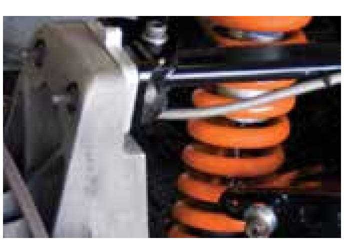
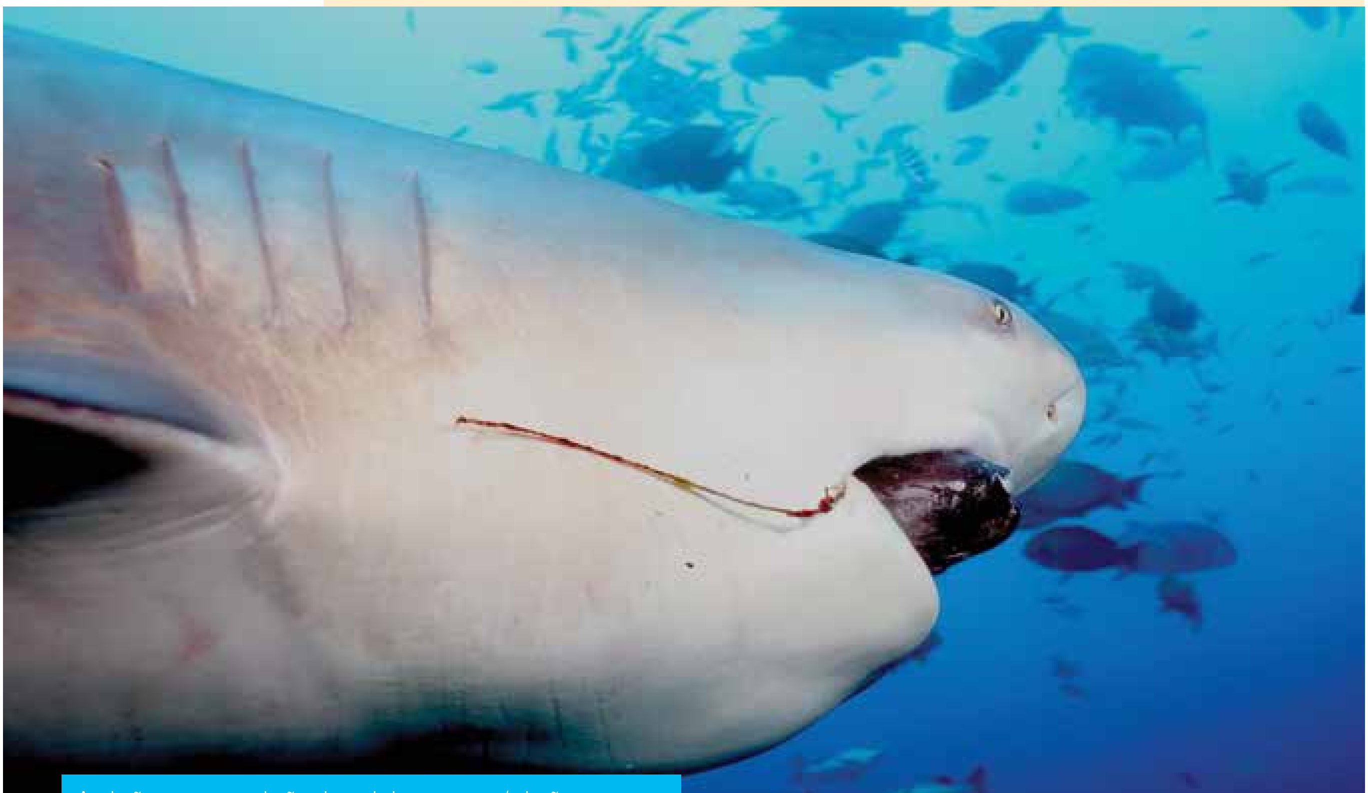
Sumário



Índice Remissivo I1

Volume I

9 Equações Diferenciais



A relação entre as populações de predadores e presas (tubarões e peixes, joaninhas e pulgões, lobos e coelhos) é explorada pelo uso de pares de equações diferenciais na última seção deste capítulo.

Ciurzynski/Shutterstock

Talvez a aplicação mais importante do cálculo sejam as equações diferenciais. Quando cientistas físicos ou cientistas sociais usam cálculo, muitas vezes o fazem para analisar uma equação diferencial que tenha surgido no processo de modelagem de algum fenômeno que eles estejam estudando. Embora seja quase impossível encontrar uma fórmula explícita para a solução de uma equação diferencial, veremos que as abordagens gráficas e numéricas fornecem a informação necessária.

9.1 Modelagem com Equações Diferenciais

Agora é uma boa hora para ler (ou reler) a discussão de modelagem matemática no Capítulo 1, Volume I.

Na descrição do processo de modelagem na Seção 1.2, no Volume I, falamos a respeito da formulação de um modelo matemático de um problema real por meio de raciocínio intuitivo sobre o fenômeno ou por meio de uma lei física fundamentada em evidência experimental. O modelo matemático frequentemente tem a forma de uma *equação diferencial*, isto é, uma equação que contém uma função desconhecida e algumas de suas derivadas. Isso não surpreende, porque em um problema real normalmente notamos que mudanças ocorrem e queremos predizer o comportamento futuro com base na maneira como os valores presentes variam. Vamos começar examinando vários exemplos de como as equações diferenciais aparecem quando modelamos um fenômeno físico.

Modelos para o Crescimento Populacional

Um dos modelos para o crescimento de uma população baseia-se na hipótese de que uma população cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho. Essa hipótese é razoável para uma população de bactérias ou animais em condições ideais (meio ambiente ilimitado, nutrição adequada, ausência de predadores, imunidade a doenças).

Vamos identificar e dar nomes às variáveis nesse modelo:

t = tempo (a variável independente)

P = número de indivíduos da população (a variável dependente)

A taxa de crescimento da população é a derivada dP/dt. Assim, nossa hipótese de que a taxa de crescimento da população é proporcional ao tamanho da população é escrita como a equação

$$\boxed{1} \qquad \frac{dP}{dt} = kP$$

onde k é a constante de proporcionalidade. A Equação 1 é nosso primeiro modelo para o crescimento populacional; é uma equação diferencial porque contém uma função desconhecida P e sua derivada dP/dt.

Tendo formulado um modelo, vamos olhar para suas consequências. Se desconsiderarmos uma população nula, então $P(t) > 0$ para todo t. Portanto, se $k > 0$, então a Equação 1 mostra que $P'(t) > 0$ para todo t. Isso significa que a população está sempre aumentando. De fato, quando $P(t)$ aumenta, a Equação 1 mostra que dP/dt torna-se maior. Em outras palavras, a taxa de crescimento aumenta quando a população cresce.

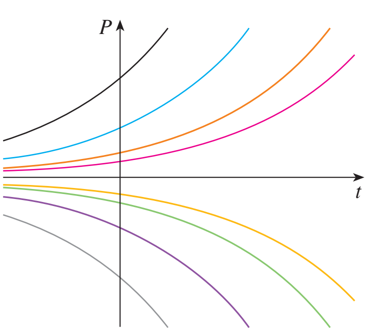


FIGURA 1
A família de soluções de $dP/dt = kP$

Não é difícil pensar em uma solução para a Equação 1. Esta equação nos pede para encontrar uma função cuja derivada seja uma constante multiplicada por ela própria. Sabemos do Capítulo 3, no Volume 1, que as funções exponenciais têm esta propriedade. De fato, se fizermos $P(t) = Ce^{kt}$, então

$$P'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = kP(t)$$

Portanto, qualquer função exponencial da forma $P(t) = Ce^{kt}$ é uma solução da Equação 1. Quando estudarmos essa equação em detalhes na Seção 9.4, veremos que não existe outra solução.

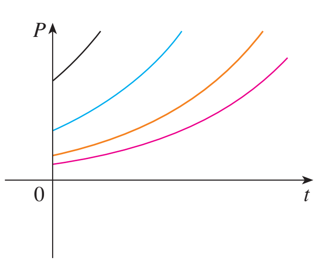


FIGURA 2
A família de soluções $P(t) = Ce^{kt}$ com $C > 0$ e $t \geqslant 0$

Se fizermos C variar em todos os números reais, obtemos a *família* de soluções $P(t) = Ce^{kt}$ cujos gráficos são mostrados na Figura 1. Mas as populações têm apenas valores positivos e, assim, estamos interessados somente nas soluções com $C > 0$. E estamos provavelmente preocupados apenas com valores de t maiores que o instante inicial $t = 0$. A Figura 2 mostra as soluções com significado físico. Fazendo $t = 0$, temos $P(0) = Ce^{k(0)} = C$, de modo que a constante C acaba sendo a população inicial, $P(0)$.

A Equação 1 é apropriada para a modelagem do crescimento populacional sob condições ideais, mas devemos reconhecer que um modelo mais realista deveria refletir o fato de que um dado ambiente tem recursos limitados. Muitas populações começam crescendo exponencialmente, porém o nível da população se estabiliza quando ela se aproxima de sua *capacidade de suporte* M (ou diminui em direção a M se ela excede o valor de M). Para um modelo considerar ambos os casos, fazemos duas hipóteses:

- $\dfrac{dP}{dt} \approx kP$ se P for pequeno (inicialmente a taxa de crescimento é proporcional a P).
- $\dfrac{dP}{dt} < 0$ se $P > M$ (P diminui se exceder M).

Uma expressão simples que incorpora ambas as hipóteses é dada pela equação

$$\boxed{2} \qquad \frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Observe que, se P é pequeno quando comparado com M, então P/M está próximo de 0 e, portanto, $dP/dt \approx kP$. Se $P > M$, então $1 - P/M$ é negativo e, assim, $dP/dt < 0$.

A Equação 2 é chamada *equação diferencial logística* e foi proposta pelo matemático e biólogo holandês Pierre-François Verhulst na década de 1840 como um modelo para o crescimento populacional mundial. Desenvolveremos técnicas que nos permitam encontrar soluções explícitas da equação logística na Seção 9.4, mas, enquanto isso, podemos deduzir as características qualitativas das soluções diretamente da Equação 2. Primeiro, observamos que as funções constantes $P(t) = 0$ e $P(t) = M$ são soluções, porque, em qualquer um dos casos, um dos fatores do lado direito da Equação 2 é zero. (Isso certamente tem um significado físico: se a população sempre for 0 ou estiver na capacidade de suporte, ela fica desse jeito.) Essas duas soluções constantes são chamadas *soluções de equilíbrio*.

Se a população inicial $P(0)$ estiver entre 0 e M, então o lado direito da Equação 2 é positivo; assim, $dP/dt > 0$ e a população aumenta. Mas se a população exceder a capacidade de suporte ($P > M$), então $1 - P/M$ é negativo, portanto $dP/dt < 0$ e a população diminui. Observe que, em qualquer um dos casos, se a população se aproxima da capacidade de suporte ($P \to M$), então $dP/dt \to 0$, o que significa que a população se estabiliza. Dessa forma, esperamos que as soluções da equação diferencial logística tenham gráficos que se pareçam com aqueles da Figura 3. Observe que os gráficos se distanciam da solução de equilíbrio $P = 0$ e se aproximam da solução de equilíbrio $P = M$.

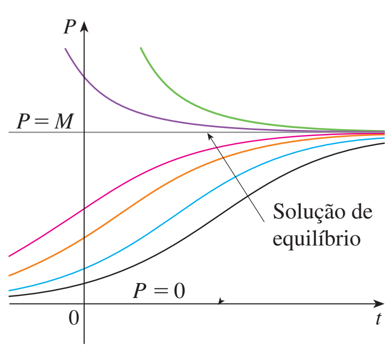


FIGURA 3
Soluções da equação logística

Modelo para o Movimento de uma Mola

Vamos olhar agora para um modelo físico. Consideremos o movimento de um objeto com massa m na extremidade de uma mola vertical (como na Figura 4). Na Seção 6.4, no Volume I, discutimos a Lei de Hooke, que diz que, se uma mola for esticada (ou comprimida) x unidades a partir de seu tamanho natural, então ela exerce uma força que é proporcional a x:

$$\text{força elástica} = -kx$$

onde k é uma constante positiva (chamada *constante da mola*). Se ignorarmos qualquer força externa de resistência (por causa da resistência do ar ou do atrito), então, pela segunda Lei de Newton (força é igual à massa vezes a aceleração), temos

$$\boxed{3} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

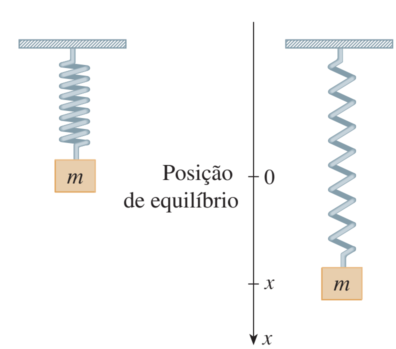


FIGURA 4

Esse é um exemplo do que chamamos *equação diferencial de segunda ordem*, porque envolve derivadas segundas. Vamos ver o que podemos deduzir da solução diretamente da equação. Podemos reescrever a Equação 3 na forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

que diz que a derivada segunda de x é proporcional a x, mas tem o sinal oposto. Conhecemos duas funções com essa propriedade, as funções seno e cosseno. De fato, todas as soluções da Equação 3 podem ser escritas como combinações de certas funções seno e cosseno (veja o Exercício 4). Isso não é surpreendente; esperamos que a mola oscile em torno de sua posição de equilíbrio e, assim, é natural pensar que funções trigonométricas estejam envolvidas.

Equações Diferenciais Gerais

Em geral, uma **equação diferencial** é aquela que contém uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas. A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais alta que ocorre na equação. Dessa maneira, as Equações 1 e 2 são de primeira ordem e a Equação 3 é de segunda ordem. Em todas as três equações, a variável independente é chamada t e representa o tempo, mas, em geral, a variável independente não precisa representar o tempo. Por exemplo, quando consideramos a equação diferencial

$$\boxed{4} \qquad y' = xy$$

entendemos que y seja uma função desconhecida de x.

Uma função f é denominada **solução** de uma equação diferencial se a equação é satisfeita quando $y = f(x)$ e suas derivadas são substituídas na equação. Assim, f é uma solução da Equação 4 se

$$f'(x) = xf(x)$$

para todos os valores de x em algum intervalo.

Quando nos pedem para *resolver* uma equação diferencial, espera-se que encontremos todas as soluções possíveis da equação. Já resolvemos algumas equações diferenciais particularmente simples; a saber, aquelas da forma

$$y' = f(x)$$

Por exemplo, sabemos que a solução geral da equação diferencial

$$y' = x^3$$

é dada por

$$y = \frac{x^4}{4} + C$$

onde C é uma constante qualquer.

Mas, em geral, resolver uma equação diferencial não é uma tarefa fácil. Não existe uma técnica sistemática que nos permita resolver todas as equações diferenciais. Na Seção 9.2, contudo, veremos como esboçar os gráficos das soluções mesmo quando não temos uma fórmula explícita. Também aprenderemos como achar aproximações numéricas para as soluções.

EXEMPLO 1 Mostre que todo membro da família de funções

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

é uma solução da equação diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

SOLUÇÃO Usamos a Regra do Quociente para derivar a expressão em relação a y:

$$y' = \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + ce^t)(-ce^t)}{(1 - ce^t)^2}$$

$$= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

O lado direito da equação diferencial torna-se

$$\tfrac{1}{2}(y^2 - 1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(1 + ce^t)^2 - (1 - ce^t)^2}{(1 - ce^t)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{4ce^t}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

Portanto, para todo valor de c, a função dada é solução da equação diferencial.

Quando aplicamos as equações diferenciais, geralmente não estamos tão interessados em encontrar uma família de soluções (a *solução geral*) quanto em encontrar uma solução que satisfaça algumas condições adicionais. Em muitos problemas físicos precisamos encontrar uma solução particular que satisfaça uma condição do tipo $y(t_0) = y_0$. Esta é chamada **condição inicial**, e o problema de achar uma solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial é denominado **problema de valor inicial**.

Geometricamente, quando impomos uma condição inicial, olhamos para uma família de curvas solução e escolhemos uma que passe pelo ponto (t_0, y_0). Fisicamente, isso corresponde a medir o estado de um sistema no instante t_0 e usar a solução do problema de valor inicial para prever o comportamento futuro do sistema.

A Figura 5 ilustra os gráficos de sete membros da família do Exemplo 1. A equação diferencial mostra que $y \approx \pm 1$, então $y' \approx 0$. Isso é visualizado pelo achatamento dos gráficos próximo de $y = 1$ e $y = -1$.

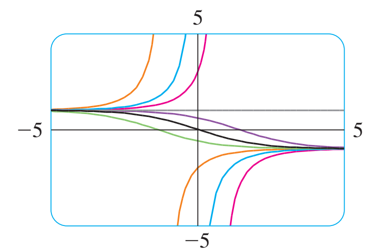


FIGURA 5

EXEMPLO 2 Encontre uma solução da equação diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$.

SOLUÇÃO Substituindo os valores $t = 0$ e $y = 2$ na fórmula

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

do Exemplo 1, obtemos

$$2 = \frac{1 + ce^0}{1 - ce^0} = \frac{1 + c}{1 - c}$$

Resolvendo essa equação para c, temos $2 - 2c = 1 + c$, o que fornece $c = \frac{1}{3}$. Assim, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{1}{3}e^t} = \frac{3 + e^t}{3 - e^t}$$

9.1 Exercícios

1. Mostre que $y = x - x^{-1}$ é uma solução da equação diferencial $xy' + y = 2x$.

2. Verifique se $y = \operatorname{sen} x \cos x - \cos x$ é uma solução do problema de valor inicial
$$y' + (\operatorname{tg} x)\, y = \cos^2 x \qquad y(0) = -1$$
no intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$.

3. (a) Para quais valores de r a função $y = e^{rx}$ satisfaz a equação diferencial $2y'' + y' - y = 0$?
   (b) Se r_1 e r_2 são os valores que você encontrou no item (a), mostre que todo membro da família de funções $y = ae^{r_1 x} + be^{r_2 x}$ também é uma solução.

4. (a) Para quais valores de k a função $y = \cos kt$ satisfaz a equação diferencial $4y'' = -25y$?
   (b) Para estes valores de k, verifique se todo membro da família de funções $y = A \operatorname{sen} kt + B \cos kt$ também é uma solução.

5. Quais das seguintes funções são soluções da equação diferencial $y'' + y = \text{sen}\, x$?

(a) $y = \text{sen}\, x$ (b) $y = \cos x$

(c) $y = \frac{1}{2}\, x\, \text{sen}\, x$ (d) $y = -\frac{1}{2}\, x \cos x$

6. (a) Mostre que cada membro da família de funções $y = (\ln x + C)/x$ é uma solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando vários membros da família de soluções na mesma tela.

(c) Encontre a solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial $y(1) = 2$.

(d) Encontre a solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial $y(2) = 1$.

7. (a) O que você pode dizer da solução da equação $y' = -y^2$ apenas olhando a equação diferencial?

(b) Verifique se todos os membros da família $y = 1/(x + C)$ são soluções da equação no item (a).

(c) Você pode pensar em uma solução da equação diferencial $y' = -y^2$ que não seja membro da família no item (b)?

(d) Encontre uma solução para o problema de valor inicial

$$y' = -y^2 \qquad y(0) = 0{,}5$$

8. (a) O que você pode dizer sobre o gráfico de uma solução da equação $y' = xy^3$ quando x está próximo de 0? E se x for grande?

(b) Verifique se todos os membros da família $y = (c - x^2)^{-1/2}$ são soluções da equação diferencial $y' = xy^3$.

(c) Trace vários membros da família de soluções na mesma tela. Os gráficos confirmam o que você predisse no item (a)?

(d) Encontre uma solução para o problema de valor inicial

$$y' = xy^3 \qquad y(0) = 2$$

9. Uma população é modelada pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 1{,}2P\left(1 - \frac{P}{4\,200}\right)$$

(a) Para quais valores de P a população está aumentando?

(b) Para quais valores de P a população está diminuindo?

(c) Quais são as soluções de equilíbrio?

10. A função $y(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2$$

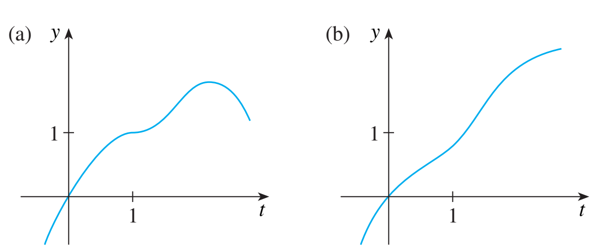
(a) Quais são as soluções constantes da equação?

(b) Para quais valores de y a função está aumentando?

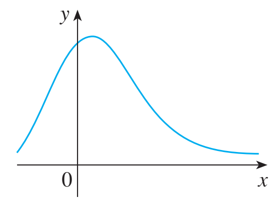
(c) Para quais valores de y a função está diminuindo?

11. Explique por que as funções cujos gráficos são dados a seguir *não podem* ser soluções da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = e^t(y - 1)^2$$



12. A função, cujo gráfico é dado a seguir, é uma solução de uma das seguintes equações diferenciais. Decida qual é a equação correta e justifique sua resposta.

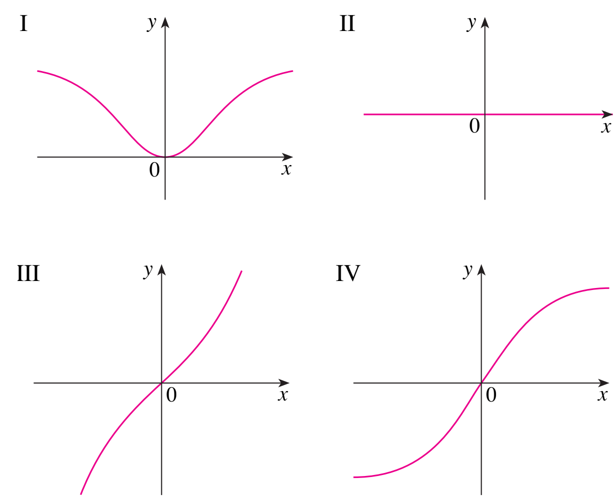


A. $y' = 1 + xy$ **B.** $y' = -2\,xy$ **C.** $y' = 1 - 2xy$

13. Combine as equações diferenciais com os gráficos de solução rotulados de I–IV. Dê razões para suas escolhas.

(a) $y' = 1 + x^2 + y^2$ (b) $y' = xe^{-x^2 - y^2}$

(c) $y' = \dfrac{1}{1 + e^{x^2 - y^2}}$ (d) $y' = \text{sen}(xy) \cos (xy)$



14. Suponha que você tenha acabado de servir uma xícara de café recém-coado com uma temperatura de 95ºC em uma sala onde a temperatura é de 20ºC.

(a) Quando você acha que o café esfria mais rapidamente? O que acontece com a taxa de resfriamento com o passar do tempo? Explique.

(b) A Lei de Resfriamento de Newton afirma que a taxa de resfriamento de um objeto é proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e sua vizinhança, desde que essa diferença não seja muito grande. Escreva uma equação diferencial para expressar a Lei de Resfriamento de Newton nessa situação particular. Qual a condição inicial? Tendo em vista sua resposta no item (a), você acha que essa equação diferencial é um modelo apropriado para o resfriamento?

(c) Faça um esboço para o gráfico da solução do problema de valor inicial no item (b).

15. Os psicólogos interessados em teoria do aprendizado estudam as **curvas de aprendizado**. Seja $P(t)$ o nível de desempenho de alguém aprendendo uma habilidade como uma função do tempo de treinamento t. A derivada dP/dt representa a taxa em que o desempenho melhora.

(a) Quando você acha que P aumenta mais rapidamente? O que acontece a dP/dt quando t aumenta? Explique.

(b) Se M é o nível máximo de desempenho do qual o aprendiz é capaz, explique a razão pela qual a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P) \qquad k \text{ uma constante positiva,}$$

é um modelo razoável para o aprendizado.

(c) Faça um esboço de uma possível solução da equação diferencial.

9.2 Campos de Direções e Método de Euler

Infelizmente é impossível resolver a maioria das equações diferenciais de forma a obter uma fórmula explícita para a solução. Nesta seção, mostraremos que, mesmo sem uma solução explícita, podemos ainda aprender muito sobre a solução por meio de uma abordagem gráfica (campos de direções) ou de uma abordagem numérica (método de Euler).

Campos de Direções

Suponha que nos peçam para esboçar o gráfico da solução do problema de valor inicial

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

Não conhecemos uma fórmula para a solução, então como é possível que esbocemos seus gráficos? Vamos pensar sobre o que uma equação diferencial significa. A equação $y' = x + y$ nos diz que a inclinação em qualquer ponto (x, y) no gráfico (chamado *curva solução*) é igual à soma das coordenadas x e y no ponto (veja a Figura 1). Em particular, como a curva passa pelo ponto (0, 1), sua inclinação ali deve ser $0 + 1 = 1$. Assim, uma pequena porção da curva solução próxima ao ponto (0, 1) parece um segmento de reta curto que passa por (0, 1) com inclinação 1 (veja a Figura 2).

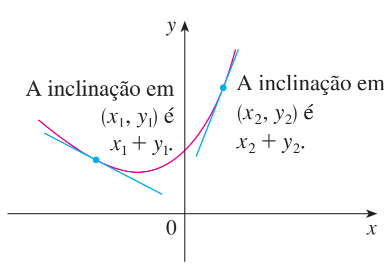


FIGURA 1
Uma solução de $y' = x + y$

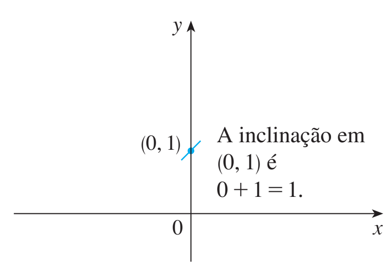


FIGURA 2
Início da curva solução que passa por (0, 1)

Como um guia para esboçar o restante da curva, vamos desenhar pequenos segmentos de reta em diversos pontos (x, y) com inclinação $x + y$. O resultado, denominado *campo de direções*, é mostrado na Figura 3. Por exemplo, o segmento de reta no ponto (1, 2) tem inclinação $1 + 2 = 3$. O campo de direções nos permite visualizar o formato geral das curvas solução pela indicação da direção na qual as curvas prosseguem em cada ponto.

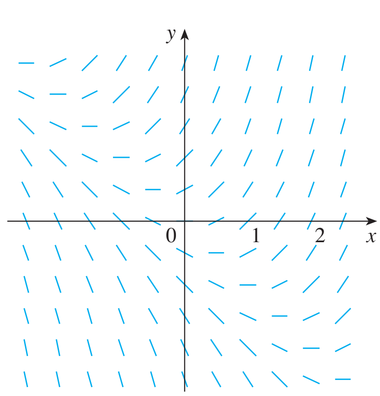


FIGURA 3
Campo de direções para $y' = x + y$

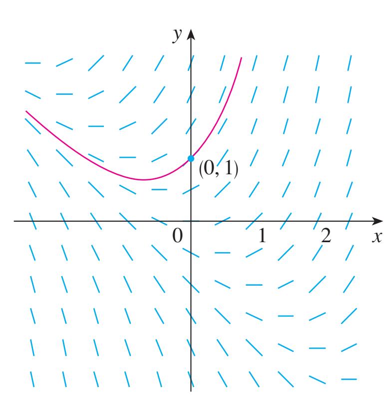


FIGURA 4
A curva solução que passa por (0, 1)

Agora, podemos esboçar a curva solução pelo ponto (0, 1), seguindo o campo de direções como na Figura 4. Observe que desenhamos a curva de modo a torná-la paralela aos segmentos de reta próximos.

Em geral, suponha que tenhamos uma equação diferencial de primeira ordem do tipo

$$y' = F(x, y)$$

onde $F(x, y)$ é alguma expressão em x e y. A equação diferencial diz que a inclinação da curva solução no ponto (x, y) na curva é $F(x, y)$. Se desenharmos pequenos segmentos de reta com inclinação $F(x, y)$ em vários pontos (x, y), o resultado será chamado **campo de direções** (ou **campo de inclinações**). Esses segmentos de reta indicam a direção na qual uma curva solução está seguindo, de modo que o campo de direções nos ajuda a visualizar o formato geral dessas curvas.

EXEMPLO 1

(a) Esboce o campo de direções para a equação diferencial $y' = x^2 + y^2 - 1$.

(b) Use a parte (a) para esboçar a curva solução que passa pela origem.

SOLUÇÃO

(a) Podemos começar calculando a inclinação em vários pontos na seguinte tabela:

x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	0	1	2	...
y	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	...
$y' = x^2 + y^2 - 1$	3	0	-1	0	3	4	1	0	1	4	...

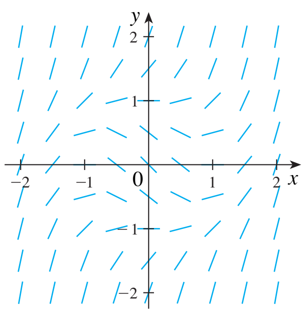


FIGURA 5

Agora, podemos desenhar pequenos segmentos de reta com essas inclinações nesses pontos. O resultado é o campo de direções mostrado na Figura 5.

(b) Podemos começar na origem e nos mover para a direita na direção do segmento de reta (que tem inclinação -1). Continuamos a desenhar a curva solução de maneira que ela se mova paralela aos segmentos de reta próximos. A curva solução resultante é exposta na Figura 6. Voltando para a origem, desenhamos a curva solução para a esquerda da mesma maneira.

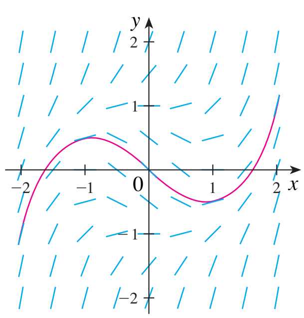


FIGURA 6

TEC O *Module 9.2A* mostra os campos de direções e as curvas solução para várias equações diferenciais.

Quanto mais segmentos desenharmos no campo de direções, mais clara se tornará a figura. É claro que é tedioso calcular as inclinações e desenhar segmentos de reta para um número muito grande de pontos manualmente, mas os computadores facilitam essa tarefa. A Figura 7 apresenta um campo de direções mais detalhado, desenhado por um computador, para a equação diferencial no Exemplo 1. Isso nos permite desenhar, com uma precisão razoável, as curvas solução exibidas na Figura 8 com intersecções com o eixo y iguais a -2, -1, 0, 1 e 2.

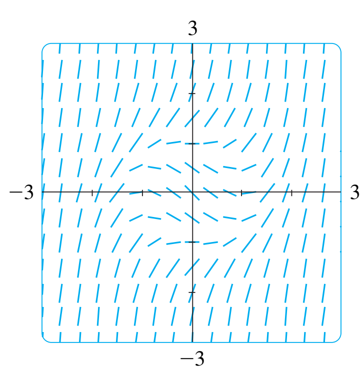


FIGURA 7

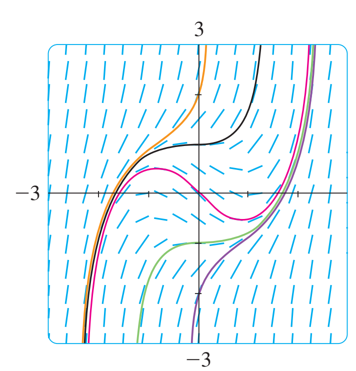


FIGURA 8

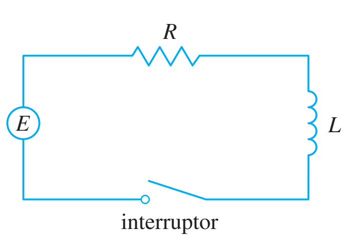


FIGURA 9

Depois disso, vamos ver como campos de direções dão uma percepção das situações físicas. O circuito elétrico simples, mostrado na Figura 9, contém uma força eletromotriz (geralmente uma pilha ou gerador) que produz uma voltagem de $E(t)$ volts (V) e uma corrente de $I(t)$ amperes (A) em um instante t. O circuito também possui um resistor com resistência de R ohms [Ω] e um indutor com indutância de L henrys (H).

A Lei de Ohm diz que a queda na voltagem por causa do resistor é RI. A queda de voltagem por causa do indutor é $L(dI/dt)$. Uma das Leis de Kirchhoff diz que a soma das quedas de voltagem é igual à voltagem fornecida $E(t)$. Então temos

$$\boxed{1} \qquad L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem que modela a corrente I no instante t.

EXEMPLO 2 Suponha que no circuito simples da Figura 9 a resistência seja de 12 Ω, a indutância 4 H e a pilha forneça uma voltagem constante de 60 V.
(a) Desenhe um campo de direções para a Equação 1 com esses valores.
(b) O que você pode dizer sobre o valor-limite da corrente?
(c) Identifique quaisquer soluções de equilíbrio.
(d) Se o interruptor for fechado quando $t = 0$, de forma que a corrente comece com $I(0) = 0$, use o campo de direções para esboçar a curva solução.

SOLUÇÃO
(a) Se fizermos $L = 4$, $R = 12$ e $E(t) = 60$ na Equação 1, obteremos

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

O campo de direções para essa equação diferencial é mostrado na Figura 10.

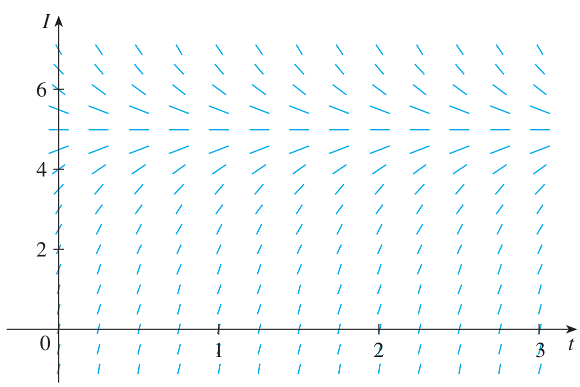


FIGURA 10

(b) Parece, a partir do campo de direções, que todas as soluções se aproximam do valor 5 A, isto é,

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = 5$$

(c) Parece que a função constante $I(t) = 5$ é uma solução de equilíbrio. De fato, podemos verificar isso diretamente da equação diferencial $dI/dt = 15 - 3I$. Se $I(t) = 5$, então o lado esquerdo é $dI/dt = 0$ e o lado direito é $15 - 3(5) = 0$.
(d) Usamos o campo de direções para esboçar a curva solução que passa por (0, 0), como indicado na Figura 11.

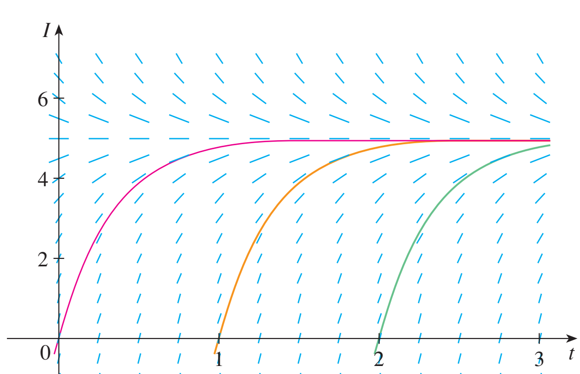


FIGURA 11

Observe que na Figura 10 os segmentos de reta ao longo de qualquer reta horizontal são paralelos. Isso ocorre porque a variável independente t não aparece do lado direito da equação $I' = 15 - 3I$. Em geral, uma equação diferencial do tipo

$$y' = f(y)$$

onde a variável independente não aparece do lado direito é chamada **autônoma**. Para tal equação, as inclinações correspondentes a dois pontos diferentes com a mesma coordenada y devem ser iguais. Isso significa que, se conhecermos uma solução para uma equação diferencial autônoma, então poderemos obter infinitas outras apenas pelo deslocamento do gráfico da solução conhecida para a esquerda ou para a direita. Na Figura 11, mostramos as soluções que resultam do deslocamento da curva solução do Exemplo 2 uma ou duas unidades de tempo (ou seja, segundos) para a direita. Elas correspondem ao fechamento do interruptor quando $t = 1$ ou $t = 2$.

Método de Euler

A ideia básica por trás dos campos de direções pode ser usada para encontrar aproximações numéricas para as soluções das equações diferenciais. Ilustramos o método no problema de valor inicial que utilizamos para introduzir os campos de direções:

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

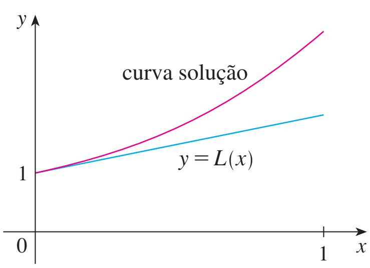


FIGURA 12
Primeira aproximação de Euler

A equação diferencial diz que $y'(0) = 0 + 1 = 1$; dessa forma, a curva solução tem inclinação 1 no ponto (0, 1). Como uma primeira aproximação para a solução, poderíamos usar uma aproximação linear $L(x) = x + 1$. Em outras palavras, poderíamos usar a reta tangente em (0, 1) como uma aproximação grosseira para a curva solução (veja a Figura 12).

A ideia de Euler era melhorar essa aproximação percorrendo apenas uma pequena distância ao longo da reta tangente e, então, fazer uma correção no meio do caminho, mudando a direção, como indicado pelo campo de direções. A Figura 13 mostra o que acontece se começamos ao longo da reta tangente, mas paramos quando $x = 0{,}5$. (Essa distância horizontal percorrida é chamada de passo.) Como $L(0{,}5) = 1{,}5$, temos $y(0{,}5) \approx 1{,}5$ e tomamos (0,5, 1,5) como o ponto de partida para um novo segmento de reta. A equação diferencial nos diz que $y'(0{,}5) = 0{,}5 + 1{,}5 = 2$, assim, usamos a função linear

$$y = 1{,}5 + 2(x - 0{,}5) = 2x + 0{,}5$$

como uma aproximação para a solução para $x > 0{,}5$ (veja o segmento azul-escuro na Figura 13). Se diminuirmos o passo de 0,5 para 0,25, obteremos uma aproximação de Euler melhor (veja a Figura 14).

Euler

Leonhard Euler (1707–1783) foi o principal matemático de meados do século XVIII e o mais prolífico de todos os tempos. Ele nasceu na Suíça, mas passou a maior parte de sua carreira nas academias de ciências apoiadas por Catarina, a Grande em São Petersburgo e Frederico, o Grande em Berlim. Os trabalhos reunidos de Euler (pronunciado *Oiler*) completam cerca de 100 grandes volumes. Como o físico francês Arago disse: "Euler calculava sem esforço aparente, como os homens respiram ou como as águias se sustentam no ar". Os cálculos e as escritas de Euler não diminuíram com o fato de ele ter que criar 13 filhos ou por ele ter ficado completamente cego nos últimos 17 anos de sua vida. Na verdade, quando ficou cego, ditava suas descobertas para seus ajudantes a partir de sua prodigiosa memória e imaginação. Seus tratados sobre cálculo e a maioria dos outros assuntos matemáticos tornaram-se padrão para o ensino de matemática e a equação $e^{i\pi} + 1 = 0$ que ele descobriu relaciona os cinco números mais famosos de toda a matemática.

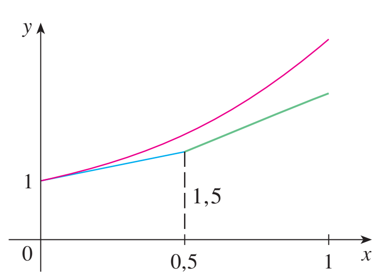


FIGURA 13
Aproximação de Euler com o passo 0,5

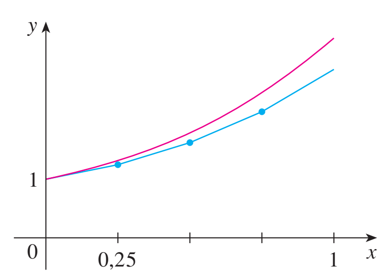


FIGURA 14
Aproximação de Euler com o passo 0,25

Em geral, o método de Euler diz para começarmos no ponto dado pelo valor inicial e prosseguirmos na direção indicada pelo campo de direções. Paramos após um intervalo de tempo, olhamos para a inclinação na nova localização e prosseguimos naquela direção. Continuamos parando e mudando de direção de acordo com o campo de direções. O método de Euler não produz a solução exata para um problema de valor inicial ele fornece aproximações. Mas, pela diminuição do passo (e, portanto, aumentando o número de correções no meio do caminho), obtemos aproximações sucessivamente melhores para a solução exata. (Compare as Figuras 12, 13 e 14.)

Para o problema de valor inicial de primeira ordem geral $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, nosso objetivo é encontrar valores aproximados para a solução em números igualmente espaçados x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, . . ., onde h é o passo. A equação diferencial nos diz que a inclinação em (x_0, y_0) é $y' = F(x_0, y_0)$, assim, a Figura 15 nos mostra que o valor aproximado para a solução quando $x = x_1$ é

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$

Analogamente, $$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1)$$

Em geral, $$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1})$$

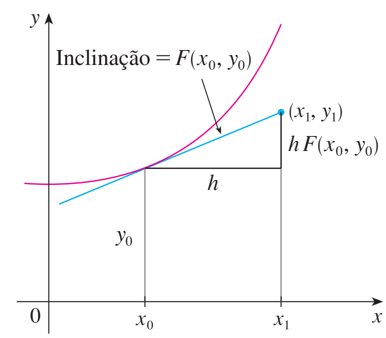


FIGURA 15

Método de Euler Os valores aproximados para a solução do problema de valor inicial $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, com passo h, em $x_n = x_{n-1} + h$, são

$$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1}) \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

EXEMPLO 3 Use o método de Euler com o passo 0,1 para construir uma tabela de valores aproximados para a solução do problema de valor inicial

$$y' = x + y \qquad\qquad y(0) = 1$$

SOLUÇÃO Sabemos que $h = 0{,}1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ e $F(x, y) = x + y$. Logo, temos

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1(0 + 1) = 1{,}1$$
$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}1(0{,}1 + 1{,}1) = 1{,}22$$
$$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2) = 1{,}22 + 0{,}1(0{,}2 + 1{,}22) = 1{,}362$$

Isso significa que, se $y(x)$ é a solução exata, então $y(0{,}3) \approx 1{,}362$.

Prosseguindo com cálculos similares, temos os valores na tabela:

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
1	0,1	1,100000	6	0,6	1,943122
2	0,2	1,220000	7	0,7	2,197434
3	0,3	1,362000	8	0,8	2,487178
4	0,4	1,528200	9	0,9	2,815895
5	0,5	1,721020	10	1,0	3,187485

TEC O *Module 9.2B* mostra como o método de Euler funciona numérica e visualmente por várias equações diferenciais e passos.

Para uma tabela com valores mais precisos no Exemplo 3, poderíamos diminuir o tamanho do passo. Contudo, para um número grande de pequenos passos, a quantidade de cálculos é considerável e, assim, precisamos programar uma calculadora ou um computador para fazer os cálculos. A seguinte tabela mostra os resultados da aplicação do método de Euler com diminuição do tamanho do passo para o problema de valor inicial do Exemplo 3.

Passo	Estimativa de Euler para $y(0{,}5)$	Estimativa de Euler para $y(1)$
0,500	1,500000	2,500000
0,250	1,625000	2,882813
0,100	1,721020	3,187485
0,050	1,757789	3,306595
0,020	1,781212	3,383176
0,010	1,789264	3,409628
0,005	1,793337	3,423034
0,001	1,796619	3,433848

Os pacotes de software para computador que produzem aproximações numéricas para soluções de equações diferenciais utilizam os métodos que são refinamentos do método de Euler. Embora o método de Euler seja simples e não tão preciso, é a ideia básica em que os métodos mais precisos são baseados.

Observe que as estimativas de Euler na tabela parecem estar se aproximando de limites, a saber, os valores verdadeiros de $y(0{,}5)$ e $y(1)$. A Figura 16 mostra os gráficos das aproximações de Euler com os passos 0,5; 0,25; 0,1; 0,05; 0,02; 0,01 e 0,005. Eles estão se aproximando da curva solução exata à medida que o passo h se aproxima de 0.

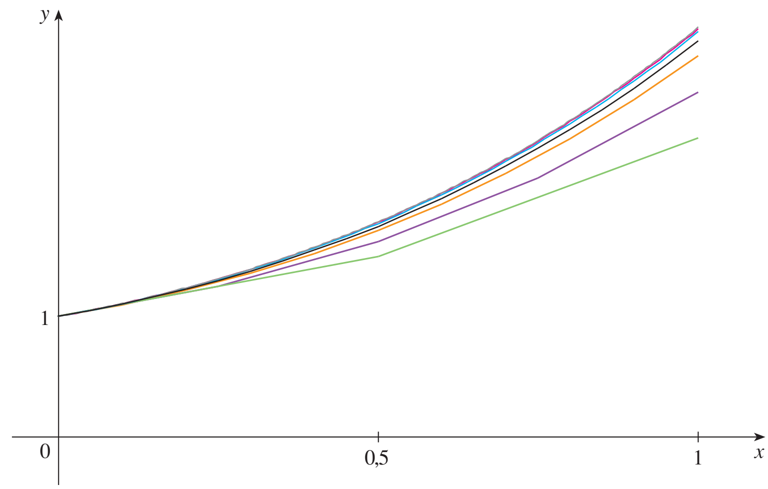


FIGURA 16
Aproximações de Euler tendendo à solução exata

EXEMPLO 4 No Exemplo 2 discutimos um circuito elétrico simples com resistência 12 Ω, indutância 4 H e uma pilha com voltagem 60 V. Se o interruptor for fechado quando $t = 0$, modelamos a corrente I no instante t pelo problema de valor inicial

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Estime a corrente no circuito meio segundo após o fechamento do interruptor.

SOLUÇÃO Usamos o método de Euler com $F(t, I) = 15 - 3I$, $t_0 = 0$, $I_0 = 0$ e o passo $h = 0{,}1$ segundo:

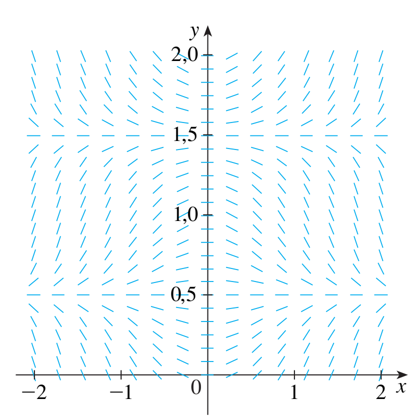
$$\begin{aligned}
I_1 &= 0 + 0{,}1(15 - 3 \cdot 0) = 1{,}5 \\
I_2 &= 1{,}5 + 0{,}1(15 - 3 \cdot 1{,}5) = 2{,}55 \\
I_3 &= 2{,}55 + 0{,}1(15 - 3 \cdot 2{,}55) = 3{,}285 \\
I_4 &= 3{,}285 + 0{,}1(15 - 3 \cdot 3{,}285) = 3{,}7995 \\
I_5 &= 3{,}7995 + 0{,}1(15 - 3 \cdot 3{,}7995) = 4{,}15965
\end{aligned}$$

Assim, a corrente após 0,5 s é

$$I(0{,}5) \approx 4{,}16 \text{ A}$$

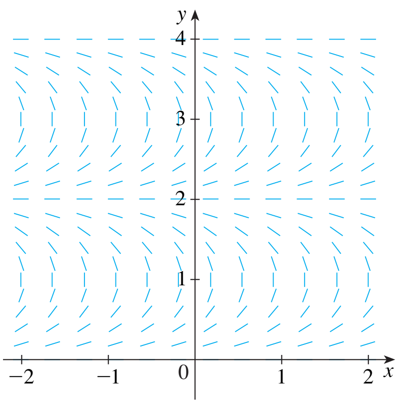
9.2 Exercícios

1. É mostrado um campo de direções para a equação $y' = x \cos \pi y$.
(a) Esboce os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.
(i) $y(0) = 0$ (ii) $y(0) = 0{,}5$
(iii) $y(0) = 1$ (iv) $y(0) = 1{,}6$
(b) Ache todas as soluções de equilíbrio.



É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador
SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

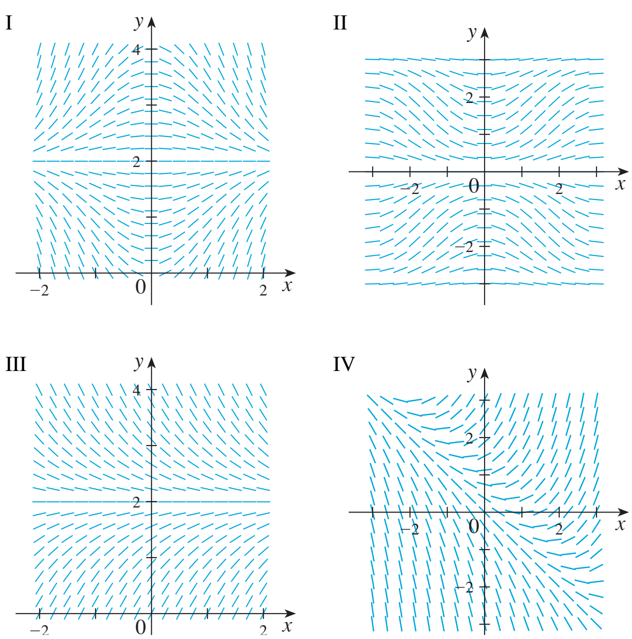
2. É mostrado um campo de direções para a equação $y' = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi y\right)$.
(a) Esboce os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.
(i) $y(0) = 1$ (ii) $y(0) = 0{,}2$
(iii) $y(0) = 2$ (iv) $y(1) = 3$
(b) Ache todas as soluções de equilíbrio.



3–6 Ligue a equação diferencial a seu campo de direções (I–IV). Dê as razões para sua resposta.

3. $y' = 2 - y$ **4.** $y' = x(2 - y)$

5. $y' = x + y - 1$ **6.** $y' = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$



7. Use o campo de direções II (acima) para esboçar os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.
(a) $y(0) = 1$ (b) $y(0) = 2$ (c) $y(0) = -1$

8. Use o campo de direções IV (acima) para esboçar os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.
(a) $y(0) = -1$ (b) $y(0) = 0$ (c) $y(0) = 1$

9–10 Esboce o campo de direções para a equação diferencial. Use-o para esboçar três curvas solução.

9. $y' = \frac{1}{2} y$ **10.** $y' = x - y + 1$

11–14 Esboce o campo de direções das equações diferenciais dadas. Use-os para esboçar a curva solução que passa pelo ponto dado.

11. $y' = y - 2x$ (1, 0) **12.** $y' = xy - x^2$ (0, 1)

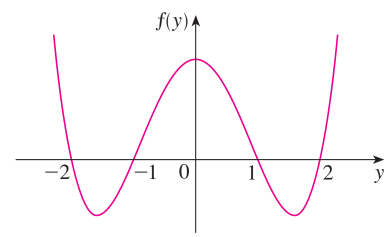
13. $y' = y + xy$ (0, 1) **14.** $y' = x + y^2$ (0, 0)

SCA **15–16** Use um sistema de computação algébrica para desenhar um campo de direções para a equação diferencial dada. Obtenha uma impressão e esboce uma curva solução que passe por (0, 1). Use o SCA para desenhar a curva solução e compare o resultado com seu esboço.

15. $y' = x^2 \operatorname{sen} y$ **16.** $y' = x(y^2 - 4)$

SCA **17.** Use um sistema de computação algébrica para desenhar um campo de direções para a equação diferencial $y' = y^3 - 4y$. Obtenha uma impressão e esboce as soluções que satisfazem a condição inicial $y(0) = c$ para diversos valores de c. Para quais valores de c o limite $\lim_{t\to\infty} y(t)$ existe? Quais são os possíveis valores para esse limite?

18. Faça o esboço de um campo de direções para a equação diferencial autônoma $y' = f(y)$, onde o gráfico de f é como o exibido. Como o comportamento limite das soluções depende do valor de $y(0)$?

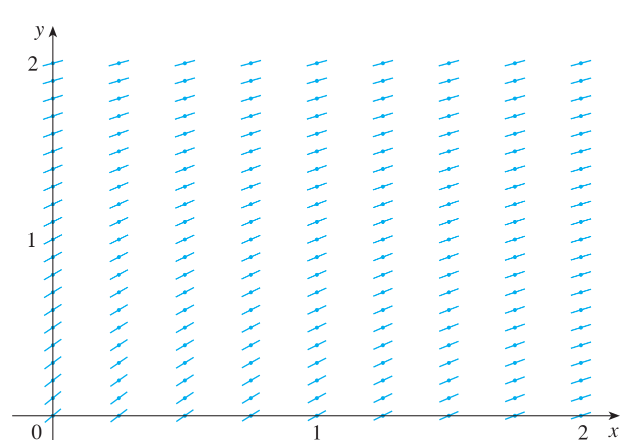


19. (a) Use o método de Euler com cada um dos passos dados para estimar o valor de $y(0{,}4)$, onde y é a solução do problema de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 1$.
(i) $h = 0{,}4$ (ii) $h = 0{,}2$ (iii) $h = 0{,}1$

(b) Sabemos que a solução exata do problema de valor inicial no item (a) é $y = e^x$. Desenhe, o mais precisamente que puder, o gráfico de $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 0{,}4$, junto com as aproximações de Euler, usando os passos da parte (a). (Seus esboços devem assemelhar-se às Figuras 12, 13 e 14.) Use seus esboços para decidir se suas estimativas no item (a) estão subestimadas ou superestimadas.

(c) O erro no método de Euler é a diferença entre o valor exato e o valor aproximado. Calcule os erros feitos no item (a) ao usar o método de Euler para estimar o verdadeiro valor de $y(0, 4)$, a saber, $e^{0{,}4}$. O que acontece com o erro cada vez que o passo cai pela metade?

20. Um campo de direções para uma equação diferencial é apresentado. Desenhe, com uma régua, os gráficos das aproximações de Euler para a curva solução que passa pela origem. Use os passos $h = 1$ e $h = 0{,}5$. As estimativas de Euler estarão superestimadas ou subestimadas? Explique.



21. Use o método de Euler com o passo 0,5 para calcular os valores aproximados de y, y_1, y_2, y_3 e y_4 da solução do problema de valor inicial $y' = y - 2x$, $y(1) = 0$.

22. Use o método de Euler com o passo 0,2 para estimar $y(1)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial $y' = 1 - xy$, $y(0) = 0$.

23. Use o método de Euler com o passo 0,1 para estimar $y(0{,}5)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial $y' = y + xy$, $y(0) = 1$.

24. (a) Use o método de Euler com o passo 0,2 para estimar $y(0, 4)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$.
(b) Repita a parte (a) com passo 0,1.

25. (a) Programe uma calculadora ou um computador para usar o método de Euler para calcular $y(1)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2 \qquad y(0) = 3$$

(i) $h = 1$ (ii) $h = 0{,}1$
(iii) $h = 0{,}01$ (iv) $h = 0{,}001$

(b) Verifique se $y = 2 + e^{-x^3}$ é a solução exata da equação diferencial.

(c) Encontre os erros ao usar o método de Euler para calcular $y(1)$ com os passos da parte (a). O que acontece com o erro quando o passo é dividido por 10?

SCA **26.** (a) Programe seu sistema de computação algébrica usando o método de Euler com o passo 0,01 para calcular $y(2)$, onde y é a solução do problema de valor inicial

$$y' = x^3 - y^3 \qquad y(0) = 1$$

(b) Verifique seu trabalho usando um SCA para desenhar a curva solução.

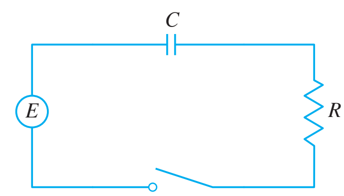
27. A figura mostra um circuito contendo uma força eletromotriz, um capacitor com capacitância de C farads (F) e um resistor com uma resistência de R de ohms (Ω). A queda de voltagem no capacitor é Q/C, onde Q é a carga (em coulombs, C); nesse caso, a Lei de Kirchhoff fornece

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Mas $I = dQ/dt$, de modo que temos

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponha que a resistência seja 5 Ω, a capacitância seja 0,05 F e a pilha forneça uma voltagem constante de 60 V.
(a) Desenhe um campo de direções para essa equação diferencial.
(b) Qual é o valor-limite da carga?



(c) Existe uma solução de equilíbrio?
(d) Se a carga inicial for $Q(0) = 0$ C, use o campo de direções para esboçar a curva solução.
(e) Se a carga inicial for $Q(0) = 0$ C, use o método de Euler com o passo 0,1 para estimar a carga depois de meio segundo.

28. No Exercício 14 na Seção 9.1 consideramos uma xícara de café a 95ºC em uma sala com temperatura de 20ºC. Suponha que o café esfrie a uma taxa de 1ºC por minuto quando sua temperatura for 70ºC.
(a) Como fica a equação diferencial nesse caso?
(b) Desenhe um campo de direções e use-o para esboçar a curva solução para o problema de valor inicial. Qual é o valor-limite da temperatura?
(c) Use o método de Euler com passo $h = 2$ minutos para estimar a temperatura do café após 10 minutos.

9.3 Equações Separáveis

Observamos as equações diferenciais de primeira ordem de um ponto de vista geométrico (campos de direções) e de um ponto de vista numérico (método de Euler). E do ponto de vista simbólico? Seria bom ter uma fórmula explícita para uma solução de uma equação diferencial. Infelizmente, isso não é sempre possível. Mas, nesta seção, examinaremos um tipo de equação diferencial que pode ser resolvida explicitamente.

Uma **equação separável** é uma equação diferencial de primeira ordem na qual a expressão para dy/dx pode ser fatorada como uma função de x multiplicada por uma função de y. Em outras palavras, pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

O nome *separável* vem do fato de que a expressão do lado direito pode ser "separada" em uma função de x e uma função de y. Da mesma forma, se $f(y) \neq 0$, podemos escrever

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

onde $h(y) = 1/f(y)$. Para resolver essa equação, a reescrevemos na forma diferencial

$$h(y)\,dy = g(x)dx$$

assim todos os y estão em um lado da equação e todos os x estão do outro lado. Então integramos ambos os lados da equação:

$$\boxed{2} \qquad \int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

A Equação 2 define y implicitamente como função de x. Em alguns casos também poderemos isolar y em termos de x.

Usamos a Regra da Cadeia para justificar este procedimento: Se h e g satisfazem $\boxed{2}$, então

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)\,dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right)$$

Logo
$$\frac{d}{dy}\left(\int h(y)\,dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

e
$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Portanto, a Equação 1 é satisfeita.

A técnica para resolver as equações diferenciais separáveis foi primeiro usada por James Bernoulli (em 1690) para resolver um problema sobre pêndulos e por Leibniz (em uma carta para Huygens em 1691). John Bernoulli explicou o método geral em um artigo publicado em 1694.

EXEMPLO 1

(a) Resolva a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$.

(b) Encontre a solução dessa equação que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$.

SOLUÇÃO
(a) Escrevemos a equação na forma diferencial e integramos os dois lados:

$$y^2 dy = x^2 dx$$

$$\int y^2 dy = \int x^2 dx$$

$$\tfrac{1}{3}y^3 = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

onde C é uma constante qualquer. (Poderíamos ter usado uma constante C_1 no lado esquerdo e outra constante C_2 no lado direito. Mas decidimos combiná-las em uma só constante no lado direito, fazendo $C = C_2 - C_1$.)
Resolvendo para y, obtemos

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}$$

Poderíamos deixar a solução dessa maneira ou podemos escrevê-la na forma

$$y = \sqrt[3]{x^3 + K}$$

onde $K = 3C$. (Pois C é uma constante qualquer e o mesmo ocorre com K.)
(b) Se fizermos $x = 0$ na equação geral da parte (a), temos $y(0) = \sqrt[3]{K}$. Para satisfazer a condição inicial $y(0) = 2$, devemos fazer $\sqrt[3]{K} = 2$ e assim temos $K = 8$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$

A Figura 1 ilustra o gráfico de vários membros da família de soluções da equação diferencial do Exemplo 1. A solução do problema com valor inicial da parte (b) é mostrada em vermelho.

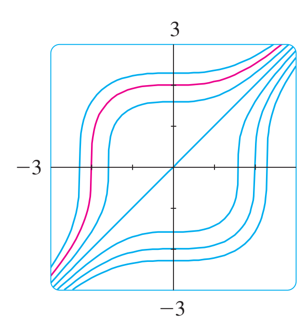


FIGURA 1

EXEMPLO 2 Resolva a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$.

SOLUÇÃO Escrevendo a equação em uma forma diferencial e integrando ambos os lados, temos

Alguns sistemas de computação algébrica podem traçar as curvas definidas por equações implícitas. A Figura 2 mostra os gráficos de vários membros da família de soluções da equação diferencial no Exemplo 2. Olhando as curvas da esquerda para a direita, os valores de C são 3, 2, 1, 0, -1, -2 e -3

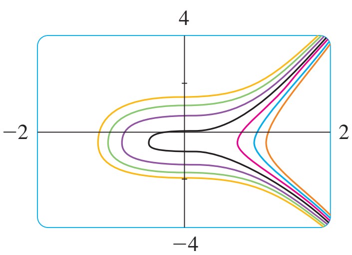


FIGURA 2

$$(2y + \cos y)\,dy = 6x^2\,dx$$

$$\int (2y + \cos y)\,dy = \int 6x^2\,dx$$

$$\boxed{3} \qquad y^2 + \operatorname{sen} y = 2x^3 + C$$

onde C é uma constante. A Equação 3 fornece uma solução geral implícita. Nesse caso é impossível resolver a equação para expressar explicitamente como uma função de x.

EXEMPLO 3 Resolva a equação $y' = x^2 y$.

SOLUÇÃO Primeiro reescrevemos a equação usando a notação de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

Se $y \neq 0$, podemos reescrevê-la em uma notação diferencial e integrá-la:

$$\frac{dy}{y} = x^2\,dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + C$$

Se uma solução y é uma função que satisfaz $y(x) \neq 0$ para algum x, segue de um teorema de existência e unidade para soluções de equações diferenciais que $y(x) \neq 0$ para todo x.

Essa equação define y implicitamente como função de x. Mas, nesse caso, podemos solucionar explicitamente para y como a seguir:

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{(x^3/3)+C} = e^C e^{x^3/3}$$

Então $$y = \pm e^C e^{x^3/3}$$

Podemos verificar facilmente que a função $y = 0$ também é uma solução da equação diferencial dada. Dessa forma, podemos escrever a solução geral na forma

$$y = Ae^{x^3/3}$$

onde A é uma constante arbitrária ($A = e^C$, ou $A = -e^C$, ou $A = 0$).

A Figura 3 mostra um campo de direções para a equação diferencial no Exemplo 3. Compare-a com a Figura 4, em que usamos a equação $y = Ae^{x^3/3}$ para representar as soluções por diversos valores de A. Se você usar o campo de direções para esboçar as curvas de solução com a intersecção y 5, 2, 1, -1 e -2, elas irão assemelhar-se com as curvas da Figura 4.

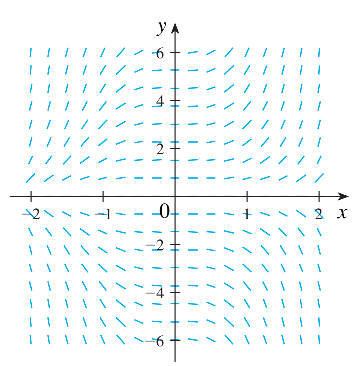


FIGURA 3

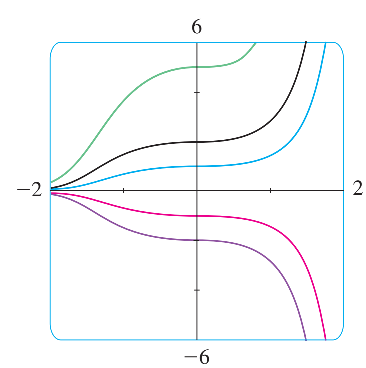


FIGURA 4

EXEMPLO 4 Na Seção 9.2, modelamos a corrente $I(t)$ no circuito elétrico mostrado na Figura 5 pela equação diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

Encontre uma expressão para a corrente em um circuito onde a resistência é 12 Ω, a indutância é 4 H, a pilha fornece uma voltagem constante de 60 V e o interruptor é ligado quando $t = 0$. Qual o valor-limite da corrente?

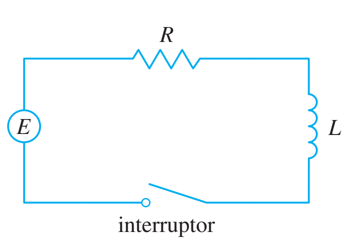


FIGURA 5

SOLUÇÃO Com $L = 4$, $R = 12$ e $E(t) = 60$, a equação torna-se

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{or} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

e o problema de valor inicial é

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Reconhecemos essa equação como separável e a resolvemos da seguinte forma:

$$\int \frac{dI}{15 - 3I} = \int dt \qquad (15 - 3I \neq 0)$$

$$-\tfrac{1}{3}\ln|15 - 3I| = t + C$$

$$|15 - 3I| = e^{-3(t+C)}$$

$$15 - 3I = \pm e^{-3C}e^{-3t} = Ae^{-3t}$$

$$I = 5 - \tfrac{1}{3}Ae^{-3t}$$

Como $I(0) = 0$, temos $5 - \frac{1}{3}A = 0$, assim, $A = 15$ e a solução é

$$I(t) = 5 - 5e^{-3t}$$

A corrente-limite, em ampères, é

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty}(5 - 5e^{-3t}) = 5 - 5\lim_{t\to\infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$

A Figura 6 revela como a solução no Exemplo 4 (a corrente) se aproxima de seu valor-limite. A comparação com a Figura 11 na Seção 9.2 mostra que pudemos desenhar uma curva solução bem precisa a partir do campo de direções.

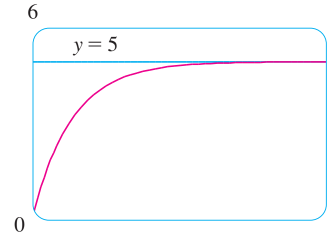


FIGURA 6

Trajetórias Ortogonais

Uma **trajetória ortogonal** de uma família de curvas é uma curva que intercepta cada curva da família ortogonalmente, isto é, com ângulo reto (veja a Figura 7). Por exemplo, cada membro da família $y = mx$ de retas que passa pela origem é uma trajetória ortogonal da família $x^2 + y^2 = r^2$ de círculos concêntricos com o centro na origem (veja a Figura 8). Dizemos que as duas famílias são trajetórias ortogonais uma da outra.

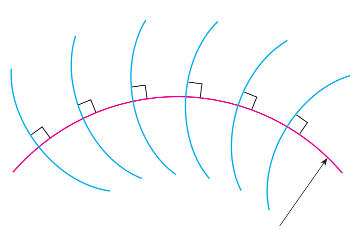


FIGURA 7

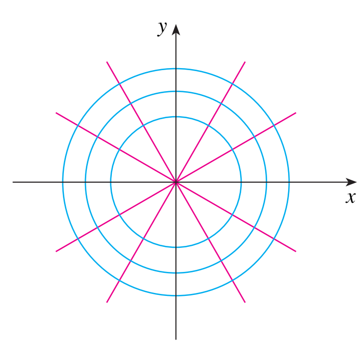


FIGURA 8

EXEMPLO 5 Encontre as trajetórias ortogonais da família de curvas $x = ky^2$, onde k é uma constante arbitrária.

SOLUÇÃO As curvas $x = ky^2$ formam uma família de parábolas cujo eixo de simetria é o eixo x. O primeiro passo é encontrar uma única equação diferencial que seja satisfeita por todos os membros da família. Se derivarmos $x = ky^2$, obteremos

$$1 = 2ky\frac{dy}{dx} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky}$$

Essa é uma equação diferencial que depende de k, mas precisamos de uma equação que seja válida para todos os valores de k simultaneamente. Para eliminar k observamos que, da equação geral da parábola dada $x = ky^2$, temos $k = x/y^2$ e, assim, a equação diferencial pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky} = \frac{1}{2\dfrac{x}{y^2}y}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Isso significa que a inclinação da reta tangente em qualquer ponto (x, y) em uma das parábolas é $y' = y/(2x)$. Em uma trajetória ortogonal, a inclinação da reta tangente deve ser o oposto do inverso dessa inclinação. Portanto, as trajetórias ortogonais devem satisfazer a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

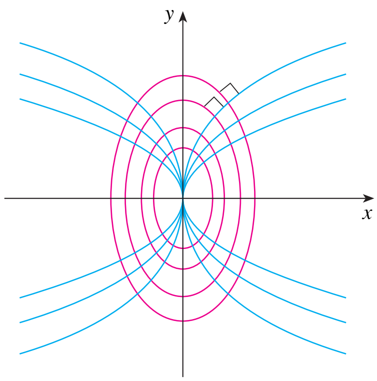


FIGURA 9

Essa equação diferencial é separável e a resolvemos como segue:

$$\int y\,dy = -\int 2x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

$$\boxed{4} \qquad x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

onde C é uma constante positiva qualquer. Então, as trajetórias ortogonais são a família de elipses dada pela Equação 4 e esboçada na Figura 9.

As trajetórias ortogonais ocorrem em vários ramos da física. Por exemplo, em um campo eletrostático, as linhas de força são ortogonais às linhas de potencial constante. Também as linhas de corrente em aerodinâmica são trajetórias ortogonais às curvas de velocidade constante.

Problemas de Mistura

Um problema típico de mistura envolve um tanque de capacidade fixa preenchido com uma solução completamente misturada de alguma substância (digamos, sal). Uma solução de uma dada concentração entra no tanque a uma taxa fixa e a mistura, bem agitada, sai a uma taxa fixa, que pode ser diferente da taxa de entrada. Se $y(t)$ denota a quantidade de substância no tanque no instante t, então $y'(t)$ é a taxa na qual a substância está sendo adicionada menos a taxa na qual ela está sendo retirada. A descrição matemática da situação frequentemente leva a uma equação diferencial de primeira ordem separável. Podemos usar o mesmo tipo de raciocínio para modelar uma variedade de fenômenos: reações químicas, descarga de poluentes em um lago, injeção de medicamentos na corrente sanguínea, entre outros.

EXEMPLO 6 Um tanque contém 20 kg de sal dissolvido em 5 000 L de água. Água salgada com 0,03 kg de sal por litro entra no tanque a uma taxa de 25 L/min. A solução é misturada completamente e sai do tanque à mesma taxa. Qual a quantidade de sal que permanece no tanque depois de meia hora?

SOLUÇÃO Seja $y(t)$ a quantidade de sal (em quilogramas) depois de t minutos. Foi-nos dado que $y(0) = 20$ e queremos encontrar $y(30)$. Fazemos isso encontrando uma equação diferencial que seja satisfeita por $y(t)$. Observe que dy/dt é a taxa de variação da quantidade de sal, assim,

$$\boxed{5} \qquad \frac{dy}{dt} = \text{(taxa de entrada)} - \text{(taxa de saída)}$$

onde (taxa de entrada) é a taxa na qual o sal entra no tanque e (taxa de saída) é a taxa na qual o sal deixa o tanque. Temos

$$\text{taxa de entrada} = \left(0{,}03\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 0{,}75\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

O tanque sempre contém 5 000 L de líquido, então a concentração no tempo t é $y(t)/5\,000$ (medida em quilogramas por litro). Como a água salgada sai a uma taxa de 25 L/min, obtemos

$$\text{taxa de saída} = \left(\frac{y(t)}{5\,000}\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{y(t)}{200}\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Então, da Equação 5, temos

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200}$$

Resolvendo essa equação diferencial separável, obtemos

$$\int \frac{dy}{150 - y} = \int \frac{dt}{200}$$

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C$$

A Figura 10 mostra o gráfico da função $y(t)$ do Exemplo 6. Observe que, com o passar do tempo, a quantidade de sal se aproxima de 150 kg.

Uma vez que $y(0) = 20$, temos $-\ln 130 = C$, logo

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} - \ln 130$$

Portanto,
$$|150 - y| = 130e^{-t/200}$$

Como $y(t)$ é contínua, $y(0) = 20$ e o lado direito nunca é zero, deduzimos que $150 - y(t)$ é sempre positiva. Então, $|150 - y| = 150 - y$ e assim

$$y(t) = 150 - 130e^{-t/200}$$

A quantidade de sal depois de 30 minutos é

$$y(30) = 150 - 130e^{-30/200} \approx 38{,}1 \text{ kg}$$

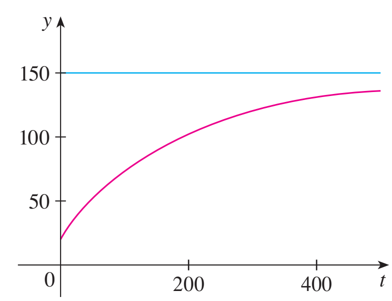


FIGURA 10

9.3 Exercícios

1–10 Resolva a equação diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x}}{e^y}$

3. $xy^2y' = x + 1$

4. $(y^2 + xy^2)y' = 1$

5. $(y + \operatorname{sen} y)\,y' = x + x^3$

6. $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{s + 1}{sv + s}$

7. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{ye^{y+t^2}}$

8. $\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{e^y \operatorname{sen}^2\theta}{y \sec\theta}$

9. $\dfrac{dp}{dt} = t^2p - p + t^2 - 1$

10. $\dfrac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$

11–18 Encontre a solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial dada.

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$, $\quad y(0) = -3$

12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\ln x}{xy}$, $\quad y(1) = 2$

13. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2t + \sec^2 t}{2u}$, $\quad u(0) = -5$

14. $y' = \dfrac{xy \operatorname{sen} x}{y + 1}$, $\quad y(0) = 1$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homeworks Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

15. $x \ln x = y(1 + \sqrt{3 + y^2})y'$, $\quad y(1) = 1$

16. $\dfrac{dp}{dt} = \sqrt{Pt}$, $\quad P(1) = 2$

17. $y' \operatorname{tg} x = a + y$, $\quad y(\pi/3) = a$, $\quad 0 < x < \pi/2$

18. $\dfrac{dp}{dt} = kL^2 \ln t$, $\quad L(1) = -1$

19. Encontre uma equação da curva que passe pelo ponto (0, 1) e cuja inclinação em (x, y) seja xy.

20. Encontre a função f tal que $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$ e $f(0) = \frac{1}{2}$.

21. Resolva a equação diferencial $y' = x + y$, usando a mudança de variáveis $u = x + y$.

22. Resolva a equação diferencial $xy' = y + xe^{y/x}$, usando a mudança de variáveis $v = y/x$.

23. (a) Resolva a equação diferencial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$.

(b) Resolva o problema de valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 0$ e faça um gráfico de solução.

(c) O problema de valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 2$ tem solução? Explique.

24. Resolva a equação $e^{-y}y' + \cos x = 0$ e trace vários membros da família de soluções. Como muda a curva solução quando a constante C varia?

SCA **25.** Resolva o problema de valor inicial $y' = (\text{sen } x)/\text{sen } y$, $y(0) = \pi/2$, e trace a solução (se seu SCA fizer gráficos implícitos).

SCA **26.** Resolva a equação $y' = x\sqrt{x^2 + 1}/(ye^y)$ e trace vários membros da família de soluções (se seu SCA fizer gráficos implícitos). Como muda a curva solução quando a constante C varia?

SCA **27–28.**

(a) Use um sistema de computação algébrica para desenhar um campo de direção para a equação diferencial. Imprima e use-o para esboçar algumas curvas de solução sem resolver a equação diferencial.

(b) Resolva a equação diferencial.

(c) Use o SCA para desenhar as soluções obtidas na parte (b). Compare com as curvas da parte (a).

27. $y' = y^2$ $\qquad$ **28.** $y' = xy$

29–32 Encontre as trajetórias ortogonais da família de curvas. Usando uma calculadora (ou um computador), desenhe vários membros de cada família na mesma tela.

29. $x^2 + 2y^2 = k^2$ $\qquad$ **30.** $y^2 = kx^3$

31. $y = \dfrac{k}{x}$ $\qquad$ **32.** $y = \dfrac{x}{1 + kx}$

33–35 Uma **equação integral** é uma equação que contém uma função desconhecida $y(x)$ e uma integral que envolve $y(x)$. Resolva a determinada equação integral. [*Dica*: Use uma condição inicial obtida da equação integral.]

33. $y(x) = 2 + \displaystyle\int_2^x [t - ty(t)]\, dt$

34. $y(x) = 2 + \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{ty(t)}$, $x > 0$

35. $y(x) = 4 + \displaystyle\int_0^x 2t\sqrt{y(t)}\, dt$

36. Encontre a função f tal que $f(3) = 2$ e

$$(t^2 + 1)f'(t) + [f(t)]^2 + 1 = 0 \qquad t \neq 1$$

[*Dica*: Use a fórmula de adição para $\operatorname{tg}(x + y)$ na Página de Referência 2.]

37. Resolva o problema de valor inicial no Exercício 27, na Seção 9.2, para encontrar uma expressão para a carga no instante t. Encontre o valor-limite da carga.

38. No Exercício 28, na Seção 9.2, discutimos uma equação diferencial que modela a temperatura de uma xícara de café a 95 ºC em uma sala a 20 ºC. Resolva a equação diferencial para encontrar uma expressão para a temperatura do café no instante t.

39. No Exercício 15, na Seção 9.1, formulamos um modelo para o aprendizado na forma da equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)$$

onde $P(t)$ mede o desempenho de alguém aprendendo uma habilidade depois de um tempo de treinamento t, M é o nível máximo de desempenho e k é uma constante positiva. Resolva essa equação diferencial para encontrar uma expressão para $P(t)$. Qual é o limite dessa expressão?

40. Em uma reação química elementar, as moléculas únicas de dois reagentes A e B formam a molécula do produto C: A + B $\rightarrow$ C. A lei de ação das massas afirma que a taxa de reação é proporcional ao produto das concentrações de A e B:

$$\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}]$$

(Veja o Exemplo 4, na Seção 3.7, no Volume I.) Então, se as concentrações iniciais forem [A] $= a$ mols/L e [B] $= b$ mols/L e escrevermos $x =$ [C], então teremos

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

(a) Supondo que $a \neq b$, encontre x como uma função de t. Use o fato de que a concentração inicial de C é 0.

(b) Encontre $x(t)$ assumindo que $a = b$. Como essa expressão para $x(t)$ é simplificada se soubermos que [C] $= \frac{1}{2}a$ depois de 20 segundos?

41. Em contraste com a situação do Exercício 40, as experiências mostram que a reação $H_2 + Br_2 \rightarrow 2\,HBr$ satisfaz a lei de troca

$$\frac{d[\mathrm{HBr}]}{dt} = k[\mathrm{H_2}][\mathrm{Br_2}]^{1/2}$$

e, portanto, para essa reação a equação diferencial torna-se

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)^{1/2}$$

onde $x =$ [HBr] e a e b são concentrações iniciais de hidrogênio e bromo.

(a) Escreva x como uma função de t no caso em que $a = b$. Use o fato de que $x(0) = 0$.

(b) Se $a > b$, encontre t como uma função de x. [*Dica*: Ao desempenhar a integração, faça a substituição $u = \sqrt{b - x}$.]

42. Uma esfera com raio 1 m tem temperatura 15 ºC. Ela encontra-se dentro de uma esfera concêntrica com raio 2 m e temperatura 25 ºC. A temperatura $T(r)$ em uma distância r do centro comum das esferas satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Se fizermos $S = dT/dr$, então S satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem. Encontre uma expressão para a temperatura $T(r)$ entre as duas esferas.

43. Uma solução de glicose é administrada de maneira intravenosa na corrente sanguínea em uma taxa constante r. À medida que a glicose é adicionada, ela é convertida em outras substâncias e removida da corrente sanguínea a uma taxa que é proporcional à concentração naquele instante. Então, um modelo para a concentração $C = C(t)$ da solução de glicose na corrente sanguínea é

$$\frac{dC}{dt} = r - kC$$

onde k é uma constante positiva.

(a) Suponha que a concentração no instante $t = 0$ seja C_0. Determine a concentração em um instante qualquer t, resolvendo a equação diferencial.

(b) Assumindo que $C_0 < r/k$, calcule $\lim_{t\to\infty} C(t)$ e interprete sua resposta.

44. Um pequeno país tem \$ 10 bilhões em papel-moeda em circulação e a cada dia \$ 50 milhões chegam aos bancos daquele lugar. O governo decide introduzir uma nova moeda, fazendo com que os bancos troquem notas velhas por novas sempre que a moeda antiga entrar nos bancos. Denote por $x = x(t)$ a quantidade de moeda nova em circulação no instante t, com $x(0) = 0$.

(a) Formule um modelo matemático na forma de um problema de valor inicial que represente o "fluxo" da nova moeda em circulação.

(b) Resolva o problema de valor inicial encontrado no item (a).

(c) Quanto tempo levará para a nova moeda representar 90% da moeda em circulação?

45. Um tanque contém 1 000 L de água salgada com 15 kg de sal dissolvido. Água pura entra no tanque a uma taxa de 10 L/min. A solução é mantida bem misturada e escoa do tanque na mesma taxa. Quanto sal há no tanque (a) após t minutos e (b) após 20 minutos?

46. O ar em uma sala com volume 180 m^3 contém 0,15% de dióxido de carbono inicialmente. Ar mais fresco com apenas 0,05% de dióxido de carbono entra na sala a uma taxa de 2 m^3/min e o ar misturado sai na mesma taxa. Encontre a porcentagem de dióxido de carbono na sala como uma função do tempo. O que acontece a longo prazo?

47. Um barril com 2 000 L de cerveja contém 4% de álcool (por volume). Cerveja com 6% de álcool é bombeada para dentro do barril a uma taxa de 20 L/min e a mistura é bombeada para fora do barril à mesma taxa. Qual é a porcentagem de álcool depois de uma hora?

48. Um tanque contém 1.000 L de água pura.* Água salgada com 0,04 kg de sal por litro de água entra no tanque a uma taxa de 10 L/min. A solução é mantida completamente misturada e sai do tanque a uma taxa de 15 L/min. Quanto sal há no tanque (a) depois de t minutos e (b) depois de uma hora?

49. Quando uma gota de chuva cai, ela aumenta de tamanho; assim, sua massa em um instante t é uma função de t, $m(t)$. A taxa de crescimento da massa é $km(t)$ para alguma constante positiva k. Quando aplicamos a Lei do Movimento de Newton à gota de chuva, obtemos $(mv)' = gm$, onde v é a velocidade da gota de chuva (dirigida para baixo) e g é a aceleração da gravidade. A *velocidade terminal* da gota de chuva é $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Encontre uma expressão para a velocidade terminal em termos de g e k.

50. Um objeto de massa m está se movendo horizontalmente por um meio que resiste ao movimento com uma força que é uma função da velocidade; isto é,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = f(v)$$

onde $v = v(t)$ e $s = s(t)$ representam a velocidade e a posição do objeto no instante t, respectivamente. Por exemplo, pense em um barco se movendo pela água.

(a) Suponha que a força de resistência seja proporcional à velocidade, isto é, $f(v) = -kv$, k uma constante positiva. (Esse modelo é apropriado para pequenos valores de v.) Sejam $v(0) = v_0$ e $s(0) = s_0$ os valores iniciais de v e s. Determine v e s em qualquer instante t. Qual é a distância total que o objeto viaja a partir do instante $t = 0$?

(b) Para volumes maiores de v um melhor modelo é obtido ao supor que a força de resistência seja proporcional ao quadrado da velocidade, isto é, $f(v) = -kv^2$, $k > 0$. (Esse modelo foi sugerido primeiro por Newton.) Sejam v_0 e s_0 os valores iniciais de v e s. Determine v e s em qualquer instante t. Qual é a distância total que o objeto viaja nesse caso?

51. *Crescimento alométrico* em biologia refere-se às relações entre os tamanhos das partes de um organismo (comprimento do crânio e comprimento do corpo, por exemplo). Se $L_1(t)$ e $L_2(t)$ são os tamanhos de dois órgãos em um organismo de idade t, então L_1 e L_2 satisfazem uma lei alométrica se suas taxas de crescimento específicas são proporcionais:

$$\frac{1}{L_1}\frac{dL1}{dt} = k\frac{1}{L_2}\frac{dL_2}{dt}$$

onde k é uma constante.

(a) Use a lei alométrica para escrever uma equação diferencial fazendo a relação de L_1 e L_2 e solucione-a para expressar L_1 como uma função de L_2.

(b) Em um estudo de diversas espécies de algas unicelulares, a constante de proporcionalidade na lei alométrica relacionando B (biomassa celular) e V (volume celular) foi considerada $k = 0{,}0794$. Escreva B como uma função de V.

52. *Homeostase* refere-se a um estado em que o teor de nutrientes de um consumidor é independente do teor de nutrientes de seu alimento. Na ausência de homeostase, um modelo sugerido por Sterner e Elser é dado por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\theta}\frac{y}{x}$$

onde x e y representam o teor de nutrientes do alimento e do consumidor, respectivamente, e θ é uma constante com $\theta \geqslant 1$.

(a) Resolva a equação diferencial.

(b) O que acontece quando $\theta = 1$? O que acontece quando $\theta \to \infty$?

53. Seja $A(t)$ a área de uma cultura de tecido em um instante t e seja M a área final do tecido quando o crescimento está completo. A maioria das divisões celulares ocorre na periferia do tecido, e o número de células na periferia é proporcional a $\sqrt{A(t)}$. Assim, um modelo razoável para o crescimento de tecido é obtido assumindo-se que a taxa de crescimento da área seja conjuntamente proporcional a $\sqrt{A(t)}$ e $M - A(t)$.

(a) Formule uma equação diferencial e use-a para mostrar que o tecido cresce mais rápido quando $A(t) = \frac{1}{3}M$.

SCA (b) Resolva a equação diferencial para encontrar uma expressão para $A(t)$. Use um sistema de computação algébrica para fazer a integração.

* Água salgada com 0,05 kg de cal. por litro de água entra no tanque a uma taxa de 5 L/min.

54. De acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton, a força gravitacional em um objeto de massa m que tenha sido lançado verticalmente para cima da superfície da Terra é

$$F = \frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

onde $x = x(t)$ é a distância do objeto acima da superfície no instante t; R, o raio da Terra; e g, a aceleração da gravidade. Também, pela Segunda Lei de Newton, $F = ma = m(dv/dt)$, e dessa forma

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

(a) Suponha que um foguete seja lançado verticalmente para cima com uma velocidade inicial v_0. Seja h a altura máxima acima da superfície alcançada pelo objeto. Mostre que

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{R + h}}$$

[*Dica*: Pela Regra da Cadeia, $m(dv/dt) = mv\,(dv/dx)$.]

(b) Calcule $v_e = \lim_{h\to\infty} v_0$. Esse limite é chamado velocidade de escape da Terra.

(c) Use $R = 6.370$ km e $g = 9{,}8$ m/s^2 para calcular v_e em quilômetros por segundo.

PROJETO APLICADO QUÃO RAPIDAMENTE UM TANQUE ESVAZIA?

Se água (ou outro líquido) está vazando de um tanque, esperamos que o escoamento seja maior no começo (quando o tanque estiver mais cheio) e que vá gradualmente diminuindo à medida que o nível de água do tanque diminui. Mas queremos uma descrição matemática mais precisa de como o escoamento decresce a fim de responder às perguntas que os engenheiros fazem: quanto tempo demora para que o tanque seja esvaziado completamente? Quão cheio o tanque deve estar para garantir uma pressão mínima a um sistema de irrigação?

Sejam $h(t)$ e $V(t)$ o volume de água no tanque e a altura da água no tanque num dado momento t. Se a água escorre por um furo de área a no fundo do tanque, então a Lei de Torricelli diz que

$$\boxed{1} \qquad \frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

onde g é a aceleração devido à gravidade. Logo, a taxa na qual a água escoa do tanque é proporcional à raiz quadrada da altura da água.

1. (a) Suponha que o tanque seja cilíndrico com altura igual a 2 m e raio igual a 1 m e que o buraco seja um círculo com raio igual a 2 cm. Se tomarmos $g = 10$ m/s^2, mostre que h satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -0{,}0004\sqrt{20h}$$

(b) Resolva esta equação para encontrar a altura da água no instante t, supondo que o tanque esteja cheio em $t = 0$.

(c) Quanto tempo iria demorar para o tanque ficar completamente vazio?

2. O modelo teórico dado pela Equação 1 não é muito preciso, se levarmos em conta a rotação e viscosidade do líquido. Em vez disso, o modelo

$$\boxed{2} \qquad \frac{dh}{dt} = k\sqrt{h}$$

é em geral usado e a constante k (que depende das propriedades físicas do líquido) é determinada a partir dos dados relacionados com o vazamento do tanque.

(a) Suponha que o buraco esteja posicionado na lateral de uma garrafa e que a altura h da água (acima do buraco) decresça de 10 cm para 3 cm em 68 segundos. Use a Equação 2 para encontrar uma expressão para $h(t)$. Avalie $h(t)$ para $t = 10$, 20, 30, 40, 50, 60.

(b) Perfure um buraco de 4 mm perto do fundo de uma garrafa plástica de um refrigerante de 2 litros. Faça marcas de 0 a 10, com "0" correspondendo ao topo do buraco. Com um dedo tampando o buraco, encha a garrafa com água até a

O Problema 2(b) é resolvido melhor com uma demonstração em sala de aula ou em um projeto em grupo com três alunos em cada grupo: um para marcar o tempo em segundos, outro para estimar a altura a cada 10 segundos e um terceiro para registrar esses valores

Richard Le Borne, Depto. Matemática, Tenesse Technological University

marca de 10 cm. Tire seu dedo do buraco e registre os valores de $h(t)$ para $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$ segundos. (Provavelmente, você vai descobrir que demorará cerca de 68 segundos para o nível chegar a $h = 3$ cm.) Compare seus dados com os valores de $h(t)$ da parte (a). Quão bem o modelo previu os valores reais?

3. Em muitas partes do mundo, a água para os sistemas de combate a incêndios em grandes hotéis e hospitais é fornecida pela ação da gravidade em tanques cilíndricos colocados nos telhados desses prédios. Suponha que cada tanque tenha um raio de 3 m e o diâmetro da saída seja de 6 cm. Um engenheiro tem de garantir que a pressão da água seja, no mínimo, de 104 kPa por um período de 10 minutos. (Quando um incêndio acontece, o sistema elétrico pode falhar e pode levar cerca de 10 minutos para que o gerador de emergência e bombas anti-incêndio sejam ativados.) Qual altura o engenheiro deve especificar para o tanque a fim de garantir essa exigência? (Use o fato de que a pressão da água a uma profundidade de d metros é $P = 10\,d$ quilopascals. Veja a Seção 8.3.)

4. Nem todos os tanques têm a forma de cilindros. Suponha que um tanque tenha uma área transversal $A(h)$ na altura h. Então, o volume de água até a altura h é $V = \int_0^h A(u)\,du$ e, portanto, o Teorema Fundamental do Cálculo nos dá $dV/dh = A(h)$. Segue que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\,\frac{dh}{dt} = A(h)\,\frac{dh}{dt}$$

e assim a Lei de Torricelli se torna

$$A(h)\,\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

(a) Suponha que o tanque tenha o formato de uma esfera de raio igual a 2 m e que esteja cheia, inicialmente, até a metade de sua capacidade de água. Se o raio do buraco circular é 1 cm e assumimos que $g = 10$ m/s^2, mostre que h satisfaz a equação diferencial

$$(4h - h^2)\,\frac{dh}{dt} = -0{,}0001\sqrt{20h}$$

(b) Em quanto tempo o tanque ficará completamente vazio?

PROJETO APLICADO — O QUE É MAIS RÁPIDO: SUBIR OU DESCER?

Suponha que você jogue uma bola para o ar. Você acha que ela leva mais tempo para alcançar sua altura máxima ou para cair de volta à Terra a partir de sua altura máxima? Resolveremos esse problema neste projeto, mas, antes de começar, pense sobre a situação e dê um palpite com base em sua intuição prática.

1. Uma bola de massa m é lançada verticalmente para cima a partir da superfície da Terra com uma velocidade inicial positiva v_0. Assumimos que as forças agindo na bola sejam a força da gravidade e a força de resistência do ar com sentido oposto ao sentido do movimento e com módulo $p|\,v(t)\,|$, onde p é uma constante positiva e $v(t)$ é a velocidade da bola no instante t. Tanto na subida quanto na descida, a força total agindo na bola é $-pv - mg$. (Durante a subida, $v(t)$ é positiva e a resistência age para baixo; durante a descida, $v(t)$ é negativa e a resistência age para cima.) Então, de acordo com a Segunda Lei Newton, a equação de movimento é

$$mv' = -pv - mg$$

Ao modelar a força em virtude da resistência do ar, várias funções têm sido usadas, dependendo das características físicas e velocidade da bola. Aqui, usamos um modelo linear, $-pv$, mas um modelo quadrático ($-pv^2$ na subida e pv^2 na descida) é outra possibilidade para velocidades altas (veja o Exercício 50 na Seção 9.3). Para uma bola de golfe, experiências mostraram que um bom modelo é $-pv^{1,3}$ na subida e $p|v|^{1,3}$ na descida. Mas, não importando a função força $-f(v)$ usada [onde $f(v) > 0$ para $v > 0$ e $f(v) < 0$ para $v < 0$], a resposta à questão permanece a mesma. Veja F. Brauer, "What Goes Up Must Come Down, Eventually." Amer. Mat. Mensal 108 (2001), pp. 437–440.

Resolva essa equação diferencial para mostrar que a velocidade é

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)e^{-pt/m} - \frac{mg}{p}$$

2. Mostre que a altura da bola, até ela atingir o chão, é

$$y(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)\frac{m}{p}(1 - e^{-pt/m}) - \frac{mgt}{p}$$

3. Seja t_1 o tempo que a bola leva para alcançar sua altura máxima. Mostre que

$$t_1 = \frac{m}{p}\ln\left(\frac{mg + pv_0}{mg}\right)$$

Calcule esse tempo para uma bola com massa 1 kg e velocidade inicial 20 m/s. Suponha que a força de resistência do ar seja $\frac{1}{10}$ da velocidade.

4. Seja t_2 o instante no qual a bola volta para a Terra. Para a bola do Problema 3, calcule t_2 usando um gráfico da função altura $y(t)$. Qual é mais rápida, a subida ou a descida?

5. Em geral, não é fácil encontrar t_2 porque é impossível resolver a equação $y(t) = 0$. Podemos, entretanto, usar um método indireto para determinar se a subida ou a descida é mais rápida; determinamos se é positivo ou negativo. Mostre que

$$y(2t_1) = \frac{m^2g}{p^2}\left(x - \frac{1}{x} - 2\ln x\right)$$

onde $x = e^{pt_1/m}$. Então mostre que $x > 1$ e a função

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$$

estão aumentando para $x > 1$. Use esse resultado para decidir se $y(2t_1)$ é positivo ou negativo. O que você pode concluir? A subida ou a descida é mais rápida?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

9.4 Modelos para o Crescimento Populacional

Nesta seção investigaremos equações diferenciais que são usadas para modelar o crescimento populacional: a lei do crescimento natural, a equação logística e muitas outras.

A Lei de Crescimento Natural

Um dos modelos para o crescimento populacional que consideramos na Seção 9.1 baseava-se na suposição de que a população cresce a uma taxa proporcional ao tamanho da população:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Essa é uma hipótese razoável? Suponha que tenhamos uma população (de bactérias, por exemplo) com tamanho $P = 1\,000$ e que, em certo instante, esteja crescendo a uma taxa de $P' = 300$ bactérias por hora. Agora, tomemos outras 1 000 bactérias do mesmo tipo, colocando-as com a primeira população. Cada metade da nova população cresce a uma taxa de 300 bactérias por hora. Seria razoável esperar que a população total de 2 000 aumentasse a uma taxa de 600 bactérias por hora inicialmente (desde que houvesse espaço e nutrientes suficientes). Assim, se dobrarmos o tamanho, dobraremos a taxa de crescimento. Parece possível que a taxa de crescimento seja proporcional ao tamanho.

Em geral, se $P(t)$ for o valor de uma quantidade y no tempo t, e se a taxa de variação de P com relação a t for proporcional a seu tamanho $P(t)$ em qualquer tempo, então

1 $$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP}$$

onde k é uma constante. A Equação 1 é algumas vezes chamada **lei do crescimento natural**. Se k for positivo, então a população aumenta; se k for negativo, ela diminui.

Como a Equação 1 é uma equação diferencial separável, podemos resolvê-la pelo método da Seção 9.3:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k\, dt$$

$$\ln |P| = kt + C$$

$$|P| = e^{kt+C} = e^C e^{kt}$$

$$P = Ae^{kt}$$

onde A $(= \pm e^C$ ou 0) é uma constante arbitrária. Para percebermos o significado da constante A, observamos que

$$P(0) = Ae^{k \cdot 0} = A$$

Portanto, A é o valor inicial da função.

2 A solução do problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = P_0$$

é $$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Exemplos e exercícios sobre a utilização de **2** são dados na Seção 3.8.

Outra maneira de escrever a Equação 1 é

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

que diz que a **taxa de crescimento relativa** (a taxa de crescimento dividida pelo tamanho da população) é constante. Então, **2** diz que a população com uma taxa de crescimento relativa constante deve crescer exponencialmente.

Podemos levar em conta a emigração (ou a remoção) de uma população modificando a Equação 1: se a taxa de emigração for uma constante m, então a taxa de mudança da população é modelada pela equação diferencial

3 $$\frac{dP}{dt} = kP - m$$

Veja o Exercício 15 para a solução e consequências da Equação 3.

O Modelo Logístico

Como discutimos na Seção 9.1, uma população com frequência cresce exponencialmente em seus estágios iniciais, mas em dado momento se estabiliza e se aproxima de sua capacidade de suporte por causa dos recursos limitados. Se $P(t)$ for o tamanho da população no instante t, assumimos que

$$\frac{dP}{dt} \approx kP \qquad \text{se } P \text{ for pequeno}$$

Isso diz que a taxa de crescimento inicialmente está próxima de ser proporcional ao tamanho. Em outras palavras, a taxa de crescimento relativo é praticamente constante quando a população é pequena. Mas também queremos refletir o fato de que a taxa de crescimento relativo diminui quando a população P aumenta e torna-se negativa quando P ultrapassa sua **capacidade de suporte** M, a população máxima que um ambiente é capaz de sustentar a longo prazo. A expressão mais simples para a taxa de crescimento relativo que incorpora essas hipóteses é

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Multiplicando por P, obtemos o modelo para o crescimento populacional conhecido como a **equação diferencial logística**:

4
$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)}$$

Observe na Equação 4 que, se P for pequeno comparado com M, então P/M está próximo de 0 e, dessa forma, $dP/dt \approx kP$. Contudo, se $P \to M$ (a população se aproxima de sua capacidade de suporte), então $P/M \to 1$, assim, $dP/dt \to 0$. Podemos deduzir informações sobre quando as soluções aumentam ou diminuem diretamente da Equação 4. Se a população P estiver entre 0 e M, então o lado direito da equação é positivo, desse modo $dP/dt > 0$ e a população aumenta. Mas se a população exceder a capacidade de suporte ($P > M$), então $1 - P/M$ é negativo, portanto $dP/dt < 0$ e a população diminui.

Vamos começar nossa análise mais detalhada da equação diferencial logística olhando para um campo de direções.

EXEMPLO 1 Desenhe um campo de direções para a equação logística com $k = 0{,}08$ e capacidade de suporte $M = 1\,000$. O que você pode deduzir sobre as soluções?

SOLUÇÃO Nesse caso a equação diferencial logística é

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1\,000}\right)$$

Um campo de direções para essa equação é mostrado na Figura 1. Mostramos apenas o primeiro quadrante porque as populações negativas não têm significado e estamos interessados apenas no que acontece depois de $t = 0$.

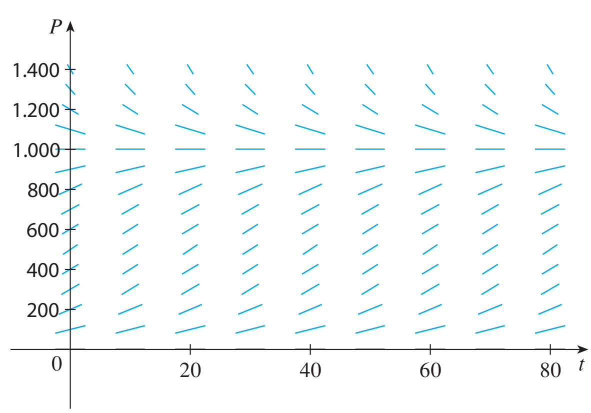


FIGURA 1
Campo de direções para a equação logística no Exemplo 1

A equação logística é autônoma (dP/dt depende apenas de P, não de t); assim, as inclinações são as mesmas ao longo de qualquer reta horizontal. Como esperado, as inclinações são positivas para $0 < P < 1\,000$ e negativas para $P > 1\,000$.

As inclinações são pequenas quando P está próximo de 0 ou 1 000 (a capacidade de suporte). Observe que as soluções se distanciam da solução de equilíbrio $P = 0$ e se aproximam da solução de equilíbrio $P = 1\,000$.

Na Figura 2 usamos o campo de direções para esboçar as curvas solução com populações iniciais $P(0) = 100$, $P(0) = 400$ e $P(0) = 1\,300$. Observe que as curvas solução abaixo de $P = 1\,000$ estão aumentando, e aquelas que começam acima de $P = 1\,000$ estão diminuindo. As inclinações são maiores quando $P \approx 500$, portanto as curvas solução que começam abaixo de $P = 1\,000$ têm pontos de inflexão quando $P \approx 500$. De fato, podemos demonstrar que todas as curvas solução que começam abaixo de $P = 500$ têm um ponto de inflexão quando P é exatamente 500. (Veja o Exercício 11.)

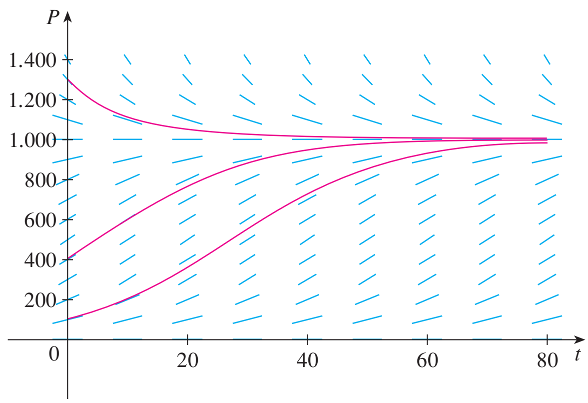


FIGURA 2
Curvas solução para a equação logística no Exemplo 1

A equação logística $\boxed{4}$ é separável e podemos resolvê-la explicitamente usando o método da Seção 9.3. Uma vez que

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

temos

$$\boxed{5} \qquad \int \frac{dP}{P(1 - P/M)} = \int k\, dt$$

Para calcularmos a integral no lado esquerdo, escrevemos

$$\frac{1}{P(1 - P/M)} = \frac{M}{P(M - P)}$$

Usando frações parciais (veja a Seção 7.4, no Volume I) temos

$$\frac{M}{P(M - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{M - P}$$

Isso nos permite reescrever a Equação 5:

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M - P}\right) dP = \int k\, dt$$

$$\ln |P| - \ln |M - P| = kt + C$$

$$\ln \left|\frac{M - P}{P}\right| = -kt - C$$

$$\left|\frac{M - P}{P}\right| = e^{-kt-C} = e^{-C}e^{-kt}$$

$$\boxed{6} \qquad \frac{M - P}{P} = Ae^{-kt}$$

onde $A = \pm e^{-C}$. Isolando P na Equação 6, obtemos

$$\frac{M}{P} - 1 = Ae^{-kt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{M} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}$$

então $$P = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}$$

Encontramos o valor de A colocando $t = 0$ na Equação 6. Se $t = 0$, então $P = P_0$ (a população inicial); portanto,

$$\frac{M - P_0}{P_0} = Ae^0 = A$$

Então, a solução para a equação logística é

$$\boxed{P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}} \qquad \text{onde } A = \frac{M - P_0}{P_0}} \tag{7}$$

Usando a expressão para $P(t)$ na Equação 7, vemos que

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = K$$

que é o esperado.

EXEMPLO 2 Escreva a solução para o problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1\,000}\right) \qquad P(0) = 100$$

e use-a para encontrar a população quando $P(40)$ e $P(80)$. Quando a população alcançará 900?

SOLUÇÃO A equação diferencial é uma equação logística com $k = 0{,}08$, capacidade de suporte $M = 1.000$ e população inicial $P_0 = 100$. Portanto a Equação 7 dá a população no instante t como

$$P(t) = \frac{1\,000}{1 + Ae^{-0{,}08t}} \qquad \text{onde } A = \frac{1\,000 - 100}{100} = 9$$

Logo,

$$P(t) = \frac{1\,000}{1 + 9e^{-0{,}08t}}$$

Assim, os tamanhos da população quando $t = 40$ e 80 são

$$P(40) = \frac{1\,000}{1 + 9e^{-3{,}2}} \approx 731{,}6 \qquad P(80) = \frac{1\,000}{1 + 9e^{-6{,}4}} \approx 985{,}3$$

A população alcançará 900 quando

$$\frac{1\,000}{1 + 9e^{-0{,}08t}} = 900$$

Resolvendo essa equação para t, temos

$$1 + 9e^{-0{,}08t} = \tfrac{10}{9}$$

$$e^{-0{,}08t} = \tfrac{1}{81}$$

$$-0{,}08t = \ln \tfrac{1}{81} = -\ln 81$$

$$t = \frac{\ln 81}{0{,}08} \approx 54{,}9$$

Logo, a população chega a 900 quando t for aproximadamente 55. Como uma verificação de nosso trabalho, traçamos a curva da população na Figura 3 e observamos onde ela intercepta a reta $P = 900$. O cursor indica que $t \approx 55$.

Compare a curva solução na Figura 3 com a curva solução mais baixa que desenhamos no campo de direções na Figura 2.

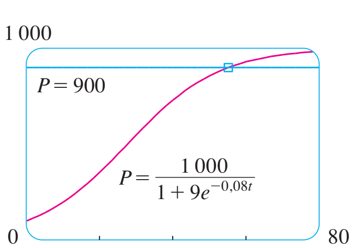


FIGURA 3

Comparação do Crescimento Natural com os Modelos Logísticos

Na década de 1930, o biólogo G. F. Gause realizou uma experiência com o protozoário *paramécio* e usou uma equação logística para modelar seus dados. A tabela fornece suas contagens diárias da população de protozoários. Ele estimou a taxa relativa de crescimento inicial como 0,7944 e a capacidade de suporte como 64.

t (dias)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observados)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57

EXEMPLO 3 Encontre os modelos exponencial e logístico para os dados de Gause. Compare os valores previstos com os valores observados e comente o ajuste.

SOLUÇÃO Dadas a taxa de crescimento relativo $k = 0{,}7944$ e a população inicial $P_0 = 2$, o modelo exponencial é

$$P(t) = P_0 e^{kt} = 2e^{0{,}7944t}$$

Gause usou o mesmo valor de k para seu modelo logístico. [Isso é razoável porque $P_0 = 2$ é pequeno comparado com a capacidade de suporte ($M = 64$). A equação

$$\frac{1}{P_0}\frac{dP}{dt}\bigg|_{t=0} = k\left(1 - \frac{2}{64}\right) \approx k$$

mostra que o valor de k para o modelo logístico está muito próximo do valor para o modelo exponencial.]

A seguir, a solução da equação logística na Equação 7 fornece

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}} = \frac{64}{1 + Ae^{-0{,}7944t}}$$

onde $$A = \frac{K - P_0}{P_0} = \frac{64 - 2}{2} = 31$$

Então $$P(t) = \frac{64}{1 + 31e^{-0{,}7944t}}$$

Usamos essas equações para calcular os valores previstos (arredondados para o inteiro mais próximo) e os comparamos na tabela a seguir.

t (dias)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observados)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57
P (modelo logístico)	2	4	9	17	28	40	51	57	61	62	63	64	64	64	64	64	64
P (modelo exponencial)	2	4	10	22	48	106	. . .										

Observamos na tabela e no gráfico da Figura 4 que, para os primeiros três ou quatro dias, o modelo exponencial fornece resultados comparáveis àqueles do método logístico mais sofisticado. Para $t \geqslant 5$, contudo, o modelo exponencial é muito impreciso, mas o modelo logístico se ajusta bem às observações.

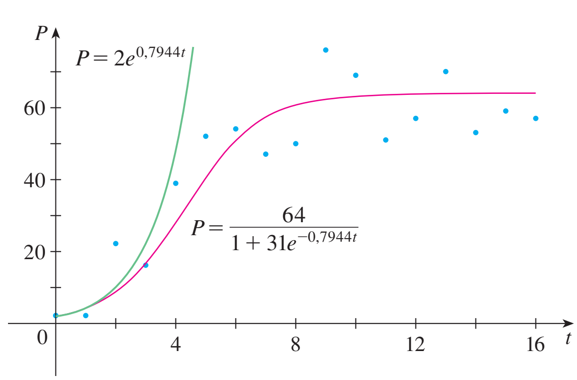


FIGURA 4
Os modelos exponencial e logístico para a população de *paramécios*

t	$B(t)$	t	$B(t)$
1980	9.847	1992	10.036
1982	9.856	1994	10.109
1984	9.855	1996	10.152
1986	9.862	1998	10.175
1988	9.884	2000	10.186
1990	9.962		

Muitos países que anteriormente passavam por um crescimento exponencial estão descobrindo agora que suas taxas de crescimento populacional estão diminuindo e que o modelo logístico fornece um modelo mais adequado. A tabela na margem mostra os valores em meados do ano de $B(t)$, a população da Bélgica, em milhares, no instante t, de 1980 a 2000. A Figura 5 mostra esses dados junto com uma função logística transladada obtida por meio de uma calculadora com recursos para ajustar funções logísticas a estes pontos por regressão. Vemos que o modelo logístico fornece um ajuste muito bom.

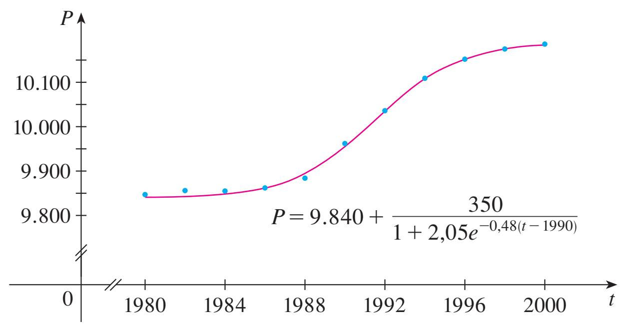


FIGURA 5
Modelo logístico para a população da Bélgica

Outros Modelos para o Crescimento Populacional

A Lei do Crescimento Natural e a equação diferencial logística não são as únicas equações propostas para modelar o crescimento populacional. No Exercício 20 veremos a função de crescimento de Gompertz e nos Exercícios 21 e 22 investigaremos os modelos de crescimento sazonal.

Dois dos outros modelos são modificações do modelo logístico. A equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - c$$

tem sido usada para modelar as populações que estão sujeitas à remoção de uma maneira ou de outra. (Pense em uma população de peixes que é capturada a uma taxa constante.) Essa Equação é explorada nos Exercícios 17 e 18.

Para algumas espécies existe um nível mínimo populacional m abaixo do qual as espécies tendem a se extinguir. (Os adultos podem não conseguir encontrar parceiros adequados.) Essas populações são modeladas pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

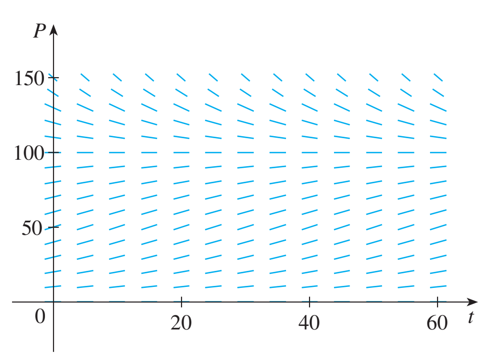
onde o fator extra, $1 - m/P$, leva em conta as consequências de uma população esparsa (veja o Exercício 19).

9.4 Exercícios

1. Suponha que uma população se desenvolva de acordo com a equação logística

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}05P - 0{,}0005P^2$$

onde t é medido em semanas.
(a) Qual é a capacidade de suporte? Qual é o valor de k?
(b) Um campo de direções para essa equação é mostrado à direita. Onde as inclinações estão próximas de 0? Onde elas são maiores? Quais soluções são crescentes? Quais soluções são decrescentes?



É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador   SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

(c) Use o campo de direções para esboçar as soluções para as populações iniciais de 20, 40, 60, 80, 120 e 140. O que essas soluções têm em comum? Como diferem? Quais soluções têm pontos de inflexão? Em qual nível populacional elas ocorrem?
(d) Quais são as soluções de equilíbrio? Como as outras soluções estão relacionadas a essas soluções?

2. Suponha que uma população cresça de acordo com o modelo logístico com capacidade de suporte 6.000 e $k = 0{,}0015$ por ano.
(a) Escreva uma equação diferencial logística para esses dados.
(b) Desenhe um campo de direções (à mão ou com um sistema de computação algébrica). O que ele lhe diz sobre as curvas solução?
(c) Use o campo de direções para esboçar as curvas solução para as populações iniciais de 1.000, 2.000, 4.000 e 8.000. O que você pode dizer sobre a concavidade dessas curvas? Qual o significado dos pontos de inflexão?
(d) Programe uma calculadora ou um computador para usar o método de Euler com passo $h = 1$ para estimar a população depois de 50 anos se a população inicial for 1.000.
(e) Se a população inicial for 1.000, escreva uma fórmula para a população depois de t anos. Use-a para calcular a população depois de 50 anos e compare com sua estimativa no item (d).
(f) Trace a solução da parte (e) e compare com a curva solução que você esboçou no item (c).

3. O cardume de atum do Pacífico foi modelado pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{M}\right)$$

onde $y(t)$ é a biomassa (massa total dos membros da população) em quilogramas no instante t (medido em anos), a capacidade de suporte é estimada como $M = 8 \times 10^7$ kg e $k = 0{,}71$ por ano.
(a) Se $y(0) = 2 \times 10^7$ kg, calcule a biomassa um ano depois.
(b) Quanto tempo levará para a biomassa alcançar 4×10^7 kg?

4. Suponha que uma população $P(t)$ satisfaça

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}4P - 0{,}001\,P^2 \qquad P(0) = 50$$

onde t é medido em anos.
(a) Qual é a capacidade de suporte?
(b) O que é $P'(0)$?
(c) Quando a população atingirá 50% da capacidade de suporte?

5. Suponha que uma população cresça de acordo com o modelo logístico com população inicial de 1 000 e capacidade de suporte 1 000. Se a população crescer para 2 500 após um ano, como será a população após outros três anos?

6. A tabela fornece o número de células de levedura em uma cultura nova de laboratório.

Tempo (horas)	Células de levedura	Tempo (horas)	Células de levedura
0	18	10	509
2	39	12	597
4	80	14	640
6	171	16	664
8	336	18	672

(a) Marque os dados e use o gráfico para estimar a capacidade de suporte para a população de levedura.
(b) Use os dados para estimar a taxa de crescimento inicial relativa.
(c) Encontre um modelo exponencial e um modelo logístico para esses dados.
(d) Compare os valores previstos com os valores observados, na tabela e nos gráficos. Compare como seus modelos se ajustam aos dados.
(e) Utilize seu modelo logístico para estimar o número de células de levedura depois de sete horas.

7. A população mundial era de aproximadamente 5,3 bilhões em 1990. A taxa de natalidade na década de 1990 variou entre 35 e 40 milhões por ano, e a taxa de mortalidade variou entre 15 e 20 milhões por ano. Vamos supor que a capacidade de suporte para a população mundial seja de 100 bilhões.
(a) Escreva uma equação diferencial logística para esses dados. (Como a população inicial é pequena em comparação com a capacidade de suporte, você pode tomar k como uma estimativa da taxa de crescimento relativo inicial.)
(b) Utilize o modelo logístico para prever a população mundial em 2000 e compare a população real de 6,1 bilhões.
(c) Use o modelo logístico para prever a população mundial nos anos 2100 e 2500.
(d) Quais seriam as suas previsões se a capacidade de suporte fosse de 50 bilhões?

8. (a) Faça uma conjectura para a capacidade de suporte da população dos Estados Unidos. Use-a, e também o fato de que a população era de 250 milhões em 1990, para formular um modelo logístico para a população norte-americana.
(b) Determine o valor de k em seu modelo usando o fato de que a população norte-americana em 2000 era de 275 milhões.
(c) Use seu modelo para prever a população dos Estados Unidos nos anos 2100 e 2200.
(d) Utilize seu modelo para prever o ano no qual a população ultrapassará 350 milhões.

9. Um modelo para a propagação de um boato é que a taxa de propagação é proporcional ao produto da fração y da população que ouviu o boato pela fração que não ouviu o boato.
(a) Escreva uma equação diferencial que seja satisfeita por y.
(b) Resolva a equação diferencial.
(c) Uma cidade pequena tem 1.000 habitantes. Às 8 horas, 80 pessoas tinham ouvido o boato. Ao meio-dia, metade da cidade tinha ouvido o boato. A que horas 90% da população terá ouvido o boato?

10. Os biólogos colocaram em um lago 400 peixes e estimaram a capacidade de suporte (a população máxima de peixes daquela espécie no lago) como 10.000. O número de peixes triplicou no primeiro ano.
(a) Presumindo que o tamanho da população de peixes satisfaça a equação logística, encontre uma expressão para o tamanho da população depois de t anos.
(b) Quanto tempo levará para a população aumentar para 5 000?

11. (a) Mostre que se P satisfizer a equação logística $\boxed{4}$, então

$$\frac{d^2P}{dt^2} = k^2P\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{2P}{M}\right)$$

(b) Deduza que a população cresce mais rapidamente quando ela atinge a metade de sua capacidade de suporte.

12 Para um valor fixo de M (digamos $M = 10$), a família de funções logísticas dada pela Equação 7 depende do valor inicial P_0 e da constante de proporcionalidade k. Faça o gráfico de vários membros dessa família. Como muda o gráfico quando P_0 varia? Como muda o gráfico quando k varia?

13. A tabela dá a população do Japão em meados do ano, em milhares, de 1960 a 2005.

Ano	População	Ano	População
1960	94.092	1985	120.754
1965	98.883	1990	123.537
1970	104.345	1995	125.341
1975	111.573	2000	126.700
1980	116.807	2005	127.417

Use uma calculadora gráfica para ajustar tanto uma função exponencial quanto uma função logística a estes dados. Marque os pontos, trace ambas as funções e comente a precisão dos modelos. [*Dica*: Subtraia 94.000 de cada uma das figuras da população. Então, depois de obter um modelo de sua calculadora, some 94.000 para obter seu modelo final. Pode ser útil escolher como 1960 ou 1980.]

14. A tabela fornece a população da Espanha em meados do ano, em milhares, de 1955 a 2000.

Ano	População	Ano	População
1955	29.319	1980	37.488
1960	30.641	1985	38.535
1965	32.085	1990	39.351
1970	33.876	1995	39.750
1975	35.564	2000	40.016

Use uma calculadora gráfica para ajustar tanto uma função exponencial quanto uma função logística a estes dados. Marque os pontos, trace ambas as funções e comente a precisão dos modelos. [*Dica*: Subtraia 29.000 de cada uma das figuras da população. Então, depois de obter um modelo de sua calculadora, some 29.000 para obter seu modelo final. Pode ser útil escolher $t = 0$ como 1955 ou 1975.]

15. Considere a população $P = P(t)$ com taxas de natalidade e mortalidade relativas constantes α e β, respectivamente, e uma taxa de emigração constante m, onde α, β e m são constantes positivas. Suponha que $\alpha > \beta$. Então, a taxa de variação da população no instante t é modelada pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP - m \qquad \text{onde } k = \alpha - \beta$$

(a) Encontre a solução desta equação que satisfaça a condição inicial $P(0) = P_0$.
(b) Que condições sobre m levarão a uma expansão exponencial da população?
(c) Que condições sobre m resultarão em uma população constante? E em um declínio da população?
(d) Em 1847, a população da Irlanda era de cerca de 8 milhões e a diferença entre as taxas de natalidade e mortalidade relativas era 1,6 % da população. Por causa da fome da batata nas décadas de 1840 e 1850, cerca de 210 000 habitantes por ano emigraram da Irlanda. A população estava crescendo ou decrescendo naquela época?

16. Seja c um número positivo. Uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+c}$$

onde k é uma constante positiva, é chamada *equação do dia do juízo final* porque o expoente na expressão ky^{1+c} é maior que o expoente 1 do crescimento natural.

(a) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(0) = y_0$.
(b) Mostre que existe um instante finito $t = T$ (dia do juízo final) tal que $\lim_{t\to T^-} y(t) = \infty$.
(c) Uma raça especialmente fértil de coelhos tem o termo de crescimento $ky^{1,01}$. Se 2 destes coelhos se cruzarem inicialmente e a ninhada for de 16 coelhos depois de três meses, quando será o dia do juízo final?

17. Vamos modificar a equação logística do Exemplo 1 como a seguir:

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1\,000}\right) - 15$$

(a) Suponha que $P(t)$ represente uma população de peixes no instante t, onde t é medido em semanas. Explique o significado do termo final na equação (-15).
(b) Desenhe um campo de direções para essa equação diferencial.
(c) Quais são as soluções de equilíbrio?
(d) Use o campo de direções para esboçar várias curvas solução. Descreva o que acontece à população de peixes para várias populações iniciais.
SCA (e) Resolva essa equação diferencial explicitamente, usando frações parciais ou com um sistema de computacão algébrica. Use as populações iniciais 200 e 300. Trace as soluções e compare com seus esboços no item (d).

SCA **18.** Considere a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1\,000}\right) - c$$

como um modelo para uma população de peixes, onde t é medido em semanas e c é uma constante.
(a) Use um SCA para desenhar campos de direções para diversos valores de c.
(b) A partir dos campos de direções no item (a), determine os valores de c para os quais há pelo menos uma solução de equilíbrio. Para quais valores de c a população de peixes sempre desaparece?
(c) Use a equação diferencial para demonstrar o que você descobriu graficamente no item (b).
(d) Qual sua recomendação para o limite de pesca semanal para essa população de peixes?

19. Existe evidência considerável para apoiar a teoria de que, para algumas espécies, existe uma população mínima m de forma que as espécies se tornarão extintas se o tamanho da população cair abaixo de m. Essa condição pode ser incorporada na equação logística ao introduzir o fator $(1 - m/P)$. Então o modelo logístico modificado é dado pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

(a) Use a equação diferencial para mostrar que qualquer solução é crescente se $m < P < M$ e decrescente se $0 < P < m$.
(b) Para o caso onde $k = 0{,}08$, $M = 1\,000$ e $m = 200$, desenhe um campo de direções e use-o para esboçar várias curvas solução. Descreva o que acontece à população para várias populações iniciais. Quais são as soluções de equilíbrio?
(c) Resolva a equação diferencial explicitamente, usando frações parciais ou um sistema de computação algébrica. Use a população inicial P_0.
(d) Use a solução no item (c) para mostrar que se $P_0 < m$, então a espécie será extinta. [*Dica*: Mostre que o numerador em sua expressão para $P(t)$ é 0 para algum valor de t.]

20. Outro modelo para a função crescimento para uma população limitada é dado pela **função de Gompertz**, que é uma solução da equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = c \ln\left(\frac{M}{P}\right)P$$

onde c é uma constante e M é a capacidade de suporte.

(a) Resolva essa equação diferencial.

(b) Calcule $\lim_{t \to \infty} P(t)$.

(c) Trace a função de crescimento de Gompertz para $M = 1\,000$, $P_0 = 100$ e $c = 0{,}05$, e compare-a com a função logística no Exemplo 2. Quais são as similaridades? Quais são as diferenças?

(d) Sabemos do Exercício 11 que a função logística cresce mais rapidamente quando $P = M/2$. Use a equação diferencial de Gompertz para mostrar que a função de Gompertz cresce mais rápido quando $P = M/e$.

21. Em **um modelo de crescimento sazonal**, uma função periódica do tempo é introduzida para considerar variações sazonais na taxa de crescimento. Essas variações podem, por exemplo, ser causadas por mudanças sazonais na oferta de alimentos.

(a) Encontre a solução do modelo de crescimento sazonal

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

onde k, r e ϕ são constantes positivas.

(b) Traçando a solução para vários valores de k, r e ϕ, explique como os valores de k, r e ϕ afetam a solução. O que você pode dizer sobre $\lim_{t \to \infty} P(t)$?

22. Suponha que alteremos a equação diferencial no Exercício 21 como a seguir:

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos^2(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

(a) Resolva essa equação diferencial com a ajuda de uma tabela de integrais ou um SCA.

(b) Trace a solução para vários valores de k, r e ϕ. Como os valores de k, r e ϕ afetam a solução? O que você pode dizer sobre $\lim_{t \to \infty} P(t)$ nesse caso?

23. Os gráficos das funções logísticas (Figuras 2 e 3) são extremamente similares ao gráfico da função tangente hiperbólica (Figura 3 na Seção 3.11). Explique a similaridade, mostrando que a função logística dada pela Equação 7 pode ser escrita como

$$P(t) = \tfrac{1}{2}K\left[1 + \operatorname{tgh}\left(\tfrac{1}{2}k(t - c)\right)\right]$$

onde $c = (\ln A)/k$. Portanto, a função logística é apenas uma tangente hiperbólica transladada.

9.5 Equações Lineares

Uma equação diferencial **linear** de primeira ordem é aquela que pode ser escrita na forma

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

onde P e Q são funções contínuas em um dado intervalo. Esse tipo de equação ocorre frequentemente em vários ramos da ciência, como veremos.

Um exemplo de uma equação linear é $xy' + y = 2x$ porque, para $x \neq 0$, esta pode ser escrita na forma

$$\boxed{2} \qquad y' + \frac{1}{x}y = 2$$

Observe que essa equação diferencial não é separável, porque é impossível fatorar a expressão para y' como uma função de x vezes uma função de y. Mas ainda podemos resolver a equação observando que, pela Regra do Produto,

$$xy' + y = (xy)'$$

e assim podemos escrever a equação como

$$(xy)' = 2x$$

Se integrarmos ambos os lados dessa equação, obteremos

$$xy = x^2 + C \qquad \text{ou} \qquad y = x + \frac{C}{x}$$

Se nos tivesse sido dada a equação diferencial na forma da Equação 2, teríamos de fazer uma etapa preliminar multiplicando cada lado da equação por x.

Ocorre que toda equação diferencial linear de primeira ordem pode ser resolvida de uma maneira similar pela multiplicação de ambos os lados da Equação 1 por uma função adequada $I(x)$, chamada *fator integrante*. Tentamos encontrar I de modo que o lado esquerdo da Equação 1, quando multiplicado por $I(x)$, torna-se a derivada do produto $I(x)y$:

$$\boxed{3} \qquad I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)'$$

Se pudermos encontrar tal função I, a Equação 1 ficará

$$(I(x)y)' = I(x)\,Q(x)$$

Integrando ambos os lados, teremos

$$I(x)y = \int I(x)\,Q(x)\,dx + C$$

de modo que a solução será

$$\boxed{4} \qquad y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)\,Q(x)\,dx + C\right]$$

Para encontrarmos esse I, expandimos a Equação 3 e cancelamos termos:

$$I(x)y' + I(x)\,P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$

$$I(x)\,P(x) = I'(x)$$

Esta é uma equação separável para I, que resolvemos como a seguir:

$$\int \frac{dI}{I} = \int P(x)\,dx$$

$$\ln|I| = \int P(x)\,dx$$

$$I = Ae^{\int P(x)\,dx}$$

onde $A = \pm e^C$. Estamos procurando um fator de integração particular, não o mais geral; assim, tomamos $A = 1$ e usamos

$$\boxed{5} \qquad I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

Então, a fórmula para a solução geral da Equação 1 é fornecida pela Equação 4, onde I é dado pela Equação 5. Em vez de memorizar essa fórmula, contudo, apenas lembramos a forma do fator integrante.

> Para resolver a equação diferencial linear $y' + P(x)y = Q(x)$, multiplique ambos os lados pelo **fator integrante** $I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ e integre ambos os lados.

EXEMPLO 1 Resolva a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$.

A Figura 1 mostra os gráficos de vários membros da família de soluções no Exemplo 1. Observe que todos eles se aproximam de 2 quando $x \to \infty$.

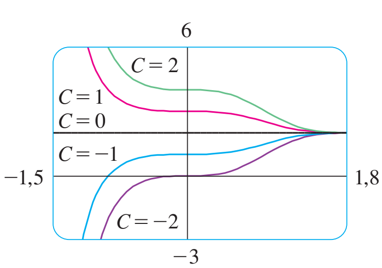


FIGURA 1

SOLUÇÃO A equação dada é linear porque ela tem a forma da Equação 1 com $P(x) = 3x^2$ e $Q(x) = 6x^2$. Um fator integrante é

$$I(x) = e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$$

Multiplicando ambos os lados da equação diferencial por e^{x^3}, obtemos

$$e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2e^{x^3}y = 6x^2e^{x^3}$$

ou

$$\frac{d}{dx}(e^{x^3}y) = 6x^2e^{x^3}$$

Integrando ambos os lados teremos

$$e^{x^3}y = \int 6x^2e^{x^3}\,dx = 2e^{x^3} + C$$

$$y = 2 + Ce^{-x^3}$$

EXEMPLO 2 Encontre a solução para o problema de valor inicial

$$x^2y' + xy = 1 \qquad x > 0 \qquad y(1) = 2$$

SOLUÇÃO Devemos primeiro dividir ambos os lados pelo coeficiente de y' para colocar a equação diferencial na forma padrão:

$$\boxed{6} \qquad y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \qquad x > 0$$

O fator integrante é

$$I(x) = e^{\int (1/x)\,dx} = e^{\ln x} = x$$

A multiplicação de ambos os lados da Equação 6 por x fornece

$$xy' + y = \frac{1}{x} \qquad \text{ou} \qquad (xy)' = \frac{1}{x}$$

Então, $$xy = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

e, assim, $$y = \frac{\ln x + C}{x}$$

Uma vez que $y(1) = 2$, temos

$$2 = \frac{\ln 1 + C}{1} = C$$

Logo, a solução para o problema de valor inicial é

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}$$

A solução do problema de valor inicial no Exemplo 2 é mostrada na Figura 2.

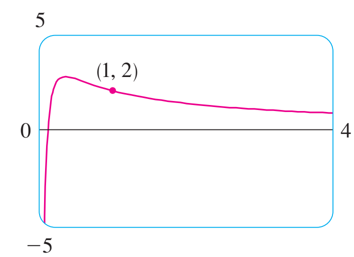


FIGURA 2

EXEMPLO 3 Resolva $y' + 2xy = 1$.

SOLUÇÃO A equação dada está na forma padrão de uma equação linear. Multiplicando pelo fator integrante

$$e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

obtemos ou $$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = e^{x^2}$$

ou $$(e^{x^2}y)' = e^{x^2}$$

Portanto, $$e^{x^2}y = \int e^{x^2}\,dx + C$$

Lembre-se, da Seção 7.5, que $\int e^{x^2}\,dx$ não pode ser expressa em termos de funções elementares. Apesar disso, é uma função perfeitamente boa e podemos deixar a resposta como

$$y = e^{-x^2}\int e^{x^2}\,dx + Ce^{-x^2}$$

Outra maneira de escrever a solução é

$$y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + Ce^{-x^2}$$

(Qualquer número pode ser escolhido para o extremo inferior de integração.)

Embora as soluções da equação diferencial no Exemplo 3 sejam expressas em termos de uma integral, elas ainda podem ser traçadas por um sistema de computação algébrica (Figura 3).

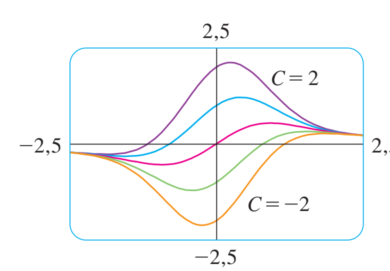


FIGURA 3

Aplicação a Circuitos Elétricos

Na Seção 9.2 consideramos o circuito elétrico simples, mostrado na Figura 4: uma força eletromotriz (geralmente uma pilha ou gerador) produz uma voltagem de $E(t)$ volts (V) e uma corrente de $I(t)$ amperes (A) em um instante t. O circuito também possui um resistor com resistência de R ohms (Ω) e um indutor com indutância de L henrys (H).

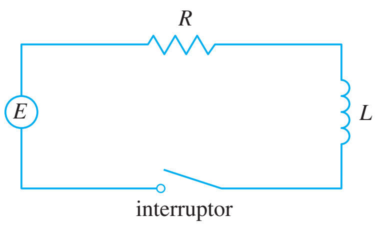


FIGURA 4

A Lei de Ohm calcula a queda na tensão devida ao resistor como RI. A queda da tensão por causa do indutor é $L(dI/dt)$. Uma das leis de Kirchhoff diz que a soma da queda de tensão é igual à voltagem fornecida $E(t)$. Então temos

$$\boxed{7} \qquad L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

EXEMPLO 4 Suponha que no circuito simples da Figura 4 a resistência seja 12 Ω e a indutância seja 4 H. Se uma pilha fornecer uma voltagem constante de 60 V e o interruptor for fechado quando $t = 0$, então a corrente começa com $I(0) = 0$. Encontre (a) $I(t)$, (b) a corrente depois de 1 s e (c) o valor-limite da corrente.

A equação diferencial no Exemplo 4 é linear e separável; assim, um método alternativo é resolvê-la como uma equação separável (Exemplo 4 na Seção 9.3). Se trocarmos a pilha por um gerador, contudo, obteremos uma equação que é linear, mas não é separável (Exemplo 5).

SOLUÇÃO

(a) Se colocarmos $L = 4$, $R = 12$ e $E(t) = 60$ na Equação 7, obteremos o problema de valor inicial

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad I(0) = 0$$

ou

$$\frac{dI}{dt} + 3I = 15 \qquad I(0) = 0$$

Multiplicando pelo fator integrante $e^{\int 3\,dt} = e^{3t}$, obtemos

$$e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = 15e^{3t}$$

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t}\,dt = 5e^{3t} + C$$

$$I(t) = 5 + Ce^{-3t}$$

Como $I(0) = 0$, temos $5 + C = 0$, assim, $C = -5$ e

$$I(t) = 5(1 - e^{-3t})$$

A Figura 5 mostra como a corrente no Exemplo 4 se aproxima de seu valor-limite.

(b) Depois de um segundo a corrente é

$$I(1) = 5(1 - e^{-3}) \approx 4{,}75 \text{ A}$$

(c) O valor-limite da corrente é dado por

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} 5(1 - e^{-3t}) = 5 - 5\lim_{t\to\infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$

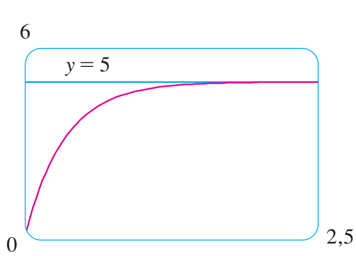


FIGURA 5

EXEMPLO 5 Suponha que a resistência e a indutância permaneçam as mesmas que no Exemplo 4, mas, em vez de uma pilha, usaremos um gerador que produz uma voltagem variável de $E(t) = 60 \operatorname{sen} 30t$ volts. Encontre $I(t)$.

SOLUÇÃO Desta vez a equação diferencial torna-se

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \operatorname{sen} 30t \qquad \text{ou} \qquad \frac{dI}{dt} + 3I = 15 \operatorname{sen} 30t$$

O mesmo fator integrante e^{3t} fornece

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t} \operatorname{sen} 30t$$

Usando a Fórmula 98 da Tabela de Integrais, obtemos

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t} \operatorname{sen} 30t \, dt = 15 \frac{e^{3t}}{909}(3 \operatorname{sen} 30t - 30 \cos 30t) + C$$

$$I = \tfrac{5}{101}(\operatorname{sen} 30t - 10 \cos 30t) + Ce^{-3t}$$

Como $I(0) = 0$, temos

$$-\tfrac{50}{101} + C = 0$$

então

$$I(t) = \tfrac{5}{101}(\operatorname{sen} 30t - 10 \cos 30t) + \tfrac{50}{101}e^{-3t}$$

A Figura 6 mostra o gráfico da corrente quando a pilha é trocada por um gerador.

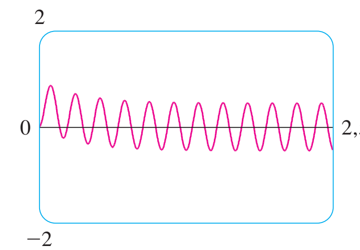


FIGURA 6

9.5 Exercícios

1–4 Determine se a equação diferencial é linear.

1. $x - y' = xy$

2. $y' + xy^2 = \sqrt{x}$

3. $y' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

4. $y \operatorname{sen} x = x^2y' - x$

5–14 Resolva a equação diferencial.

5. $xy' - 2y = x^2$

6. $y' = x + 5y$

7. $y' = x - y$

8. $4x^3y + x^4y' = \operatorname{sen}^3 x$

9. $xy' + y = \sqrt{x}$

10. $y' + y = \operatorname{sen}(e^x)$

11. $\operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = \operatorname{sen}(x^2)$

12. $x \dfrac{dy}{dx} - 4y = x^4e^x$

13. $(1 + t)\dfrac{du}{dt} + u = 1 + t, \quad t > 0$

14. $t \ln t \dfrac{dr}{dt} + r = te^t$

15–20 Resolva o problema de valor inicial.

15. $x^2y' + 2xy = \ln x, \quad y(1) = 2$

16. $t^3 \dfrac{dy}{dt} + 3t^2y = \cos t, \quad y(\pi) = 0$

17. $t \dfrac{du}{dt} = t^2 + 3u, \quad t > 0, \quad u(2) = 4$

18. $2xy' + y = 6x, \quad x > 0, \quad y(4) = 20$

19. $xy' = y + x^2 \operatorname{sen} x, \quad y(\pi) = 0$

20. $(x^2 + 1)\dfrac{dy}{dx} + 3x(y - 1) = 0, \quad y(0) = 2$

21–22 Resolva a equação diferencial e use uma calculadora gráfica ou um computador para traçar vários membros da família de soluções. Como a curva solução muda quando C varia?

21. $xy' + 2y = e^x$

22. $xy' = x^2 + 2y$

23 Uma **equação diferencial de Bernoulli** (em homenagem a James Bernoulli) é uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Observe que, se $n = 0$ ou 1, a equação de Bernoulli é linear. Para outros valores de n, mostre que a substituição $u = y^{1-n}$ transforma a equação de Bernoulli na equação linear

$$\frac{du}{dx} + (1 - n)P(x)u = (1 - n)Q(x)$$

24–25 Use o método do Exercício 23 para resolver a equação diferencial.

24. $xy' + y = -xy^2$

25. $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^2}$

26. Resolva a equação de segunda ordem $xy'' + 2y' = 12x^2$ por meio da substituição $u = y'$.

27. No circuito apresentado na Figura 4, uma pilha fornece uma voltagem constante de 40 V, a indutância é 2 H, a resistência é 10 Ω e $I(0) = 0$.

(a) Encontre $I(t)$.

(b) Calcule a corrente depois de 0,1 s.

28. No circuito mostrado na Figura 4, um gerador fornece uma voltagem de $E(t) = 40 \operatorname{sen} 60t$ volts, a indutância é 1 H, a resistência é 20 Ω e $I(0) = 1$ A.

(a) Encontre $I(t)$.

(b) Calcule a corrente depois de 0,1 s.

(c) Use uma ferramenta gráfica para desenhar o gráfico da função corrente.

29. A figura mostra um circuito contendo uma força eletromotriz, um capacitor com capacitância de C farads (F) e um resistor com uma resistência de R de ohms (Ω). A queda de voltagem no capacitor é Q/C, onde Q é a carga (em coulombs); nesse caso, a Lei de Kirchhoff fornece

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

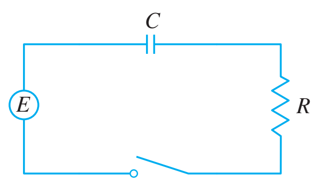
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Mas $I = dQ/dt$ (veja o Exemplo 3, na Seção 3.7), assim, temos

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponha que a resistência seja 5 Ω e a capacitância, 0,05 F; que a pilha forneça uma voltagem constante de 60 V e que a carga inicial seja $Q(0) = 0$ C. Encontre a carga e a corrente no instante t.



30. No circuito do Exercício 29, $R = 2\ \Omega$, $C = 0{,}01$ F, $Q(0) = 0$ e $E(t) = 10 \operatorname{sen} 60t$. Calcule a carga e a corrente no instante t.

31. Seja $P(t)$ o nível de desempenho de alguém aprendendo uma habilidade como uma função do tempo de treinamento t. O gráfico de P é chamado *curva de aprendizagem*. No Exercício 15 na Seção 9.1 propusemos a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k[M - P(t)]$$

como um modelo razoável para a aprendizagem, onde k é uma constante positiva. Resolva essa equação diferencial linear e use sua solução para traçar a curva de aprendizagem.

32. Dois novos trabalhadores foram contratados para uma linha de montagem. João processou 25 unidades durante a primeira hora e 45 unidades durante a segunda. Marcos processou 35 unidades durante a primeira hora e 50 unidades na segunda. Usando o modelo do Exercício 31 e assumindo que $P(0) = 0$, estime o número máximo de unidades por hora que cada trabalhador é capaz de processar.

33. Na Seção 9.3 analisamos os problemas de misturas nos quais o volume de fluido permanecia constante e vimos que estes fornecem equações separáveis (veja o Exemplo 6 naquela seção). Se as taxas de entrada e de saída do sistema forem diferentes, então o volume não é constante e a equação diferencial resultante é linear, mas não separável.

Um tanque contém 100 L de água. Uma solução com uma concentração salina de 0,4 kg/L é adicionada à taxa de 5 L/min. A solução é mantida misturada e é retirada do tanque na taxa de 3 L/min. Se $y(t)$ é a quantidade de sal (quilogramas) após t minutos, mostre que y satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t}$$

Resolva essa equação e calcule a concentração depois de 20 minutos.

34. Um tanque com capacidade de 400 L está cheio com uma mistura de água e cloro com concentração de 0,05 g de cloro por litro. Para poder reduzir a concentração de cloro, água doce é bombeada para o tanque na taxa de 4 L/s. A mistura é agitada e bombeada para fora em uma taxa de 10 L/s. Encontre a quantidade de cloro no tanque como uma função de tempo.

35. Um objeto de massa m é solto a partir do repouso e presumimos que a resistência do ar seja proporcional à velocidade do objeto. Se $s(t)$ for a distância percorrida depois de t segundos, então a velocidade é $v = s'(t)$ e a aceleração é $a = v'(t)$. Se g for a aceleração da gravidade, então a força para baixo no objeto é $mg - cv$, onde c é uma constante positiva, e a Segunda Lei de Newton fornece

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$$

(a) Resolva essa equação linear para mostrar que

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

(b) Qual é a velocidade-limite?

(c) Calcule a distância que o objeto caiu depois de t segundos.

36. Se ignorarmos a resistência do ar, poderemos concluir que os objetos mais pesados não caem mais rápido que objetos mais leves. Mas, se considerarmos a resistência do ar, nossa conclusão muda. Use a expressão para a velocidade de queda de um objeto no Exercício 35(a) para calcular dv/dm e mostrar que os objetos mais pesados caem mais rápido que os mais leves.

37. (a) Mostre que a substituição $z = 1/P$ transforma a equação diferencial logística $P' = kP(1 - P/M)$ na equação diferencial linear

$$z' + kz = \frac{k}{M}$$

(b) Resolva a equação diferencial no item (a) para encontrar uma expressão para $P(t)$. Compare com a Equação 9.4.7.

38. Para considerarmos a variação sazonal na equação diferencial podemos permitir que k e M sejam as funções de t:

$$\frac{dP}{dt} = k(t)P\left(1 - \frac{P}{M(t)}\right)$$

(a) Verifique se a substituição $z = 1/P$ transforma essa equação na equação linear

$$\frac{dz}{dt} + k(t)z = \frac{k(t)}{M(t)}$$

(b) Escreva uma expressão para a solução da equação linear no item (a) e use-a para mostrar que se a capacidade de suporte M for constante, então

$$P(t) = \frac{M}{1 + CMe^{-\int k(t)\,dt}}$$

Deduza que se $\int_0^\infty k(t)\,dt = \infty$, então $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$. [Isso será comprovado se $k(t) = k_0 + a \cos bt$ com $k_0 > 0$, que descreve uma taxa de crescimento intrínseco positiva com uma variação sazonal periódica.]

(c) Se k é constante, mas M varia, mostre que

$$z(t) = e^{-kt}\int_0^t \frac{ke^{ks}}{M(s)}\,ds + Ce^{-kt}$$

e utilize a Regra de l'Hôspital para decidir que se $M(t)$ tem um limite quando $t \to \infty$, então $P(t)$ tem o mesmo limite.

9.6 Sistemas Predador-Presa

Consideramos diversos modelos para o crescimento de uma única espécie que vive sozinha em um ambiente. Nesta seção estudaremos os modelos mais realistas, que levam em consideração a interação de duas espécies no mesmo ambiente. Veremos que esses modelos tomam a forma de um par de equações diferenciais acopladas.

Primeiro levaremos em conta a situação na qual uma espécie, chamada *presa*, tem um amplo suprimento alimentar e a segunda espécie, denominada *predador*, se alimenta da presa. Exemplos de presa e predador incluem coelhos e lobos em uma floresta isolada, peixes e tubarões, pulgões e joaninhas e bactérias e amebas. Nosso modelo terá duas variáveis dependentes e ambas serão funções do tempo. Seja $C(t)$ o número de presas (usando C de coelhos) e $L(t)$ o número de predadores (com L de lobos) no instante t.

Na ausência de predadores, o amplo suprimento de alimentos suportaria o crescimento exponencial de presas, isto é,

$$\frac{dC}{dt} = kC \qquad \text{onde } k \text{ é uma constante positiva}$$

Na ausência de presas, assumimos que a população de predadores declinaria a uma taxa proporcional a ela mesma, isto é,

$$\frac{dL}{dt} = -rL \qquad \text{onde } r \text{ é uma constante positiva}$$

Com ambas as espécies presentes, contudo, supomos que a causa principal de morte entre as presas seja serem comidas por predadores, e as taxas de natalidade e sobrevivência dos predadores dependam da disponibilidade de comida, ou seja, as presas. Também supomos que as duas espécies se encontrem a uma taxa que é proporcional a ambas as populações e é, portanto, proporcional ao produto CL. (Quanto mais houver de cada população, mais encontros serão possíveis.) Um sistema de duas equações diferenciais que incorpora essas hipóteses é como a seguir:

$$\boxed{1} \qquad \frac{dC}{dt} = kC - aCL \qquad \frac{dL}{dt} = -rL + bCL$$

L representa o predador.
C representa a presa.

onde k, r, a e b são constantes positivas. Observe que o termo $-aCL$ diminui a taxa natural de crescimento das presas e o termo bCL aumenta a taxa de crescimento natural dos predadores.

As equações em $\boxed{1}$ são conhecidas como **equações predador-presa**, ou **equações de Lotka-Volterra**. Uma **solução** desse sistema de equações é um par de funções $C(t)$ e $L(t)$, que descreve as populações de presas e predadores como funções do tempo. Como o sistema é acoplado (C e L ocorrem em ambas as equações), não podemos resolver uma equação e depois a outra: temos de resolvê-las de maneira simultânea. Infelizmente, porém, em geral é impossível encontrar fórmulas explícitas para C e L como funções de t. Podemos, contudo, usar métodos gráficos para analisar as equações.

As equações de Lotka-Volterra foram propostas como um modelo para explicar as variações de tubarões e peixes no mar Adriático pelo matemático italiano Vito Volterra (1860-1940).

EXEMPLO 1 Suponha que as populações de coelhos e lobos sejam descritas pelas equações de Lotka-Volterra $\boxed{1}$ com $k = 0{,}08$, $a = 0{,}001$, $r = 0{,}02$ e $b = 0{,}00002$. O tempo t é medido em meses.

(a) Encontre as soluções constantes (chamadas **soluções de equilíbrio**) e interprete a resposta.
(b) Use o sistema de equações diferenciais para encontrar uma expressão para dL/dC.
(c) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial resultante no plano CL. Então, use o campo de direções para esboçar algumas curvas solução.
(d) Suponha que, em algum instante no tempo, existam 1 000 coelhos e 40 lobos. Desenhe a curva solução correspondente e use-a para descrever as mudanças em ambos os níveis de população.
(e) Use a parte (d) para fazer esboços de C e L como funções de t.

SOLUÇÃO

(a) Com os valores dados de k, a, r e b, as equações de Lotka-Volterra se tornam

$$\frac{dC}{dt} = 0{,}08R - 0.001CL$$

$$\frac{dL}{dt} = -0{,}02L + 0{,}00002CL$$

Tanto C e L serão constantes se ambas as derivadas forem 0, isto é,

$$C' = C(0{,}08 - 0{,}001L) = 0$$
$$L' = L(-0{,}02 + 0{,}00002C) = 0$$

Uma solução é dada por $C = 0$ e $L = 0$. (Isso faz sentido: se não existirem coelhos ou lobos, as populações não vão aumentar.) A outra solução constante é

$$L = \frac{0{,}08}{0{,}001} = 80 \qquad C = \frac{0{,}02}{0{,}00002} = 1\,000$$

Assim, as populações de equilíbrio consistem em 80 lobos e 1.000 coelhos. Isso significa que 1.000 coelhos são o suficiente para suportar uma população constante de 80 lobos. Não existem muitos lobos (o que resultaria em menos coelhos) nem poucos lobos (o que resultaria em mais coelhos).

(b) Usamos a Regra da Cadeia para eliminar t:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dC}\frac{dC}{dt}$$

Então $$\frac{dL}{dR} = \frac{\frac{dL}{dt}}{\frac{dC}{dt}} = \frac{-0{,}02L + 0{,}00002CL}{0{,}08C - 0{,}001CL}$$

(c) Se pensarmos em L como uma função de C, teremos a equação diferencial

$$\frac{dL}{dC} = \frac{-0{,}02L + 0{,}00002CL}{0{,}08C - 0{,}001CL}$$

Desenhamos o campo de direções para essa equação diferencial na Figura 1 e o usamos para esboçar várias curvas solução na Figura 2. Se nos movermos ao longo de uma curva solução, veremos como a relação entre C e L muda com o passar do tempo. Observe que as curvas parecem ser fechadas no sentido de que, se viajamos ao longo de uma curva, sempre retornamos ao mesmo ponto. Observe também que o ponto (1 000, 80) está dentro de todas as curvas solução. Esse ponto é denominado *ponto de equilíbrio*, porque corresponde à solução de equilíbrio $C = 1\,000$, $L = 80$.

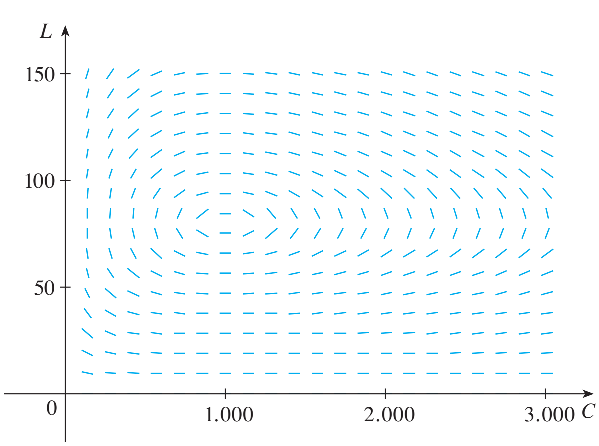


FIGURA 1 Campo de direções para o sistema predador-presa

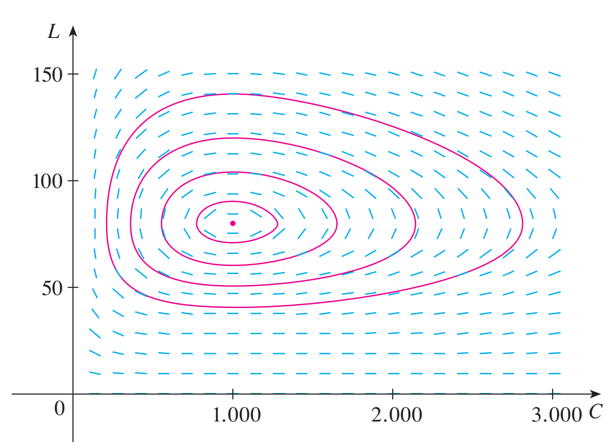


FIGURA 2 Retrato de fase do sistema

Quando representamos as soluções de um sistema de equações diferenciais como na Figura 2, referimo-nos ao plano CL como o **plano de fase** e chamamos as curvas solução de **trajetórias de fase**. Assim, uma trajetória de fase é um caminho traçado pelas soluções (C, L) com o passar do tempo. Um **retrato de fase** consiste em pontos de equilíbrio e trajetórias de fase típicas, como mostrado na Figura 2.

(d) Começar com 1 000 coelhos e 40 lobos corresponde a desenhar a curva solução no ponto P_0(1 000, 40). A Figura 3 mostra essa trajetória de fase com o campo de direções removido. Começando no instante P_0 no tempo $t = 0$ e deixando t aumentar, movemo-nos no sentido horário ou no anti-horário ao redor da trajetória de fase? Se colocarmos $C = 1\,000$ e $L = 40$ na primeira equação diferencial, teremos

$$\frac{dC}{dt} = 0{,}08(1\,000) - 0{,}001(1\,000)(40) = 80 - 40 = 40$$

Como $dC/dt > 0$, concluímos que C está aumentando em P_0 e assim nos movemos no sentido anti-horário ao longo da trajetória de fase.

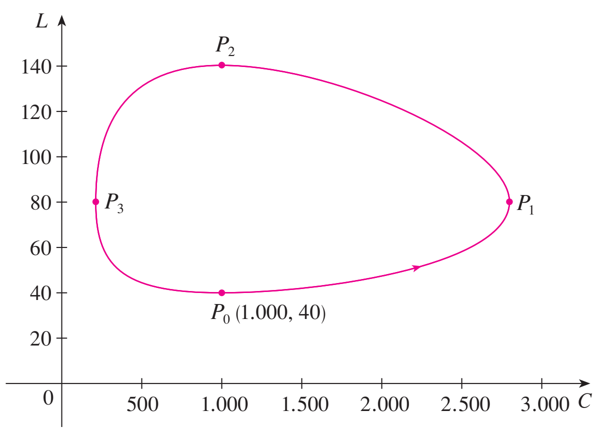


FIGURA 3
Trajetória da fase em (1.000, 40)

Vemos que em P_0 não existem lobos suficientes para manter um equilíbrio entre as populações; dessa forma, a população de coelhos aumenta. Isso resulta em mais lobos e eventualmente existem tantos lobos que os coelhos têm dificuldade para evitá-los. Assim, o número de coelhos começa a declinar (em P_1, onde estimamos que C atinja a população máxima ao redor de 2.800). Isso significa que algum tempo depois a população de lobos começa a cair (em P_2, onde $C = 1\,000$ e $L \approx 140$). Mas isso beneficia os coelhos; portanto, sua população depois começa a aumentar (em P_3, onde $L = 80$ e $C \approx 210$). Como consequência, a população de lobos eventualmente começa a aumentar também. Isso acontece quando as populações retornam a seus valores iniciais de $C = 1\,000$ e $L = 40$ e o ciclo inteiro começa novamente.

(e) Da descrição no item (d) de como as populações de coelhos e lobos aumentam e diminuem, podemos esboçar os gráficos de $C(t)$ e $L(t)$. Suponha que os pontos P_1, P_2 e P_3 na Figura 3 sejam alcançados nos instantes t_1, t_2 e t_3. Então podemos esboçar os gráficos de C e L como na Figura 4.

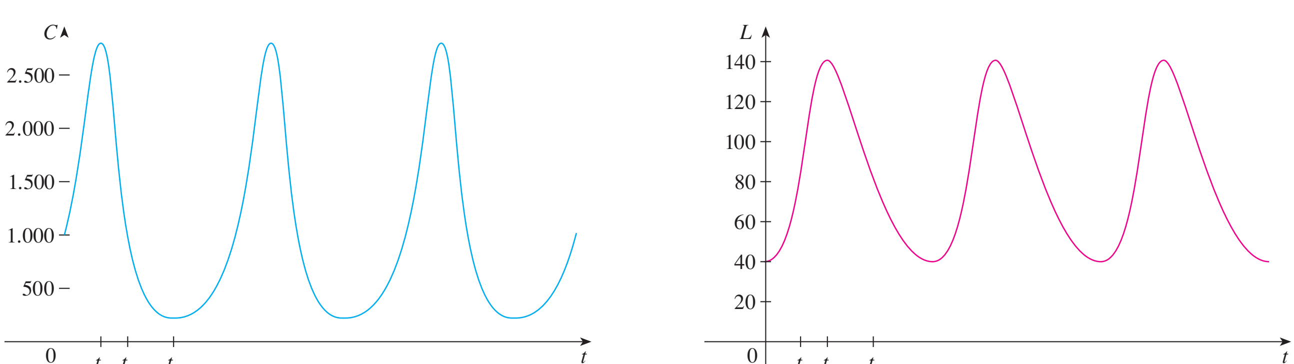


FIGURA 4 Gráficos das populações de coelhos e lobos como função do tempo

TEC No *Module 9.6* você pode alterar os coeficientes nas equações de Lotka--Volterra e observar as mudanças resultantes na trajetória de fase e nos gráficos das populações de coelhos e lobos.

Para tornarmos os gráficos mais fáceis de comparar, os desenhamos nos mesmos eixos, mas com escalas diferentes para C e L, como na Figura 5. Observe que os coelhos atingem sua população máxima cerca de um quarto de ciclo antes dos lobos.

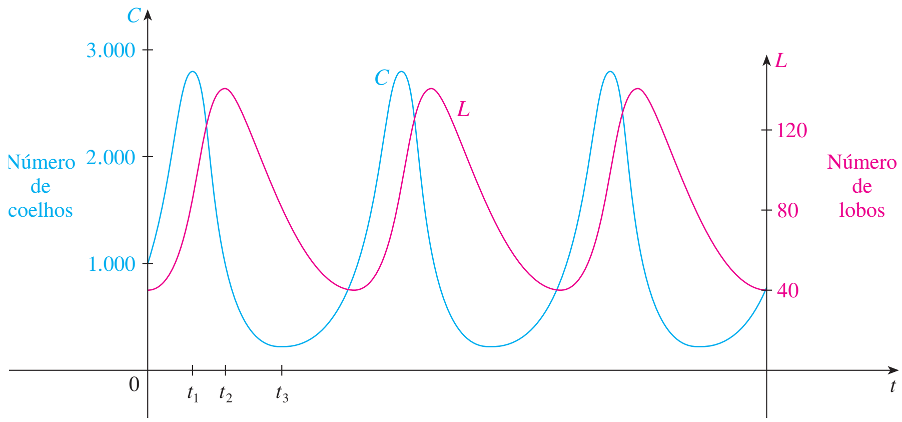


FIGURA 5
Comparações das populações de coelhos e lobos

Uma parte importante do processo de modelagem, como discutimos na Seção 1.2, é interpretar nossas conclusões matemáticas como previsões do mundo real e testar as previsões com dados reais. A Hudson's Bay Company, que começou a comercializar peles de animais no Canadá em 1670, mantém registros que datam de 1840. A Figura 6 mostra os gráficos do número de peles de coelho e seu predador, o lobo canadense, comercializadas pela empresa há 90 anos. Você pode ver que as oscilações acopladas na população de lebres e linces, prevista pelo modelo de Lotka-Volterra, realmente ocorrem e o período desses ciclos é de aproximadamente dez anos.

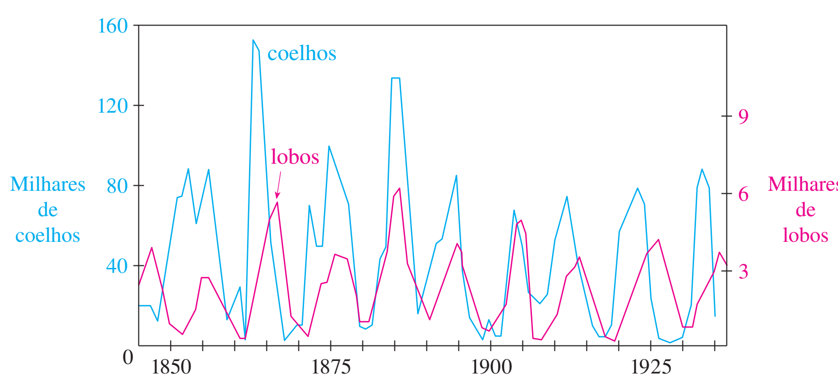


FIGURA 6
A abundância relativa de coelhos e lobos dos registros da Hudson's Bay Company

Embora o modelo relativamente simples de Lotka-Volterra tivesse algum sucesso em explicar e prever as populações acopladas, modelos mais sofisticados também têm sido propostos. Uma maneira de modificar as equações de Lotka-Volterra é supor que, na ausência de predadores, a presa cresça de acordo com um modelo logístico com capacidade de suporte M. Então as equações de Lotka-Volterra $\boxed{1}$ são substituídas pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{dC}{dt} = kC\left(1 - \frac{C}{M}\right) - aCL \qquad \frac{dL}{dt} = -rL + bCL$$

Esse modelo é investigado nos Exercícios 11 e 12.

Também têm sido propostos modelos para descrever e prever níveis de população de duas espécies que competem pelos mesmos recursos ou cooperam por benefícios mútuos. Esses modelos serão explorados nos Exercícios 2–4.

9.6 Exercícios

1. Para cada sistema predador-presa, determine qual das variáveis, x ou y, representa a população de presas e qual representa a população de predadores. O crescimento das presas é restrito apenas pelos predadores ou por outros fatores também? Os predadores alimentam-se apenas das presas ou eles têm outras fontes de alimentação? Explique.

(a) $$\frac{dx}{dt} = -0{,}05x + 0{,}0001xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 0{,}1y - 0{,}005xy$$

(b) $$\frac{dx}{dt} = 0{,}2x - 0{,}0002x^2 - 0{,}006xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -0{,}015y + 0{,}00008xy$$

2. Cada sistema de equações diferenciais é um modelo para duas espécies que competem pelas mesmas fontes ou cooperam por mútuo benefício (plantas em floração e insetos polinizadores, por exemplo). Decida se cada sistema descreve competição ou cooperação e explique por que este é um modelo razoável. (Pergunte-se qual é o efeito que o aumento de uma das espécies tem na taxa de crescimento da outra.)

(a) $$\frac{dx}{dt} = 0{,}12x - 0{,}0006x^2 + 0{,}00001xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 0{,}08x + 0{,}00004xy$$

(b) $$\frac{dx}{dt} = 0{,}15x - 0{,}0002x^2 - 0{,}0006xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 0{,}2y - 0{,}00008y^2 - 0{,}0002xy$$

3. O sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}5x - 0{,}0004x^2 - 0{,}001xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 0{,}4y - 0{,}001y^2 - 0{,}002xy$$

é um modelo para as populações de duas espécies.

(a) O modelo descreve cooperação, ou competição, ou uma relação predador-presa?

(b) Encontre as soluções de equilíbrio e explique seu significado.

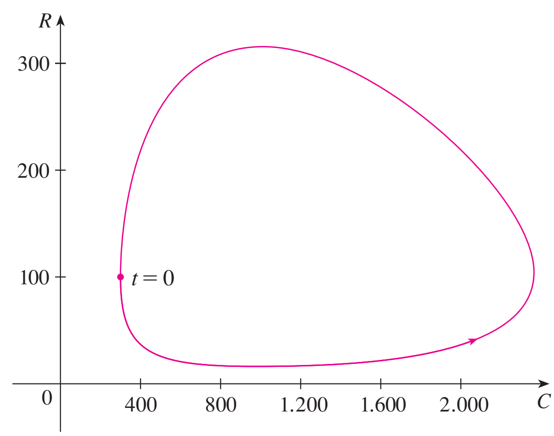
4. Moscas, sapos e crocodilos coexistem em um ambiente. Para sobreviver, os sapos precisam comer as moscas e os crocodilos precisam comer os sapos. Na ausência de sapos, a população de moscas crescerá exponencialmente e a população de crocodilos diminuirá exponencialmente. Na ausência de crocodilos e moscas, a população de sapos diminuirá exponencialmente. Se $P(t)$, $Q(t)$ e $R(t)$ representam as populações dessas três espécies no instante t, escreva um sistema de equações diferenciais como um modelo para sua evolução. Se as constantes em sua equação são positivas, explique por que você usou sinais de mais ou de menos.

5–6 Uma trajetória de fase é mostrada para as populações de coelhos (C) e raposas (R).

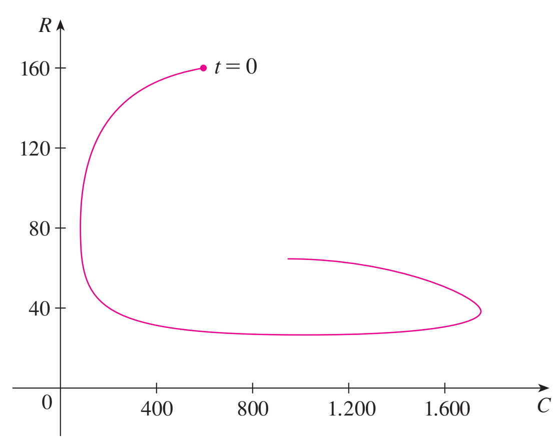
(a) Descreva como cada população muda com o passar do tempo.

(b) Use sua descrição para fazer um esboço grosseiro dos gráficos de C e R como funções do tempo.

5.

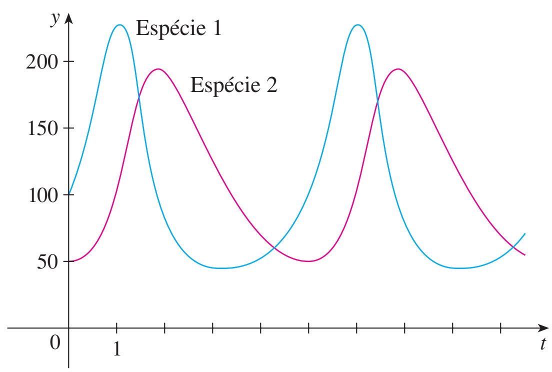


6.

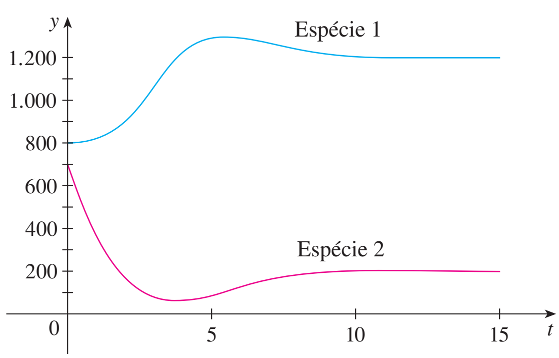


7–8 Os gráficos de populações de duas espécies são ilustrados. Use-os para esboçar a trajetória de fase correspondente.

7.



8.



9. No Exemplo 1(b) mostramos que as populações de coelhos e lobos satisfazem a equação diferencial

$$\frac{dL}{dC} = \frac{-0{,}02L + 0{,}00002CL}{0{,}08C - 0{,}001CL}$$

Resolvendo essa equação diferencial separável, mostre que

$$\frac{C^{0{,}02}L^{0{,}08}}{e^{0{,}00002C}e^{0{,}001L}} = C$$

onde C é uma constante.

É impossível resolver essa equação para L como uma função explícita de C (ou vice-versa). Se você tiver um sistema de computação algébrica que trace curvas definidas implicitamente, use essa equação e seu SCA para desenhar a curva solução que passa pelo ponto (1 000, 40) e compare com a Figura 3.

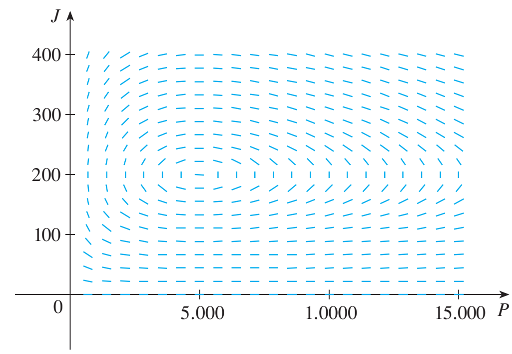
10. As populações de pulgões e joaninhas são modeladas pelas equações

$$\frac{dP}{dt} = 2P - 0{,}01PJ$$
$$\frac{dJ}{dt} = -0{,}5J + 0{,}0001PJ$$

(a) Calcule as soluções de equilíbrio e explique seu significado.

(b) Encontre uma expressão para dJ/dP.

(c) O campo de direções para a equação diferencial no item (b) é mostrado. Use-o para esboçar um retrato de fase. O que as trajetórias de fase têm em comum?



(d) Suponha que no instante $t = 0$ existam 1 000 pulgões e 200 joaninhas. Desenhe a trajetória de fase correspondente e use-a para descrever como ambas as populações variam.

(e) Use o item (d) para fazer esboços das populações de pulgões e joaninhas como funções de t. De que modo esses gráficos estão relacionados?

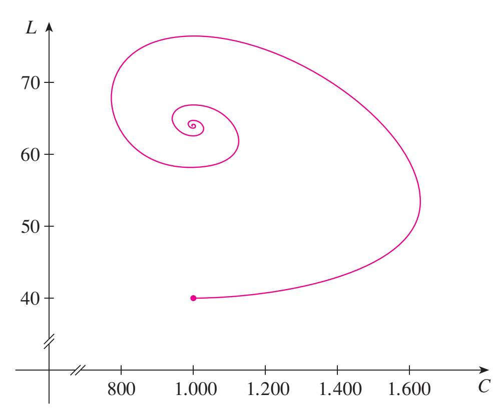
11 No Exemplo 1 usamos as equações de Lotka-Volterra para modelar as populações de coelhos e lobos. Vamos modificar aquelas equações como a seguir:

$$\frac{dC}{dt} = 0{,}08C(1 - 0{,}0002C) - 0{,}001CL$$
$$\frac{dL}{dt} = -0{,}02L + 0{,}00002CL$$

(a) De acordo com essas equações, o que acontece à população de coelhos na ausência dos lobos?

(b) Calcule as soluções de equilíbrio e explique seus significados.

(c) A figura mostra a trajetória de fase que começa no ponto (1 000, 40). Descreva o que acabará ocorrendo com as populações de coelhos e lobos.



(d) Esboce os gráficos das populações de coelhos e lobos como funções do tempo.

SCA **12.** No Exercício 10, modelamos populações de pulgões e joaninhas com um sistema Lotka-Volterra. Suponha que modifiquemos aquelas equações como a seguir:

$$\frac{dP}{dt} = 2P(1 - 0{,}0001P) - 0{,}01PJ$$

$$\frac{dJ}{dt} = -0{,}5J + 0{,}0001PJ$$

(a) Na ausência de joaninhas, o que o modelo prevê sobre os pulgões?

(b) Encontre as soluções de equilíbrio.

(c) Encontre uma expressão para dJ/dP.

(d) Use um sistema de computação algébrica para desenhar um campo de direções para a equação diferencial no item (c). Então, use o campo de direções para esboçar um retrato de fase. O que as trajetórias de fase têm em comum?

(e) Suponha que no instante $t = 0$ existam 1.000 pulgões e 200 joaninhas. Desenhe a trajetória de fase correspondente e use-a para descrever como ambas as populações variam.

(f) Use o item (e) para fazer esboços das populações de pulgões e joaninhas como funções de t. De que modo esses gráficos estão relacionados?

9 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) O que é uma equação diferencial?
(b) O que é a ordem de uma equação diferencial?
(c) O que é uma condição inicial?

2. O que você pode dizer sobre as soluções da equação $y' = x^2 + y^2$ apenas olhando para a equação diferencial?

3. O que é um campo de direções para a equação diferencial $y' = F(x, y)$?

4. Explique como o método de Euler funciona.

5 O que é uma equação diferencial separável? Como você a resolve?

6. O que é uma equação diferencial linear de primeira ordem? Como você a resolve?

7. (a) Escreva a equação diferencial que expresse a lei de crescimento natural. O que ela diz em termos da taxa de crescimento relativo?
(b) Sob quais circunstâncias este é um modelo apropriado para o crescimento populacional?
(c) Quais são as soluções dessa equação?

8. (a) Escreva a equação logística.
(b) Sob quais circunstâncias este é um modelo apropriado para o crescimento populacional?

9. (a) Escreva equações de Lotka-Volterra para modelar populações de peixes (P) e tubarões (T).
(b) O que essas equações dizem sobre cada população na ausência da outra?

Teste – Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

2. A função $f(x) = (\ln x)/x$ é uma solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

3. A equação $y' = x + y$ é separável.

4. A equação $y' = 3y - 2x + 6xy - 1$ é separável.

5. A equação $e^x y' = y$ é linear.

6. A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

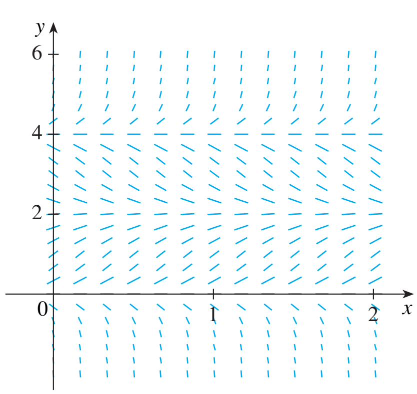
7. Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right) \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to\infty} y = 5$.

Exercícios

1. (a) Um campo de direções para a equação diferencial $y' = y(y - 2)(y - 4)$ é mostrado. Esboce os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.
(i) $y(0) = -0{,}3$ (ii) $y(0) = 1$
(iii) $y(0) = 3$ (iv) $y(0) = 4{,}3$
(b) Se a condição inicial for $y(0) = c$, para quais valores de c o $\lim_{t\to\infty} y(t)$ é finito? Quais são as soluções de equilíbrio?

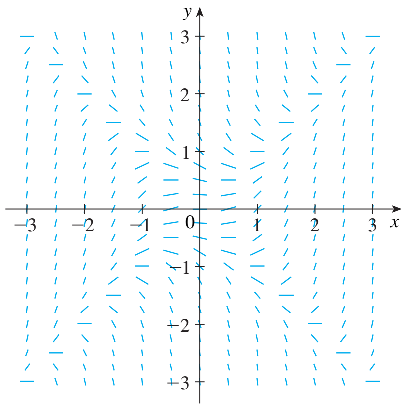


2. (a) Esboce um campo de direções para a equação diferencial $y' = x/y$. Então, use-o para esboçar as quatro soluções que satisfazem as condições iniciais $y(0) = 1$, $y(0) = -1$, $y(2) = 1$ e $y(-2) = 1$.
(b) Verifique seu trabalho no item (a) resolvendo a equação diferencial explicitamente. Que tipo de curva é cada curva solução?

3. (a) Um campo de direções para a equação diferencial $y' = x^2 - y^2$ é mostrado. Esboce a solução do problema de valor inicial

$$y' = x^2 - y^2 \qquad y(0) = 1$$

Use seu gráfico para estimar o valor de $y(0{,}3)$.



(b) Use o método de Euler com passo 0,1 para estimar $y(0{,}3)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial no item (a). Compare com sua estimativa da parte (a).

(c) Em que retas estão localizados os centros dos segmentos de reta horizontais do campo de direções da parte (a)? O que acontece quando uma curva solução intercepta essas retas?

4. (a) Use o método de Euler com o passo 0,2 para estimar $y(0{,}4)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial

$$y' = 2xy^2 \qquad y(0) = 1$$

(b) Repita a parte (a) com passo 0,1.

(c) Encontre a solução exata da equação diferencial e compare com o valor em 0,4 com as aproximações nas partes (a) e (b).

5–8 Resolva a equação diferencial.

5. $y' = xe^{-\operatorname{sen} x} - y \cos x$

6. $\dfrac{dx}{dt} = 1 - t + x - tx$

7. $2ye^{y^2}y' = 2x + 3\sqrt{x}$

8. $x^2y' - y = 2x^3 e^{-1/x}$

9–11 Resolva o problema de valor inicial.

9. $\dfrac{dr}{dt} + 2tr = r \qquad r(0) = 5$

10. $(1 + \cos x)y' = (1 + e^{-y})\operatorname{sen} x \qquad y(0) = 0$

11. $xy' - y = x \ln x, \qquad y(1) = 2$

12. Resolva o problema de valor inicial $y' = 3x^2e^y$, $y(0) = 1$ e trace a solução.

13–14 Encontre as trajetórias ortogonais da família de curvas.

13. $y = ke^x$

14. $y = e^{kx}$

15. (a) Escreva a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}1P\left(1 - \frac{P}{2\,000}\right) \qquad P(0) = 100$$

e use-a para encontrar a população quando $t = 20$.

(b) Quando a população atinge 1 200?

16. (a) A população mundial era de 5,28 bilhões em 1990 e 6,07 bilhões em 2000. Encontre um modelo exponencial para esses dados e use-o para prever a população mundial no ano 2020.

(b) De acordo com o modelo no item (a), quando a população mundial excederá 10 bilhões?

(c) Use os dados no item (a) para encontrar um modelo logístico para a população. Considere uma capacidade de suporte de 100 bilhões. Então use o modelo logístico para prever a população em 2020.

Compare com sua previsão do modelo exponencial.

(d) De acordo com o modelo logístico, quando a população mundial excederá 10 bilhões? Compare com suas previsões no item (b).

17. O modelo de crescimento de Von Bertalanffy é usado para prever o comprimento $L(t)$ de um peixe em um período de tempo. Se L_∞ for o maior comprimento para uma espécie, então a hipótese é que a taxa de crescimento do comprimento seja proporcional a $L_\infty - L$, o comprimento que o peixe ainda pode crescer.

(a) Formule e resolva uma equação diferencial para encontrar uma expressão para $L(t)$.

(b) Para o hadoque do Mar do Norte foi determinado que $L_\infty = 53$ cm, $L(0) = 10$ cm e a constante de proporcionalidade é 0,2. Em que a expressão para $L(t)$ torna-se com esses dados?

18. Um tanque contém 100 L de água pura. Água salgada contendo 0,1 kg de sal por litro entra no tanque a uma taxa de 10 L/min. A solução é agitada e retirada do tanque na mesma taxa. Quanto sal permanece no tanque depois de seis minutos?

19. Um modelo para a propagação de uma epidemia é que a taxa de propagação é proporcional ao número de pessoas infectadas e ao número de pessoas não infectadas. Em uma cidade isolada de 5 000 habitantes, 160 pessoas têm uma doença no começo da semana e 1.200, no fim da semana. Quanto tempo levará para 80% da população se contaminar?

20. A Lei de Brentano-Stevens em psicologia modela a maneira como um objeto de estudo reage a um estímulo. Ela estabelece que, se R representar a reação à quantidade S de estímulo, então as taxas relativas de aumento são proporcionais:

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = \frac{k}{S}\frac{dS}{dt}$$

onde k é uma constante positiva. Encontre R como uma função de S.

21. O transporte de uma substância através de uma parede capilar na fisiologia pulmonar tem sido modelado pela equação diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{R}{V}\left(\frac{h}{k + h}\right)$$

onde h é a concentração de hormônio na corrente sanguínea, t é o tempo, R é a taxa máxima de transporte, V é o volume do capilar e k é a constante positiva que mede a afinidade entre os hormônios e as enzimas que auxiliam o processo. Resolva essa equação diferencial para encontrar uma relação entre h e t.

22 As populações de pássaros e insetos são modeladas pelas equações

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}4x - 0{,}002xy$$

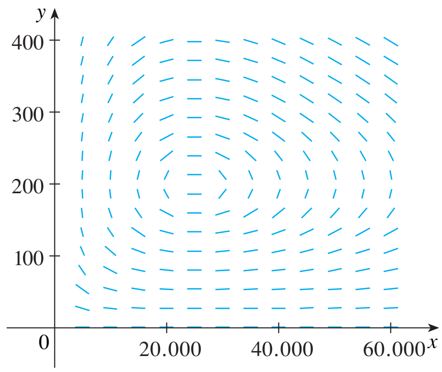
$$\frac{dy}{dt} = -0{,}2y + 0{,}000008xy$$

(a) Quais das variáveis, x ou y, representa a população de pássaros e qual representa a população de insetos? Explique.

(b) Encontre as soluções de equilíbrio e explique seu significado.

(c) Encontre uma expressão para dy/dx.

(d) O campo de direções para a equação diferencial no item (c) é mostrado. Use-o para esboçar a trajetória de fase correspondente às populações iniciais de 100 pássaros e 40.000 insetos. A seguir, use a trajetória de fase para descrever como ambas as populações variam.



(e) Use a parte (d) para fazer esboços das populações de pássaros e insetos como funções do tempo. De que modo esses gráficos estão relacionados?

23. Suponha que o modelo do Exercício 22 seja trocado pelas equações

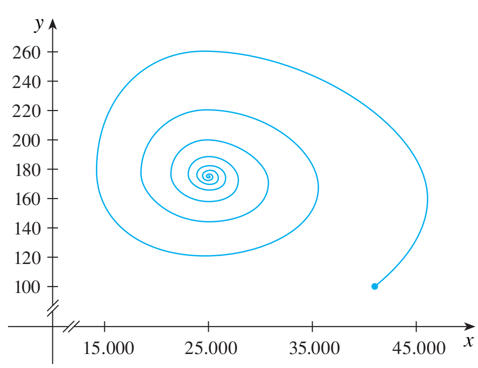
$$\frac{dx}{dt} = 0{,}4x(1 - 0{,}000005x) - 0{,}002xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}2y + 0{,}000008xy$$

(a) De acordo com essas equações, o que acontece à população de insetos na ausência dos pássaros?

(b) Encontre as soluções de equilíbrio e explique seu significado.

(c) A figura mostra a trajetória de fase que começa com 100 pássaros e 40.000 insetos. Descreva o que ocorre eventualmente com as populações de pássaros e insetos.



(d) Esboce os gráficos das populações de pássaros e insetos como funções do tempo.

24. Bárbara tem 60 kg e está em uma dieta de 1.600 calorias por dia, das quais 850 são usadas diretamente pelo metabolismo basal. Ela gasta cerca de 15 cal/kg/dia vezes seu peso fazendo exercícios. Se 1 kg de gordura tiver 10.000 cal e assumirmos que a reserva de calorias na forma de gordura seja 100% eficiente, formule uma equação diferencial e resolva-a para encontrar a massa dela em função do tempo. A massa de Bárbara eventualmente se aproxima de uma massa de equilíbrio?

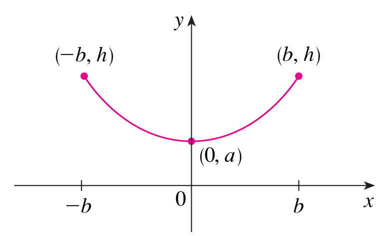
25. Quando um cabo flexível de densidade uniforme é suspenso entre dois pontos fixos e fica pendurado à mercê de seu próprio peso, a forma $y = f(x)$ do cabo satisfaz uma equação diferencial do tipo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

onde k é uma constante positiva. Considere o cabo mostrado na figura.

(a) Seja $z = dy/dx$ na equação diferencial. Resolva a equação diferencial de primeira ordem (em z) e depois integre para encontrar y.

(b) Determine o comprimento do cabo.



Problemas Quentes

1. Encontre todas as funções f tais que f' é contínua e

$$[f(x)]^2 = 100 + \int_0^x \{[f(t)]^2 + [f'(t)]^2\}\, dt \qquad \text{para todo } x.$$

2. Um estudante esqueceu a Regra do Produto para a derivada e cometeu o erro de pensar que $(fg)' = f'g'$. Contudo, ele teve sorte e obteve a resposta certa. A função f que ele usou era $f(x) = e^{x^2}$ e o domínio de seu problema era o intervalo $(\frac{1}{2}, \infty)$. Qual era a função g?

3. Seja f uma função com a propriedade de que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ e $f(a + b) = f(a)f(b)$ para todos os números reais a e b. Mostre que $f'(x) = f(x)$ para todo x e deduza que $f(x) = e^x$.

4. Encontre todas as funções f que satisfazem a equação

$$\left(\int f(x)\, dx\right)\left(\int \frac{1}{f(x)}\, dx\right) = -1$$

5. Encontre a curva $y = f(x)$ tal que $f(x) \geqslant 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e tal que a área sob o gráfico f de 0 a x seja proporcional à $(n + 1)$-ésima potência de $f(x)$.

6. Uma *subtangente* é uma parte do eixo x que fica diretamente abaixo do segmento de uma reta tangente do ponto de contato ao eixo x. Encontre curvas que passem pelo ponto $(c, 1)$ e cujas subtangentes tenham todas comprimento c.

7. Uma torta de pera foi tirada do forno às 17h00. Naquela hora, a torta estava pegando fogo, com uma temperatura de 100 ºC. Às 17h10, sua temperatura era de 80 ºC; às 17h20 era de 65 ºC. Qual é a temperatura do ambiente?

8. Começa a cair neve durante a manhã do dia 2 de fevereiro e continua constantemente durante a tarde. Ao meio-dia, um veículo removedor de neve começa a retirá-la de uma estrada a uma taxa constante. O veículo percorreu 6 km do meio-dia até às 13 horas, mas apenas 3 km das 13 às 14 horas. Quando a neve começou a cair? [*Dicas*: Para começar, seja t o instante medido em horas depois do meio-dia; seja $x(t)$ a distância percorrida pelo veículo removedor de neve em um instante t; então a velocidade do veículo é dx/dt. Seja b o número de horas antes do meio-dia quando começou a nevar. Encontre uma expressão para a altura da neve no instante t. Então use as determinadas informações de que a taxa de remoção R (em m^3/h) é constante.]

9. Um cachorro vê um coelho correndo em linha reta por um campo aberto e começa a caçá-lo. Em um sistema de coordenadas cartesianas (como mostrado na figura), suponha que:
   (i) O coelho está na origem e o cachorro, no ponto $(L, 0)$, no instante em que o cachorro primeiro vê o coelho.
   (ii) O coelho corre no eixo y e o cachorro corre sempre direto para o coelho.
   (iii) O cachorro corre na mesma velocidade do coelho.

   (a) Mostre que o caminho do cachorro é o gráfico da função $y = f(x)$, onde y satisfaz a equação diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

   (b) Determine a solução da equação no item (a) que satisfaça as condições iniciais $y = y' = 0$ quando $x = L$. [*Dica*: Seja $z = dy/dx$ na equação diferencial e resolva a equação de primeira ordem resultante para encontrar z; então integre z para encontrar y.]
   (c) O cachorro alcança o coelho?

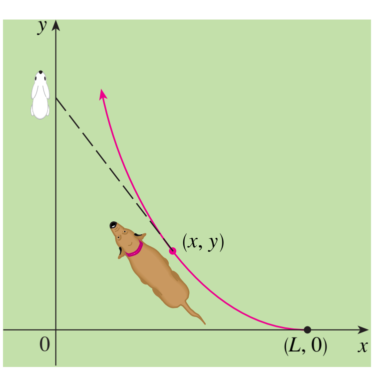


FIGURA PARA O PROBLEMA 9

10. (a) Suponha que o cachorro no Problema 9 corra duas vezes mais rápido que o coelho. Encontre uma equação diferencial para a trajetória do cachorro. Então resolva-a para encontrar o ponto onde o cachorro pega o coelho.
    (b) Suponha que o cachorro corra com a metade da velocidade do coelho. Quão próximo o cachorro chega do coelho? Quais são suas posições quando eles estão o mais próximo possível?

11. Um engenheiro deve apresentar algumas estimativas à sua companhia sobre uma nova planta de alume, considerando a capacidade de um silo desenhado para conter minério de bauxita até este ser processado em alume. O minério parece pó de talco cor-de-rosa e é despejado a partir de uma esteira transportadora no topo do silo. O silo é um cilindro de 30 m de altura com um raio de 60 m. O silo é um cilindro de 1.500π m^3/h e o minério mantém um formato cônico cujo raio é 1,5 vez a sua altura.

(a) Se, em um instante t determinado, a pilha tiver 20 m de altura, quanto tempo levará para ela alcançar o topo do silo?

(b) A administração quer saber quanto espaço restará no chão do silo quando a pilha tiver 20 m de altura. Quão rápido está crescendo a área preenchida no chão quando a pilha estiver a essa altura?

(c) Suponha que um carregador comece a remover o minério a uma taxa de 500π m^3/h quando a altura da pilha alcança 27 m. Suponha também que a pilha continue a manter seu formato. Quanto tempo levará para a pilha atingir o topo do silo nessas condições?

12. Ache a curva que passa pelo ponto (3, 2) e que tem a propriedade de que, se a reta tangente for desenhada em qualquer ponto P na curva, a parte da reta tangente que está no primeiro quadrante será dividida ao meio por P.

13. Lembre-se de que a reta normal a uma curva em um ponto P na curva é a reta que passa por P e é perpendicular à reta tangente em P. Encontre a curva que passa pelo ponto (3, 2) e que tem a propriedade de que, se a linha normal for desenhada em qualquer ponto na curva, a intersecção y da linha normal sempre será 6.

14. Encontre todas as curvas com a propriedade de que, se a reta normal for desenhada em qualquer ponto P na curva, a parte da reta normal entre P e o eixo x será dividida em duas partes iguais pelo eixo y.

15. Encontre todas as curvas com a propriedade de que se a linha for desenhada a partir da origem em qualquer ponto (x, y) na curva, e então uma tangente for desenhada para a curva naquele ponto e estender-se para encontrar o eixo x, o resultado é um triângulo isósceles com lados iguais que se encontram se em (x, y).