métodos.

O **T**iago acha que Matemática é decorar métodos *o mais rápido possível*.

O **T**iago sabe resolver $2 + x = 5$, mas quando a gente pede pra ele testar as contas dele ele só sabe fazer as mesmas contas de novo. Idéias como “prova real” e “substituir x por 3” não fazem sentido pra ele.

Lidar com turmas cheias de **T**iaços já era desesperador & apavorante...

...e agora a gente tem turmas cheias de **Vic**tors, o que é $1000\times$ pior.

Termos improvisados: três alunos imaginários (2)

- O **S**teve é um aluno **S**em base.
- O **T**iago é um aluno **T**otalmente sem base.
- O **Vic**tor é um aluno **Vic**iado em ChatGPT.

O **Vic**tor nunca fala comigo nas aulas. As minhas aulas têm uma parte pequena expositiva e o resto é exercícios e discussão, e quando eu passo pelo grupo do **Vic**tor, que tem ele e os amigos A_1 e A_2 , eles só dizem que não têm dúvida nenhuma não, que tá tudo bem.

Na prova o **Vic**tor chegou no resultado certo na questão 2 mas a solução dele tinha um passo sem pé nem cabeça igualzinho ao do A_1 . Eu dou 0 pra ele nessa questão.

Na vista de prova eu peço pra ele me explicar aquilo, e ele só diz coisas como “Tá igual ao livro! TÁ IGUAL! TÁ IGUAL!!!” e “na hora eu sabia, mas agora eu esqueci!!!”

Eu gravo essa cena na câmera do celular, e gravo o dia em que o pai dele vem gritar comigo. Eu digo pra ele fazer um Requerimento de Revisão de Prova (que vai ter uma banca com professores do meu departamento) e uma reclamação na Coordenação de Curso (no depto de Engenharia de Produção). Eu registro tudo, porque eu estou colecionando provas de que tanto o meu departamento quanto a EP estão infestados de zumbis.

Eu ACHO que o Victor e os amigos dele são viciados em ChatGPT, mas eu não tenho provas.

Viciados em ChatGPT

Se eles realmente forem viciados em ChatGPT o **nosso** problema fica bem mais simples. Eles provavelmente são pessoas pras quais estes conceitos aqui não fazem sentido...

- “treinar”,
- “perguntar” (pra outra pessoa),
- “outro modo de estudar”,
- “outra pessoa”,
- “amigo” (humano – o único amigo dele é o ChatGPT),
- “pega mal” – por exemplo, “colar na prova pega mal”,
- “aqui e agora” – eles não conseguem participar de uma aula no “aqui e agora”, depois de poucos segundos eles pensam “vou estudar isso depois”...

Eu vi que eu posso lidar com os “alunos que não interagem de jeito nenhum” só

Bibliografia

References

[BerryDMM]

J. Berry. “Developing mathematical modelling skills: The role of CAS”. In: *ZDM Mathematics Education* 34.5 (2002), pp. 212–220.

[Boaler]

J. Boaler. *Experiencing School Mathematics: Traditional and Reform Approaches to Teaching and Their Impact on Student Learning*. Lawrence Erlbaum Associates, 2002.

- [BoalerMindsets] J. Boaler. *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential Through Creative Mathematics, Inspiring Messages and Innovative Teaching*, 2nd ed. Wiley, 2022.
- [BoothMcGinn] J. L. Booth et al. “And the Rest is Just Algebra”. In: ed. by S. Stewart. Springer, 2017. Chap. Misconceptions and Learning Algebra, pp. 63–78.
- [Buchberger] B. Buchberger. “Should students learn integration rules?” In: *SIGSAM Bulletin* 24.1 (1990), pp. 10–17.
- [ChangBeilock] H. Chang and S. L. Beilock. “The math anxiety-math performance link and its relation to individual and environmental factors: a review of cur-

- rent behavioral and psychophysiological research”. In: *Current Opinion in Behavioral Sciences* 10.C (2016), pp. 33–38.
- [CobbYackelMcClain] P. Cobb, E. Yackel, and K. McClain, eds. *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design*. Lawrence Erlbaum, 2000.
- [CohenMrsOublier] D. K. Cohen. “A Revolution in One Classroom: The Case of Mrs. Oublier”. In: *Educational Evaluation and Policy Analysis* 12.3 (1990), pp. 311–329.
- [CzarnochaDubinksy] B. Czarnocha et al. “One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research”. In:

Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME). Ed. by O. Zaslavsky. Vol. 1. <https://www.igpme.org/wp-content/uploads/2019/05/PME23-1999-Haifa.pdf>. 1991, pp. 95–110.

[DrijversBoonReeuwijk]

P. Drijvers, P. Boon, and M. van Reeuwijk. “Secondary Algebra Education: Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown”. In: ed. by P. Drijvers. Sense, 2011. Chap. Algebra and Technology, pp. 179–202.

- [DrijversLM] P. Drijvers. “Learning Mathematics in a Computer Algebra Environment: Obstacles are Opportunities”. In: *ZDM Mathematics Education* 34.5 (2002).
- [DrouhardTeppo] J. P. Drouhard and A. R. Teppo. “The Future of the Teaching and Learning of Algebra - The 12th ICMI Study”. In: ed. by K. Stacey, H. Chick, and M. Kendal. Kluwer, 2004. Chap. Symbols and Language, pp. 227–264.
- [DubinskyReflAbs] E. Dubinsky. “Advanced Mathematical Thinking”. In: ed. by D. Tall. Kluwer, 2002. Chap. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, pp. 95–123.

- [DuckworthTE] E. Duckworth. “Either We’re Too Early and They Can’t Learn It or We’re Too Late and They Know It Already The Dilemma of “Applying Piaget””. In: *Harvard Educational Review* 49.3 (1979).
- [EllermeijerHeck] T. Ellermeijer and A. Heck. “Differences between the use of mathematical entities in mathematics and physics and the consequences for an integrated learning environment”. In: *Developing Formal Thinking in Physics – First International GIREP seminar 2001*. 2001.
- [EngelbrechtBergsten] J. Engelbrecht, C. Bergsten, and O. Kågesten. “Conceptual and Procedural Approaches to Mathematics in the Engineering Curriculum: Student Con-

- ceptions and Performance”. In: *Journal of Engineering Education* 101.1 (2012), pp. 138–162.
- [FerreiroCTL] E. Ferreiro. *Com todas as letras*. Cortez, 2017.
- [FerreiroTebLBS] E. Ferreiro and A. Teberosky. *Literacy Before Schooling*. Heinemann, 1982.
- [FeynmanBrinc] R. Feynman. “*Só pode ser brincadeira, sr. Feynman!*” Intrínseca, 2019.
- [FillojRojano] T. Rojano E. Filloy. “Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra”. In: *For the Learning of Mathematics* 9.2 (1989), pp. 19–25.

- [FischbeinTacit] E. Fischbein. “Tacit Models and Mathematical Reasoning”. In: *For the Learning of Mathematics* 9.2 (1989), pp. 19–25.
- [FreudenthalChina] H. Freudenthal. *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Kluwer, 2022.
- [FreudenthalDPh] H. Freudenthal. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Kluwer, 1999.
- [GrayTall] E. M. Gray and D. O. Tall. “Duality, Ambiguity, and Flexibility: A “Proceptual” View of Simple Arithmetic”. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 25.2 (1994).
- [GutierrezJaimeEV] A. Jaime A. Gutiérrez and J. M. Fortuny. “An Alternative Paradigm to Evaluate the Acquisition of

- the van Hiele Levels”. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 22.3 (1991), pp. 237–251.
- [GuzdialMorrisonGr] M. Guzdial and B. Morrison. “Growing Computer Science Education Into a STEM Education Discipline”. In: *Communications of the ACM* 59.11 (2016).
- [Halmos] P. R. Halmos. *I Want to be a Mathematician: an Automathography in Three Parts*. MAA, 1985.
- [Harper] R. Harper. *Practical Foundations for Programming Languages, 2nd ed.* Cambridge, 2016.
- [Hewitt1] D. Hewitt. “Arbitrary and Necessary Part 1: a Way of Viewing the Mathematics Curriculum”. In: *For*

- the Learning of Mathematics* 19.3 (Nov. 1999), pp. 2–9.
- [Hewitt2] D. Hewitt. “Arbitrary and Necessary Part 2: Assisting Memory”. In: *For the Learning of Mathematics* 21.1 (Mar. 2001), pp. 44–51.
- [HindleySeldin2008] J. R. Hindley and J. P. Seldin. *Lambda-Calculus and Combinators, an Introduction*. Cambridge, 2008.
- [JonassenRohrerMurphy] D. H. Jonassen and Rohrer-Murphy. “Activity Theory as a Framework for Designing Constructivist Learning Environments”. In: *Educational Technology Research and Development* 47.1 (1999), pp. 61–79.

- [Kindt] M. Kindt. “Secondary Algebra Education: Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown”. In: ed. by P. Drijvers. Sense, 2011. Chap. Principles of Practice, pp. 137–178.
- [Krantz] S. G. Krantz. *How to Teach Mathematics, 3rd edition*. AMS, 2015.
- [Lehtinen] E. Lehtinen, M. Hannula-Sormunen J. McMullen, and H. Gruber. “Cultivating mathematical skills: from drill-and-practice to deliberate practice”. In: *ZDM Mathematics Education* 49.4 (2017), pp. 625–636.
- [LemleGTA] M. Lemle. *Guia Teórico do Alfabetizador*. Ática, 2009.

- [Ma] L. Ma. *Knowing and Teaching Elementary Mathematics (Anniversary Edition)*. Routledge, 2010.
- [MariaLaura] M. L. M. Gomes. *Álgebra e Funções na Educação Básica*. CAED-UFMG, 2013.
- [McGowen] M. McGowen. “And the Rest is Just Algebra”. In: ed. by S. Stewart. Springer, 2017. Chap. Examining the Role of Prior Experience in the Learning of Algebra, pp. 19–39.
- [MendoncaPsicLE] O. S. Mendonça and O. C. de Mendonça. “Psicogênese da Língua Escrita: contribuições, equívocos e consequências para a alfabetização”. <https://acervodigital.unesp.br/handle/123456789/40138>. 2011.

- [MPG] E. Ochs. “Material complementar para Geometria Analítica”. <http://anggtwu.net/LATEX/material-para-GA.pdf>. 2020.
- [NgCanWeTeach] Can we teach digital natives digital literacy? “W. Ng”. In: *Computers and Education* 59.3 (2012).
- [OchsEBL2025] E. Ochs. “Adapting Lean tutorials to the Brazilian case (presentation at the EBL 2025)”. <https://anggtwu.net/math-b.html#2025-eb1>. May 2025.
- [OchsEmacsConf2024] E. Ochs. “Emacs, eev, and Maxima - now! (eev @ EmacsConf 2024)”. <https://anggtwu.net/emacsconf2024.html>. Dec. 2024.
- [OchsIDARCT] E. Ochs. “Internal Diagrams and Archetypal Reasoning in Category Theory”. In: *Logica Universalis*

- 7.3 (2013). <https://anggtwu.net/math-b.html#idarct>.
- [OchsMD] E. Ochs. *On the Missing Diagrams in Category Theory (First-Person Version)*. <https://anggtwu.net/math-b.html#2022-md>. 2022. arXiv: 2401.12345.
- [OchsPanic2024] E. Ochs. “Panic! At Equalities (Versão Teresópolis)”. <https://anggtwu.net/math-b.html#2024-panic-t>. June 2024.
- [PuigRojano] L. Puig and T. Rojano. “The Future of the Teaching and Learning of Algebra - The 12th ICMI Study”. In: ed. by K. Stacey, H. Chick, and M. Kendal.

- Kluwer, 2004. Chap. Symbols and Language, pp. 189–223.
- [Purser] R. Purser. “AI is Destroying the University and Learning Itself”. <https://www.currentaffairs.org/news/ai-is-destroying-the-university-and-learning-itself>. 2025.
- [SchoenfeldArcavi] A. H. Schoenfeld and A. Arcavi. “On the Meaning of Variable”. In: *Mathematics Teacher* 81.6 (1988), pp. 420–427.
- [SchoenfeldMST] A. H. Schoenfeld. “Making sense of teaching”. In: *ZDM Mathematics Education* 48.1 (2016), pp. 239–246.

- [SchoenfeldWhatCounts] A. H. Schoenfeld. “What Counts in Mathematics (and Other) Classrooms? A Framework for Looking at What Matters, and Thoughts About How One Might Use These Ideas for Professional Development”. In: *Proceedings of the Conference on Mathematical Modeling - Teachers College, Columbia University, October 14, 2013*. 2013.
- [SchoenfeldWhenGood] A. H. Schoenfeld. “When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of ‘Well-Taught’ Mathematics Courses”. In: *Educational Psychologist* 23.2 (1988), pp. 145–166.

- [Sfard] A. Sfard. *Thinking as Communicating – Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge, 2008.
- [SfardDualNature] A. Sfard. “On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin”. In: *Educational Studies in Mathematics* 22.1-36 (1991).
- [SfardLinchevskiBAA] A. Sfard and L. Linchevski. “Between Arithmetic and Algebra: in the Search of a Missing Link - the Case of Equations and Inequalities”. In: *Rendiconti del Seminario Matematico - Università e Politecnico di Torino* 52.3 (1994), pp. 279–307.

- [SfardLinchevskiGPR] A. Sfard and L. Linchevski. “The Gains and the Pitfalls of Reification – the Case of Algebra”. In: *Educational Studies in Mathematics* 26.2 (1994), pp. 191–228.
- [Sierpinska] A. Sierpinska. *Understanding in Mathematics*. Falmer, 1994.
- [Snover] J. Snover and A. G. Bell. “Navigating Corporate Giants Jeffrey Snover and the Making of PowerShell”. <https://corecursive.com/building-powershell-with-jeffrey-snover/>. July 2024.
- [SteffeNesherCobb] L. P. Steffe et al., eds. *Theories of Mathematical Learning*. Lawrence Erlbaum, 1996.

- [Steinmetz2025] W. A. C. Steinmetz. “Raciocínio lógico na aprendizagem da matemática”. https://anggtwu.net/tmp/steinmetz__raciocinio_logico_na_aprendizagem_da_matematica.pdf. Feb. 2025.
- [Stewart7] J. Stewart. *Cálculo, vol.1 (7a ed)*. Cengage Learning, 2013.
- [Stewart7vol2] J. Stewart. *Cálculo, vol.2 (7a ed)*. Cengage Learning, 2013.
- [TallCrystalline] D. Tall. “Crystalline Concepts in Long-Term Mathematical Invention and Discovery”. In: *For the Learning of Mathematics* 31.1 (2011), pp. 125–147.
- [TallLongTerm] D. Tall. “And the Rest is Just Algebra”. In: ed. by S. Stewart. Springer, 2017. Chap. Long-Term

Effects of Sense Making and Anxiety in Algebra, pp. 43–62.

[TallThomas] D. Tall and M. Thomas. “Encouraging versatile thinking in algebra using the computer”. In: *Educational Studies in Mathematics* 22.2 (1991), pp. 125–147.

[ThomasRethinking] M. Thomas. “And the Rest is Just Algebra”. In: ed. by S. Stewart. Springer, 2017. Chap. Rethinking Algebra: A Versatile Approach Integrating Digital Technology, pp. 173–201.

[VanHiele] P. M. van Hiele. *Structure and Insight - A Theory of Mathematics Education*. Academic Press, 1986.

- [WebbAbels] D. Webb and M. Abels. “Secondary Algebra Education: Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown”. In: ed. by P. Drijvers. Sense, 2011. Chap. Restrictions in Algebra, pp. 137–178.
- [WheelerMPT] D. Wheeler. “Mathematisation as a Pedagogical Tool”. In: *For the Learning of Mathematics* 21.2 (2001), pp. 50–53.
- [Yalep] F. T. Minh, L. Gonnord, and J. Narboux. “A Lean-based Language for Teaching Proof in High School”. In: *Intelligent Computer Mathematics*. Ed. by V. de Paiva and P. Koepke. Springer Nature Switzerland, 2026, pp. 447–467. ISBN: 978-3-032-07021-0.

[YalepSurvey]

F. T. Minh, L. Gonnord, and J. Narboux. “Proof assistants for teaching: a survey”. In: *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science (EPTCS)*. Vol. 419. J. Narboux, W. Neuper and P. Quaresma. Nancy, France: Springer, July 2024, pp. 1–27. DOI: [10 . 4204 / EPTCS . 419 . 1](https://doi.org/10.4204/EPTCS.419.1). URL: [https : // hal . science / hal - 04705580](https://hal.science/hal-04705580).