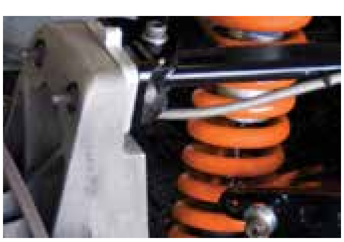
Sumário



Índice Remissivo I1

Volume I

17 Equações Diferenciais de Segunda Ordem

O movimento de um amortecedor de um carro é descrito pelas equações diferenciais resolvidas na Seção 17.3.

A ideia central das equações diferenciais está explicada no Capítulo 9, onde nos concentramos em equações de primeira ordem. Neste capítulo, estudaremos as equações diferenciais lineares de segunda ordem e aprenderemos aplicá-las na resolução de problemas de vibrações de mola e circuitos elétricos. Veremos também como séries infinitas podem ser usadas para resolver equações diferenciais.

17.1 Equações Lineares de Segunda Ordem

Uma **equação diferencial linear de segunda ordem** tem a forma

$$\boxed{1} \qquad P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

onde P, Q, R e G são funções contínuas. Vimos na Seção 9.1 que equações desse tipo surgem no estudo do movimento de uma mola. Na Seção 17.3 aprofundaremos essa aplicação, bem como sua aplicação aos circuitos elétricos.

Nesta seção, estudaremos o caso onde $G(x) = 0$ para todo x na Equação 1. Tais equações são chamadas equações lineares **homogêneas**. Assim, a forma de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem é

$$\boxed{2} \qquad P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

Se $G(x) \neq 0$ para algum x, a Equação 1 é **não homogênea** e será discutida na Seção 17.2.

Dois fatos básicos permitem-nos resolver equações lineares homogêneas. O primeiro é que, se conhecermos duas soluções y_1 e y_2 de tal equação, então a **combinação linear** $y = c_1y_1 + c_2y_2$ também será uma solução.

$\boxed{3}$ **Teorema** Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são ambas soluções da equação linear homogênea $\boxed{2}$ e c_1 e c_2 são constantes quaisquer, então a função

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

é também uma solução da Equação 2.

DEMONSTRAÇÃO Uma vez que y_1 e y_2 são soluções da Equação 2, temos

$$P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1 = 0$$

e

$$P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2 = 0$$

Portanto, usando as regras básicas para derivação, temos

$$\begin{aligned} P(x)y'' &+ Q(x)y' + R(x)y \\ &= P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)'' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= P(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'') + Q(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1[P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1] + c_2[P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2] \\ &= c_1(0) + c_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Assim, $y = c_1y_1 + c_2y_2$ é uma solução da Equação 2.

O outro fato de que precisamos é dado pelo seguinte teorema, demonstrado em cursos mais avançados. Ele diz que a solução geral é uma combinação linear de duas soluções **linearmente independentes** y_1 e y_2. Isso significa que nem y_1 nem y_2 são múltiplos por constantes um do outro. Por exemplo: as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 5x^2$ são linearmente dependentes, mas $f(x) = e^x$ e $g(x) = xe^x$ são linearmente independentes.

4 **Teorema** Se y_1 e y_2 forem soluções linearmente independentes da Equação 2 em um intervalo, e $P(x)$ nunca for 0, então a solução geral será dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

O Teorema 4 é muito útil, pois diz que, se conhecermos *duas* soluções particulares linearmente independentes, então conheceremos *todas* as soluções.

Em geral, não é fácil descobrir soluções particulares de uma equação linear de segunda ordem. Mas é sempre possível fazer isso se as funções coeficientes P, Q e R forem funções constantes, isto é, se a equação diferencial tiver a forma

5 $$\boxed{ay'' + by' + cy = 0}$$

onde a, b e c são constantes e $a \neq 0$.

Não é difícil pensar em alguns prováveis candidatos para as soluções particulares da Equação 5 se a enunciarmos verbalmente. Estamos procurando uma função y tal que uma constante vezes sua segunda derivada y'' mais outra constante vezes y' mais uma terceira constante vezes y é igual a 0. Sabemos que a função exponencial $y = e^{rx}$ (onde r é uma constante) tem a propriedade de que sua derivada é um múltiplo por constante dela mesma: $y' = re^{rx}$. Além disso, $y'' = r^2e^{rx}$. Se substituirmos essas expressões na Equação 5, veremos que $y = e^{rx}$ é uma solução se

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

ou

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

Mas e^{rx} nunca é 0. Assim, $y = e^{rx}$ é uma solução da Equação 5 se r é uma raiz da equação

6 $$\boxed{ar^2 + br + c = 0}$$

A Equação 6 é denominada **equação auxiliar** (ou **equação característica**) da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. Observe que ela é uma equação algébrica que pode ser obtida da equação diferencial substituindo-se y'' por r^2, y' por r, e y por 1.

Algumas vezes as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar podem ser determinadas por fatoração. Em outros casos, elas são encontradas usando-se a fórmula quadrática:

7 $$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Separamos em três casos, de acordo com o sinal do discriminante $b^2 - 4ac$.

CASO I $b^2 - 4ac > 0$

Nesse caso as raízes r_1 and r_2 da equação auxiliar são reais e distintas, logo $y_1 = e^{r_1x}$ e $y_2 = e^{r_2x}$ são duas soluções linearmente independentes da Equação 5. (Observe que e^{r_2x} não é um múltiplo por constante de e^{r_1x}.) Portanto, pelo Teorema 4, temos o seguinte fato.

8 Se as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ forem reais e distintas, então a solução geral de $ay'' + by' + cy = 0$ é

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

EXEMPLO 1 Resolva a equação $y'' + y' - 6y = 0$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é

$$r^2 + r - 6 = (r - 2)(r + 3) = 0$$

cujas raízes são $r = 2, -3$. Portanto, por $\boxed{8}$, a solução geral da equação diferencial dada é

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

Poderíamos verificar que isso é de fato uma solução derivando e substituindo na equação diferencial.

Na Figura 1, o gráfico das soluções básicas $f(x) = e^{2x}$ e $g(x) = e^{-3x}$ da equação diferencial do Exemplo 1 é exibido em azul e vermelho, respectivamente. Algumas das outras soluções, combinações lineares de f e g, são exibidas em preto.

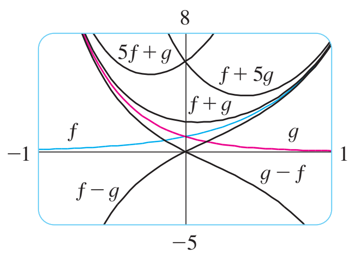


FIGURA 1

EXEMPLO 2 Resolva $3\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - y = 0$.

SOLUÇÃO Para resolvermos a equação auxiliar $3r^2 + r - 1 = 0$, usamos a fórmula quadrática:

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Uma vez que as raízes são reais e distintas, a solução geral é

$$y = c_1 e^{(-1+\sqrt{13})x/6} + c_2 e^{(-1-\sqrt{13})x/6}$$

CASO II $b^2 - 4ac = 0$

Nesse caso, $r_1 = r_2$; isto é, as raízes da equação auxiliar são reais e iguais. Vamos denotar por r o valor comum de r_1 e r_2. Então, das Equações 7, temos

$$\boxed{9} \qquad r = -\frac{b}{2a} \qquad \text{então} \qquad 2ar + b = 0$$

Sabemos que $y_1 = e^{rx}$ é uma solução da Equação 5. Agora verifiquemos que $y_2 = xe^{rx}$ também é uma solução:

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + cxe^{rx} \\ &= (2ar + b)e^{rx} + (ar^2 + br + c)xe^{rx} \\ &= 0(e^{rx}) + 0(xe^{rx}) = 0 \end{aligned}$$

O primeiro termo é 0, pela Equação 9; o segundo termo é 0, pois r é uma raiz da equação auxiliar. Uma vez que $y_1 = e^{rx}$ e $y_2 = xe^{rx}$ são soluções linearmente independentes, o Teorema 4 nos fornece a solução geral.

$\boxed{10}$ Se a equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ tem apenas uma raiz real r, então a solução geral de $ay'' + by' + cy = 0$ é

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 xe^{rx}$$

A Figura 2 apresenta as soluções básicas $f(x) = e^{-3x/2}$ e $g(x) = xe^{-3x/2}$ do Exemplo 3 e alguns outros membros da família de soluções. Observe que todas elas tendem a 0 quando $x \to \infty$.

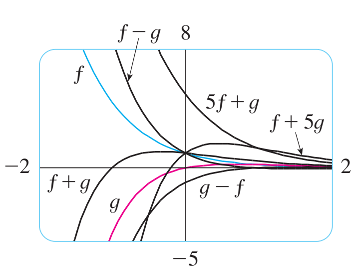


FIGURA 2

EXEMPLO 3 Resolva a equação $4y'' + 12y' + 9y = 0$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar $4r^2 + 12r + 9 = 0$ pode ser fatorada como

$$(2r + 3)^2 = 0$$

de modo que a única raiz é $r = -\frac{3}{2}$. Por $\boxed{10}$, a solução geral é

$$y = c_1 e^{-3x/2} + c_2 xe^{-3x/2}$$

CASO III $b^2 - 4ac < 0$

Nesse caso, as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar são números complexos. (Veja o Apêndice H para informações sobre números complexos.) Podemos escrever

$$r_1 = \alpha + i\beta \qquad r_2 = \alpha - i\beta$$

onde α e β são números reais. [Na verdade, $\alpha = -b/(2a)$, $\beta = \sqrt{4ac - b^2}/(2a)$.] Então, usando a equação de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

do Apêndice H, escrevemos a solução da equação diferencial como

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \\ &= C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x) \\ &= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen}\beta x] \\ &= e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x) \end{aligned}$$

onde $c_1 = C_1 + C_2$, $c_2 = i(C_1 - C_2)$. Isso nos dá todas as soluções (reais ou complexas) da equação diferencial. As soluções serão reais quando as constantes c_1 e c_2 forem reais. Resumiremos a discussão da seguinte forma:

11 Se as raízes da equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ forem os números complexos $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, então a solução geral de $ay'' + by' + cy = 0$ será

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x)$$

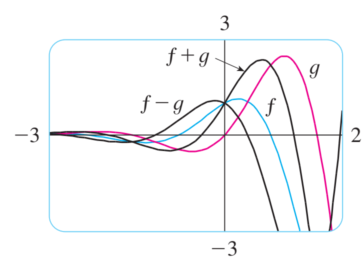


FIGURA 3

A Figura 3 apresenta os gráficos das soluções do Exemplo 4, $f(x) = e^{3x}\cos 2x$ e $g(x) = e^{3x}\operatorname{sen} 2x$, com algumas combinações lineares. Todas as soluções tendem a 0 como $x \to -\infty$.

EXEMPLO 4 Resolva a equação $y'' - 6y' + 13y = 0$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 - 6r + 13 = 0$. Pela fórmula quadrática, as raízes são

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i$$

Por $\boxed{11}$, a solução geral da equação diferencial é

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$$

Problemas de Valores Iniciais e Valores de Contorno

Um **problema de valor inicial** para a Equação 1 ou 2 de segunda ordem consiste em determinar uma solução y da equação diferencial que satisfaça às condições iniciais da forma

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_1$$

onde y_0 e y_1 são constantes. Se P, Q, R e G forem contínuas em um intervalo onde $P(x) \neq 0$, então um teorema encontrado em livros mais avançados garante a existência e a unicidade de uma solução para esse problema de valor inicial. Os Exemplos 5 e 6 mostram como resolver tal problema.

EXEMPLO 5 Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + y' - 6y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

SOLUÇÃO Do Exemplo 1, sabemos que a solução geral da equação diferencial é

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

A Figura 4 apresenta o gráfico da solução do problema de valor inicial do Exemplo 5. Compare com a Figura 1.

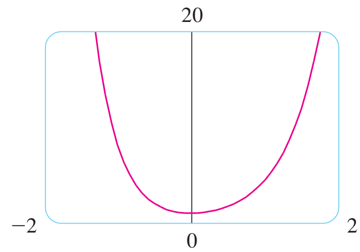


FIGURA 4

Derivando essa solução, obtemos

$$y'(x) = 2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x}$$

Para satisfazermos às condições iniciais exigimos que

$$\boxed{12} \qquad y(0) = c_1 + c_2 = 1$$

$$\boxed{13} \qquad y'(0) = 2c_1 - 3c_2 = 0$$

De $\boxed{13}$, temos $c_2 = \frac{2}{3}c_1$; logo, $\boxed{12}$ resulta em

$$c_1 + \tfrac{2}{3}c_1 = 1 \qquad c_1 = \tfrac{3}{5} \qquad c_2 = \tfrac{2}{5}$$

Assim, a solução pedida do problema de valor inicial é

$$y = \tfrac{3}{5}e^{2x} + \tfrac{2}{5}e^{-3x}$$

EXEMPLO 6 Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 3$$

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 + 1 = 0$, ou $r^2 = -1$, cujas raízes são $\pm i$. Assim, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, e, uma vez que $e^{0x} = 1$, a solução geral é

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

Uma vez que

$$y'(x) = -c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$$

as condições iniciais tornam-se

$$y(0) = c_1 = 2 \qquad y'(0) = c_2 = 3$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) = 2 \cos x + 3 \operatorname{sen} x$$

A solução do Exemplo 6 tem seu gráfico na Figura 5. Ela parece ser uma senoide deslocada. Realmente, você pode verificar que outra maneira de escrever a solução é

$y = \sqrt{13}\operatorname{sen}(x + \phi)$ onde $\operatorname{tg} \phi = \frac{2}{3}$

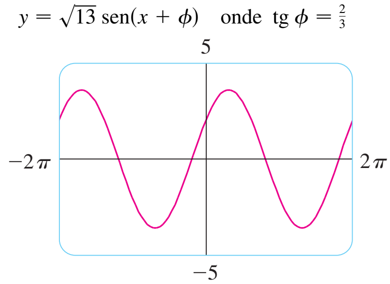


FIGURA 5

Um **problema de valor de contorno** para a Equação 1 ou 2 consiste em determinar uma solução y da equação diferencial que também satisfaça às condições de contorno da forma

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x_1) = y_1$$

Em contraste com a situação para problemas de valor inicial, um problema de valor de contorno nem sempre tem uma solução. O método está ilustrado no Exemplo 7.

EXEMPLO 7 Resolva o problema de valor de contorno

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y(1) = 3$$

SOLUÇÃO A equação auxiliar é

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad (r + 1)^2 = 0$$

cuja única raiz é $r = -1$. Além disso, a solução geral é

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$$

As condições de contorno são satisfeitas se

$$y(0) = c_1 = 1$$

$$y(1) = c_1e^{-1} + c_2e^{-1} = 3$$

A primeira condição resulta em $c_1 = 1$, de modo que a segunda condição torna-se

$$e^{-1} + c_2e^{-1} = 3$$

Isolando c_2 nessa equação, primeiro multiplicando ambos os membros por e, obtém-se

$$1 + c_2 = 3e \qquad \text{logo} \qquad c_2 = 3e - 1$$

Assim, a solução do problema de contorno é

$$y = e^{-x} + (3e - 1)xe^{-x}$$

A Figura 6 mostra o gráfico da solução do problema de valor de contorno no Exemplo 7.

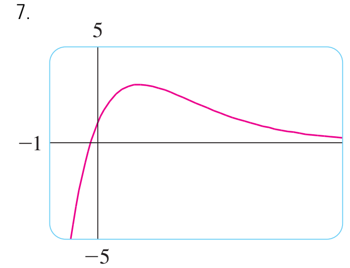


FIGURA 6

Resumo: Soluções de $ay'' + by' + c = 0$

Raízes de $ar^2 + br + c = 0$	Solução Geral
r_1, r_2 reais e distintas	$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$
$r_1 = r_2 = r$	$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$
r_1, r_2 complexas: $\alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$

17.1 Exercícios

1–13 Resolva a equação diferencial.

1. $y'' - y' - 6y = 0$
2. $y'' + 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + 16y = 0$
4. $y'' - 8y' + 12y = 0$
5. $9y'' - 12y' + 4y = 0$
6. $25y'' + 9y = 0$
7. $y' = 2y''$
8. $y'' - 4y' + y = 0$
9. $y'' - 4y' + 13y = 0$
10. $y'' + 3y' = 0$

11. $2\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} - y = 0$

12. $8\dfrac{d^2y}{dt^2} + 12\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$

13. $100\dfrac{d^2P}{dt^2} + 200\dfrac{dP}{dt} + 101P = 0$

14–16 Faça o gráfico das duas soluções básicas da equação diferencial e de várias outras soluções. Que aspecto as soluções têm em comum?

14. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 20y = 0$

15. $5\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$

16. $9\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

17–24 Resolva o problema de valor inicial.

17. $2y'' + 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4$
18. $y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$
19. $9y'' + 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
20. $2y'' + y' - y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 3$
21. $y'' - 6y' - 10y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$
22. $4y'' - 20y' + 25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$
23. $y'' - y' - 12y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$
24. $4y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

25–32 Resolva o problema de valor de contorno, se possível.

25. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y(\pi/4) = 3$
26. $y'' = 4y, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$
27. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = 0$
28. $y'' - 8y' + 17y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y(\pi) = 2$
29. $y'' = y', \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2$
30. $4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y(2) = 0$
31. $y'' + 4y' + 20y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 2$
32. $y'' + 4y' + 20y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = e^{-2\pi}$

33. Seja L um número real não nulo.
(a) Mostre que o problema de contorno $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(L) = 0$ tem apenas a solução trivial $y = 0$ para os casos $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$.
(b) Para o caso $\lambda > 0$, determine os valores de λ para os quais este problema tenha uma solução não trivial e dê a solução correspondente.

34. Se a, b e c são todas constantes positivas e $y(x)$ é uma solução da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, mostre que $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

35. Considere o problema de valor de contorno $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(a) = c$, $y(b) = d$.
(a) Se este problema tem uma solução única, como a e b estão relacionados?
(b) Se este problema não tem uma solução única, como a, b, c e d estão relacionados?
(c) Se este problema tem uma infinidade de soluções, como a, b, c e d estão relacionados?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

17.2 Equações Lineares Não Homogêneas

Nesta seção, aprenderemos a resolver equações diferenciais lineares não homogêneas com coeficientes constantes, isto é, equações da forma

$$\boxed{1} \qquad ay'' + by' + cy = G(x)$$

onde a, b e c são constantes e G é uma função contínua. A equação homogênea correspondente

$$\boxed{2} \qquad ay'' + by' + cy = 0$$

é chamada **equação complementar** e desempenha um papel importante na solução da equação não homogênea original $\boxed{1}$.

$\boxed{3}$ **Teorema** A solução geral da equação diferencial não homogênea $\boxed{1}$ pode ser escrita como

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

onde y_p é uma solução particular da Equação 1 e y_c é a solução geral da Equação complementar 2.

DEMONSTRAÇÃO Verificamos que, se y for qualquer solução da Equação 1, então $y - y_p$ será uma solução da Equação complementar 2. De fato,

$$\begin{aligned} a(y - y_p)'' + b(y - y_p)' + c(y - y_p) &= ay'' - ay_p'' + by' - by_p' + cy - cy_p \\ &= (ay'' + by' + cy) - (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= G(x) - G(x) = 0 \end{aligned}$$

Isso demonstra que cada solução é da forma $y(x) = y_p(x) + y_c(x)$. É fácil verificar que cada função desta forma é uma solução.

Sabemos, da Seção 17.1, como resolver a equação complementar. (Recorde que a solução é $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$, onde y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da Equação 2.) Além disso, o Teorema 3 diz que conheceremos a solução geral da equação não homogênea assim que conhecermos uma solução particular y_p. Existem dois métodos para encontrar uma solução particular: O método dos coeficientes indeterminados é simples, mas funciona apenas para uma classe restrita de funções G. O método de variação de parâmetros funciona para todas as funções G, mas, geralmente, é mais difícil de aplicar na prática.

O Método dos Coeficientes Indeterminados

Vamos primeiro ilustrar o método dos coeficientes indeterminados para a equação

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$

onde $G(x)$ é um polinômio. É razoável prever que exista uma solução particular y_p que seja um polinômio de mesmo grau de G, pois, se y for um polinômio, então $ay'' + by' + cy$ também será um polinômio. Portanto, substituímos $y_p(x) =$ a, um polinômio (de mesmo grau de G), na equação diferencial e determinamos os coeficientes.

EXEMPLO 1 Resolva a equação $y'' + y' - 2y = x^2$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar de $y'' + y' - 2y = 0$ é

$$r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2) = 0$$

com as raízes $r = 1, -2$. Logo, a solução da equação complementar é

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{-2x}$$

Uma vez que $G(x) = x^2$ é um polinômio de grau 2, procuramos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Então, $y_p' = 2Ax + B$ e $y_p'' = 2A$. Assim, substituindo na equação diferencial dada, temos

$$(2A) + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

ou $$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + (2A + B - 2C) = x^2$$

Polinômios são iguais quando seus coeficientes são iguais. Assim,

$$-2A = 1 \qquad 2A - 2B = 0 \qquad 2A + B - 2C = 0$$

A solução desse sistema de equações é

$$A = -\tfrac{1}{2} \qquad B = -\tfrac{1}{2} \qquad C = -\tfrac{3}{4}$$

Uma solução particular é, portanto,

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4}$$

e, pelo Teorema 3, a solução geral é

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4}$$

A Figura 1 mostra quatro soluções da equação diferencial do Exemplo 1 em termos da solução particular y_p e das funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-2x}$.

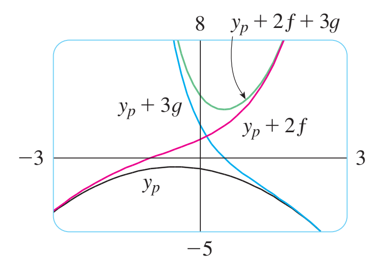


FIGURA 1

Se $G(x)$ (lado direito da Equação 1) é da forma Ce^{kx}, onde C e k são constantes, então tomamos como uma tentativa de solução uma função de mesma forma, $y_p(x) = Ae^{kx}$, pois as derivadas de e^{kx} são múltiplas por constantes de e^{kx}.

EXEMPLO 2 Resolva $y'' + 4y = e^{3x}$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 + 4 = 0$ com raízes $\pm 2i$, logo, a solução da equação complementar é

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$$

Para uma solução particular tentemos $y_p(x) = Ae^{3x}$. Então $y_p' = 3Ae^{3x}$ e $y_p'' = 9Ae^{3x}$. Substituindo na equação diferencial, temos

$$9Ae^{3x} + 4(Ae^{3x}) = e^{3x}$$

logo $13Ae^{3x} = e^{3x}$ e $A = \frac{1}{13}$. Assim, uma solução particular é

$$y_p(x) = \tfrac{1}{13}e^{3x}$$

e a solução geral é

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{13}e^{3x}$$

A Figura 2 mostra as soluções da equação diferencial do Exemplo 2 em termos de y_p e as funções $f(x) = \cos 2x$ e $g(x) = \operatorname{sen} 2x$. Observe que todas as soluções tendem a ∞ quando $x \to \infty$ e todas as soluções (exceto y_p) parecem funções seno quando x é negativo.

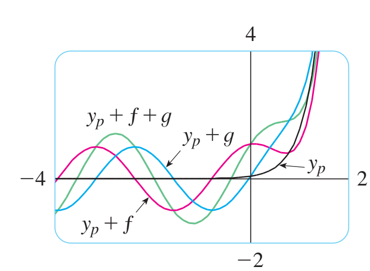


FIGURA 2

Se $G(x)$ é $C \cos kx$ ou $C \operatorname{sen} kx$, então, por causa das regras de derivação para as funções seno e cosseno, tentamos, como solução particular, uma função da forma

$$y_p(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx$$

EXEMPLO 3 Resolva $y'' + y' - 2y = \operatorname{sen} x$.

SOLUÇÃO Tentemos uma solução particular

$$y_p(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x$$

Então, $\quad y_p' = -A\operatorname{sen} x + B\cos x \qquad y_p'' = -A\cos x - B\operatorname{sen} x$

logo, substituindo na equação diferencial, temos

$$(-A\cos x - B\operatorname{sen} x) + (-A\operatorname{sen} x + B\cos x) - 2(A\cos x + B\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x$$

ou $$(-3A + B)\cos x + (-A - 3B)\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

Isso acontece se

$$-3A + B = 0 \qquad \text{e} \qquad -A - 3B = 1$$

A solução deste sistema é

$$A = -\tfrac{1}{10} \qquad B = -\tfrac{3}{10}$$

logo, uma solução particular é

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{10}\cos x - \tfrac{3}{10}\operatorname{sen} x$$

No Exemplo 1, determinamos que a solução da equação complementar é $y_c = c_1e^x + c_2e^{-2x}$. Assim, a solução geral da equação dada é

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \tfrac{1}{10}(\cos x + 3\operatorname{sen} x)$$

Se $G(x)$ for um produto de funções dos tipos precedentes, então tentamos a solução como um produto de funções do mesmo tipo. Por exemplo, ao resolver a equação diferencial

$$y'' + 2y' + 4y = x\cos 3x$$

tentamos

$$y_p(x) = (Ax + B)\cos 3x + (Cx + D)\operatorname{sen} 3x$$

Se $G(x)$ for uma soma de funções desses tipos, usamos o *princípio da superposição*, que é facilmente verificável e nos diz que se y_{p_1} e y_{p_2} forem soluções de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) \qquad ay'' + by' + cy = G_2(x)$$

respectivamente, então $y_{p_1} + y_{p_2}$ é uma solução de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) + G_2(x)$$

EXEMPLO 4 Resolva $y'' - 4y = xe^x + \cos 2x$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 - 4 = 0$ com as raízes ± 2, logo, a solução da equação complementar é $y_c(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$. Para a equação $y'' - 4y = xe^x$ tentamos

$$y_{p_1}(x) = (Ax + B)e^x$$

Então $y_{p_1}' = (Ax + A + B)e^x$, $y_{p_1}'' = (Ax + 2A + B)e^x$, Logo, substituindo na equação dada,

$$(Ax + 2A + B)e^x - 4(Ax + B)e^x = xe^x$$

ou $$(-3Ax + 2A - 3B)e^x = xe^x$$

Assim $-3A = 1$ e $2A - 3B = 0$, logo $A = -\tfrac{1}{3}$, $B = -\tfrac{2}{9}$, e

$$y_{p_1}(x) = \left(-\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9}\right)e^x$$

Para a equação $y'' - 4y = \cos 2x$, tentamos

$$y_{p_2}(x) = C\cos 2x + D\operatorname{sen} 2x$$

Substituindo, temos

$$-4C\cos 2x - 4D\operatorname{sen} 2x - 4(C\cos 2x + D\operatorname{sen} 2x) = \cos 2x$$

ou $$-8C\cos 2x - 8D\operatorname{sen} 2x = \cos 2x$$

Portanto $-8C = 1$, $-8D = 0$, e

$$y_{p_2}(x) = -\tfrac{1}{8}\cos 2x$$

Pelo princípio da superposição, a solução geral é

$$y = y_c + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{9}\right)e^x - \tfrac{1}{8}\cos 2x$$

Na Figura 3 mostramos a solução particular $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ da equação diferencial do Exemplo 4. As outras soluções são dadas em termos de $f(x) = e^{2x}$ e $g(x) = e^{-2x}$

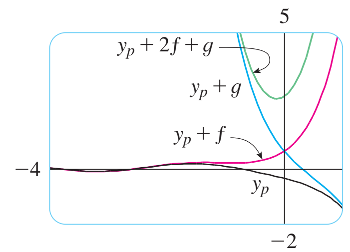


FIGURA 3

Finalmente, observamos que a solução tentativa recomendada y_p algumas vezes resulta em uma solução da equação complementar e, portanto, não pode ser uma solução de uma equação não homogênea. Em tais casos, multiplicamos a solução tentativa recomendada por x (ou por x^2 se necessário) de modo que nenhum termo em $y_p(x)$ seja uma solução da equação complementar.

EXEMPLO 5 Resolva $y'' + y = \operatorname{sen} x$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 + 1 = 0$ com raízes $\pm i$, logo, a solução da equação complementar é

$$y_c(x) = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x$$

Geralmente, teríamos usado a solução tentativa

$$y_p(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x$$

mas observe que ela é uma solução da equação complementar. Então, em vez disso, tentemos

$$y_p(x) = Ax\cos x + Bx\operatorname{sen} x$$

Então $$y_p'(x) = A\cos x - Ax\operatorname{sen} x + B\operatorname{sen} x + Bx\cos x$$

$$y_p''(x) = -2A\operatorname{sen} x - Ax\cos x + 2B\cos x - Bx\operatorname{sen} x$$

Substituindo na equação diferencial temos

$$y_p'' + y_p = -2A\operatorname{sen} x + 2B\cos x = \operatorname{sen} x$$

logo $A = -\tfrac{1}{2}$, $B = 0$, e

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{2}x\cos x$$

A solução geral é

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x - \tfrac{1}{2}x\cos x$$

Os gráficos de quatro soluções da equação diferencial do Exemplo 5 estão apresentados na Figura 4.

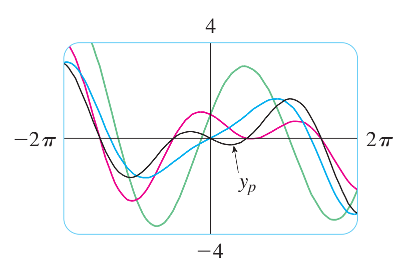


FIGURA 4

Resumimos o método dos coeficientes indeterminados como segue:

Resumo do Método dos Coeficientes Indeterminados

1. Se $G(x) = e^{kx}P(x)$, onde P é um polinômio de grau n, então tente $y_p(x) = e^{kx}Q(x)$, onde $Q(x)$ é um polinômio de n-ésimo grau (cujos coeficientes são determinados através da substituição na equação diferencial).
2. Se $G(x) = e^{kx}P(x)\cos mx$ ou $G(x) = e^{kx}P(x)\,\text{sen}\, mx$, onde P é um polinômio de n-ésimo grau, então tente

$$y_p(x) = e^{kx}Q(x)\cos mx + e^{kx}R(x)\,\text{sen}\, mx$$

onde Q e R são polinômios de grau n-ésimo.

Modificação: Se algum termo de y_p for uma solução da equação complementar, multiplique y_p por x (ou por x^2 se necessário).

EXEMPLO 6 Determine a forma da solução tentativa para a equação diferencial $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}\cos 3x$.

SOLUÇÃO Aqui $G(x)$ tem a forma encontrada na parte 2 do resumo, onde $k = 2$, $m = 3$ e $P(x) = 1$. Assim, à primeira vista, a forma da solução tentativa deveria ser

$$y_p(x) = e^{2x}(A\cos 3x + B\,\text{sen}\, 3x)$$

Mas a equação auxiliar é $r^2 - 4r + 13 = 0$, com raízes $r = 2 \pm 3i$, portanto a solução da equação complementar é

$$y_c(x) = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\,\text{sen}\, 3x)$$

Isso significa que temos de multiplicar a solução tentativa sugerida por x. Então, em vez disso, usamos

$$y_p(x) = xe^{2x}(A\cos 3x + B\,\text{sen}\, 3x)$$

O Método da Variação dos Parâmetros

Suponha que, após resolver a equação homogênea $ay'' + by' + cy = 0$, escrevamos a solução como

4 $$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

onde y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes. Vamos substituir as constantes (ou parâmetros) c_1 e c_2 da Equação 4 pelas funções arbitrárias $u_1(x)$ e $u_2(x)$. Procuramos uma solução particular da equação não homogênea $ay'' + by' + cy = G(x)$ da forma

5 $$y_p(x) = u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x)$$

(Esse método é chamado **variação dos parâmetros** porque variamos os parâmetros c_1 e c_2, tornando-os funções.) Derivando a Equação 5, obtemos

6 $$y_p' = (u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1y_1' + u_2y_2')$$

Uma vez que u_1 e u_2 são funções arbitrárias, podemos impor duas condições sobre eles. Uma condição é que y_p é uma solução da equação diferencial e podemos escolher a outra condição de modo a simplificar nossos cálculos. Considerando a expressão da Equação 6, vamos impor a condição de que

7 $$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$$

Então, $$y_p'' = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2''$$

Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$a(u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2'') + b(u_1y_1' + u_2y_2') + c(u_1y_1 + u_2y_2) = G$$

ou

$$\boxed{8} \qquad u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

Mas y_1 e y_2 são soluções da equação complementar, logo

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$$

e a Equação 8 simplifica para

$$\boxed{9} \qquad a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

As Equações 7 e 9 formam um sistema de duas equações nas funções desconhecidas u_1' e u_2'. Após resolver esse sistema, podemos integrar para encontrar u_1 e u_2 e então a solução particular é dada pela Equação 5.

EXEMPLO 7 Resolva a equação $y'' + y = \text{tg}\, x$, $0 < x < \pi/2$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 + 1 = 0$ com as raízes $\pm i$; logo, a solução de $y'' + y = 0$ é $y(x) = c_1 \,\text{sen}\, x + c_2 \cos x$. Usando a variação dos parâmetros, buscamos uma solução da forma

$$y_p(x) = u_1(x)\,\text{sen}\, x + u_2(x)\cos x$$

Então $$y_p' = (u_1'\,\text{sen}\, x + u_2'\cos x) + (u_1\cos x - u_2\,\text{sen}\, x)$$

Faça

$$\boxed{10} \qquad u_1'\,\text{sen}\, x + u_2'\cos x = 0$$

Então, $$y_p'' = u_1'\cos x - u_2'\,\text{sen}\, x - u_1\,\text{sen}\, x - u_2\cos x$$

Para y_p ser uma solução, devemos ter

$$\boxed{11} \qquad y_p'' + y_p = u_1'\cos x - u_2'\,\text{sen}\, x = \text{tg}\, x$$

Resolvendo as Equações 10 e 11, obtemos

$$u_1'(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) = \cos x \;\text{tg}\, x$$

$$u_1' = \text{sen}\, x \qquad u_1(x) = -\cos x$$

(Procuramos uma solução particular, logo não precisaremos de uma constante de integração aqui.) Em seguida, a partir da Equação 10, obtém-se

$$u_2' = -\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}u_1' = -\frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

Então $$u_2(x) = \text{sen}\, x - \ln(\sec x + \text{tg}\, x)$$

(Observe que $\sec x + \text{tg}\, x > 0$ para $0 < x < \pi/2$.) Portanto

A Figura 5 mostra quatro soluções da equação diferencial do Exemplo 7.

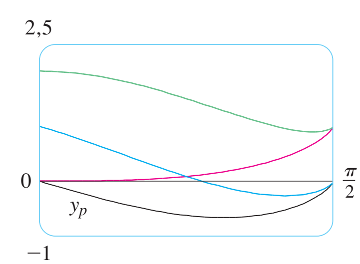


FIGURA 5

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\cos x \operatorname{sen} x + [\operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)] \cos x \\ &= -\cos x \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) \end{aligned}$$

e a solução geral é

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x - \cos x \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

17.2 Exercícios

1–10 Resolva a equação diferencial ou problema de valor inicial usando o método dos coeficientes indeterminados.

1. $y'' - 2y' - 3y = \cos 2x$
2. $y'' - y = x^3 - x$
3. $y'' + 9y = e^{-2x}$
4. $y'' + 2y' + 5y = 1 + e^x$
5. $y'' - 4y' + 5y = e^{-x}$
6. $y'' - 4y' + 4y = x - \operatorname{sen} x$
7. $y'' + y = e^x + x^3, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$
8. $y'' - 4y = e^x \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
9. $y'' - y' = xe^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$
10. $y'' + y' - 2y = x + \operatorname{sen} 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

11–12 Faça o gráfico da solução particular e de várias outras soluções. Que características essas soluções têm em comum?

11. $y'' + 3y' + 2y = \cos x$
12. $y'' + 4y = e^{-x}$

13–18 Escreva uma solução tentativa para o método dos coeficientes indeterminados. Não determine os coeficientes.

13. $y'' + 9y = e^{2x} + x^2 \operatorname{sen} x$
14. $y'' + 9y' = xe^{-x} \cos \pi x$
15. $y'' - 3y' + 2y = e^x + \operatorname{sen} x$
16. $y'' + 3y' - 4y = (x^3 + x)e^x$
17. $y'' + 2y' + 10y = x^2 e^{-x} \cos 3x$
18. $y'' + 4y = e^{3x} + x \operatorname{sen} 2x$

19–22 Resolva a equação diferencial usando (a) coeficientes indeterminados e (b) variação dos parâmetros.

19. $4y'' + y = \cos x$
20. $y'' - 2y' - 3y = x + 2$
21. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$
22. $y'' - y' = e^x$

23–28 Resolva a equação diferencial usando o método da variação dos parâmetros.

23. $y'' + y = \sec^2 x, \ 0 < x < \pi/2$
24. $y'' + y = \sec^3 x, \ 0 < x < \pi/2$
25. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$
26. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$
27. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$
28. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador   1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

17.3 Aplicações de Equações Diferenciais de Segunda Ordem

As equações diferenciais lineares de segunda ordem têm diversas aplicações na ciência e na engenharia. Nesta seção exploraremos dois deles: a vibração de molas e os circuitos elétricos.

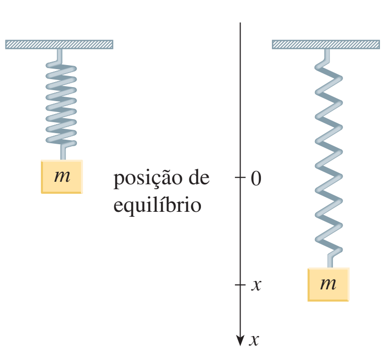


FIGURA 1

Vibração de Molas

Consideremos o movimento de um objeto com massa m na extremidade de uma mola que está na vertical (como na Figura 1) ou na horizontal sobre uma superfície plana (como na Figura 2).

Na Seção 6.4, no Volume I, discutimos a Lei de Hooke, que diz que, se uma mola for esticada (ou comprimida) x unidades a partir de seu tamanho natural, então ela exerce uma força que é proporcional a x:

$$\text{força elástica} = -kx$$

onde k é uma constante positiva (chamada **constante elástica**). Se ignorarmos qualquer força de resistência externa (devido à resistência do ar ou ao atrito), em seguida, pela Segunda Lei de Newton (força é igual a massa vezes aceleração), temos

1 $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \text{ou} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

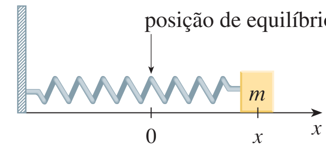


FIGURA 2

Essa é uma equação diferencial linear de segunda ordem. Sua equação auxiliar é $mr^2 + k = 0$ com as raízes $r = \pm\omega i$, onde $\omega = \sqrt{k/m}$. Assim, a solução geral é

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$$

que pode também ser escrita como

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

onde
$$\omega = \sqrt{k/m} \quad \text{(frequência)}$$
$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{(amplitude)}$$
$$\cos \delta = \frac{c_1}{A} \qquad \operatorname{sen} \delta = -\frac{c_2}{A} \quad (\delta \text{ é o ângulo de fase})$$

(Veja o Exercício 17.) Esse tipo de movimento é chamado **movimento harmônico simples**.

EXEMPLO 1 Uma mola com uma massa de 2 kg tem comprimento natural de 0,5 m. Uma força de 25,6 N é necessária para mantê-la esticada até um comprimento de 0,7 m. Se a mola é esticada até um comprimento de 0,7 m e, em seguida, libertada com uma velocidade inicial 0, encontre a posição da massa em qualquer momento t.

SOLUÇÃO Pela Lei de Hooke, a força necessária para estender a mola é

$$k(0{,}2) = 25{,}6$$

e, dessa forma, $k = 25{,}6/0{,}2 = 128$. Usando esse valor da constante da mola k, junto com $m = 2$ na Equação 1, temos

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 128x = 0$$

Como na discussão anterior, a solução dessa equação é

2 $$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t$$

Estamos dando a condição inicial que $x(0) = 0{,}2$. Mas, da Equação 2, $x(0) = c_1$. Portanto, $c_1 = 0{,}2$. Derivando a Equação 2, obtemos

$$x'(t) = -8c_1 \operatorname{sen} 8t + 8c_2 \cos 8t$$

Uma vez que a velocidade inicial é dada como $x'(0) = 0$, temos $c_2 = 0$ e a solução é

$$x(t) = \tfrac{1}{5}\cos 8t$$

Vibrações Amortecidas

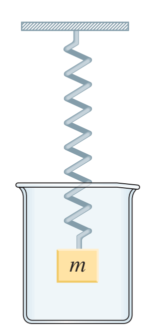


FIGURA 3

A seguir, estudaremos o movimento de uma massa presa a uma mola que está sujeita a uma força de atrito (no caso da mola horizontal da Figura 2) ou a uma força de amortecimento (no caso de uma mola vertical que se movimenta em meio a um fluido, como na Figura 3). Um exemplo é a força de amortecimento fornecida pelo amortecedor em um carro ou uma bicicleta.

Vamos supor que a força de amortecimento seja proporcional à velocidade da massa e atue na direção oposta ao movimento. (Isso foi confirmado, pelo menos aproximadamente, por algumas experiências físicas.) Assim

$$\text{força de amortecimento} = -c\frac{dx}{dt}$$

Schwinn Cycling and Fitness

onde c é uma constante positiva, chamada **constante de amortecimento**. Assim, nesse caso, a Segunda Lei de Newton fornece

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{força restauradora} + \text{força de amortecimento} = -kx - c\frac{dx}{dt}$$

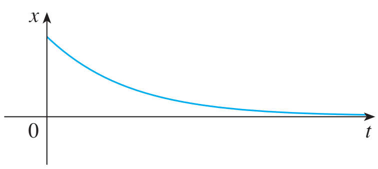
ou

3 $$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0}$$

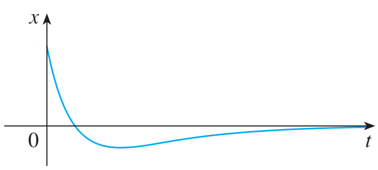
A Equação 3 é uma equação diferencial linear de segunda ordem e sua equação auxiliar é $mr^2 + cr + k = 0$. As raízes são

4 $$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \qquad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

De acordo com a Seção 17.1, precisamos discutir três casos.



(a) Superamortecimento



(b) Amortecimento crítico

FIGURA 4

CASO I $c^2 - 4mk > 0$ **(superamortecimento)**
Nesse caso, r_1 e r_2 são raízes reais distintas e

$$x = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$$

Uma vez que c, m e k são todas positivas, temos $\sqrt{c^2 - 4mk} < c$, logo, as raízes r_1 e r_2 dadas pela Equação 4 devem ser ambas negativas. Isto mostra que $x \to 0$ quando $t \to \infty$. Os gráficos característicos de x como função de t estão mostrados na Figura 4. Observe que não ocorrem oscilações. (É possível que a massa a passe para a posição de equilíbrio uma vez, porém apenas uma vez.) Isso porque $c^2 > 4mk$ significa que há uma forte força de amortecimento (óleo de alta viscosidade ou graxa) comparada com uma mola fraca ou com uma massa pequena.

CASO II $c^2 - 4mk = 0$ **(amortecimento crítico)**
Esse caso corresponde a raízes iguais

$$r_1 = r_2 = -\frac{c}{2m}$$

A solução é dada por

$$x = (c_1 + c_2t)e^{-(c/2m)t}$$

Isto é semelhante ao Caso I, e gráficos típicos são mostrados na Figura 4 (Veja o Exercício 12.), mas o amortecimento é só o suficiente para suprimir as vibrações. Qualquer decréscimo na viscosidade do fluido gera as vibrações do caso seguinte.

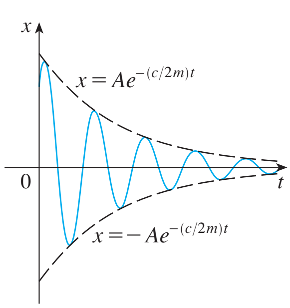


FIGURA 5
Subamortecimento

CASO III $c^2 = 4mk < 0$ **(subamortecimento)**
Aqui, as raízes são complexas:

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{c}{2m} \pm \omega i$$

onde $$\omega = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$$

A solução é dada por

$$x = e^{-(c/2m)t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t)$$

Vemos que há oscilações amortecidas pelo fator $e^{-(c/2m)t}$. Uma vez que $c > 0$ e $m > 0$, temos $-(c/2m) < 0$, logo, $e^{-(c/2m)t} \to 0$ quando $t \to \infty$. Isso implica que $x \to 0$ quando $t \to \infty$; isto é, o movimento decai a 0 à medida que o tempo cresce. Um gráfico característico é mostrado na Figura 5.

EXEMPLO 2 Suponha que a massa do Exemplo 1 esteja imersa em um fluido com constante de amortecimento $c = 40$. Determine a posição da massa em qualquer instante t se ele iniciar da posição de equilíbrio e for dado um empurrão para que a velocidade inicial seja de 0,6 m/s.

SOLUÇÃO Do Exemplo 1, a massa é $m = 2$ e a constante da mola é $k = 128$, logo a equação diferencial $\boxed{3}$ torna-se

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 40\frac{dx}{dt} + 128x = 0$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0$$

A equação auxiliar é $r^2 + 20r + 64 = (r + 4)(r + 16) = 0$ com raízes -4 e -16, logo o movimento é superamortecido e a solução é

$$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2e^{-16t}$$

Temos que $x(0) = 0$, logo $c_1 + c_2 = 0$. Derivando, obtemos

$$x'(t) = -4c_1e^{-4t} - 16c_2e^{-16t}$$

então

$$x'(0) = -4c_1 - 16c_2 = 0{,}6$$

Uma vez que $c_2 = -c_1$, isso nos fornece $12c_1 = 0{,}6$ ou $c_1 = 0{,}05$. Portanto

$$x = 0{,}05(e^{-4t} - e^{-16t})$$

A Figura 6 mostra o gráfico da função posição para o movimento superamortecido do Exemplo 2.

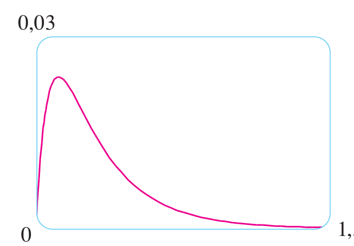


FIGURA 6

Vibrações Forçadas

Suponha que, em adição à força restauradora e à força de amortecimento, o movimento da massa presa à mola seja afetado pela força externa $F(t)$. Então, a Segunda Lei de Newton fornece

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{força restauradora} + \text{força de amortecimento} + \text{força externa}$$

$$= -kx - c\frac{dx}{dt} + F(t)$$

Assim, em lugar da equação homogênea $\boxed{3}$, o movimento da massa é agora governado pela seguinte equação diferencial não homogênea:

5 $$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)}$$

O movimento da massa pode ser determinado pelos métodos da Seção 17.2.

Uma força externa que ocorre comumente é uma função força periódica

$$F(t) = F_0 \cos \omega_0 t \qquad \text{onde} \quad \omega_0 \neq \omega = \sqrt{k/m}$$

Nesse caso, e na falta de uma força de amortecimento ($c = 0$), será pedido no Exercício 9 que você use o método dos coeficientes indeterminados para mostrar que

6 $$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega_0 t$$

Se $\omega_0 = \omega$, então a frequência aplicada reforça a frequência natural e o resultado são vibrações de grande amplitude. Esse é o fenômeno da **ressonância** (veja o Exercício 10).

Circuitos Elétricos

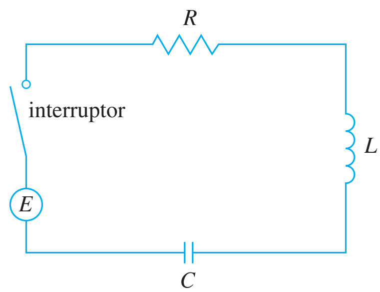


FIGURA 7

Nas Seções 9.3 e 9.5 usamos equações lineares e separáveis de primeira ordem para analisar circuitos elétricos que contêm resistor e indutor (veja a Figura 5 na Seção 9.3 e a Figura 4 na Seção 9.5) ou um resistor e um capacitor (veja o Exercício 29 na Seção 9.5). Agora que sabemos como resolver equações lineares de segunda ordem, estamos em posição de analisar o circuito mostrado na Figura 7, que contém uma força eletromotriz E (proporcionada pela pilha ou gerador), um resistor R, um indutor L e um capacitor C, em série. Se a carga no capacitor no instante t é $Q = Q(t)$, então a corrente é a taxa de variação de Q em relação a t: $I = dQ/dt$. Como na Seção 9.5, é sabido da física que as quedas de voltagem no resistor, indutor e capacitor são dadas por

$$RI \qquad L\frac{dI}{dt} \qquad \frac{Q}{C}$$

respectivamente. A lei de voltagem de Kirchhoff diz que a soma destas quedas de voltagem é igual à voltagem fornecida:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Uma vez que $I = dQ/dt$, essa equação se torna

$$\boxed{L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)} \tag{7}$$

que é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Se a carga Q_0 e a corrente I_0 forem conhecidas no instante 0, então temos as condições iniciais

$$Q(0) = Q_0 \qquad Q'(0) = I(0) = I_0$$

e o problema de valor inicial pode ser resolvido pelos métodos da Seção 17.2.

Uma equação diferencial para a corrente pode ser obtida derivando-se a Equação 7 em relação a t e lembrando que $I = dQ/dt$:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

EXEMPLO 3 Determine a carga e a corrente no instante t no circuito da Figura 7 se $R = 40\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 16 \times 10^{-4}$ F, $E(t) = 100\cos 10t$ e a carga e a corrente inicial forem ambas 0.

SOLUÇÃO Com os valores dados de L, R, C e $E(t)$, a Equação 7 torna-se

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 40\frac{dQ}{dt} + 625Q = 100\cos 10t \tag{8}$$

A equação auxiliar é $r^2 + 40r + 625 = 0$ com raízes

$$r = \frac{-40 \pm \sqrt{-900}}{2} = -20 \pm 15i$$

de modo que a solução da equação complementar é

$$Q_c(t) = e^{-20t}(c_1\cos 15t + c_2 \operatorname{sen} 15t)$$

Para o método dos coeficientes indeterminados, tentamos a solução particular

$$Q_p(t) = A\cos 10t + B\,\text{sen}\,10t$$

Então
$$Q_p'(t) = -10A\,\text{sen}\,10t + 10B\cos 10t$$

$$Q_p''(t) = -100A\cos 10t - 100B\,\text{sen}\,10t$$

Substituindo na Equação 8, temos

$$(-100A\cos 10t - 100B\,\text{sen}\,10t) + 40(-10A\,\text{sen}\,10t + 10B\cos 10t)$$
$$+ 625(A\cos 10t + B\,\text{sen}\,10t) = 100\cos 10t$$

ou
$$(525A + 400B)\cos 10t + (-400A + 525B)\,\text{sen}\,10t = 100\cos 10t$$

Igualando os coeficientes, temos

$$\begin{aligned} 525A + 400B &= 100 \\ -400A + 525B &= 0 \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} 21A + 16B &= 4 \\ -16A + 21B &= 0 \end{aligned}$$

A solução deste sistema é $A = \frac{84}{697}$ e $B = \frac{64}{697}$, logo, uma solução particular é

$$Q_p(t) = \tfrac{1}{697}(84\cos 10t + 64\,\text{sen}\,10t)$$

e a solução geral é

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_c(t) + Q_p(t) \\ &= e^{-20t}(c_1\cos 15t + c_2\,\text{sen}\,15t) + \tfrac{4}{697}(21\cos 10t + 16\,\text{sen}\,10t) \end{aligned}$$

Impondo a condição inicial $Q(0) = 0$, obtemos

$$Q(0) = c_1 + \tfrac{84}{697} = 0 \qquad c_1 = -\tfrac{84}{697}$$

Para impormos a outra condição inicial, primeiro vamos derivar para determinar a corrente:

$$I = \frac{dQ}{dt} = e^{-20t}[(-20c_1 + 15c_2)\cos 15t + (-15c_1 - 20c_2)\,\text{sen}\,15t]$$
$$+ \tfrac{40}{697}(-21\,\text{sen}\,10t + 16\cos 10t)$$

$$I(0) = -20c_1 + 15c_2 + \tfrac{640}{697} = 0 \qquad c_2 = -\tfrac{464}{2\,091}$$

Assim, a fórmula para a carga é

$$Q(t) = \frac{4}{697}\left[\frac{e^{-20t}}{3}(-63\cos 15t - 116\,\text{sen}\,15t) + (21\cos 10t + 16\,\text{sen}\,10t)\right]$$

e a expressão para a corrente é

$$I(t) = \tfrac{1}{2\,091}[e^{-20t}(-1\,920\cos 15t + 13\,060\,\text{sen}\,15t) + 120(-21\,\text{sen}\,10t + 16\cos 10t)]$$

OBSERVAÇÃO 1 No Exemplo 3 a solução para $Q(t)$ consiste em duas partes. Uma vez que $e^{-20t} \to 0$ quando $t \to \infty$ e tanto $\cos 15t$ quanto $\text{sen}\,15t$ são funções limitadas,

$$Q_c(t) = \tfrac{4}{2\,091}e^{-20t}(-63\cos 15t - 116\,\text{sen}\,15t) \to 0 \qquad \text{quando} \quad t \to \infty$$

Logo, para valores grandes de t,

$$Q(t) \approx Q_p(t) = \tfrac{4}{697}(21\cos 10t + 16\,\text{sen}\,10t)$$

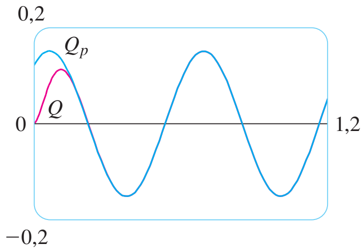


FIGURA 8

$$\boxed{5} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

$$\boxed{7} \quad L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

e, por essa razão, $Q_p(t)$ é denominada **solução estacionária.** A Figura 8 mostra uma comparação entre o gráfico de Q nesse caso e a solução estacionária.

OBSERVAÇÃO 2 Comparando as Equações 5 e 7, vemos que matematicamente elas são idênticas. Isso sugere a analogia dada na tabela a seguir entre situações físicas que, à primeira vista, são muito diferentes.

Sistema de molas		Circuito elétrico	
x	deslocamento	Q	carga
dx/dt	velocidade	$I = dQ/dt$	corrente
m	massa	L	indutância
c	amortecimento constante	R	resistência
k	constante da mola	$1/C$	elastância
$F(t)$	força externa	$E(t)$	força eletromotriz

Podemos também transferir outras ideias de uma situação para outra. Por exemplo, a solução estacionária discutida na Obs. 1 faz sentido no sistema de massa-mola. E o fenômeno da ressonância no sistema de massa-mola pode ser proveitosamente transportado para circuitos elétricos como ressonância elétrica.

17.3 Exercícios

1. Uma mola tem comprimento natural 0,75 m e 5 kg de massa. Uma força de 25 N é necessária para manter a mola esticada até um comprimento de 1 m. Se a mola for esticada para um comprimento de 1,1 m e então solta com velocidade 0, encontre a posição da massa após t segundos.

2. Uma mola com uma massa de 8 kg presa a ela é mantida esticada 0,4 m além de seu comprimento natural por uma força de 32 N. A mola começa em sua posição de equilíbrio com velocidade inicial de 1 m/s. Localize a posição da massa em qualquer momento t.

3. Uma mola presa a uma massa de 2 kg tem uma constante de amortecimento 14 e uma força de 6 N é necessária para manter a mola esticada 0,5 m além de seu comprimento natural. A mola é esticada 1 m além de seu comprimento natural e então é solta com velocidade 0. Localize a posição da massa em qualquer momento t.

4. Uma força de 13 N é necessária para manter uma mola presa a uma massa de 2 kg esticada 0,25 m além de seu comprimento natural. A constante de amortecimento da mola é $c = 8$.

(a) Se a massa começa na posição de equilíbrio com velocidade de 0,5 m/s, encontre a posição no instante t.

(b) Faça o gráfico da função posição da massa.

5. Para a mola do Exercício 3, determine a massa que produziria amortecimento crítico.

6. Para a mola do Exercício 4, determine a constante de amortecimento que produziria amortecimento crítico.

7. Uma mola tem massa de 1 kg e a sua constante de mola é $k = 100$. A mola é liberada em um ponto 0,1 m acima da sua posição de equilíbrio. Faça os gráficos da função posição para os seguintes valores da constante de amortecimento c: 10, 15, 20, 25, 30. Que tipo de amortecimento ocorre em cada caso?

8. A mola tem uma massa de 1 kg e a sua constante de amortecimento é $c = 10$. A mola começa a partir da sua posição de equilíbrio a uma velocidade de 1 m/s. Faça os gráficos da função posição para os seguintes valores da constante de mola k: 10, 20, 25, 30, 40. Que tipo de amortecimento ocorre em cada caso?

9. Suponha que uma mola tenha uma massa m e constante de mola k e seja $\omega = \sqrt{k/m}$. Suponha uma constante de amortecimento tão pequena que a força de amortecimento seja desprezível. Se uma força externa $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$ for aplicada, onde $\omega_0 \neq \omega$, use o método dos coeficientes indeterminados para mostrar que o movimento da massa é descrito pela Equação 6.

10. Como no Exercício 9, considere uma mola com uma massa m, constante da mola k e constante de amortecimento $c = 0$, e seja $\omega = \sqrt{k/m}$. Se uma força externa $F(t) = F_0 \cos \omega t$ for aplicada (a frequência aplicada é igual à frequência natural), use o método dos coeficientes indeterminados para mostrar que o movimento da massa é dado por

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + F_0/2m\omega t \operatorname{sen} \omega t$$

11. Mostre que se $\omega_0 \neq \omega$, mas ω/ω_0 é um número racional, então o movimento descrito pela Equação 6 é periódico.

12. Considere uma massa presa a uma mola sujeita a uma força de atrito ou de amortecimento.

(a) No caso de amortecimento crítico, o movimento é dado por $x = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$. Mostre que o gráfico de x cruza o eixo t sempre que c_1 e c_2 tiverem sinais opostos.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador   **1.** As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

(b) No caso de superamortecimento, o movimento é dado por $x = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$, onde $r_1 > r_2$. Determine uma condição sobre os módulos relativos de c_1 e c_2 sob a qual o gráfico de x cruza o eixo t para um valor positivo de t.

13. Um circuito em série consiste em um resistor com $R = 20\ \Omega$, um indutor com $L = 1$ H, um capacitor com $C = 0{,}002$ F, e uma pilha de 12 V. Se a carga inicial e a corrente forem 0, encontre a carga e a corrente no instante t.

14. Um circuito em série contém um resistor com $R = 24\ \Omega$, um indutor com $L = 2$ H, um capacitor com $C = 0{,}005$ F e uma pilha de 12 V. A carga inicial é $Q = 0{,}001\ C$ e a corrente inicial é 0.

(a) Determine a carga e a corrente no instante t.

(b) Faça o gráfico das funções carga e corrente.

15. A pilha no Exercício 13 é substituída por um gerador produzindo uma voltagem de $E(t) = 12 \operatorname{sen} 10t$. Determine a carga no instante t.

16. A pilha no Exercício 14 é substituída por um gerador produzindo uma voltagem de $E(t) = 12 \operatorname{sen} 10t$.

(a) Determine a carga no instante t.

(b) Faça o gráfico da função carga.

17. Verifique se a solução para a Equação 1 pode ser escrita na forma $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$.

18. A figura exibe um pêndulo com comprimento L e o ângulo θ a partir da vertical do pêndulo. Pode ser mostrado que θ, como uma função do tempo, satisfaz a equação diferencial não linear

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0$$

onde g é a aceleração da gravidade. Para valores pequenos de θ podemos usar a aproximação linear $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ e então a equação diferencial se torna linear.

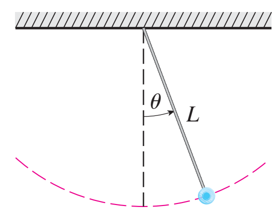
(a) Determine a equação do movimento de um pêndulo com comprimento 1 m se θ é inicialmente 0,2 rad e a velocidade angular inicial é $d\theta/dt = 1$ rad/s.

(b) Qual o ângulo máximo a partir da vertical?

(c) Qual o período do pêndulo (isto é, o tempo necessário para uma oscilação completa)?

(d) Quando o pêndulo estará pela primeira vez na vertical?

(e) Qual a velocidade angular do pêndulo quando ele está na vertical?



17.4 Soluções em Séries

Muitas equações diferenciais não podem ser resolvidas explicitamente em termos de combinações finitas de funções usuais simples. Isso é verdade mesmo para uma equação com aparência bem simples, como

1 $$y'' - 2xy' + y = 0$$

Todavia, é importante poder resolver equações como a que foi dada acima, pois elas surgem de problemas físicos, especialmente em conexão com a equação de Schrödinger na mecânica quântica. Em tais casos, vamos usar o método das séries de potência, isto é, procuraremos por uma solução da forma

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

O método é substituir essa expressão na equação diferencial e determinar os valores dos coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots$. Essa técnica assemelha-se ao método dos coeficientes indeterminados, discutido na Seção 17.2.

Antes de usarmos as séries de potências para resolver a Equação 1, ilustraremos o método com uma equação mais simples, $y'' + y = 0$, no Exemplo 1. Realmente já sabemos como resolver essa equação pelas técnicas da Seção 17.1, contudo é mais fácil entender o método das séries de potências quando ele é aplicado a essa equação mais simples.

EXEMPLO 1 Use séries de potências para resolver a equação $y'' + y = 0$.

SOLUÇÃO Vamos supor que haja uma solução da forma

2 $$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Escrevendo os primeiros termos de $\boxed{4}$, você verá que são iguais a $\boxed{3}$. Para obtermos $\boxed{4}$, substituímos n por $n + 2$ e começamos a somatória em 0 em vez de 2

Podemos derivar a série de potências termo a termo. Assim

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

3 $$y'' = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 x + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

A fim de compararmos as expressões de y e y'' mais facilmente, reescrevemos y'' como segue:

4 $$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n$$

Substituindo as expressões nas Equações 2 e 4 na equação diferencial, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

ou

5 $$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n] x^n = 0$$

Se duas séries de potências são iguais, então os coeficientes correspondentes devem ser iguais. Portanto, os coeficientes de x^n da Equação 5 devem ser 0:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n = 0$$

6 $$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+1)(n+2)} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

A Equação 6 é chamada *relação de recorrência*. Se c_0 e c_1 forem conhecidos, essa equação nos permite determinar os coeficientes restantes recursivamente, usando $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ em sucessão.

Usando $n = 0$: $\quad c_2 = -\dfrac{c_0}{1 \cdot 2}$

Usando $n = 1$: $\quad c_3 = -\dfrac{c_1}{2 \cdot 3}$

Usando $n = 2$: $\quad c_4 = -\dfrac{c_2}{3 \cdot 4} = \dfrac{c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \dfrac{c_0}{4!}$

Usando $n = 3$: $\quad c_5 = -\dfrac{c_3}{4 \cdot 5} = \dfrac{c_1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \dfrac{c_1}{5!}$

Usando $n = 4$: $\quad c_6 = -\dfrac{c_4}{5 \cdot 6} = -\dfrac{c_0}{4!\, 5 \cdot 6} = -\dfrac{c_0}{6!}$

Usando $n = 5$: $\quad c_7 = -\dfrac{c_5}{6 \cdot 7} = -\dfrac{c_1}{5!\, 6 \cdot 7} = -\dfrac{c_1}{7!}$

Agora, já percebemos o seguinte padrão:

Para os coeficientes pares, $\quad c_{2n} = (-1)^n \dfrac{c_0}{(2n)!}$

Para os coeficientes ímpares, $\quad c_{2n+1} = (-1)^n \dfrac{c_1}{(2n+1)!}$

Colocando esses valores na Equação 2, escrevemos a solução como

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \cdots \\ &= c_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) \\ &\qquad + c_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right) \\ &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Observe que há duas constantes arbitrárias, c_0 e c_1.

OBSERVAÇÃO 1 Reconhecemos as séries obtidas no Exemplo 1 como as séries de Maclaurin para cos x e sen x. (Veja as Equações 11.10.16 e 11.10.15.) Portanto, podemos escrever a solução como

$$y(x) = c_0 \cos x + c_1 \operatorname{sen} x$$

Entretanto, em geral não somos capazes de expressar soluções das equações diferenciais em séries de potências em termos de funções conhecidas.

EXEMPLO 2 Resolva $y'' - 2xy' + y = 0$.

SOLUÇÃO Vamos supor que haja uma solução da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Então
$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

e
$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n$$

como no Exemplo 1. Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - 2x \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-1)c_n]x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2nc_n x^n$$

Essa equação estará satisfeita se o coeficiente de x^n for 0:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-1)c_n = 0$$

7 $$c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)} c_n \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Resolvemos essa relação de recursão usando $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sucessivamente na Equação 7:

Usando $n = 0$: $\quad c_2 = \dfrac{-1}{1 \cdot 2} c_0$

Usando $n = 1$: $\quad c_3 = \dfrac{1}{2 \cdot 3} c_1$

$$\text{Usando } n = 2: \qquad c_4 = \frac{3}{3 \cdot 4} c_2 = -\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} c_0 = -\frac{3}{4!} c_0$$

$$\text{Usando } n = 3: \qquad c_5 = \frac{5}{4 \cdot 5} c_3 = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} c_1 = \frac{1 \cdot 5}{5!} c_1$$

$$\text{Usando } n = 4: \qquad c_6 = \frac{7}{5 \cdot 6} c_4 = -\frac{3 \cdot 7}{4!\, 5 \cdot 6} c_0 = -\frac{3 \cdot 7}{6!} c_0$$

$$\text{Usando } n = 5: \qquad c_7 = \frac{9}{6 \cdot 7} c_5 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{5!\, 6 \cdot 7} c_1 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!} c_1$$

$$\text{Usando } n = 6: \qquad c_8 = \frac{11}{7 \cdot 8} c_6 = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!} c_0$$

$$\text{Usando } n = 7: \qquad c_9 = \frac{13}{8 \cdot 9} c_7 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!} c_1$$

Em geral, os coeficientes pares são dados por

$$c_{2n} = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (4n - 5)}{(2n)!} c_0$$

e os coeficientes ímpares são dados por

$$c_{2n+1} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n - 3)}{(2n + 1)!} c_1$$

A solução é

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots \\ &= c_0 \left(1 - \frac{1}{2!} x^2 - \frac{3}{4!} x^4 - \frac{3 \cdot 7}{6!} x^6 - \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!} x^8 - \cdots \right) \\ &\quad + c_1 \left(x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1 \cdot 5}{5!} x^5 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!} x^7 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!} x^9 + \cdots \right) \end{aligned}$$

ou

$$\boxed{8} \qquad \begin{aligned} y &= c_0 \left(1 - \frac{1}{2!} x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n - 5)}{(2n)!} x^{2n} \right) \\ &\quad + c_1 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n - 3)}{(2n + 1)!} x^{2n+1} \right) \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO 2 No Exemplo 2, *supusemos* que a equação diferencial tivesse uma solução em série. Mas agora podemos verificar diretamente que a função dada pela Equação 8 é de fato uma solução.

OBSERVAÇÃO 3 Ao contrário da situação do Exemplo 1, as séries de potências que surgem na solução do Exemplo 2 não definem funções elementares. As funções

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2!} x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n - 5)}{(2n)!} x^{2n}$$

e

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n - 3)}{(2n + 1)!} x^{2n+1}$$

são perfeitamente boas, entretanto não podem ser expressas em termos de funções familiares. Podemos usar essas expressões em série de potência de y_1 e y_2 para calcular os valores aproximados das funções e até mesmo seus gráficos. A Figura 1 mostra as primeiras somas parciais $T_0, T_2, T_4, \ldots$ (polinômios de Taylor) para $y_1(x)$, e vemos como eles convergem para y_1. Dessa maneira, podemos fazer ambos os gráficos de y_1 e y_2 na Figura 2.

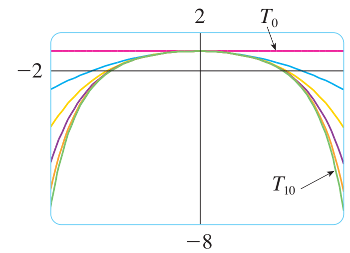


FIGURA 1

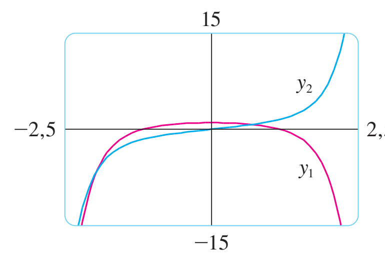


FIGURA 2

OBSERVAÇÃO 4 Se nos pedirem para resolver o problema de valor inicial

$$y'' - 2xy' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

devemos observar, do Teorema 11.10.5, que

$$c_0 = y(0) = 0 \qquad c_1 = y'(0) = 1$$

Isso simplificaria os cálculos no Exemplo 2, uma vez que todos os coeficientes pares seriam 0. A solução para o problema de valor inicial é

$$y(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

17.4 Exercícios

1–11 Use séries de potências para resolver a equação diferencial.

1. $y' - y = 0$
2. $y' = xy$
3. $y' = x^2y$
4. $(x-3)y' + 2y = 0$
5. $y'' + xy' + y = 0$
6. $y'' = y$
7. $(x-1)y'' + y' = 0$
8. $y'' = xy$
9. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
10. $y'' + x^2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
11. $y'' + x^2y' + xy = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

12. A solução do problema de valor inicial

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

é chamada função de Bessel de ordem 0.

(a) Resolva o problema de valor inicial para determinar uma expansão em série de potências da função de Bessel.

(b) Faça o gráfico de vários polinômios de Taylor até atingir um que pareça uma boa aproximação para a função de Bessel no intervalo $[-5, 5]$.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

17 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) Escreva a forma geral de uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes.
(b) Escreva a equação auxiliar.
(c) Como você usaria as raízes da equação auxiliar para resolver a equação diferencial? Escreva a forma da solução para cada um dos três casos que podem ocorrer.

2. (a) O que é um problema de valor inicial para uma equação diferencial de segunda ordem?
(b) O que é o problema de contorno para tal equação?

3. (a) Escreva a forma geral de uma equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea com coeficientes constantes.
(b) O que é a equação complementar? Como ela pode ajudar a resolver a equação diferencial original?
(c) Explique o funcionamento do método dos coeficientes indeterminados.
(d) Explique o funcionamento do método da variação dos parâmetros.

4. Discuta duas aplicações das equações diferenciais lineares de segunda ordem.

5. Como você usaria as séries de potência para resolver uma equação diferencial?

Testes Verdadeiro-Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se y_1 e y_2 forem soluções de $y'' + y = 0$, então $y_1 + y_2$ também é uma solução da equação.

2. Se y_1 e y_2 forem soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é uma solução da equação.

3. A solução geral de $y'' - y = 0$ pode ser escrita como

$$y = c_1 \cosh x + c_2 \operatorname{senh} x$$

4. A equação $y'' - y = e^x$ tem uma solução particular da forma

$$y_p = Ae^x$$

Exercícios

1–10 Resolva a equação diferencial.

1. $4y'' - y = 0$

2. $y'' - 2y' + 10y = 0$

3. $y'' + 3y = 0$

4. $4y'' + 4y' + y = 0$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = e^{2x}$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = x^2$

7. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = x \cos x$

8. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = \operatorname{sen} 2x$

9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 6y = 1 + e^{-2x}$

10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cossec} x, \quad 0 < x < \pi/2$

11–14 Resolva o problema de valor inicial.

11. $y'' + 6y' = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 12$

12. $y'' - 6y' + 25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

13. $y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

14. $9y'' + y = 3x + e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

15–16 Resolva o problema de contorno, se possível.

15. $y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1$

16. $y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -e^{-2\pi}$

17. Use séries de potências para resolver o problema de valor inicial.

$$y'' + xy' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

18. Use a série de potência para resolver a equação

$$y'' - xy' - 2y = 0$$

19. Um circuito em série contém um resistor com $R = 40\ \Omega$, um indutor com $L = 2$ H, um capacitor com $C = 0{,}0025$ F, e uma pilha de 12 V. A carga inicial é $Q = 0{,}01$ C e a corrente inicial é 0. Encontre a carga no instante t.

20. Uma mola com uma massa de 2 kg presa a ela tem uma constante de amortecimento 16 e uma força de 12,8 N mantém a mola esticada 0,2 m além de seu comprimento original. Determine a posição da massa no instante t se ela iniciar na posição de equilíbrio com velocidade de 2,4 m/s.

21. Suponha que a Terra seja uma esfera sólida de densidade uniforme com massa M e raio $R = 6\,370$ km. Para uma partícula de massa m a uma distância r a partir do centro da Terra, a força gravitacional que atrai a partícula para o centro é

$$F_r = \frac{-GM_r m}{r^2}$$

onde G é a constante gravitacional e M_r é a massa de Terra dentro de uma esfera de raio r.

(a) Mostre que $F_r = \dfrac{-GMm}{R^3} r$.

(b) Suponha que um buraco seja perfurado na Terra ao longo de um diâmetro. Mostre que, se uma partícula de massa m cair a partir do repouso da superfície para dentro do buraco, então a distância $y = y(t)$ da partícula a partir do centro da Terra no instante t é dada por

$$y''(t) = -k^2 y(t)$$

onde $k^2 = GM/R^3 = g/R$.

(c) Conclua, a partir da parte (b), que a partícula está submetida a um movimento harmônico simples. Encontre o período T.

(d) Com que velocidade a partícula passa pelo centro da Terra?