EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Volume 1

Dennis G. Zill
Michael R. Cullen

Loyola Marymount University

Tradução
Antonio Zumpano, Ph. D.
Professor de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais

Revisão Técnica
Antonio Pertence Jr.
Professor Titular de Matemática da Faculdade de Sabará (MG)
Pós-graduado em Educação Matemática pela UNI-BH
Membro Efetivo da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)

PEARSON
Makron Books

São Paulo

Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha
Guatemala México Peru Porto Rico Venezuela

Sumário

Volume 2

PREFÁCIO

Esta terceira edição tenta alcançar um equilíbrio entre os conceitos e a apresentação do material que interessaram aos leitores das edições anteriores e as mudanças significativas feitas para reforçar e modernizar alguns aspectos do texto. Achamos que esse equilíbrio foi alcançado, tornando o texto interessante para um público mais amplo. Muitas mudanças e acréscimos são resultados de sugestões e comentários de leitores e revisores. Além disso, essas mudanças foram feitas visando ao público fundamental — o estudante que utilizará o livro. Por essa razão, as soluções de cada exemplo foram cuidadosamente lidas, a fim de torná-las mais claras. Onde achamos que poderia ser útil, acrescentamos, também, mais explicações ou destacamos pontos cruciais para a seqüência da solução.

Como antes, este texto pretende satisfazer as necessidades de um instrutor que almeja mais do que simplesmente uma introdução ao assunto. Além do material básico de equações diferenciais ordinárias, o livro apresenta um capítulo sobre equações não-lineares e estabilidade e alguns capítulos sobre equações diferenciais parciais e problemas de valores de contorno. É recomendado para cursos de um ou dois semestres.

NOVOS ASPECTOS

Alguns aspectos novos, que esperamos que os estudantes achem interessantes e instigantes, foram acrescentados ao texto. Ensaios, escritos por matemáticos proeminentes em sua especialidade, foram incluídos no final dos Capítulos 3, 4 e 5 do volume 1, e 9 e 12 do volume 2. Cada ensaio reflete os pensamentos, criatividade e opiniões de seu autor e tem por finalidade ilustrar o material exposto no capítulo precedente. Esperamos que a inclusão desses ensaios desperte o interesse dos estudantes, encorajando-os a ler matemática e ajudando-os a se conscientizarem de que equações diferenciais não são simplesmente uma mera coleção seca de métodos, fatos e fórmulas, mas um assunto vibrante com os quais as pessoas podem trabalhar.

MUDANÇAS NESTA EDIÇÃO

Volume 1

- A Seção 1.2 trata agora somente do conceito de uma equação diferencial como um modelo matemático.
- O material sobre a equação diferencial de uma família de curvas foi suprimido. Uma breve discussão desse conceito aparece agora na Seção 3.1 (Trajetórias Ortogonais).
- O método dos coeficientes indeterminados é um dos tópicos mais controvertidos em um curso de equações diferenciais. Nas três últimas edições, esse tópico foi abordado usando-se um operador diferencial como uma ajuda para determinar a forma correta de uma solução em particular. Na preparação desta edição, muitos revisores apontaram que a abordagem por anuladores era muito sofisticada para seus alunos e solicitaram uma abordagem baseada em regras mais simples. Outros revisores, porém, estavam satisfeitos e não desejavam mudança alguma. Para atender a cada uma dessas preferências, ambas as abordagens foram apresentadas nesta edição. O instrutor pode agora escolher entre coeficientes indeterminados com base no princípio da superposição para equações diferenciais lineares não-homogêneas (Seção 4.4) ou com base no conceito de anuladores diferenciais (Seção 4.6). Além disso, nesta edição, a noção de um operador diferencial é agora apresentada em uma seção separada (Seção 4.5). Portanto, observamos que o importante e útil conceito de operador diferencial deverá ser apresentado de alguma maneira.
- A revisão de série de potências na Seção 6.2 foi bastante ampliada. Uma discussão sobre a aritmética de séries de potências (adição, multiplicação e divisão de séries) foi também adicionada.
- Uma breve discussão sobre determinação dos coeficientes em uma decomposição de frações parciais e uma nota histórica sobre Oliver Heaviside foram acrescentadas na Seção 7.2.
- A discussão sobre as propriedades operacionais da transformada de Laplace foi agora dividida em duas seções: Seção 7.3, Teoremas de Translação e Derivadas de Transformadas; e Seção 7.4, Transformadas de Derivadas, Integrais e Funções Periódicas. Essa separação permite maior clareza e um tratamento mais amplo dos tópicos.

Volume 2

- Eliminação Gaussiana, além de eliminação de Gauss-Jordan, é agora discutida na Seção 8.4. A notação para indicar operação nas linhas de uma matriz aumentada foi aprimorada.
- O Capítulo 9, "Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Ordinárias", sofreu uma ampliação significativa e foi parcialmente reescrito. O método de Adams-Bashforth/Adams-Moulton foi adicionado à Seção 9.5. Seção 9.6 , Erros e Estabilidade, e Seção 9.8, Problemas de Valores de Contorno de Segunda Ordem, são novidades desta edição.

- Os programas BASIC, anteriormente no Capítulo 9, foram suprimidos.
- O Capítulo 10, "Sistemas Autônomos no Plano e Estabilidade", é novidade desta edição. Esses tópicos foram adicionados em resposta a reações favoráveis de leitores e revisores da edição anterior.
- O material dos Capítulos 10, 11 e 12 foi ampliado e reorganizado como Capítulos 11, 12, 13 e 14 nesta edição.
- Capítulo 15, "Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais", é novidade.
- Novos problemas, aplicações, ilustrações, observações e notas históricas foram acrescentadas ao longo do texto.

Dennis G. Zill
Michael R. Cullen
Los Angeles

Capítulo 1

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Conceitos Importantes

Equações diferenciais ordinárias
Equações diferenciais parciais
Ordem de uma equação
Equação linear
Equação não-linear
Soluções
Solução trivial
Soluções explícitas e implícitas
Família de soluções a n- parâmetros
Solução particular
Solução singular
Solução geral
Modelo matemático

As palavras *diferencial* e *equações* obviamente sugerem a resolução de algum tipo de equação envolvendo derivadas. Na verdade, a frase anterior contém a história completa sobre o curso que você está prestes a iniciar. Mas antes de começar a resolver qualquer coisa, você tem de conhecer algumas definições e terminologias básicas sobre o assunto. Este é o conteúdo da Seção 1.1. A Seção 1.2. aborda a motivação. Por que você, um futuro cientista ou engenheiro, precisa estudar este assunto? A resposta é simples: equações diferenciais são o suporte matemático para muitas áreas da ciência e da engenharia. Por isso, na Seção 1.2, examinamos, ainda que brevemente, como as equações diferenciais surgem a partir da tentativa de formular, ou descrever, certos sistemas físicos em termos matemáticos.

1.1 TERMINOLOGIA E DEFINIÇÕES BÁSICAS

No curso de cálculo, você aprendeu que, dada uma função $y = f(x)$, a derivada

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

é também, ela mesma, uma função de x e é calculada por regras apropriadas. Por exemplo, se $y = e^{x^2}$, então

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = 2xy. \tag{1}$$

O problema com o qual nos deparamos neste curso não é: dada uma função $y = f(x)$, encontre sua derivada. Nosso problema é: dada uma equação como $dy/dx = 2xy$, encontre, de algum modo, uma função $y = f(x)$ que satisfaça a equação. Em outras palavras, nós queremos resolver equações diferenciais.

DEFINIÇÃO 1.1 Equação diferencial

Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de **equação diferencial (ED)**.

Equações diferenciais são classificadas de acordo com o **tipo**, a **ordem** e a **linearidade**.

Classificação pelo Tipo

Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável dependente, ela é chamada de **equação diferencial ordinária** (EDO). Por exemplo,

$$\frac{dy}{dt} - 5y = 1$$

$$(y - x)\,dx + 4x\,dy = 0$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

são equações diferenciais ordinárias. Uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial parcial** (EDP). Por exemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$$

são equações diferenciais parciais.

Classificação pela Ordem

A ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial é, por definição, a **ordem da equação**. Por exemplo,

$$\overset{\boxed{\text{segunda ordem}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} + 5\overset{\boxed{\text{primeira ordem}}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} - 4y = e^x$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (ou de ordem dois). Como a equação diferencial $(y - x)\,dx + 4x\,dy = 0$ pode ser escrita na forma

$$4x\frac{dy}{dx} + y = x$$

dividindo-se pela diferencial dx, trata-se então de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. A equação

$$a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

é uma equação diferencial parcial de quarta ordem.

Embora as equações diferenciais parciais sejam muito importantes, seu estudo demanda um bom conhecimento da teoria de equações diferenciais ordinárias. Portanto, na discussão que se segue, limitaremos nossa atenção às equações diferenciais ordinárias.

Uma equação diferencial ordinária geral de n-ésima ordem é freqüentemente representada pelo simbolismo

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \qquad \textbf{(2)}$$

O que vem a seguir é um caso especial de (2).

Classificação como Linear ou Não-Linear

Uma equação diferencial é chamada de **linear** quando pode ser escrita na forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Observe que as equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

(i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.

(ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

Uma equação que não é linear é chamada de **não-linear**.

As equações

$$x\,dy + y\,dx = 0$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

e

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

são equações diferenciais ordinárias de primeira, segunda e terceira ordens, respectivamente. Por outro lado,

$$\overbrace{y}^{\text{coeficiente depende de } y}y'' - 2y' = x \quad \text{e} \quad \frac{d^3y}{dx^3} + \overbrace{y^2}^{\text{potência} \neq 1} = 0$$

são equações diferenciais ordinárias não-lineares de segunda e terceira ordens, respectivamente.

Soluções

Como mencionado antes, nosso objetivo neste curso é resolver ou encontrar soluções para equações diferenciais.

DEFINIÇÃO 1.2 Solução para uma Equação Diferencial

Qualquer função f definida em algum intervalo I, que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de **solução** para a equação no intervalo.

Em outras palavras, uma solução para uma equação diferencial ordinária

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

é uma função f que possui pelo menos n derivadas e *satisfaz* a equação; isto é,

$$F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0$$

para todo x no intervalo I. Propositadamente, deixamos vaga a forma precisa do intervalo I na Definição 1.2. Dependendo do contexto da discussão, I pode representar um intervalo aberto (a, b), um intervalo fechado $[a, b]$, um intervalo infinito $(0, \infty)$ e assim por diante.

EXEMPLO 1

Verifique que $y = x^4/16$ é uma solução para a equação não-linear

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Solução Uma maneira de comprovar se uma dada função é uma solução é escrever a equação diferencial como $dy/dx - xy^{1/2} = 0$ e verificar, após a substituição, se a diferença acima $dy/dx - xy^{1/2}$ é zero para todo x no intervalo. Usando

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{x^3}{16} = \frac{x^3}{4} \text{ e } y^{1/2} = \left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \frac{x^2}{4},$$

percebemos que

$$\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = \frac{x^3}{4} - x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0$$

para todo número real. ■

EXEMPLO 2

A função $y = xe^x$ é uma solução para a equação linear

$$y'' - 2y' + y = 0$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$. Para verificar isso, calculamos

$$y' = xe^x + e^x \text{ e } y'' = xe^x + 2e^x.$$

Observe $$y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$$

para todo número real. ■

Note que, nos Exemplos 1 e 2, a função constante $y = 0$ também satisfaz a equação diferencial dada para todo x real. Uma solução para uma equação diferencial que é identicamente nula em um intervalo I é em geral referida como **solução trivial**.

Nem toda equação diferencial que escrevemos possui necessariamente uma solução.

EXEMPLO 3

(a) As equações diferenciais de primeira ordem

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0 \text{ e } (y')^2 + y^2 + 4 = 0$$

não possuem soluções. Por quê?

(b) A equação de segunda ordem $(y'')^2 + 10y^4 = 0$ possui somente uma solução real. Qual?

■

Soluções Explícitas e Implícitas

Você deve estar familiarizado com as noções de funções explícitas vistas em seu estudo de cálculo. Similarmente, soluções de equações diferenciais são divididas em explícitas ou implícitas. Uma solução para uma equação diferencial ordinária (2) que pode ser escrita na forma $y = f(x)$ é chamada de **solução explícita**. Vimos em nossa discussão inicial que $y = e^{x^2}$ é uma solução explícita de $dy/dx = 2xy$. Nos Exemplos 1 e 2, $y = x^4/16$ e $y = xe^x$ são soluções explícitas de $dy/dx = xy^{1/2}$ e $y'' - 2y' + y = 0$, respectivamente. Dizemos que uma relação $G(x, y) = 0$ é uma **solução implícita** de uma equação diferencial ordinária (2) em um intervalo I, se ela define uma ou mais soluções explícitas em I.

EXEMPLO 4

Para $-2 < x < 2$, a relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ é uma solução implícita para a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Segue, por derivação implícita, que

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(4) = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

■

A relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ no Exemplo 4 define duas funções diferenciais explícitas: $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$ no intervalo $(-2, 2)$. Além disso, note que qualquer relação da forma $x^2 + y^2 - c = 0$ satisfaz, *formalmente*, $dy/dx = -x/y$ para qualquer constante c. Porém, fica subentendido que a relação deve sempre fazer sentido no sistema dos números reais; logo, não podemos dizer que $x^2 + y^2 + 1 = 0$ determina uma solução da equação diferencial.

Como a distinção entre uma solução explícita e uma solução implícita é intuitivamente clara, não nos daremos ao trabalho de dizer sempre: "aqui temos uma solução explícita (implícita)".

Número de Soluções

Você deve se acostumar com o fato de que uma dada equação diferencial geralmente possui um número infinito de soluções. Por substituição direta, podemos verificar que qualquer curva – isto é, função – da família a um parâmetro $y = ce^{x^2}$, em que c é uma constante arbitrária, satisfaz (1). Como indicado na Figura 1.1, a solução trivial é um membro dessa família de soluções, correspondente a $c = 0$. No Exemplo 2, também podemos verificar por substituição que $y = cxe^x$ é uma família de soluções da equação diferencial dada.

EXEMPLO 5

Para qualquer valor de c, a função $y = c/x + 1$ é uma solução da equação diferencial de primeira ordem

$$x\frac{dy}{dx} + y = 1$$

no intervalo $(0, \infty)$. Temos,

$$\frac{dy}{dx} = c\frac{d}{dx}(x^{-1}) + \frac{d}{dx}(1) = -cx^{-2} = -\frac{c}{x^2}$$

então

$$x\frac{dy}{dx} + y = x\left(-\frac{c}{x^2}\right) + \left(\frac{c}{x} + 1\right) = 1.$$

Variando o parâmetro c, podemos gerar uma infinidade de soluções. Em particular, fazendo $c = 0$, obtemos uma solução constante $y = 1$. Veja a Figura 1.2. ■

No Exemplo 5, $y = c/x + 1$ é uma solução da equação diferencial em qualquer intervalo que não contenha a origem. A função não é diferenciável em $x = 0$.

Em alguns casos, quando somamos duas soluções de uma equação diferencial, obtemos uma outra solução.

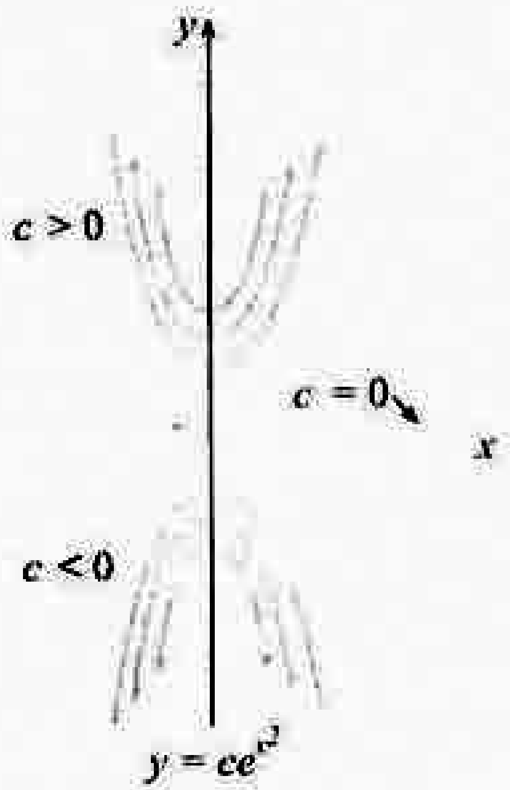


Figura 1.1

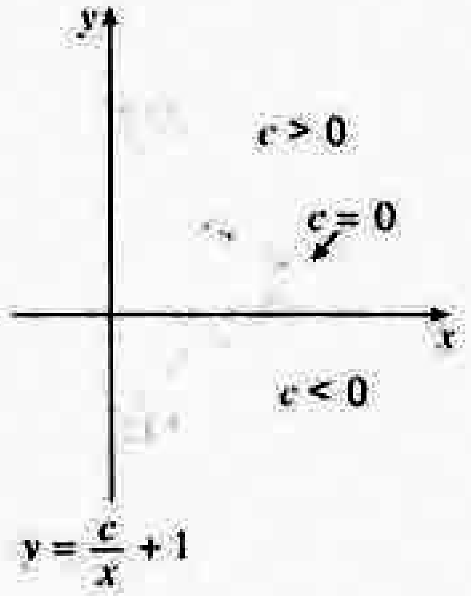


Figura 1.2

EXEMPLO 6

(a) As funções $y = c_1 \cos 4x$ e $y = c_2 \operatorname{sen} 4x$, em que c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, são soluções para a equação diferencial

$$y'' + 16y = 0.$$

Para $y = c_1 \cos 4x$, as derivadas primeira e segunda são

$$y' = -4c_1 \operatorname{sen} 4x \text{ e } y'' = -16c_1 \cos 4x,$$

então

$$y'' + 16y = -16c_1 \cos 4x + 16(c_1 \cos 4x) = 0.$$

Analogamente, para $y = c_2 \operatorname{sen} 4x$,

$$y'' + 16y = -16c_2 \operatorname{sen} 4x + 16(c_2 \operatorname{sen} 4x) = 0.$$

(b) A soma das duas soluções da parte (a), $y = c_1 \cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x$, também é uma solução para $y'' + 16y = 0$. ■

EXEMPLO 7

Você deve ser capaz de verificar que

$$y = e^x,\ y = e^{-x},\ y = c_1e^x,\ y = c_2e^{-x} \text{ e } y = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

são todas soluções da equação diferencial linear de segunda ordem

$$y'' - y = 0.$$

Note que $y = c_1e^x$ é uma solução para qualquer escolha de c_1, mas $y = e^x + c_1$, $c_1 \neq 0$, *não* satisfaz a equação, pois, para essa família de funções, temos $y'' - y = -c_1$. ■

O próximo exemplo mostra que uma solução de uma equação diferencial pode ser uma função definida por partes.

EXEMPLO 8

Qualquer função da família a um parâmetro $y = cx^4$ é uma solução para a equação diferencial

$$xy' - 4y = 0.$$

Temos $xy' - 4y = x(4cx^3) - 4cx^4 = 0$. A função definida por partes

$$y = \begin{cases} -x^4, & x < 0 \\ x^4, & x \geq 0 \end{cases}$$

é também uma solução. Observe que essa função não pode ser obtida a partir de $y = cx^4$ por intermédio de uma única escolha do parâmetro c. Veja a Figura 1.3(b). ■

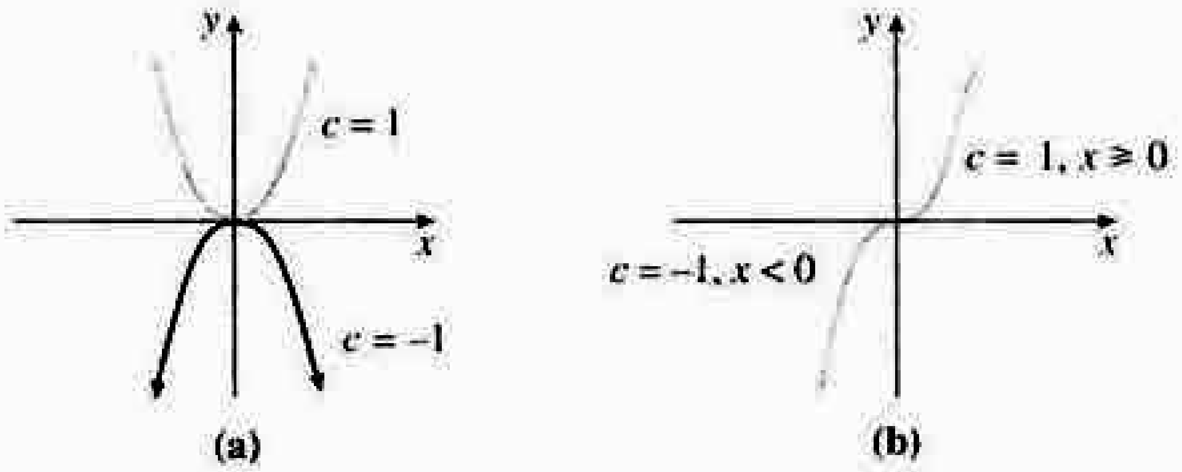


Figura 1.3

Mais Terminologia

O estudo de equações diferenciais é semelhante ao cálculo integral. Quando calculamos uma antiderivada ou integral indefinida, utilizamos uma única constante de integração. De maneira análoga, quando resolvemos uma equação diferencial de primeira ordem $F(x, y, y') = 0$, normalmente obtemos uma família de curvas ou funções $G(x, y, c) = 0$, contendo um parâmetro arbitrário tal que cada membro da família é uma solução da equação diferencial. Na verdade, quando resolvemos uma equação de *n-ésima* ordem $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, em que $y^{(n)}$ significa $d^{(n)}y/dx^n$, esperamos uma **família a n-parâmetros de soluções** $G(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$.

Uma solução para uma equação diferencial que não depende de parâmetros arbitrários é chamada de **solução particular**. Uma maneira de obter uma solução particular é escolher valores específicos para o(s) parâmetro(s) na família de soluções. Por exemplo, é fácil ver que

$y = ce^x$ é uma família a um parâmetro de soluções para a equação de primeira ordem muito simples $y' = y$. Para $c = 0$, -2 e 5, obtemos as soluções particulares $y = 0$, $y = -2e^x$ e $y = 5e^x$, respectivamente.

Às vezes, uma equação diferencial possui uma solução que não pode ser obtida especificando-se os parâmetros em uma família de soluções. Tal solução é chamada de **solução singular**.

EXEMPLO 9

Na Seção 2.2, provaremos que uma família a um parâmetro de soluções para $y' = xy^{1/2}$ é dada por $y = (x^2/4 + c)^2$. Quando $c = 0$, a solução particular resultante é $y = x^4/16$. Neste caso, a solução trivial $y = 0$ é uma solução singular para a equação, pois ela não pode ser obtida da família através de uma escolha do parâmetro c. ■

Se *toda* solução para $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ no intervalo I pode ser obtida de $G(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$ por uma escolha apropriada dos c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, dizemos que a família a n-parâmetros é uma solução **geral**, ou **completa**, para a equação diferencial.

Nota Há duas correntes de pensamento sobre o conceito de "solução geral". Uma definição alternativa assegura que uma solução geral para uma equação diferencial de *n-ésima* ordem é uma família de soluções que contém n parâmetros essenciais.* Em outras palavras, não é necessário que a família contenha todas as soluções para a equação diferencial em algum intervalo. A diferença dessas opiniões consiste na distinção entre soluções para equações lineares e para equações não-lineares. Na resolução de equações diferenciais lineares, devemos impor restrições relativamente simples aos coeficientes; com essas restrições, podemos assegurar a existência de solução em um intervalo e também que a família de soluções contenha realmente todas as possíveis soluções.

Outro fato deve ser mencionado neste momento. Equações não-lineares, com exceção de algumas equações de primeira ordem, são geralmente difíceis ou impossíveis de ser resolvidas em termos de funções elementares, tais como funções algébricas, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e trigonométricas inversas. Além disso, se acontecer de termos uma família de soluções para uma equação não-linear, não fica óbvio quando essa família constitui uma "solução geral". Em nível prático, a designação "solução geral" é aplicada somente a equações diferenciais lineares.

* Não tentaremos responder a este conceito. Mas *grosso modo* significa: não brinque com as constantes. Certamente, $y = x + c_1 + c_2$ representa uma família de soluções para $y' = 1$. Trocando $c_1 + c_2$ por c, a família tem *essencialmente* uma constante: $y = x + c$. Você pode verificar que $y = c_1 + \ln c_2x$ é uma solução para $x^2y'' + xy' = 0$ no intervalo $(0, \infty)$ para qualquer escolha de c_1 e $c_2 > 0$. Então, c_1 e c_2 são parâmetros essenciais?

1.1 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão nas páginas 439 e 340.

Nos Problemas 1-10, classifique as equações diferenciais dizendo se elas são lineares ou não-lineares. Dê também a ordem de cada equação.

1. $(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$

2. $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

3. $yy' + 2y = 1 + x^2$

4. $x^2dy + (y - xy - xe^x)\,dx = 0$

5. $x^3y^{(4)} - x^2y'' + 4xy' - 3y = 0$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = \operatorname{sen} y$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$

8. $\dfrac{d^2r}{dt^2} = -\dfrac{k}{r^2}$

9. $(\operatorname{sen} x)y''' - (\cos x)y' = 2$

10. $(1 - y^2)\,dx + x\,dy = 0$

Nos Problemas 11-40, verifique se a função dada é uma solução para a equação diferencial. (c_1 e c_2 são constantes).

11. $2y' + y = 0;\ y = e^{-x/2}$

12. $y' + 4y = 32;\ y = 8$

13. $\dfrac{dy}{dx} - 2y = e^{3x};\ y = e3x + 10e^{2x}$

14. $\dfrac{dy}{dt} + 20y = 24;\ y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$

15. $y' = 25 + y^2;\ y = 5\operatorname{tg} 5x$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{y}{x}};\ y = (\sqrt{x} + c_1)^2,\ x > 0,\ c_1 > 0$

17. $y' + y = \operatorname{sen} x;\ y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x + 10e^{-x}$

18. $2xy\,dx + (x^2 + 2y)\,dy = 0;\ x^2y + y^2 = c_1$

19. $x^2dy + 2xy\,dx = 0;\ y = -\dfrac{1}{x^2}$

20. $(y')^3 + xy' = y;\ y = x + 1$

21. $y = 2xy' + y(y')^2;\ y^2 = c_1(x + \frac{1}{4}c_1)$

22. $y' = 2\sqrt{|y|};\ y = x|x|$

23. $y' - \dfrac{1}{x}y = 1;\ y = x\ln x,\ x > 0$

24. $\dfrac{dP}{dt} = P(a - bP);\ P = \dfrac{ac_1e^{at}}{1 + bc_1e^{at}}$

25. $\dfrac{dX}{dt} = (2 - X)(1 - X);\ \ln\dfrac{2 - X}{1 - X} = t$

26. $y' + 2xy = 1;\ y = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt + c_1e^{-x^2}$

27. $(x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0;\ c_1(x + y)^2 = xe^{y/x}$

28. $y'' + y' - 12y = 0;\ y = c_1e^{3x} + c_2e^{-4x}$

29. $y'' - 6y' + 13y = 0;\ y = e^{3x}\cos 2x$

30. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0;\ y = e^{2x} + xe^{2x}$

31. $y'' = y;\ y = \cosh x + \operatorname{senh} x$

32. $y'' = 25y = 0;\ y = c_1 \cos 5x$

33. $y'' = (y')^2 = 0;\ y = \ln|x + c_1| + c_2$

34. $y'' + y = tg\,x;\ y = -\cos x \ln(\sec x + tg\,x)$

35. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 0;\ y = c_1 + c_2x^{-1}$

36. $x^2y'' - xy' + 2y = 0;\ y = x\cos(\ln x),\ x > 0$

37. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0;\ y = x^2 + x^2\ln x,\ x > 0$

38. $y''' - y'' + 9y' - 9y = 0;\ y = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x + 4e^x$

39. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0;\ y = x^2e^x$

40. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 12x^2;\ y = c_1x + c_2x\ln x + 4x^2,\ x > 0$

Nos Problemas 41 e 42, verifique se a função definida por partes é uma solução para a equação diferencial dada.

41. $xy' - 2y = 0;\quad y = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

42. $(y')^2 = 9xy;\quad y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$

43. Verifique que uma família a um parâmetro de soluções para

$$y = xy' + (y')^2 \text{ é } y = cx + c^2.$$

Determine um valor de k para que $y = kx^2$ seja uma solução singular para a equação diferencial.

44. Verifique que uma família a um parâmetro de soluções para

$$y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2} \text{ é } y = cx + \sqrt{1 + c^2}.$$

Mostre que a relação $x^2 + y^2 = 1$ define uma solução singular para a equação no intervalo $(-1, 1)$.

45. Uma família a um parâmetro de soluções para

$$y' = y^2 - 1 \text{ é } y = \frac{1 + ce^{2x}}{1 - ce^{2x}}.$$

Por inspeção,* determine uma solução singular para a equação diferencial.

46. Na página 6, vimos que $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$ são soluções para $dy/dx = -x/y$ no intervalo $(-2, 2)$. Explique por que

$$y = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2}, & -2 < x < 0 \\ -\sqrt{4 - x^2}, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

* Traduzindo, isso significa "faça uma boa estimativa e veja se funciona".

não é uma solução para a equação diferencial no intervalo.

Nos Problemas 47 e 48, encontre valores de m para que $y = e^{mx}$ seja uma solução para cada equação diferencial.

47. $y'' - 5y' + 6y = 0$

48. $y'' + 10y' + 25y = 0$

Nos Problemas 49 e 50, encontre valores de m para que $y = x^m$ seja uma solução para cada equação diferencial.

49. $x^2y'' - y = 0$

50. $x^2y'' + 6xy' + 4y = 0$

51. Mostre que $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^3$ são ambas soluções para

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$$

As funções, c_1y_1 e c_2y_2, com c_1 e c_2 constantes arbitrárias, são também soluções? A soma, $y_1 + y_2$ é uma solução?

52. Mostre que $y_1 = 2x + 2$ e $y_2 = -x^2/2$ são ambas soluções de

$$y = xy' + (y')^2/2.$$

As funções, c_1y_1 e c_2y_2, com c_1 e c_2 constantes arbitrárias, são também soluções? A soma $y_1 + y_2$ é uma solução?

53. Por inspeção, determine, se possível, uma solução real para a equação diferencial dada.

(a) $\left|\dfrac{dy}{dx}\right| + |y| = 0$

(b) $\left|\dfrac{dy}{dx}\right| + |y| + 1 = 0$

(c) $\left|\dfrac{dy}{dx}\right| + |y| = 1$

[O] *1.2* ALGUNS MODELOS MATEMÁTICOS

Em ciências, engenharia, economia e até mesmo em psicologia, freqüentemente desejamos descrever ou **modelar** o comportamento de algum sistema ou fenômeno em termos matemáticos. Essa descrição começa com

(i) identificando as variáveis que são responsáveis por mudanças do sistema, e

(ii) um conjunto de hipóteses razoáveis sobre o sistema.

As hipóteses também incluem algumas leis empíricas que são aplicáveis ao sistema. A estrutura matemática de todas essas hipóteses, ou o **modelo matemático** do sistema, é muitas vezes uma equação diferencial ou um sistema de equações diferenciais. Esperamos que um modelo matemático razoável do sistema tenha uma solução que seja consistente com o comportamento conhecido do sistema.

Um modelo matemático de um sistema físico geralmente envolve a variável tempo. A solução do modelo representa então o **estado do sistema**; em outras palavras, para valores apropriados do tempo t, os valores da variável dependente (ou variáveis) descrevem o sistema no passado, presente e futuro.

Corpo em Queda Livre

A descrição matemática de um corpo caindo verticalmente sob a influência da gravidade leva a uma simples equação diferencial de segunda ordem. A solução para essa equação fornece-nos a posição do corpo em relação ao solo.

EXEMPLO 1

É bem conhecido que um objeto em queda livre próximo à superfície da terra é acelerado a uma taxa constante g. Aceleração é a derivada da velocidade, que, por sua vez, é a derivada da distância s. Suponha que uma pedra seja atirada do alto de um edifício, como ilustrado na Figura 1.4. Definindo o sentido positivo para cima, então o enunciado matemático

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g$$

é a equação diferencial que governa a trajetória vertical do corpo. O sinal de subtração é usado porque o peso do corpo é uma força direcionada para baixo, ou seja, oposta à direção positiva.

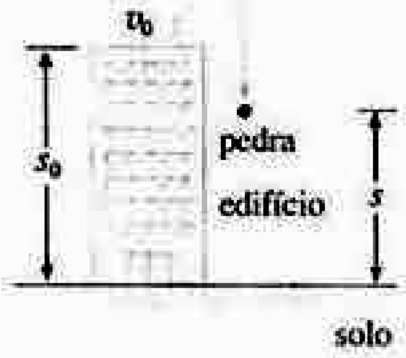


Figura 1.4

Se supusermos ainda que a altura do edifício é s_0 e a velocidade inicial da pedra, v_0, então temos de encontrar uma solução para a equação diferencial

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g, \quad 0 < t < t_1,$$

que também satisfaça as condições iniciais, $s(0) = s_0$ e $s'(0) = v_0$. Aqui, $t = 0$ é o instante em que a pedra deixa o telhado do edifício (tempo inicial) e t_1 é o instante em que a pedra atinge o solo. Como a pedra é atirada para cima na direção positiva, v_0 é naturalmente positivo.

Note que essa formulação do problema ignora outras forças, como a resistência do ar atuando sobre o corpo. ■

Sistema Massa-Mola

Quando a segunda lei de Newton sobre o movimento é combinada com a lei de Hooke, podemos obter uma equação diferencial que governa o movimento de uma massa atada a uma mola.

EXEMPLO 2

Para calcular o deslocamento vertical $x(t)$ de uma massa atada a uma mola, usamos duas leis empíricas: a segunda lei de Newton sobre o movimento e a lei de Hooke. A primeira delas diz que a resultante das forças que atuam sobre um sistema em movimento é $F = ma$, em que m é a massa e a, a aceleração. A lei de Hooke diz que a força restauradora de uma mola esticada é proporcional ao deslocamento $s + x$; isto é, a força restauradora é $k(s + x)$, em que $k > 0$ é uma constante. Como mostrado na Figura 1.5(b), s é o deslocamento da mola quando uma massa é atada em sua extremidade e o sistema está em posição de equilíbrio (a massa está pendurada na mola e não há movimento). Quando o sistema está em movimento, a variável x representa o deslocamento da massa em relação à posição de equilíbrio. No Capítulo 5, provaremos que, quando o sistema está em movimento, a força resultante atuando na massa é simplesmente $F = -kx$. Logo, na ausência de amortecimento ou outras forças externas quaisquer que poderiam estar atuando no sistema, a equação diferencial do movimento vertical do centro de gravidade da massa é:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Aqui, o sinal de subtração indica que a força restauradora da mola atua em direção oposta ao movimento, isto é, na direção da posição de equilíbrio. Na prática, essa equação diferencial de segunda ordem é escrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{1}$$

em que $\omega^2 = k/m$.

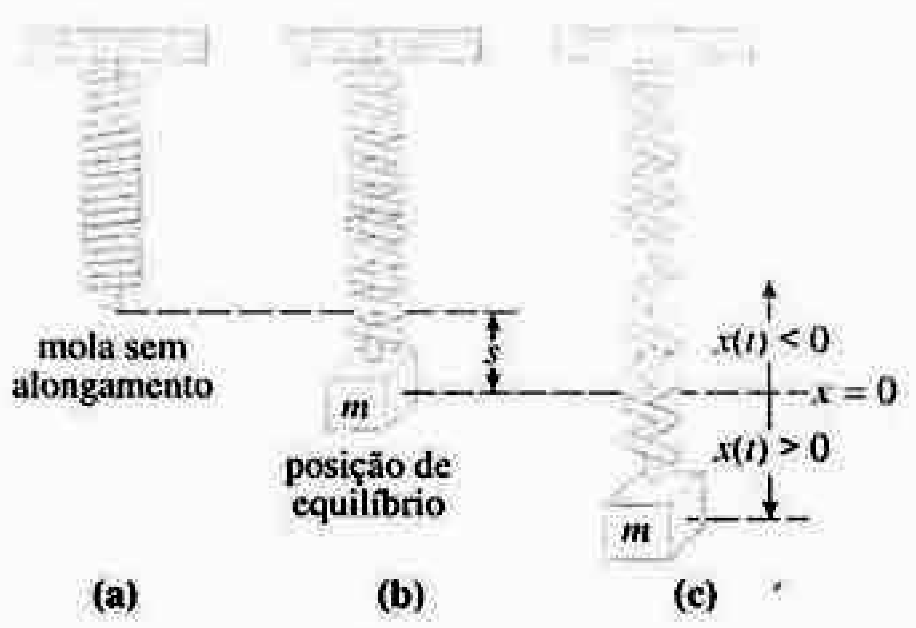


Figura 1.5

Unidades

Comentaremos os sistemas de unidades usados para descrever problemas de dinâmica como os ilustrados nos dois últimos exemplos. Três sistemas de unidades freqüentemente empregados são mostrados na tabela abaixo. Em cada sistema, a unidade básica de tempo é o segundo.

Grandeza	Sistema gravitacional inglês	Sistema Internacional (SI)	cgs
Força	pound (lb)	newton (N)	dina
Massa	slug	kilograma (kg)	grama (g)
Distância	foot (ft)	metro (m)	centímetro (cm)
Aceleração da gravidade g (aproximadamente)	$32\ ft/s^2$	$9{,}8\ m/s^2$	$980\ cm/s^2$

A *força* gravitacional exercida pela terra sobre um corpo de massa m é chamada de peso W. Na ausência de resistência do ar, a única força que atua sobre um corpo em queda livre é seu peso. Portanto, pela segunda lei de Newton sobre o movimento, temos que a massa m e o peso W estão relacionados por

$$W = mg.$$

Por exemplo, no sistema inglês, a massa de $1/4$ slug corresponde a um peso de 8 lb. Como $m = W/g$, um peso de 64 lb corresponde a uma massa de $64/32 = 2$ slugs. No sistema cgs, um peso de 2450 dinas tem uma massa de $2450/980 = 2{,}5$ gramas. No sistema SI, um peso de 50 newtons tem uma massa de $50/9{,}8 = 5{,}1$ kilogramas. Note que

$$1 \text{ newton} = 10^5 \text{ dinas} = 0{,}2247 \text{ pound}$$

No próximo exemplo, deduziremos a equação diferencial que descreve o movimento de um pêndulo simples.

Pêndulo Simples

Qualquer objeto pendurado em movimento pendular é chamado de **pêndulo físico**. O pêndulo simples é um caso especial de pêndulo físico e consiste em uma haste com uma massa atada em uma das extremidades. Para descrever o movimento de um **pêndulo simples**, desprezaremos qualquer força exterior de amortecimento agindo sobre o sistema (tal como a resistência do ar).

EXEMPLO 3

Uma massa m de peso W está suspensa por uma haste de comprimento l. Queremos determinar o ângulo θ, medido a partir da linha vertical, como uma função do tempo t (consideramos $\theta > 0$ à direita de OP, e $\theta < 0$ à esquerda de OP). Lembre-se de que um arco s de um círculo de raio l está relacionado com o ângulo central θ através da fórmula $s = l\theta$. Logo, a aceleração angular é

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Pela segunda lei de Newton, temos

$$F = ma = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Na Figura 1.6, vemos que a componente tangencial da força devida ao peso W é mg sen θ. Igualando as duas diferentes formulações da força tangencial, obtemos,

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\text{sen}\,\theta \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0. \tag{2}$$

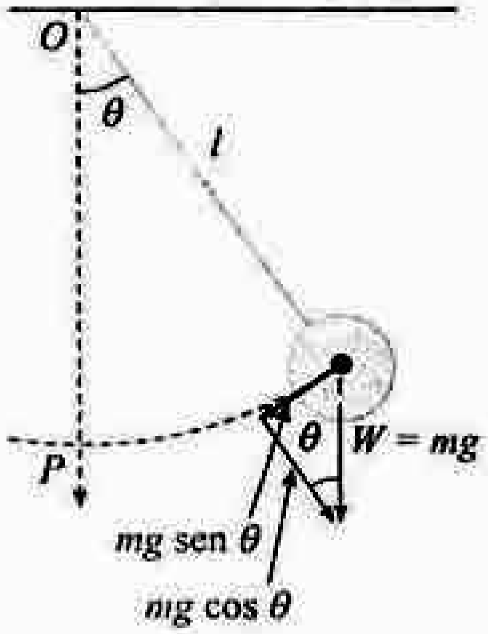


Figura 1.6

Por causa da presença do sen θ, a equação diferencial (2) é não-linear. É sabido que essa equação não pode ser resolvida em termos de funções elementares. Então, fazemos mais uma simplificação. Se o deslocamento angular θ não for muito grande, poderemos usar a aproximação $\theta \approx \theta$.* Daí, (2) pode ser substituída pela equação diferencial linear de segunda ordem

* Para pequenos valores de θ (em radianos), potências θ^3 e as de ordem superior podem ser ignoradas na série de Maclaurin, sen $\theta = \theta - \theta^3/3! + \ldots$, e assim, obtemos sen $\theta \approx \theta$. Use uma calculadora e compare os valores de sen (0,05) e sen (0,005) com 0,05 e 0,005.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0. \tag{3}$$

Colocando $\omega = g/l$, (3) possui exatamente a mesma estrutura da equação (1) que governa vibrações livres de um peso em uma mola. O fato de uma equação diferencial básica poder descrever diversos fenômenos físicos, ou mesmo sociais/econômicos, é uma ocorrência comum no estudo de matemática aplicada.

O relógio de parede e a balança de criança são exemplos de pêndulos. O deslocamento angular θ de um pêndulo simples de comprimento l é determinado pela equação diferencial não-linear de segunda ordem $d^2\theta/dt^2 + (g/l)\,\text{sen}\,\theta = 0$. Quando o deslocamento do pêndulo não é muito grande, podemos fazer a substituição $\text{sen}\,\theta \approx \theta$ e assim obter aproximadamente o valor de θ resolvendo a equação linear $d^2\theta/dt^2 + (g/l)\,\theta = 0$. Veja também as páginas 16 e 17.

Corda Giratória

Encontramos de novo a equação (1) na análise da corda giratória.

EXEMPLO 4

Suponha que uma corda de comprimento L, com densidade linear constante igual a ρ (massa por unidade de comprimento) esteja esticada ao longo do eixo x e fixada nas extremidades $x = 0$ e $x = L$. Suponha que ela seja então girada em torno desse eixo a uma velocidade angular constante igual a ω. Isso é análogo a duas pessoas segurando uma corda de pular e rodando-a de maneira sincronizada. Veja a Figura 1.7(a). Queremos encontrar a equação diferencial que determina a forma $y(x)$ da corda, ou a **curva de deflexão** em relação à sua posição inicial. Veja a Figura 1.7(b). Para isso, considere a porção da corda no intervalo $[x, x + \Delta x]$, em que Δx é pequeno. Se a magnitude T da tensão **T** atuando tangencialmente à corda for constante ao longo da corda, então a equação diferencial que queremos pode ser obtida igualando duas diferentes formulações da força resultante que atuam na corda no intervalo $[x, x + \Delta x]$. Primeiro, vemos na Figura 1.7(c) que a força resultante vertical é

$$F = T\operatorname{sen}\theta_2 - T\operatorname{sen}\theta_1. \tag{4}$$

Quando os ângulos θ_1 e θ_2 (medidos em radianos) são pequenos, temos

$$\operatorname{sen}\theta_2 \approx \operatorname{tg}\theta_2 \approx y'(x + \Delta x) \text{ e } \operatorname{sen}\theta_1 \approx \operatorname{tg}\theta_1 = y'(x),$$

e então (4) torna-se

$$F = T[y'(x + \Delta x) - y'(x)]. \tag{5}$$

Agora, a força resultante é dada também pela segunda lei de Newton, $F = ma$. Aqui, a massa da corda no intervalo é $m = \rho\,\Delta x$; a aceleração centrípeta de um ponto girando com velocidade angular ω em um círculo de raio r é $a = r\omega^2$. Com Δx pequeno, tomamos $r = y$. Logo, uma outra formulação da força resultante é

$$F \approx -(\rho\,\Delta x)y\omega^2, \tag{6}$$

em que o sinal de subtração decorre do fato de que a aceleração aponta na direção oposta à direção positiva y. Agora, igualando (5) e (6), temos

$$T[y'(x + \Delta x) - y'(x)] \approx -(\rho\,\Delta x)y\omega^2 \text{ ou } T\frac{y'(x + \Delta x) - y'(x)}{\Delta x} \approx -\rho\omega^2 y. \tag{7}$$

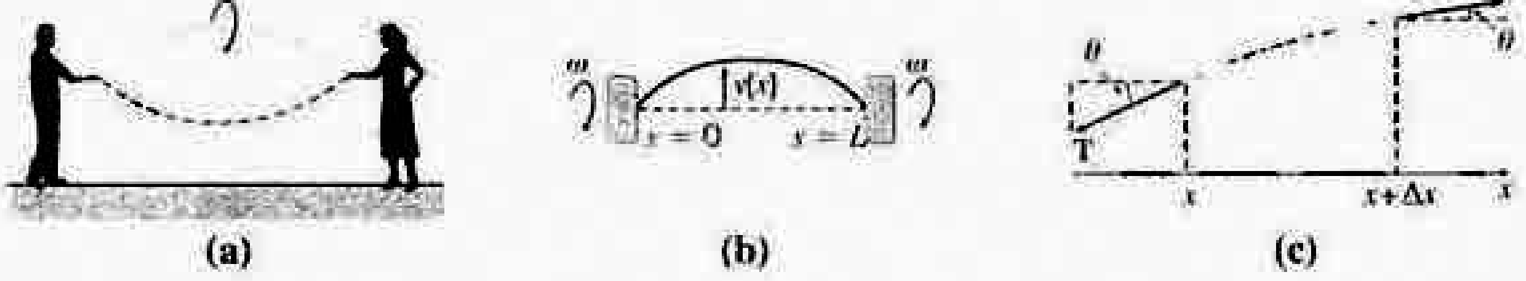


Figura 1.7

Para Δx próximo de zero, $[y'(x + \Delta x) - y'(x)]/\Delta x \approx d^2y/dx^2$, assim a última expressão em (7) nos dá,

$$T\frac{d^2y}{dx^2} = -\rho\omega^2 y \quad \text{ou} \quad T\frac{d^2y}{dx^2} + \rho\omega^2 y = 0. \tag{8}$$

Como a corda está fixa em $x = 0$ e $x = L$, esperamos que a solução $y(x)$ da última equação satisfaça as condições de fronteira $y(0) = 0$ e $y(L) = 0$. ■

Dividindo a última equação em (8) por T, obtemos,

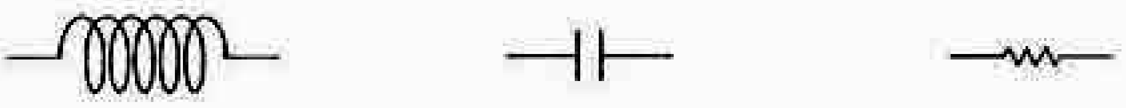
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\rho\omega^2}{T}y = 0,$$

o que é análogo a (1) e (3). Se a magnitude T da tensão não é constante no intervalo $[0, L]$, então pode-se mostrar que a equação diferencial para a curva de deflexão da corda é

$$\frac{d}{dx}\left[T(x)\frac{dy}{dx}\right] + \rho\omega^2 y = 0. \tag{9}$$

Circuitos em Série

De acordo com a segunda lei de Kirchhoff, a diferença de potencial $E(t)$ em um circuito fechado é igual à soma das voltagens no circuito. A Figura 1.8 mostra os símbolos e as fórmulas para as respectivas voltagens (queda de tensão) através de um indutor, um capacitor e um resistor. A corrente em circuito, após a chave ser fechada, é denotada por $i(t)$; a carga em um capacitor no instante t é denotada por $q(t)$. As letras L, C e R são constantes conhecidas como indutância, capacitância e resistência, respectivamente.



indutor	capacitor	resitor
$L\frac{di}{dt}$	$\frac{1}{C}q$	iR
(a)	(b)	(c)

Figura 1.8

EXEMPLO 5

Considere o circuito simples, em série, contendo um indutor, um resistor e um capacitor mostrado na Figura 1.9. Uma equação diferencial de segunda ordem para a carga $q(t)$ em um capacitor pode ser obtida somando as voltagens (queda de tensão):

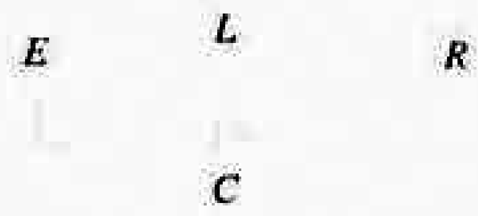


Figura 1.9

indutor $= L\dfrac{di}{dt} = L\dfrac{d^2q}{dt^2}$

resitor $= iR = R\dfrac{dq}{dt}$

corrente relacionada com a carga q por $i = dq/dt$

capacitor $= \dfrac{1}{C}q$

e igualando a soma à diferença de potencial $E(t)$:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{10}$$

■

No Exemplo 5, as condições iniciais $q(0)$ e $q'(0)$ representam a carga no capacitor e a corrente no circuito, respectivamente, no tempo $t = 0$. Ainda, a diferença de potencial ou voltagem $E(t)$ é chamada de **força eletromotriz**, ou **fem**. Uma fem, bem como a carga em um capacitor, causa a corrente no circuito. A tabela abaixo mostra as unidades básicas de medida usadas na análise de circuito.

Grandeza	**Unidade**
Diferença de potencial ou fem	volt (V)
Indutância L	henry (H)
Capacitância C	farad (F)
Resistência R	ohm (Ω)
Carga q	coulomb (C)
Corrente i	ampère (A)

Lei de Esfriamento de Newton

De acordo com a empírica lei de esfriamento de Newton, a taxa de esfriamento de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio ambiente.

Antes de tomar um café, geralmente esperamos um pouco até que o líquido esfrie. Uma xícara de café fica quase intragável se esfriar até chegar à temperatura ambiente. Uma lei empírica de resfriamento atribuída a Isaac Newton assegura que a taxa de resfriamento de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio. A frase acima é uma descrição verbal de uma equação diferencial. Veja também a página 107.

EXEMPLO 6

Suponha que $T(t)$ denote a temperatura de um corpo no instante t e que a temperatura do meio ambiente seja constante, igual a T_m. Se dT/dt representa a taxa de variação da temperatura do corpo, então a lei de esfriamento de Newton poderá ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m \quad \text{ou} \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \tag{11}$$

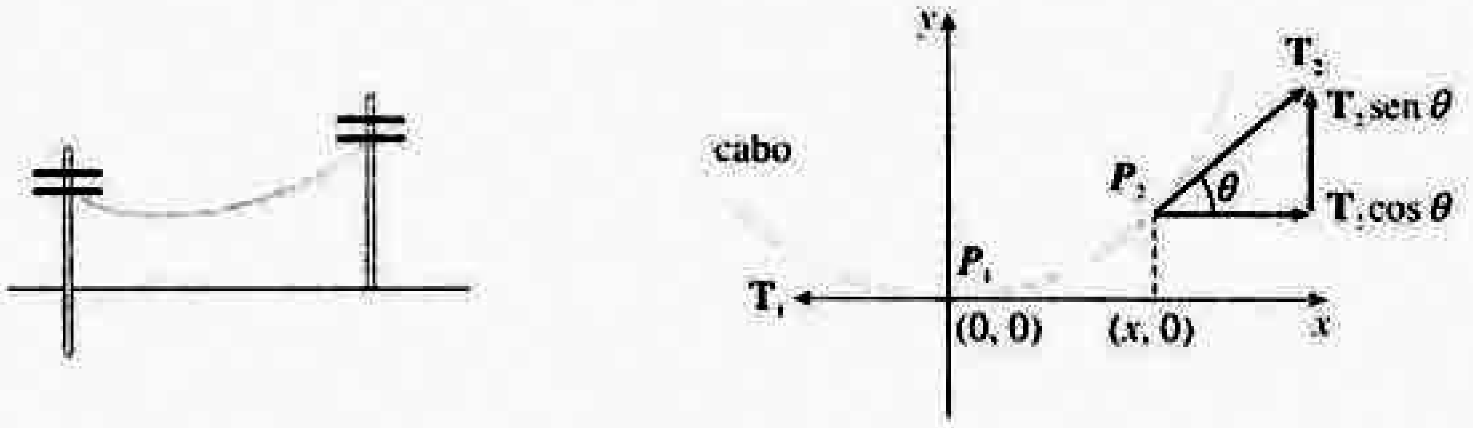
em que k é uma constante de proporcionalidade. Como, por hipótese, o corpo está esfriando, devemos ter $T > T_m$; logo, $k < 0$.

Cabo Suspenso

Suponha um cabo (ou corda) suspenso sobre a ação de seu próprio peso. A Figura 1.10(a) mostra um modelo físico para essa situação: um longo fio de telefone pendurado entre dois postes. Como no Exemplo 4, nosso objetivo no próximo exemplo é determinar a equação diferencial que descreve a forma (curva) de um cabo suspenso.

E X E M P L O 7

Vamos examinar somente a porção do cabo entre o ponto mais baixo P_1 e um ponto arbitrário P_2. Veja a Figura 1.10(b). Três forças estão agindo no cabo: o peso da porção P_1P_2 e as tensões $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ em P_1 e P_2, respectivamente. Se w for a densidade linear (medida, digamos, em N/m) e s for o comprimento do segmento P_1P_2, seu peso será ws.



(a) (b)

Figura 1.10

Agora, a tensão $\mathbf{T}_2$ tem duas componentes, uma horizontal e outra vertical (quantidades escalares), $T_2 \cos\theta$ e $T_2 \operatorname{sen}\theta$. Como o sistema está em equilíbrio, podemos escrever

$$|\mathbf{T}_1| = T_1 = T_2 \cos\theta \text{ e } ws = T_2 \operatorname{sen}\theta.$$

Dividindo as duas últimas equações, obtemos

$$\operatorname{tg}\theta \ \frac{ws}{T_1}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} \ \frac{ws}{T_1}. \tag{12}$$

Agora, como o comprimento do arco entre os pontos P_1 e P_2 é

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

segue de uma das formas do teorema fundamental do cálculo que

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{13}$$

Derivando (12) com relação a x e usando (13), temos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_1}\frac{ds}{dx} \text{ ou } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_1}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{14}$$

■

Poderíamos concluir pela Figura 1.10 que a forma de um cabo suspenso é parabólica. Porém, não é esse o caso; um cabo (fio ou corda grossa) suspenso sobre efeito somente de seu próprio peso toma a forma de um cosseno hiperbólico. Veja o Problema 12, Exercício 3.3. Lembre-se de que a curva cuja forma é o gráfico do cosseno hiperbólico é chamada de **catenária**, palavra que vem do latim *catena*, que significa "corrente". Os romanos usavam a catena para prender cachorros. Provavelmente o melhor exemplo gráfico de uma catenária seja o arco Gateway em St. Louis, Missouri, nos Estados Unidos.

Para determinar a forma de um cabo suspenso sob a ação de seu próprio peso, tal como um cabo telefônico suspenso entre dois postes, devemos resolver a equação diferencial não-linear $d^2y/dx^2 + (w/T)\sqrt{1 + (dy/dx)^2} = 0$. Pode-se mostrar que o cabo toma essencialmente a forma do gráfico de um cosseno hiperbólico. Esse gráfico de um cosseno hiperbólico chama-se *catenária*. O famoso arco Gateway em St. Louis tem a forma de uma catenária invertida.

Drenagem Através de um Orifício

Em hidrodinâmica, o teorema de Torricelli nos diz que a velocidade v de efluxo de água através de um pequeno orifício no fundo de um tanque cheio até uma altura h é igual à velocidade que um corpo (neste caso, uma gota d'água) adquire em queda livre de uma altura h:

$$v = \sqrt{2gh},$$

em que g é a aceleração devida à gravidade. A última expressão é obtida igualando a energia cinética $\frac{1}{2}mv^2$ à energia potencial mgh e explicitando v.

EXEMPLO 8

Um tanque cheio de água é drenado através de um orifício sobre a influência da gravidade. Gostaríamos de calcular a altura h da água no tanque em qualquer instante de tempo t.

Considere o tanque mostrado na Figura 1.11. Se a área do orifício é A_0 (em m^2) e a velocidade da água saindo do tanque é $v = \sqrt{2gh}$ (em m/s), então o volume de água que sai do tanque por segundo é $A_0\sqrt{2gh}$ (em m^3/s). Logo, se $V(t)$ denota o volume de água no tanque no instante t, temos

$$\frac{dV}{dt} = -A_0\sqrt{2gh}, \tag{15}$$

em que o sinal de subtração indica que V decresce com o tempo. Note que estamos ignorando qualquer possibilidade de atrito no orifício, o que reduziria a taxa de vazão da água.

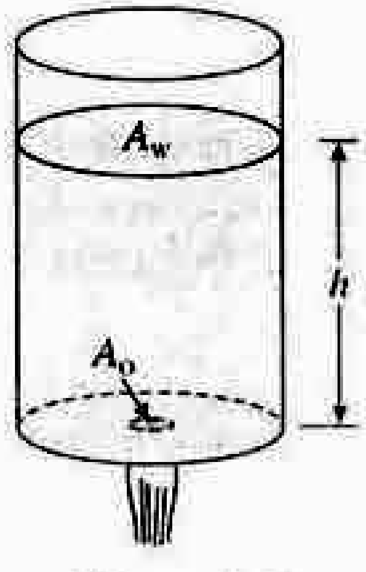


Figura 1.11

Agora, suponha que o volume da água no tanque no instante t possa ser escrito como $V(t) = A_w h$, em que A_w (em m^2) é a área da superfície da água (veja a Figura 1.11), que não depende da altura h. Daí, $dV/dt = A_w(dh/dt)$. Substituindo essa última expressão em (15), obtemos a equação diferencial para a altura h da água em função do tempo t:

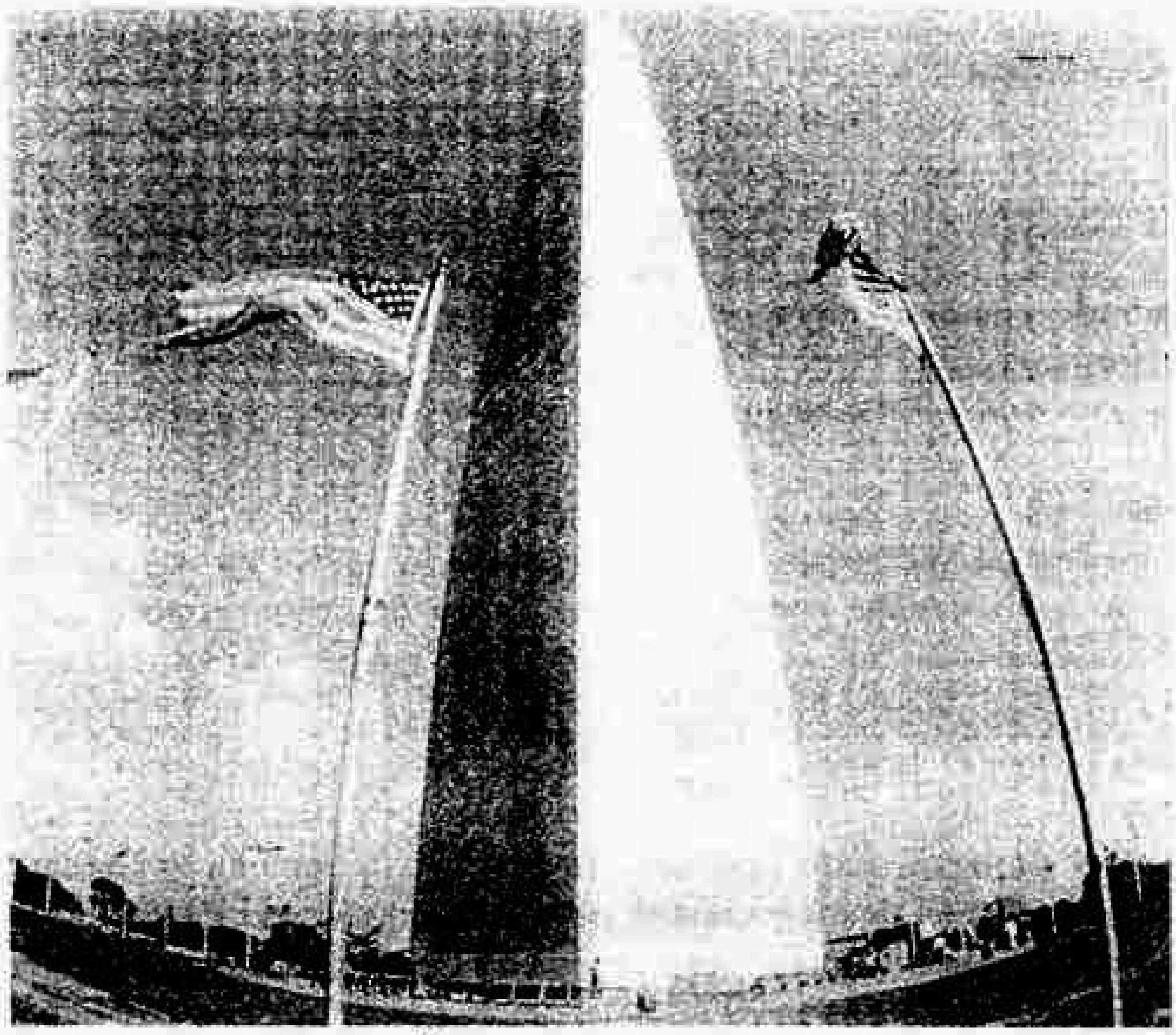
$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_0}{A_w}\sqrt{2gh}. \tag{16}$$

■

É interessante observar que (16) permanece válida mesmo quando A_w não é constante. Neste caso, devemos expressar a área da superfície da água como uma função de h: $A_w = A(h)$. Veja o Problema 9 em Exercícios 1.2 e o Problema 19 nos Exercícios de Revisão do Capítulo 1.

Deflexão de Vigas

Em engenharia, um problema importante é determinar a deflexão estática de uma viga elástica causada por seu peso ou por uma carga externa. Supomos que a viga é homogênea e tem seções transversais uniformes ao longo de seu comprimento. Seja L o comprimento da viga. Na ausência de carga na viga (incluindo seu peso), a curva ligando os centróides de todas as seções transversais é uma linha reta chamada de **eixo de simetria**. Veja a Figura 1.12(a). Se uma carga for aplicada à viga em um plano vertical contendo o eixo de simetria, então, como mostrado na Figura 1.12(b), a viga sofre uma distorção e a curva ligando os centróides de todas as seções transversais é chamada de **curva de deflexão** ou **curva elástica**. No próximo exemplo, deduziremos a equação diferencial da curva de deflexão. Essa dedução usa princípios de elasticidade e um conceito do cálculo chamado curvatura.



Forças atuando em vigas causam estas distorções. Essa deformação, ou deflexão $y(x)$, é descrita pela equação diferencial de quarta ordem $EI\,y^{(4)} = w(x)$. Uma viga engastada em uma extremidade e solta na outra é chamada de **cantiléver** ou **viga em balanço**. Um trampolim, um braço estendido e uma asa de avião são exemplos comuns de tais vigas; mas mastros de bandeira, arranha-céus e o Washington Monument agem como vigas em balanço. Veja também as páginas 405, 411 e 418.

EXEMPLO 9

A título de ilustração, vamos considerar uma viga fixa (engastada) em sua extremidade esquerda e solta em sua extremidade direita, como na Figura 1.13. Faça coincidir o extremo esquerdo da viga com o ponto $x = 0$, e o extremo direito com o ponto $x = L$. O eixo x coincide com o eixo de simetria, e a deflexão $y(x)$ é medida a partir desse eixo e considerada positiva se estiver para baixo. Em teoria da elasticidade, mostra-se que o momento defletor (fletor) $M(x)$ em um ponto x ao longo da viga está relacionado com a carga por unidade de comprimento $w(x)$ através da equação

$$\frac{d^2M}{dx^2} = w(x). \tag{17}$$

Ainda, o momento defletor (fletor) $M(x)$ é proporcional à curvatura k da curva elástica:

$$M(x) = EIk, \tag{18}$$

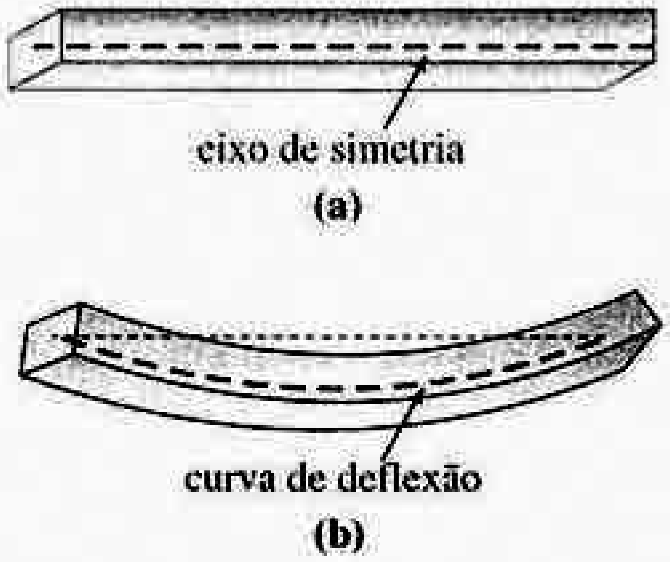


Figura 1.12

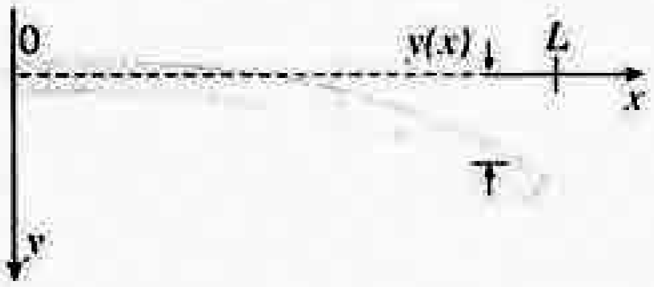


Figura 1.13

em que E e I são constantes; E é o módulo de elasticidade de Young racionado com o material da viga, e I é o momento de inércia de uma seção transversal da viga (em relação a um eixo conhecido como eixo neutro ou linha neutra). O produto EI é chamado de rigidez defletora da viga.

Agora, do cálculo, sabemos que a curvatura é dada por

$$\kappa = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Quando a deflexão $y(x)$ é pequena, a inclinação $y' \approx 0$ e daí $[1 + (y')^2]^{3/2} \approx 1$. Se $k = y''$, a equação (18) se torna $M = EIy''$. A segunda derivada desta última expressão é

$$\frac{d^2M}{dx^2} = EI\frac{d^2}{dx^2}y'' = EI\frac{d^4y}{dx^4}. \tag{19}$$

Usando o resultado obtido em (17) para substituir d^2M/dx^2 em (19), vemos que a deflexão $y(x)$ satisfaz a equação diferencial de quarta ordem

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x). \tag{20}$$

■

Como veremos mais tarde, é extremamente importante observar qualquer condição de fronteira que acompanha a equação diferencial na descrição matemática de um fenômeno físico. Para a viga em balanço do Exemplo 9, além de satisfazer (20), esperamos que a deflexão $y(x)$ satisfaça as seguintes condições nas extremidades da viga:

- $y(0) = 0$, pois não há deflexão no extremo esquerdo engastado.
- $y'(0) = 0$, pois a curva de deflexão é tangente ao eixo x na extremidade esquerda.
- $y''(L) = 0$, pois o momento defletor (fletor) é nulo no extremo livre.
- $y'''(L) = 0$, pois a força de espoliação (cisalhamento) é zero na extremidade direita (livre).

A função $F(x) = dM/dx = EI(d^3y/dx^3)$ é chamada de força de espoliação (cisalhamento).

Crescimento Populacional

Nos próximos exemplos, examinamos alguns modelos matemáticos em crescimento biológico.

EXEMPLO 10

Parece plausível esperar que a taxa de crescimento de uma população P seja proporcional à população presente naquele instante. *Grosso modo*, quanto maior for a população presente, maior ela será no futuro. Logo, o modelo para o crescimento populacional é dado pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{21}$$

em que k é uma constante de proporcionalidade. Como esperamos que a população cresça, devemos ter $dP/dt > 0$, e assim $k > 0$. ■

EXEMPLO 11

Na disseminação de uma doença contagiosa, uma virose, por exemplo, é razoável supor que a taxa de disseminação, dx/dt, seja proporcional não somente ao número de pessoas, $x(t)$, contaminadas, mas também ao número de pessoas, $y(t)$, que ainda não foram contaminadas, isto é,

$$\frac{dx}{dt} + kxy, \tag{22}$$

em que k é a constante de proporcionalidade usual. Se uma pessoa infectada for introduzida em uma população de n pessoas, então x e y estarão relacionados por

$$x + y = n + 1. \tag{23}$$

Usando (23) para eliminar y em (22), obtemos

$$\frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x). \tag{24}$$

A condição inicial óbvia que acompanha a equação (24) é $x(0) = 1$. ■

Equação Logística

A equação de primeira ordem não-linear (24) é um caso especial de uma equação mais geral

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP), \quad a \text{ e } b \text{ constantes}, \tag{25}$$

conhecida como **equação logística**. Veja Seção 3.3. A solução dessa equação é muito importante em ecologia, sociologia e mesmo em ciências contábeis e administração.

Capitalização Contínua

É muito comum as instituições financeiras anunciarem capitalização diária dos juros. Poderíamos ter capitalização a cada hora ou mesmo a cada minuto. Não há razão para parar aí, ou seja, juros poderiam ser capitalizados a cada segundo, a cada meio segundo, a cada décimo de segundo, a cada milésimo de segundo, e assim por diante. Isto quer dizer que os juros podem ser capitalizados continuamente.

EXEMPLO 12

Quando os juros são capitalizados continuamente, a taxa de crescimento é proporcional ao capital S, isto é,

$$\frac{dS}{dt} = rS, \tag{26}$$

em que r é taxa anual de juros. Essa descrição matemática é análoga ao crescimento populacional do Exemplo 10. A taxa de crescimento será grande quando o capital presente também for grande. Traduzindo geometricamente, isso significa que a reta tangente é mais inclinada quando S é grande. Veja a Figura 1.14.

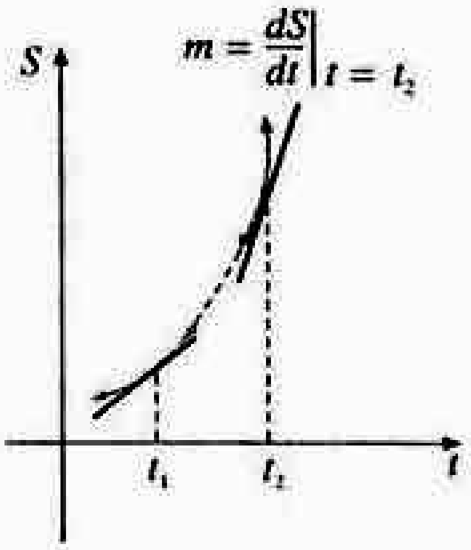


Figura 1.14

A definição de derivada proporciona uma interessante dedução de (26). Suponha que $S(t)$ seja o capital acumulado depois de t anos, quando a taxa de juros r é anual e estes são capitalizados continuamente. Seja h um incremento de tempo. Então, os juros obtidos no espaço de tempo $(t + h) - t$ é a diferença dos montantes acumulados:

$$S(t + h) - S(t) \tag{27}$$

Como os juros são definidos por taxa × tempo × capital, podemos aproximar os juros ganhos no mesmo período por

$$rhS(t) \text{ ou } rhS(t + h).$$

Intuitivamente, $rhS(t)$ e $rhS(t + h)$ são cotas inferiores e superiores, respectivamente, para os juros reais (27); ou seja,

$$rhS(t) \leq S(t + h) - S(t) \leq rhS(t + h)$$

ou

$$rS(t) \leq \frac{S(t + h) - S(t)}{h} \leq rS(t + h). \tag{28}$$

Passando ao limite em (28), quando $h \to 0$, obtemos

$$rS(t) \leq \lim_{h \to 0} \frac{S(t + h) - S(t)}{h} \leq rS(t),$$

e daí segue-se que

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(t + h) - S(t)}{h} = rS(t) \text{ ou } \frac{dS}{dt} = rS.$$

■

1.2 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 440.

Nos Problemas 1-22, deduza a equação(es) diferencial(is) que descreve a situação física dada.

1. Em certas circunstâncias, um corpo B de massa m em queda, como o pára-quedista mostrado na Figura1.15, encontra resistência do ar proporcional à sua velocidade v. Use a segunda lei de Newton para encontrar a equação diferencial para a velocidade v do corpo em qualquer instante. Lembre-se de que a aceleração é $a = dv/dt$. Suponha neste caso que a direção positiva é para baixo.

2. Qual é a equação diferencial para a velocidade v de um corpo de massa m em queda vertical através de um meio (tal como a água) que oferece uma resistência proporcional ao quadrado da velocidade? Suponha a direção positiva para baixo.

3. Pela lei da gravitação universal de Newton, a aceleração de queda livre a de um corpo, tal como o satélite mostrado na Figura 1.16 caindo de uma grande altura, não é a constante g. Em vez disso, a aceleração a é inversamente proporcional ao quadrado da distância r entre o centro da terra e o corpo: $a = k/r^2$, em que k é a constante de proporcionalidade.

   (a) Use o fato de que na superfície da terra $r = R$ e $a = g$ para determinar a constante de proporcionalidade k.

   (b) Use a segunda lei de Newton e a parte (a) para encontrar uma equação diferencial para a distância r.

   (c) Use a regra da cadeia na forma

   $$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}$$

   para expressar a equação diferencial da parte (b) como uma equação diferencial envolvendo v e dv/dr.

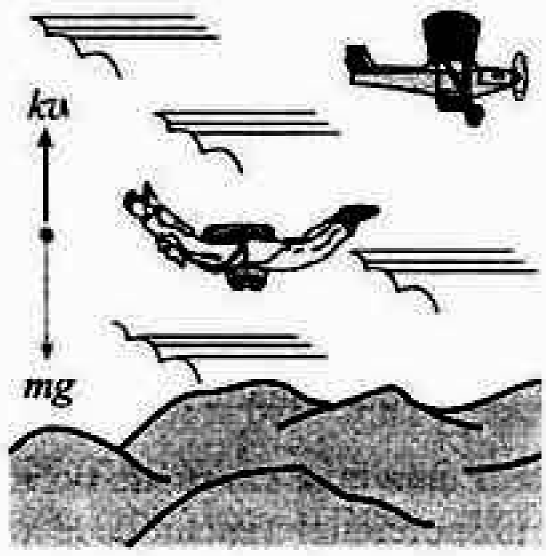


Figura 1.15

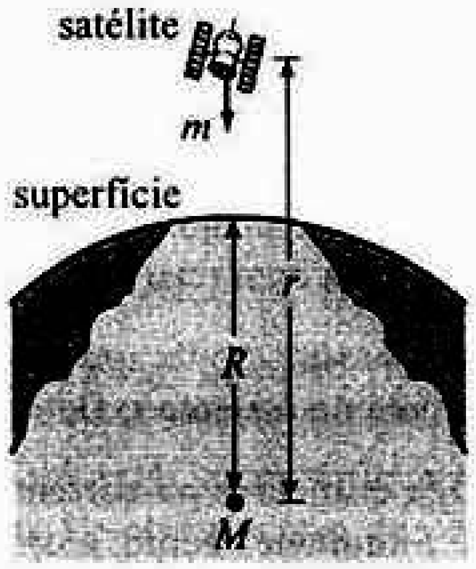


Figura 1.16

4. **(a)** Use a parte (b) do Problema 3 para encontrar a equação diferencial para r se a resistência ao satélite em queda for proporcional à sua velocidade.

   (b) Próximo à superfície da terra, use a aproximação $R \approx r$ para mostrar que a equação diferencial da parte (a) se reduz à equação deduzida no Problema 1.

5. Um circuito em série contém um resistor e um indutor, como mostrado na Figura 1.17. Determine a equação diferencial para a corrente $i(t)$ se a resistência é R, a indutância é L e a diferença de potencial, $E(t)$.

6. Um circuito em série contém um resistor e um capacitor, como mostrado na Figura 1.18. Determine a equação diferencial para a carga $q(t)$ no capacitor se a resistência é R, a capacitância é C e a diferença de potencial, $E(t)$.

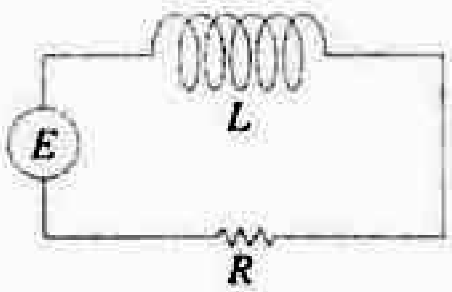


Figura 1.17

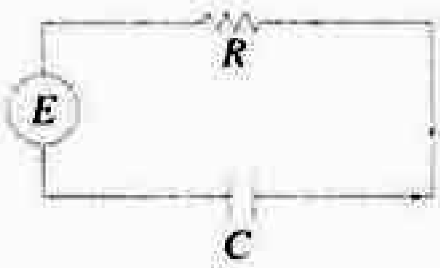


Figura 1.18

7. Suponha que a água de um tanque esteja sendo drenada por um orifício circular de área A_0 localizado no fundo do tanque. Foi mostrado experimentalmente que, quando o atrito da água no orifício é levado em consideração, o volume de água que sai do tanque por segundo é aproximadamente $0{,}6\,A_0\sqrt{2gh}$. Encontre a equação diferencial para a altura h de água em qualquer instante t no tanque cúbico da Figura 1.19. O raio do orifício mede 2 cm e $g = 10\ \text{m/s}^2$.

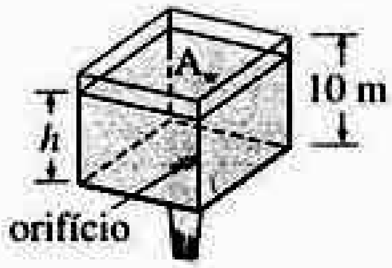


Figura 1.19

8. Suponha um tanque na forma de um cilindro circular reto de raio 2 m e altura 10 m. O tanque está inicialmente cheio de água, e a água vaza por um orifício circular de raio 1/2 cm no fundo. Use as informações do Problema 7 para obter a equação diferencial para a altura h da água em qualquer instante de tempo t.

9. Um tanque de água tem a forma de um hemisfério com raio 5 m. A água vaza por um orifício circular de 1 cm no fundo plano. Use as informações do Problema 7 para obter a equação diferencial para a altura h da água com relação ao tempo t.

10. A taxa de decaimento de uma substância radioativa é proporcional à quantidade $A(t)$ da substância remanescente no instante t. Determine a equação diferencial para a quantidade $A(t)$.

11. Uma droga é injetada na corrente sangüínea de um paciente a uma taxa constante de r gramas por segundo. Simultaneamente, a droga é removida a uma taxa proporcional à quantidade $x(t)$ de droga presente no instante t. Determine a equação diferencial que governa a quantidade $x(t)$.

12. Um projétil atirado de uma arma tem peso $w = mg$ e velocidade v tangente à trajetória de seu movimento. Desprezando a resistência do ar e todas as outras forças exceto seu peso, encontre o sistema de equações diferenciais que descreve o movimento. Veja a Figura 1.20. [*Sugestão:* Use a segunda lei de Newton na direção x e y.]

13. Determine as equações do movimento se o projétil no Problema 12 encontrar uma força de retardamento **k** (de magnitude k) agindo tangencialmente à trajetória mas, oposta ao movimento. Veja a Figura 1.21. [*Sugestão:* **k** é um múltiplo da velocidade, digamos c**v**.]

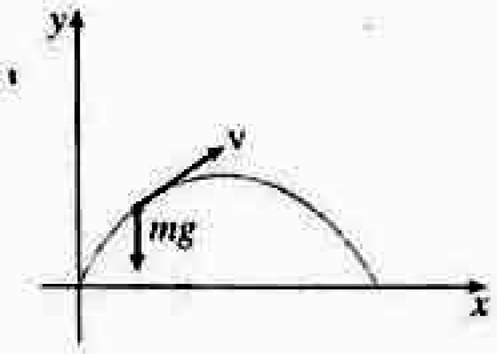


Figura 1.20

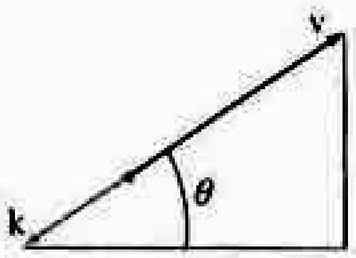


Figura 1.21

14. Dois reagentes químicos A e B são usados para formar um novo composto químico C. Supondo que as concentrações de A e B decrescem pela mesma quantidade de composto C formado, encontre a equação diferencial que governa a concentração $x(t)$ do composto C se a taxa a que a reação química ocorre é proporcional ao produto das concentrações remanescentes de A e B.

15. Uma curva C no plano reflete os raios de luz de tal modo que todo raio L paralelo ao eixo y é refletido para um único ponto 0. Determine a equação diferencial para a função $y = f(x)$ que descreve a forma da curva C. (O fato de o ângulo de incidência ser igual ao ângulo de reflexão é um princípio da ótica.) [*Sugestão:* a Figura 1.22 mostra que a inclinação da reta tangente em $P(x, y)$ é $\pi/2 - \theta$ e podemos escrever $\phi = 2\theta$. (Por quê?) Não tenha receio de usar as identidades trigonométricas.]

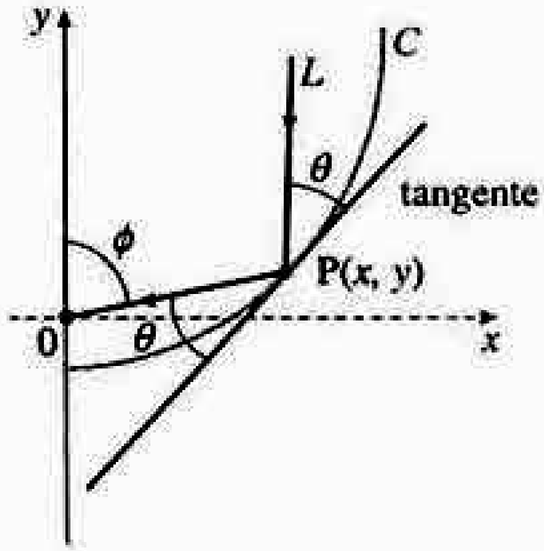


Figura 1.22

16. Um barril em forma cilíndrica, com s metros de diâmetro e w newtons de peso, flutua na água. O barril se movimenta para cima e para baixo ao longo de uma linha vertical. Usando a Figura 1.23(b), determine a equação diferencial para o deslocamento vertical $y(t)$, supondo a origem no eixo vertical na superfície da água quando o barril está em repouso. Use o princípio de Archimedes: o impulso da água no barril é igual ao peso da água deslocada. A densidade da água é $1000\,\text{kg/m}^3$. Suponha o sentido positivo para baixo e ignore a resistência da água.

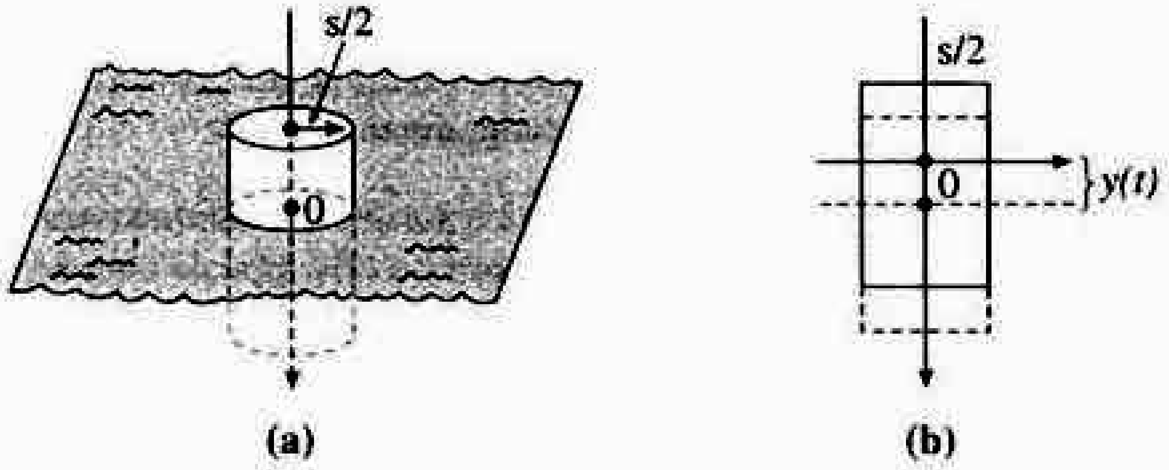


Figura 1.23

17. Um foguete é lançado da superfície da terra verticalmente para cima. Depois de esgotado todo o combustível, a massa do foguete é constante igual a m. Use a segunda lei de Newton para o movimento e o fato de que a força da gravidade é inversamente proporcional ao quadrado da distância para encontrar a equação diferencial da distância y, do centro da terra ao foguete, em qualquer instante após a queima total do combustível. Enuncie condições iniciais apropriadas (no instante $t = 0$) associadas com essa equação diferencial.

18. A segunda lei de Newton $F = ma$ pode ser escrita como $F = d/dt(mv)$. Quando a massa de um objeto não é constante, esta última formulação é usada. A massa $m(t)$ de um foguete muda enquanto seu combustível é consumido.* Se $v(t)$ denota sua velocidade no instante t, pode ser mostrado que

$$-mg = m\frac{dv}{dt} - V\frac{dm}{dt}, \tag{29}$$

em que V é a velocidade de escape dos gases em relação ao foguete. Use (29) para encontrar a equação diferencial de v, supondo conhecido que $m(t) = m_0 - at$ e $V = -b$, em que m_0, a e b são constantes.

19. Uma pessoa P, partindo da origem, move-se na direção positiva do eixo x, puxando um peso ao longo da curva C (chamada **tratriz**), como mostrado na Figura 1.24. O peso, inicialmente localizado no eixo y em $(0, s)$, é puxado por uma corda de comprimento s, que é mantida esticada durante todo o movimento. Encontre a equação diferencial da trajetória do movimento. [*Sugestão:* A corda fica sempre tangente a C; considere o ângulo de inclinação θ como mostrado na figura.]

20. Suponha uma abertura passando pelo centro da terra. Um corpo de massa m é atirado na abertura. Denote por r a distância do centro da terra à massa no instante t. Veja a Figura 1.25.

(a) Sejam M a massa da terra e M_r a massa da porção da terra limitada por uma esfera de raio r. A força da gravidade atuando em m é $F = -kM_r m/r^2$, em que o sinal de subtração indica que a força é uma atração. Use este fato para mostrar que

$$F = -k\frac{mM}{R^3}r.$$

[*Sugestão:* Suponha que a terra seja homogênea, isto é, a densidade é constante. Use massa = densidade × volume.]

---

* Estamos supondo que a massa total : *massa do veículo + massa do combustível + massa dos gases de escape* é constante. Neste caso, $m(t)$ = *massa do veículo + massa do combustível.*

(b) Use a segunda lei de Newton e o resultado da parte (a) para deduzir a equação diferencial

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \omega^2 r = 0,$$

em que $\omega^2 = kM/R^3 = g/R$.

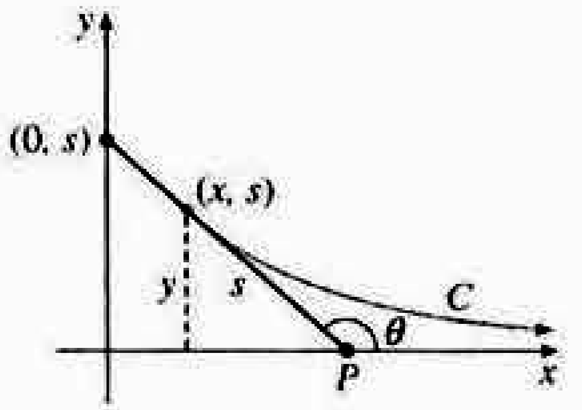


Figura 1.24

Figura 1.25

21. Em teoria de aprendizagem, a taxa à qual um assunto é memorizado é proporcional à quantidade ainda a ser memorizada. Se M denota a quantidade total a ser memorizada e $A(t)$ a quantidade memorizada no instante t, encontre a equação diferencial para A.

22. No Problema 21, suponha que a quantidade de material esquecida é proporcional à quantidade memorizada no instante t. Qual é a equação diferencial para A quando o esquecimento é levado em conta?

Capítulo 1 *REVISÃO*

Classificamos uma equação diferencial quanto ao tipo: **ordinária** ou **parcial**; quanto à **ordem**; e quanto à linearidade: **linear** ou **não-linear**.

Uma **solução** para uma equação diferencial é qualquer função suficientemente diferenciável que satisfaça a equação em algum intervalo.

Quando resolvemos uma equação diferencial ordinária de n-ésima ordem, esperamos encontrar uma família de soluções a n-parâmetros. Uma **solução particular** é qualquer solução, não dependente de parâmetros, que satisfaça a equação diferencial. Uma **solução singular** é qualquer solução que não pode ser obtida da família de soluções a n-parâmetros através de escolha dos parâmetros. Quando uma família de soluções a n-parâmetros fornece todas as soluções para uma equação diferencial em algum intervalo, ela é chamada solução **geral**, ou **completa**.

Na análise de um problema físico, muitas equações diferenciais podem ser obtidas igualando duas diferentes formulações empíricas da mesma situação. Por exemplo, uma equação diferencial sobre cinética pode, em geral, ser obtida simplesmente igualando a segunda lei de Newton sobre o movimento com as forças resultantes que atuam em um corpo.

Capítulo 1 *EXERCÍCIOS DE REVISÃO*

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 441.

Nos Problemas 1-4, classifique a equação dada quanto ao tipo e à ordem. Classifique as equações diferenciais ordinárias quanto à linearidade.

1. $(2xy - y^2)\,dx + e^x dy = 0$

2. $(\operatorname{sen} xy)y''' + 4xy' = 0$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$

4. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + y = x^2$

Nos Problemas 5-8, verifique que a função indicada é uma solução para a equação diferencial dada.

5. $y' + 2xy = 2 + x^2 + y^2$; $y = x + \operatorname{tg} x$

6. $x^2y'' + xy' + y = 0$; $y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x)$, $x > 0$

7. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 6$; $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + 3$

8. $y^{(4)} - 16y = 0$; $y = \operatorname{sen} 2x + \cosh 2x$

Nos Problemas 9-16, determine, por inspeção, pelo menos uma solução para a equação diferencial dada.

9. $y' = 2x$

10. $\dfrac{dy}{dx} = 5y$

11. $y'' = 1$

12. $y' = y^3 - 8$

13. $y'' = y'$

14. $2y\dfrac{dy}{dx} = 1$

15. $y'' = -y$

16. $y'' = y$

17. Determine um intervalo, no qual $y^2 - 2y = x^2 - x - 1$ define uma solução para $2(y - 1)\,dy + (1 - 2x)\,dx = 0$.

18. Explique por que a equação diferencial

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{4 - y^2}{4 - x^2}$$

não possui solução real em $|x| < 2$, $|y| > 2$. Há outras regiões do plano xy em que a equação não possui solução?

19. O tanque cônico, mostrado na Figura 1.26, derrama água por um orifício no fundo. Se a área da seção transversal do orifício é $1/4 m^2$, encontre a equação diferencial que representa a altura da água h em relação ao tempo t. Ignore a força de atrito do orifício.

20. Um peso de 96 newtons desliza por um plano inclinado, fazendo um ângulo de 30° com a horizontal. Se o coeficiente de atrito é μ, determine a equação diferencial para a velocidade $v(t)$ do peso no instante t. Considere o fato de que a força de atrito no sentido oposto ao movimento é μN, em que N é a componente normal do peso. Veja a Figura 1.27.

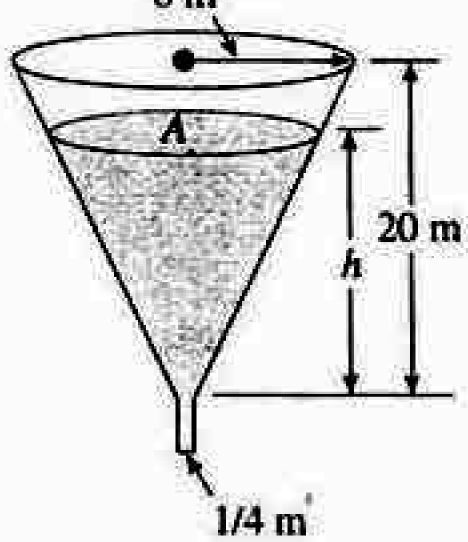


Figura 1.26

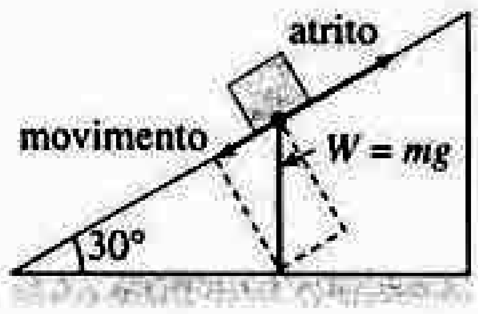


Figura 1.27

Capítulo 2

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Conceitos Importantes

Problema de valor inicial
Condição inicial
Existência de uma solução
Unicidade de uma solução
Separação de variáveis
Função homogênea
Equação homogênea
Diferencial exata
Equação exata
Fator de integração
Equação linear
Solução geral

Estamos agora em posição de resolver algumas equações diferenciais. Começamos com as equações diferenciais de primeira ordem.

Se uma equação diferencial de primeira ordem puder ser resolvida, veremos que a técnica ou método para resolvê-la depende do tipo da equação de primeira ordem com que estamos lidando. Durante anos, muitos matemáticos se esforçaram para resolver diversos tipos particulares de equações. Por isso, há vários métodos de solução; o que funciona para um tipo de equação de primeira ordem não se aplica necessariamente a outros tipos de equação. Embora consideremos métodos de solução para sete tipos clássicos de equações neste capítulo, centralizamos nossa atenção em quatro tipos de equações. Alguns desses quatro tipos são importantes nas aplicações.

2.1 TEORIA PRELIMINAR

Problema de Valor Inicial

Estamos interessados em resolver um equação diferencial de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

sujeita à condição inicial $y(x_0) = y_0$, em que x_0 é um número no intervalo I e y_0 é um número real arbitrário. O problema

$$\begin{aligned} &\textit{Resolva: } \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ &\textit{Sujeito a: } y(x_0) = y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

é chamado de **problema de valor inicial**. Em termos geométricos, estamos procurando uma solução para a equação diferencial, definida em algum intervalo I tal que o gráfico da solução passe por um ponto (x_0, y_0) determinado *a priori*. Veja a Figura 2.1.

EXEMPLO 1

Vimos (páginas 9-10) que $y = ce^x$ é uma família a um parâmetro de soluções para $y' = y$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Se especificarmos, digamos, $y(0) = 3$, então substituindo $x = 0$, $y = 3$ na família, obteremos $3 = ce^0 = c$. Logo, como mostrado na Figura 2.2, a função

$$y = 3e^x$$

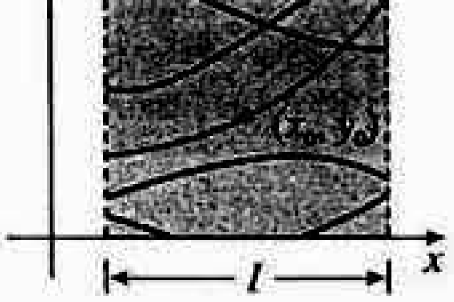


Figura 2.1

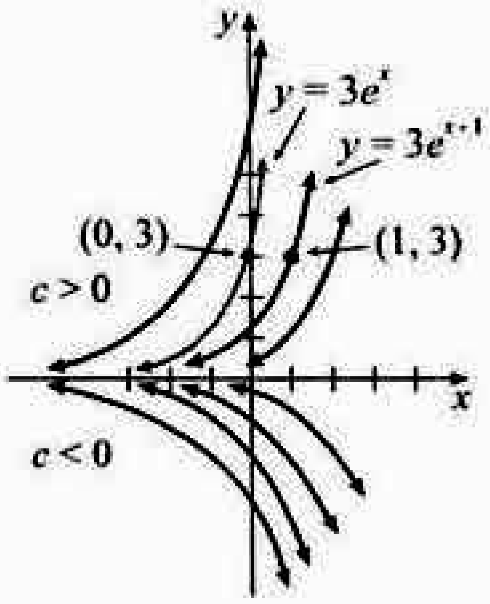


Figura 2.2

* Neste texto, supomos que uma equação diferencial $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ possa ser colocada na forma $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Há exceções.

é uma solução para o problema de valor inicial

$$y' = y, \quad y(0) = 3.$$

Se tivéssemos pedido um solução de $y' = y$ que passasse pelo ponto (1, 3) em vez de (0, 3), então $y(1) = 3$ iria nos dar $c = 3e^{-1}$, e daí, $y = 3e^{x-1}$. O gráfico dessa solução está também indicado na Figura 2.2. ■

A questão fundamental surge quando consideramos um problema de valor inicial como (2):

Existe uma solução para o problema?
Se existe uma solução, ela é única?

Em outras palavras, a equação diferencial $dy/dx = f(x, y)$ possui uma solução cujo gráfico passa pelo ponto (x_0, y_0)? E será que essa solução, se existir, é única?

Como os próximos exemplos mostrarão, a resposta à segunda questão é: algumas vezes não.

EXEMPLO 2

Você deve verificar que cada uma das funções $y = 0$ e $y = x^4/16$ satisfaça a equação diferencial e a condição inicial no problema

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0.$$

Como ilustrado na Figura 2.3, os gráficos de ambas as funções passam pelo ponto (0, 0).

Em geral, deseja-se saber, antes de considerar um problema de valor inicial, se uma solução existe e, quando existe, se é a única solução para o problema. O segundo teorema, devido a Picard,* nos dá condições suficientes para garantir existência e unicidade de soluções.

TEOREMA 2.1 Existência de uma Única Solução

Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x, y)$ e $\partial f/\partial y$ são contínuas em R, então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida em I que satisfaz o problema de valor inicial (2).

* **Charles Émile Picard** (1856-1941) Picard foi um dos proeminentes matemáticos franceses do final do século passado e começo deste século. Fez significativas contribuições nas áreas de equações diferenciais e variável complexa. Em 1899, Picard lecionou na Universidade Clark em Worcester, estado de Massachusetts, Estados Unidos.

O resultado anterior é um dos mais populares teoremas de existência e unicidade para equações diferenciais de primeira ordem, porque os critérios de continuidade de $f(x, y)$ e $\partial f/\partial y$ são relativamente fáceis de ser verificados. Em geral, não é possível determinar um intervalo específico I no qual uma solução está definida sem realmente resolver a equação diferencial (veja Problema 16). A geometria do Teorema 2.1 está ilustrada na Figura 2.4. ■

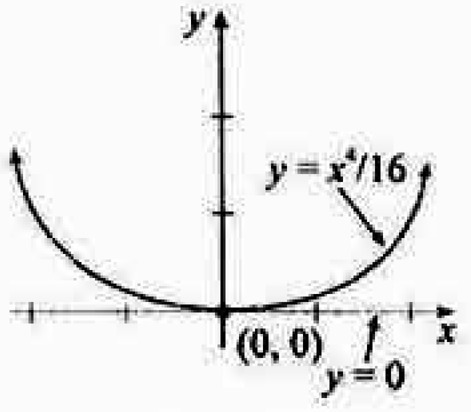


Figura 2.3

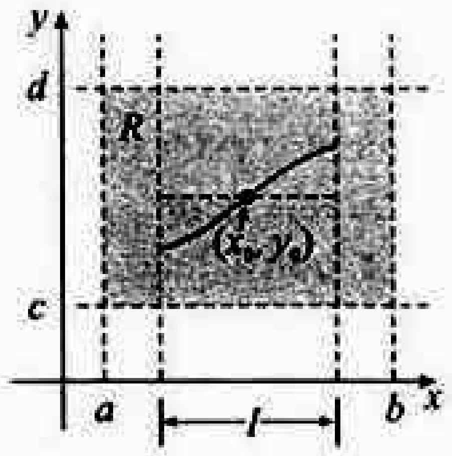


Figura 2.4

EXEMPLO 3

Vimos no Exemplo 2 que a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$$

possui pelo menos duas soluções cujos gráficos passam por (0, 0). As funções

$$f(x, y) = xy^{1/2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$$

são contínuas no semiplano superior definido por $y > 0$. Concluímos do Teorema 2.1 que, dado um ponto qualquer (x_0, y_0) com $y_0 > 0$ (por exemplo, (0, 1), existe algum intervalo em torno de x_0 no qual a equação diferencial dada possui uma única solução $y(t)$, tal que $y(x_0) = y_0$. ■

EXEMPLO 4

O Teorema 2.1 garante que existe um intervalo contendo $x = 0$ no qual $y = 3e^x$ é a única solução para o problema de valor inicial do Exemplo 1:

$$y' = y, \quad y(0) = 3.$$

Isso segue-se do fato de que $f(x, y) = y$ e $\partial f/\partial y = 1$ são contínuas em todo o plano xy. Pode ser mostrado ainda que esse intervalo seja $(-\infty, \infty)$. ■

EXEMPLO 5

Para

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

observamos que $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $\partial f/\partial y = 2y$ são contínuas em todo o plano xy. Logo, por qualquer ponto (x_0, y_0) passa uma e somente uma solução para a equação diferencial.

Nota **(i)** Devemos estar cientes da distinção entre a *existência* de uma solução e *poder exibir* tal solução. Evidentemente, se encontramos uma solução exibindo-a, podemos dizer que ela existe, mas, por outro lado, uma solução pode existir e não ser possível expressá-la. Pelo Exemplo 5, sabemos que uma solução para o problema $dy/dx = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$ existe em algum intervalo em torno de $x = 0$ e é única. Porém, a equação não pode ser resolvida em termos de funções elementares; podemos expressar uma solução aproximada usando os métodos do Capítulo 9.

(ii) As condições enunciadas no Teorema 2.1 são *suficientes*, mas não *necessárias*. Quando $f(x, y)$ e $\partial f/\partial y$ são contínuas em uma região retangular R, segue-se sempre que existe uma única solução para (2) quando (x_0, y_0) é um ponto interior a R. Porém, se as condições enunciadas nas hipóteses do teorema não são satisfeitas, então o problema de valor inicial (2) pode ter ou não solução, ter mais de uma solução ou ter uma única solução. Ainda, a condição de continuidade de $\partial f/\partial y$ pode ser enfraquecida um pouco sem alteração da conclusão do teorema. Este resultado é uma forma mais forte do teorema, mas infelizmente sua aplicabilidade não é tão fácil quanto a do Teorema 2. Na verdade, se não estamos interessados em unicidade, então um famoso teorema elaborado pelo matemático italiano Giuseppe Peano diz que a continuidade de $f(x, y)$ em R é suficiente para garantir a existência de pelo menos uma solução para $dy/dx = f(x, y)$ passando por um ponto (x_0, y_0) interior a R.

2.1 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 441.

Nos Problemas 1-10, determine uma região do plano xy para a qual a equação diferencial teria uma única solução passando por um ponto (x_0, y_0) na região.

1. $\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$

2. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

3. $x\frac{dy}{dx} = y$

4. $\frac{dy}{dx} - y = x$

5. $(4 - y^2)y' = x^2$

6. $(1 + y^3)y' = x^2$

7. $(x^2 + y^2)y' = y^2$

8. $(y - x)y' = y + x$

9. $\dfrac{dy}{dx} = x^3 \cos y$

10. $\dfrac{dy}{dx} = (x - 1)e^{y/(x-1)}$

Nos Problemas 11 e 12, determine, por inspeção, pelo menos duas soluções para o problema de valor inicial dado.

11. $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$

12. $x\dfrac{dy}{dx} = 2y$, $y(0) = 0$

13. Por inspeção, determine uma solução para a equação diferencial não-linear $y' = y^3$ que satisfaça $y(0) = 0$. A solução é única?

14. Por inspeção, encontre uma solução para o problema de valor inicial

$$y' = |y - 1|, \quad y(0) = 1.$$

Diga por que as condições do Teorema 2.1 não são satisfeitas para essa equação diferencial. Embora não possamos provar, a solução para esse problema de valor inicial é única.

15. Verifique que $y = cx$ é uma solução para a equação diferencial $xy' = y$ para todo valor do parâmetro c. Encontre pelo menos duas soluções para o problema de valor inicial

$$xy' = y, \quad y(0) = 0.$$

Observe que a função definida por partes

$$y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

satisfaz a condição $y(0) = 0$. Ela é uma solução para o problema de valor inicial?

16. **(a)** Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2.$$

Determine uma região do plano xy tal que a equação tenha uma única solução passando por um ponto (x_0, y_0) da região.

(b) Formalmente, mostre que $y = \operatorname{tg} x$ satisfaz a equação diferencial e a condição inicial $y(0) = 0$.

(c) Explique por que $y = \operatorname{tg} x$ não é uma solução para o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y(0) = 0,$$

no intervalo $(-2, 2)$.

(d) Explique por que $y = \operatorname{tg} x$ é uma solução para o problema de valor inicial da parte (c) no intervalo $(-1, 1)$.

Nos Problemas 17-20, verifique se o Teorema 2.1 garante unicidade de solução para a equação diferencial $y' = \sqrt{y^2 - 9}$, passando pelo ponto dado.

17. $(1, 4)$

18. $(5, 3)$

19. $(2, -3)$

20. $(-1, 1)$

2.2 VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Nota ao estudante: Na resolução para uma equação diferencial, você terá freqüentemente que utilizar, digamos, integração por partes, frações parciais ou possivelmente uma substituição. Será proveitoso gastar alguns minutos de seu tempo na revisão de algumas técnicas de integração.

Começamos nosso estudo da metodologia de resolução de equações de primeira ordem com a mais simples de todas as equações.

Se $g(x)$ é uma função contínua dada, então a equação de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{1}$$

pode ser resolvida por integração. A solução para (1) é

$$y = \int g(x)\,dx + c.$$

EXEMPLO 1

Resolva (a) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + e^{2x}$ e (b) $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x$.

Solução Como ilustrado acima, ambas as equações podem ser resolvidas por integração.

(a) $y = \int (1 + e^{2x})\,dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + c$

(b) $y = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$ ■

A equação (1), bem como seu método de resolução, é apenas um caso especial do seguinte:

DEFINIÇÃO 2.1 Equação Separável

Uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

é chamada **separável** ou tem **variáveis separáveis**.

Observe que uma equação separável pode ser escrita como

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x). \tag{2}$$

É imediato que (2) se reduz a (1) quando $h(y) = 1$.

Agora, se $y = f(x)$ denota uma solução para (2), temos

$$h(f(x))f'(x) = g(x),$$

logo,

$$\int h(f(x))f'(x)\,dx = \int g(x)\,dx + c. \tag{3}$$

Mas $dy = f'(x)\,dx$, assim (3) é o mesmo que

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx + c. \tag{4}$$

Método de Solução

A equação (4) indica o procedimento na resolução para equações diferenciais separáveis. Uma família a um parâmetro de soluções, em geral parada implicitamente, é obtida integrando ambos os lados de $h(y)\,dy = g(x)\,dx$.

Nota Não há necessidade de usar duas constantes na integração de uma equação separável pois,

$$\int h(y)\,dy + c_1 = \int g(x)\,dx + c_2$$

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx + c_2 - c_1 = \int g(x)\,dx + c,$$

em que c é completamente arbitrária. Em várias instâncias, no decorrer dos capítulos seguintes, não hesitaremos em indexar constantes de uma maneira que possa ser mais conveniente para uma dada equação. Por exemplo, múltiplos de constantes ou combinações de constantes podem ser trocados por uma única constante.

EXEMPLO 2

Resolva $(1 + x)\,dy - y\,dx = 0$.

Solução Dividindo por $(1 + x)y$, podemos escrever, $dy/y = dx/(1 + x)$, da qual se segue que

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1 + x}.$$

$$\ln|y| = \ln|1 + x| + c_1$$

$$y = e^{\ln|1 + x| + c_1}$$

$$= e^{\ln|1 + x|} \times e^{c_1}$$

$$= |1 + x|e^{c_1}.$$

$$= \pm e^{c_1}(1 + x)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} |1 + x| = 1 + x,\ x \geq -1 \\ |1 + x| = -(1 + x),\ x < -1 \end{array}}$$

Trocando $\pm e^{c_1}$ por c, temos, $y = c(1 + x)$.

Solução Alternativa Como cada integral resulta em um logaritmo, uma escolha conveniente para a constante de integração seria $\ln|c|$ em vez de c:

$$\ln|y| = \ln|1 + x| + \ln|c|$$

ou

$$\ln|y| = \ln|c(1 + x)|$$

assim,

$$y = c(1 + x)$$

Mesmo que as integrais indefinidas não sejam *todas* logarítmicas, ainda pode ser vantajoso usar $\ln|c|$. Porém, nenhuma regra pode ser dada. ■

EXEMPLO 3

Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(4) = 3.$$

Solução De $y\,dy = -x\,dx$, obtemos

$$\int y\,dy = -\int x\,dx \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_1.$$

Essa solução pode ser escrita como $x^2 + y^2 = c^2$, trocando as constantes $2c_1$ por c^2. A solução representa uma família de círculos concêntricos.

Agora, quando $x = 4$, $y = 3$ temos $16 + 9 = 25 = c^2$. Logo, o problema de valor inicial determina $x^2 + y^2 = 25$. Em vista do Teorema 2.1, podemos concluir que este é o único círculo da família que passa pelo ponto (4, 3). Veja a Figura 2.5. ■

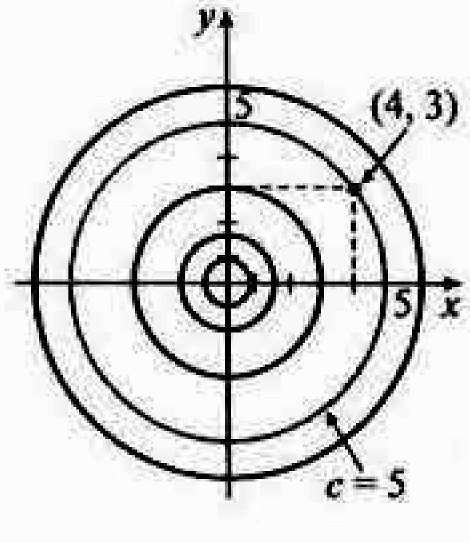


Figura 2.5

EXEMPLO 4

Resolva
$$xe^{-y}\operatorname{sen} x\, dx - y\, dy = 0.$$

Solução Depois de multiplicar por e^y, obtemos

$$x \operatorname{sen} x\, dx = ye^y\, dy.$$

A integração por partes em ambos os lados da equação resulta em

$$-x\cos x + \operatorname{sen} x = ye^y - e^y + c.$$

■

EXEMPLO 5

Resolva
$$xy^4\, dx + (y^2 + 2)e^{-3x}\, dy = 0. \tag{5}$$

Solução Multiplicando a equação dada por e^{3x} e dividindo por y^4, obtemos

$$xe^{3x}\, dx + \frac{y^2 + 2}{y^4}\, dy = 0 \text{ ou } xe^{3x}\, dx + (y^{-2} + 2y^{-4})\, dy = 0. \tag{6}$$

Usando integração por partes no primeiro termo, temos

$$\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} - y^{-1} - \frac{2}{3}y^{-3} = c_1.$$

A família a um parâmetro de soluções pode também ser escrita como

$$e^{3x}(3x - 1) = \frac{9}{y} + \frac{6}{y^3} + c, \tag{7}$$

em que a constante $9c_1$ foi trocada por c. ■

Dois pontos devem ser mencionados neste instante. Primeiro, a menos que seja importante ou conveniente, não há necessidade de tentar resolver y como função de x em uma expressão que representa uma família de soluções. A equação (7) mostra que essa tarefa pode apresentar problemas que vão além da enfadonha manipulação de símbolos. Como conseqüência, é freqüente o caso em que o intervalo no qual uma solução é válida não é aparente. Segundo, deve-se estar atento à separação de variável para ter certeza de que os divisores não são nulos. Uma solução constante pode facilmente ser esquecida no embaralhamento do processo de resolução para o problema. No Exemplo 5, observe que $y = 0$ é uma solução para (5), mas não pertence ao conjunto de soluções definido em (7).

EXEMPLO 6

Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4, \quad y(0) = -2.$$

Solução Colocamos a equação na forma

$$\frac{dy}{y^2 - 4} = dx \tag{8}$$

e usamos frações parciais no lado esquerdo. Temos

$$\left[\frac{-\frac{1}{4}}{y+2} + \frac{\frac{1}{4}}{y-2}\right]dy = dx \tag{9}$$

assim

$$-\frac{1}{4}\ln|y + 2| + \frac{1}{4}\ln|y - 2| = x + c_1. \tag{10}$$

Logo,

$$\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = 4x + c_2$$

e

$$\frac{y-2}{y+2} = ce^{4x},$$

em que trocamos $4c_1$ por c_2 e e^{c_2} por c. Finalmente, resolvendo y na última equação, obtemos

$$y = 2\frac{1 + ce^{4x}}{1 - ce^{4x}}. \tag{11}$$

A substituição $x = 0$, $y = -2$ acarreta o seguinte dilema

$$-2 = 2\frac{1 + c}{1 - c}$$

$$-1 + c = 1 + c \quad \text{ou} \quad -1 = 1.$$

Examinaremos a equação diferencial mais cuidadosamente. O fato é: a equação

$$\frac{dy}{dx} = (y + 2)(y - 2)$$

é satisfeita por duas funções constantes, a saber, $y = -2$ e $y = 2$. Inspecionando as equações (8), (9) e (10), vemos que as soluções $y = -2$ e $y = 2$ não foram consideradas (pois anulariam o denominador). Mas é interessante observar que a solução $y = 2$ pode ser subseqüentemente recuperada fazendo $c = 0$ em (11). Porém nenhum valor de c nos dará a solução $y = -2$. Esta última função constante é a única solução para o problema de valor inicial. Veja a Figura 2.6. ■

Se, no Exemplo 6, tivéssemos usado $\ln|c|$ como a constante de integração, então a expressão da família a um parâmetro de soluções seria

$$y = 2\frac{c + e^{4x}}{c - e^{4x}}. \tag{12}$$

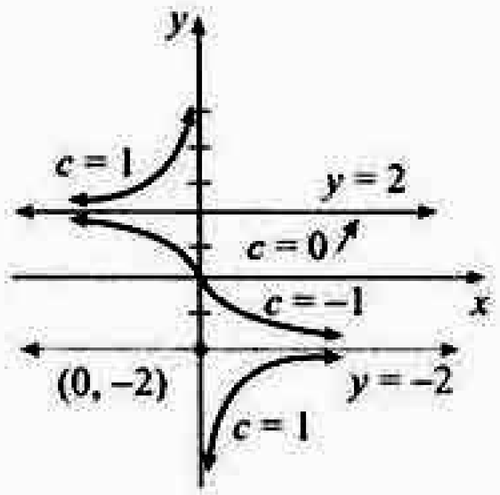


Figura 2.6

Note que (12) se reduz a $y = -2$ quando $c = 0$, mas agora nenhum valor de c nos dará a solução constante $y = 2$.

Quando uma solução para um problema de valor inicial pode ser obtida escolhendo um parâmetro particular em uma família a um parâmetro de soluções para uma equação diferencial de primeira ordem, os estudantes (e os professores) naturalmente se contentam com isso. Na Seção 2.1, vimos porém que uma solução para um problema de valor inicial pode não ser única. Por exemplo, o problema

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0, \tag{13}$$

possui pelo menos duas soluções, a saber, $y = 0$ e $y = x^4/16$. Estamos agora em posição de resolver a equação. Separando as variáveis

$$y^{-1/2}\,dy = x\,dx$$

e integrando temos

$$2y^{1/2} = \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \text{ou} \quad y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2.$$

Quando $x = 0$, $y = 0$, então necessariamente $c = 0$. Logo, $y = x^4/16$. A solução $y = 0$ foi desconsiderada quando dividimos por $y^{1/2}$. Ainda, o problema de valor inicial (13) possui infinitas soluções, pois, para cada escolha do parâmetro $a \geq 0$, a função definida por partes

$$y = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{(x^2 - a^2)^2}{16}, & x \geq a \end{cases}$$

satisfaz o problema de valor inicial. Veja a Figura 2.7

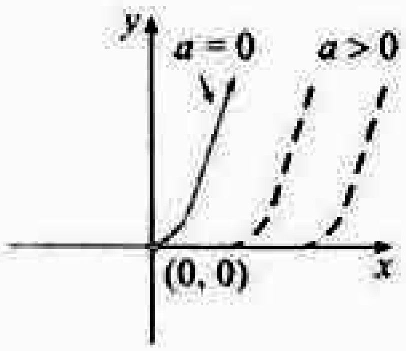


Figura 2.7

Nota Vimos em alguns exemplos que a constante na família a um parâmetro de soluções para uma equação diferencial de primeira ordem pode ser trocada quando conveniente. Também, pode facilmente acontecer que duas maneiras distintas de resolução levem a respostas diferentes. Por exemplo, por separação de variáveis, podemos mostrar que

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = c \text{ ou } \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} c \text{ ou } \frac{x+y}{1-xy} = c.$$

são famílias a um parâmetro de soluções para $(1 + y^2)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$. Quando você estiver estudando as próximas seções, tenha em mente o fato de que famílias de soluções podem ser *equivalentes* no seguinte sentido: uma família pode ser obtida de outra por uma troca de constante ou por manipulação algébrica e trigonométrica.

2.2 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 441.

Nos Problemas 1-40, resolva a equação diferencial dada por separação de variável.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 5x$

2. $\dfrac{dy}{dx} = (x + 1)^2$

3. $dx + e^{3x}\,dy = 0$

4. $dx - x^2\,dy = 0$

5. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} = x + 6$

6. $e^x \dfrac{dy}{dx} = 2x$

7. $xy' = 4y$

8. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{x^2}$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y + 1}{x}$

11. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x^2y^2}{1 + x}$

12. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1 + 2y^2}{y \operatorname{sen} x}$

13. $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

14. $e^x y \dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

15. $(4y + yx^2)\,dy - (2x + xy^2)\,dx = 0$

16. $(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)\,dy = y^2\,dx$

17. $2y(x + 1)\,dy = x\,dx$

18. $x^2y^2\,dy = (y + 1)\,dx$

19. $y \ln x \dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$

20. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2y+3}{4x+5}\right)^2$

21. $\dfrac{dS}{dr} = kS$

22. $\dfrac{dQ}{dt} = k(Q - 70)$

23. $\dfrac{dP}{dt} = P - P^2$

24. $\dfrac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$

25. $\sec^2 x\,dy + \operatorname{cosec} y\,dx = 0$

26. $\operatorname{sen} 3x\,dx + 2y\cos^3 3x\,dy = 0$

27. $e^y \operatorname{sen} 2x\,dx + \cos x(e^{2y} - y)\,dy = 0$

28. $\sec x\,dy = x \operatorname{cotg} y\,dx$

29. $(e^y + 1)^2 e^{-y}\,dx + (e^x + 1)^3 e^{-x}\,dy = 0$

30. $\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dx} = (1 + x^2)^{-1/2}(1 + y^2)^{1/2}$

31. $(y - yx^2)\dfrac{dy}{dx} = (y + 1)^2$

32. $2\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{2x}{y}$

33. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$

34. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$

35. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x(\cos 2y - \cos^2 y)$

36. $\sec y \dfrac{dy}{dx} + \operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}(x + y)$

37. $x\sqrt{1 - y^2}\,dx = dy$

38. $y(4 - x^2)^{1/2}\,dy = \left(4 + y^2\right)^{1/2}\,dx$

39. $(e^x + e^{-x})\dfrac{dy}{dx} = y^2$

40. $(x + \sqrt{x})\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{y}$

Nos Problemas 41-48, resolva a equação diferencial dada sujeita à condição inicial indicada.

41. $(e^{-y} + 1)\operatorname{sen} x\,dx = (1 + \cos x)\,dy$, $y(0) = 0$

42. $(1 + x^4)\,dy + x(1 + 4y^2)\,dx = 0$, $y(1) = 0$

43. $y\,dy = 4x(y^2 + 1)^{1/2}\,dx$, $y(0) = 1$

44. $\dfrac{dy}{dt} + ty = y$, $y(1) = 3$

45. $\dfrac{dx}{dy} = 4(x^2 + 1)$, $x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

46. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - 1}{x^2 - 1}$, $y(2) = 2$

47. $x^2y' = y - xy$, $y(-1) = -1$

48. $y' + 2y = 1$, $y(0) = \dfrac{5}{2}$

Nos Problemas 49 e 50, encontre uma solução para a equação diferencial dada que passe pelos pontos indicados.

49. $\dfrac{dy}{dx} - y^2 = -9$

(a) $(0, 0)$ **(b)** $(0, 3)$ **(c)** $\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$

50. $x\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y$

(a) $(0, 1)$ **(b)** $(0, 0)$ **(c)** $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

51. Encontre uma solução singular para a equação do Problema 37.

52. Encontre uma solução singular para a equação do Problema 39.

A uma pequena mudança (perturbação) na condição inicial ou na própria equação, freqüentemente corresponde uma mudança radical na solução para uma equação diferencial. Nos Problemas 53-56, compare as soluções dos problemas de valor inicial dados.

53. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2, \; y(0) = 1$

54. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2, \; y(0) = 1{,}01$

55. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2 + 0{,}01, \; y(0) = 1$

56. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2 - 0{,}01, \; y(0) = 1$

Uma equação diferencial da forma $dy/dx = f(ax + by + c)$, $b \neq 0$, pode sempre ser reduzida a uma equação com variáveis separáveis por meio da substituição $u = ax + by + c$. Use este procedimento para resolver os Problemas 57-62.

57. $\dfrac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$

58. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x - y}{x + y}$

59. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}^2(x + y)$

60. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x + y)$

61. $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$

62. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + e^{y - x + 5}$

2.3 EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

Antes de considerar o conceito de equação **diferencial homogênea de primeira ordem** e seu método de solução, precisamos primeiro examinar de perto a natureza de uma **função homogênea**. Começamos com a definição deste conceito.