

Cálculo 2 - 2025.1

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Cálculo 2 - 2025.1

Aula 1: introdução ao curso

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.2-C2.html>

Índice

Um exemplo do Iezzi	4	Linguagem formal, gramática, sintaxe	22
Sobre aprender A e B	5	Linguagem formal, gramática, sintaxe: figura	23
Manga	6	A linguagem formal de Cálculo 2	24
Outra manga: ‘ \rightarrow ’	7	(Sempre e nunca)	25
Outra manga: justificativa	8	Sintaxe	26
Porquê?	9	Justificativas	27
Eu não sou telepata... ..	10	Atirei o Pau no Gato: seja como o Bob	28
Eu não sou telepata... (2)	11	Imagens de intervalos	29
Como passar em C2: método 2	12	Sobre Português	30
A Banca Maluca	13	Sobre Português (e generalizar)	31
Critérios de correção	14	Banana	32
Fase pré-silábica	15	Unexpected end of input	33
“Meu objetivo é...”	16	“Faz um vídeo explicando o PDF”	34
“Meu objetivo é reprovar pessoas como você”	17	Um post da Ana Leticia de Fiori	35
Árvores caem na prova?	18	Retas reversas	36
Como perder pontos na vista de prova	19	Contexto	37
Pedaço de semicírculo: seja como o Bob	20	Fórmulas e hipóteses	38
“Releia a Dica 7”	21	Sobre aulas expositivas	39
		Formal vs. coloquial	40
		Comentário sobre a P1 de 2020.1	41
		Não	42
		Não (2)	43

Links

[Iezzi1p19](#) (p.11) VII. Relação de implicação
[Iezzi1p20](#) (p.12) IX. Sentenças abertas, quantificadores
[Iezzi1p21](#) (p.13) O quantificador universal
[Iezzi1p93](#) (p.85) Imagem de um elemento
[Iezzi2p9](#) (p.1-B) 1. Potência de expoente natural

Variáveis, igualdade, implicação:

[HarperCap1p9](#) (p.6) Variables are given meaning by substitution
[EllermeijerHeckP6](#) The meaning of variable is variable in mathematics
[MariaLauraAFp13](#) Cada uma das igualdades tem um caráter diferente
[MortariCap9p9](#) (p.136) 9.2.4 Implicação Material

A minha operação $[:=]$ é simples demais:

[HarperCap1p9](#) (p.6) Variables are given meaning by substitution
<https://plato.stanford.edu/entries/logic-combinatory/#ProbSubs>

Sobre “maturidade matemática”:

<https://news.ycombinator.com/item?id=41016650> How to choose a textbook...
 Link original no matheducators.stackexchange

Mangas em Maxima:

`(find-es "maxima" "operator-subst")`
<http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#operator-subst>

Quadros:

[2kQ1](#) (2025.1) Introdução: eu não sou o Antônio

Um exemplo do Iezzi

O volume 2 do Iezzi começa assim:

Sejam a um número real e n um número natural. Potência de base a e expoente n é o número a^n tal que:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \forall n, n > 1 \end{cases}$$

Desta definição decorre que:

$$\begin{aligned} a^1 &= a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a \\ a^2 &= a^1 \cdot a = a \cdot a \\ a^3 &= a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a \end{aligned}$$

Confira:

[Iezzi2p9](#) (p. 1-B) 1. Potência de expoente natural

A maioria das pessoas que sabe muita matemática acha isso óbvio, e se uma outra pessoa pede ajuda pra entender isso elas só dizem “ah, é fácil!” – e traduzem cada expressão daí pra português.

Acontece que isso só é fácil pra quem entende o volume 1 do Iezzi super bem, incluindo essas seções daqui,

[Iezzi1p19](#) (p.11) VII. Relação de implicação

[Iezzi1p20](#) (p.12) IX. Sentenças abertas, quantificadores

[Iezzi1p21](#) (p.13) O quantificador universal

que estão super incompletas, e que são sobre assuntos que todos os meus amigos lógicos consideram super difíceis.

Sobre aprender A e B

Cálculo 2 é uma matéria que tem um nível quase olímpico de dificuldade. Assista esse vídeo aqui,

“The Most Unusual Training - @victoriakalitta”

<http://www.youtube.com/watch?v=i3tGLs5iLl8>



porque eu vou falar bastante de “músculos mentais” e vou fazer algumas comparações com ele.

Cálculo 2 tem vários assuntos que funcionam assim: se você tentar aprender o assunto B direto ele é muito, muito, muito difícil, e você vai gastar – digamos – 200 horas de estudo pra aprender ele... mas se você aprender o assunto A primeiro você consegue aprender os dois assuntos, A e B, em 20 horas ao invés de 200 – e em alguns casos você vai ter que treinar os assuntos A e B muitas vezes, alternando entre eles.

Vou começar com o exemplo do aipim. Considere esta fórmula aqui, que eu vou chamar de [Aipim], e que é sobre uma propriedade da raiz quadrada:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$$

Ela nem sempre é verdadeira. Por exemplo, quando $a = 3$ e $b = 4$, temos:

$$\sqrt{\underbrace{a^2}_{3^2} + \underbrace{b^2}_{4^2}} = \underbrace{a}_{3} + \underbrace{b}_{4}$$

$$\underbrace{\quad}_{9} \quad \underbrace{\quad}_{16} \quad \underbrace{\quad}_{7}$$

$$\underbrace{\quad}_{25}$$

$$\underbrace{\quad}_{5}$$

$$\underbrace{\quad}_{F}$$

Em 2024.1 a gente viu várias vezes que a fórmula [Aipim] era falsa, mas mesmo assim um monte de gente usou ela em contas na prova, e essas pessoas chegaram a resultados errados...

Essas pessoas não treinaram as técnicas pra contas fáceis de revisar e nem as técnicas pra revisar contas, então elas fizeram coisas como isso aqui e não conseguiram ver o erro:

$$y = \sqrt{x^2 - 16} + 5$$

$$= x + 1$$

Compare com isto,

$$y = \sqrt{x^2 - 16} + 5$$

$$= \sqrt{x^2 - 4^2} + 5$$

$$= x - 4 + 5$$

$$= x + 1$$

em que dá pra ver que a justificativa da terceira igualdade é esta,

$$\sqrt{x^2 - 4^2} = x - 4$$

que é um caso particular disto,

$$\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$$

que é uma espécie de [Aipim] – é uma regra que nem sempre é verdadeira.

Repara que no final do vídeo da Victoria Kalitta ela se empurrou exatamente na direção certa. Quando a gente treina salto com vara sozinho no quintal de casa a gente geralmente acha que se a gente saltar 10000 vezes a gente vai aprender a fazer tudo direito... mas geralmente funciona melhor a gente treinar com um treinador que vai nos ajudar a desmontar o movimento final em dezenas de exercícios preparatórios – e aí a gente vai conseguir ver cada aipim nos nossos movimentos, e a gente vai conseguir não fazer aquele aipim de novo no próximo salto.

Manga

Em português “manga” tem dois sentidos totalmente diferentes – manga a fruta e manga de camisa – e às vezes a gente precisa explicar de qual sentido a gente estava falando...

Notação matemática tem um monte de mangas, e, pra piorar, também tem um monte de sinais que **não são escritos**, como alguns sinais de multiplicação, o sinal de exponenciação e o **sinal de aplicação de função** – o **ap** ali de baixo –, e tem algumas operações, como a substituição, que cada livro escreve de um jeito, e que eu vou escrever como $(a+b)[a := 42]$. Compare:

$$\begin{array}{l}
 2(y+z) \Rightarrow 2 \cdot (y+z) \\
 f(y+z) \Rightarrow f \text{ **ap** } (y+z) \\
 (a+b)[a := 42] \Rightarrow (a+b) \text{ **s** } [a := 42] \\
 \hline
 (a+b=b+a) \quad [a := 42] = (42+b=b+42) \\
 \text{expressão original; caso geral; "antes"} \quad \text{substituição; a **vira** 42} \quad \text{expressão nova; caso particular; "depois"}
 \end{array}$$

O Harper escreveria esse $(a+b)[a := 42]$ como $[42/a](a+b)$. Dê uma olhada na página 6 dele, em que ele dá esse exemplo aqui:

$$[\text{num}[2]/x] \text{ plus}(x; \text{num}[3]) = \text{plus}(\text{num}[2]; \text{num}[3])$$

Link: [HarperCap1p9](#) (p.6)

Eu às vezes vou mostrar como entender e como desambiguar as mangas do curso traduzindo elas pra Maxima – veja a coluna da direita.

```

(%i1) Aipim : sqrt(a^2+b^2) = a+b;
(%o1)
      sqrt(b^2 + a^2) = b + a

(%i2) S1 : [ a=3 ];
(%o2)
      [a = 3]

(%i3) S2 : [ b=4 ];
(%o3)
      [b = 4]

(%i4) S3 : [ a=3, b=4 ];
(%o4)
      [a = 3, b = 4]

(%i5) Aipim;
(%o5)
      sqrt(b^2 + a^2) = b + a

(%i6) subst(S1, Aipim);
(%o6)
      sqrt(b^2 + 9) = b + 3

(%i7) subst(S2, Aipim);
(%o7)
      sqrt(a^2 + 16) = a + 4

(%i8) subst(S3, Aipim);
(%o8)
      5 = 7

(%i9) "_s_"(expr,su) := subst(su, expr)$
(%i10) infix("_s_",99,101)$
(%i11) Aipim;
(%o11)
      sqrt(b^2 + a^2) = b + a

(%i12) Aipim _s_ S1;
(%o12)
      sqrt(b^2 + 9) = b + 3

(%i13) Aipim _s_ S1 _s_ S2;
(%o13)
      5 = 7

(%i14) 5=7;
(%o14)
      5 = 7

(%i15) is(5=7);
(%o15)
      false

(%i16)

```

Outra manga: ‘ \rightarrow ’

Dê uma olhada aqui:

MortariCap9p9 (p.136) 9.2.4 Implicação Material

O sinal ‘ \rightarrow ’ tem tantos significados diferentes que eu vou ter que usar um truque pra gente não gastar tempo demais discutindo ele. O truque é esse aqui:

Toda vez que vocês escreverem um ‘ \rightarrow ’ eu – deixo eu repetir: **EU** – vou interpretar ele como uma *implicação material*.

Vocês provavelmente aprenderam o ‘ \rightarrow ’ de um jeito bem bagunçado, em que ele às vezes significava uma implicação material, outras vezes significava uma implicação relevante, e em alguns casos, como em

$$2 + 3 \rightarrow 5$$

ele era a “redução” do λ -cálculo. Os significados do ‘ \rightarrow ’ que *não nos interessam neste curso são esses aqui*:

Lambda2018p2 Expressions (and reductions)

Steinmetz2025p31 Na aritmética escolar... $2 + 3 \rightarrow 5$

https://en.wikipedia.org/wiki/Relevance_logic

A gente vai entender a implicação material aos poucos durante o curso. Primeiro a gente vai fazer os exercícios de “set comprehensions” das páginas 8 a 12 daqui,

MpgP8 Set comprehensions

e aí vocês vão conseguir ver que nestas quatro expressões aqui

- a) $x^2 = y^2 \rightarrow x = y$
- b) $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2. x^2 = y^2 \rightarrow x = y$
- c) $\forall(x, y) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}^2. x^2 = y^2 \rightarrow x = y$
- d) $\{(x, y) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}^2 \mid x^2 = y^2 \rightarrow x = y\}$

A expressão (d) é mais fácil de interpretar que a (c), que é mais fácil de interpretar que a (b), que é BEM mais fácil de interpretar que a (a) — as variáveis livres da expressão (a) estragam tudo.

Exercício. Seja:

$$D = \{(x, y) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}^2 \mid x^2 = y^2 \rightarrow x = y\}$$

Desenhe o conjunto D com ‘ \bullet ’s, como aqui:

MpgP12 Gabarito

Dica: D tem 21 elementos.

Outra manga: justificativa

Link pro quadro da primeira aula de 2025.1: [2kQ1](#)

Eu não sou o Antônio

(Isso vai ser 1000× mais importante do que parece.)

Eu tou há anos adaptando esse curso pra:

- . Pessoas que fizeram um ensino médio péssimo (como 90% dos alunos)

- . Pessoas que erram muito em conta (como eu)

O objetivo do curso é a gente aprender a lidar com algumas contas muito grandes e muito complicadas...

A gente quer aprender a fazer contas fáceis de justificar e de revisar.

Eu também tou há anos ajustando os critérios de correção pra “forçar” as pessoas a estudarem dos jeitos certos...

Um jeito de passar no curso é colar nas provas e fazer um requerimento de revisão de prova...

Eu vou anular as questões com indícios fortes de cola mas a banca de revisão vai desanular elas.

No semestre passado eu escrevi um monte de textos sobre isso... procure por “O PURO é um lixo”.

No semestre passado eu pedi pros alunos reclamarem do meu curso na coordenação da EP...

Sugestão 1: “O Eduardo usa uma operação maluca que não tá em livro nenhum”.

Sugestão 2: falem com o pessoal que era do CAEPRO em 2023 e descubram que acusações falsas são aceitas sem verificação...

Eu queria uma reunião com a coordenação da EP – isso faria as pessoas trocarem idéias e material...

Isso não adianta mais! Se vocês reclamarem o que vai acontecer é que a EP vai mandar um ofício pro RCN pedindo pra eu não dar mais matérias obrigatórias... *acho* que a EP tá mandando esses ofícios desde 2023, e ninguém olha as provas de que as acusações são falsas, que estão públicas desde março/2023...

“Não tenho tempo de ler nada, não vou abrir link nenhum”.

Uma manga importantíssima: “justificativa” – “justificativa no sentido Antônio” é muito diferente de “justificativa no sentido Calc sem RW”

Obs; eu não sei como o Antônio dá C2 – essa história é sobre o que os alunos me contarem sobre como ele dá C2.

Obs 2: pra metade do PURO eu sou um irresponsável incorrigível que tem que ser vigiado, punido, processado, e talvez demitido! Quando o Antônio diz “essa justificativa é ruim” todo mundo aceita!

Agora leiam o slide 20 – “releia a dica 7”.

Uma idéia importante que ainda não está no PDFzinho de introdução ao curso: pra fazer as coisas que vão valer ponto na prova você vai ter que treinar muitas coisas que não vão valer ponto na prova.

As provas vão medir se vocês treinaram bastante certas coisas – que eu vou avisar com antecedência quais são – e pessoas que entenderam tudo mas não treinaram o suficiente vão tirar uma nota quase tão baixa quanto as pessoas que não entenderam nada.

Porquê?

Isso aqui acontece muito:

Eu: Digamos que $f(x) = 3 - 2x$.

Aluno: Porquê?

...e isso vai ser uma das minhas desculpas pra botar todo mundo pra aprender Maxima. No Ensino Médio a gente estuda por livros como o do Iezzi, que têm umas páginas assim:



e os professores convencem a gente que a gente só pode inventar alguma coisa nova se a gente for um daqueles gênios que os retratos deles aparecem no livro do Iezzi, e tudo que a gente inventar tem que ter um “porquê” muito bom... e aí, por exemplo, se na historinha acima eu disse “Digamos que $f(x) = 3 - 2x$ ” isso é porque eu tou seguindo um método que vai resolver um problema importantíssimo, e o aluno perguntou “Porquê?” **porque ele não conseguiu ver nem qual era o problema e nem qual era o método.**

No Maxima é super fácil definir funções novas, então a gente pode tratar ele como uma espécie de Lego, em que a gente vai tentar conectar as pecinhas a) porque é fácil, b) porque é legal, e c) porque aos poucos a gente vai aprender a montar coisas bacanas com elas.

No Maxima também é *relativamente* fácil definir operações novas. Veja o exemplo da página anterior, em que eu defini uma operação “_s_”.

Perguntar pro Maxima é “mais rápido” do que perguntar pro ChatGPT. Isso não é nada óbvio, então deixa eu explicar. Os seus objetivos são a) aprender certas técnicas de Cálculo 2 – que eu tou comparando com aprender a saltar 5 metros no salto com vara – e b) aprender coisas que sejam úteis pra outros cursos, e aí:

Os músculos mentais que você vai exercitar traduzindo as suas idéias pra código em Maxima vão ser muito mais úteis pros objetivos (a) e (b) do que os músculos mentais que você vai exercitar conversando com o ChatGPT.

Eu não sou telepata...

A versão completa é:

Eu não sou telepata e pra mim é 100 vezes mais difícil descobrir as dúvidas das pessoas que não falam comigo do que as das pessoas que falam comigo.

Isso aqui é um trecho de uma conversa que rolou no grupo de WhatsApp de Cálculo 3 em 2024.1:

Aluno: Professor, acho importante a gente ter acesso ao gabarito para saber se estamos fazendo certo ou não. Sem o gabarito podemos ter um raciocínio errado, e sem saber se está errado replica-lo na prova, e consequentemente tirar uma nota menor.

Eu: Péra – eu nunca tive acesso nem às provas dos outros professores do PURO, nem sem gabarito nem com gabarito... e eu prefiro que vocês me perguntem – ou aqui no grupo ou em privado – se tiver alguma questão que vocês que não conseguiram responder ou que vocês não têm certeza da resposta.

Deixa eu repetir: é 100 vezes mais difícil eu adivinhar as dúvidas de que não me pergunta do que entender as dúvidas de quem pergunta.

Desculpa a frustração e o desabafo, mas o que você tá dizendo é que você tem o direito de não fazer perguntas específicas e eu tenho a obrigação de adivinhar as perguntas que você não fez?

Quando a gente aprende a fazer perguntas que são boas o suficiente pra serem feitas até em fóruns públicos isso **abre mil portas** pra gente...

Eu tou desde o início tentando criar um ambiente em que as pessoas possam fazer até perguntas ruins, sem esse nível de exigência – então por favor façam até as perguntas que vocês acham ruins! Considerem que isso é um treino pro futuro...

E lembra disso aqui (de [QuadradoP76](#)):

Sobre as opções de emprego oferecidas para os graduados, é um equívoco dizer que só há espaço para os profissionais bem formados, apesar de nós professores nos vermos, muitas vezes, tentados a fazer esse tipo de afirmação. Há vagas tanto para graduados bem formados, normalmente egressos de universidades públicas ou das particulares de qualidade, como para aqueles de formação mais superficial, normalmente egressos dos “escolões”. Mas muda, obviamente, o tipo do cargo: enquanto o “escolão” é concebido para colocar as pessoas em subtarefas, como, no caso do curso de economia, trabalhos internos de agências bancárias e tarefas rotinizadas em geral, como supervisão de pesquisa de mercado feitas em rua etc., as universidades públicas e as particulares de ponta oferecem uma formação que dá maiores possibilidades de chegar aos cargos decisórios, como em consultorias, agências governamentais e em conselhos executivos de grandes empresas.

Eu tento fazer com que as pessoas aprendam muitas coisas úteis em pouco tempo.

Eu interagi muito pouco com você até agora, mas ACHO que você deveria tentar “aprender a perguntar” - o que não é nada fácil - e que você deveria começar a aprender o Maxima.

Se nós estivéssemos numa universidade melhor a gente teria licenças pros alunos usarem Mathematica ou Maple, que são parecidos com Maxima mas são bem documentados e mais fáceis de usar... mas não estamos, e eu só posso ajudar vocês com o Maxima.

Eu não sou telepata... (2)

É tão desgastante tentar ajudar pessoas que não perguntam que eu tou usando alguns truques pra filtrar elas. Por exemplo, nas minhas intruções pra instalar o WSL, o Debian, o eev e o Maxima tem essa frase aqui:

After setting the user and password
you will get a Unix prompt.

Um cara do canal de IRC #emacs achou isso péssimo, e disse:

do you expect them to know what a
“Unix prompt” is?

e eu tive que explicar que eu não tenho como escrever instruções que expliquem tudo – até porque eu já vi estudantes de computação que não sabiam que o teclado tem um tecla chamada F8, estudantes que não sabiam que espaços importam e que digitaram “`ws1-1-v`” ao invés de “`ws1 -1 -v`” e não faziam idéia de como resolver os erros, e mil outras coisas parecidas apavorantes...

...então frases como

After setting the user and password
you will get a Unix prompt.

são um teste e um filtro...

Mais links:

<https://anggtwu.net/2024.2-PR2.html>
<https://anggtwu.net/2024.2-PR2.html#emacsconf2024>

Como passar em C2: método 2

O método 1 é óbvio: tire suas dúvidas durante as aulas, instale o Maxima, e treine um pouco em casa. Não vale a pena falar dele.

O método 2 é assim: faça uma reclamação pra coordenação dizendo que eu sou maluco, que eu dei provas em que eu cobrei coisas que não estavam no Stewart e que portanto não fazem parte do conteúdo do curso, e que você não conseguiu estudar em casa só pelo Stewart, por vídeos e pelo Chat-GPT. O PURO agora está cheio de professores burnouteados que “não têm tempo” de ler nada e “não têm tempo” de abrir link nenhum, e tem boas chances da sua reclamação ser recebida por um professor desses – e que seja um dos que acha eu sou um irresponsável incorrigível. Aí ele não vai verificar nada, vai mandar um ofício pro RCN pedindo que eu não dê mais matérias obrigatórias, e vai pedir pra sua prova ser recorrida por uma banca de três outros professores... mas repara, tem bastante chance – 50%? – da sua reclamação ser recebida por professores que não são assim, e ela ser ignorada.

O método 3 me parece mais garantido: é você fazer um “Requerimento de Revisão de Prova”. Os alunos têm direito de pedir isso sempre que quiserem, e aí a sua prova vai ser recorrida por uma banca de três professores do RCN – que geralmente são professores burnouteados que “não têm tempo” de ler nada e “não têm tempo” de abrir link nenhum.

A Banca Maluca

Depois que você receber uma prova e fizer a vista de prova dela você pode fazer um “Requerimento de Revisão de Prova”, e aí a sua prova vai ser recorrida pela Banca Maluca – uma banca de três professores de Matemática, que não são sempre os mesmos, mas vou chamá-la de “A Banca Maluca” mesmo assim.

Você pode ver alguns relatórios da Banca Maluca aqui:

RRPs

Eu já tentei entender os critérios de correção da Banca Maluca e não consegui – e também não consegui entender o que a BM considera que são os objetivos do curso de Cálculo 2, e nem como a BM lida com aipins e com outras técnicas que as pessoas deveriam ter aprendido no Ensino Médio...

Não sei se vocês sabem, mas logo depois da quarentena, em 2022.1, os meus colegas abriram um mega-processo contra mim por eu ter aprovado alunos demais durante a pandemia, e me mandaram dar provas carrascas e reprovar todo mundo que não soubesse o suficiente de C2 e C3...

...e aí no início de 2022.2 me pediram pra dar uma VS extra de cada uma das minhas turmas de 2022.1 – apesar do semestre seguinte já ter começado – e resolveram que essas VSs extras seriam abertas pra todos os reprovados. Eu preparei provas com gabaritos que eu achei que tavam bem explicados, corriji elas, uma Banca Maluca recorrigiu elas, e só varios meses depois eu descobri que a Banca Maluca tinha aprovado um monte de gente, inclusive uma pessoa que tinha tirado 0 na minha correção, e uma outra pessoa, que tinha tirado 1.5 na minha correção mas não tinha feito nenhuma outra prova além dessa VS extra...

Critérios de correção

Imagina que o Alex fez uma prova parecida com a P2 de 2023.2. No item 1b dele o resultado certo era $y = \sqrt{C-x^2}$, mas ele obteve $y = \sqrt{C+x^2}$; e no item 1c ele deveria encontrar o C que fazia $3 = \sqrt{C-4^2}$ ser verdade, que era $C = 25$, mas ao invés disso ele encontrou o C que fazia $3 = \sqrt{C+4^2}$ ser verdade, e chegou a $C = -7$. E no item 1d a resposta certa era $y = \sqrt{16-x^2}$, e ele chegou a $y = \sqrt{-7+x^2}$. Além disso essa questão tinha um item 1e, que pedia pras pessoas testarem se as soluções delas obedeciam uma certa equação diferencial, mas o Alex não teve tempo de fazer esse item.

O erro dele no item 1b se propagou pros itens 1c e 1d – e se ele tivesse feito o item 1e ele veria que tinha um erro de conta em algum item anterior, teria encontrado o erro de sinal nas contas dele do item 1b, e teria consertado esse erro e todo o resto.

Dá pra considerar que o Alex só cometeu um erro pequeno? Isso depende dos critérios de correção, e os critérios de correção dependem do objetivo do curso.

Numa correção mais benevolente a gente consideraria que o objetivo dessa questão era ver se os alunos sabem aplicar um certo método. E tá claro que o Alex sabe aplicar esse método quase perfeitamente, então ele perderia 0.1 no item 1b e nada nos itens seguintes, porque todas as outras contas dele estavam coerentes com o resultado dele pro item 1b – então ele não cometeu nenhum outro erro.

Pra mim – PRA MIM – o objetivo de Cálculo 2 é preparar as pessoas pros cursos seguintes. Em Cálculo 2 a gente aprendia (no passado mesmo! Mais sobre isso em breve!) a fazer contas enormes – tipo resolver integrais complicadas – na mão, e a chegar no resultado certo... e em contas tão grandes é quase impossível chegar no resultado certo direto sem errar, então o mais importante *pros cursos seguintes* era que as pessoas aprendiam um monte de técnicas pra fazer as contas ficarem muito fáceis de revisar.

Se o Alex tivesse bastante prática em revisar as contas dele ele teria visto o erro de sinal no item 1b dele e teria consertado o resto das contas dele, né, mas ele não viu esse erro, então as respostas dele mostram que ele ainda não tá bom o suficiente nem em fazer contas fáceis de revisar e nem em fazer as próprias contas... aí, se o objetivo do curso é fazer as pessoas aprenderem a fazer contas fáceis de revisar, então os erros do Alex são bem graves, e ele tira 0 nos item 1c e 1d.

Agora há pouco eu disse que em Cálculo 2 as pessoas aprendiam a “resolver integrais enormes na mão”. Vamos dividir isso em dois subobjetivos diferentes: 1) “resolver integrais” e 2) “enormes na mão”.

Hoje em dia a gente tem programas de computação simbólica que resolvem integrais muito bem, então se os alunos aprendem a usar algum desses programas eles num certo sentido aprenderam a “resolver integrais”... e aí é melhor trabalhar o segundo subobjetivo, que é (aprender a fazer contas) “enormes na mão” (e chegar no resultado certo), de um outro modo, treinando técnicas pra fazer contas fáceis de revisar.

Outra coisa: alunos que aprendem a usar programas de computação simbólica conseguem usar esses programas pra revisar os passos difíceis das contas deles quando eles estão estudando em casa, e acabam conseguindo estudar bem melhor.

Voltando aos critérios de correção: às vezes a gente decide se um erro numa prova é pequeno ou não olhando o resto da prova da pessoa e as provas anteriores dela... e aí se der pra ver pelo resto da prova do Alex que ele sabe bem um monte de técnicas pra fazer “contas fáceis de revisar” então dá pra considerar que o erro de sinal dele é um erro pequeno e dar mais pontos pra ele, e se ele fez a prova relâmpago de Maxima e se deu super bem nela então eu posso considerar que ele aprendeu mais técnicas importantes, tanto pra “resolver integrais” como pra “revisar contas complicadas em casa”, e posso dar mais pontos pra ele.

Agora vamos considerar que o Carlos resolveu os itens 1b, 1c e 1d da prova exatamente da mesma forma que o Alex, e que o Carlos também não fez o item 1e – mas as provas do Alex e do Carlos são totalmente diferentes no resto... o Alex mostrou que sabe um monte de técnicas pra fazer “contas fáceis de revisar” mas o resto da prova do Carlos é uma baguça, e o Carlos vem na vista de prova e insiste que os erros dele são pequenos e que o objetivo do curso é só aprender métodos pra resolver integrais e EDOs... bom, desde o final de 2024.1 a gente tem uma solução maravilhosa pra isso – o Requerimento de Revisão de Prova!

Em 2024.1 quatro alunos de Cálculo 2, A_1, A_2, A_3 e A_4 , fizeram Requerimentos de Revisão de Prova pedindo que a P1 de Cálculo 2 deles fosse recorrida. O departamento montou uma banca com três professores de Matemática, B_1, B_2 e B_3 , e o membro B_1 da banca entrou em contato comigo da banca me pediu as provas e o gabarito delas. Eu criei um grupo de Whatsapp comigo e com o B_1, B_2 e B_3 , e mandei um monte de material – incluindo o PDFzinho “Introdução ao curso”, que fala a beça sobre os objetivos do curso e critérios de correção, e os “Exercícios de substituição”, que explicam a questão sobre o “[:=]”.

Este link conta as partes mais importantes da história: <http://anggtvu.net/2024-rev.html>

Fase pré-silábica

Uma das coisas que eu acho mais desesperadoras no curso de Cálculo 2 é que em C2 a posição de cada símbolo importa MUITO, e sempre tem muitos alunos que não conseguem ver isso... eu adoraria conversar com pedagogues sobre isso, porque elxs têm até os termos pras fases da alfabetização em que as crianças não notam que tem letras faltando ou letras fora de ordem no que elas escrevem, e aí elas escrevem coisas como isso aqui,



e escrevem “VROOEA” ao invés de árvore... obs: eu perdi o scan que tinha o “vrooea” – eu procurei bastante no Google por “fase pré-silábica” e “fase silábica-alfabética” mas não achei...

Eu imagino que pedagogues tenham em montes de técnicas e exercícios pra fazer as crianças passarem pra fase seguinte, *mas eu não tenho* – e aí de vez em quando eu tenho que lidar com alunos que escreveram tudo de um jeito caótico e que ficam berrando comigo na vista de prova que “MAS TÁ CERTO, PORRA!!!”, ou “TÁ IGUAL!!! TÁ IGUAL!!!”, e tudo indica que eles estão numa fase em que *pra eles* a ordem, a posição, o tamanho e o alinhamento do símbolos *ainda* não importa, e EU não sei fazer eles passarem pra fase seguinte... então o melhor que eu consigo fazer por enquanto é pedir pra eles aprenderem programas como Maxima, L^AT_EX ou Lean, e dizer pra eles pedirem pras provas deles serem recorrigidas pela Banca Maluca...

“Meu objetivo é...”

Cálculo 2 tem vários assuntos que funcionam assim: se você tentar aprender o assunto B direto ele é muito, muito, muito difícil, e você vai gastar – digamos – 200 horas de estudo pra aprender ele... mas se você aprender o assunto A primeiro você consegue aprender os dois assuntos, A e B, em 20 horas ao invés de 200.

O caso mais extremo disso é **nomear objetos**. Nas primeiras aulas do curso nós vamos fazer um monte de exercícios de desenhar funções definidas por casos, como essa aqui:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{se } x < 2, \\ x - 2 & \text{se } x \geq 2, \end{cases}$$

A maioria das pessoas chega em Cálculo 2 achando isso incrivelmente difícil. Elas acham que isso aí não é uma função, são duas, e aí elas fazem um desenho errado, e quando a gente vai discutir pra elas descobrirem os erros eu vejo que elas chamam $f(x)$ de “a função”, o gráfico delas de “a função”, $3 - x$ de “a função”, e $x - 2$ de “a função”.


Se elas aprenderem a “nomear objetos” elas vão conseguir fazer algo como isso aqui,

Sejam:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{se } x < 2, \\ x - 2 & \text{se } x \geq 2, \end{cases}$$

$$f_1(x) = 3 - x$$

$$f_2(x) = x - 2$$

$$f_3(x) =$$


$$f_4(x) =$$


$$f_5(x) =$$


Então $f(x) = f_5(x)$ para todo x .

...e aí vai ser super rápido ajudar elas a verificarem tudo, e encontrarem o erro.

Aqui – usando os meus número inventados – se uma pessoa gastar 19 horas aprendendo a nomear objetos ela consegue aprender todo o resto em 1 hora, e se ela resolver não aprender a nomear objetos ela vai levar 200 horas pra aprender a desenhar funções definidas por casos.

“Meu objetivo é reprovar pessoas como você”

Aprender a nomear objetos **dá um trabalhão**, então a maior parte das pessoas resolve que vai deixar pra depois, e aí deixa pra véspera da prova, e se ferra.

Dá pra passar em Cálculo 2 sem aprender a nomear objetos? Dá, você só vai perder 4 pontos na P2, então dá pra passar raspando sim... mas eu já passei da fase em que eu achava ok só avisar as pessoas um montão de vezes e depois dizer “hahaha, se ferrou, eu avisei!!!”...

...então agora eu vou fazer o seguinte: mesmo que você tenha um motivo muito bom pra não aprender a nomear objetos – tipo: você apostou 50000 reais com um grupo de colegas seus que você consegue passar em Cálculo 2 sem aprender a nomear objetos, então vale a pena correr o risco – *eu não vou ajudar as pessoas que resolveram que não vão aprender a nomear objetos*. Se você resolveu que não vai aprender a nomear objetos **AGORA**, então toda vez que você vier me pedir ajuda eu só vou repetir isso aqui...

Um dos meus objetivos nesse curso é reprovar as pessoas que não aprenderam a nomear objetos. Se você ainda não sabe nomear objetos então vire uma pessoa que sabe nomear objetos **URGENTE!!!**

...só que isso é muito comprido, então às vezes eu vou abreviar pra:

**MEU OBJETIVO É REPROVAR
PESSOAS COMO VOCÊ!!!**

e vou mandar a pessoa reler estes slides.

TÁ???????

Árvores caem na prova?

Tem vários assuntos que a gente vai ver em Cálculo 2 que vão ser importantes não porque eles vão cair explicitamente na prova, mas porque eles vão te ajudar a estudar pra prova.

Já teve alguma vez em que você tentou estudar algo de Matemática, não entendeu nada, e ficou paralisado? Sim, né? Acontece com todo mundo, principalmente em assuntos mais avançados...

A gente vai aprender a ver expressões como árvores porque isso vai nos ajudar a não ficar paralisado. Árvores não vão nos ajudar em *todos* os casos de “caraca, não tou entendendo nada” – *mas vão nos ajudar em muitos casos.*

(Explicar nomear e apontar)

(Explicar conectivos omitidos: multiplicação, aplicação, listas, matrizes...)

Como perder pontos na vista de prova

Cálculo 2 (“C2”) é **MUITO** diferente de Cálculo 1 (“C1”).

As técnicas que você aprendeu em C1 vão te ajudar em C2, mas você **VAI TER QUE** aprender um monte de técnicas novas. Os critérios de correção de provas em C2 vão ser bem diferentes dos de C1, e as vistas de prova em C2 vão funcionar de um jeito bem diferente das vistas de C1, principalmente por isso aqui:

Se você vier numa vista de prova de C2 e tentar me explicar o que você *pensou* quando você escreveu a resposta de uma questão **eu vou considerar que você não entendeu nada do curso de C2, não leu nada do material do curso, e que você merece um zero.**

Isso é porque C2 é um curso *bem* mais avançado que C1. Em C1 não dá pra ensinar as pessoas a escreverem direito – isso acontece em C2.

Nas provas de C2 eu vou avaliar se vocês treinaram certas coisas bastante. Sob um ponto de vista o que eu vou avaliar é se vocês conseguem escrever as respostas de vocês de modo que cada passo seja fácil de justificar; sob outro ponto de vista o que eu vou avaliar é *se vocês já têm muita prática em reler as respostas de vocês como se vocês fossem uma outra pessoa e em ver o que pode ser melhorado.*

Pedaço de semicírculo: seja como o Bob

Imagina que você está numa turma de Cálculo 2 que tem dois “Alex”es – vou chamar eles de Alex 1 e Alex 2 – e um Bob. Numa das provas dessa turma cai uma questão assim, sobre uma fórmula que calcula a área de um pedaço de um semicírculo:

Calcule:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

Tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 respondem essa questão dizendo só isso aqui,

$$\frac{1}{2} \left(\arcsen(x) + x\sqrt{1-x^2} \right)$$

e o Bob entrega uma resposta que tem uma página inteira de contas. Aí na vista de prova o Bob está feliz porque ganhou todos os pontos dessa questão e tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 estão putíssimos porque ganharam 0, e porque não conseguiram me convencer a aumentar as notas deles.

O argumento do Alex 1 foi “pô, professor, a resposta tá certa, eu vi num livro e eu lembrava a fórmula, e eu até conferi ela no computador depois”, o argumento do Alex 2 foi “pô, professor, a resposta tá certa, eu fiz as contas de cabeça e pensei tudo direito, eu só não escrevi”...

Seja como o Bob!

Porque é que os Alexes tiraram 0?

Que critério de correção eu usei aí?

Que critério de correção eu vou usar no curso?

Que nível de detalhe eu espero nas respostas?

Eu vou precisar de várias páginas pra responder tudo isso.

“Releia a Dica 7”

<http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html>

<http://anggtwu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=5>

1) Aprenda a testar tudo: contas, possíveis soluções de equações, representações gráficas de conjuntos...

2) Cada “seja” ou “sejam” que aparece nestas folhas é uma definição, e você pode usá-los como exemplos de definições bem-escritas (ééé!!!!) pra aprender jeitos de escrever as suas definições.

3) Em “matematiquês” a gente quase não usa termos como “ele”, “ela”, “isso”, “aquilo” e “lá” — ao invés disso a gente dá nomes curtos pros objetos ou usa expressões matemáticas pra eles cujo resultado é o objeto que a gente quer... mas *quando a gente está discutindo problemas no papel ou no quadro* a gente pode ser referir a determinados objetos *apontando pra eles com o dedo* e dizendo “esse aqui”.

4) Se você estiver em dúvida sobre o que um problema quer dizer tente escrever as suas várias hipóteses — a prática de escrever as suas idéias é o que vai te permitir aos poucos conseguir resolver coisas de cabeça.

5) Muitas coisas aparecem nestas folhas escritas primeiro de um jeito detalhado, e depois aos poucos de jeitos cada vez mais curtos. Você vai ter que aprender a completar os detalhes.

6) Alguns exercícios destas folhas têm muitos subcasos. Nos primeiros subcasos você provavelmente vai precisar fazer as contas com todos os detalhes e verificá-las várias vezes pra não errar, depois você vai aprender a fazê-las cada vez mais rápido, depois vai poder fazê-las de cabeça, e depois você vai começar a visualizar o que as contas “querem dizer” e vai conseguir chegar ao resultado graficamente, sem contas; e se você estiver em dúvida se o seu “método gráfico” está certo você vai poder conferir se o “método gráfico” e o “método contas” dão aos mesmos resultados.

7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática*: se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

Linguagem formal, gramática, sintaxe

Veja se você consegue entender a figura da próxima página...

Eu peguei ela daqui, com pequenas adaptações:

https://en.wikipedia.org/wiki/Context-free_grammar

A parte à esquerda dela é a “gramática” de uma certa linguagem formal, e a parte à direita dela mostra como uma certa expressão é “parseada” nessa linguagem formal.

Todas as linguagens de programação têm gramáticas bem definidas. Quando a gente está trabalhando numa linguagem com uma gramática bem definida é fácil definir quais expressões são válidas nela – uma expressão é válida quando ela é “parseável” – e quais expressões têm erros de sintaxe – as que não são “parseáveis”.

Em Prog 1 você aprendeu C, e você viu que o compilador podia rejeitar os seus programas por vários motivos... por exemplo:

1. erros de sintaxe,
2. erros de tipo,
3. símbolos não declarados.

Se você quiser entender direito como compiladores detectam erros dos tipos 2 e 3, dê uma olhada na página 99 do livro do Thain:

<https://www3.nd.edu/~dthain/compilerbook/compilerbook.pdf#page=113>

Linguagem formal, gramática, sintaxe: figura

$\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle ;$
 $\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \{ \langle \text{StmtList} \rangle \}$
 $\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \text{if} (\langle \text{Expr} \rangle) \langle \text{Stmt} \rangle$
 $\langle \text{StmtList} \rangle \rightarrow \langle \text{Stmt} \rangle$
 $\langle \text{StmtList} \rangle \rightarrow \langle \text{StmtList} \rangle \langle \text{Stmt} \rangle$
 $\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Id} \rangle$
 $\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Num} \rangle$
 $\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Expr} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle$
 $\langle \text{Id} \rangle \rightarrow x$
 $\langle \text{Id} \rangle \rightarrow y$
 $\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 0$
 $\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 1$
 $\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 9$
 $\langle \text{Optr} \rangle \rightarrow >$
 $\langle \text{Optr} \rangle \rightarrow +$

$\text{if} (\underbrace{x}_{\langle \text{Id} \rangle} \underbrace{>}_{\langle \text{Optr} \rangle} \underbrace{9}_{\langle \text{Num} \rangle}) \{ \underbrace{x = 0}_{\langle \text{Expr} \rangle} ; \underbrace{y = y + 1}_{\langle \text{Expr} \rangle} ; \}$
 $\underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{\langle \text{Id} \rangle} \underbrace{>}_{\langle \text{Optr} \rangle} \underbrace{9}_{\langle \text{Num} \rangle}}_{\langle \text{Expr} \rangle} \underbrace{\underbrace{x = 0}_{\langle \text{Expr} \rangle} ; \underbrace{y = y + 1}_{\langle \text{Expr} \rangle}}_{\langle \text{StmtList} \rangle}}_{\langle \text{Stmt} \rangle}$
 $\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{x = 0}_{\langle \text{Expr} \rangle} ; \underbrace{y = y + 1}_{\langle \text{Expr} \rangle}}_{\langle \text{StmtList} \rangle}}_{\langle \text{Stmt} \rangle}}_{\langle \text{Stmt} \rangle}}$
 $\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{x = 0}_{\langle \text{Expr} \rangle} ; \underbrace{y = y + 1}_{\langle \text{Expr} \rangle}}_{\langle \text{StmtList} \rangle}}_{\langle \text{Stmt} \rangle}}_{\langle \text{Stmt} \rangle}}_{\langle \text{Stmt} \rangle}}$

A linguagem formal de Cálculo 2

Péssima notícia 1:

Nenhum livro define precisamente a gramática da “linguagem” de Cálculo 2. Você vai ter que deduzir quais expressões são válidas lendo os livros do curso – principalmente o Leithold e o Miranda – e os meus slides com muita atenção, escrevendo a beça, checando se as suas expressões seguem as mesmas regras que as deles, e discutindo com os seus colegas, comigo, e com o monitor.

Péssima notícia 2:

Cálculo 2 não tem uma linguagem só, tem várias! Por exemplo, em alguns momentos do curso a gente vai permitir a “notação de Leibniz”, na qual expressões como $\frac{dy}{dx}dx = dy$ fazem sentido... mas a gente só vai conseguir entender a notação de Leibniz direito se a gente considerar que “Cálculo 2 sem notação de Leibniz” e “Cálculo 2 com notação de Leibniz” são duas linguagens diferentes, como, sei lá, C e C++, e se a gente entender como *traduzir* expressões em “Cálculo 2 com notação de Leibniz” para “Cálculo 2 sem notação de Leibniz”.

$2 + 3 = 5$	sempre
$2 + 3 \rightarrow 5$	NUNCA
$\underbrace{2 + 3}_5$	sempre

$\frac{dy}{dx} dx = dy$	às vezes
$\int \text{sen } x dx$	sempre
$\int \text{sen } x$	NUNCA

$\int f dx = \int f(x) dx$	às vezes
$y = y(x)$	às vezes

$(a \cdot 10)[a := 4] = 4 \cdot 10$	sempre
$(a \cdot 10)[a := 4] = 40$	NUNCA

Quando $x = 3$ temos $f(x)=42$	sempre
Quando $x = 3$ temos $f=42$	NUNCA

Sintaxe

Em Prog 1 você aprendeu a usar uma linguagem – o C – com uma sintaxe que era totalmente nova pra você, e a cada aula você aprendia mais algumas construções sintáticas – ou, pra encurtar, “sintaxes” – que o compilador entendia. E você deve ter dado uma olhada de relance, durante poucos segundos, na sintaxe completa do C em BNF, que é o apêndice A do Kernighan & Ritchie... na versão do K&R que eu tenho esse apêndice A tem 9 páginas. É algo parecido com isso aqui:

<http://www.csci-snc.com/ExamplesX/C-Syntax.pdf>
<https://www2.cs.arizona.edu/~debray/Teaching/CSc453/DOCS/cminusminuspec.html>

O pessoal de computação tem duas matérias sobre isso. Em Linguagens Formais eles aprendem a definir matematicamente as linguagens que um computador possa entender, e em Compiladores ele aprendem a fazer programas que entendem certas “linguagens formais” e “compilam” “programas” escritos nessas linguagens.

Quase tudo nessas duas matérias é bem difícil de entender, mas algumas poucas idéias são fáceis e a gente vai usar elas pra entender algumas sintaxes que vão ser usadas em C2 e que devem ser novas pra quase todo mundo... por exemplo estas,

$$\sum_{\langle \text{var} \rangle = \langle \text{expr} \rangle}^{\langle \text{expr} \rangle} \langle \text{expr} \rangle$$

$$\int_{\langle \text{var} \rangle = \langle \text{expr} \rangle}^{\langle \text{var} \rangle = \langle \text{expr} \rangle} \langle \text{expr} \rangle d\langle \text{var} \rangle$$

$$\langle \text{expr} \rangle \Big|_{\langle \text{var} \rangle = \langle \text{expr} \rangle}^{\langle \text{var} \rangle = \langle \text{expr} \rangle}$$

$$\forall \langle \text{var} \rangle \in \langle \text{expr} \rangle. \langle \text{expr} \rangle$$

$$\exists \langle \text{var} \rangle \in \langle \text{expr} \rangle. \langle \text{expr} \rangle$$

e as notações de “set comprehensions” daqui: [Mpg8](#)

Justificativas

A linguagem de Cálculo 2 não tem uma gramática totalmente definida, como o C. Cada livro usa convenções um pouco diferentes, e **TODOS ELES** supõem que o leitor vai aprender a sintaxe certa só lendo o livro e estudando – não há um compilador no qual a gente possa digitar expressões de Cálculo 2 e que vá dizer “Syntax error” onde a gente errar. O máximo que a gente tem são alguns programas que entendem *algumas* expressões de Cálculo 2 escritas em ascii e que sabem converter essas expressões pra formatos mais bonitos. Por exemplo:

<https://docs.sympy.org/latest/tutorial/printing.html>

Existem programas que entendem demonstrações e que são capazes de checar cada passo de uma demonstração pra ver se ele está correto. Eles geralmente precisam de um monte de dicas sobre qual é a justificativa de cada passo – essas dicas são *mais ou menos* como a parte à direita dessa demonstração aqui, que aparece na página 370 do livro do Thomas:

<p>Using Substitution</p> $\int \cos(7\theta + 5) d\theta = \int \cos u \cdot \frac{1}{7} du$ $= \frac{1}{7} \int \cos u du$ $= \frac{1}{7} \sin u + C$ $= \frac{1}{7} \sin(7\theta + 5) + C$	<p>Let $u = 7\theta + 5$, $du = 7 d\theta$, (1/7) $du = d\theta$.</p> <p>With the (1/7) out front, the integral is now in standard form.</p> <p>Integrate with respect to u, Table 4.2.</p> <p>Replace u by $7\theta + 5$.</p>
---	--

Eu comecei a aprender um desses “programas que entendem demonstrações” em 2021 – o Lean:

<https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/>

Ele é considerado muito mais fácil de usar que os “proof assistants” anteriores a ele mas ele ainda é bem difícil. Existem tutoriais pra ele nos quais os usuários têm que demonstrar na linguagem do Lean montes de exercícios de Matemática Discreta e Cálculo 1, mas acho que ainda falta bastante pra alunos de primeiro período conseguirem resolver os seus exercícios na linguagem do Lean.

Eu vou fazer algumas referências ao Lean no curso, meio como curiosidade e meio por conta de uma coisa cuja explicação é meio longa. Lá vai.

Uma das coisas que me dá mais ódio é ter que lidar com alunos que escrevem um monte de contas totalmente sem pé nem cabeça nas provas e depois juram que “tava tudo certo, caramba” e que eu só dei nota baixa pra eles porque eu tava de marcação com eles. E tem uma coisa que me dá tipo 1/100 desse ódio, que é lidar com alunos que fazem demonstrações nos quais eles pulam montes de passos e juram que tudo que eles fizeram “é óbvio”.

Neste curso nós vamos ver as definições **precisas** de *alguns tipos* de “passos óbvios” que aparecem em demonstrações e contas que são comuns de Cálculo 2. A maioria das demonstrações que nós vamos ver são por seqüências de igualdades, e vão ter este formato:

$$\begin{aligned} (\text{expr}) &= (\text{expr}) \quad (\text{justificativa}) \\ &= (\text{expr}) \quad (\text{justificativa}) \\ &= (\text{expr}) \quad (\text{justificativa}) \\ &= (\text{expr}) \quad (\text{justificativa}) \end{aligned}$$

A operação de substituição que eu vou explicar nos próximos slides vai servir pra **ZILHÕES** de coisas durante o curso – entre elas pra gente entender quais passos da forma abaixo são “óbvios”:

$$(\text{expr}) = (\text{expr}) \quad (\text{justificativa})$$

Obs: eu copieei o texto acima daqui: [2dT8](#)
Falta revisá-lo!

Atirei o Pau no Gato: seja como o Bob

Imagina que você está fazendo aula de flauta doce junto com o Alex e o Bob, e na prova vocês vão ter que tocar Atirei o Pau no Gato. O Alex demora um tempão pra encontrar cada nota, e ele leva meia hora pra tocar a música toda.

O Bob toca a música toda certinha em menos de 30 segundos.

Quando saem as notas o Alex tirou uma nota baixa e o Bob tirou 10.

Aí o Alex vai chorar pontos e diz “*pôxa, profe, eu me esforcei muito!*”

Quando o Bob tocou Atirei o Pau no Gato ele fez a música *parecer fácil*. O esforço dele ficou *invisível*.

Seja como o Bob!

O curso vai ter uma parte em que você vai ter que aprender a desenhar figuras com dezenas de retângulos e trapézios *em poucos segundos* – como o Bob tocando Atirei o pau no gato.

Se você for como o Alex, e levar mais de meia hora pra desenhar cada figura dessas, eu vou considerar que você não aprendeu os padrões que essas figuras seguem – e você não aprendeu a coisa mais importante.

Logo depois dessa parte do curso vai vir uma parte em que você vai ter que visualizar mentalmente (limites de) figuras feitas de infinitos retângulos e trapézios, e desenhar essas figuras. Se você for como o Alex você vai levar tempo **infinito** pra desenhar cada uma dessas figuras; **se você for como o Bob você vai levar segundos**.

Seja como o Bob!

Imagens de intervalos

Veja as páginas 5 e 7 daqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-somas-3.pdf#page=5>

Digamos que na sua turma de Cálculo 2 tem dois Alexes diferentes, um Bob, um Carlos e um Daniel, e todo mundo tá tentando resolver um exercício que é o seguinte: “seja f a função da página 5 do link acima. Calcule $f([1, 3])$ ”.

Todo mundo reconhece que o intervalo $[1, 3]$ é um conjunto com infinitos pontos, e cada pessoa tenta resolver esse exercício de um jeito diferente.

O Alex 1 decide começar listando todos os pontos do intervalo $[1, 3]$. Ele vai primeiro obter uma lista de pontos que ele vai escrever nesse formato aqui,

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$$

e depois ele vai simplificar esse conjunto daqui,

$$\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \dots\}$$

transformando ele numa lista de números, pondo os números dessa lista em ordem e deletando as repetições... **só que como o conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$ é infinito ele nunca consegue terminar o primeiro passo.**

O Alex 2 decide que ele vai pegar uma sequência de conjuntos finitos cada vez maiores, e “cada vez mais parecidos” com o conjunto $[1, 3]$. Ele escolhe essa sequência aqui...

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 3\}, \\ A_2 &= \{1, 2, 3\}, \\ A_3 &= \{1, 1.5, 2, 2.5, 3\}, \\ A_4 &= \{1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5, 2.75, 3\}, \dots \end{aligned}$$

Ele calcula $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f(A_3)$, $f(A_4)$ pelo gráfico usando o “jeito esperto” – como nas figuras da página 5 do link – e ele deduz, **por um argumento informal e olhométrico**, que $f([1, 3])$ **deve ser** o intervalo $[3, 4]$.

O Bob faz algo parecido como o Alex 2, mas ele encontra um modo de “levantar” todo o intervalo $[1, 3]$ pro gráfico da função $y = f(x)$ de uma vez só, e de depois “projetar” pro eixo y esse “intervalo levantado”. Ele obtém uma figura bem parecida com a última figura da página 5 do link, e ele descobre – **também meio no olhometro** – que $f([1, 3]) = [3, 4]$.

O Carlos vê que **é óbvio que** $f([1, 3]) = [f(1), f(3)] = \{3, 3\} = \{3\}$, e **portanto** a imagem do intervalo $[1, 3]$ pela função f é um conjunto com um ponto só. =(

O Daniel resolve que tudo isso é informal demais pra ele, e que ele precisa aprender um modo 100% preciso e formal de calcular $f([1, 3])$ sem o gráfico. Ele descobre que vai ter que estudar uma coisa chamada “Análise Matemática”, baixa o “*Elementary Analysis: The Theory of Calculus*” do Kenneth Ross, começa a estudar por ele e aprende coisa incríveis – **mas ele leva um ano nisso.**

Seja como o Bob!

Sobre Português

Muita gente aprende no Ensino Médio e nas matérias de primeiro período que “entender uma fórmula” quer dizer 1) traduzí-la pra português e 2) generalizá-la. Então é BEM comum uma pessoa ficar em dúvida se pode fazer um passo como este aqui numa conta,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99$$

e aí a pessoa me perguntar isso aqui:

Professor, a raiz quadrada de um número ao quadrado mais outro número ao quadrado é o número mais o outro número?

É bem mais fácil discutir essa dúvida se a pessoa me fizer essa pergunta em notação matemática, ou me mostrando a igualdade acima e perguntando “isso aqui é verdade?”, ou me mostrando isso aqui,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} \stackrel{?}{=} 42 + 99$$

que é bem mais bacana porque o ‘?’ deixa super claro que isso é uma igualdade que a pessoa não sabe se é verdade...

Se a pessoa me pergunta se isso aqui é verdade,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99 \quad (*)$$

eu posso mostrar pra ela essa outra igualdade aqui – note que eu estou dando nomes como (*) e (**) pras igualdades

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + y \quad (**)$$

e aí eu pergunto “você quer saber se a (**) é algo que vale sempre, né?”, e aí a pessoa responde “É! É isso!”, e aí eu consigo responder: se a (**) valer sempre ela também vai valer no caso em que $x = 3$ e $y = 4$. Quando $x = 3$ e $y = 4$ a (**) vira isso aqui:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 \quad (***)$$

e aí temos:

$$\sqrt{\underbrace{x^2}_{3} + \underbrace{y^2}_{4}} = \underbrace{3 + 4}_{7}$$

$$\underbrace{\underbrace{9}_{3} \quad \underbrace{16}_{4}}_{25} = \underbrace{\quad}_{5}$$

$$\underbrace{\quad}_{5} \quad \mathbf{F}$$

Ou seja, a igualdade (***) é falsa, e portanto a (**) não vale sempre.

Sobre Português (e generalizar)

Repara que eu não descobri se a igualdade (*) era verdade ou não... eu convenci a pessoa a discutir a igualdade (**) ao invés disso, porque eu “adivinhaei” que na verdade o que a pessoa queria saber era se a (**) era verdade ou não. Além disso eu desmontei a pergunta original da pessoa – aliás, a pergunta sobre a (**) – em várias perguntas menores.

Até alguns semestres atrás eu achava que todo chegava na universidade sabendo “generalizar” e “particularizar” (ou: “especializar”) bastante bem... eu achava que as pessoas aprendiam isso assim que aprendiam a fazer “contas com letras” no Ensino Médio.

Vocês provavelmente vão ouvir histórias sobre como os meus cursos de Cálculo em 2022.1 – logo depois do fim da quarentena – foram os piores cursos *do universo*. Uma boa parte da razão pra isso foi que eu fiquei tentando encontrar modos de ensinar as pessoas a generalizarem e particularizarem, e fui descobrindo que essas coisas são muito mais difíceis de aprender e de ensinar do que eu pensava.

A pessoa do slide anterior achava que só podia fazer uma pergunta se ela 1) generalizasse a pergunta dela, e 2) traduzisse a pergunta dela pra Português. Acho que ela achava que tinha que tratar essas duas coisas como se fossem fáceis e óbvias – *mas não são*, e eu recomendo que a gente trate particularização/especialização como algo difícil em que é muito comum as pessoas terem dúvidas muito importantes que vale a pena discutir, “encontrar a generalização certa” como algo BEM difícil e BEM importante que a gente vai treinar explicitamente em vários exercícios difíceis e importantes do curso, e a gente vai ver que “traduzir pra português” é uma ferramenta bem menos útil do que parece. Quase todas as expressões matemáticas que a gente vai ver têm uma pronúncia padrão, mas vai ser bem comum a “tradução pra português” não nos ajudar nada, ou até nos atrapalhar, porque a gente vai ter que entender algumas palavras e expressões “como matemáticos” e não no sentido usual delas...

(Veja o próximo slide!)

Banana

Considere as quatro perguntas abaixo:

1. Qual é o resultado de substituir na palavra “banana” todas as letras ‘a’ por ‘w’?
2. Qual é o resultado de substituir na palavra “banana” todas as letras ‘o’ por ‘u’?
3. Qual é o resultado de substituir na palavra “banana” todas as letras ‘A’ por ‘W’?
4. Qual é o resultado de substituir na palavra “blitiri” todas as letras ‘2’ por ‘3’?

O resultado da 1 é bem fácil: “bwnwnw”, mas a maioria das pessoas fica em dúvida nos outros itens... muitas pessoas respondem coisas como “não dá pra fazer o 2 porque “banana” não tem ‘o’”, “não sei se o 3 tem que dar “bWnWnW” ou “bwnwnw””, ou “não dá pra fazer o 4 porque “blitiri” não é uma palavra e ‘2’ e ‘3’ não são letras”...

Neste curso, e em todos os cursos de matemática que vão vir depois dele, **você vai ter que aprender a interpretar certas definições “como matemático”**: você vai ter que descobrir a interpretação mais simples possível que faça sentido, e essa idéia de “mais simples possível” vai ser bem **parecida** com *fazer o programa mais simples possível que obedeça uma certa especificação...*

Por exemplo:

o programa que responde “banana” no item 2 é bem mais simples do que o programa que primeiro testa se a palavra original tem alguma letra ‘o’, e dá erro se não tem;

o programa que responde “banana” no item 3 – porque ele considera que ‘a’ e ‘A’ são letras completamente diferentes, e “banana” não tem ‘A’ – é muito mais simples do que os programas que consideram que ‘a’ e ‘A’ são “letras parecidas”;

o programa que responde “blitiri” no item 4 é muito mais simples do que os programas que testam se a palavra original é uma palavra válida e se as duas letras dadas são caracteres considerados como “letras”.

Links:

Sobre áreas negativas e retângulos degenerados:

[2cT185](#), [2cT185](#)

[2fT63](#), [2fT64](#)

[2gT20](#) Contexto / Sabemos que $2 = 3$. Então...

[2gT38](#) O macaco substituidor: banana

Unexpected end of input

Uma coisa que me desesperava bastante era quando um aluno me mostrava algo como isso aqui,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot$$

e me perguntava “isso aqui tá certo?”, ou: “é isso?”...

Aqui a pergunta mais precisa seria “esse início tá certo?”, ou “como é que eu continuo?”... eu aqui eu poderia responder ou “não!” ou isto,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot \beta(x) + \alpha(x) \cdot \beta'(x)$$

só que a resposta que funciona melhor *didaticamente* é a seguinte:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot \quad (*)$$

não é nem mesmo uma expressão válida, e um compilador que for analisar essa expressão vai abortar no meio do parsing e dizer “Unexpected end of input”, que é um tipo específico de erro de sintaxe...

O melhor modo de discutir a dúvida da pessoa que perguntou o “isso aqui tá certo?” é ir consertando com ela a expressão dela passo a passo, e – **JURO** – o melhor modo de fazer isso é primeiro transformar a expressão dela em uma expressão que compile, como essa aqui:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot 42 \quad (**)$$

que é uma igualdade – no sentido de que tem uma representação em árvore com o ‘=’ no topo – é aí a gente pode começar a discutir coisas como:

- a igualdade (**) é verdadeira para todas as funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$?
- a igualdade (**) é um caso particular da regra do produto?

“Faz um vídeo explicando o PDF”

Em 2021 eu fiz um vídeo – que ficou bem bom – pra responder os alunos que estavam dizendo “professor, faz um vídeo explicando o PDF”, e em 2023 eu legendei esse vídeo. Dá pra acessar as legendas e o vídeo nos links abaixo,

<http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html>

e o trecho mais importante das legendas é esse aqui:

Então, cada PDF tem vários exercícios e muitas dezenas de idéias. Se vocês disserem só “faz um vídeo explicando o PDF” eu vou fazer um vídeo de 5 minutos explicando tudo de um PDF por alto porque eu não sei direito onde estão as dúvidas de vocês... mas vocês fizerem perguntas mais específicas aí eu consigo fazer vídeos bem mais detalhado sobre aquelas perguntas ou sobre aqueles exercícios... gente, vocês não estão discutindo para descobrir como resolver os problemas? O próximo passo, já que vocês estão empacados, é vocês passarem a discutir pra encontrar a boas perguntas pra fazer... aqui tem um outro trecho que eu não copieiei, e deixa eu só ler isso aqui em voz alta também...

gente, a matéria de matemática fica cada vez mais difícil à medida que as matérias ficam mais avançadas, e passa a ser comum ter trechos uma linha ou de um parágrafo nos livros-texto que vocês vão passar muitas horas tentando decifrar aquilo. Isso vai acontecer O TEMPO TODO... praticamente toda aula, toda página, todo vídeo vai acontecer isso, até o a última matéria de matemática na vida de vocês, então a questão é: como é que vocês podem fazer para não ficarem perdidos com isso, para não ficarem paralisados... voltando pro que eu escrevi aqui, o meu objetivo aqui é fazer vocês aprenderem se virar com isso, e a técnica para isso e vocês aprenderem a escrever as hipóteses de vocês e aprenderem a fazer perguntas. A maioria das perguntas vocês vão conseguir responder sozinhos, algumas vocês vão conseguir descobrir a resposta conversando com amigos – faltou um “s” aqui... – que também não sabiam a resposta, que vão descobrir junto com vocês, e umas poucas vocês vão empacar mesmo e não vão conseguir resolver sozinhos. Me mandem as dúvidas de vocês!

Um post da Ana Leticia de Fiori

Em 19/fev/2023 a Ana Leticia de Fiori postou [isso aqui](#) no Facebook:

AL: Um fenômeno curioso que tenho observado entre estudantes que declaram ter “travas de escrita”, ficarem “empacados” ao desenvolver trabalhos de conclusão de disciplinas ou de curso. Frequentemente, a alegação é de que o “perfeccionismo” faz com que travem.

Eu tenho provocado, perguntado sobre quais são os gatilhos, quais os momentos em que eles sentem que o bloqueio vem. Uma resposta é o confronto com o material coletado, sejam os dados sejam as referências levantadas. Materiais com os quais eles não conseguem lidar, no sentido radical da palavra lida. Não sabem trabalhar com as referências e com os dados. Porque não estão acostumados a ler.

Um dos efeitos disso são trabalhos bastante declaratórios, que clamam ter feito “revisões bibliográficas”, “levantamentos”, “análises de discurso”, etc. que, na verdade, jamais ocorreram. Ao finalmente escrever, despreza-se o que consta na literatura e se escreve de cabeça, com alguma citação aqui ou acolá utilizada como argumento de autoridade. Claro que o texto sai confuso, raso, impreciso.

Passa longe de um problema de perfeccionismo. Mas é assim que se mascara a falta de perícia no ofício acadêmico.

E, recentemente, numa reunião entre pares, ouvi dizerem que para evitar os eternos problemas de plágio e os novos problemas dos softwares de IA, vão só realizar atividades orais e de escrita em sala de aula. Isso me apavora, porque o tempo de maturação de um trabalho acadêmico não é o tempo da sala de aula. E vai ser mais uma instância a sumir da experiência desses estudantes.

E: Nossa, eu tou exatamente tentando escrever sobre um outro tipo de “perfeccionismo” que alguns dos meus estudantes têm e que eu ainda não tenho um modo muito bom de lidar com isso... São estudantes que assim que vêem que algo que eles escreveram está errado eles ou apagam ou jogam foram. Eu até tenho um monte de material - e slogans - sobre como o modo mais rápido de aprender assuntos difíceis de matemática é você escrever “hipótese” ou “rascunho” antes das partes que você não tem certeza e **NÃO APAGAR NADA, NUNCA** - ...mas não adianta, eles entram em pânico quando vêem que algo que eles escreveram não está perfeito - e aí eles não conseguem estudar...

AL: Mas aí é que está, a que parâmetros de perfeição eles se referem?

Esse comportamento de escrever e apagar tem a ver em parte com a fantasia de que o texto se compõe de uma vez só. Tendem a pular as etapas de estruturação de um roteiro, de rascunhos e revisões.

Quase como se o texto fosse psicografado. Eu costumo brincar com meus alunos que ninguém é Chico Xavier da antropologia, eles riem, mas teimam.

De novo, falta a dimensão do trabalho com o texto.

Perfeição, na fantasia dos alunos, é escrever sem esforço.

Retas reversas

O Alex, o Bob e o Carlos fizeram GA juntos. Um dos últimos assuntos do curso era uma fórmula pra calcular a distância entre “retas reversas” – é uma fórmula bem complicada, que tem um determinante e um produto cruzado – e cada um deles estudou esse assunto de um modo diferente.

O Alex e o Carlos “sabem” que o objetivo de cada matéria de Matemática é fazer as pessoas aprenderem certos teoremas. Os dois decoraram a fórmula da distância entre retas reversas e tentaram aplicar ela na prova. O Alex conseguiu, mas a questão da prova tinha vários itens e em todos eles ela usava letras diferentes das da fórmula que ele tinha decorado, e aí ele levou MUITO tempo pra resolver um item, e não conseguiu fazer os outros... e o Carlos tinha decorado a fórmula errado, e aí num determinado ponto da questão ele precisava dividir um número negativo por um vetor, e ele não sabia como fazer isso.

Tanto o Alex quanto o Carlos esqueceram a fórmula logo depois da prova.

O Bob estudou essa parte da matéria de um outro jeito. Ao invés de pensar “toda vez que eu precisar calcular a distância entre duas retas é só usar a fórmula” ele considerou que tem muitos casos simples em que ele sabe calcular a distância entre as retas no olhometro – por exemplo, o caso em que uma das retas é paralela ao eixo x e a outra é paralela ao eixo y . Ele foi aprendendo como lidar com vários casos um pouco menos simples que esse, e aprendeu como visualizar o que aquela fórmula complicadíssima “quer dizer” – ela calcula a altura de um certo paralelepípedo.

O Bob tratou essa fórmula como algo que generaliza vários casos “simples” em que ele consegue calcular a distância entre duas retas por outros métodos, e ele usou esses casos simples pra testar se a fórmula realmente dá o resultado que ele esperava.

Tanto o Alex quanto o Bob quanto o Carlos “estudaram pelo livro”, mas existem vários modos de “estudar pelo livro” e o Bob usou modos que nem o Alex nem o Carlos conheciam.

Neste curso você vai aprender – e treinar – vários modos de “estudar pelo livro” que provavelmente vão ser totalmente novos pra você.

Contexto

Quase todas as expressões matemáticas que usamos em C2 **dependem do contexto**. Por exemplo, a interpretação **default** pra esta expressão aqui:

$$f(x) = x - 9 = 2$$

é:

Para toda função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
e para todo $x \in \mathbb{R}$ temos:
 $f(x) = x - 9 = 2$

Se você só escreve “ $f(x) = x - 9 = 2$ ” e mostra isso pro “colega que seja seu amigo” ele vai levar meia hora tentando adivinhar qual foi o contexto que você estava pensando mas não escreveu...
...e se ele descobrir em menos de, digamos, 50 tentativas, ele vai dizer “ok, jóia, tá certo!”.

O “colega que seja menos seu amigo” vai fazer menos tentativas, e os personagens “o monitor” e “o professor” da Dica 7 vão checar se o que você escreveu vai ser entendido corretamente por qualquer pessoa que saiba as convenções de como escrever matemática.

Lembre que **quase todo mundo** pára de ler um texto matemático quando vê uma besteira muito grande escrita nele. Imagine que um “colega que seja menos seu amigo” te mostra a solução dele pra um problema e te pergunta se está certa. A solução dele começa com:

Sabemos que $2 = 3$. Então...

O que você faria?

Dica: releia isto aqui:
[Slogans27:07](#) até 32:45

Fórmulas e hipóteses

Dê uma olhada no Teorema 4 da seção 3.1 do Miranda: [MirandaP80](#). Ele diz isso aqui:

Se f e g são funções diferenciáveis em $x = a$ então a função $f + g$ é diferenciável em a e:

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Nós vamos considerar que esse *teorema* pode ser decomposto em duas partes: *fórmula* e *hipóteses*. A *fórmula* dele é esta aqui,

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

e em muitas situações nós vamos querer usar só as fórmulas de certos teoremas e deixar pra verificar as hipóteses delas no final.

Obs: falta acrescentar muita coisa aqui... explicar o que são contas formais, mostrar que o Mathologer só faz contas formais no vídeo dele sobre o “Calculus Made Easy”, mencionar que em Cálculo 3 nós vamos usar o “Calculus Made Easy” e que todas as contas dele são formais, falar sobre a introdução do Martin Gardner pro CME e como ele explica que o conceito de “função” foi mudando...

Obs 2: tem um slide sobre contas formais aqui: [2gT36](#) (p.4) O macaco e as contas formais

Sobre aulas expositivas

Muitos alunos acreditam que se eles assistirem uma aula expositiva eles vão ser capazes de resolver na prova questões sobre o que eles aprenderam – só que isso só passa a ser *mais ou menos* verdade depois que a pessoa aprende *muito bem* como estudar.

Muita coisa em matemática funciona como músculos. Os músculos mentais que você usa pra entender uma aula expositiva são bem diferentes dos músculos mentais que você usa pra resolver exercícios, e os músculos mentais que você exercita quando você relê uma explicação que você escreveu e procura jeitos de reescrevê-la de um modo mais claro são diferentes desses...

Leia isto aqui:

[Visaud39:09](#) até 46:06

Formal vs. coloquial

Lembre que um dos meus objetivos principais *neste curso* é fazer as pessoas aprenderem a escrever suas idéias matemáticas de um jeito que seja claro e fácil de revisar, que elas gostem de reler depois (dica 7b) e que os colegas gostem de ler (dicas 7c e 7d)...

Algumas pessoas acham que textos matemáticos têm que ser escritos numa linguagem “formal” que seja a mais distante possível do português coloquial; outras pessoas preferem escrever de um modo bem próximo do coloquial. Por exemplo, o Jacir Venturi ([VenturiGA](#)), escreve num Português pomposo que eu acho horrível, e o Felipe Acker ([AckerGA1](#)) escreve de um modo bem próximo do coloquial que eu gosto bastante. E até hoje eu só tive acesso a bem pouco material do Reginaldo, mas eu tenho a impressão de que ele não gosta de usar linguagem coloquial em matemática... eu falo um pouquinho sobre isso neste trecho de um vídeo sobre didática: [Visaud59:49](#).

Na parte do curso sobre somas de Riemann você vai aprender a lidar com definições bem complicadas, e aos poucos – um pouquinho neste curso, e bastante nos seguintes – você vai aprender a fazer as suas próprias definições. E quando você souber fazer as suas próprias definições você vai ver que dá pra ser totalmente preciso usando tanto português coloquial quanto português pomposo...

...ah, e na parte final do curso, que é sobre equações diferenciais, você vai (ter que) aprender a usar corretamente um monte de “partículas”, como “seja”, “então”, “temos”, “isto é”, “queremos”, “sabemos que”, “lembre que”, “digamos que” e “vamos testar se”.

Comentário sobre a P1 de 2020.1

Oi! Vou voltar às correções agora e espero terminar todas as P1s daqui a pouco.

Algumas pessoas que tiraram notas baixas me perguntaram em privado o que elas erraram na prova. Vou responder por aqui porque acho que a resposta é útil pra todo mundo e vale pra P2 também.

Era uma prova pra ser feita em 24 horas, com consulta e com discussão com os colegas, então os critérios de correção são bem diferentes dos critérios pra uma prova individual de duas horas... vou usar como exemplo frações parciais.

Eu esperava que quando vocês tivessem terminado a prova vocês soubessem frações parciais muito bem e lembrassem como era só saber as idéias básicas de frações parciais, mas não saber nem fazer as contas direito... e aí era pra vocês terem resolvido a questão de frações parciais da prova da forma mais clara possível, no seguinte sentido: eu esperava que a solução da questão de frações parciais de vocês fosse como uma explicação bem detalhada de como resolver aquele problema, *como se vocês estivessem ensinando frações parciais pra alguém que ainda não entendeu direito*.

Deveria ser fácil entender cada “=” de vocês, e as partes em que vocês fazem a divisão com resto e encontram o A e o B do sistema deveriam estar claramente separadas do resto.

E eu esperava que vocês tivessem relido e revisado várias vezes as soluções de vocês, e reescrito as partes que não tivessem ficado claras quando vocês escreveram elas da primeira vez. Eu esperava que vocês mostrassem que tinham virado as pessoas que sabem frações parciais bastante bem.

Na questão sobre integrar $(\sin x)^5(\cos x)^3$ várias pessoas fizeram uma coisa que me deixou BEM puto. Nas contas essas várias pessoas escreveram um “menos” no lugar que deveria ter um “vezes” - todas cometeram o mesmo erro no mesmo lugar. E isso pra mim foi sinal de que as pessoas não aprenderam o suficiente sobre aquela parte da matéria pra conseguirem revisar aquelas contas - e que elas achavam que não precisavam aprender, bastava copiar.

Não

Na P2 de 2024.2 - link:

<http://anggtwu.net/LATEX/2024-2-C2-P2.pdf>

aconteceu uma coisa que me deixou super putado. Cinco alunos resolveram o item (2a) fazendo exatamente o mesmo passo maluco:

$$\begin{pmatrix} f''(x) - 3f'(x) - 28f(x) = 0 \\ D^2f - 3Df - 28f = 0 \\ (D^2 - 3D - 28)f = 0 \\ (D - (7 - 4)D - (7 \cdot 4)(C_1e^{7x} + C_2e^{-4x})) \end{pmatrix}$$

Nas provas dos cinco alunos a quarta linha da coisa entre parênteses era sempre uma expressão sem sinal de '=', e cada pessoa cometia outros erros, como D ao invés de D^2 , parênteses faltando, coisas assim.

Eu costumo considerar coisas assim como "indícios fortes de cola". Veja isto aqui, que é de 2024.1:

<http://anggtwu.net/2024-rev.html#whatsapp>

Na verdade não importa muito se as pessoas colaram umas das outras ou não... elas fizeram esse erro porque interpretaram errado o modo como eu respondi uma dúvida de uma delas no grupo de WhatsApp da turma, e elas "estudaram juntas" – e elas desistiram de entender esse passo e copiaram ele de qualquer jeito.

Normalmente a gente só considera que uma pessoa colou quando durante a prova ela consultou algo escrito ou se comunicou com outro aluno, né... mas vamos imaginar um caso mais interessante: cinco pessoas têm memória fotográfica, e elas estudaram juntas, decoraram um método que tem um passo que ninguém entendeu, e aplicaram esse método na prova. No sentido usual de "cola" isso não é cola, né? Elas só consultaram a memória delas...

Eu tou há anos tentando ajustar os critérios de correção de C2 pra que esse tipo de coisa não aconteça. Por exemplo, a maioria das minhas provas tem esse aviso aqui:

Nestas questões o que vai contar mais pontos é você organizar as contas de modo que cada passo seja fácil de entender, de verificar, e de justificar – "chegar no resultado certo" vai valer relativamente pouco.

...e eu tento definir o que são "erros gravíssimos", e quais são os tipos de erros gravíssimos que podem anular uma questão.

Os critérios de correção acabam virando dicas de como estudar. Repara, decorar dá trabalho... então vamos imaginar que os cinco alunos dessa história levaram meia hora pra decorar o método com um passo maluco no meio. Se estivesse super claro pra eles que escrever um passo sem pé nem cabeça na prova poderia ser considerado um erro gravíssimo e poderia anular a questão eles teriam organizado o tempo deles de forma diferente – eles teriam transformado a "meia hora pra decorar o método" em "15 minutos pra decorar o que der e 15 minutos pra tentar entender os passos mais estranhos"...

...mas aí a gente teve dois problemas. Entre esses 5 alunos tinha uma aluna que vivia tentando aprender métodos, e eu agora aprendi que eu tenho que responder essas pessoas assim,

- É só usar esse método aqui?
- **NÃO.**

...e repetir sempre que pra quem gosta de decorar métodos decorar um método pode ser um bom começo sim, mas depois de você aplicar um método que você decorou você SEMPRE tem que verificar se cada passo é fácil de justificar, nesse sentido aqui:

2hT36 Contas com justificativas

Não (2)

...e o segundo problema é que as bancas de revisão de prova costumam ignorar os meus critérios de correção, os meus critérios do que é um “erro gravíssimo” e o meu modo de lidar com “índicios fortes de cola”. Aí alguns desses alunos fizeram requerimentos de revisão de prova, as bancas de revisão desanularam as questões 2 desses alunos, corrigiram elas de outros jeitos, e deram um montão de pontos pra esses alunos.

Na página anterior eu disse que “os critérios de correção acabam virando dicas de como estudar”. Mas as bancas de revisão de prova fazem com que os meus critérios adiantem muito pouco na prática... o máximo que eu consigo dizer pros alunos é que se eles usarem os meus critérios de correção como dicas de como estudar eles vão aprender 1) um monte de coisas úteis em pouco tempo, e 2) vão “passar com honra”...

Cálculo 2 - 2025.1

Aulas 2 a 4: integração e derivação
com o mathologermóvel

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

[2fT63](#) $y \cdot (x_d - x_e)$ e “áreas negativas não existem”
[2cT185](#) Retângulos degenerados

Quadros de algumas aulas:

[2jQ3](#) (2024.2) 24/set/2024
[2iQ9](#) (2024.1) 25/mar/2024
[2hQ1](#) (2023.2) 28/ago/2023
[2gQ1](#) (2023.1) 04/abr/2023
[2fQ2](#) (2022.2) 25/ago/2022

Links da aula 1:

[2gT4](#) Releia a dica 7
[2gT11](#) Atirei o pau no gato
[2gT19](#) Retas reversas
[2gT24](#) Integração e derivação com o Mathologermóvel
[2gT27](#) (p.4) Exercício 1
[2gT28](#) (p.5) Dicas pro exercício 1
[CalcEasy03:19](#) até 12:47

Links da aula 2:

[CalcEasy11:35](#) até 12:47
[2gT37](#) (p.5) O macaco substituidor: EDOs, RC, TFC2
[StewPtCap5p9](#) (p.330) Figuras 11 e 12
[StewPtCap5p16](#) (p.337) A integral definida
[StewPtCap5p33](#) (p.354) TFC, parte 2
[StewPtCap5p36](#) (p.357) Exercícios 19 a 26 (sobre o TFC2)
[2fT91](#) até [2fT93](#) (p.3 até p.5): A definição da integral

Os slides das próximas páginas são versões ligeiramente reescritas destes slides de outros semestres:

[2dT225](#) (p.4) Gabarito do mini-teste 3 de 2021.2
[2eT199](#) (P1, p.7) eu defini as funções f e g desta forma
[2eT200](#) (P1, p.8) gabarito

Introdução

Nesta parte do curso nós vamos tentar entender este trecho do vídeo do Mathologer,

[CalcEasy03:19](#) até 12:47

e vamos fazer alguns exercícios – que podem ser feitos em vários níveis de detalhe.

Leia estes trechos das legendas de uns vídeos meus:

[Slogans01:10](#) até 08:51: sobre chutar e testar

[Slogans07:17](#) até 07:48: ...do tamanho de um apartamento

[Visaud45:14](#) até 52:24: ajustar o nível de detalhe

[Slogans1:11:02](#) até 1:17:42: seja o seu próprio Geogebra

[Slogans1:39:46](#) até 1:45:02: ...com quem vale a pena estudar

Leia também estes slides:

[2gT4](#) (intro, p.3) “Releia a Dica 7”

[2gT13](#) (intro, p.12) Sobre Português

[2gT14](#) (intro, p.13) Sobre Português (2)

[2gT16](#) (intro, p.15) Unexpected end of input

[2gT19](#) (intro, p.18) Retas reversas

O que é um caso particular de uma figura?

Vou considerar que as cinco figuras da coluna da direita são numeradas assim: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2\ 3 \\ 4\ 5 \end{pmatrix}$.

O Leithold usa duas figuras pra explicar o que é o coeficiente angular – ou a inclinação – de uma reta, a figura que á a minha figura 1 é a mais simples das duas figuras dele. Confira:

Leit1p17 (p.16) Discutiremos agora *retas* em \mathbb{R}^2

Ele usa uma notação que eu detesto e que eu vou evitar: ele escreve “ $P_1(x_1, y_2)$ ” ao invés de “ $P_1 = (x_1, y_2)$ ”.

O Leithold não põe tracinhos nos eixos, e aí a gente não tem como descobrir quais são os valores de x_1, y_1, x_2 e y_2 . Isso é de propósito – é pra obrigar a gente a tratar essa figura como um *caso geral*.

A gente pode transformar esse caso geral em casos particulares escolhendo valores para (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . Por exemplo, se $(x_1, y_1) = (3, 2)$ e $(x_2, y_2) = (7, 8)$ a gente obtém as figuras 2 e 3 – na figura 3 eu substituí os x_1, y_1, x_2, y_2 nos labels pelos seus valores, e na figura 2 não – e se $(x_1, y_1) = (4, 3)$ e $(x_2, y_2) = (8, 6)$ a gente obtém as figuras 4 e 5.

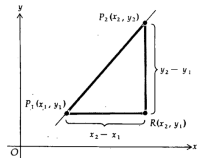
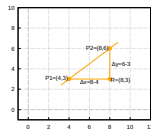
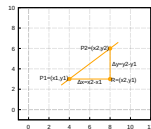
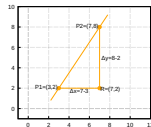
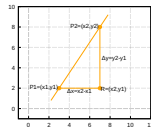
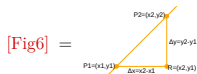


FIGURA 11

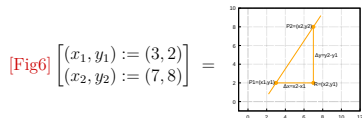


Exercício 0.

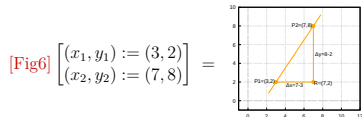
Seja:



Então:



ou:

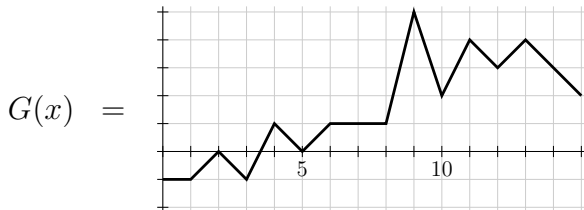


Represente graficamente e calcule $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ em cada um dos casos abaixo:

- a) [Fig6] $\begin{bmatrix} (x_1, y_1) := (1, 2) \\ (x_2, y_2) := (3, 4) \end{bmatrix}$
- b) [Fig6] $\begin{bmatrix} (x_1, y_1) := (3, 4) \\ (x_2, y_2) := (1, 2) \end{bmatrix}$
- c) [Fig6] $\begin{bmatrix} (x_1, y_1) := (1, 5) \\ (x_2, y_2) := (3, 2) \end{bmatrix}$

Exercício 1.

Seja $G(x)$ esta função:



Relembre como calcular coeficientes angulares e derivadas no olhômetro e faça um gráfico da função $G'(x)$.

Dica 1: $G'(3.5) = 2$.

Dica 2: $G'(4)$ não existe — use uma bolinha vazia pra representar isso no seu gráfico.

Exercício 1: mais dicas

Pra fazer o exercício 1 você provavelmente vai ter que relembrar algumas coisas sobre inclinação, coeficiente angular, limites laterais, derivadas laterais, e sobre o significado das bolinhas cheias e das bolinhas vazias nos gráficos... links:

[Leit1p18](#) (p.17: inclinação)

[Leit1p42](#) (p.41: bolinhas, domínio, imagem)

[StewPtCap1p10](#) (p.15: círculo cheio e círculo vazio)

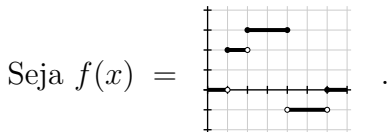
[Miranda66](#) (Capítulo 3: Derivadas)

[Miranda22](#) (Seção 1.4: Limites laterais)

[Miranda74](#) (Seção 3.2.3: Derivadas laterais)

[2eT70](#) (p.11) Dicas que eu preparei em 2022.1

Exercício 2.



Note que:

$$\int_{x=1}^{x=2} f(x) dx = 2 \cdot (2 - 1),$$

$$\int_{x=3}^{x=4} f(x) dx = 3 \cdot (4 - 3),$$

$$\int_{x=4}^{x=6} f(x) dx = -1 \cdot (6 - 4),$$

Calcule:

a) $\int_{x=1.5}^{x=2} f(x) dx$

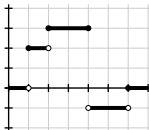
b) $\int_{x=2}^{x=4} f(x) dx$

c) $\int_{x=1.5}^{x=4} f(x) dx$

d) $\int_{x=1.5}^{x=6} f(x) dx$

Exercício 3.

Sejam $f(x) =$



e $F(\beta) = \int_{x=2}^{x=\beta} f(x) dx.$

- Calcule $F(2), F(2.5), F(3), \dots, F(6).$
- Calcule $F(1.5), F(1), F(0.5), F(0).$

Exercício 4.

No exercício 3 você obteve alguns valores da função $F(\beta)$, mas não todos... por exemplo, você *ainda* não calculou $F(2.1)$.

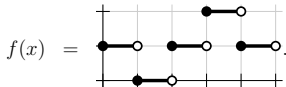
a) Desenhe num gráfico só todos os pontos $(x, F(x))$ que você calculou nos itens (a) e (b) do exercício 3.

Dica: o conjunto que você quer desenhar é este aqui: $\{(0, F(0)), (0.5, F(0.5)), \dots, (6, F(6))\}$.

b) Tente descobrir — lendo os próximos slides, assistindo o vídeo, e discutindo com os seus colegas — qual é o jeito certo de ligar os pontos do item (a).

Exercício 5.

Seja



Faça os gráficos destas funções:

a) $F(x) = \int_{t=2}^{t=x} f(t) dt$

b) $G(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t) dt$

Dica: comece fazendo uma tabela como esta aqui,

x	$F(x)$
2	
3	
4	
5	
2.5	
3.5	
2.1	
3.1	

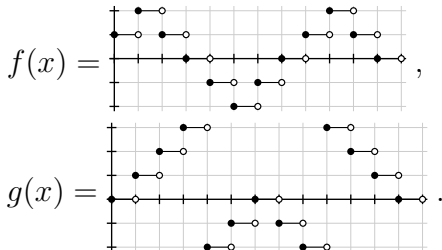
com um monte de pontos pros quais você consegue calcular o $F(x)$ deles de cabeça só olhando pro gráfico, e depois plote estes pontos. Depois faça a mesma coisa pra $G(x)$ *sem fazer a tabela* – desenhe um monte de “pontos fáceis de calcular” direto no seu gráfico.

Eu comecei o curso de Cálculo 3 de 2024.1 discutindo algumas técnicas pra descobrir “pontos fáceis de calcular”. Veja se os primeiros slides de C3 te ajudam:

3iT4 Pontos mais fáceis de calcular

Exercício 6.

Sejam:



Faça os gráficos destas funções:

$$\text{a) } F(x) = \int_{t=0}^{t=x} f(t) dt$$

$$\text{b) } G(x) = \int_{t=3}^{t=x} g(t) dt$$

Algumas propriedades da integral

As três propriedades mais básicas da integral definida são estas:

$$k \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{x=a}^{x=b} k f(x) dx \quad (*)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x) dx = \int_{x=a}^{x=c} f(x) dx \quad (**)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = - \int_{x=b}^{x=a} f(x) dx \quad (***)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} k dx = k(b-a) \quad (****)$$

O melhor modo da gente visualizar o que essas propriedades “querem dizer” é comparando a fórmula pro caso geral com casos particulares. Olhe pra figura à direita; ela compara a (*) com dois casos particulares dela – primeiro um caso “normal”, em que $k = 2$, e depois um caso “estranho” em que $k = -1$...

No caso “estranho” aparecem uns números negativos, ó:

$$\underbrace{(-1) \cdot \int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{>0} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} (-1) \cdot f(x) dx}_{<0}$$

...e uma figura que tem “área negativa”!!!

Eu acho a abordagem do Mathologer genial – ele começa dizendo que a distância percorrida é a área (ou a integral) da velocidade, e com isso vários casos estranhos em que aparecem números negativos *começam* a fazer sentido.

Slogan: a gente quer que as quatro propriedades acima valham sempre – tanto nos casos “normais” quanto nos casos “estranhos”.

$$(*) : \quad k \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{x=a}^{x=b} k f(x) dx$$

$$(*) \left[\begin{array}{l} a:=0 \\ b:=4 \\ k=2 \end{array} \right] : \quad 2 \cdot \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{\text{área positiva}} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} 2 \cdot f(x) dx}_{\text{área positiva}}$$



$$(*) \left[\begin{array}{l} a:=0 \\ b:=4 \\ k=-1 \end{array} \right] : \quad (-1) \cdot \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{\text{área positiva}} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} (-1) \cdot f(x) dx}_{\text{área negativa}}$$



Links pros livros:

[StewPtCap5p22](#) (p.343)

[Leit5p48](#) (p.331)

[MirandaP220](#)

A motivação pro (***) é isso aqui:

$$(**) : \quad \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x) dx = \int_{x=a}^{x=c} f(x) dx$$

$$(**) \begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=3 \\ c:=4 \end{bmatrix} : \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x) dx}_{\text{[Graph: orange area from } x=0 \text{ to } x=3 \text{ under a curve]}} + \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x) dx}_{\text{[Graph: orange area from } x=3 \text{ to } x=4 \text{ under a curve]}} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{\text{[Graph: orange area from } x=0 \text{ to } x=4 \text{ under a curve]}}$$

$$(**) \begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ c:=3 \end{bmatrix} : \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{\text{[Graph: orange area from } x=0 \text{ to } x=4 \text{ under a curve]}} + \underbrace{\int_{x=4}^{x=3} f(x) dx}_{\text{[Graph: ???]}} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x) dx}_{\text{[Graph: orange area from } x=0 \text{ to } x=3 \text{ under a curve]}}$$

$$\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{\text{[Graph: orange area from } x=0 \text{ to } x=4 \text{ under a curve]}} - \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x) dx}_{\text{[Graph: orange area from } x=3 \text{ to } x=4 \text{ under a curve]}} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x) dx}_{\text{[Graph: orange area from } x=0 \text{ to } x=3 \text{ under a curve]}}$$

“Quase retângulos”

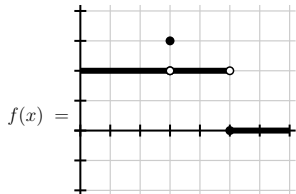
A quarta propriedade é essa aqui:

$$\int_{x=a}^{x=b} k dx = k(b-a) \quad (****)$$

A gente quer que ela valha pra todos os valores de k , a e b – incluindo os casos em que k é negativo, que são “retângulos com altura negativa” e pros casos que $a > b$, que são “retângulos que têm base negativa”...

...e além disso a gente quer que ela valha pra casos como o da figura da direita, em que entre $x = 2$ e $x = 5$ o mathologermóvel anda com velocidade constante, 2, **exceto em dois instantes** – repare que no gráfico a gente tem $f(3) = 3$ e $f(5) = 0$...

Vamos pensar em termos de velocidades e distâncias. Entre $x = 2$ e $x = 5$ o mathologermóvel andou sempre com velocidade 2, exceto por dois instantes de um buzilionésimo de segundo cada um, em que ele andou com velocidades diferentes de 2... esses instantes mudam tão pouco a distância percorrida que a gente **vai considerar** que eles **não mudam** a distância percorrida.



$$\begin{aligned} \int_{x=2}^{x=5} f(x) dx &= \int_{x=2}^{x=5} 2 dx \\ &= 2 \cdot (5 - 2) \\ &= 2 \cdot 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Cálculo 2 - 2025.1

Aula 3: teste de nivelamento

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

[StewPtCap2p67](#) (p.138) Exercícios 33–38: ...diga o que são f e a .

[2iT70](#) (2024.1) Teste de nivelamento: $\frac{d}{dx} f(\sin(x^4) + \ln x) = ?$

[2iT187](#) (2024.1) P1: questão sobre integração por partes

[2jT226](#) (2024.2) P1: questão sobre frações parciais

Este teste é só pra eu descobrir o quanto vocês sabem de certas técnicas de Cálculo 1 – eu vou usar as informações daqui pra decidir como organizar o curso.

Por favor escrevam:

- seu nome legível (em todas as folhas),
- com quem você fez GA, C1 e Prog1 no semestre em que você passou em cada uma, e em qual semestre foi,
- as respostas dos exercícios à direita e tudo que você conseguir fazer pra tentar resolver eles.

Dicas (que você não é obrigado a usar!):

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

$$f'(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) \Big|_{x=a}$$

Obs: eu tirei os exercícios à direita do Stewart:

StewPtCap2p62 (p.133) Definição da derivada

StewPtCap2p67 (p.138) Exercícios 33–38

Cada limite abaixo representa a derivada de certa função f em certo número a . Diga o que são f e a em cada caso.

a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^{10} - 1}{h}$

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{16+h} - 2}{h}$

c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2^x - 32}{x - 5}$

d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

e) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

$$[DDa\varepsilon] = \left(\left(\frac{d}{dx} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}$$

$$[DDx\varepsilon] = \left(\left(\frac{d}{dx} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

$$[DDxa] = \left(\left(\frac{d}{dx} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$[La\varepsilon] = \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \right)$$

$$[Lx\varepsilon] = \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \right)$$

$$[Lxa] = \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

$$[Qa\varepsilon] = \left(\frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \right)$$

$$[Qx\varepsilon] = \left(\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \right)$$

$$[Qxa] = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

$$[Qa\varepsilon] [\varepsilon := \varepsilon] = \left(\frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \right)$$

$$[Qa\varepsilon] \left[\begin{array}{l} \varepsilon := \varepsilon \\ f(x) := (x)^{10} \end{array} \right] = \left(\frac{(a + \varepsilon)^{10} - (a)^{10}}{\varepsilon} \right)$$

$$[Qa\varepsilon] \left[\begin{array}{l} \varepsilon := \varepsilon \\ f(x) := (x)^{10} \\ a := 1 \end{array} \right] = \left(\frac{(1 + \varepsilon)^{10} - (1)^{10}}{\varepsilon} \right)$$

$$[DDa\varepsilon] \left[\begin{array}{l} \varepsilon := \varepsilon \\ f(x) := (x)^{10} \\ a := 1 \end{array} \right] = \left(\left(\frac{d}{dx} (x)^{10} \right) \Big|_{x=1} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(1 + \varepsilon)^{10} - (1)^{10}}{\varepsilon}$$

```

(%i1) DefDeriv;
(%o1) 
$$\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a} = \lim_{\text{eps} \rightarrow 0} \frac{f(\text{eps} + a) - f(a)}{\text{eps}}$$

(%i2) DefDeriv2;
(%o2) 
$$\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(%i3) DefDeriv_s_ [f(x)=x^10];
(%o3) 
$$\left. \frac{d}{dx} x^{10} \right|_{x=a} = \lim_{\text{eps} \rightarrow 0} \frac{(\text{eps} + a)^{10} - a^{10}}{\text{eps}}$$

(%i4) DefDeriv_s_ [f(x)=x^10, a=1];
(%o4) 
$$\left. \frac{d}{dx} x^{10} \right|_{x=1} = \lim_{\text{eps} \rightarrow 0} \frac{(\text{eps} + 1)^{10} - 1}{\text{eps}}$$

(%i5) DefDeriv_s_ [f(x)=x^10, a=1, eps=h];
(%o5) 
$$\left. \frac{d}{dx} x^{10} \right|_{x=1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h + 1)^{10} - 1}{h}$$

(%i6) DefDeriv_s_ [f(x)=(x)^(1/4)];
(%o6) 
$$\left. \frac{d}{dx} x^{\frac{1}{4}} \right|_{x=a} = \lim_{\text{eps} \rightarrow 0} \frac{(\text{eps} + a)^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{4}}}{\text{eps}}$$

(%i7) DefDeriv_s_ [f(x)=(x)^(1/4), a=16];
(%o7) 
$$\left. \frac{d}{dx} x^{\frac{1}{4}} \right|_{x=16} = \lim_{\text{eps} \rightarrow 0} \frac{(\text{eps} + 16)^{\frac{1}{4}} - 2}{\text{eps}}$$

(%i8) DefDeriv_s_ [f(x)=(x)^(1/4), a=16, eps=h];
(%o8) 
$$\left. \frac{d}{dx} x^{\frac{1}{4}} \right|_{x=16} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h + 16)^{\frac{1}{4}} - 2}{h}$$

(%i9) DefDeriv2_s_ [f(x)=2^x];
(%o9) 
$$\left. \frac{d}{dx} 2^x \right|_{x=a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2^x - 2^a}{x - a}$$

(%i10) DefDeriv2_s_ [f(x)=2^x, a=5];
(%o10) 
$$\left. \frac{d}{dx} 2^x \right|_{x=5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2^x - 32}{x - 5}$$

(%i11) cos(%pi);
(%o11) -1
(%i12) %piargs : false$
(%i13) cos(%pi);
(%o13) cos pi
(%i14) DefDeriv_s_ [f(x)=cos(x)];
(%o14) 
$$\left. \frac{d}{dx} \cos x \right|_{x=a} = \lim_{\text{eps} \rightarrow 0} \frac{\cos(\text{eps} + a) - \cos a}{\text{eps}}$$

(%i15) DefDeriv_s_ [f(x)=cos(x), a=%pi];
(%o15) 
$$\left. \frac{d}{dx} \cos x \right|_{x=\pi} = \lim_{\text{eps} \rightarrow 0} \frac{\cos(\text{eps} + \pi) - \cos \pi}{\text{eps}}$$

(%i16) o : DefDeriv_s_ [f(x)=cos(x), a=%pi, eps=h];
(%o16) 
$$\left. \frac{d}{dx} \cos x \right|_{x=\pi} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h + \pi) - \cos \pi}{h}$$

(%i17) subst([cos(%pi)=-1, o], o);
(%o17) 
$$\left. \frac{d}{dx} \cos x \right|_{x=\pi} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h + \pi) + 1}{h}$$

(%i18) DefDeriv2_s_ [x=t];
(%o18) 
$$\left. \frac{d}{dt} f(t) \right|_{t=a} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

(%i19) DefDeriv2_s_ [x=t, a=1];
(%o19) 
$$\left. \frac{d}{dt} f(t) \right|_{t=1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1}$$

(%i20) DefDeriv2_s_ [x=t, a=1, f(x)=x^4];
(%o20) 
$$\left. \frac{d}{dt} t^4 \right|_{t=1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 - 1}{t - 1}$$

(%i21) DefDeriv2_s_ [x=t, a=1, f(x)=x^4+x];
(%o21) 
$$\left. \frac{d}{dt} (t^4 + t) \right|_{t=1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 + t - 2}{t - 1}$$

(%i22)

```

Cálculo 2 - 2025.1

Aulas 5 a 8: exercícios de substituição

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

[2jQ9](#) Quadros da aula 4 (30/set/2024)

[2iQ12](#) Quadros da aula 6 (27/mar/2024)

[2iQ14](#) Quadros da aula 7 (01/abr/2024)

[2iQ16](#) Quadros da aula 8 (02/abr/2024)

[2iQ22](#) Quadros da aula 9 (03/abr/2024)

A regra da cadeia em vários livros:

[MirandaP87](#) 3.5 A regra da cadeia

[Leit3p45](#) (p.181) 3.6 A derivada de uma função composta e...

[StewPtCap3p26](#) (p.179) 3.4 A regra da cadeia

[CederjC1V1p115](#) (p.113) Aula 12: A regra da cadeia

[FlemmingP147](#) (p.139) 4.13 Derivada da função composta

A fórmula do TFC2 nem sempre vale:

[2dT231](#) (2021.2) $F(x) = -x^{-1}$, $F'(x) = x^{-2}$

[2fT107](#) (2022.2) Dicas pra P1

[2fT110](#) (2022.2) P1, questão 3

[2fT114](#) (2022.2) P1, questão 3, gabarito

[2gT108](#) (2023.1) Dicas pra P1

[2gT111](#) (2023.1) P1, questão 4

[2gT116](#) (2023.1) P1, questão 4, gabarito

[2hT179](#) (2023.2) Dicas pra P1

[2hT188](#) (2023.2) P1, questão 4

[2hT193](#) (2023.2) P1, questão 4, gabarito

Introdução

Vários alunos – obs: eram alunos super dedicados, mas que tinham feito um Ensino Médio super precário, e que tavam tentando tirar o atraso correndo – já me contaram que quando eles tentavam tirar certas dúvidas com o Reginaldo ele respondia coisas como:

“Isso é matéria de ensino médio!
Isso aí você já deveria saber. Vai estudar pelo livro.”

Eu vou chamar isso de “Método Reginaldo”.

Eu vou tentar fazer algo totalmente diferente. As pessoas *deveriam* estar chegando em Cálculo sabendo obter casos particulares de fórmulas e teoremas muito bem, mas não estão...

Eu *ácho* que o modo mais rápido de tirar as dúvidas dessas pessoas é usando a operação de substituição que nós vamos ver aqui, “[:=]”, que é uma versão **simplificada** das operações de substituição “de verdade” que são usadas em λ -cálculo e em programas como o Lean, e que lidam bem com variáveis livres e ligadas, com tipos dependentes, que usam índices de de-Bruijn nos lugares certos, etc... mas ainda falta! Eu já tenho bastante material sobre isso, mas ele está espalhado...

Ah, e um dia eu vou fazer uma versão desse PDF com um apêndice enorme com um monte de exemplos em que esse “[:=]” simplificado funciona bem e esclarece idéias complicadas (já tenho um monte no material do semestre passado!), e com um monte de exemplos em que esse “[:=]” simplificado funciona mal e a gente precisa das versões mais complicadas... mas ainda falta.

Funções

Isso aqui é um exemplo de coisa que segundo o Reginaldo “vocês já deveriam saber”, porque é matéria de Ensino Médio:

Digamos que $f(x) = x^2$. Então:

$$\begin{aligned} f(200) &= 200^2 \\ f(3u + 4) &= (3u + 4)^2 \\ f(42x^3 + 99) &= (42x^3 + 99)^2 \\ f(a + b) &= (a + b)^2 \\ f(g(x)) &= g(x)^2 \\ 42 + f(200) &= 42 + 200^2 \\ h(f(200)) &= h(200^2) \\ h(f(x)) &= h(x^2) \\ h(f(a + b)) &= h((a + b)^2) \end{aligned}$$

Exercício 1.

a) Calcule o resultado desta substituição:

$$(f(3u + 4)) [f(y) := y^5 + y^6]$$

Agora seja:

$$[S_1] = [f(y) := y^5 + y^6]$$

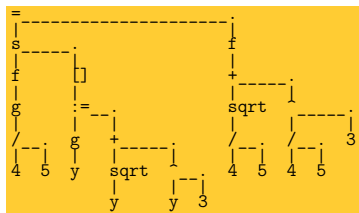
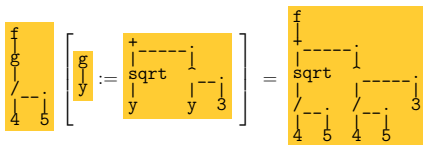
Calcule o resultado destas substituições:

- b) $f(200) [S_1]$
- c) $f(3u + 4) [S_1]$
- d) $f(42x^3 + 99) [S_1]$
- e) $f(a + b) [S_1]$
- f) $f(g(x)) [S_1]$
- g) $42 + f(200) [S_1]$
- h) $h(f(200)) [S_1]$
- i) $h(f(x)) [S_1]$
- j) $h(f(a + b)) [S_1]$
- k) $f(f(200)) [S_1]$
- l) $h(x) [S_1]$
- m) $h(y) [S_1]$

Dica

Entenda isto aqui:

$$f(g(4/5)) [g(y) := \sqrt{y} + y^3] = f\left(\sqrt{4/5} + (4/5)^3\right)$$



Mais sobre chutar e testar

Uma solução pra equação $x^2+1 = 50$ é um modo de preencher os dois ‘?’s daqui que faça as duas igualdades externas serem verdadeiras:

$$(x^2 + 1 = 50) [x := ?] = ? = \mathbf{V}$$

As soluções são $x = 7$ e $x = -7$. Olha:

$$\begin{aligned}(x^2 + 1 = 50) [x := 7] &= (7^2 + 1 = 50) = \mathbf{V} \\ (x^2 + 1 = 50) [x := -7] &= ((-7)^2 + 1 = 50) = \mathbf{V}\end{aligned}$$

Como é difícil chegar direto na solução eu costumo pedir pras pessoas começarem preenchendo os dois ‘?’s daqui,

$$(x^2 + 1 = 50) [x := ?] = ?$$

começando pelo da esquerda, pra fazer com que a igualdade externa seja verdadeira. Por exemplo:

$$(x^2 + 1 = 50) [x := 4] = (4^2 + 1 = 50)$$

Se a pessoa consegue pelo menos preencher o ‘?’ da esquerda daqui

$$(x^2 + 1 = 50) [x := ?] = ?$$

com uma expressão qualquer, como aqui,

$$(x^2 + 1 = 50) [x := a + b] = ?$$

...aí eu geralmente consigo convencer ela de que ela pode usar isto pra treinar substituições... por exemplo:

$$\begin{aligned}(x^2 + 1 = 50) [x := a + b] &= ((a + b)^2 + 1 = 50) \\ (x^2 + 1 = 50) [x := 2] &= (2^2 + 1 = 50) \\ (x^2 + 1 = 50) [x := 3] &= (3^2 + 1 = 50)\end{aligned}$$

Depois que ela treinou isso bastante eu posso pedir que ela faça algo parecido usando este molde aqui,

$$(x^2 + 1 = 50) [x := ?] = ? = ?$$

e substituindo o último ‘?’ por **V** ou **F**. Por exemplo:

$$\begin{aligned}(x^2 + 1 = 50) [x := 5] &= (5^2 + 1 = 50) = \mathbf{F} \\ (x^2 + 1 = 50) [x := 6] &= (6^2 + 1 = 50) = \mathbf{F} \\ (x^2 + 1 = 50) [x := 7] &= (7^2 + 1 = 50) = \mathbf{V}\end{aligned}$$

e aí *geralmente* as pessoas conseguem voltar pro problema original do início da coluna da esquerda e entender ele. Mas às vezes isso não funciona – e aí eu tenho que lembrar a pessoa que ela se comprometeu a ler essas coisas aqui pra entender a metodologia do curso:

Slogans01:10 até 08:51: duas histórias verídicas sobre GA
2iT5, 2iT6 “Meu objetivo é reprovar pessoas como você”

Equações diferenciais

O Stewart define a solução de uma equação diferencial nesta página aqui,

StewPtCap9p8 (p.528) Equações diferenciais gerais e com estas frases (obs: a “equação 4” é $y' = xy$):

Uma função f é denominada *solução* de uma equação diferencial se a equação é satisfeita quando $y = f(x)$ e suas derivadas são substituídas na equação. Assim, f é uma solução da Equação 4 se

$$f'(x) = xf(x)$$

para todos os valores de x em algum intervalo.

Eu vou ser um pouco mais porco que ele, e ao invés de falar “em algum intervalo” eu vou falar “sempre”.

Pra mim $f(x) = e^{2x}$ é uma solução da equação diferencial $f'(x) = 2f(x)$ porque isto aqui é verdade:

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \end{bmatrix} = (e^{2x} = e^{2x}) = \mathbf{V}$$

...e uma solução da equação diferencial $f(x) = 2f'(x)$ é algo que a gente põe no primeiro ‘?’ daqui,

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ f'(x) := ? \end{bmatrix} = ? = \mathbf{V}$$

num modo de completar isso que faz com que todas as igualdades externas sejam verdadeiras.

Por exemplo, vamos testar se $f(x) = 42$ é uma solução da equação diferencial $f(x) = e^{2x}$. Temos:

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := ? \end{bmatrix} = ? = ?$$

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{bmatrix} = ? = ?$$

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 42 \end{bmatrix} = (0 = 2 \cdot 42) = ?$$

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{bmatrix} = (0 = 2 \cdot 42) = \mathbf{F}$$

Exercício 2.

a) Verifique que $f(x) = 0$ é uma solução da equação diferencial $f'(x) = 2f(x)$.

b) Verifique que $f(x) = 99x$ não é uma solução da equação diferencial $f'(x) = 2f(x)$. Dica: você vai ter que decifrar isto aqui: “ $(99 = 2 \cdot 99x) = \mathbf{F}$ porque $99 = 2 \cdot 99x$ não é verdade sempre”.

Antes de continuar...

Antes da gente continuar faça todos os itens da coluna da direita – são exercícios que eu preparei alguns semestres atrás.

Sejam:

$$[4] = \left(f'(x) = x^4 \right)$$

$$[5] = \left(f'(x) = 2f(x) \right)$$

$$[6] = \left(f''(x) + f'(x) = 6f(x) \right)$$

$$[7] = \left(f'(x) = -\frac{1}{f(x)} \right)$$

$$[8] = \left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \right)$$

$$[RC] = \left(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x) \right)$$

$$[TFC2] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x) dx = f(b) - f(a) \right)$$

Note que as expressões [4], [5], [6], [7], [8], são as EDOs deste problema aqui: [2dT13](#) EDOs por chutar e testar.

Exercício

Calcule o resultado de cada uma das substituições à direita. Lembre que o resultado de uma substituição é sempre uma expressão – não simplifique ela. Deixa eu fazer uma comparação com C: o resultado de substituir cada ocorrência do caracter 'a' pelo caracter '2' no string "a+5" é o string "2+5", não o string "7", e nem o número 7.

- a) $f(g(x))$ $\left[\begin{array}{l} x := 42 \end{array} \right]$
 b) $f(g(x))$ $\left[\begin{array}{l} g(x) := 200 \cdot x \end{array} \right]$
 c) $f(g(x))$ $\left[\begin{array}{l} f(y) := y^2 + y^3 \end{array} \right]$
 d) $f(g(x))$ $\left[\begin{array}{l} f(y) := e^y \end{array} \right]$
 e) $f(g(x))$ $\left[\begin{array}{l} g(x) := 4 \cdot x \end{array} \right]$
 f) $f(g(x))$ $\left[\begin{array}{l} f(y) := e^y \\ g(x) := 4 \cdot x \end{array} \right]$
 g) $f(g(x))$ $\left[\begin{array}{l} f(y) := y^{1/2} \end{array} \right]$
 h) $f(g(x))$ $\left[\begin{array}{l} f(y) := \sqrt{y} \end{array} \right]$
 i) $f(g(x))$ $\left[\begin{array}{l} f(y) := \sqrt{y} \end{array} \right]$
 j) $f(g(x))$ $\left[\begin{array}{l} g(x) := e^x \\ g'(x) := e^x \end{array} \right]$
 k) $f(g(x))'$ $\left[\begin{array}{l} g(x) := e^x \\ g'(x) := e^x \end{array} \right]$
 l) [RC] $\left[\begin{array}{l} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \end{array} \right]$
 m) [RC] $\left[\begin{array}{l} f(y) := y^{1/2} \\ f'(y) := \frac{1}{2} y^{-1/2} \end{array} \right]$
 n) [RC] $\left[\begin{array}{l} f(y) := \sqrt{y} \\ f'(y) := \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{array} \right]$
 o) [6] $\left[\begin{array}{l} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \\ f''(x) := 4e^{2x} \\ f(x) := e^{3x} \\ f'(x) := 3e^{3x} \\ f''(x) := 9e^{3x} \end{array} \right]$
 p) [6] $\left[\begin{array}{l} f(x) := 3e^{3x} \\ f''(x) := 9e^{3x} \end{array} \right]$
 q) [TFC2] $\left[\begin{array}{l} f(x) := \frac{1}{2}x^2 \\ f'(x) := x \\ a := 0 \\ b := 2 \end{array} \right]$
 r) [8] $\left[\begin{array}{l} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right]$

Uma integral

Nas aulas 8 e 9 – links:

2iQ16 Quadros da aula 8 (2/abr/2024)

2iQ22 Quadros da aula 9 (3/abr/2024)

nós vimos um argumento visual que mostrava isto aqui,

$$\int_{x=1}^{x=2} x \, dx = 1.5$$

e depois o argumento mais formal abaixo, que dava o mesmo resultado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^2 &= 2x \\ \frac{d}{dx} \frac{x^2}{2} &= x \\ \int x \, dx &= \frac{x^2}{2} \\ \int_{x=a}^{x=b} x \, dx &= \frac{x^2}{2} \Big|_{x=a}^{x=b} \\ \int_{x=1}^{x=2} x \, dx &= \frac{x^2}{2} \Big|_{x=1}^{x=2} \\ &= \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \\ &= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 1.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{por [II]} & \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \end{bmatrix} \\ \text{por [TFC2]} & \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \end{bmatrix} \\ \text{por [TFC2]} & \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix} \\ \text{por [defdif]} & \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Usamos estes nomes pras fórmulas:

$$\begin{aligned} \text{[II]} &= \left(\int F'(x) \, dx = F(x) \right) \\ \text{[TFC2]} &= \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x) \, dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right) \\ \text{[defdif]} &= \left(F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \right) \end{aligned}$$

Exercício

Obs: deixe pra fazer este exercício depois dos exercícios de regra da cadeia!!!

Faça os exercícios 19 a 30 desta página do Stewart – [StewPtCap5p36](#) (p.357) 5.3 Exercícios

...usando o método por chutar e testar à esquerda, em que a gente chuta e testa várias funções F e depois que a gente encontra uma F boa a gente chuta e testa valores de a e b .

A regra da cadeia

Imagina que eu passo esse exercício aqui,

$$\frac{d}{dx} \sin 42x = ?$$

e uma pessoa resolve ele desse jeito:

Queremos encontrar a derivada de $f(x) = \sin 42x$. Para tal vamos usar a regra da cadeia. Aplicando o método chegamos ao resultado, que é $f'(x) = \cos 42x$.

Repara: essa pessoa gastou um bocadinho de tempo e energia escrevendo a parte em português da resposta dela, e isso não ajudou ela em nada, só atrapalhou... ela chegou no resultado errado, e a solução dela ficou num formato super difícil de debugar – não dá pra eu apontar pra um símbolo dela e dizer “confere isso aqui”!...

Compare a solução dela com esta aqui, em três passos:

$$\begin{aligned} \text{[RC]} &= \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ g(x) := ? \\ f'(x) := ? \\ g'(x) := ? \end{bmatrix} &= \left(\frac{d}{dx} \sin 42x = ? \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := \sin x \\ g(x) := 42x \\ f'(x) := \cos x \\ g'(x) := 42 \end{bmatrix} &= \left(\frac{d}{dx} \sin 42x = \cos(42x) \cdot 42 \right) \end{aligned}$$

Se a pessoa não faz a menor idéia de como eu consegui descobrir o que pôr nos cinco ‘?’s da minha solução em três passos dali da esquerda eu posso expandir a minha solução deste jeito...

$$\begin{aligned} \text{[RC]} &= \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ g(x) := ? \\ f'(x) := ? \\ g'(x) := ? \end{bmatrix} &= \left(\frac{d}{dx} \sin 42x = ? \right) \\ \text{[RCL]} &= \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) \right) \\ \text{[RCL]} \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ g(x) := ? \end{bmatrix} &= \left(\frac{d}{dx} \sin 42x \right) \\ \text{[RCL]} \begin{bmatrix} f(x) := \sin x \\ g(x) := 42x \end{bmatrix} &= \left(\frac{d}{dx} \sin 42x \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := \sin x \\ g(x) := 42x \end{bmatrix} &= \left(\frac{d}{dx} \sin 42x = f'(42x)g'(x) \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := \sin x \\ g(x) := 42x \\ f'(x) := ? \\ g'(x) := ? \end{bmatrix} &= \left(\frac{d}{dx} \sin 42x = ? \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := \sin x \\ g(x) := 42x \\ f'(x) := \cos x \\ g'(x) := 42 \end{bmatrix} &= \left(\frac{d}{dx} \sin 42x = \cos(42x) \cdot 42 \right) \end{aligned}$$

repare que eu introduzi um monte de passos novos, e comecei resolvendo um problema menor que só tinha dois ‘?’s – este aqui:

$$\begin{aligned} \text{[RCL]} &= \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) \right) \\ \text{[RCL]} \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ g(x) := ? \end{bmatrix} &= \left(\frac{d}{dx} \sin 42x \right) \end{aligned}$$

Renomear

Note que:

$$\underbrace{\left(\frac{d}{dx}f(g(x))\right) \left[\begin{array}{l} f := h \\ g := k \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} h := g \\ g := k \end{array} \right] [x := t]}_{\left(\frac{d}{dx}h(k(x))\right)} \\ \underbrace{\left(\frac{d}{dx}g(f(x))\right)}_{\left(\frac{d}{dt}g(f(t))\right)}$$

e portanto isto aqui

$$[RC] \left[\begin{array}{l} f := h \\ f' := h' \\ g := k \\ g' := k' \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} h := f \\ h' := f' \\ k := g \\ k' := g' \end{array} \right] [x := t]$$

deve dar uma versão da regra da cadeia que usa letras diferentes das originais... você consegue descobrir o resultado da substituição acima de cabeça? Se não conseguir faça todos os passos à mão.

O Maxima tem uma operação de substituição, **subst**, em que as substituições são feitas em ordem, e uma outra, **psubst**, em que as substituições são feitas em paralelo. Veja:

https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_33.html#psubst

Se o nosso ‘[:=]’ for a substituição em paralelo então a gente pode fazer isto aqui:

$$\left(\frac{d}{dx}f(g(x))\right) \left[\begin{array}{l} f := g \\ f' := g' \\ g := f \\ g' := f' \\ x := t \end{array} \right] = \left(\frac{d}{dt}g(f(t))\right)$$

só que uma vez – em 2022.1 – eu tentei definir formalmente a substituição em paralelo em sala e deu super errado, ninguém entendeu nada... e aí eu vi que era melhor evitar os casos em que a substituição simples e a substituição em paralelo se comportam de formas diferentes.

Regra da cadeia: exercícios

Exercícios do Miranda

Lembre que:

$$[\text{RC}] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Resolva os exercícios 1–6 e 8–12 daqui:

MirandaP89

usando os métodos que você quiser, e depois reescreva o resultado final de cada um neste formato com uma justificativa detalhada à direita, que nós vimos no slide 9:

$$\frac{d}{dt}(3t+4)^5 = 5(3t+4)^4 \cdot 3 \quad \text{por } [\text{RC}] \left[\begin{array}{l} f(x) := x^5 \\ g(x) := 3x+4 \\ f'(x) := 5x^4 \\ g'(x) := 3 \end{array} \right] [x := t]$$

Muito importante

Cálculo 2 é cheio de fórmulas que parecem incompreensíveis à primeira vista, porque são abstratas demais...

Uma das utilidades mais importantes da operação ‘[:=]’ pra gente vai ser *transformar fórmulas nas quais a gente não entende nada em casos particulares dessas fórmulas, que têm vários pedaços que a gente consegue entender.*

Isso aqui é uma fórmula – ou melhor, um “método” – que vai ser um dos assuntos da P2:

$$[M] = \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y) dy = g(x) dx \\ \int h(y) dy = \int g(x) dx \\ \parallel \qquad \qquad \parallel \\ H(y) + C_1 \qquad G(x) + C_2 \\ H(y) = G(x) + C_2 - C_1 \\ \qquad \qquad = G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right)$$

Exercício muito importante:

Calcule o resultado da substituição abaixo.

Você provavelmente vai conseguir entender as quatro igualdades de baixo do resultado, mas as cinco igualdades de cima ainda não vão fazer sentido nenhum pra você.

$$[M] \left[\begin{array}{l} g(x) := -2x \\ h(y) := 2y \\ G(x) := -x^2 \\ H(y) := y^2 \\ H^{-1}(u) := \sqrt{u} \end{array} \right] = ?$$

Variáveis livres e ligadas

Seja:

$$[\mathbf{LL}] = (\sum_{k=1}^3 a = 3a)$$

Então $[\mathbf{LL}]$ é sempre verdade mas $[\mathbf{LL}] [a := k]$ só é verdade para alguns valores de k ... confira:

$$\begin{aligned} [\mathbf{LL}] &= (\sum_{k=1}^3 a = 3a) \\ &= (a + a + a = 3a) \\ &= (3a = 3a) \\ &= \mathbf{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{LL}] [a := k] &= (\sum_{k=1}^3 a = 3a) [a := k] \\ &= (\sum_{k=1}^3 k = 3k) \\ &= (1 + 2 + 3 = 3k) \\ &= (6 = 3k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{LL}] [a := k] [k := 2] &= (6 = 3k) [k := 2] \\ &= (6 = 3 \cdot 2) \\ &= (6 = 6) \\ &= \mathbf{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{LL}] [a := k] [k := 4] &= (6 = 3k) [k := 4] \\ &= (6 = 3 \cdot 4) \\ &= (6 = 12) \\ &= \mathbf{F} \end{aligned}$$

O problema aqui é que a substituição $[a := k]$ transforma uma variável livre numa variável ligada.

Cálculo 2 - 2025.1

Aula 8: teste de nivelamento 2
(8/abril/2025 – duração: 15 mins)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

Teste de nivelamento anteriores:

[2kT20](#) (2025.1) sobre derivada como limite

[2jT56](#) (2024.2) sobre derivada como limite

[2iT67](#) (2024.1) sobre $\frac{d}{dx} f(\text{sen}(x^4) + \ln x)$

[2hT64](#) (2023.2) sobre $\frac{d}{dx} f(\text{sen}(x^4) + \ln x)$

Por favor escrevam...

Por favor escrevam nesta folha:

- seu nome (legível),
- com quem você fez C1, em que semestre foi, e que livros você usou – e se você fez várias vezes fale sobre cada vez,
- a questão e tudo que você conseguir fazer pra resolver ela. A questão é:

$$\frac{d}{dx} f(\sin(x^4) + \ln x) = ?$$

Lembre que no processo pra calcular a derivada de uma expressão grande a gente acaba calculando as derivadas de todas as subexpressões dela... então se você não souber fazer a questão calcule a derivada de algumas subexpressões do $f(\sin(x^4) + \ln x)$.

Cálculo 2 - 2025.1

Aulas 10 e 11: integração por partes

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

Miranda199 6.3 Integração por Partes

Miranda205 Exercícios

Leit9p4 (p.531) 9.1 Integração por partes

Leit9p9 (p.536) Exercícios 9.1

StewPtCap7p5 (p.420) 7.1 Integração por Partes

StewPtCap7p8 (p.423) 7.1 Exercícios

CederjC2V2p35 (p.33) 19 Integração por partes

https://en.wikipedia.org/wiki/Integration_by_parts

Quadros:

2kQ23 (2025.1)

2jQ20 (2024.2)

2iQ27 (2024.1)

Introdução

Lembre que:

$$\begin{aligned} &= \\ &= \\ \left[\begin{array}{l} F(x) := fg \\ F'(x) := f'g + fg' \end{array} \right] &= \int f'g + fg' dx = fg \end{aligned}$$

Vou definir:

=

Compare com:

StewPtCap7p5 (p.420) 7.1 Integração por Partes

A gente vai evitar usar diferenciais, e portanto a gente vai evitar usar essa fórmula aqui, que vários livros usam – a “fórmula da integração por partes com diferenciais”:

$$= \int f u dv = uv - \int v du$$

O meu truque preferido pra não me enrolar quando eu uso a fórmula é usar anotações em underbraces. Ao inves de usar só isso aqui,

$$\begin{aligned} &= \\ \left[\begin{array}{l} f := x \\ f' := 1 \\ g := e^x \\ g' := e^x \end{array} \right] &= \int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx \end{aligned}$$

eu vou acrescentar umas anotações, deste jeito:

$$\int \underbrace{x}_f \underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{x}_f \underbrace{e^x}_g - \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{e^x}_{g'} dx \quad \text{por} \quad \left[\begin{array}{l} f := x \\ f' := 1 \\ g := e^x \\ g' := e^x \end{array} \right]$$

Exercício 1

Complete as igualdades e as justificativas.

Note que os exercícios a, b, c e d abaixo são baseados nos exercícios 3, 4, 6 e 7 desta página do Stewart:

StewPtCap7p8 (p.423) 7.1 Exercícios

- a) $\int \underbrace{x}_f \underbrace{\cos 5x}_{g'} dx = ?$ por [?]
- b) $\int \underbrace{x}_f \underbrace{e^{-x}}_{g'} dx = ?$ por [?]
- c) $\int \underbrace{t}_f \underbrace{\sin 2t}_{g'} dt = ?$ por [?]
- d) $\int \underbrace{(x^2 + 2x)}_f \underbrace{\cos x}_{g'} dx = ?$ por [?]

Exercício 2

Calcule

$$\int x^2 e^x dx$$

e justifique cada um dos passos em que você usar a regra .

Dica: aqui não é fácil encontrar o melhor modo de escrever a resposta... você vai precisar reescrever o seu desenvolvimento várias vezes usando os personagens a, b e c da Dica 7 e vai precisar nomear os seus objetos.

Aviso

A P1 vai ter uma questão de integração por partes em que o resultado final vai valer 10% dos pontos e os itens de “complete as igualdades e as justificativas” vão valer 90% dos pontos.

Na “vida real” é bem raro aparecerem problemas que a gente resolve usando integração por partes, então a gente vai usar integração por partes mais pra treinar justificativas e modos de escrever.

Cálculo 2 - 2025.1

Aula 11: integral indefinida

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

[Miranda181](#) 6 Integral Indefinida

[Miranda182](#) Figura 6.1: antiderivadas de x^2

[Miranda207](#) 7 Integração definida

[Miranda212](#) 7.2 Integral definida

[Leit5p2](#) (p.285) 5 Integração e integral definida

[Leit5p3](#) (p.286) 5.1 Antidiferenciação

[Leit5p4](#) (p.287) 5.1.3 Teorema: ...em um intervalo I

[Leit5p41](#) (p.324) 5.5 A integral definida

[StewPtCap5p16](#) (p.337) 5.2 A Integral Definida

[StewPtCap5p39](#) (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas

[StewPtCap5p40](#) (p.361) primitiva geral da função $f(x) = 1/x^2$

[Miranda199](#) 6.3 Integração por Partes

[Leit9p4](#) (p.531) 9.1. Integração por partes

[StewPtCap7p5](#) (p.420) 7.1 Integração por Partes

Um livro recente da Márcia Fusaro Pinto (da UFRJ):

[TLATOCp45](#) (p.34) ...fearlessly substituting variables...

[TLATOCp189](#) (p.178) 6 Interlude: the ordering of chapters...

Integral indefinida

Tanto o Leithold quanto o Miranda explicam a *integral indefinida* antes da *integral definida*. Dê uma olhada na página de links.

Todos os modos fáceis de atribuir um significado intuitivo para expressões como esta aqui

$$\int f(x) dx$$

são gambiarras que funcionam mal.

Eu vou usar esta definição aqui,

[2fT23](#) (p.4) Outra definição para a integral indefinida e aqui tem um caso em que a definição usual quebra:

[2fT24](#) (p.5) Meme: expanding brain, versão ln

Nós vamos começar usando a integral indefinida como o macaco que faz contas sem ter idéia do significado do que está fazendo, e só depois que tivermos bastante prática nós vamos discutir os vários jeitos de atribuir significados intuitivos para

A regra básica vai ser esta aqui:

$$[\text{II}] = \left(\int f'(x) dx = f(x) \right)$$

Exercícios

Calcule:

c) Resolva os exercícios 1 a 10 daqui por chutar e testar:

[Miranda185](#) Exercícios 6.1

d) Entenda tudo que esta nesta página:

[Leit5p6](#) (p.289) 5.1.8. Teorema

A regra do quociente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} g(x)^k &= k g(x)^{k-1} g'(x) \\ \frac{d}{dx} g(x)^{-1} &= -g(x)^{-2} g'(x) \\ \frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} &= -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \\ \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} \right) \\ &= f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2} \right) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\ \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} g^k &= k g^{k-1} g' \\ \frac{d}{dx} g^{-1} &= -g^{-2} g' \\ \frac{d}{dx} \frac{1}{g} &= -\frac{g'}{g^2} \\ \frac{d}{dx} \frac{f}{g} &= \left(\frac{d}{dx} f \right) \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{g} \right) \\ &= f' \frac{1}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2} \right) \\ &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ \frac{d}{dx} \frac{f}{g} &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$

Linearidade da integral

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = F(x)$$

$$k \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = kF(x)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} kf(x) dx = kF(x)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} kf(x) dx = k \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = F(x)$$

$$\int_{x=b}^{x=a} g(x) dx = G(x)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x) dx = F(x) + G(x)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) + g(x) dx = F(x) + G(x)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) + g(x) dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x) dx$$

$$\int f dx = F$$

$$k \int f dx = kF$$

$$\int kf dx = kF$$

$$\int kf dx = k \int f dx$$

$$\int f dx = F$$

$$\int g dx = G$$

$$\int f dx + \int g dx = F + G$$

$$\int f + g dx = F + G$$

$$\int f + g dx = \int f dx + \int g dx$$

$$\begin{aligned}
 \text{[II]} &= \left(\int F'(x) dx = F(x) \right) \\
 \text{[IIC]} &= \left(\int F'(x) dx = F(x) + C \right) \\
 \text{[TFC2]} &= \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
 \text{[defdif]} &= \left(F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \right)
 \end{aligned}$$

$$\int 0 dx = 42$$

$$\int 0 dx = 99$$

$$42 = 99$$

$$\int 0 dx = 42 + C$$

$$\int 0 dx = 99 + C$$

$$42 + C = 99 + C$$

$$\int_{x=2}^{x=3} 0 dx = 42 \Big|_{x=2}^{x=3}$$

$$\int_{x=2}^{x=3} 0 dx = 99 \Big|_{x=2}^{x=3}$$

$$42 \Big|_{x=2}^{x=3} = 99 \Big|_{x=2}^{x=3}$$

$$\int f'g + fg' dx = fg$$

$$\int f'g + fg' dx = \int f'g dx + \int fg' dx$$

$$\int f'g dx + \int fg' dx = fg$$

$$\int fg' dx = fg - \int f'g dx$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = \int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) dx + \int_{x=a}^{x=b} f(x)g'(x) dx$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) dx + \int_{x=a}^{x=b} f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) dx$$

Integração por partes: um exemplo

Lembre que o Mathologer diz no vídeo dele que o melhor modo da gente aprender Cálculo é começar escrevendo idéias que a gente acha que devem ser verdade, e depois a gente vê se elas dão resultados certos e se elas fazem sentido... e se fizerem sentido a gente tenta formalizar elas.

Ele também diz – a partir daqui, na “lombada número 1”,

CalcEasy20:27

que a integral é a inversa da derivada, mas que $\int \cos x \, dx$ pode retornar tanto $\sin x$ quanto $42 + \sin x$. As contas à direita são bem improvisadas, mas como eu indiquei em cima que elas são só uma idéia que pode estar cheia de erros o “colega que seja menos meu amigo” não vai poder reagir deste jeito aqui...

2gT20

Exercício 0:

Calcule $\frac{d}{dx}(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x)$.

Idéia (que pode estar cheia de erros):

$$\begin{aligned}
 (gh)' &= g'h + gh' && \text{por} \\
 \int (gh)' \, dx &= \int g'h + gh' \, dx \\
 gh &= \int g'h + gh' \, dx \\
 &= \int g'h \, dx + \int gh' \, dx && \text{por} \\
 gh &= \int g'h \, dx + \int gh' \, dx && \text{por 3 e 4} \\
 gh - \int g'h \, dx &= \int gh' \, dx && \text{por 5} \\
 \int gh' \, dx &= gh - \int g'h \, dx && \text{por 6} \\
 \int xe^x \, dx &= xe^x - \int 1 \cdot e^x \, dx && \text{por 7 com } \left[\begin{array}{l} g:=x \\ h:=e^x \end{array} \right] \\
 &= xe^x - \int e^x \, dx \\
 &= xe^x - e^x && \text{por } (e^x)' = e^x \\
 \int xe^x \, dx &= xe^x - e^x && \text{por 8, 9 e 10} \\
 \int x^2e^x \, dx &= x^2e^x - \int 2xe^x \, dx && \text{por 7 com } \left[\begin{array}{l} g:=x^2 \\ h:=e^x \end{array} \right] \\
 &= x^2e^x - 2 \int xe^x \, dx && \text{por} \\
 &= x^2e^x - 2(xe^x - e^x) && \text{por 11} \\
 &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x
 \end{aligned}$$

Cálculo 2 - 2025.1

Aulas 14 e 15: diferenciais
e introdução às regras de
mudança de variável na integral

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

Quadros:

2jQ24 (2024.2) 21/out/2024

Provas:

2hT190 2023.2: P1, gabarito da questão 1

2gT113 2023.1: P1, gabarito da questão 1

2fT112 2022.2: P1, gabarito da questão 1

Leit4p55 (p.269) 4.9 A diferencial

Leit4p61 (p.275) reescritas (...) usando a notação de Leibniz

Leit5p13 (p.296) Suponha que desejamos antiderivariar $(1 + x^2)^9(2x)$

Leit5p13 (p.296) 5.2.1 Regra da cadeia para a antiderivação

Leit5p19 (p.302) Exercícios 5.2

StewPtCap1p5 (p.10) variável dependente

StewPtCap3p75 (p.228) Diferenciais

StewPtCap5p39 (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas

StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição

StewPtCap5p51 (p.372) Regra da Substituição para as Integrais Definidas

StewPtCap5p51 (p.372) Demonstração. Seja F uma primitiva de $f...$

StewPtCap5p53 (p.374) Exercícios

Miranda117 4.7 Aproximações Lineares e Diferencial

Miranda119 Definição 7: a diferencial

Miranda189 6.2 Integração por Substituição

Miranda191 Exercícios

Miranda192 Exemplo 6.6

Miranda193 Não podemos calcular uma integral que possui tanto um x e um u nela

Miranda196 Exercícios

...reescritas usando a notação de Leibniz

O Leithold define diferenciais na p.269, e na p.275...

Leit4p55 (p.269) 4.9 A diferencial

Leit4p61 (p.275) ...usando a notação de Leibniz

ele tem esta tabela, em que ele mostra como as regras usuais de derivação podem ser traduzidas pra regras usando diferenciais:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{d(c)}{dx} = 0 & d(c) = 0 \\
 \frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1} & d(x^n) = nx^{n-1}dx \\
 \frac{d(cu)}{dx} = c \frac{du}{dx} & d(cu) = c du \\
 \frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} & d(u+v) = du + dv \\
 \frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} & d(uv) = u dv + v du \\
 \frac{d(\frac{u}{v})}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} & d(\frac{u}{v}) = \frac{v du - u dv}{v^2} \\
 \frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx} & d(u^n) = nu^{n-1} du
 \end{array}$$

quando eu seguia a ordem dos livros e ensinava diferenciais em C2 as pessoas cometiam tantos, tantos, tantos erros nas provas – principalmente na mudança de variável na integral, que vamos ver na próxima página – que as provas eram um massacre...

...aí eu resolvi **PROIBIR** diferenciais em C2. A gente vai usar elas só em alguns pontos muito específicos da matéria de C2, e vai deixar pra ver elas direito em C3.

Introdução

A fórmula mais difícil de justificar de Cálculo 2 é essa aqui – a fórmula da mudança de variável na integral indefinida (“MVI”):

$$\int f'(g(x)) \underbrace{g'(x)}_u dx = \int f'(u) du$$

Tem dois modos da gente acreditar nela. O primeiro é assim: os livros dizem que a MVI é verdade, então se a gente decorar ela e algumas demonstrações curtas dela e a gente aprender a recitá-las com muita, muita, *muita* convicção então a gente

- vai se convencer de que ela é verdade,
- vai ser capaz de usar ela na prova sem errar,
- e a gente vai ser capaz de convencer outras pessoas de que ela é verdade.

Tem uma demonstração da MVI aqui,

StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição mas eu até hoje não consigo acreditar direito nessa demonstração – me parece que faltam muitos detalhes nela, e eu não sei completar esses detalhes.

O segundo modo da gente acreditar na MVI é a gente aprender a usar isso aqui,

$$[\text{MVD4}] = \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(g(b)) - f(g(a)) \\ = f(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right)$$

onde “MVD” quer dizer “mudança de variável na integral definida”, e o “4” quer dizer “versão com 4 igualdades”. Note que esse **[MVD4]** é uma demonstração – em que cada passo é fácil de justificar! – e não uma fórmula... a fórmula da MVD é essa aqui,

$$[\text{MVD1}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \right)$$

e a fórmula da MVI é esta:

$$[\text{MVI}] = \left(\int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right)$$

as abreviações são estas,

$$\begin{array}{ccc} [\text{MVD4}] & \rightarrow & [\text{MVI3}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\text{MVD1}] & \rightarrow & [\text{MVI1}] \end{array}$$

e a gente vai aprender a expandir cada aplicação da **[MVI1]** pra uma aplicação da **[MVD4]** – em que cada passo vai ser fácil de justificar.

“Meu objetivo é...” (2)

Você já deve ter relido os slides da “Introdução ao curso” <http://anggtwu.net/LATEX/2024-1-C2-intro.pdf> várias vezes. A introdução tem um slide chamado “Meu objetivo é...”, que tem esse trecho aqui:

Cálculo 2 tem vários assuntos que funcionam assim: se você tentar aprender o assunto B direto ele é muito, muito, muito difícil, e você vai gastar – digamos – 200 horas de estudo pra aprender ele... mas se você aprender o assunto A primeiro você consegue aprender os dois assuntos, A e B, em 20 horas ao invés de 200.

e ela tem vários slides que falam de atividades que exercitam músculos mentais bem diferentes. O que importa agora é que “entender de cabeça” e “entender escrevendo as substituições por extenso no papel” são atividades que exercitam músculos mentais beem diferentes, e o modo rápido de aprender Cálculo 2 é nessa ordem aqui:

- A. aprender a fazer as substituições no papel
- B. aprender a fazer as substituições de cabeça
- C. entender o que os livros dizem

Você só vai conseguir aprender o B (“...de cabeça”) treinando bastante o A (“...no papel”), e pra conseguir entender o que os livros dizem (“C”) você muitas vezes vai ter que expandir uma frase misteriosa do livro em MUITOS passos mais simples. Aqui tem alguns exemplos de coisas super complicadas que os livros que nós estamos usando escreveram em poucas frases cada uma:

StewPtCap5p51 (p.372) Seja F uma primitiva de f ...
Miranda193 ...que possui tanto um x e um u ...

A matéria desse curso é gigantesca e nós temos muito pouco tempo. Se você ficar insistindo em tentar entender “de cabeça” o que os livros dizem sem tentar escrever as substituições no papel eu vou ter que usar esse slogan daqui,

**MEU OBJETIVO É REPROVAR
 PESSOAS COMO VOCÊ!!!**

que na verdade é uma versão abreviada de uma idéia bem maior – releia os slides da “Introdução ao curso” pra entender ela direito.

MVDs e MVIs

$$[\text{MVD4}] = \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = f(g(b)) - f(g(a)) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD1}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \left(\begin{array}{l} \int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = f(u) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = \int f'(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI1}] = \left(\int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right)$$

MVDs e MVIs, versão colorida

$$[\text{MVD4}] = \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(g(b)) - f(g(a)) \\ = f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD1}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \left(\begin{array}{l} \int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \\ = f(u) \\ = \int f'(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI1}] = \left(\int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right)$$

Um caso particular: $\int \cos(2x) \cdot 2 dx$

$$\begin{aligned}
 \text{[MVD4]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(g(b)) - f(g(a)) \\ = f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right) \\
 \text{[MVD4]} \begin{bmatrix} f(x):=\text{sen}(x) \\ f'(x):=\text{cos}(x) \\ g(x):=2 \cdot x \\ g'(x):=2 \\ a:=3 \\ b:=4 \end{bmatrix} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=3}^{x=4} \text{cos}(2 \cdot x) \cdot 2 dx = \text{sen}(2 \cdot x)\Big|_{x=3}^{x=4} \\ = \text{sen}(2 \cdot 4) - \text{sen}(2 \cdot 3) \\ = \text{sen}(u)\Big|_{u=2 \cdot 3}^{u=2 \cdot 4} \\ = \int_{u=2 \cdot 3}^{u=2 \cdot 4} \text{cos}(u) du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Exercício 1

Lembre que:

$$[\text{MVD4}] = \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = f(g(b)) - f(g(a)) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD1}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \right)$$

$$[\text{MVI1}] = \left(\int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right)$$

$$\text{Sejam } [\text{S1}] = \begin{bmatrix} f'(u):=u^{10} \\ f(u):=\frac{1}{11}u^{11} \\ g(x):=x^2+4 \\ g'(x):=2x \end{bmatrix} \text{ e } [\text{S2}] = \begin{bmatrix} f'(x):=\tan(x) \\ g(x):=x^2 \\ g'(x):=2x \end{bmatrix}.$$

Complete:

- $[\text{MVI1}][\text{S1}] = ?$
- $[\text{MVD4}][\text{S1}] = ?$
- $[\text{MVI1}][\text{S2}] = ?$
- $[\text{MVD1}][\text{S2}] = ?$
- $[\text{MVD4}][\text{S2}] = ?$

O item (e) vai ajudar a gente a entender isso aqui:

StewPtCap5p51 (p.372) Demonstração. Seja F uma primitiva de f ...

Expanda as justificativas

Na figura abaixo o [A] é um caso particular do [MVD4] com justificativas:

$$\begin{aligned}
 \text{[TFC2]} &= \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
 \text{[defdif]} &= \left(F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \right) \\
 \text{[A]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=3}^{x=4} \cos(2 \cdot x) \cdot 2 dx = \text{sen}(2 \cdot x) \Big|_{x=3}^{x=4} \\ \phantom{\int_{x=3}^{x=4} \cos(2 \cdot x) \cdot 2 dx} = \text{sen}(2 \cdot 4) - \text{sen}(2 \cdot 3) \\ \phantom{\int_{x=3}^{x=4} \cos(2 \cdot x) \cdot 2 dx} = \text{sen}(u) \Big|_{u=2 \cdot 3}^{u=2 \cdot 4} \\ \phantom{\int_{x=3}^{x=4} \cos(2 \cdot x) \cdot 2 dx} = \int_{u=2 \cdot 3}^{u=2 \cdot 4} \cos(u) du \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{por [TFC2]} \left[\begin{array}{l} F(x) := \text{sen}(2 \cdot x) \\ F'(x) := \cos(2 \cdot x) \cdot 2 \\ a := 3 \\ b := 4 \end{array} \right] \\ \text{por [defdif]} \left[\begin{array}{l} F(x) := \text{sen}(2 \cdot x) \\ a := 3 \\ b := 4 \end{array} \right] \\ \text{por [defdif]} [x:=u] \left[\begin{array}{l} F(u) := \text{sen}(u) \\ a := 2 \cdot 3 \\ b := 2 \cdot 4 \end{array} \right] \\ \text{por [TFC2]} [x:=u] \left[\begin{array}{l} F(u) := \cos(u) \\ a := 2 \cdot 3 \\ b := 2 \cdot 4 \end{array} \right] \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Exercício 2.

Expanda cada uma das justificativas,

- [TFC2] $\left[\begin{array}{l} F(x) := \text{sen}(2 \cdot x) \\ F'(x) := \cos(2 \cdot x) \cdot 2 \\ a := 3 \\ b := 4 \end{array} \right] = ?$
- [defdif] $\left[\begin{array}{l} F(x) := \text{sen}(2 \cdot x) \\ a := 3 \\ b := 4 \end{array} \right] = ?$
- [defdif] $[x:=u] \left[\begin{array}{l} F(u) := \text{sen}(u) \\ a := 2 \cdot 3 \\ b := 2 \cdot 4 \end{array} \right] = ?$
- [TFC2] $[x:=u] \left[\begin{array}{l} F(u) := \text{sen}(u) \\ F'(u) := \cos(u) \\ a := 2 \cdot 3 \\ b := 2 \cdot 4 \end{array} \right] = ?$

e veja que nem sempre a justificativa dá exatamente a igualdade à esquerda dela – às vezes ela dá só algo que, arrãm, *justifica* a igualdade.

Complete as justificativas

Na figura abaixo o [B] é um outro caso particular do [MVD4] com justificativas,

$$\begin{aligned}
 \text{[TFC2]} &= \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
 \text{[defdif]} &= \left(F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \right) \\
 \text{[B]} &= \left(\begin{array}{ll} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} & \text{por ?}_1 \\ & = f(g(b)) - f(g(a)) & \text{por ?}_2 \\ & = f(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & \text{por ?}_3 \\ & = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du & \text{por ?}_4 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Exercício 3.

Encontre justificativas que podem ser postas nas posições ?₁, ?₂, ?₃ e ?₄.

Dica:

É **BEEEM** difícil encontrar os ?₁, ?₂, ?₃ e ?₄ direto de cabeça...

Use o chutar e testar e não apague nenhum dos seus chutes e testes!

Dica 2:

“Resolver por chutar e testar” e “resolver de cabeça” são técnicas que usam músculos mentais diferentes, e quase sempre quando a gente encontra um problema “com cara de Cálculo 2” o modo mais rápido de descobrir como resolver ele “de cabeça” é começar tentando resolver ele “por chutar e testar”! Vou tentar fazer umas animações explicando a idéia geral por trás disso quando der. Isso tem a ver com uma das minhas áreas de pesquisa... um link:

<http://anggtwu.net/math-b.html#2022-md>

Resumindo: *treine chutar e testar!!!*

Mais um exemplo de chutar e testar

Isto é uma versão melhorada de...

2iQ34 um quadro da aula de 9/abril/2024.

Lembre que:

$$[\text{RC}] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Digamos que queremos resolver isto,

$$\int \frac{2}{3x+4} + \frac{5}{6x+7} dx = ?$$

mas nós vamos começar por este problema mais simples,

$$\int \frac{2}{3x+4} dx = ?$$

que é equivalente a:

$$\frac{d}{dx} ? = \frac{2}{3x+4}$$

Tente entender a solução por chutar e testar da direita. Muita gente acha que não pode fazer chutes e testes com números – porque, sei lá, talvez o Reginaldo tenha dito pra elas que isso é coisa de gente burra... mas repare que à direita eu fiz alguns chutes e testes usando números, e logo depois *eu transformei* esses chutes e testes com números em chutes e testes com variáveis, que viraram fórmulas novas... e acho que todo mundo concorda que inventar fórmulas e demonstrá-las é algo bem chique.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln x &= \frac{1}{x} \\ \frac{d}{dx} 2 \ln x &= \frac{2}{x} \\ \frac{d}{dx} \ln(g(x)) &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{g(x)} g'(x) && \text{por } [\text{RC}] \left[\begin{array}{l} f(x):=\ln x \\ f'(x)=1/x \end{array} \right] \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{g'(x)}{g(x)} \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{g'(x)}{g(x)} && \text{por (1) e (2)} \\ \frac{d}{dx} \ln(6x+7) &= \frac{6}{6x+7} && \text{por (3)} \left[\begin{array}{l} g(x):=6x+7 \\ g'(x):=6 \end{array} \right] \\ \frac{d}{dx} \ln(ax+b) &\stackrel{(4)}{=} \frac{a}{ax+b} && \text{por (3)} \\ \frac{d}{dx} (c \ln(ax+b)) &\stackrel{(5)}{=} c \frac{a}{ax+b} && \text{por (4)} \\ \frac{d}{dx} (c \ln(3x+4)) &\stackrel{(6)}{=} c \frac{3}{3x+4} && \text{por (5)} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} \ln(3x+4) \right) &\stackrel{(6)}{=} \frac{1}{3} \frac{3}{3x+4} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} \ln(3x+4) \right) &= \frac{1}{3x+4} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} \ln(3x+4) \right) &= \frac{2}{3x+4} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{a}{b} \ln\left(\frac{bx+c}{bx+c}\right) \right) &= \frac{\frac{a}{b}}{\frac{bx+c}{bx+c}} && \text{por (5)} \\ &= \frac{a}{bx+c} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{a}{b} \ln(bx+c) \right) &\stackrel{(7)}{=} \frac{a}{bx+c} \\ &\int \frac{a}{bx+c} dx && \text{por (7)} \\ &\stackrel{(8)}{=} \frac{a}{b} \ln(bx+c) \\ &\int \frac{2}{3x+4} dx && \text{por (8)} \\ &\stackrel{(9)}{=} \frac{2}{3} \ln(3x+4) \\ &\int \frac{5}{6x+7} dx && \text{por (8)} \\ &\stackrel{(10)}{=} \frac{5}{6} \ln(6x+7) \\ \int \frac{2}{3x+4} + \frac{5}{6x+7} dx &\stackrel{(11)}{=} \frac{2}{3} \ln(3x+4) + \frac{5}{6} \ln(6x+7) \end{aligned}$$

Leithold, p.302

Leit5p19 (p.302) Exercícios 5.2

(%i1) items : [

```
["1.", sqrt(1-4*y), u=1-4*y],
["2.", (3*x - 1/4)^(1/3), u=3*x-1/4],
["3.", (6 - 2*x)^(1/3), u=6-2*x],
["4.", sqrt(5*r + 1), u=5*r+1],
["5.", x*sqrt(x^2 - 9), u=x^2-9],
["6.", 3*x*sqrt(4 - x^2), u=4-x^2],
["7.", x^2*(x^3-1)^10, u=x^3-1],
["8.", x*(2*x^2+1)^6, u=2*x^2+1],
["9.", 5*x*(9-4*x^2)^(2/3), u=9-4*x^2],
["10.", x/(x^2+1)^3, u=x^2+1]
]
```

(%i2) lfc_solve_m (items);

(%o2)

$$\left(\begin{array}{l} 1. \quad \int \sqrt{1-4y} \, dy = -\left(\frac{(1-4y)^{\frac{3}{2}}}{6}\right) \\ 2. \quad \int (3x - \frac{1}{4})^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{(3x - \frac{1}{4})^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \\ 3. \quad \int (6 - 2x)^{\frac{1}{3}} \, dx = -\left(\frac{3(6-2x)^{\frac{4}{3}}}{8}\right) \\ 4. \quad \int \sqrt{5r+1} \, dr = \frac{2(5r+1)^{\frac{3}{2}}}{15} \\ 5. \quad \int x \sqrt{x^2-9} \, dx = \frac{(x^2-9)^{\frac{3}{2}}}{3} \\ 6. \quad 3 \int x \sqrt{4-x^2} \, dx = -(4-x^2)^{\frac{3}{2}} \\ 7. \quad \int x^2 (x^3-1)^{10} \, dx = \frac{(x^3-1)^{11}}{33} \\ 8. \quad \int x (2x^2+1)^6 \, dx = \frac{(2x^2+1)^7}{28} \\ 9. \quad 5 \int x (9-4x^2)^{\frac{2}{3}} \, dx = -\left(\frac{3(9-4x^2)^{\frac{5}{3}}}{8}\right) \\ 10. \quad \int \frac{x}{(x^2+1)^3} \, dx = -\left(\frac{1}{4(x^2+1)^2}\right) \end{array} \right)$$

(%i3) lfc_change_m(items);

(%o3)

$$\left(\begin{array}{l} 1. \quad \int \sqrt{1-4y} \, dy = -\left(\frac{\int \sqrt{u} \, du}{4}\right) \quad u = 1 - 4y \\ 2. \quad \int (3x - \frac{1}{4})^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{\int u^{\frac{1}{3}} \, du}{3} \quad u = 3x - \frac{1}{4} \\ 3. \quad \int (6 - 2x)^{\frac{1}{3}} \, dx = -\left(\frac{\int u^{\frac{1}{3}} \, du}{2}\right) \quad u = 6 - 2x \\ 4. \quad \int \sqrt{5r+1} \, dr = \frac{\int \sqrt{u} \, du}{5} \quad u = 5r + 1 \\ 5. \quad \int x \sqrt{x^2-9} \, dx = \frac{\int \sqrt{u} \, du}{2} \quad u = x^2 - 9 \\ 6. \quad 3 \int x \sqrt{4-x^2} \, dx = -\left(\frac{3 \int \sqrt{u} \, du}{2}\right) \quad u = 4 - x^2 \\ 7. \quad \int x^2 (x^3 - 1)^{10} \, dx = \frac{\int u^{10} \, du}{3} \quad u = x^3 - 1 \\ 8. \quad \int x (2x^2 + 1)^6 \, dx = \frac{\int u^6 \, du}{4} \quad u = 2x^2 + 1 \\ 9. \quad 5 \int x (9 - 4x^2)^{\frac{2}{3}} \, dx = -\left(\frac{5 \int u^{\frac{2}{3}} \, du}{8}\right) \quad u = 9 - 4x^2 \\ 10. \quad \int \frac{x}{(x^2+1)^3} \, dx = \frac{\int \frac{1}{2} \, du}{2} \quad u = x^2 + 1 \end{array} \right)$$

(%i4)

(%i1) Sg : '[g(x):=x^2, gp(x):=2*x];

(%o1)

$$[g(x) := x^2, gp(x) := 2x]$$

(%i2) Sf : '[f(x):=sin(x), fp(x):=cos(x)];

(%o2)

$$[f(x) := \sin x, fp(x) := \cos x]$$

(%i3) MVs;

(%o3)

$$\left(\begin{array}{l} \int gp(x) fp(g(x)) dx = \int fp(u) du \\ \left(\begin{array}{l} \int gp(x) fp(g(x)) dx = f(g(x)) \\ = f(u) \\ = \int fp(u) du \end{array} \right) \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} gp(x) fp(g(x)) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} fp(u) du \\ \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} gp(x) fp(g(x)) dx = \left(\begin{array}{l} f(g(x)) \mid x=b \\ \mid x=a \end{array} \right) \\ = f(g(b)) - f(g(a)) \\ = \left(\begin{array}{l} f(u) \mid u=g(b) \\ \mid u=g(a) \end{array} \right) \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} fp(u) du \end{array} \right) \end{array} \right)$$

(%i4) MVs _s_ Sg _s_ Sf;

(%o4)

$$\left(\begin{array}{l} 2 \int x \cos x^2 dx = \int \cos u du \\ \left(\begin{array}{l} 2 \int x \cos x^2 dx = \sin x^2 \\ = \sin u \\ = \int \cos u du \end{array} \right) \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} 2 \int_{x=a}^{x=b} x \cos x^2 dx = \int_{u=a^2}^{u=b^2} \cos u du \\ \left(\begin{array}{l} 2 \int_{x=a}^{x=b} x \cos x^2 dx = \left(\begin{array}{l} \sin x^2 \mid x=b \\ \mid x=a \end{array} \right) \\ = \sin b^2 - \sin a^2 \\ = \left(\begin{array}{l} \sin u \mid u=b^2 \\ \mid u=a^2 \end{array} \right) \\ = \int_{u=a^2}^{u=b^2} \cos u du \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 [\text{MVDs}fgh] &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} h'(x) g'(h(x)) f'(g(h(x))) dx \\ = \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u) f'(g(u)) du \\ = \int_{v=g(h(a))}^{v=g(h(b))} f'(v) dv \\ = f(v) \Big|_{v=g(h(a))}^{v=g(h(b))} \\ = f(g(u)) \Big|_{u=h(a)}^{u=h(b)} \\ = f(g(h(x))) \Big|_{x=a}^{x=b} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\text{MVI}sfgh] &= \left(\begin{array}{l} \int h'(x) g'(h(x)) f'(g(h(x))) dx \\ = \int g'(u) f'(g(u)) du \\ = \int f'(v) dv \\ = f(v) \\ = f(g(u)) \\ = f(g(h(x))) \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[MVDs}fgkh] &= \left(\begin{aligned}
 &\int_{x=a}^{x=b} k'(x) h'(k(x)) g'(h(k(x))) f'(g(h(k(x)))) dx \\
 = &\int_{u=k(a)}^{u=k(b)} h'(u) g'(h(u)) f'(g(h(u))) du \\
 = &\int_{v=h(k(a))}^{v=h(k(b))} g'(v) f'(g(v)) dv \\
 = &\int_{w=g(h(k(a)))}^{w=g(h(k(b)))} f'(w) dw \\
 = &f(w) \Big|_{w=g(h(k(a)))}^{w=g(h(k(b)))} \\
 = &f(g(v)) \Big|_{v=h(k(a))}^{v=h(k(b))} \\
 = &f(g(h(u))) \Big|_{u=k(a)}^{u=k(b)} \\
 = &f(g(h(k(x)))) \Big|_{x=a}^{x=b}
 \end{aligned} \right) \\
 \\
 \text{[MVIsgfhk] &= \left(\begin{aligned}
 &\int k'(x) h'(k(x)) g'(h(k(x))) f'(g(h(k(x)))) dx \\
 = &\int h'(u) g'(h(u)) f'(g(h(u))) du \\
 = &\int g'(v) f'(g(v)) dv \\
 = &\int f'(w) dw \\
 = &f(w) \\
 = &f(g(v)) \\
 = &f(g(h(u))) \\
 = &f(g(h(k(x))))
 \end{aligned} \right)
 \end{aligned}$$

Como justificar uma MV de cabeça

Por exemplo...

$$\begin{aligned}
 \int t^2 \cos(t^3) dt &= ? \\
 \int x^2 \cos(x^3) dx &= ? \quad \left[\begin{array}{l} u = x^3 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2 \end{array} \right] \\
 \int \underbrace{\cos(x^3)}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3x^2}_{\frac{du}{dx}} dx &= \int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 \int \underbrace{\cos(x^3)}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3x^2}_{g'(x)} dx &= \int \underbrace{\cos(u)}_{f'(u)} \cdot \frac{1}{3} du \\
 \underbrace{\int f'(g(x))g'(x) dx}_{\int \cos(x^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3x^2 dx} &= \underbrace{\int f'(u) du}_{\int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du} \quad \left[\begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \cos(u) \cdot \frac{1}{3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right] \\
 \underbrace{\int \cos(x^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3x^2 dx}_{\int \cos(t^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3t^2 dt} &= \underbrace{\int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du}_{\int \cos(w) \cdot \frac{1}{3} dw} \\
 \int t^2 \cos(t^3) dt &= \int \frac{1}{3} \cos(w) dw \quad \text{Por [MVII]} \left[\begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \frac{1}{3} \cos(u) \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Exercícios:

a) Calcule os resultados parciais do último [MVII] [...] [...] da coluna da esquerda.

b) Faça os exercícios 7, 8, 9, 11 e 13 desta página do Stewart,

StewPtCap5p53 (p.374) Exercícios e justifique a mudança de variável de cada um deles usando o método à esquerda.

Dicas:

Repere que no exemplo à esquerda o problema original era este,

$$\int t^2 \cos(t^3) dt = ?$$

e eu resolvi ele nesta ordem: 1) eu mudei a variável dele pra x pra ficar com algo mais parecido com a [MVII], 2) eu escolhi a mudança de variável certa, que era $u = x^3$, 3) eu calculei o $\frac{du}{dx}$, 4) eu rearrumei o problema original pro $\frac{du}{dx}$ ficar colado no dx , 5) eu fiz a mudança de variável pelo método rápido, 6) eu reescrevi as anotações do método rápido pra obter $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$, 7) eu transformei essas $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$ numa substituição, 8) eu calculei os resultados parciais dessa substituição e da $\left[\begin{array}{l} x:=t \\ u:=w \end{array} \right]$, 9) eu reescrevi a substituição que eu tinha obtido e testado pra fingir que eu primeiro tinha resolvido o problema original de cabeça e depois eu escrevi a justificativa porque alguém me perguntou como eu tinha chegado naquele resultado.

Cálculo 2 - 2025.1

Aulas 19 e 20: frações parciais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

Seções sobre frações parciais nos livros:

[StewPtCap7p23](#) (p.438) Seção 7.4

[StewPtCap7p25](#) (p.440) Observação: podemos usar um método alternativo...

[Leit9p24](#) (p.551) Seção 9.5

[Miranda240](#) Seção 8.1: Frações parciais

[CederjC2V2p77](#) (p.75) 23. Frações parciais - primeira parte

[CederjC2V2p93](#) (p.91) 24. Frações parciais - segunda parte

Quadros:

[2kQ41](#) (2025.1)

[2jQ32](#) (2024.2) 29/out/2024

[2iQ33](#) (2024.1) 09/abr/2024

[2hQ31](#) (2023.2) 19/set/2024

[2hQ37](#) (2023.2) 20/set/2023

[2gQ30](#) (2023.1) 19/mai/2023

[2fQ17](#) (2022.2) 21/set/2022

[2yQ43](#) (2019.2) 13/out/2019: polinômios em x

[2xQ26](#) (2019.1) 17/mai/2029: polinômios em x

Eu tentei fazer um programa pra typesetear essas figuras mas o resultado ficou feio – [2bT212](#) – e eu ainda não tive tempo de melhorá-lo.

Polinômios de Laurent em Maxima:

<http://angtwu.net/MAXIMA/laurent1.mac.html>

Sobre as questões de prova

A P1 vai ter uma questão em que você vai ter que resolver uma integral como essa aqui:

$$\int \frac{ax + b}{cx^2 + dx + e} dx$$

A VR e a VS vão ter questões em que você vai ter que resolver integrais de “funções racionais impróprias”, como isto aqui,

$$\int \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{ex^2 + fx + g} dx$$

em que você vai precisar de divisão de polinômios com resto.

Neste semestre eu vou considerar que frações parciais são principalmente uma desculpa pra gente aprender duas coisas: a) um jeito de lidar com polinômios que vai nos permitir fazer um montão de contas com polinômios ou de cabeça ou escrevendo muito pouco, e b) um caso que a gente precisa usar um pouquinho de Álgebra Linear – “resolver um sistema” – pra transformar uma integral complicada em outra mais simples.

A gente só vai ver os casos em que o polinômio do denominador tem raízes reais e essas raízes são todas diferentes.

A integral do $\frac{1}{x}$

Lembre que:

$$\begin{aligned}
 \text{[II]} &= \left(\int f'(x) dx = f(x) \right) \\
 \text{[RC]} &= \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right) \\
 \text{[DFI]} &= \left(\begin{array}{l} f(g(x)) = x \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x \\ = 1 \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \\ f'(g(x))g'(x) = 1 \\ g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

e que eu estou usando uma definição pra integral indefinida na qual as duas igualdades abaixo são equivalentes:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{d}{dx} g(x) \\
 \int f(x) dx &= g(x)
 \end{aligned}$$

Ou seja, pra mim o '+C' é opcional.

Me contaram que o Reginaldo dá errado pra quem não escreve o '+C', então se você for fazer C2 com ele no próximo semestre não esqueça o '+C'!!!

Exercício 1

Calcule a integral abaixo. Dica: $u = bx + c$.

$$\int \frac{a}{bx+c} dx$$

Temos:

$$\begin{aligned}
 \exp(\ln(x)) &\stackrel{(1)}{=} x \\
 \ln' x &\stackrel{(2)}{=} 1/\exp(\ln(x)) \\
 &\stackrel{(3)}{=} 1/\exp(\ln(x)) \\
 &\stackrel{(4)}{=} 1/x \\
 \frac{d}{dx} f(g(x)) &\stackrel{(5)}{=} f'(g(x))g'(x) \\
 \frac{d}{dx} \ln(-x) &\stackrel{(6)}{=} \ln'(-x) \cdot -1 \\
 &\stackrel{(7)}{=} 1/(-x) \cdot -1 \\
 &\stackrel{(8)}{=} 1/x \\
 \ln|x| &\stackrel{(9)}{=} \begin{cases} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 \frac{d}{dx} \ln|x| &\stackrel{(10)}{=} \frac{d}{dx} \begin{cases} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{(11)}{=} \begin{cases} \frac{d}{dx} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \frac{d}{dx} \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{(12)}{=} \begin{cases} 1/x & \text{quando } 0 < x, \\ 1/x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{(13)}{=} 1/x \\
 1/x &\stackrel{(14)}{=} \frac{d}{dx} \ln x \\
 1/x &\stackrel{(15)}{=} \frac{d}{dx} \ln(-x) \\
 1/x &\stackrel{(16)}{=} \frac{d}{dx} \ln|x| \\
 \int \frac{1}{x} dx &\stackrel{(17)}{=} \ln x \\
 \int \frac{1}{x} dx &\stackrel{(18)}{=} \ln(-x) \\
 \int \frac{1}{x} dx &\stackrel{(19)}{=} \ln|x|
 \end{aligned}$$

Contas sem “vai um” e polinômios

Compare esta conta com números,

$$\begin{array}{r}
 2773 \overline{) 12} \\
 \underline{-24} \\
 37 \\
 \underline{-36} \\
 13 \\
 \underline{-12} \\
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 2400 = 200 \cdot 12 \\
 360 = 30 \cdot 12 \\
 12 = 1 \cdot 12 \\
 2772 = 231 \cdot 12 \\
 2773 = 231 \cdot 12 + 1
 \end{array}$$

Com esta conta com polinômios:

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 7x^2 + 7x + 3 \overline{) x + 2} \\
 \underline{-(2x^3 + 4x^2)} \\
 3x^2 + 7x \\
 \underline{-(3x^2 + 6x)} \\
 1x + 3 \\
 \underline{-(1x + 2)} \\
 1
 \end{array}$$

$$2x^3 + 4x^2 + 0x + 0 = (2x^2 + 0x + 0) \cdot (x + 2)$$

$$3x^2 + 6x + 0 = (3x + 0) \cdot (x + 2)$$

$$1x + 2 = 1 \cdot (x + 2)$$

$$2x^3 + 7x^2 + 7x + 1 = (2x^2 + 3x + 1) \cdot (x + 2)$$

$$2x^3 + 7x^2 + 7x + 3 = (2x^2 + 3x + 1) \cdot (x + 2) + 1$$

Exercício 2

Traduza a conta com polinômios da esquerda pra notação de caixinhas daqui: **2xQ26, 2yQ43**.

Exercício 3

Traduza a conta abaixo pra notação de caixinhas:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x-5} \\
 &= \frac{2(x-5)}{(x+3)(x-5)} + \frac{(x+3)4}{(x+3)(x-5)} \\
 &= \frac{2(x-5) + (x+3)4}{(x+3)(x-5)}
 \end{aligned}$$

Funções racionais

Exercício 4

Entenda a definição de “função racional própria” daqui – [Miranda240](#) – e acrescente mais linhas nas contas do exercício 3 pra “simplificar” o resultado até ele virar uma “função racional própria”. Faça isso tanto na notação usual quanto na notação de caixinhas.

Exercício 5

Entenda as contas do Exemplo 8.1 daqui – [Miranda241](#) – e transforme a expressão abaixo numa função racional imprópria:

$$1000x^2 + 100x + 10 + \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x-5}$$

Exercício 6

Isto aqui é verdade:

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} = \frac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2 - 2x - 15}$$

mostre porquê “aumentando o nível de detalhe” – transforme a igualdade acima numa série de igualdades na qual cada passo seja bem fácil de verificar.

Exercício 7

Resolva:

$$\text{a) } (A+B)x + (-5A+3B) = 9x + 11$$

$$\text{b) } \frac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2 - 2x - 15} = \frac{9x + 11}{x^2 - 2x - 15}$$

$$\text{c) } \frac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2 - 2x - 15} = \frac{2x + 7}{x^2 - 2x - 15}$$

$$\text{d) } \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} = \frac{2x+7}{x^2 - 2x - 15}$$

$$\text{e) } \int \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} dx$$

$$\text{f) } \int \frac{2x+7}{x^2 - 2x - 15} dx$$

Exercício 8

(Bem trabalhoso, pra casa!)

Mostre como organizar a solução do (7f) em várias séries de igualdades fáceis de justificar, como no slide 3. Você pode precisar de algumas coisinhas em português, como na última página do PDF de 2022.2: [2fT137](#).

Aviso: Todos os slides a partir daqui são antigos!
Assim que der eu vou fazer uma faxina neles
e deixar só o que ainda serve!!!

Exercício 1

Algumas consequências da regra da cadeia...

$$\text{[RC]} = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Obtenha os seguintes casos particulares da [RC]:

a) $g(x) = 2x$

b) $g(x) = 2x + 3$

c) $g(x) = x + 3$

d) $g(x) = x + 3, f(x) = \ln x$

e) $g(x) = -x$

f) $g(x) = -x, f(x) = \ln x$

g) $g(x) = -x + 200, f(x) = \ln x$

Exercício 2.

a) $\int \frac{1}{3x} dx = ?$

b) $\int \frac{1}{3x + 4} dx = ?$

c) $\int \frac{2}{3x + 4} dx = ?$

d) $\int \frac{a}{bx + c} dx = ?$

Derivadas formais (de novo)

Todas estas igualdades são verdadeiras, mas se tentarmos formalizar elas com todos os detalhes vamos ver que várias delas falam de funções com domínios diferentes...

$$\begin{array}{ll}
 \frac{d}{dx} \ln x & = \frac{1}{x} & \int \frac{1}{x} dx & = \ln(x) \\
 \frac{d}{dx} \ln(-x) & = \frac{1}{x} & \int \frac{1}{x} dx & = \ln(x) + C \\
 \frac{d}{dx} \ln|x| & = \frac{1}{x} & \int \frac{1}{x} dx & = \ln(-x) \\
 & & \int \frac{1}{x} dx & = \ln(-x) + C \\
 & & \int \frac{1}{x} dx & = \ln(|x|) \\
 & & \int \frac{1}{x} dx & = \ln(|x|) + C \\
 & & \int \frac{1}{x} dx & = \begin{cases} \ln(-x) + C_1 & \text{quando } x < 0, \\ \ln(x) + C_2 & \text{quando } x > 0 \end{cases}
 \end{array}$$

REPARE QUE:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5} &= \frac{2(x+5) + 4(x+3)}{(x+3)(x+5)} \\ &= \frac{2(x+5) + 4(x+3)}{(x+3)(x+5)} \\ &= \frac{2x + 10 + 4x + 12}{x^2 + 8x + 15} \\ &= \frac{6x + 22}{x^2 + 8x + 15} \end{aligned}$$

A MAIORIA DOS PROGRAMAS DE "COMPUTER ALGEBRA"
TEM FUNÇÕES QUE FAZEM A OPERAÇÃO ACIMA E
A INVERSA DELA:

$$\left(\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5} \right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{"together"} \\ \text{(FÁCIL)}} \\ \xleftarrow{\text{"apart"} \\ \text{(DIFÍCIL)}} \end{array} \left(\frac{6x + 22}{x^2 + 8x + 15} \right)$$

Exercício 3.

a) together $\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) = ?$

b) together $\left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) = ?$

c) together $\left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \right) = ?$

Exercício 4.

EXERCÍCIO:

- a) ENCONTRE EXPRESSÕES
PARA c, d, e, f QUE
FAÇAM ESTA FÓRMULA
SER VERDADE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f}$$

AS SUAS FÓRMULAS PARA c, d, e, f
NÃO PODEM CONTER "x".

- b) USE A FÓRMULA QUE VOCÊ
ACABOU DE OBTER PARA ENCONTRAR
OS A, a, B, b TAIS QUE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{2x+3}{x^2-7+10}$$

Exercício 4: uma solução pro item (a)

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} &= \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \\
 \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} &= \frac{A(x-b)}{(x-a)(x-b)} + \frac{B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\
 &= \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\
 &= \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab} \\
 c &= A + B \\
 d &= -Ab - Ba \\
 e &= -a - b \\
 f &= ab
 \end{aligned}$$

Exercício 4: uma solução pro item (a), cont...

Dá pra gente reescrever isso usando o ‘[:=]’:

$$\left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \right) \begin{array}{l} c:=A+B \\ d:=-Ab-Ba \\ e:=-a-b \\ f:=ab \end{array}$$

$$= \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab} \right),$$

e sabemos que esta igualdade é verdadeira:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab}$$

então isto aqui

$$\begin{aligned} c &= A+B \\ d &= -Ab-Ba \\ e &= -a-b \\ f &= ab \end{aligned}$$

é **uma** solução para a equação

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \dots$$

mas não sabemos se é a **única** solução!

Sempre dá pra escrever soluções de equações usando o ‘[:=]’. Por exemplo, as duas soluções da equação

$$(x-2)(x-5) = 0 :$$

São:

$$\begin{aligned} ((x-2)(x-5) = 0) [x := 2] &= \\ ((2-2)(2-5) = 0) &= \\ ((x-2)(x-5) = 0) [x := 5] &= \\ ((5-2)(5-5) = 0) &= \end{aligned}$$

Nenhum livro “básico” define

“solução de uma equação” desse jeito — como “a substituição que transforma a equação numa igualdade verdadeira” — mas eu acho isso um bom modo de entender o que são “equações” e “soluções”...

Ah, note que eu não fiquei repetindo a condição “as suas fórmulas para c, d, e, f não podem conter ‘ x ’” o tempo todo... eu deixei isso implícito. =)

Exercício 4: uma solução pro item (b)

Temos duas soluções para

$$(x - a)(x - b) = x^2 - 7x + 10 :$$

uma é $a = 2$ e $b = 5$, e a outra é $a = 5$ e $b = 2$.

Lembre que Cálculo 2 é sobre **chutar** e **testar**.

A gente pode chutar que $a = 5$, $b = 2$, e que

c, d, e, f são os que a gente obtém pelo

item (a), e aí ver se isso nos leva a uma

solução...

(Obs: isso funciona!!!)

Exercício 4: item (c)

Seja [PFP] esta igualdade aqui – o

“princípio por trás das frações parciais”:

$$[\text{PFP}] = \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{A(x-b) + B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \right)$$

c) Resolva o exercício 8.7.2 do livro do Miranda –

<http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=251>

e depois mostre qual é a substituição da forma

$$[\text{PFP}] \begin{bmatrix} a:=? \\ b:=? \\ A:=? \\ B:=? \end{bmatrix}$$

que “está por trás” da sua solução.

Exercício 5.

Use estas idéias para integrar:

$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x + 2} dx = ?$$

Exercício 6.

O que acontece nos casos em que “teria vai um”?

a) Tente fazer a divisão com resto de x^3 por $x + 2$.

Mais precisamente, encontre um polinômios $R(x)$ e $Q(x)$ tais que $(x^3) = Q(x) \cdot (x + 2) + R(x)$ e $R(x)$ é no máximo de grau 1.

Teste a sua resposta!

b) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2} dx$ pelo método acima.

Teste a sua resposta derivando a sua antiderivada para $\frac{x^3}{x+2}$.

c) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2} dx$ fazendo a substituição $u = x + 2$.

Você deve obter o mesmo resultado que na (b).

d) Calcule $\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)} dx$ por frações parciais.

Dica importante

Lembre que uns dos meus slogans é

“eu só vou corrigir os sinais de igual”...

No slide ?? a igualdade mais importante é a da última linha.

Nós vamos usá-la assim, pra transformar a integral original em algo fácil de integrar:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x+2} dx \\
 &= \int \frac{(2x^2 + 3x + 1) \cdot (x+2) + 1}{x+2} dx \\
 &= \int \frac{(2x^2 + 3x + 1) \cdot \cancel{(x+2)}}{x+2} + \frac{1}{x+2} dx \\
 &= \int 2x^2 + 3x + 1 + \frac{1}{x+2} dx
 \end{aligned}$$

Uma questão da P1 de 2020.1

A questão 3 da P1 de 2020.1,

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf>

era de frações parciais, e eu pus nesse PDF um gabarito parcial dela, que não inclui nem as contas da divisão de polinômios nem a verificação de que a nossa integral está certa. Faça a questão, incluindo a parte que não está no gabarito.

Notações posicionais

Temos:

$$\begin{aligned} [a] &= ax^0 \\ [b : a] &= bx^1 + ax^0 \\ [c : b : a] &= cx^2 + bx^1 + ax^0 \\ [d : c : b : a] &= dx^3 + cx^2 + bx^1 + ax^0 \end{aligned}$$

Compare:

$$\begin{aligned} 4567 &= 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \\ &= 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7 \\ &= 4000 + 500 + 60 + 7 \\ &= 4567 \\ [4 : 5 : 6 : 7] &= 4x^3 + 5x^2 + 6x^1 + 7x^0 \\ &= 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7 \\ [4 : 5 : 6 : 7] [x := 10] &= (4x^3 + 5x^2 + 6x^1 + 7x^0) [x := 10] \\ &= 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \\ &= 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7 \\ &= 4000 + 500 + 60 + 7 \\ &= 4567 \end{aligned}$$

Quadros:

2xQ26 (2019.1)

Exercícios

Calcule:

- $123 + 456$
- $123 + 56$
- $123 + 6$
- $234 \cdot 1$
- $234 \cdot 10$
- $234 \cdot 100$
- $234 \cdot 1000$
- $234 \cdot 1001$
- $34 + 56$
- $(3x + 4) + (5x + 6)$
- $[3 : 4] + [5 : 6]$
- $[1 : 2 : 3] + [4 : 5 : 6]$
- $[1 : 2 : 3] + [5 : 6]$
- $[1 : 2 : 3] + [6]$
- $[2 : 3 : 4] \cdot [1]$
- $[2 : 3 : 4] \cdot [1 : 0]$
- $[2 : 3 : 4] \cdot [1 : 0 : 0]$
- $[2 : 3 : 4] \cdot [1 : 0 : 0 : 0]$
- $[2 : 3 : 4] \cdot [1 : 0 : 0 : 1]$

Notações posicionais (2)

Relembre como fazer a divisão com resto.

Quadros:

2hQ35 (2023.2)

2xQ27 (2019.1)

Exercício

Faça estas divisões com resto
e teste os seus resultados:

a) $2773/12$

b) $(2x^3 + 7x^2 + 7x + 3)/(1x + 2)$

c) $[2 : 7 : 7 : 3]/[1 : 2]$

Gabarito:

2hQ35 (2023.2)

```
(%i1) dividenums ( a, b) :=
      matrix([a, b], [mod(a,b), floor(a/b)])$
(%i2) dividepolys(p1,p2) := block([q,r],
      [q,r] : divide(p1, p2, x),
      matrix([p1, p2], [r, q]))$
(%i3) dividenums(100,33);
(%o3)
      (100 33)
      ( 1   3)

(%i4) dividenums(2773,12);
(%o4)
      (2773 12)
      ( 1   231)

(%i5) 12 * 231 + 1;
(%o5)
      2773

(%i6) dividepolys(2*x^3 + 7*x^2 + 7*x + 3, x + 2);
(%o6)
      (2x^3 + 7x^2 + 7x + 3   x + 2)
      ( 1                   2x^2 + 3x + 1)

(%i7) (x+2) * (2*x^2 + 3*x + 1) + 1;
(%o7)
      (x + 2) (2x^2 + 3x + 1) + 1

(%i8) expand((x+2) * (2*x^2 + 3*x + 1) + 1);
(%o8)
      2x^3 + 7x^2 + 7x + 3
```

Cálculo 2 - 2025.1

Aula 20.5: dicas pra P1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

Funções escada:

- 2jT52 (2024.2) Carro, exercício 6
- 2jT223 (2024.2) Questão 4
- 2jT228 (2024.2) Questão 4, gabarito
- 2iT189 (2024.1) Questão 4
- 2iT194 (2024.1) Questão 4, gabarito
- 2hT188 (2023.2) Questão 5
- 2hT194 (2023.2) Questão 5, gabarito
- 2gT111 (2023.1) Questão 5
- 2gT117 (2023.1) Questão 5, gabarito
- 2fT110 (2022.2) Questão 5
- 2fT116 (2022.2) Questão 5, gabarito
- 2eT199 (2022.1) Questão 3
- 2eT200 (2022.1) Questão 3, gabarito

Frações parciais

- 2jT257 Raízes por chutar-e-testar

Contas com justificativas

- 2jT70 Renomear
- 2jT77 O que quer dizer “Por ... com ...”?
- 2kT78 Variáveis livres e ligadas
- 2kT110 Como justificar uma MV de cabeça

Duas mudanças de variável, jeito rápido:

- 2hT191 (2023.2) P1, questão 2, gabarito

Requerimentos de revisão de prova

2022.1:

- RRPsP4 Considerando o esforço do aluno...
- RRPsP8 ...a banca é incapaz de compreender...
- RRPsP8 ...que não é reconhecido como parte da disciplina

2024.1:

- <http://anggtwu.net/2024-rev.html>

As questões

A prova vai ter uma questão em que vocês vão ter que integrar uma função escada no olhómetro. Ela vai ser parecida com o Exercício 6 do PDFzinho sobre o Mathlogermóvel e com as questões de prova da seção de funções escada da página de links.

Essa questão vai valer 1.0.

A prova vai ter uma questão em que vocês vão ter que resolver uma integral fazendo duas mudanças de variável e justificar alguns passos das contas de vocês – os passos das mudanças de variável.

Vocês vão ter que justificar cada um desses passos de dois jeitos: 1) usando as caixinhas de anotações do “método rápido”, e 2) usando substituições na [MVII].

Além disso essa questão vai ter um item em que eu vou pedir pra vocês aplicarem uma substituições que vocês obtiveram na [MVD4].

Essa questão vai valer 5.0.

A prova vai ter uma questão de frações parciais.

O Stewart ensina dois modos de fazer a decomposição em frações parciais, um que usa sistemas e um “método alternativo”. *Se vocês usarem o método que usa sistemas vocês isso vai valer mais pontos* – porque se vocês treinarem sistemas isso vai ajudar vocês com EDOs depois, e o “método alternativo” do Stewart só serve pra frações parciais.

Na aula de 07/maio/2025 nós vimos como fatorar polinômios de segundo grau por chutar e testar. Recomendo que vocês treinem esse método – se vocês souberem aplicar ele de cabeça vocês vão economizar um tempão na prova, e além disso ele vai ser útil depois em outras partes do curso.

Pra mim – **PRA MIM** – a coisa mais importante dessa questão vai ser vocês saberem organizar as contas de vocês de modo de cada passo seja fácil de justificar e as igualdades que não sejam consequências das anteriores estejam marcadas com as partículam em português certas, como “queremos encontrar ... tal que ...” – *então primeiro treine bastante fazer exercícios dos livros até chegar nos resultados certos e depois treine bastante a parte de “escrever as contas direito”*.

No meu critério de correção erros na parte de “escrever as contas direito” podem fazer vocês perderem até metade dos pontos dessa questão – mesmo que vocês tenham chegado nos resultados certos.

Essa questão vai valer 4.0.

Mais sobre o modo rápido

O meu truque preferido pra não me enrolar nas contas de uma mudança de variável é fazer uma caixinha de anotações como essa aqui,

$$\left[\begin{array}{l} u = 3x + 4 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x + 4) = 3 \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ du = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} du \end{array} \right]$$

na qual: a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova – que nesse exemplo é $u = 3x + 4$, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras como esta, que usam diferenciais:

$$du = 3 dx$$

Na questão de mudança de variáveis você vai ter que primeiro fazer as contas do modo rápido – como no exemplo à direita – e **só depois** você vai encontrar justificativas usando a [MVII] para alguns dos passos que você justificou usando as caixinhas de anotações.

$$\begin{aligned} & \int \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x} dx & \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\ &= \int (\ln x)^3 \cos((\ln x)^4) \frac{1}{x} dx \\ &= \int u^3 \cos(u^4) du \\ &= \int \cos(u^4) u^3 du \\ &= \int \cos v \cdot \frac{1}{4} dv & \left[\begin{array}{l} v = u^4 \\ \frac{dv}{du} = 4u^3 \\ \frac{1}{4} dv = u^3 du \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{4} \int \cos v \\ &= \frac{1}{4} \text{sen } v \\ &= \frac{1}{4} \text{sen}(u^4) \\ &= \frac{1}{4} \text{sen}((\ln x)^4) \end{aligned}$$

Sobre a VR da P1

Nas duas últimas aulas “normais” antes da P1 – 20/maio e 21/maio – nós vamos ver duas técnicas de mudança de variável que não vão cair na P1 “normal” mas que vão cair na “VR da P1”. Essas técnicas são chamadas de “integração de potências de senos e cossenos” e “substituição trigonométrica”.

A VR da P1 vai ter uma questão de substituição trigonométrica em que o “termo malvado” é da forma $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$. Tem um exemplo de questão assim no link abaixo. As bancas de revisão de prova costumam corrigir questão desse tipo perdoando muitos erros – os relatórios de revisão dessas provas têm trechos como:

Levando em consideração o grau de dificuldade das etapas que compõem a completa resolução, as etapas que foram feitas corretamente...

...então se você for fazer a VR da P1 se prepare pra fazer um requerimento de revisão de prova!

2jT282 (2024.2) VR da P1: questão 1

Acho que essa questão vai valer 4.0.

A VR da P1 vai ter uma questão em que vocês vão ter que integrar uma função escada no olhometro. Ela vai ser parecida com o Exercício 6 do PDFzinho sobre o Mathologermóvel e com as questões de prova da seção de funções escada da página de links.

Essa questão vai valer 1.0.

Variáveis livres e ligadas

A gente gostaria que os nomes das variáveis ligadas não importassem, e que isso aqui fosse sempre verdade:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{t=a}^{t=b} f(t) dt$$

mas a gente não viu as regras que garantem isso *porque elas são complicadas...*

Com as regras que a gente viu se fizermos

$$f(u) = x$$

a igualdade acima fica falsa. **Entenda porquê**, e pesquise na internet como isso costuma ser consertado – os termos-chave principais são “variáveis livres e ligadas”.

Importante: se você tentar resolver as questões sobre o [MVII] e o [MVD4] da prova usando truques como o $f(u) = x$ – uma função constante que tem uma variável livre que tem o mesmo nome que uma variável ligada – você vai perder alguns pontos.

Lembre que...

- Nos meus critérios de correção uma pessoa que entendeu tudo mas praticou pouco vai tirar uma nota quase tão baixa quanto uma pessoa que não entendeu nada,
- pra fazer as coisas que dão ponto na prova você vai ter que saber muito bem várias coisas que não dão ponto na prova,
- um dos objetivos principais do curso é fazer as pessoas aprenderem a fazer contas que sejam fáceis de entender, de justificar e de revisar,
- justificar “no sentido Antônio” não vale pontos – justificar “no sentido calc sem rw” é que vale,
- pra aprender a fazer contas que sejam fáceis de entender, de justificar e de revisar você vai ter que treinar fazer os papéis (a), (b), (c) e (d) da Dica 7,
- em algum momento você vai ser capaz de estudar fazendo perguntas boas pra você mesmo – mas dá bastante trabalho chegar até esse ponto, e o melhor modo de você chegar lá rápido é você aprender a fazer perguntas pra outras pessoas.
- EU SEI QUE VOCÊ PREFERE FAZER PERGUNTAS PRO CHATGPT – mas lembre que os fabricantes das LLMs investiram muitos bilhões pras LLMs parecerem úteis e serem viciantes...
- se você pensar em termos dos “músculos mentais” que você vai precisar exercitar pra passar no curso você vai ver que conversar com LLMs não vale muito a pena – estudar junto com outras pessoas (releia a Dica 7!!!) exercita um monte de músculos mentais importantes muito rápido, mas conversar com LLMs exercita só uns outros músculos mentais bem menos úteis.
- Cada pergunta que você faz em público – na aula ou nos grupos do Whatsapp ou do Telegram – ajuda dez outras pessoas – inclusive a mim.
- Estudar só na véspera é uma péssima estratégia – o que vai funcionar melhor é você começar a estudar com bastante antecedência. Você vai esquecer muita coisa de um dia pro outro sim, mas a cada vez você vai reaprender mais rápido e vai reter mais informações.

Cálculo 2 - 2025.1

Aulas 26 e 27: mais mudanças de variáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

[CederjC2V2p19](#) (p.17) 17. Substituição simples
[CederjC2V2p27](#) (p.25) 18. Substituição simples - continuação
[CederjC2V2p31](#) (p.29) ou escrevemos todo o integrando com a variável $t...$
[CederjC2V2p35](#) (p.33) 19. Integração por partes
[CederjC2V2p45](#) (p.43) 20. Integração de potências e produtos de funções trigonométricas
[CederjC2V2p55](#) (p.53) 21. Integração de potências e produtos de funções trigonométricas
[CederjC2V2p65](#) (p.63) 22. Substituição trigonométrica
[CederjC2V2p68](#) (p.66) Os três casos típicos
[CederjC2V2p103](#) (p.101) 25. Anais de exercícios

Links da aula 8:

[2hQ21](#) Quadros da aula 8 (4a, 12/set/2023)
[StewPtCap5p39](#) (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas
[StewPtCap5p48](#) (p.369) 5.5 A Regra da Substituição
[StewPtCap7p5](#) (p.420) 7.1 Integração por Partes
[2gT45](#) (2023.1) Mudança de variável: exemplo
[2gT46](#) (2023.1) Mudança de variável: caixinhas

Mudança de variável na integral definida (MVD):

[2eT131](#) (t-ints, p.12) Uma figura pra mudança de variável
[2fT49](#) Meu PDF de 2022.2 sobre mudança de variáveis

Mudança de variável na integral indefinida (MVI):

[2eT133](#) (t-ints, p.14) Um exemplo com contas
[2eT135](#) (t-ints, p.16) Outro exemplo com contas
[Leit5p13](#) (p.296) A regra da cadeia para a antidiferenciação
[Leit9p10](#) (p.537) Integração de potências de sen e cos
[Miranda189](#) 6.2. Integração por substituição
[Miranda192](#) Exemplo 6.6
[Miranda193](#) Não podemos
[Miranda196](#) Exercícios
[Miranda255](#) 8.3 Integrais Trigonométricas

[Thomas55p11](#) (p.376) Theorem 5: Substitution in definite integrals

[Thomas55p3](#) (p.370) Theorem 5: The substitution rule

Vídeo do Reginaldo:

<https://www.youtube.com/watch?v=PTCujrEBc4g>

Introdução

O Stewart explica o truque da mudança de variável na integral usando *variáveis dependentes* e *diferenciais*. Por exemplo, se x é a variável independente, u é a variável dependente, e a relação entre elas é $u = g(x) = 2x$, então temos

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}2x = 2$$

e:

$$\int \underbrace{\sin\left(\underbrace{2x}_u\right)}_u \underbrace{2}_{\frac{du}{dx}} dx = \int \sin(u) du$$

Dê uma olhada:

[StewPtCap1p5](#) (p.10) variável dependente

[StewPtCap3p75](#) (p.228) Diferenciais

[StewPtCap5p39](#) (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas

[StewPtCap5p48](#) (p.369) 5.5 A Regra da Substituição

Só que contas com variáveis dependentes e diferenciais são difíceis de justificar formalmente! A gente viu como expandir contas curtas em que certos passos têm justificativas complicadas em contas maiores mas em que cada passo tem uma justificativa bem simples... se a gente tenta fazer isso com a igualdade entre integrais acima a gente acaba descobrindo que as regras pra variáveis dependentes e diferenciais são bem complicadas.

Então eu vou fazer o seguinte. A regra da mudança de variável na integral definida, que o Stewart explica nesta página,

[StewPtCap5p51](#) (p.372) ...para as integrais definidas é bem fácil de demonstrar usando só o [\[TFC2\]](#).

Eu vou usar estas quatro definições aqui – onde [\[MVD\]](#) é a fórmula pra mudança de variável na integral definida, [\[MVI\]](#) é a fórmula pra mudança de variável na integral indefinida, [\[MVD4\]](#) é uma demonstração da [\[MVD\]](#) com 4 igualdades [\[MVI3\]](#) é uma demonstração da [\[MVI\]](#) com 3 igualdades,

$$\begin{aligned} \text{[MVD]} &= \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \right) \\ \text{[MVI]} &= \left(\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right) \\ \text{[MVD4]} &= \left(\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx &= F(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= F(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{aligned} \right) \\ \text{[MVI3]} &= \left(\begin{aligned} \int f(g(x))g'(x) dx &= F(g(x)) \\ &= F(u) \\ &= \int f(u) du \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

e a gente vai ver que dá pra tratar algumas destas fórmulas e demonstrações como abreviações pras outras, e que dá pra expandir as versões mais abreviadas em outras em que os passos são mais fáceis de justificar.

Um exemplo

Isto aqui é um exemplo de como contas com mudança de variável costumam ser feitas na prática:

$$\begin{aligned}
 & \int 2 \cos(3x + 4) dx \\
 &= \int 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 &= \frac{2}{3} \int \cos u du \\
 &= \frac{2}{3} \operatorname{sen} u \\
 &= \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x + 4)
 \end{aligned}$$

É necessário indicar em algum lugar que a relação entre a variável nova e a antiga é esta: $u = 3x + 4$.

Compare as contas acima, que não têm nem os limites de integração nem as barras de diferença, com as da coluna da direita:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=a}^{x=b} 2 \cos(3x + 4) dx \\
 &= \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 &= \frac{2}{3} \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} \cos u du \\
 &= \frac{2}{3} \left((\operatorname{sen} u) \Big|_{u=3a+4}^{u=3b+4} \right) \\
 &= \frac{2}{3} \left((\operatorname{sen}(3x + 4)) \Big|_{x=a}^{x=b} \right)
 \end{aligned}$$

Nós vamos tratar a versão à esquerda como uma abreviação pra versão da direita. Note que pra ir da versão “completa” pra “abreviada” é super fácil, é só apagar os limites de integração e as barras de diferença – mas pra ir da versão “abreviada” pra “completa” a gente precisa reconstruir os limites de integração e as barras de diferença, o que é bem mais difícil.

Caixinhas de anotações

O meu truque preferido pra não me enrolar nas contas de uma mudança de variável é fazer uma caixinha de anotações como essa aqui,

$$\left[\begin{array}{l} u = 3x + 4 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x + 4) = 3 \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ du = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} du \end{array} \right]$$

na qual: a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova – que nesse exemplo é $u = 3x + 4$, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras como:

$$dx = 42 du$$

Durante quase todo o curso de C2 a gente vai tratar esse tipo de coisa como uma igualdade entre expressões incompletas – mais ou menos como se a gente estivesse dizendo isso aqui:

$$+20) = /99]$$

Na caixinha à esquerda eu colori as linhas que são gambiarras em vermelho.

Repare que se a gente soubesse usar diferenciais a gente saberia dar um sentido pras igualdades que envolvem diferenciais, e que eu marquei em vermelho... mas a gente não sabe, então a gente vai considerar que elas são gambiarras que a gente só vai entender direito em Cálculo 3.

Aqui tem um exemplo grande:

2fT112 (C2-P1, p.5) Questão 1: gabarito

Os detalhes horríveis

Nesta página aqui – [Miranda193](#) – o Miranda diz “Não podemos calcular uma integral que possui tanto um x e um u nela”, mas ele não explica porquê... se em

$$\int_{x=a}^{x=b} 2 \cos(u) dx$$

esse u fosse uma abreviação para $3x + 4$ essa integral acima seria equivalente à do início do slide anterior, né?... =(

Neste slide eu vou tentar contar o que eu sei sobre como o método da substituição funciona – *pra convencer vocês de que não vale a pena vocês tentarem entender os detalhes agora.*

Toda mudança de variável numa integral definida é consequência da igualdade (13) do slide “Contas (2)”. Por exemplo, compare:

$$\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} g(h(x))h'(x) dx &= \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g(u) du \\ \int_{x=a}^{x=b} 2 \cos(3x+4) dx &= \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} du \end{aligned}$$

A gente pode tentar descobrir qual é a substituição certa passo a passo, começando pelas funções mais simples.... eu faria assim: olhando pra parte direita eu chuto que $g(u) = 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3}$; olhando pra parte esquerda eu chuto que $h(x) = 3x + 4$, e daí $h'(x) = 3$; aí eu testo esta substituição aqui,

$$(13) \begin{bmatrix} g(u) := 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} \\ h(x) := 3x + 4 \\ h'(x) := 3 \end{bmatrix}$$

e vejo que o resultado dela é *equivalente* (mas não igual!!!) à última igualdade da coluna da esquerda – não preciso nem substituir o a e o b .

Preciso reescrever este slide!

Os detalhes horríveis (2)

Estas contas aqui,

$$\begin{aligned} u &= x^4 \\ \frac{du}{dx} &= 4x^3 \\ du &= \frac{du}{dx} dx \\ &= 4x^3 dx \end{aligned}$$

fazem sentido se a gente considerar que:

1. x é uma variável independente,
2. u é uma variável dependente, com $u = u(x) = x^4$,
3. dx é uma variável independente,
4. du é uma variável dependente, com $du = \frac{du}{dx} dx$,
5. estas regras sobre diferenciais valem: [Leit4p61](#) (p.275),
6. estas regras sobre variáveis dependentes valem: [Stew14p53](#) (p.951),
7. o dx num $\int f(x) dx$ funciona como uma diferencial.

Eu já perguntei pra vários matemáticos fodões que eu conheço – incluindo os desenvolvedores do Maxima, na mailing list – onde eu posso encontrar alguma formalização das regras de como lidar com variáveis dependentes, diferenciais e mudança de variável na integral indefinida, e todos eles me responderam a mesma coisa: “*não faço a menor idéia! Eu sei algumas das regras mas não todas, e não sei onde você pode procurar...*” =(

Moral: é melhor a gente tratar o $du = 4x^3 dx$ como uma gambiarra...

Caixinhas com mais anotações

$$\begin{aligned}
 \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^7 d\theta &= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^6 \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 ((\cos \theta)^2)^3 \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (1 - (\operatorname{sen} \theta)^2)^3 \cos \theta d\theta \\
 &= \int s^4 (1 - s^2)^3 ds
 \end{aligned}
 \left[\begin{array}{l} \operatorname{sen} \theta = s \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \operatorname{sen} \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ \cos \theta d\theta = ds \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^7 d\theta &= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^6 \cos \theta d\theta \\
 &= \int s^4 (1 - s^2)^3 ds
 \end{aligned}
 \left[\begin{array}{l} \operatorname{sen} \theta = s \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \operatorname{sen} \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ \cos \theta d\theta = ds \\ (\cos \theta)^2 = 1 - (\operatorname{sen} \theta)^2 \\ (\cos \theta)^2 = 1 - s^2 \\ (\cos \theta)^6 = (1 - s^2)^3 \end{array} \right]$$

Caixinhas com mais anotações (2)

$$\begin{aligned}
 \int s\sqrt{1-s^2} ds &= \int (\text{sen } \theta)\sqrt{1-(\text{sen } \theta)^2} \cos \theta d\theta && \left[\begin{array}{l} s = \text{sen } \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \text{sen } \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \end{array} \right] \\
 &= \int (\text{sen } \theta)\sqrt{(\cos \theta)^2} \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\text{sen } \theta)(\cos \theta) \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\text{sen } \theta)(\cos \theta)^2 d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int s\sqrt{1-s^2} ds &= \int (\text{sen } \theta)(\cos \theta) \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\text{sen } \theta)(\cos \theta)^2 d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds &= \int \frac{1}{\cos \theta} \cos \theta d\theta \\
 &= \int 1 d\theta \\
 &= \theta \\
 &= \arcsen s
 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} s = \text{sen } \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \text{sen } \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ s^2 = (\text{sen } \theta)^2 \\ 1 - s^2 = 1 - (\text{sen } \theta)^2 \\ 1 - s^2 = (\cos \theta)^2 \\ \sqrt{1 - s^2} = \cos \theta \\ \arcsen s = \arcsen \text{sen } \theta \\ \arcsen s = \theta \\ \theta = \arcsen s \end{array} \right]$$

Caso particular 1 (MVD)

$$[\text{MVD}] \quad = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(2x) \cdot 2 dx = \int_{u=2a}^{u=2b} f(u) du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = \int_{u=2a}^{u=2b} \text{sen } u du \right)$$

$$[\text{MVD4}] \quad = \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(g(b)) - F(g(a)) \\ = F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f(2x) \cdot 2 dx = F(2x)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(2b) - F(2a) \\ = F(u)\Big|_{u=2a}^{u=2b} \\ = \int_{u=2a}^{u=2b} f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = F(2x)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(2b) - F(2a) \\ = F(u)\Big|_{u=2a}^{u=2b} \\ = \int_{u=2a}^{u=2b} \text{sen } u du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = (-\cos 2x)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = (-\cos 2b) - (-\cos 2a) \\ = (-\cos u)\Big|_{u=2a}^{u=2b} \\ = \int_{u=2a}^{u=2b} \text{sen } u du \end{array} \right)$$

Caso particular 1 (MVI)

$$[\text{MVI}] \quad = \left(\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\int f(2x) \cdot 2 dx = \int f(u) du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left(\int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = \int \text{sen } u du \right)$$

$$[\text{MVI3}] \quad = \left(\begin{array}{l} \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \\ = F(u) \\ = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int f(2x) \cdot 2 dx = F(2x) \\ = F(u) \\ = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = F(2x) \\ \phantom{\int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx} = F(u) \\ \phantom{\int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx} = \int \text{sen } u du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = (-\cos 2x) \\ \phantom{\int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx} = (-\cos u) \\ \phantom{\int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx} = \int \text{sen } u du \end{array} \right)$$

Caso particular 2 (MVD)

$$[\text{MVD}] \quad = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x^2) \cdot 2x dx = \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u) du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = \int_{u=a^2}^{u=b^2} \text{sen } u du \right)$$

$$[\text{MVD4}] \quad = \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(g(b)) - F(g(a)) \\ = F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f(x^2) \cdot 2x dx = F(x^2)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(b^2) - F(a^2) \\ = F(u)\Big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ = \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = F(x^2)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(b^2) - F(a^2) \\ = F(u)\Big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ = \int_{u=a^2}^{u=b^2} \text{sen } u du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = (-\cos x^2)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = (-\cos b^2) - (-\cos a^2) \\ = (-\cos u)\Big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ = \int_{u=a^2}^{u=b^2} \text{sen } u du \end{array} \right)$$

Caso particular 2 (MVI)

$$[\text{MVI}] \quad = \left(\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\int f(x^2) \cdot 2x dx = \int f(u) du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left(\int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = \int \text{sen } u du \right)$$

$$[\text{MVI3}] \quad = \left(\begin{array}{l} \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \\ = F(u) \\ = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int f(x^2) \cdot 2x dx = F(x^2) \\ = F(u) \\ = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = F(x^2) \\ \phantom{\int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx} = F(u) \\ \phantom{\int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx} = \int \text{sen } u du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = (-\cos x^2) \\ \phantom{\int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx} = (-\cos u) \\ \phantom{\int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx} = \int \text{sen } u du \end{array} \right)$$

Caso particular 3 (MVI)

$$\text{[MVI]} \quad = \left(\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right)$$

$$\text{[MVI]} \begin{bmatrix} g(x) := \text{sen } x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left(\int f(\text{sen } x) \cos x dx = \int f(u) du \right)$$

$$\text{[MVI]} \begin{bmatrix} g(x) := \text{sen } x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} = \left(\int (\text{sen } x)^3(1 - (\text{sen } x)^2)^2 \cos x dx = \int u^2(1-u^2)^2 du \right)$$

$$\text{[MVI3]} = \left(\begin{array}{l} \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \\ = F(u) \\ = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVI3]} \begin{bmatrix} g(x) := \text{sen } x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int f(\text{sen } x) \cos x dx = F(\text{sen } x) \\ \phantom{\int f(\text{sen } x) \cos x dx} = F(u) \\ \phantom{\int f(\text{sen } x) \cos x dx} = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVI3]} \begin{bmatrix} g(x) := \text{sen } x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int (\text{sen } x)^3(1 - (\text{sen } x)^2)^2 \cos x dx = F(\text{sen } x) \\ \phantom{\int (\text{sen } x)^3(1 - (\text{sen } x)^2)^2 \cos x dx} = F(u) \\ \phantom{\int (\text{sen } x)^3(1 - (\text{sen } x)^2)^2 \cos x dx} = \int u^2(1-u^2)^2 du \end{array} \right)$$

O macaco, de novo

Estas duas igualdades são falsas

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - (\operatorname{sen} \theta)^2} &= \cos \theta \\ \operatorname{arcsen} \operatorname{sen} \theta &= \theta\end{aligned}$$

quando $\theta = \pi \dots$ confira!

Mas elas são verdadeiras para $\theta = 0$, e para todo θ num certo intervalo em torno do 0 que eu não quero contar qual é.

Lembre quem em Cálculo 2 a gente vai primeiro fazer as contas como o macaco que faz todas as contas como se tudo funcionasse, e a gente vai deixar pra checar os detalhes, como se θ estivesse no intervalo certo, só no final, depois de termos feito as contas todas.

O Leithold é super cuidadoso nas contas e nesses detalhes como os domínios das funções e o intervalo onde mora o θ , mas a maioria dos outros livros de Cálculo 2 que eu conheço não são – eles são meio porcalhões com esses detalhes... e a gente também vai ser, senão não vai dar tempo de cobrir o suficiente da matéria.

O truque dos intervalos

Dê uma olhada nas primeiras páginas daqui:

Leit5p3 5.1. Antidiferenciação

O Leithold usa expressões como “num intervalo I ”, “para todo $x \in I$ ” e “definidas no mesmo intervalo” um montão de vezes. O truque de usar sempre intervalos resolve esse esse problema daqui super bem:

2fT24 Meme: expanding brain, versão ln

A minha definição preferida pra integral indefinida,

2fT23 Outra definição pra integral indefinida

também resolve o problema – de um modo bem mais simples, e que é suficiente pro tipo de conta que a gente tem que treinar em Cálculo 2.

MVI

A nossa fórmula pra mudança de variável na integral indefinida vai ser esta aqui:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du = \left(\int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right)$$

Dá pra demonstrar ela deste jeito,

$$\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) = f(u) = \int f'(u) du$$

onde a primeira e a terceira igualdades são consequências do , e a igualdade do meio só vale se tivermos $u = g(x)$.

Os livros demonstram a $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$ de um jeitos que eu nunca achei muito convincentes – ou fingindo que tudo é óbvio, ou “derivando tudo em x ”. As contas abaixo me ajudaram a entender o que acontece quando a gente “deriva tudo em x ”:

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \left(\int \underbrace{f'(g(x))g'(x)} \right)}_{f'(g(x))g'(x)} = \underbrace{\frac{d}{dx} f(g(x))}_{f'(g(x))g'(x)} = \frac{d}{dx} \underbrace{f(u)}_{f(g(x))} = \frac{d}{dx} \underbrace{\int \underbrace{f'(u)}_{f(u)} du}_{f(g(x))}_{f'(g(x))g'(x)}$$

Simplificando raízes quadradas

Na aula de 16/maio/2023 você aprendeu – na prática, não vendo uma definição formal – o que é transformar uma integral mais difícil numa integral mais fácil, que nós sabemos integrar...

a) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2} ds$. Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2} dx$ em algo que você sabe integrar.

b) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2} dx$ em algo que você sabe integrar.

c) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^{2k}} ds$ para qualquer valor de k .

Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^{2k}} dx$ em algo que você sabe integrar.

d) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^{2k}} dx$ em algo que você sabe integrar.

e) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^{2k}} dx$ em algo que você sabe integrar.

f) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^{2k}} dx$ em algo que você sabe integrar.

g) Entenda este truque aqui:

$$\begin{aligned} \sqrt{3^2 - x^2} &= \sqrt{3^2 - 3^2 \frac{1}{3^2} x^2} \\ &= \sqrt{3^2 - 3^2 \left(\frac{x}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{3^2 \left(1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2\right)} \\ &= \sqrt{3^2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} \\ &= 3 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} \end{aligned}$$

Use ele – com adaptações, óbvio – pra transformar $\int \sqrt{25-x^2} dx$ em algo que você sabe integrar.

h) Use ele pra transformar $\int \sqrt{25-x^2}^{42} dx$ em algo que você sabe integrar.

i) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2}^k dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int x^{20} \sqrt{a^2-x^2}^k dx$ em algo que você sabe integrar.

Exercício 3

Slogan:

Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável pode ser resolvida por uma mudança de variável só.

Durante a quarentena eu dei algumas questões de prova sobre este slogan. Dê uma olhada:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4>

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=9>

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-P1.pdf#page=15>

a) Resolva a integral abaixo usando uma mudança de variável só (dica: $u = g(h(x))$):

$$\int f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x) dx = ?$$

b) Resolva a integral acima usando duas mudanças de variável. Dica: comece com $u = h(x)$.

O Miranda e o Leithold preferem fazer em um passo só certas mudanças de variáveis que eu prefiro fazer em dois ou três passos. Entenda o exemplo 8.1 do Miranda – o da seção 8.4, na página 264...

<http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#263>

c) ...e descubra como resolver a integral dele fazendo duas mudanças de variáveis ao invés de uma só. A segunda mudança de variável vai ser $s = \sin \theta$, e a primeira eu prefiro não contar qual é – tente usar as idéias do exercício 1 pra descobrir qual ela tem que ser.

Ainda não atualizei este slide!

Cálculo 2 - 2025.1

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Questão 1**(Total: 1.0 pts)**Seja $f(t)$ a função no topo da página seguinte.

Seja

$$F(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t) dt.$$

Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

Questão 2**(Total: 4.0 pts)**

Resolva esta integral:

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx.$$

Lembre que eu vou corrigir a sua solução usando os critérios de correção que eu expliquei no PDFzinho de “Dicas para a P1”, mas as bancas de revisão de prova costumam ignorar os meus critérios de correção e costumam usar outros critérios – que nunca são explicados direito.

Questão 3**(Total: 5.0 pts)**

Seja:

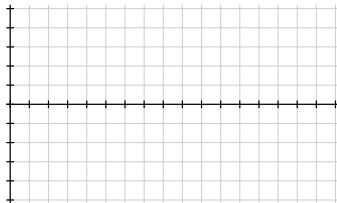
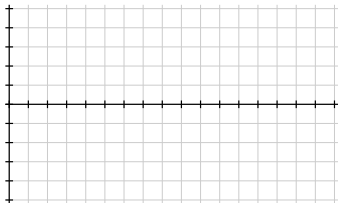
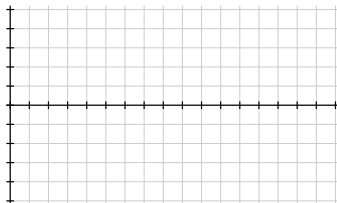
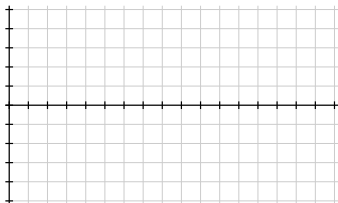
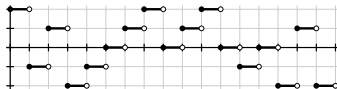
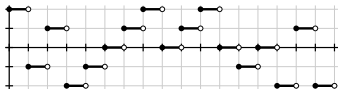
$$F(x) = \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx.$$

a) **(0.5 pts)** Integre $F(x)$ pelo “método rápido” dos anexos – use duas mudanças de variável, cada uma com uma caixinha de anotações, e siga exatamente o modelo – alinhe os sinais de ‘=’, etc.

Chame a igualdade da primeira mudança de variável de ‘(a)’, e a da segunda mudança de variável de ‘(b)’.

b) **(2.0 pts)** Imagine que alguém te diz “eu não acredito no método rápido, você pode me mostrar justificativas pras igualdades ‘(a)’ e ‘(b)’, usando casos particulares da [MVI1]?” Traduza as suas justificativas do item (a) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (b).

c) **(2.5 pts)** Imagine que alguém te diz “eu não acredito na [MVI1], você pode me mostrar justificativas pras igualdades ‘(a)’ e ‘(b)’, usando casos particulares da [MVD4]?” Traduza as suas justificativas do item (b) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (c).



Anexo: método rápido, [MVI1], [MVD4]

Lembre que o “método rápido” tem essa cara aqui:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x} dx && \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &= \int (\ln x)^3 \cos((\ln x)^4) \frac{1}{x} dx \\
 &= \int u^3 \cos(u^4) du \\
 &= \int \cos(u^4) u^3 du && \left[\begin{array}{l} v = u^4 \\ \frac{dv}{du} = 4u^3 \\ \frac{1}{4} dv = u^3 du \end{array} \right] \\
 &= \int \cos v \cdot \frac{1}{4} dv \\
 &= \frac{1}{4} \int \cos v dv \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{sen} v \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{sen}(u^4) \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{sen}((\ln x)^4)
 \end{aligned}$$

E lembre que:

$$\begin{aligned}
 \text{[MVI1]} &= \left(\int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right) \\
 \text{[MVD4]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(g(b)) - f(g(a)) \\ = f(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

e em cada caixinha de anotações a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras com diferenciais.

Anexo: como justificar uma MV de cabeça

Por exemplo...

$$\begin{aligned}
 \int t^2 \cos(t^3) dt &= ? \\
 \int x^2 \cos(x^3) dx &= ? \quad \left[\begin{array}{l} \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} u = \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2 \\ \left[\begin{array}{l} u = x^3 \\ \frac{du}{dx} = 3x^2 \end{array} \right] \end{array} \right. \\
 \int \underbrace{\cos(x^3)}_u \cdot \frac{1}{3} \cdot \underbrace{3x^2 dx}_{\frac{du}{dx}} &= \int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 \int \underbrace{\cos(x^3)}_{g(x)} \cdot \frac{1}{3} \cdot \underbrace{3x^2 dx}_{g'(x)} &= \int \underbrace{\cos(u)}_{f'(u)} \cdot \frac{1}{3} du \\
 \underbrace{\int f'(g(x))g'(x) dx}_{\int \cos(x^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3x^2 dx} &= \underbrace{\int f'(u) du}_{\int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du} \quad \left[\begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \cos(u) \cdot \frac{1}{3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right. \\
 \int \cos(t^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3t^2 dt &= \int \cos(w) \cdot \frac{1}{3} dw
 \end{aligned}$$

$$\int t^2 \cos(t^3) dt = \int \frac{1}{3} \cos(w) dw \quad \text{Por [MVII]} \quad \left[\begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \frac{1}{3} \cos(u) \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right.$$

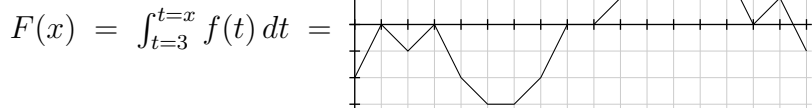
Dicas:

Repare que no exemplo à esquerda o problema original era este,

$$\int t^2 \cos(t^3) dt = ?$$

e eu resolvi ele nesta ordem: 1) eu mudei a variável dele pra x pra ficar com algo mais parecido com a [MVII], 2) eu escolhi a mudança de variável certa, que era $u = x^3$, 3) eu calculei o $\frac{du}{dx}$, 4) eu rearrumei o problema original pro $\frac{du}{dx}$ ficar colado no dx , 5) eu fiz a mudança de variável pelo método rápido, 6) eu reescrevi as anotações do método rápido pra obter $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$, 7) eu transformei essas $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$ numa substituição, 8) eu calculei os resultados parciais dessa substituição e da $\left[\begin{array}{l} x:=t \\ u:=w \end{array} \right]$, 9) eu reescrevi a substituição que eu tinha obtido e testado pra fingir que eu primeiro tinha resolvido o problema original de cabeça e depois eu escrevi a justificativa porque alguém me perguntou como eu tinha chegado naquele resultado.

Questão 1: gabarito



Questão 2: gabarito

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} &= \frac{(2x - 2)(x^2 - 2x - 15) + 11x + 25}{x^2 - 2x - 15} \\ &= 2x - 2 + \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15} \\ &= 2x - 2 + \frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)} \end{aligned}$$

Queremos encontrar A e B tais que:

$$\begin{aligned} \frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)} &= \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 3} \\ &= \frac{A(x + 3) + B(x - 5)}{(x - 5)(x + 3)} \\ &= \frac{(A + B)x + (3A - 5B)}{(x - 5)(x + 3)} \end{aligned}$$

Vamos resolver um problema um pouco mais simples:

$$\begin{aligned} 11x + 25 &= (A + B)x + (3A - 5B) \\ A + B &= 11 \\ 3A - 5B &= 25 \\ B &= 11 - A \\ 3A - 5(11 - A) &= 25 \\ 3A - 55 + 5A &= 25 \\ 8A &= 80 \\ A &= 10 \\ B &= 11 - 10 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx &= \int 2x - 2 + \frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)} dx \\ &= \int 2x - 2 + \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 3} dx \\ &= \int 2x - 2 + \frac{10}{x - 5} + \frac{1}{x + 3} dx \\ &= x^2 - 2x + 10 \log(x - 5) + \log(x + 3) \end{aligned}$$

Questão 3: mini-gabarito

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{4 \cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3}{x} dx \\
 &= \int 4 \cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &\stackrel{(a)}{=} \int 4 \cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3 du \quad \left[\begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &= \int 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int 4v^3 dv \quad \left[\begin{array}{l} v = \operatorname{sen} u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u du \end{array} \right] \\
 &= v^4 \\
 &= (\operatorname{sen} u)^4 \\
 &= (\operatorname{sen}(\log x))^4
 \end{aligned}$$

$$\text{[S3a]} = \left[\begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := 4 \cos(x)(\operatorname{sen}(u))^3 \end{array} \right]$$

$$\text{[S4a]} = \left[\begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := 4 \cos(x)(\operatorname{sen}(u))^3 \\ f(u) := (\operatorname{sen} u)^4 \end{array} \right]$$

$$\text{[MVI1][S3a]} = \left(\int 4 \cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \int 4 \cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3 du \right)$$

$$\text{[MVD4][S3a]} = \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = f(\log x) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(\log b) - f(\log a) \\ = f(u) \Big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ = \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4 \cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3 du \\ = (\operatorname{sen}(\log x))^4 \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = (\operatorname{sen}(\log b))^4 - (\operatorname{sen}(\log a))^4 \\ = (\operatorname{sen}(u))^4 \Big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ = \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4 \cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3 du \end{array} \right)$$

Questão 3: mini-gabarito (cont.)

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3}{x} dx \\
 &= \int 4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &\stackrel{(a)}{=} \int 4 \cos(u) (\operatorname{sen}(u))^3 du \quad \left[\begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int 4v^3 dv \quad \left[\begin{array}{l} v = \operatorname{sen} u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u du \end{array} \right] \\
 &= v^4 \\
 &= (\operatorname{sen} u)^4 \\
 &= (\operatorname{sen}(\log x))^4
 \end{aligned}$$

$$[S2b] = \left[\begin{array}{l} x := u \\ u := v \end{array} \right]$$

$$[S3b] = \left[\begin{array}{l} g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \end{array} \right]$$

$$[S4b] = \left[\begin{array}{l} f'(u) := 4u^3 \\ g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \\ f'(u) := 4u^3 \\ f(u) := u^4 \end{array} \right]$$

$$[MVI1][S3b] = \left(\int 4(\operatorname{sen}(x))^3 \cos(x) dx = \int 4u^3 du \right)$$

$$[MVI1][S3b][S2b] = \left(\int 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = \int 4v^3 dv \right)$$

$$[MVD4][S3b][S2b] = \left(\begin{array}{l} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = f(\operatorname{sen}(u)) \Big|_{u=a}^{u=b} \\ = f(\operatorname{sen}(b)) - f(\operatorname{sen}(a)) \\ = f(v) \Big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ = \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3 dv \end{array} \right)$$

$$[MVD4][S4b][S2b] = \left(\begin{array}{l} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = (\operatorname{sen}(u))^4 \Big|_{u=a}^{u=b} \\ = (\operatorname{sen}(b))^4 - (\operatorname{sen}(a))^4 \\ = v^4 \Big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ = \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3 dv \end{array} \right)$$

Cálculo 2 - 2025.1

Aulas 29 e 30: revisão de números complexos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

Provas:

2jT227 (2024.2, P1, gabarito)

2yT12 (2019.2, P1, gabarito)

<http://anggtwu.net/LATEX/2018-2-C2-P1.pdf#page=2> Questão 1

StewPtCap17p6 (p.1020) Equações diferenciais de 2ª ordem

StewPtCap17p20 (p.1034) Caso 3: subamortecimento

StewPtApendiceHp5 (p.A51) **Apêndice H: Números complexos**

BoyceDip3p5 (p.105) Capítulo 3: Equações lineares de 2ª ordem

BoyceDip3p11 (p.111) Seção 3.2: o operador diferencial L

BoyceDip3p13 (p.113) Teorema 3.2.2: o princípio da superposição

BoyceDip3p21 (p.121) 3.3. Raízes complexas da equação característica

BoyceDip3p23 (p.123) Figura 3.3.1

BoyceDipEng3p4 (p.103) Chapter 3: Second-order linear ODEs

BoyceDipEng3p11 (p.110) Section 3.2: the differential operator L

BoyceDipEng3p13 (p.112) Theorem 3.2.2: principle of superposition

BoyceDipEng3p21 (p.120) 3.3 Complex Roots of the Characteristic Equation

BoyceDipEng3p24 (p.123) Figure 3.3.1

<http://www.youtube.com/watch?v=-dhHrg-KbJ0> $e^{\pi i}$ for dummies (Mathologer)

https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number (bom)

https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complexo (ruim, cheio de erros)

HernandezP57 (p.47) principais identidades trigonométricas

Quadros:

2jQ55 (2024.2)

2iQ81 (2024.1)

2hQ66 (2023.2)

2fQ45 (2022.2)

2yQ63 (2019.2)

```
(%i1) Re(z) := realpart(z)$
(%i2) Im(z) := imagpart(z)$
(%i3) sqhyp(z) := Re(z)^2 + Im(z)^2$
(%i4) tom(z) := matrix([Re(z),-Im(z)], [Im(z),Re(z)])$
(%i5) det(M) := determinant(M)$
(%i6) nm(z) := Re(z) + %i*Im(z)$
(%i7) stringdisp : false$
(%i8) z : a + %i*b;
(%o8)
```

$$ib + a$$

```
(%i9) w : c + %i*d;
(%o9)
```

$$id + c$$

```
(%i10) matrix([ z , "+", w , "=", nm(z+w)],
               [tom(z), "+", tom(w), "=", tom(z)+tom(w)],
               [ " ", " ", " ", " ", " " ],
               [ z , "*", w , "=", nm(z*w) ],
               [tom(z), ".", tom(w), "=", tom(z).tom(w)]);
```

```
(%o10)
```

$$\left(\begin{array}{l} ib + a + id + c = i(d+b) + c + a \\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+a & -d-b \\ d+b & c+a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ib + a \\ a & -b \\ b & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} id + c \\ c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(ad+bc) - bd + ac \\ ac - bd & -(ad) - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

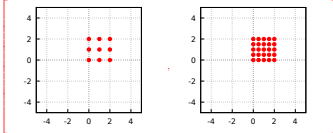
```
(%i11) drawzpts (zs,[opts]) := myqdraw(xyrange(), zpts(zs, opts))$
(%i12) [xmin,ymin, xmax,ymax] : [-5,-5, 5,5]$
(%i13) myqdraw_to_screen()$ myps(size) := ps(size)$
(%i15) myqdraw_to_new_pdf()$ myps(size) := ps(size/5)$
(%i17) as_33      : create_list(x+%i*y, y,seqn(2,0,2), x,seqn(0,2,2));
```

```
(%o17)          [2i,2i+1,2i+2,i,i+1,i+2,0,1,2]
```

```
(%i18) as_55      : create_list(x+%i*y, y,seqn(2,0,4), x,seqn(0,2,4))$
(%i19) as_22      : create_list(x+%i*y, y,seqn(0,1,1), x,seqn(0,1,1))$
(%i20) D1 : drawzpts(as_33,      myps(3), pc(red))$
        D2 : drawzpts(as_55,      myps(3), pc(red))$
```

```
(%i21)
(%i22) [D1, D2];
```

```
(%o22)
```

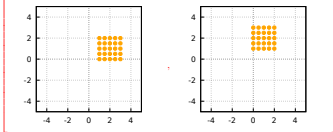


```
(%i23) D3 : drawzpts(as_55 + 1,      myps(3), pc(orange))$
```

```
(%i24) D4 : drawzpts(as_55 + %i,      myps(3), pc(orange))$
```

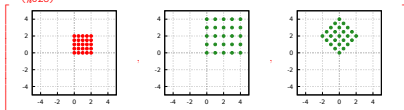
```
(%i25) [D3, D4];
```

```
(%o25)
```



```
(%i26) D5 : drawzpts(as_55 * 2,      myps(3), pc(forest_green))$
(%i27) D6 : drawzpts(as_55 * (1+%i), myps(3), pc(forest_green))$
(%i28) [D2, D5, D6];
```

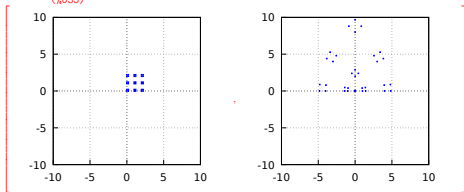
```
(%o28)
```



```
(%i29) topdf_opts : "height=10cm"$
(%i30) as_332      : create_list(z+w, z, as_33, w, as_22*0.2)$
(%i31) as_332_sq  : makelist(z^2, z, as_332)$
(%i32) [xmin,ymin, xmax,ymax] : [-10,-10, 10,10];
(%o32)
```

```
[-10,-10,10,10]
```

```
(%i33) D7 : drawzpts(as_332,      myps(0.5))$
(%i34) D8 : drawzpts(as_332_sq, myps(0.5))$
(%i35) [D7, D8];
(%o35)
```



```
(%i36)
```

2019.2

$$\begin{aligned}
& (\operatorname{sen} 5\theta)^2 (\cos 6\theta)^2 \\
&= \left(\frac{E^5 - E^{-5}}{2i} \right)^2 \left(\frac{E^6 + E^{-6}}{2} \right)^2 \\
&= -\frac{1}{16} (E^{10} - 2 + E^{-10}) (E^{12} + 2 + E^{-12}) \\
&= -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} (E^{10} - 2 + E^{-10})E^{12} + \\ (E^{10} - 2 + E^{-10}) \cdot 2 + \\ (E^{10} - 2 + E^{-10})E^{-12} \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} E^{22} - 2E^{12} + E^2 + \\ 2E^{10} - 4 + 2E^{-10} + \\ E^{-2} - 2E^{-12} + E^{-22} \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{16} ((E^{22} + E^{-22}) - 2(E^{12} + E^{-12}) + 2(E^{10} + E^{-10}) + (E^2 + E^{-2}) - 4) \\
&= -\frac{1}{16} (2 \cos 22\theta - 4 \cos 12\theta + 4 \cos 10\theta + 2 \cos 2\theta - 4) \\
&= -\frac{1}{8} \cos 22\theta + \frac{1}{4} \cos 12\theta - \frac{1}{4} \cos 10\theta - \frac{1}{8} \cos 2\theta \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int (\operatorname{sen} 5x)^2 (\cos 6x)^2 dx &= \int -\frac{1}{8} \cos 22x + \frac{1}{4} \cos 12x - \frac{1}{4} \cos 10x - \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{4} dx \\
&= -\frac{1}{8 \cdot 22} \operatorname{sen} 22x + \frac{1}{4 \cdot 12} \operatorname{sen} 12x - \frac{1}{4 \cdot 10} \operatorname{sen} 10x - \frac{1}{8 \cdot 2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} x
\end{aligned}$$

Exercícios de “seja o seu próprio Geogebra”

Nestes exercícios a gente vai usar algumas técnicas de Cálculo 3 que eu vou explicar no quadro: o “seja o seu próprio Geogebra”, a convenção de escrever todos os labels, a convenção de que um vetor \vec{v} é um deslocamento, e a convenção de que $A + \vec{v}$ é representado como **um ponto e uma seta**. Lembre que se **quase sempre** se você precisou fazer um conta – como o **resultado** de $A + \vec{v}$ – é porque você está fazendo algo errado.

Links:

[3jT16](#) Uma convenção (temporária)

[2kT140](#) Sobre músculos mentais e perguntar

Exercício 1.

a) Seja $z = i + 1$.

Represente graficamente $\{z^0, z^1, z^2, z^3, z^4\}$.

(Aqui você vai precisar fazer contas).

b) Faça o mesmo para $z = i$ (num outro gráfico).

(Aqui você também vai precisar fazer contas).

Exercício 2.

Sejam:

$$\begin{aligned} A(z, w) &= \left\{ z, w, z + \overrightarrow{(w-z)}, z + \frac{1}{2}\overrightarrow{(w-z)} \right\} \\ B(z, w) &= \left\{ z, w, z + \overrightarrow{(w-z)}, z + \frac{1}{4}\overrightarrow{(w-z)} \right\} \\ C(z, w) &= \left\{ z, w, \frac{z+w}{2} \right\} \end{aligned}$$

Para cada um dos casos abaixo faça três gráficos – um pra $A(z, w)$, um pra $B(z, w)$ e um pra $C(z, w)$.

a) $z = 2 + 4i$ e $w = -3 + 4i$

b) $z = 2 + 4i$ e $w = 2 + i$

c) $z = 1 + 2i$ e $w = 4 + 3i$.

Exercício 3.

Lembre que $E = e^{i\theta}$ e $E^k = (e^{i\theta})^k = e^{i(k\theta)}$.

Seja

$$A(\theta) = \{E, E^2, E^3, E^0, E^{-1}\}$$

a) Represente graficamente $A(\theta)$ para $\theta = 45^\circ$.

b) Represente graficamente $A(\theta)$ para $\theta = 30^\circ$.

c) Represente graficamente $A(\theta)$ para $\theta = 60^\circ$.

d) Represente graficamente $A(\theta)$ para $\theta = -30^\circ$.

Exercícios de “seja o seu próprio Geogebra” (2)

O *conjugado* é definido assim: $\overline{a + ib} = a - ib$.

Mais precisamente: $\forall a, b \in \mathbb{R}, \overline{a + ib} = a - ib$.

Um exemplo concreto: $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$.

Exercício 4.

Sejam:

$$\begin{aligned} A(z) &= \left\{ z, \bar{z}, -\bar{z}, \frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z+(-\bar{z})}{2} \right\} \\ B(z) &= \left\{ z, \bar{z}, -\bar{z}, \frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2} \right\} \end{aligned}$$

Em cada um dos itens abaixo faça um gráfico para $A(z)$ e outro para $B(z)$. Os dois gráficos vão ser muito parecidos, só um label/rótulo vai mudar.

- $z = 3 + 2i$
- $z = 2 + 3i$
- $z = 2 + i$
- $z = 2 - i$

Exercício 5.

Lembre que $E = e^{i\theta}$.

Seja:

$$A(\theta) = \left\{ E, E^{-1}, -E^{-1}, \frac{E+E^{-1}}{2}, \frac{E-E^{-1}}{2} \right\}.$$

Represente graficamente $A(\theta)$ em cada um dos casos abaixo.

- $\theta = 45^\circ$
- $\theta = 60^\circ$
- $\theta = 135^\circ$

Cálculo 2 - 2025.1

Aula 30: séries de Taylor

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

Stewart:

- StewPtCap7p55 (p.470) 7.8 Integrais Impróprias
- StewPtCap11p5 (p.623) 11 Sequências e Séries Infinitas
- StewPtCap11p6 (p.624) 11.1 Sequências
- StewPtCap11p18 (p.636) 11.2 Séries
- StewPtCap11p27 (p.645) 11.3 O Teste da Integral e Estimativas de Somas
- StewPtCap11p34 (p.652) 11.4 Os Testes de Comparação
- StewPtCap11p39 (p.657) 11.5 Séries Alternadas
- StewPtCap11p43 (p.661) 11.6 Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz
- StewPtCap11p49 (p.667) 11.7 Estratégia para Testes de Séries
- StewPtCap11p51 (p.669) 11.8 Séries de Potência
- StewPtCap11p53 (p.671) ...raio de convergência
- StewPtCap11p56 (p.674) 11.9 Representações de Funções como Séries de Potências
- StewPtCap11p61 (p.679) 11.10 Séries de Taylor e Maclaurin
- StewPtCap11p63 (p.681) Figura 1: quando n aumenta, T_n parece aproximar...
- StewPtCap11p63 (p.681) ...**polinômio de Taylor de n -ésimo grau**
- StewPtCap11p67 (p.685) ...**em colunas**
- StewPtCap11p69 (p.687) Tabela 1: séries de MacLaurin importantes
- StewPtCap11p71 (p.689) 11.10 Exercícios
- StewPtCap11p74 (p.692) 11.11 Aplicações dos Polinômios de Taylor
- StewPtCap11p74 (p.692) **Aproximando funções por polinômios**
- StewPtCap11p83 (p.701) Revisão
- StewPtCap11p85 (p.703) Problemas Quentes

Vídeo do Mathologer – assista do 4:00 ao 12:21:

<http://www.youtube.com/watch?v=p-LbzWmm2zk>

Quadros:

- 2hQ32 (2023.2) Frações parciais
- 2hQ70 (2023.2) Revisão de variáveis complexas
- 2hQ75 (2023.2) EDOs exatas
- 2hQ89 (2023.2) Séries de Taylor
- 2hT234 Código em Maxima

```
(%i1) load("~/MAXIMA/2025-1-taylor.mac")$
(%i2) gradef(f(x), f_x(x))$
(%i3) gradef(f_x(x), f_xx(x))$
(%i4) gradef(f_xx(x), f_xxx(x))$
(%i5) gradef(f_xxx(x), f_xxxx(x))$
(%i6) gradef(f_xxxx(x), f_xxxxx(x))$
(%i7) myt : Taylor(f(x),x,0,4)$
(%i8) myt@abcd(x);
```

(%o8)

$$\left[\begin{array}{c} f(x) \\ f_x(x) \\ f_{xx}(x) \\ f_{xxx}(x) \\ f_{xxxx}(x) \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} f(0) \\ f_x(0) \\ f_{xx}(0) \\ f_{xxx}(0) \\ f_{xxxx}(0) \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} f(0) \\ \frac{f_x(0)}{2} \\ \frac{f_{xx}(0)}{6} \\ \frac{f_{xxx}(0)}{24} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} f(0) \\ \frac{f_x(0)x}{2} \\ \frac{f_{xx}(0)x^2}{6} \\ \frac{f_{xxx}(0)x^3}{24} \\ \frac{f_{xxxx}(0)x^4}{24} \end{array} \right]$$

```
(%i9) myt@s(x);
```

(%o9)

$$\frac{f_{xxxx}(0)x^4}{24} + \frac{f_{xxx}(0)x^3}{6} + \frac{f_{xx}(0)x^2}{2} + f_x(0)x + f(0)$$

```
(%i10) myt@s(a);
```

(%o10)

$$\frac{f_{xxxx}(0)a^4}{24} + \frac{f_{xxx}(0)a^3}{6} + \frac{f_{xx}(0)a^2}{2} + f_x(0)a + f(0)$$

```
(%i11) myt@s(1/10);
```

(%o11)

$$\frac{f_{xxxx}(0)}{240000} + \frac{f_{xxx}(0)}{6000} + \frac{f_{xx}(0)}{200} + \frac{f_x(0)}{10} + f(0)$$

(%i12)

```
(%i1) load("-/MAXIMA/2025-1-taylor.mac")$
```

```
(%i2) f3(x) := a + b*x + c*x^2 + d*x^3$
```

```
(%i3) myt : Taylor(f3(x),x,0,4)$
```

```
(%i4) myt@@abcd(x);
```

```
(%o4)
```

$$\begin{pmatrix} dx^3 + cx^2 + bx + a \\ 3dx^2 + 2cx + b \\ 6dx + 2c \\ 6d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2c \\ 6d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ bx \\ cx^2 \\ dx^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i5) myt@@s(x);
```

```
(%o5)
```

$$dx^3 + cx^2 + bx + a$$

```
(%i6) f4(x) := a + b*x + c*x^2 + d*x^3 + e*x^4$
```

```
(%i7) myt : Taylor(f4(x),x,0,4)$
```

```
(%i8) myt@@abcd(x);
```

```
(%o8)
```

$$\begin{pmatrix} ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a \\ 4ex^3 + 3dx^2 + 2cx + b \\ 12ex^2 + 6dx + 2c \\ 24ex + 6d \\ 24e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2c \\ 6d \\ 24e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ bx \\ cx^2 \\ dx^3 \\ ex^4 \end{pmatrix}$$

```
(%i9) myt@@s(x);
```

```
(%o9)
```

$$ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a$$

```
(%i10) f5(x) := a + b*x + c*x^2 + d*x^3 + e*x^4 + f*x^5$
```

```
(%i11) myt : Taylor(f5(x),x,0,4)$
```

```
(%i12) myt@@abcd(x);
```

```
(%o12)
```

$$\begin{pmatrix} fx^5 + ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a \\ 5fx^4 + 4ex^3 + 3dx^2 + 2cx + b \\ 20fx^3 + 12ex^2 + 6dx + 2c \\ 60fx^2 + 24ex + 6d \\ 120fx + 24e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2c \\ 6d \\ 24e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ bx \\ cx^2 \\ dx^3 \\ ex^4 \end{pmatrix}$$

```
(%i13) myt@@s(x);
```

```
(%o13)
```

$$ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a$$

```
(%i1) load("-/MAXIMA/2025-1-taylor.mac")$
(%i2) myte : Taylor(exp( th) , th,0,5)$
(%i3) myte2 : Taylor(exp( 2*th) , th,0,5)$
(%i4) mytei : Taylor(exp(Xi*th) , th,0,5)$
(%i5) mytc : Taylor(cos(th) , th,0,5)$
(%i6) myts : Taylor( sin(th), th,0,5)$
(%i7) mytis : Taylor( %i*sin(th), th,0,5)$
(%i8) mytcis : Taylor(cos(th)+%i*sin(th), th,0,5)$
(%i9) myte @@abcd(th);
```

$$\begin{pmatrix} e^{\theta} \\ e^{\theta} \\ e^{\theta} \\ e^{\theta} \\ e^{\theta} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \\ \frac{\theta^2}{2!} \\ \frac{\theta^3}{3!} \\ \frac{\theta^4}{4!} \\ \frac{\theta^5}{5!} \end{pmatrix}$$

```
(%i10) myte2 @@abcd(th);
(%o10)
```

$$\begin{pmatrix} e^{2\theta} \\ 2e^{2\theta} \\ 4e^{2\theta} \\ 8e^{2\theta} \\ 16e^{2\theta} \\ 32e^{2\theta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \\ 32 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2\theta \\ 2\theta^2 \\ 4\theta^3 \\ 8\theta^4 \\ 16\theta^5 \end{pmatrix}$$

```
(%i11) mytei @@abcd(th);
(%o11)
```

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ i e^{i\theta} \\ -e^{i\theta} \\ -i e^{i\theta} \\ e^{i\theta} \\ i e^{i\theta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{24} \\ \frac{i}{24} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i\theta \\ -\frac{i\theta^2}{2!} \\ \frac{\theta^3}{3!} \\ -\frac{i\theta^4}{4!} \\ \frac{\theta^5}{5!} \end{pmatrix}$$

```
(%i12) mytc @@abcd(th);
(%o12)
```

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ -\cos \theta \\ \sin \theta \\ \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2!} \\ 0 \\ \frac{1}{24} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \\ -\frac{\theta^2}{2!} \\ \frac{\theta^3}{3!} \\ -\frac{\theta^4}{4!} \\ \frac{\theta^5}{5!} \end{pmatrix}$$

```
(%i13) myts @@abcd(th);
(%o13)
```

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ -\sin \theta \\ -\cos \theta \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2!} \\ 0 \\ \frac{1}{24} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \\ 0 \\ -\frac{\theta^2}{2!} \\ \frac{\theta^3}{3!} \\ -\frac{\theta^4}{4!} \\ \frac{\theta^5}{5!} \end{pmatrix}$$

```
(%i14) mytis @@abcd(th);
(%o14)
```

$$\begin{pmatrix} i \sin \theta \\ i \cos \theta \\ -(i \sin \theta) \\ -(i \cos \theta) \\ i \sin \theta \\ i \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ -i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ -\frac{i}{2!} \\ 0 \\ \frac{i}{24} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i\theta \\ 0 \\ -\frac{i\theta^2}{2!} \\ \frac{i\theta^3}{3!} \\ -\frac{i\theta^4}{4!} \\ \frac{i\theta^5}{5!} \end{pmatrix}$$

```
(%i15) mytcis@@abcd(th);
(%o15)
```

$$\begin{pmatrix} i \sin \theta + \cos \theta \\ i \cos \theta - \sin \theta \\ -(i \sin \theta) - \cos \theta \\ \sin \theta - i \cos \theta \\ i \sin \theta + \cos \theta \\ i \cos \theta - \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2!} \\ \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} \\ \frac{1}{120} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i\theta \\ -\frac{i\theta^2}{2!} \\ \frac{\theta^3}{3!} \\ -\frac{i\theta^4}{4!} \\ \frac{\theta^5}{5!} \end{pmatrix}$$

```
(%i16) mytei @@s(th);
(%o16)
```

$$\frac{i\theta^5}{120} + \frac{\theta^4}{24} - \frac{i\theta^3}{6} - \frac{\theta^2}{2} + i\theta + 1$$

```
(%i17) mytcis@s(th);
(%o17)
```

$$\frac{i\theta^5}{120} + \frac{\theta^4}{24} - \frac{i\theta^3}{6} - \frac{\theta^2}{2} + i\theta + 1$$

Cálculo 2 - 2025.1

Aulas 41 e 42: EDOs com variáveis separáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

[2dT293](#) Material sobre EDOVSs de 2021.2

[2dT306](#) Slides sobre inversas de 2021.2

[2gT120](#) Slides sobre inversas de 2023.2

[Leit7](#) Funções inversas, logarítmicas e exponenciais

[StewPtCap9p11](#) (p.531) 9.2 Campos de Direções e Método de Euler

[StewPtCap9p18](#) (p.538) 9.3 Equações Separáveis

[StewPtCap14p10](#) (p.796) Curvas de nível

[ZillCullenInicioP13](#) (p.6) Soluções implícitas e explícitas

[ZillCullenInicioP16](#) (p.9) parâmetros, solução particular

[ZillCullenInicioP51](#) (p.44) 2.2 Variáveis separáveis

[ZillCullenInicioP57](#) (p.50) Exercícios

[ZillCullenEngCap2p17](#) (p.44) 2.2 Separable Variables

[ZillCullenEngCap2p23](#) (p.50) Exercises 2.2

[BoyceDip2p13](#) (p.31) 2.2. Equações separáveis

[BoyceDipEng2p13](#) (p.33) 2.2 Separable Differential Equations

[DiffyQsP27](#) 1.2 Slope fields

[DiffyQsP33](#) 1.3 Separable equations

[Thomas11cap9](#) 9.1 Slope Fields and Separable Differential Equations

[2eT214](#) Algumas figuras de campos de direções

Provas:

[2jT272](#) 2042.2, P2

[2iT188](#) 2041.2, P2

[2hT278](#) 2023.2, P2

[2gT134](#) 2023.1, P2

[2fT123](#) 2022.2, P2

[2fT130](#) 2022.2, VR

[2fT135](#) 2022.2, VS

Quadros:

[2kQ95](#) (2025.1)

[2jQ79](#) (2024.2)

[2iQ69](#) (2024.1)

[2hQ53](#) (2023.2)

[2gQ41](#) (2023.1)

[2fQ39](#) (2022.2)

EDOs por chutar-e-testar

Lembre que lá no início do curso eu mostrei – aqui: **2dT13** – que a gente podia resolver equações como esta

$$x + 2 = 5$$

por chutar-e-testar, e a gente podia escrever os chutes-e-testes usando o $[:=]$... cada “chute” virava uma substituição e cada “teste” virava verificar se o resultado da substituição era uma igualdade verdadeira. Por exemplo:

$$\begin{aligned}(x + 2 = 5)[x := 42] &= (42 + 2 = 5) = (=) \\ (x + 2 = 5)[x := 3] &= (3 + 2 = 5) = (=)\end{aligned}$$

Eu costumo usar o ‘=)’ pra indicar “deu certo / chegamos numa igualdade verdadeira” e o ‘=(’ pra indicar “deu errado / chegamos numa igualdade falsa”. Os smileys ‘=)’ e ‘=(’ não tem cara de notações “sérias”, e isso é de propósito: é pra lembrar vocês de procurarem nos livros como eles fazem isso – usando português e supondo que o leitor vai ser capaz de fazer muitas contas de cabeça.

Uma outra notação pra isso – e que também não costuma ser usada em livros básicos, e que eu usei no gabarito da P1, – é esta aqui:

$$(x + 2 = 5)[x := 42] = \underbrace{(42 + 2 = 5)}_{\mathbf{F}}$$

Agora seja (*) esta EDO (“equação diferencial ordinária”):

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \quad (*)$$

Podemos verificar que $f(x) = x^4$ não é uma solução pra (*), e que $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ é uma solução pra (*), calculando os resultado das duas substituições abaixo e vendo que uma dá uma igualdade verdadeira e a outra dá uma igualdade falsa:

$$\begin{aligned}\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \left[\begin{array}{l} f(x) := x^4 \\ f'(x) := 4x^3 \end{array} \right] &= ? \\ \left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \left[\begin{array}{l} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right] &= ?\end{aligned}$$

Campos de direções

StewPtCap9p11 (p.531) 9.2 Campos de Direções e Método de Euler

Os gráficos que usam tracinhos em certos pontos pra indicar coeficientes angulares naqueles pontos são gráficos de *campos de direções*.

Exercício 1.

Represente graficamente os campos de direções abaixo desenhando tracinhos com os coeficientes angulares adequados nos pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; ou seja, em cada item você vai ter que desenhar 25 tracinhos. Quando $\frac{dy}{dx} = \infty$ desenhe o tracinho na vertical, e quando $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ desenhe só um pontinho ao invés de um tracinho.

a) $\frac{dy}{dx} = -1$

b) $\frac{dy}{dx} = x$

c) $\frac{dy}{dx} = 2x$

d) $\frac{dy}{dx} = -x/y$

e) $\frac{dy}{dx} = 1/y$

f) $\frac{dy}{dx} = 2/y$

g) $\frac{dy}{dx} = -y/x$

Exercício 2.

Tente imaginar o resto de cada um dos 7 campos de direções que você desenhou no exercício 1. Para cada um dos campos tente imaginar as curvas que você obteria se ligasse todos os tracinhos, e tente interpretar essas curvas como o conjunto de soluções da EDO que representamos graficamente como o campo de direções. Neste exercício você vai tentar encontrar soluções para EDOs no olhômetro a partir dos campos de direções delas.

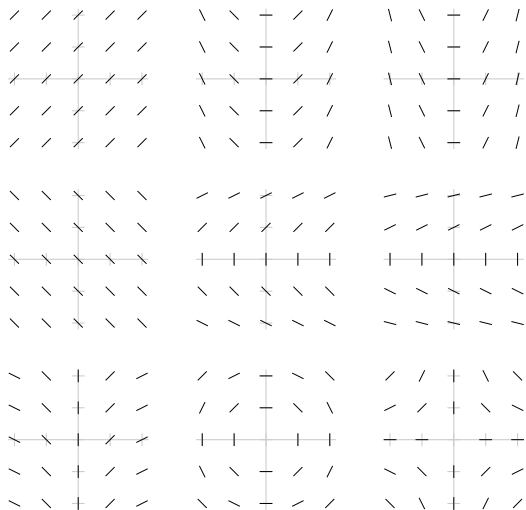
Para cada uma das funções abaixo diga quais das 7 EDOs do exercício 1 podem ter aquela função como solução.

a) $y = x^2$

b) $y = \sqrt{x}$

c) $y = 1/x$

d) $y = \sqrt{1-x^2}$



$$\begin{aligned}
 [\mathbf{M}] &= \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y) dy = g(x) dx \\ \int h(y) dy = \int g(x) dx \\ \parallel \\ H(y) + C_1 \qquad G(x) + C_2 \\ H(y) = G(x) + C_2 - C_1 \\ \qquad = G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right) & [\mathbf{M}][\mathbf{S}_1] &= \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \\ 2y dy = -2x dx \\ \int 2y dy = \int -2x dx \\ \parallel \\ y^2 + C_1 \qquad -x^2 + C_2 \\ y^2 = -x^2 + C_2 - C_1 \\ \qquad = -x^2 + C_3 \\ \sqrt{y^2} = \sqrt{-x^2 + C_3} \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \\
 [\mathbf{F}_3] &= \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right) & [\mathbf{F}_3][\mathbf{S}_1] &= \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \\ \sqrt{y^2} = \sqrt{-x^2 + C_3} \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \\
 [\mathbf{F}_2] &= \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ y = H^{-1}(G(x) + C_3) \end{array} \right) & [\mathbf{F}_2][\mathbf{S}_1] &= \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \\ y = \sqrt{-x^2 + C_3} \end{array} \right) \\
 [\mathbf{S}_1] &= \begin{bmatrix} g(x) := -2x \\ h(y) := 2y \\ G(x) := -x^2 \\ H(y) := y^2 \\ H^{-1}(u) := \sqrt{u} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Funções inversas por chutar e testar

Digamos que

$$\begin{aligned} y &= 3 + \sqrt{x + 4}, & \text{isto é,} \\ f(x) &= 3 + \sqrt{x + 4}, \end{aligned}$$

e sejam:

$$\begin{aligned} g(y) &= (y - 3)^2 + 4, \\ h(y) &= (y - 4)^2 + 3. \end{aligned}$$

Eu acho difícil ver só fazendo contas de cabeça se $f^{-1}(y) = g(y)$ ou se $f^{-1}(y) = h(y)$... então é bom a gente saber testar se as inversas que a gente obteve de cabeça estão certas. O teste é:

$$\begin{aligned} (f^{-1}(f(x)) = x) \begin{bmatrix} f(x) := 3 + \sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y) := (y-3)^2 + 4 \end{bmatrix} &= ? \\ (f^{-1}(f(x)) = x) \begin{bmatrix} f(x) := 3 + \sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y) := (y-4)^2 + 3 \end{bmatrix} &= ? \end{aligned}$$

Funções inversas por chutar e testar (2)

O modo tradicional de obter inversas é por uma série de passos, como:

$$\begin{aligned}f(x) &= 3 + \sqrt{x + 4} \\y &= 3 + \sqrt{x + 4} \\y - 3 &= \sqrt{x + 4} \\(y - 3)^2 &= x + 4 \\(y - 3)^2 - 4 &= x \\(y - 3)^2 - 4 &= f^{-1}(y)\end{aligned}$$

...mas é importante a gente saber testar se chegou na inversa certa.

Exercício 4.

Obtenha inversas para as seguintes funções:

$$f_1(x) = 2 + 3\sqrt{5x + 6}$$

$$f_2(x) = 2 + 3\sqrt[4]{5x + 6}$$

$$f_3(x) = 2 + 3(4x + 5)^6$$

$$f_4(x) = 2 + 3 \ln(4x + 5)$$

$$f_5(x) = 2 + 3e^{4x+5}$$

$$f_6(x) = \sqrt{2 + 3e^{4x+5}}$$

$$f_7(x) = \ln x$$

$$f_8(x) = \ln -x$$

$$f_9(x) = |x|$$

$$f_{10}(x) = \ln |x|$$

Porque é que $f_9^{-1}(x)$ e $f_{10}^{-1}(x)$ não existem?

Inversas: introdução

Dê uma olhada nestes links:

[ZillCullenInicioP13](#) (p.6) Soluções implícitas e explícitas

[ZillCullenInicioP16](#) (p.9) parâmetros, solução particular

[ZillCullenInicioP51](#) (p.44) 2.2: Variáveis separáveis

O método pra resolver EDOs com variáveis separáveis nos dá primeiro “soluções implícitas”, como $x^2 + y^2 = C$ or $x^2 + y^2 = 42$, e aí depois disso a gente tem que transformar essas soluções implícitas em “soluções explícitas”, em que y é uma função de x ... por exemplo:

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{C - x^2} \Rightarrow f_1(x) = \sqrt{C - x^2} \\x &= -\sqrt{C - x^2} \Rightarrow f_2(x) = -\sqrt{C - x^2} \\x &= \sqrt{42 - x^2} \Rightarrow f_3(x) = \sqrt{42 - x^2} \\x &= -\sqrt{42 - x^2} \Rightarrow f_4(x) = -\sqrt{42 - x^2}\end{aligned}$$

Praticamente todo mundo se enrola na hora de passar das “soluções implícitas” pras “soluções explícitas”, principalmente nos casos em que a gente tem “várias inversas”...

Eu vou usar uma terminologia que é meio errada, e vou dizer que $g_1(y) = \sqrt{y}$ e $g_2(y) = -\sqrt{y}$ são duas inversas diferentes para $f(x) = x^2$. Um bom lugar pra aprender a terminologia correta – que precisa que a gente especifique os domínios! – é o capítulo 7 do Leithold: [Leit7](#).

Inversas: um exemplo complicado

Digamos que queremos inverter esta função:

$$f(x) = (x + 3)^4 + 5$$

O método é este aqui, mas repare que ele tem uma bifurcação...

$$\begin{aligned} y &= (x + 3)^4 + 5 \\ y - 5 &= (x + 3)^4 \\ \sqrt[4]{y - 5} &= \sqrt[4]{(x + 3)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{y - 5} &= x + 3 & \sqrt[4]{y - 5} &= -(x + 3) \\ -3 + \sqrt[4]{y - 5} &= x & \sqrt[4]{y - 5} &= -x - 3 \\ & & \sqrt[4]{y - 5} &= -x - 3 \\ & & 3 + \sqrt[4]{y - 5} &= -x \\ & & -(3 + \sqrt[4]{y - 5}) &= x \end{aligned}$$

Se a gente segue o caminho da esquerda a gente obtém

$$f^{-1}(y) = -3 + \sqrt[4]{y - 5},$$

e se a gente segue o caminho da direita a gente obtém

$$f^{-1}(y) = -(3 + \sqrt[4]{y - 5}).$$

Sabemos que $\sqrt[4]{\alpha^4} = |\alpha|$, e portanto:

$$\begin{aligned} \alpha \geq 0 &\Rightarrow \sqrt[4]{\alpha^4} = \alpha \\ \alpha \leq 0 &\Rightarrow \sqrt[4]{\alpha^4} = -\alpha \\ x + 3 \geq 0 &\Rightarrow \sqrt[4]{(x + 3)^4} = x + 3 \\ x + 3 \leq 0 &\Rightarrow \sqrt[4]{(x + 3)^4} = -(x + 3) \end{aligned}$$

Ou seja, nas contas à esquerda se $x + 3 \geq 0$ nós temos que seguir o caminho da esquerda, e se $x + 3 \leq 0$ nós temos que seguir o caminho da direita.

O melhor modo da gente entender essas duas inversas é esse aqui. Considere estes três conjuntos de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x + 3)^4 + 5 \} \\ A_2 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x + 3)^4 + 5, x + 3 \geq 0 \} \\ A_3 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x + 3)^4 + 5, x + 3 \leq 0 \} \end{aligned}$$

Os conjuntos A_2 e A_3 são gráficos de funções inversíveis e A_1 é o gráfico de uma função não-inversível. Os domínios dessas funções são relativamente fáceis de calcular – eles são \mathbb{R} , $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 \geq 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 \leq 0\}$ respectivamente – mas as imagens são um pouco mais complicadas...

...mas lembre que em C2 a gente costuma fazer as contas em duas etapas: na primeira etapa a gente finge que as hipóteses vão ser todas obedecidas e a gente nem escreve quais são essas hipóteses, e só na segunda etapa a gente escreve explicitamente quais são essas hipóteses e a gente vê se tudo realmente dá certo quando elas são obedecidas. *Em neste curso a gente raramente vai ter tempo pra segunda etapa.*

Quattro inversas

```
(%i1) [xmin,ymin, xmax,ymax] : [-2,-2, 2,2]$
(%i2) colors : [gray, blue, forest_green, orange, red, dark_violet]$
(%i3) f(x) := (x^2-1)^2;
(%o3)
```

$$f(x) := (x^2 - 1)^2$$

```
(%i4) sols : solve(y=f(x), x);
(%o4)
```

$$\left[x = -\sqrt{\sqrt{y} + 1}, x = \sqrt{\sqrt{y} + 1}, x = -\sqrt{1 - \sqrt{y}}, x = \sqrt{1 - \sqrt{y}} \right]$$

```
(%i5) define(g1(y), rhs(sols[1]));
(%o5)
```

$$g1(y) := -\sqrt{\sqrt{y} + 1}$$

```
(%i6) define(g2(y), rhs(sols[3]));
(%o6)
```

$$g2(y) := -\sqrt{1 - \sqrt{y}}$$

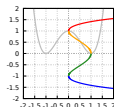
```
(%i7) define(g3(y), rhs(sols[4]));
(%o7)
```

$$g3(y) := \sqrt{1 - \sqrt{y}}$$

```
(%i8) define(g4(y), rhs(sols[2]));
(%o8)
```

$$g4(y) := \sqrt{\sqrt{y} + 1}$$

```
(%i9) myqdrawp(xyrange(),
  ex1(f(x), x, -4, 4, lc(colors[1])),
  ex1(g1(y), y, 0, 4, lc(colors[2])),
  ex1(g2(y), y, 0, 4, lc(colors[3])),
  ex1(g3(y), y, 0, 4, lc(colors[4])),
  ex1(g4(y), y, 0, 4, lc(colors[5])));
(%o9)
```



```
(%i10) f(g1(y));
(%o10)
```

$$y$$

```
(%i11) f(g2(y));
(%o11)
```

$$y$$

```
(%i12) f(g3(y));
(%o12)
```

$$y$$

```
(%i13) f(g4(y));
(%o13)
```

$$y$$

```
(%i14) g1(f(x));
(%o14)
```

$$-\sqrt{|x^2 - 1| + 1}$$

```
(%i15) g2(f(x));
(%o15)
```

$$-\sqrt{1 - |x^2 - 1|}$$

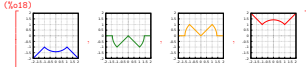
```
(%i16) g3(f(x));
(%o16)
```

$$\sqrt{1 - |x^2 - 1|}$$

```
(%i17) g4(f(x));
(%o17)
```

$$\sqrt{|x^2 - 1| + 1}$$

```
(%i18) [myqdrawp(xyrange(), myex1(g1(f(x)), lc(colors[2])),
  myqdrawp(xyrange(), myex1(g2(f(x)), lc(colors[3])),
  myqdrawp(xyrange(), myex1(g3(f(x)), lc(colors[4])),
  myqdrawp(xyrange(), myex1(g4(f(x)), lc(colors[5])));
(%o18)
```



```
(%i19)
```

assume

```

(%i1) f(x) := (x^2-1)^2;
(%o1)
      f(x) := (x^2 - 1)^2

(%i2) e1 : y = (x^2-1)^2;
(%o2)
      y = (x^2 - 1)^2

(%i3) e2 : sqrt(e1);
(%o3)
      sqrt(y) = |x^2 - 1|

(%i4) assume(x^2-1 >= 0);
(%o4)
      [x^2 >= 1]

(%i5) e2 : sqrt(e1);
(%o5)
      sqrt(y) = x^2 - 1

(%i6) e3 : e2 + 1;
(%o6)
      sqrt(y) + 1 = x^2

(%i7) e4 : sqrt(e3);
(%o7)
      sqrt(sqrt(y) + 1) = |x|

(%i8) assume(x <= 0);
(%o8)
      [x <= 0]

(%i9) e4 : sqrt(e3);
(%o9)
      sqrt(sqrt(y) + 1) = -x

(%i10) e5 : - e4;
(%o10)
      -sqrt(sqrt(y) + 1) = x

(%i11) e6 : rhs(e5) = lhs(e5);
(%o11)
      x = -sqrt(sqrt(y) + 1)

(%i12) define(g1(y), rhs(e6));
(%o12)
      g1(y) := -sqrt(sqrt(y) + 1)

(%i13) g1(u);
(%o13)
      -sqrt(sqrt(u) + 1)

(%i14) simp : false;
(%o14)
      false

(%i15) g1(f(x));
(%o15)
      -1 (1 + ((x^2 - 1)^2)^(1/2))^(1/2)

(%i16) simp : true;
(%o16)
      true

(%i17) g1(f(x));
(%o17)
      x

(%i18)

```

Cálculo 2 - 2025.1

Aulas 43 e 44: EDOLCCs

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

StewPtCap17p6 (p.1020) Equações diferenciais de 2ª ordem

StewPtCap17p20 (p.1034) Caso 3: subamortecimento

StewPtApendiceHp5 (p.A51) Apêndice H: Números complexos

Leit3p22 (p.158) $D_x[c \cdot f(x)] = c \cdot D_x f(x)$

Leit3p22 (p.158) $D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$

BoyceDip3p5 (p.105) Capítulo 3: Equações lineares de 2ª ordem

BoyceDip3p11 (p.111) Seção 3.2: o operador diferencial L

BoyceDip3p13 (p.113) Teorema 3.2.2: o princípio da superposição

BoyceDip3p21 (p.121) 3.3. Raízes complexas da equação característica

BoyceDip3p23 (p.123) Figura 3.3.1

BoyceDipEng3p4 (p.103) Chapter 3: Second-order linear ODEs

BoyceDipEng3p11 (p.110) Section 3.2: the differential operator L

BoyceDipEng3p13 (p.112) Theorem 3.2.2: principle of superposition

BoyceDipEng3p21 (p.120) 3.3 Complex Roots of the Characteristic Equation

BoyceDipEng3p24 (p.123) Figure 3.3.1

ZillCullenCap4p33 (p.173) 4.3. Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

ZillCullenCap4p60 (p.196) Exemplo 1: ...pode ser fatorado... $(D + 3)(D + 2)$

ZillCullenCap4p61 (p.197) Exemplo 3

ZillCullenCap4p64 (p.200) Exercícios

ZillCullenEngCap4p23 (p.133) 4.3 Homogeneous Linear Equations with Constant Coefficients

ZillCullenEngCap4p40 (p.150) Factoring operators ... $(D + 3)(D + 2)$

Provas:

2jT273 2042.2, P2

2iT227 2041.2, P2

2hT279 2023.2, P2

2gT135 2023.1, P2

2fT124 2022.2, P2

Quadros:

2jQ103 2024.2

2iQ74 2024.1

2hQ61 2023.2

2gQ46 2023.1

2gQ50 2023.1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

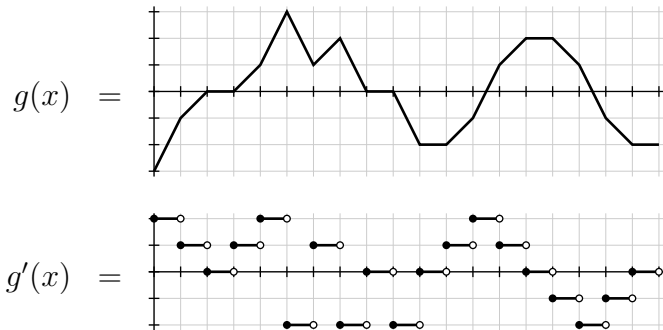
$$(a \ b) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (ac + bd)$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} (a \ b) = \begin{pmatrix} ac & bc \\ ad & bd \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad S - \mathbf{1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \end{pmatrix} \quad Sf = \begin{pmatrix} f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (S - \mathbf{1})f = \begin{pmatrix} f(2) - f(1) \\ f(3) - f(2) \\ f(4) - f(3) \\ f(5) - f(4) \\ 0 - f(5) \end{pmatrix}$$

Obs: não usei isso aqui –
 não deu tempo de L^AT_EXar tudo...



```

(%i1) D (f) := diff(f,x);
(%o1)          D (f) := diff (f,x)

(%i2) DD(f) := diff(f,x,2);
(%o2)          DD (f) := diff (f,x,2)

(%i3) L (f) := D(D(f)) + D(f) - 6*f;
(%o3)          L (f) := D (D (f)) + D (f) + (-6) f

(%i1) f : exp( 3*x);
(%o1)          e3x

(%i2) f : exp(-3*x);
(%o2)          e-3x

(%i3) f : exp( 2*x);
(%o3)          e2x

(%i4) fp : diff(f,x);
(%o4)          2 e2x

(%i5) fpp : diff(f,x,2);
(%o5)          4 e2x

(%i6) Lf : fpp + fp - 6*f;
(%o6)          0

(%i7)

(%i4) D(x^2);
(%o4)          2 x

(%i5) D(D(x^2));
(%o5)          2

(%i6) L(x^2);
(%o6)          -(6 x2) + 2 x + 2

(%i7) L(exp( 3*x));
(%o7)          6 e3x

(%i8) L(exp(-3*x));
(%o8)          0

(%i9) L(exp( 2*x));
(%o9)          0

(%i10)

```

Soluções não-básicas

$$\begin{aligned} M(\alpha v + \beta w) &= M(\alpha v) + M(\beta w) \\ &= \alpha(Mv) + \beta(Mw) \end{aligned}$$

$$\underbrace{(D-2)(D+3)}_M \left(\underbrace{42}_\alpha \underbrace{e^{2x}}_v + \underbrace{99}_\beta \underbrace{e^{-3x}}_w \right)$$

$$\begin{aligned} &(D-2)(D+3)(42e^{2x} + 99e^{-3x}) \\ &= 42(D-2)(D+3)e^{2x} + 99(D-2)(D+3)e^{-3x} \\ &= 42 \underbrace{(D+3)(D-2)}_{\underbrace{De^{2x}-2e^{2x}}_{\underbrace{2e^{2x}-2e^{2x}}_0}} e^{2x} + 99 \underbrace{(D-2)(D+3)}_{\underbrace{De^{-3x}+3e^{-3x}}_{\underbrace{-3e^{-3x}+3e^{-3x}}_0}} e^{-3x} \\ &\quad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \quad \quad \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \\ &\quad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \quad \quad \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \end{aligned}$$

Raízes por chutar-e-testar

```
(%i1) poly0 : (x-2)*(x+5);
(%o1)
      (x - 2) (x + 5)

(%i2) poly1 : expand(poly0);
(%o2)
      x^2 + 3x - 10

(%i3) b : ratcoef(poly1, x, 1); /* coeficiente do x^-1 */
(%o3)
      3

(%i4) c : ratcoef(poly1, x, 0); /* coeficiente do x^0 */
(%o4)
      -10

(%i5)
      divisors(c);
(%o5)
      {1, 2, 5, 10}

(%i6) divs0 : listify(divisors(c));
(%o6)
      [1, 2, 5, 10]

(%i7)
      reverse(divs0);
(%o7)
      [10, 5, 2, 1]

(%i8)
      -reverse(divs0);
(%o8)
      [-10, -5, -2, -1]

(%i9) divs1 : append(-reverse(divs0), divs0);
(%o9)
      [-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10]

(%i10) line(d1) := block([d2:c/d1], [d1,d2,d1*d2,d1+d2])$
(%i11) line(2);
(%o11)
      [2, -5, -10, -3]

(%i12) lines0 : makelist(line(d1), d1, divs1)$
(%i13) lines1 : append([[ "d1", "d2", "d1*d2", "d1+d2" ]], lines0)$
(%i14) apply('matrix, lines1);
(%o14)
      ( d1  d2  d1*d2  d1+d2 )
      (-10  1   -10   -9 )
      (-5  2   -10   -3 )
      (-2  5   -10    3 )
      (-1 10   -10    9 )
      ( 1 -10  -10   -9 )
      ( 2 -5   -10   -3 )
      ( 5 -2   -10    3 )
      (10 -1   -10    9 )

(%i15)
```

Cálculo 2 - 2025.1

Aula 45: EDOs lineares

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

[StewPtCap9p37](#) (p.557) 9.5 Equações Lineares

[StewPtCap9p41](#) (p.561) 9.5 Exercícios

[BoyceDip2p5](#) (p.23) 2.1 Equações lineares; método dos fatores integrantes

[BoyceDip2p11](#) (p.29) Problemas

[BoyceDipEng2p4](#) (p.24) 2.1 Linear Differential Equations; Method of Integrating Factors

[BoyceDipEng2p11](#) (p.31) Problems

[ZillCullenCap2p33](#) (p.68) 2.5 Equações lineares

[ZillCullenCap2p42](#) (p.77) 2.5 Exercícios

[ZillCullenEngCap2p26](#) (p.53) 2.3 Linear equations

[ZillCullenEngCap2p33](#) (p.60) Exercises 2.3

[DiffyQsP40](#) 1.4 Linear equations and the integrating factor

[DiffyQsP43](#) 1.4.1 Exercises

Provas:

[2jT273](#) 2024.2, P2

[2iT227](#) 2024.1, P2

[2hT279](#) 2023.2, P2

Quadros:

[2kQ108](#) 2025.1

[2jQ93](#) 2024.2

[2iQ86](#) 2024.1

[2hQ77](#) 2023.2

O método

Aqui a gente tem a explicação do Stewart de como resolver EDOs lineares com todas as partes em português deletadas:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad [1]$$

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' \quad [3]$$

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x) \quad [4]$$

$$I(x)y = \int I(x)Q(x) dx + C$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int I(x)Q(x) dx + C \right] \quad [4]$$

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$

$$I(x)P(x) = I'(x)$$

$$\int \frac{1}{I} dI = \int P(x) dx$$

$$I(x) = Ae^{\int P(x) dx}$$

$$A = \pm e^C$$

$$A = 1$$

$$I(x) = e^{\int P(x) dx} \quad [5]$$

Repare que sem as partes em português ela vira algo que só gênios conseguem decifrar – e um dos nossos objetivos neste curso é aprender a organizar as contas de modo que elas fiquem fáceis de entender, de justificar e de verificar.

Se a gente deixa só as linhas [1], [4] e [5] e põe elas nesta ordem,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad [1]$$

$$I(x) = e^{\int P(x) dx} \quad [5]$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int I(x)Q(x) dx + C \right] \quad [4]$$

o método fica bem claro: pra resolver uma EDO da forma [1] a gente define um fator integrante $I(x)$ usando a definição da linha [5], e aí as nossas soluções vão ser as funções $y(x)$ da linha [4], onde C é uma constante qualquer.

Agora se a gente precisar resolver EDOs lineares basta aplicar um método que cabe em três linhas. Eu prefiro escrever ele usando outras letras,

$$y(x) \Rightarrow f(x)$$

$$P(x) \Rightarrow g(x)$$

$$\int P(x) dx \Rightarrow G(x)$$

$$Q(x) \Rightarrow h(x)$$

$$I(x) \Rightarrow m(x)$$

o omitindo os ' (x) ' na maioria dos lugares. A tradução é isto,

$$f' + gf = h$$

$$m = e^G$$

$$f = \frac{1}{m} \left(\int mh dx + C \right)$$

mas eu vou preferir escrever ela deste jeito:

$$[\text{EL}_3] = \begin{pmatrix} f' + fg = h \\ G' = g \\ f = e^{-G} \left(\int e^G h dx + C \right) \end{pmatrix}$$

Exercício 0

O Stewart começa por este exemplo, que ele chama de [2]:

StewPtCap9p37 (p.557) $y' + \frac{1}{x}y = 2$

Seja $[S_1] = \begin{bmatrix} g := 1/x \\ h := 2 \\ G := \ln x \end{bmatrix}$.

- Use $[\text{EL}_3][S_1]$ pra obter a solução geral da EDO [2].
- Chame esta solução geral de $f_1(x)$ – use um “seja”! – e teste-a.
- Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(2, 5)$.
- Chame esta solução particular de $f_2(x)$ – use um “seja”! – e teste-a.

O que realmente importa

Exercício importantíssimo!!!

Entenda isto aqui e reescreva num formato BEM mais fácil de entender:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad [1]$$

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' \quad [3]$$

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x)$$

$$I(x)y = \int I(x)Q(x) dx + C$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int I(x)Q(x) dx + C \right] \quad [4]$$

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$

$$I(x)P(x) = I'(x)$$

$$\int \frac{1}{I} dI = \int P(x) dx$$

$$I(x) = Ae^{\int P(x) dx}$$

$$A = \pm e^C$$

$$A = 1$$

$$I(x) = e^{\int P(x) dx} \quad [5]$$

(%i1) e1 : 'diff(y,x) + 1/x * y = 2;

(%o1)

$$\frac{d}{dx}y + \frac{y}{x} = 2$$

(%i2) e2 : ode2(e1,y,x);

(%o2)

$$y = \frac{x^2 + \%c}{x}$$

(%i3) solve(e2, \%c);

(%o3)

$$[\%c = xy - x^2]$$

(%i4) e3 : solve(e2, \%c)[1];

(%o4)

$$\%c = xy - x^2$$

(%i5) e4 : subst([x=2,y=5], e2);

(%o5)

$$5 = \frac{\%c + 4}{2}$$

(%i6) solve(e4, \%c);

(%o6)

$$[\%c = 6]$$

(%i7) e4 : solve(e4, \%c)[1];

(%o7)

$$\%c = 6$$

(%i8)

subst(e4,e2);

(%o8)

$$y = \frac{x^2 + 6}{x}$$

(%i9) define(f2(x), rhs(subst(e4,e2)));

(%o9)

$$f2(x) := \frac{x^2 + 6}{x}$$

(%i10) e5 : subst([y=f2(x)], e1);

(%o10)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + 6}{x} \right) + \frac{x^2 + 6}{x^2} = 2$$

(%i11) ev(e5, diff);

(%o11)

$$2 = 2$$

(%i12)

Cálculo 2 - 2025.1

Aulas 46 e 47: EDOs exatas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

[StewPtCap14p25](#) (p.811) 14.3 Derivadas Parciais

[StewPtCap14p45](#) (p.831) 14.5 A Regra da Cadeia

[StewPtCap14p47](#) (p.833) A Regra da Cadeia (versão geral)

[BoyceDip2p54](#) (p.72) 2.6 Equações Exatas e Fatores Integrantes

[BoyceDip2p55](#) (p.73) Começamos integrando

[BoyceDip2p56](#) (p.74) Exemplo 2 ... Integrando

[BoyceDip2p58](#) (p.76) Problemas ← façam os exercícios 1 a 4

[BoyceDipEng2p50](#) (p.70) 2.6 Exact Differential Equations and Integrating Factors

[BoyceDipEng2p55](#) (p.75) Problems

[ZillCullenCap2p25](#) (p.60) 2.4 Equações exatas

[ZillCullenCap2p32](#) (p.67) Exercícios

[ZillCullenEngCap2p35](#) (p.62) 2.4 Exact equations

[ZillCullenEngCap2p41](#) (p.68) Exercises 2.4

[DiffyQsP63](#) 1.8 Exact Equations

[DiffyQsP70](#) 1.8.3 Exercises

Provas:

[2jT273](#) (2024.2) P2

[2iT227](#) (2024.1) P2

[2yT14](#) (2019.2) P2

Quadros:

[2jQ97](#) (2024.2)

[2iQ93](#) (2024.1)

[2iQ93](#) (2024.1)

[2hQ73](#) (2023.2)

[2yQ106](#) (2019.2)

Método e exemplo

$$[E_5] = \begin{pmatrix} dz = z_x dx + z_y dy = 0 \\ \frac{d}{dx} z = z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{pmatrix}$$

$$[E_3] = \begin{pmatrix} z_x dx + z_y dy = 0 \\ z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{pmatrix}$$

$$[E_2] = \begin{pmatrix} z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{pmatrix}$$

$$[S_1] = \begin{bmatrix} z := (x^2 y^3) \\ z_x := (2xy^3) \\ z_y := (3x^2 y^2) \end{bmatrix}$$

$$[S_2] = \begin{bmatrix} z := (x^2 + y^2) \\ z_x := (2x) \\ z_y := (2y) \end{bmatrix}$$

$$[E_5][S_1] = \begin{pmatrix} d(x^2 y^3) = (2xy^3)dx + (3x^2 y^2)dy = 0 \\ \frac{d}{dx}(x^2 y^3) = (2xy^3) + (3x^2 y^2) \frac{dy}{dx} = 0 \\ (x^2 y^3) = C \end{pmatrix}$$

$$[E_3][S_1] = \begin{pmatrix} (2xy^3)dx + (3x^2 y^2)dy = 0 \\ (2xy^3) + (3x^2 y^2) \frac{dy}{dx} = 0 \\ (x^2 y^3) = C \end{pmatrix}$$

$$[E_2][S_1] = \begin{pmatrix} (2xy^3) + (3x^2 y^2) \frac{dy}{dx} = 0 \\ (x^2 y^3) = C \end{pmatrix}$$

$$[E_5][S_2] = \begin{pmatrix} d(x^2 + y^2) = (2x)dx + (2y)dy = 0 \\ \frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = (2x) + (2y) \frac{dy}{dx} = 0 \\ (x^2 + y^2) = C \end{pmatrix}$$

$$[E_3][S_2] = \begin{pmatrix} (2x)dx + (2y)dy = 0 \\ (2x) + (2y) \frac{dy}{dx} = 0 \\ (x^2 + y^2) = C \end{pmatrix}$$

$$[E_2][S_2] = \begin{pmatrix} (2x) + (2y) \frac{dy}{dx} = 0 \\ (x^2 + y^2) = C \end{pmatrix}$$

Uma questão da P2 de 2019.2

4) Sejam (***) e (****) estas EDOs:

$$2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy = 0 \quad (***)$$

$$2x^2y^3 dx + 3x^3y^2 dy = 0 \quad (****)$$

- a) **(0.5 pts)** Mostre que (***) é exata.
 b) **(0.5 pts)** Encontre a solução geral de (***)
 c) **(1.0 pts)** Teste a sua solução geral da (***)
 d) **(0.5 pts)** Mostre que a solução geral da EDO (***) também é solução da (****).
 e) **(0.5 pts)** Mostre que (****) não é exata.
 f) **(0.5 pts)** Mostre que o fator integrante obtido por

$$p(x) = (M_y - N_x)/N,$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

transforma (****) em (***)

Versão original:

<http://angg.twu.net/LATEX/2019-2-C2-P2.pdf>

```
(%i1) load("2025-1-exact.mac")$
```

```
(%i2) ee : Exact_from0()$
```

```
(%i3) ee@@E5();
```

```
(%o3)
```

$$\begin{pmatrix} dz & = & z_x dx + z_y dy & = & 0 \\ \frac{d}{dx} z & = & z_x + z_y \left(\frac{d}{dx} y\right) & = & 0 \\ z & = & C \end{pmatrix}$$

```
(%i4) ee : Exact_from1(x^2+y^2)$
```

```
(%i5) ee@@E5();
```

```
(%o5)
```

$$\begin{pmatrix} d(y^2 + x^2) & = & 2x dx + 2y dy & = & 0 \\ \frac{d}{dx}(y^2 + x^2) & = & 2x + 2y \left(\frac{d}{dx} y\right) & = & 0 \\ y^2 + x^2 & = & C \end{pmatrix}$$

```
(%i6) ee : Exact_from2(2*x, 2*y)$
```

```
(%i7) ee@@E5();
```

```
(%o7)
```

$$\begin{pmatrix} dz & = & 2x dx + 2y dy & = & 0 \\ \frac{d}{dx} z & = & 2x + 2y \left(\frac{d}{dx} y\right) & = & 0 \\ z & = & C \end{pmatrix}$$

```
(%i8) ee@@ode();
```

```
(%o8)
```

$$2y \left(\frac{d}{dx} y\right) + 2x = 0$$

```
(%i9) ee@@odesolve();
```

```
(%o9)
```

$$-\left(\frac{y^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + \%c$$

```
(%i10) sols : ee@@odesols();
```

```
(%o10)
```

$$\left[y = -\sqrt{-x^2 - 2\%c}, y = \sqrt{-x^2 - 2\%c} \right]$$

```
(%i11) sol : sols[1];
```

```
(%o11)
```

$$y = -\sqrt{-x^2 - 2\%c}$$

```
(%i12) test1 : ee@@odesubst(sol);
```

```
(%o12)
```

$$2x - 2\sqrt{-x^2 - 2\%c} \left(\frac{d}{dx} \left(-\sqrt{-x^2 - 2\%c}\right)\right) = 0$$

```
(%i13) test2 : ev(test1, diff);
```

```
(%o13)
```

$$0 = 0$$

```
(%i1) load("2025-1-exact.mac")$
```

```
(%i2) ee : Exact_from1(x^2*y^3);
```

```
(%o2)
```

Exact ($x^2 y^3, 2 x y^3, 3 x^2 y^2$)

```
(%i3) ee@@caixinhas_3();
```

```
(%o3)
```

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

```
(%i4) ee@@caixinhas_2();
```

```
(%o4)
```

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

```
(%i5) ee : Exact_from1(x^2+y^2);
```

```
(%o5)
```

Exact ($y^2 + x^2, 2 x, 2 y$)

```
(%i6) ee@@caixinhas_3();
```

```
(%o6)
```

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

```
(%i7) ee@@caixinhas_2();
```

```
(%o7)
```

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

(%i1) [maxxp,maxyp] : [2,2];

(%o1)

[2,2]

(%i2) "1"\$ ee : Exact_from3("?", 2*x+3, 2*y-2);

(%o3)

Exact (? , 2x + 3, 2y - 2)

(%i4) ee@@caixinhas_2();

(%o4)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i5) ee@@effsc();

(%o5)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? & 0 & 0 \\ ? & 0 & 0 \\ ? & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

(%i6) "2"\$ ee : Exact_from3("?", 2*x+4*y, 2*x-2*y);

(%o7)

Exact (? , 4y + 2x, 2x - 2y)

(%i8) ee@@caixinhas_2();

(%o8)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i9) ee@@effsc();

(%o9)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? & 0 & 0 \\ ? & 4 & 0 \\ ? & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

(%i10) [maxxp,maxyp] : [3,3];

(%o10)

[3,3]

(%i11) "3"\$ ee : Exact_from3("?", 3*x^2 - 2*x*y + 2, 6*y^2 - x^2 + 3);

(%o12)

Exact (? , -(2xy) + 3x^2 + 2, 6y^2 - x^2 + 3)

(%i13) ee@@caixinhas_2();

(%o13)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i14) ee@@effsc();

(%o14)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? & 0 & 0 & 0 \\ ? & 0 & 0 & 0 \\ ? & 0 & -1 & 0 \\ ? & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$