

Sumário

Prefácio	xi
Testes de Verificação	xxi
Uma Apresentação do Cálculo	xxvii

9 Equações Diferenciais 525

9.1	Modelagem com Equações Diferenciais	526
9.2	Campos de Direções e Método de Euler	531
9.3	Equações Separáveis	538
	Projeto Aplicado ■ Quanto Rapidamente um Tanque Esvazia?	546
	Projeto Aplicado ■ O Que É Mais Rápido, Subir ou Descer?	547
9.4	Modelos para Crescimento Populacional	548
9.5	Equações Lineares	557
9.6	Sistemas Predador-Presa	563
	Revisão	569
	Problemas Quentes	572



10 Equações Paramétricas e Coordenadas Polares 575

10.1	Curvas Definidas por Equações Paramétricas	576
	Projeto de Laboratório ■ Rolando Círculos ao Redor de Círculos	583
10.2	Cálculo com Curvas Parametrizadas	584
	Projeto de Laboratório ■ Curvas de Bézier	591
10.3	Coordenadas Polares	592
	Projeto de Laboratório ■ Famílias de Curvas Polares	601
10.4	Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares	602
10.5	Seções Cônicas	606
10.6	Seções Cônicas em Coordenadas Polares	613
	Revisão	619
	Problemas Quentes	621



11 Sequências e Séries Infinitas 623

11.1	Sequências	624
	Projeto de Laboratório ■ Sequências Logísticas	635
11.2	Séries	636
11.3	O Teste da Integral e Estimativas de Somas	645
11.4	Os Testes de Comparação	652
11.5	Séries Alternadas	657
11.6	Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz	661
11.7	Estratégia para Testes de Séries	667



11.8	Séries de Potência	669
11.9	Representações de Funções como Séries de Potências	674
11.10	Séries de Taylor e Maclaurin	679
	Projeto de Laboratório ■ Um Limite Elusivo	691
	Projeto Escrito ■ Como Newton Descobriu a Série Binomial	691
11.11	Aplicações dos Polinômios de Taylor	692
	Projeto Aplicado ■ Radiação Proveniente das Estrelas	700
	Revisão	701
	Problemas Quentes	703

12 Vetores e a Geometria do Espaço 707

12.1	Sistemas de Coordenadas Tridimensionais	708
12.2	Vetores	713
12.3	O Produto Escalar	721
12.4	O Produto Vetorial	727
	Projeto de Descoberta ■ A Geometria de um Tetraedro	734
12.5	Equações de Retas e Planos	735
	Projeto de Laboratório ■ Colocando 3D em Perspectiva	743
12.6	Cilindros e Superfícies Quádricas	744
	Revisão	750
	Problemas Quentes	752



13 Funções Vetoriais 755

13.1	Funções Vetoriais e Curvas Espaciais	756
13.2	Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais	763
13.3	Comprimento de Arco e Curvatura	768
13.4	Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração	776
	Projeto Aplicado ■ Leis de Kepler	785
	Revisão	786
	Problemas Quentes	789



14 Derivadas Parciais 791

14.1	Funções de Várias Variáveis	792
14.2	Limites e Continuidade	804
14.3	Derivadas Parciais	811
14.4	Planos Tangentes e Aproximações Lineares	823
14.5	A Regra da Cadeia	831
14.6	Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente	839
14.7	Valores Máximo e Mínimo	850
	Projeto Aplicado ■ Projeto de uma Caçamba	858
	Projeto de Descoberta ■ Aproximações Quadráticas e Pontos Críticos	859
14.8	Multiplicadores de Lagrange	860
	Projeto Aplicado ■ Ciência dos Foguetes	866
	Projeto Aplicado ■ Otimização de uma Turbina Hidráulica	867
	Revisão	868
	Problemas Quentes	871





15 Integrais Múltiplas 873

- 15.1 Integrais Duplas sobre Retângulos 874
 - 15.2 Integrais Iteradas 882
 - 15.3 Integrais Duplas sobre Regiões Gerais 887
 - 15.4 Integrais Duplas em Coordenadas Polares 895
 - 15.5 Aplicações de Integrais Duplas 901
 - 15.6 Área de Superfície 910
 - 15.7 Integrais Triplas 913
 - Projeto de Descoberta ■ Volumes de Hiperesferas 922
 - 15.8 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas 922
 - Projeto de Laboratório ■ A Intersecção de Três Cilindros 926
 - 15.9 Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas 927
 - Projeto Aplicado ■ Corrida na Rampa 933
 - 15.10 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas 933
 - Revisão 941
- Problemas Quentes 944



16 Cálculo Vetorial 947

- 16.1 Campos Vetoriais 948
 - 16.2 Integrais de Linha 954
 - 16.3 O Teorema Fundamental das Integrais de Linha 963
 - 16.4 Teorema de Green 971
 - 16.5 Rotacional e Divergente 977
 - 16.6 Superfícies Parametrizadas e suas Áreas 983
 - 16.7 Integrais de Superfície 993
 - 16.8 Teorema de Stokes 1003
 - Projeto Aplicado ■ Três Homens e Dois Teoremas 1007
 - 16.9 O Teorema do Divergente 1008
 - 16.10 Resumo 1013
 - Revisão 1014
- Problemas Quentes 1016



17 Equações Diferenciais de Segunda Ordem 1019

- 17.1 Equações Lineares de Segunda Ordem 1020
- 17.2 Equações Lineares Não Homogêneas 1026
- 17.3 Aplicações de Equações Diferenciais de Segunda Ordem 1032
- 17.4 Soluções em Séries 1039
 - Revisão 1043

Apêndices A1

- A Números, Desigualdades e Valores Absolutos A2
- B Geometria Analítica e Retas A9
- C Gráficos de Equações de Segundo Grau A14
- D Trigonometria A21
- E Notação de Somatória (Ou Notação Sigma) A30
- F Demonstrações dos Teoremas A35

G	O Logaritmo Definido como uma Integral	A44
H	Números Complexos	A51
I	Respostas para os Exercícios Ímpares	A58

Índice Remissivo I1

Volume I

Capítulo 1	Funções e Modelos
Capítulo 2	Limites e Derivadas
Capítulo 3	Regras de Derivação
Capítulo 4	Aplicações de Derivação
Capítulo 5	Integrais
Capítulo 6	Aplicações de Integração
Capítulo 7	Técnicas de Integração
Capítulo 8	Mais Aplicações de Integração

16

Cálculo Vetorial

Superfícies parametrizadas, estudadas na Seção 16.6, são frequentemente utilizadas por programadores na criação de filmes de animação. Nesta cena de *FormiguinhaZ*, Princesa Bala está prestes a tentar resgatar Z, que está preso em uma gota de orvalho. A superfície parametrizada representa a gota de orvalho, e uma família de tais superfícies descreve o seu movimento. Um dos programadores para este filme disse: "Eu gostaria de ter prestado mais atenção na aula de cálculo, quando estávamos estudando superfícies parametrizadas. Com certeza me ajudaria hoje."



Dreamworks/Photofest

Neste capítulo, estudaremos os cálculos de campos vetoriais. (Estes são as funções que associam vetores a pontos no espaço.) Em particular, definiremos integrais de linha (que podem ser usadas para encontrar o trabalho realizado por um campo de força para mover um objeto ao longo de uma curva). Em seguida, definiremos integrais de superfície (que podem ser usadas para encontrar a taxa de fluxo do fluido através de uma superfície). As conexões entre esses novos tipos de integrais e as integrais unidimensionais, duplas e triplas que já vimos são dadas por versões em maior dimensão do Teorema Fundamental do Cálculo: Teorema de Green, Teorema de Stokes e o Teorema do Divergente.

16.1 Campos Vetoriais

Os vetores da Figura 1 representam os vetores velocidade do ar e indicam a velocidade escalar, a direção e o sentido do vento em pontos a 10 m da superfície, na área da Baía de São Francisco. Nós vemos num relance a partir das maiores setas na parte (a) que as velocidades do vento maiores naquele tempo ocorreram quando entraram na baía do outro lado da Ponte Golden Gate. A parte (b) mostra o padrão de vento muito diferente 12 horas antes. Associado a cada ponto do ar, podemos imaginar um vetor velocidade do vento. Este é um exemplo de *campo vetorial de velocidade*.

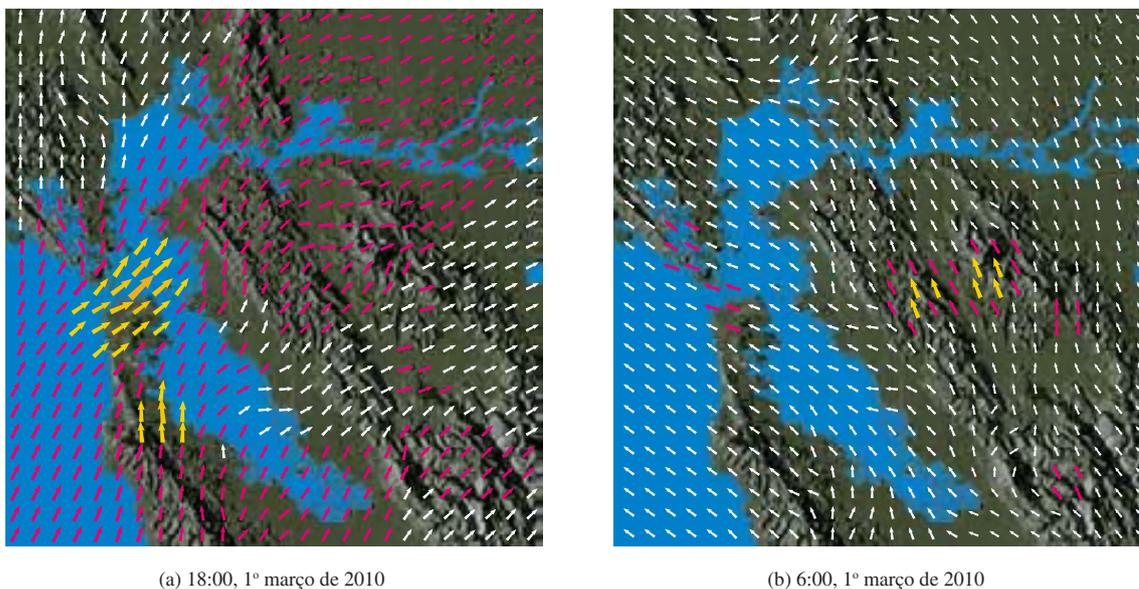


FIGURA 1 Campos vetoriais de velocidade mostrando aspectos do vento na Baía de São Francisco

Outros exemplos de campos vetoriais de velocidade estão ilustrados na Figura 2: correntes oceânicas e do fluxo passando por um aerofólio.

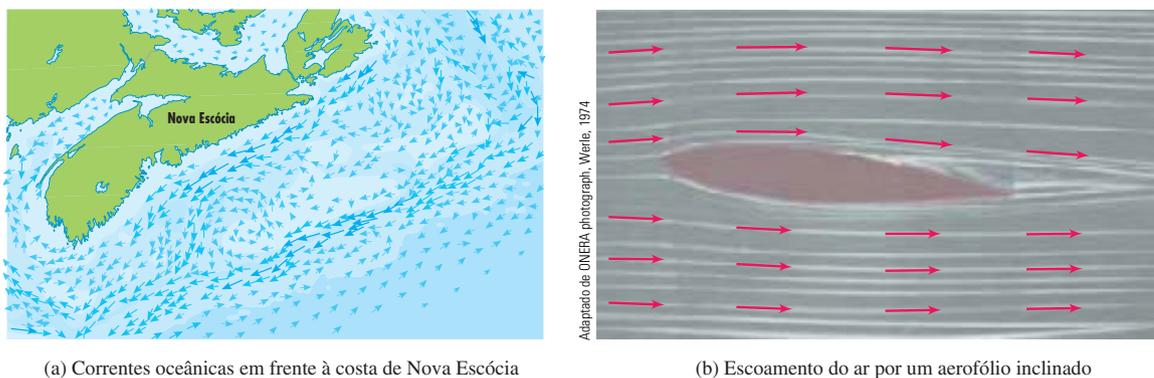


FIGURA 2 Campos vetoriais de velocidade

Outro tipo de campo vetorial, chamado *campo de força*, associa um vetor força a cada ponto da região. Um exemplo é o campo de força gravitacional que examinaremos no Exemplo 4.

Em geral, um campo vetorial é uma função cujo domínio é um conjunto de pontos de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3) e cuja imagem é um conjunto de vetores em V_2 (ou V_3).

1 Definição Seja D um conjunto em \mathbb{R}^2 (uma região plana). Um **campo vetorial em \mathbb{R}^2** é uma função \mathbf{F} que associa a cada ponto (x, y) em D um vetor bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$.

A melhor maneira de enxergar um campo vetorial é desenhar a seta representando o vetor $\mathbf{F}(x, y)$ começando no ponto (x, y) . É claro que é impossível fazer isso para todos os pontos (x, y) , mas podemos visualizar \mathbf{F} fazendo isso para alguns pontos representativos em D , como na Figura 3. Uma vez que $\mathbf{F}(x, y)$ é um vetor bidimensional, podemos escrevê-lo em termos de suas **funções componentes** P e Q da seguinte forma:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$$

ou, de forma mais compacta, $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$

Observe que P e Q são funções escalares de duas variáveis e são chamadas, algumas vezes, **campos escalares**, para distingui-los dos campos vetoriais.

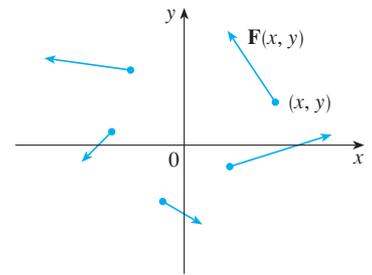


FIGURA 3
Campo vetorial em \mathbb{R}^2

2 Definição Seja E um subconjunto de \mathbb{R}^3 . Um **campo vetorial em \mathbb{R}^3** é uma função \mathbf{F} que associa a cada ponto (x, y, z) em E um vetor tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$.

Um campo vetorial \mathbf{F} em \mathbb{R}^3 está ilustrado na Figura 4. Podemos escrevê-lo em termos das funções componentes P, Q e R como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$$

Como nas funções vetoriais na Seção 13.1, podemos definir a continuidade dos campos vetoriais e mostrar que \mathbf{F} será contínua se e somente se suas funções componentes P, Q e R forem contínuas.

Às vezes identificamos um ponto (x, y, z) com seu vetor posição $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ e escrevemos $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ em vez de $\mathbf{F}(x, y, z)$. Então \mathbf{F} se torna uma função que associa um vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ a um vetor \mathbf{x} .

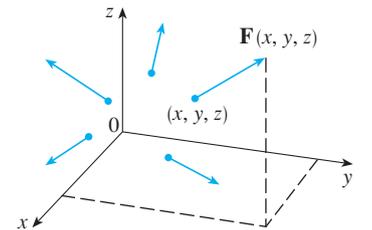


FIGURA 4
Campo vetorial em \mathbb{R}^3

EXEMPLO 1 Um campo vetorial em \mathbb{R}^2 é definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j}$. Descreva \mathbf{F} esboçando alguns dos vetores $\mathbf{F}(x, y)$ como na Figura 3.

SOLUÇÃO Uma vez que $\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$, desenhamos o vetor $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ começando no ponto $(1, 0)$ na Figura 5. Uma vez que $\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{i}$, desenhamos o vetor $\langle -1, 0 \rangle$ com ponto inicial $(0, 1)$. Continuando desta maneira, podemos calcular vários outros valores representativos de $\mathbf{F}(x, y)$ na tabela e extrair os vetores correspondentes para representar o campo vetorial na Figura 5.

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1 \rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1 \rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2 \rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2 \rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3 \rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3 \rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0 \rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0 \rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2 \rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2 \rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0 \rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0 \rangle$

Na Figura 5, parece que cada seta é tangente a um círculo com centro na origem. Para confirmarmos isso, vamos tomar o produto escalar do vetor posição $\mathbf{x} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$ com o vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y)$:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) \cdot (-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}) = -xy + yx = 0$$

Isso mostra que $\mathbf{F}(x, y)$ é perpendicular ao vetor posição $\langle x, y \rangle$ e, portanto, tangente ao círculo com centro na origem e raio $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Observe também que

$$|\mathbf{F}(x, y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\mathbf{x}|$$

de modo que o comprimento do vetor $\mathbf{F}(x, y)$ é igual ao raio do círculo.

Alguns sistemas de computação algébrica são capazes de traçar um campo vetorial em duas ou três dimensões. Eles fornecem melhor visualização do campo que o esboço feito à mão, pois o computador pode desenhar grande número de vetores representativos. A Figura 6 apresenta uma saída de computador para o campo vetorial do Exemplo 1; as Figuras 7 e 8 mostram outros dois campos vetoriais. Observe que o computador muda a escala de

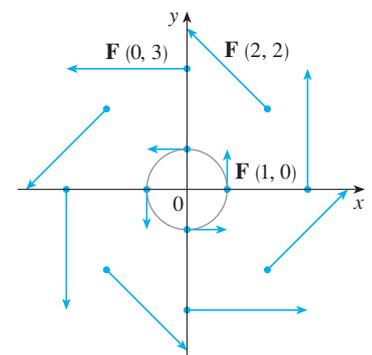


FIGURA 5
 $\mathbf{F}(x, y) = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j}$

comprimento do vetor para que ele não fique comprido demais, embora ainda seja proporcional ao verdadeiro comprimento.

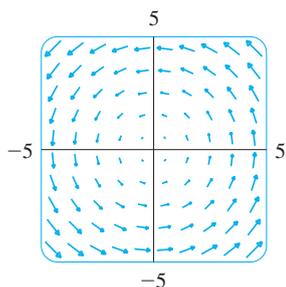


FIGURA 6
 $F(x, y) = \langle -y, x \rangle$

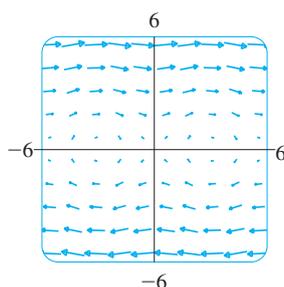


FIGURA 7
 $F(x, y) = \langle y, \text{sen } x \rangle$

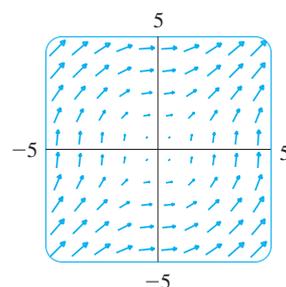


FIGURA 8
 $F(x, y) = \langle \ln(1 + y^2), \ln(1 + x^2) \rangle$

EXEMPLO 2 Esboce o campo vetorial em \mathbb{R}^3 dado por $F(x, y, z) = z \mathbf{k}$.

SOLUÇÃO O desenho está mostrado na Figura 9. Observe que todos os vetores são verticais, apontando para cima, quando acima do plano xy ou para baixo, quando abaixo do plano xy . O comprimento aumenta à medida que nos distanciamos do plano xy .

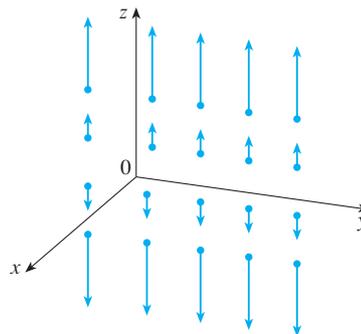


FIGURA 9
 $F(x, y, z) = z \mathbf{k}$

Somos capazes de desenhar o campo vetorial do Exemplo 2 à mão, pois ele é especialmente simples. A maioria dos campos vetoriais tridimensionais, no entanto, são virtualmente impossíveis de serem desenhados à mão e, por isso, precisamos recorrer a um sistema de computação algébrica. Exemplos são mostrados nas Figuras 10, 11 e 12. Observe que os campos vetoriais nas Figuras 10 e 11 têm fórmulas semelhantes, mas todos os vetores na Figura 11 apontam na direção geral do eixo negativo y porque seus componentes y são todos -2 . Se o campo vetorial na Figura 12 representa um campo de velocidades, então uma partícula seria levada para cima e iria espiralar em torno do eixo z no sentido horário quando visto de cima.

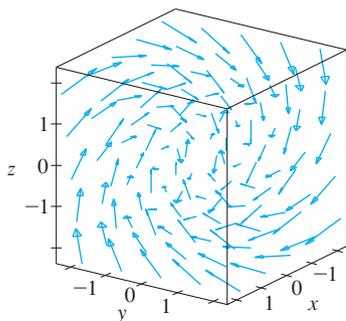


FIGURA 10
 $F(x, y, z) = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$

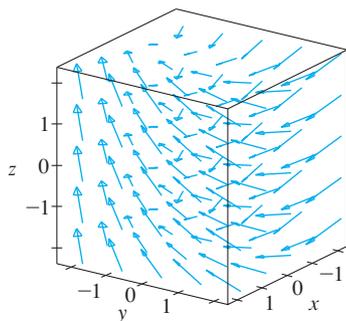


FIGURA 11
 $F(x, y, z) = y \mathbf{i} - 2 \mathbf{j} + x \mathbf{k}$

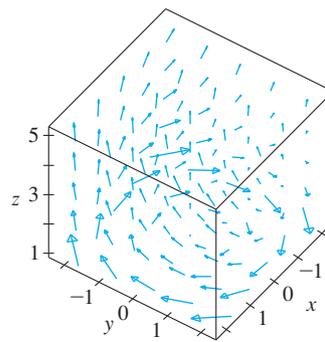


FIGURA 12
 $F(x, y, z) = \frac{y}{z} \mathbf{i} - \frac{x}{z} \mathbf{j} + \frac{z}{4} \mathbf{k}$

EXEMPLO 3 Imagine um líquido escoando uniformemente em um cano e seja $\mathbf{V}(x, y, z)$ o vetor velocidade em um ponto (x, y, z) . Então \mathbf{V} associa um vetor a cada ponto (x, y, z) de certo domínio E (interior do cano) e assim, \mathbf{V} é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 chamado **campo de velocidade**. Um possível campo de velocidade é ilustrado na Figura 13. A velocidade em qualquer ponto é indicada pelo comprimento da seta.

Campos de velocidade ocorrem em outras áreas da física. Por exemplo: o campo vetorial do Exemplo 1 pode ser usado como o campo de velocidade descrevendo a rotação no sentido anti-horário de uma roda. Vimos outros exemplos de campo de velocidade nas Figuras 1 e 2.

EXEMPLO 4 A Lei da Gravação de Newton afirma que a intensidade da força gravitacional entre dois objetos com massas m e M é

$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2}$$

onde r é a distância entre os objetos e G é a constante gravitacional. (Este é um exemplo de uma lei inversa da raiz quadrada.) Vamos supor que o objeto com massa M esteja localizado na origem em \mathbb{R}^3 . (Por exemplo, M pode ser a massa da Terra e a origem estaria em seu centro.) Seja o vetor posição do objeto com massa m $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$. Então $r = |\mathbf{x}|$, logo, $r^2 = |\mathbf{x}|^2$. A força gravitacional exercida nesse segundo objeto age em direção à origem e o vetor unitário em sua direção é

$$-\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

Portanto, a força gravitacional agindo no objeto em $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

[Os físicos usam frequentemente a notação \mathbf{r} ao invés de \mathbf{x} para o vetor posição, então você pode ver a Fórmula 3 escrita na forma $\mathbf{F} = -(mMG/r^3)\mathbf{r}$.] A função dada pela Equação 3 é um exemplo de campo vetorial, chamado **campo gravitacional**, porque associa um vetor [a força $\mathbf{F}(\mathbf{x})$] a cada ponto \mathbf{x} do espaço.

A Fórmula 3 é um modo compacto de escrever o campo gravitacional, mas podemos escrevê-lo em termos de suas funções componentes, usando o fato de que $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

O campo gravitacional \mathbf{F} está ilustrado na Figura 14.

EXEMPLO 5 Suponha que uma carga elétrica Q esteja localizada na origem. Pela Lei de Coulomb, a força elétrica $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ exercida por essa carga sobre uma carga q localizada no ponto (x, y, z) com vetor posição $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon qQ}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

onde ε é uma constante (que depende da unidade usada). Para cargas de mesmo sinal, temos $qQ > 0$ e a força é repulsiva; para cargas opostas temos $qQ < 0$ e a força é atrativa. Observe a semelhança entre as Fórmulas 3 e 4. Ambas são exemplos de **campos de força**.

Em vez de considerarem a força elétrica \mathbf{F} , os físicos frequentemente consideram a força por unidade de carga:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{q} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

Então \mathbf{E} é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 chamado **campo elétrico** de Q .

TEC Em *Visual 16.1* você pode girar os campos de vetores nas Figuras 10-12, bem como os campos adicionais.

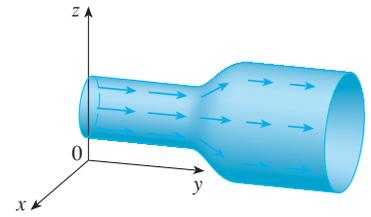


FIGURA 13
Campo de velocidade do escoamento de um fluido

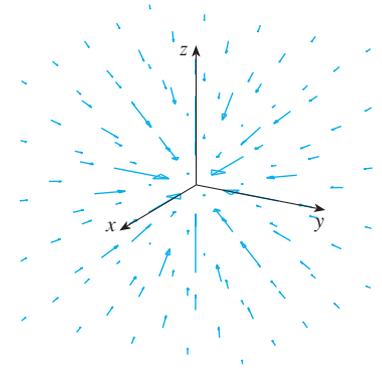


FIGURA 14
Campo de força gravitacional

Campos Gradiente

Se f é uma função escalar de duas variáveis, sabemos da Seção 14.6 que seu gradiente ∇f (ou $\text{grad } f$) é definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y) \mathbf{i} + f_y(x, y) \mathbf{j}$$

Portanto, ∇f é realmente um campo vetorial em \mathbb{R}^2 e é denominado **campo vetorial gradiente**. Da mesma forma, se f for uma função escalar de três variáveis, seu gradiente é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z) \mathbf{i} + f_y(x, y, z) \mathbf{j} + f_z(x, y, z) \mathbf{k}$$

EXEMPLO 6 Determine o campo vetorial gradiente de $f(x, y) = x^2y - y^3$. Desenhe o campo vetorial gradiente juntamente com um mapa de contorno de f . Como eles estão relacionados?

SOLUÇÃO O campo vetorial gradiente é dado por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} = 2xy \mathbf{i} + (x^2 - 3y^2) \mathbf{j}$$

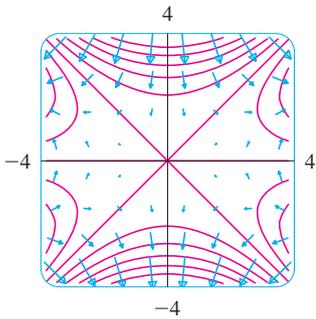


FIGURA 15

A Figura 15 mostra o mapa de contorno de f com o campo vetorial gradiente. Observe que os vetores gradientes são perpendiculares às curvas de nível, como devíamos esperar da Seção 14.6. Observe também que os vetores gradientes são mais longos onde as curvas de nível estão mais próximas umas das outras e mais curtos quando elas estão mais distantes entre si. Isso se deve ao fato de o comprimento do vetor gradiente ser o valor da derivada direcional de f e a proximidade das curvas de nível indicar uma grande inclinação no gráfico.

Um campo vetorial \mathbf{F} é chamado **campo vetorial conservativo** se ele for o gradiente de alguma função escalar, ou seja, se existir uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Nessa situação, f é denominada **função potencial** de \mathbf{F} .

Nem todos os campos vetoriais são conservativos, mas estes campos aparecem frequentemente em física. Por exemplo: o campo gravitacional \mathbf{F} do Exemplo 4 é conservativo, pois, se definimos

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

então

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k} \\ &= \mathbf{F}(x, y, z) \end{aligned}$$

Nas Seções 16.3 e 16.5, aprenderemos a determinar se um campo vetorial é conservativo ou não.

16.1 Exercícios

1-10 Esboce o campo vetorial \mathbf{F} desenhando um diagrama como o da Figura 5 ou da Figura 9.

1. $\mathbf{F}(x, y) = 0,3 \mathbf{i} - 0,4 \mathbf{j}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
6. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{k}$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y \mathbf{k}$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{k}$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{j} - \mathbf{i}$

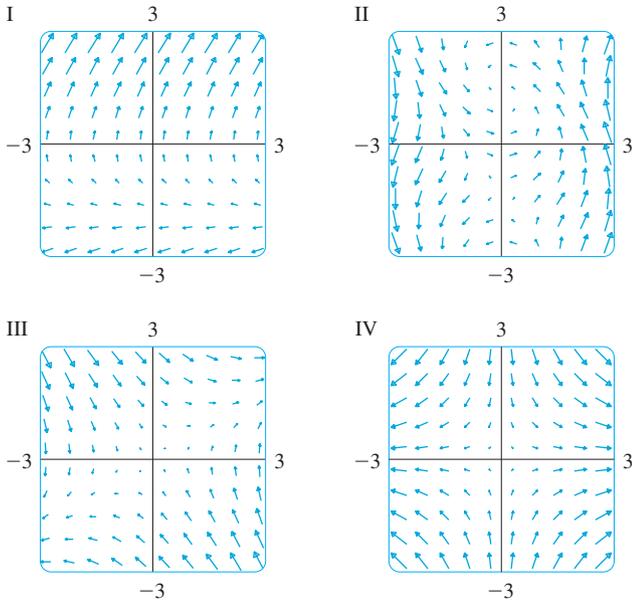
11-14 Faça a correspondência entre o campo vetorial \mathbf{F} e a figura rotulada de I-IV. Justifique suas escolhas.

11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, -y \rangle$

12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, x, -y \rangle$

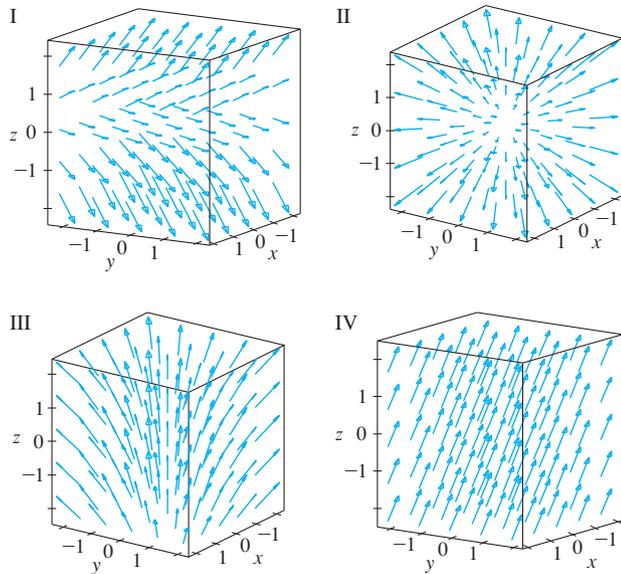
13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, y + 2 \rangle$

14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle \cos(x + y), x \rangle$



15–18 Faça a correspondência entre o campo vetorial \mathbf{F} em \mathbb{R}^3 e a figura rotulada de I–IV. Justifique suas escolhas.

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ 16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 17. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ 18. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$



19. Se você dispõe de um SCA que trace campos vetoriais (o comando para fazê-lo no Maple é `fieldplot` e no Mathematica é `PlotVectorField` ou `VectorPlot`), use-o para traçar

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 - 2xy)\mathbf{i} + (3xy - 6x^2)\mathbf{j}$$

Explique sua aparência, determinando um conjunto de pontos (x, y) tal que $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}$.

20. Seja $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (r^2 - 2r)\mathbf{x}$, onde $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$ e $r = |\mathbf{x}|$. Use um SCA para traçar esse campo vetorial em vários domínios, até conseguir visualizar o que ocorre. Descreva a aparência do desenho e explique-o, determinando os pontos onde $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

21–24 Determine o campo vetorial gradiente de f .

21. $f(x, y) = xe^{xy}$ 22. $f(x, y) = \text{tg}(3x - 4y)$
 23. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 24. $f(x, y, z) = x \cos(y/z)$

25–26 Determine o campo vetorial gradiente ∇f de f e esboce-o.

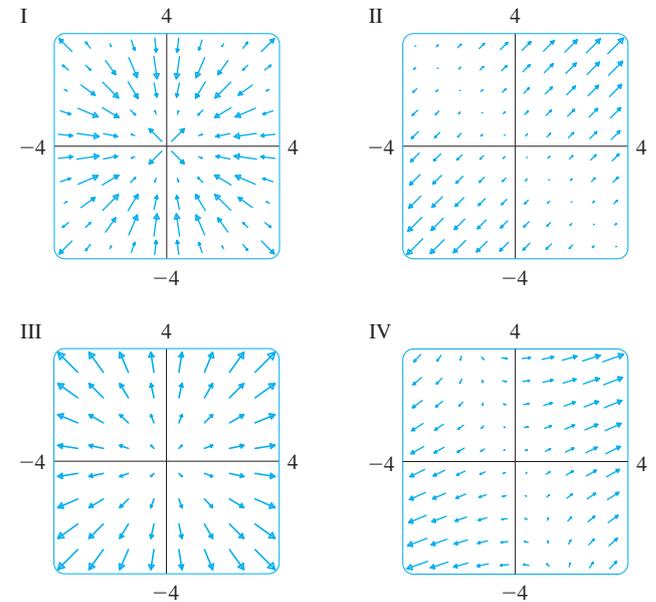
25. $f(x, y) = x^2 - y$ 26. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

27–28 Desenhe o campo vetorial gradiente de f juntamente com um mapa de contorno de f . Explique como eles estão relacionados entre si.

27. $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + 2y^2)$ 28. $f(x, y) = \cos x - 2 \sin y$

29–32 Faça uma correspondência entre as funções f e os desenhos de seus campos vetoriais gradientes rotulados de I–IV. Justifique suas escolhas.

29. $f(x, y) = x^2 + y^2$ 30. $f(x, y) = x(x + y)$
 31. $f(x, y) = (x + y)^2$ 32. $f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$



33. Uma partícula se move em um campo de velocidade $\mathbf{V}(x, y) = \langle x^2, x + y^2 \rangle$. Se ela está na posição $(2, 1)$ no instante $t = 3$, estime sua posição no instante $t = 3,01$.

34. No instante $t = 1$, uma partícula está localizada na posição $(1, 3)$. Se ela se move em um campo de velocidade $\mathbf{F}(x, y) = \langle xy - 2, y^2 - 10 \rangle$ encontre sua posição aproximada no instante $t = 1,05$.

35. As linhas de escoamento (ou linhas de corrente) de um campo vetorial são as trajetórias seguidas por uma partícula cujo campo de velocidade é um campo vetorial dado. Assim, os vetores do campo vetorial são tangentes a suas linhas de fluxo.

- (a) Use um esboço do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ para desenhar algumas linhas de escoamento. Desses seus esboços é possível descobrir qual é a equação das linhas de escoamento?
 (b) Se as equações paramétricas de uma linha de escoamento são $x = x(t)$, $y = y(t)$, explique por que essas funções satisfazem as equações diferenciais $dx/dt = x$ e $dy/dt = -y$. Então resolva as equações diferenciais para encontrar uma equação da linha de escoamento que passa através do ponto $(1, 1)$.
 36. (a) Esboce o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x\mathbf{j}$ e algumas linhas de escoamento. Qual é o formato que essas linhas de escoamento parecem ter?
 (b) Se as equações paramétricas das linhas de escoamento são $x = x(t)$, $y = y(t)$, que equações diferenciais essas funções satisfazem? Deduza que $dy/dx = x$.
 (c) Se uma partícula está na origem no instante inicial e o campo de velocidade é dado por \mathbf{F} , determine uma equação para a trajetória percorrida por ela.

16.2 Integrais de Linha

Nesta seção, definiremos uma integral que é semelhante à integral unidimensional, exceto que, ao invés de integrarmos sobre um intervalo $[a, b]$, integraremos sobre uma curva C . Tais integrais são chamadas *integrais de linha*, embora "integrais de curva" seria melhor terminologia. Elas foram inventadas no começo do século XIX para resolver problemas que envolviam escoamento de fluidos, forças, eletricidade e magnetismo.

Começamos com uma curva plana C dada pelas equações paramétricas

$$\boxed{1} \quad x = x(t) \quad y = y(t) \quad a \leq t \leq b$$

ou, o que é equivalente, pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, e supomos que C seja uma curva suave. [Isso significa que \mathbf{r}' é contínua e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$. Veja a Seção 13.3.] Se dividirmos o intervalo do parâmetro $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de igual tamanho e se fizermos $x_i = x(t_i)$ e $y_i = y(t_i)$, então os pontos correspondentes $P_i(x_i, y_i)$ dividem C em n subarcos de comprimentos $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$. (Veja a Figura 1.) Escolhemos um ponto qualquer $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ no i -ésimo subarco. (Isto corresponde a um ponto t_i^* em $[t_{i-1}, t_i]$.) Agora, se f for uma função de duas variáveis cujo domínio inclui a curva C , calculamos f no ponto (x_i^*, y_i^*) , multiplicamos pelo comprimento Δs_i do subarco e somamos

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

que é semelhante à soma de Riemann. Em seguida, tomamos o limite dessa soma e fazemos a seguinte definição, por analogia com a integral unidimensional:

2 Definição Se f é definida sobre uma curva suave C dada pelas Equações 1, então a **integral de linha de f sobre C** é

$$\int_C f(x, y) \, ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

se esse limite existir.

Na Seção 10.2 verificamos que o comprimento da curva C é

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

Argumentação semelhante pode ser usada para mostrar que, se f é uma função contínua, então o limite na Definição 2 sempre existe e a fórmula seguinte pode ser empregada para calcular a integral de linha:

$$\boxed{3} \quad \int_C f(x, y) \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

O valor da integral de linha não depende da parametrização da curva, desde que a curva seja percorrida uma única vez quando t cresce de a para b .

Se $s(t)$ é o comprimento de C entre $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(t)$, então

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Um modo de memorizar a Fórmula 3 é escrever tudo em termos do parâmetro t : Use a parametrização para exprimir x e y em termos de t e escreva ds como

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

No caso especial em que C é um segmento de reta unindo $(a, 0)$ a $(b, 0)$, usando x como parâmetro, escrevemos as equações paramétricas de C da seguinte forma: $x = x, y = 0, a \leq x \leq b$. A Fórmula 3 fica

$$\int_C f(x, y) \, ds = \int_a^b f(x, 0) \, dx$$

e, nesse caso, a integral de linha se reduz a uma integral unidimensional.

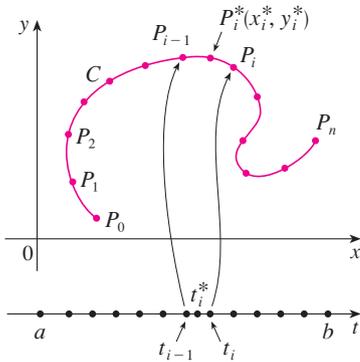


FIGURA 1

A função comprimento de arco s foi discutida na

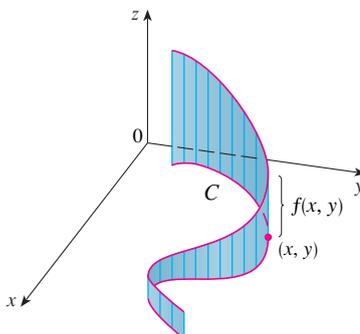


FIGURA 2

Assim como para as integrais unidimensionais, podemos interpretar a integral de linha de uma função *positiva* como uma área. De fato, se $f(x, y) \geq 0$, $\int_C f(x, y) ds$ representa a área da “cerca” ou “cortina” da Figura 2, cuja base é C e cuja altura acima do ponto (x, y) é $f(x, y)$.

EXEMPLO 1 Calcule $\int_C (2 + x^2y) ds$, onde C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUÇÃO Para utilizar a Fórmula 3, primeiro precisamos de equações paramétricas para representar C . Recorde-se de que o círculo unitário pode ser parametrizado por meio das equações

$$x = \cos t \quad y = \sin t$$

e a metade superior do círculo é descrita pelo intervalo do parâmetro $0 \leq t \leq \pi$ (veja a Figura 3). Portanto, a Fórmula 3 dá

$$\begin{aligned} \int_C (2 + x^2y) ds &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi \\ &= 2\pi + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Suponha agora que C seja uma **curva suave por partes**; ou seja, C é a união de um número finito de curvas suaves C_1, C_2, \dots, C_n onde, como ilustrado na Figura 4, o ponto inicial de C_{i+1} é o ponto final de C_i . Nesse caso, definimos a integral de f ao longo de C como a soma das integrais de f ao longo de cada parte suave de C :

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y) ds$$

EXEMPLO 2 Calcule $\int_C 2x ds$, onde C é formada pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de $(1, 1)$ a $(1, 2)$.

SOLUÇÃO A curva C é mostrada na Figura 5. C_1 é o gráfico de uma função de x , então podemos escolher x como parâmetro e as equações de C_1 se tornam

$$x = x \quad y = x^2 \quad 0 \leq x \leq 1$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} 2x ds &= \int_0^1 2x \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 2x \sqrt{1 + 4x^2} dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4x^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} \end{aligned}$$

Em C_2 escolhemos y como parâmetro, e as equações de C_2 são

$$x = 1 \quad y = y \quad 1 \leq y \leq 2$$

e
$$\int_{C_2} 2x ds = \int_1^2 2(1) \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2} dy = \int_1^2 2 dy = 2$$

Logo,

$$\int_C 2x ds = \int_{C_1} 2x ds + \int_{C_2} 2x ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2$$

Qualquer interpretação física de uma integral de reta $\int_C f(x, y) ds$ depende da interpretação física da função f . Suponhamos que $\rho(x, y)$ represente a densidade linear de um ponto de (x, y) de um fio fino com a forma de uma curva C . Então, a massa da parte do fio a partir de

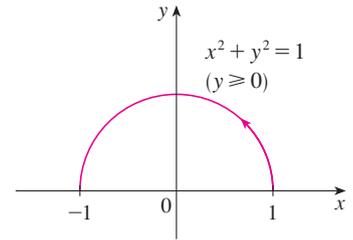


FIGURA 3

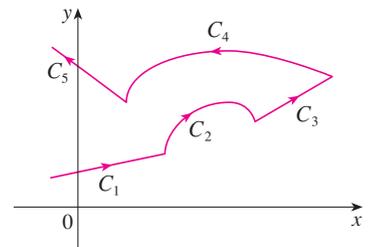


FIGURA 4
Curva suave por partes

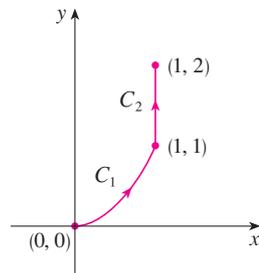


FIGURA 5
 $C = C_1 \cup C_2$

P_{i-1} até P_i na Figura 1 é de cerca de $\rho(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$ e assim a massa total do fio é de cerca de $\sum \rho(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$. Tomando cada vez mais pontos sobre a curva, obtemos o valor da **massa** m do fio como o valor limite dessas aproximações:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i = \int_C \rho(x, y) ds$$

[Por exemplo, se $f(x, y) = 2 + x^2y$ representa a densidade de um fio semicircular, então a integral no Exemplo 1 representa a massa do fio.] O **centro de massa** do fio com a função densidade ρ encontra-se no ponto (\bar{x}, \bar{y}) , onde

$$\boxed{4} \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x \rho(x, y) ds \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y \rho(x, y) ds$$

Outras interpretações físicas das integrais de linha serão discutidas adiante neste capítulo.

EXEMPLO 3 Um arame tem o formato de um semicírculo $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, é mais grosso perto da base do que perto do topo. Ache o centro de massa desse arame se a função densidade linear em qualquer ponto for proporcional à sua distância à reta $y = 1$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 1, usamos a parametrização $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$, e determinamos que $ds = dt$. A densidade linear é

$$\rho(x, y) = k(1 - y)$$

onde k é uma constante e, então, a massa do arame é

$$m = \int_C k(1 - y) ds = \int_0^\pi k(1 - \sin t) dt = k[t + \cos t]_0^\pi = k(\pi - 2)$$

Das Equações 4, temos

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m} \int_C y \rho(x, y) ds = \frac{1}{k(\pi - 2)} \int_C y k(1 - y) ds \\ &= \frac{1}{\pi - 2} \int_0^\pi (\sin t - \sin^2 t) dt = \frac{1}{\pi - 2} \left[-\cos t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^\pi \\ &= \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)} \end{aligned}$$

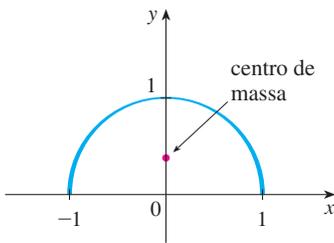


FIGURA 6

Por simetria, vemos que $\bar{x} = 0$, portanto o centro de massa é

$$\left(0, \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)} \right) \approx (0, 0,38)$$

(Veja a Figura 6.)

Duas outras integrais de linha são obtidas trocando-se Δs_i por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ou $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ na Definição 2. Elas são chamadas, respectivamente, **integrais de linha de f ao longo de C com relação a x e y** :

$$\boxed{5} \quad \int_C f(x, y) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i$$

$$\boxed{6} \quad \int_C f(x, y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta y_i$$

Quando queremos distinguir a integral de linha original $\int_C f(x, y) ds$ das Equações 5 e 6, esta é chamada de **integral de linha com relação ao comprimento do arco**.

As fórmulas seguintes dizem que as integrais de linha com relação a x e y podem ser calculadas escrevendo-se tudo em termos de t : $x = x(t), y = y(t), dx = x'(t) dt, dy = y'(t) dt$.

$$\boxed{7} \quad \int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

$$\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

Frequentemente acontece de as integrais de linha com relação a x e y ocorrerem em conjunto. Quando isso acontece, é costume abreviar escrevendo

$$\int_C P(x, y) dx + \int_C Q(x, y) dy = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

Quando estamos nos preparando para resolver uma integral de linha, às vezes o mais difícil é pensar na representação paramétrica da curva cuja descrição geométrica foi dada. Em especial, frequentemente precisamos parametrizar um segmento de reta e, portanto, é útil lembrar que a representação vetorial do segmento de reta que inicia em \mathbf{r}_0 e termina em \mathbf{r}_1 é dada por

8

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

(Veja a Equação 12.5.4.)

EXEMPLO 4 Calcule $\int_C y^2 dx + x dy$, onde (a) $C = C_1$ é o segmento de reta de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ e (b) $C = C_2$ é o arco da parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$. (Veja a Figura 7.)

SOLUÇÃO

(a) A representação parametrizada para o segmento de reta é

$$x = 5t - 5 \quad y = 5t - 3 \quad 0 \leq t \leq 1$$

(Utilize a Equação 8 com $\mathbf{r}_0 = \langle -5, -3 \rangle$ e $\mathbf{r}_1 = \langle 0, 2 \rangle$.) Assim, $dx = 5 dt$, $dy = 5 dt$ e a Fórmula 7 fornecem

$$\begin{aligned} \int_{C_1} y^2 dx + x dy &= \int_0^1 (5t - 3)^2(5 dt) + (5t - 5)(5 dt) \\ &= 5 \int_0^1 (25t^2 - 25t + 4) dt \\ &= 5 \left[\frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t \right]_0^1 = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

(b) Como a parábola é dada em função de y , usamos y como parâmetro e escrevemos C_2 como

$$x = 4 - y^2 \quad y = y \quad -3 \leq y \leq 2$$

Então $dx = -2y dy$ e, pela Fórmula 7, temos

$$\begin{aligned} \int_{C_2} y^2 dx + x dy &= \int_{-3}^2 y^2(-2y) dy + (4 - y^2) dy \\ &= \int_{-3}^2 (-2y^3 - y^2 + 4) dy \\ &= \left[-\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y \right]_{-3}^2 = 40\frac{5}{6} \end{aligned}$$

Observe que as respostas para os itens (a) e (b) do Exemplo 4 são diferentes, apesar de as duas curvas terem as mesmas extremidades. Assim, em geral, o valor de uma integral de linha depende não apenas das extremidades da curva, mas também da trajetória. (Mas veja a Seção 16.3 para as condições em que a integral é independente do caminho.)

Observe também que as respostas do Exemplo 4 dependem da orientação ou sentido em que a curva é percorrida. Se $-C_1$ representa o segmento de reta que vai de $(0, 2)$ a $(-5, -3)$, você pode verificar, usando a parametrização

$$x = -5t \quad y = 2 - 5t \quad 0 \leq t \leq 1$$

que

$$\int_{-C_1} y^2 dx + x dy = \frac{5}{6}$$

Em geral, dada a parametrização $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, esta determina-se uma **orientação** da curva C , com a orientação positiva correspondendo aos valores crescentes do

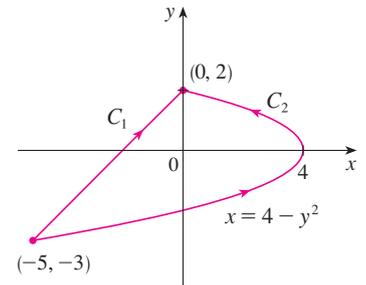


FIGURA 7

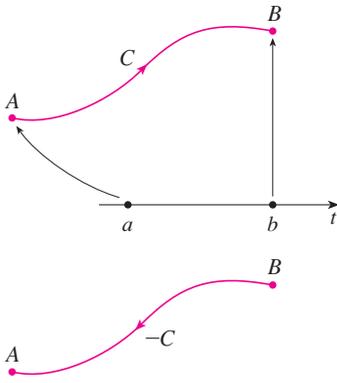


FIGURA 8

parâmetro t (veja a Figura 8, onde o ponto inicial A corresponde ao valor do parâmetro a e o ponto terminal B corresponde a $t = b$).

Se $-C$ denota a curva constituída pelos mesmos pontos que C , mas com orientação contrária (do ponto inicial B para o ponto terminal A na Figura 8), então temos

$$\int_{-C} f(x, y) dx = -\int_C f(x, y) dx \quad \int_{-C} f(x, y) dy = -\int_C f(x, y) dy$$

Mas, se integrarmos em relação ao comprimento de arco, o valor da integral de linha *não* se altera ao revertermos a orientação da curva:

$$\int_{-C} f(x, y) ds = \int_C f(x, y) ds$$

Isso ocorre porque Δs_i é sempre positivo, enquanto Δx_i e Δy_i mudam de sinal quando invertemos a orientação de C .

Integrais de Linha no Espaço

Suponhamos agora que C seja uma curva espacial suave dada pelas equações paramétricas

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \quad a \leq t \leq b$$

ou por uma equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. Se f é uma função de três variáveis que é contínua em alguma região contendo C , então definimos a **integral de linha de f ao longo de C** (com relação ao comprimento de arco) de modo semelhante ao feito nas curvas planas:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta s_i$$

Calculamos essa integral utilizando uma fórmula análoga à Equação 3:

$$\boxed{9} \quad \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Observe que as integrais das Equações 3 e 9 podem ser escritas de modo mais compacto pela notação vetorial

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Para o caso especial em que $f(x, y, z) = 1$, temos

$$\int_C ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt = L$$

onde L é o comprimento da curva C (veja a Seção 13.3.3).

Também podemos definir integrais de linha ao longo de C em relação a x , y e z . Por exemplo,

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta z_i \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt \end{aligned}$$

Portanto, como para as integrais de linha no plano, podemos calcular integrais da forma

$$\boxed{10} \quad \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

escrevendo tudo (x, y, z, dx, dy, dz) em termos do parâmetro t .

EXEMPLO 5 Calcule $\int_C y \sen z ds$, onde C é a hélice circular dada pelas equações $x = \cos t$, $y = \sen t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (Veja a Figura 9.)

SOLUÇÃO A Fórmula 9 nos dá

$$\int_C y \sen z ds = \int_0^{2\pi} (\sen t) \sen t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

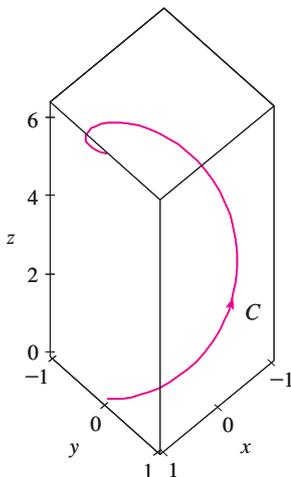


FIGURA 9

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi} = \sqrt{2} \pi
 \end{aligned}$$

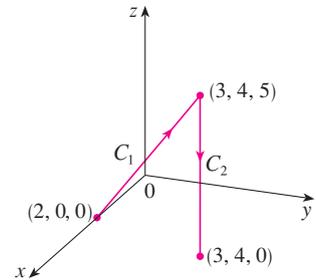


FIGURA 10

EXEMPLO 6 Calcule $\int_C y dx + z dy + x dz$, onde C consiste no segmento de reta C_1 de $(2, 0, 0)$ a $(3, 4, 5)$, seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de $(3, 4, 5)$ a $(3, 4, 0)$.

SOLUÇÃO A curva C é mostrada na Figura 10. Usando a Equação 8, escrevemos C_1 como

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 2, 0, 0 \rangle + t\langle 3, 4, 5 \rangle = \langle 2 + t, 4t, 5t \rangle$$

ou, na forma paramétrica, como

$$x = 2 + t \quad y = 4t \quad z = 5t \quad 0 \leq t \leq 1$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \int_{C_1} y dx + z dy + x dz &= \int_0^1 (4t) dt + (5t)4 dt + (2 + t)5 dt \\
 &= \int_0^1 (10 + 29t) dt = 10t + 29 \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = 24,5
 \end{aligned}$$

Da mesma maneira, pode-se escrever C_2 na forma

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 3, 4, 5 \rangle + t\langle 3, 4, 0 \rangle = \langle 3, 4, 5 - 5t \rangle$$

ou

$$x = 3 \quad y = 4 \quad z = 5 - 5t \quad 0 \leq t \leq 1$$

Então $dx = 0 = dy$, logo

$$\int_{C_2} y dx + z dy + x dz = \int_0^1 3(-5) dt = -15$$

Somando os valores das integrais, obtemos

$$\int_C y dx + z dy + x dz = 24,5 - 15 = 9,5$$

Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Lembre-se, da Seção 6.4, no Volume I, de que o trabalho feito por uma força variável $f(x)$ que move uma partícula de a até b ao longo do eixo x é dado por $W = \int_a^b f(x) dx$. Depois, na Seção 12.3, vimos que o trabalho feito por uma força constante \mathbf{F} para mover um objeto de um ponto P para outro ponto Q do espaço é $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, onde $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ é o vetor deslocamento.

Suponha agora que $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$ seja um campo de força contínuo em \mathbb{R}^3 , tal como o campo gravitacional do Exemplo 4 da Seção 16.1 ou o campo de força elétrica do Exemplo 5 da Seção 16.1 (um campo de força em \mathbb{R}^2 pode ser visto como um caso especial onde $R = 0$ e P e Q dependem só de x e y). Queremos calcular o trabalho exercido por essa força ao mover uma partícula ao longo de uma curva suave C .

Dividimos C em subarcos $P_{i-1}P_i$ com comprimentos Δs_i através da divisão de intervalos de parâmetros $[a, b]$ em subintervalos de igual largura. (Veja a Figura 1 para o caso bidimensional, ou a Figura 11, para o caso tridimensional.) Escolha um ponto $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ no i -ésimo subarco correspondente ao valor do parâmetro t_i^* . Se Δs_i é pequeno, o movimento da partícula de P_{i-1} para P_i na curva ocorre aproximadamente na direção de $\mathbf{T}(t_i^*)$, vetor tangente unitário a P_i^* . Então, o trabalho feito pela força \mathbf{F} para mover a partícula de P_{i-1} para P_i é aproximadamente

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)] \Delta s_i$$

e o trabalho total executado para mover a partícula ao longo de C é aproximadamente

$$\boxed{11} \quad \sum_{i=1}^n [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta s_i$$

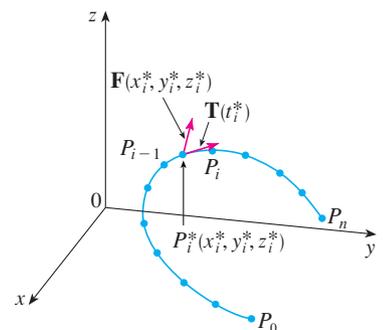


FIGURA 11

onde $\mathbf{T}(x, y, z)$ é o vetor tangente unitário no ponto (x, y, z) em C . Intuitivamente, vemos que estas aproximações devem se tornar melhor quando n torna-se maior. Portanto, definimos o **trabalho** W feito por um campo de força \mathbf{F} como o limite da soma de Riemann dada por [11], ou seja,

$$12 \quad W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) \, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

A Equação 12 nos diz que o trabalho é a integral com relação ao comprimento do arco da componente tangencial da força.

Se a curva C é dada pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, então $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$, e, pela Equação 9, podemos reescrever a Equação 12 como

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)| \, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt$$

Essa última integral é frequentemente abreviada como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e ocorre também em outras áreas da física. Portanto, definimos a integral de linha de *qualquer* campo vetorial contínuo como a seguir:

13 Definição Seja \mathbf{F} um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva suave C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Então, a **integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C** é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

Ao utilizar a Definição 13, tenha em mente que $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ é apenas uma abreviação de $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$, então podemos avaliar $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ simplesmente colocando $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ na expressão para $\mathbf{F}(x, y, z)$. Observe também que podemos formalmente escrever que $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) \, dt$.

A Figura 12 mostra o campo de força e a curva do Exemplo 7. O trabalho realizado é negativo porque o campo impede o movimento ao longo da curva.

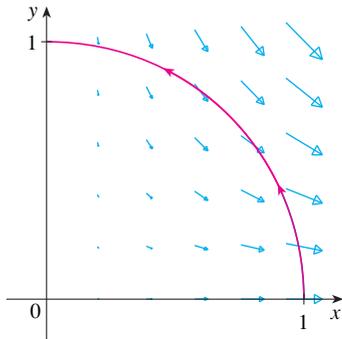


FIGURA 12

A Figura 13 mostra a cúbica retorcida C no Exemplo 8 e alguns vetores típicos atuando sobre três pontos em C .

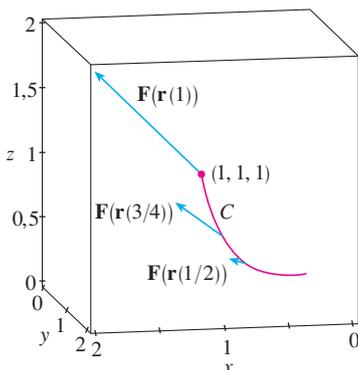


FIGURA 13

EXEMPLO 7 Determine o trabalho feito pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$ ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

SOLUÇÃO Uma vez que $x = \cos t$ e $y = \sin t$, temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t \mathbf{i} - \cos t \sin t \mathbf{j}$$

e

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

Portanto, o trabalho realizado é

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt = \int_0^{\pi/2} (-2 \cos^2 t \sin t) \, dt \\ &= 2 \left. \frac{\cos^3 t}{3} \right|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO Apesar de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$ e as integrais em relação ao comprimento do arco não trocaram de sinal quando a orientação do caminho for invertida, é verdade que

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

pois o vetor tangente da unidade \mathbf{T} é substituído por sua negativa quando C é substituído por $-C$.

EXEMPLO 8 Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$ e C é a cúbica retorcida dada por

$$x = t \quad y = t^2 \quad z = t^3 \quad 0 \leq t \leq 1$$

SOLUÇÃO Temos

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^3\mathbf{i} + t^5\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$$

Logo,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$= \int_0^1 (t^3 + 5t^6) dt = \left. \frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7} \right|_0^1 = \frac{27}{28}$$

Finalmente, observamos a relação entre as integrais de linha de campos vetoriais e as integrais de linha de campos escalares. Suponha que o campo vetorial \mathbf{F} em \mathbb{R}^3 seja dado na forma de componente, a equação $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$. Usamos a Definição 13 para calcular a sua integral de linha ao longo de C :

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}) dt \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt \end{aligned}$$

Mas essa última integral é exatamente a integral de linha de [10]. Portanto, temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz \quad \text{onde } \mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

Por exemplo, a integral $\int_C y dx + z dy + x dz$ do Exemplo 6 poderia ser expressa como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

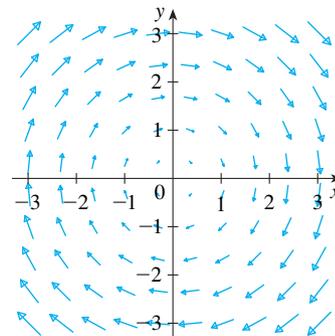
$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

16.2 Exercícios

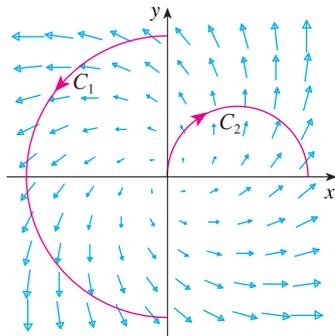
1–16 Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada.

1. $\int_C y^3 ds$, $C: x = t^3, y = t, 0 \leq t \leq 2$
2. $\int_C xy ds$, $C: x = t^2, y = 2t, 0 \leq t \leq 1$
3. $\int_C xy^4 ds$, C é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$.
4. $\int_C x \sin y ds$, C é o segmento de reta que liga $(0, 3)$ a $(4, 6)$.
5. $\int_C (x^2y^3 - \sqrt{x}) dy$, C é o arco da curva $y = \sqrt{x}$ de $(1, 1)$ a $(4, 2)$.
6. $\int_C xe^y dx$, C é o arco da curva $x = e^y$ de $(1, 0)$ a $(e, 1)$.
7. $\int_C (x + 2y) dx + x^2 dy$, C consiste nos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(2, 1)$ e de $(2, 1)$ a $(3, 0)$.
8. $\int_C x^2 dy + y^2 dy$, C consiste na metade superior da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de $(2, 0)$ a $(0, 2)$ e no segmento de reta de $(0, 2)$ a $(4, 3)$.
9. $\int_C xyz ds$, $C: x = 2 \sin t, y = t, z = -2 \cos t, 0 \leq t \leq \pi$
10. $\int_C xyz^2 ds$, C é o segmento de reta de $(-1, 5, 0)$ a $(1, 6, 4)$.
11. $\int_C xe^{yz} ds$, C é o segmento de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$.
12. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$, $C: x = t, y = \cos 2t, z = \sin 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$

13. $\int_C x ye^{yz} dy$, $C: x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$
14. $\int_C z dx + x dy + y dz$, $C: x = t^2, y = t^3, z = t^2, 0 \leq t \leq 1$
15. $\int_C z^2 dx + x^2 dy + y^2 dz$, C consiste nos segmentos de reta de $(1, 0, 0)$ a $(4, 1, 2)$.
16. $\int_C (y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz$, C consiste nos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 1)$ e de $(1, 0, 1)$ a $(0, 1, 2)$.
17. Seja \mathbf{F} o campo vetorial mostrado na figura.
 - (a) Se C_1 é o segmento de reta vertical de $(-3, -3)$ a $(-3, 3)$, determine se $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positivo, negativo ou zero.
 - (b) Se C_2 é o círculo de raio 3 e centro na origem percorrido no sentido anti-horário, determine se $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positivo, negativo ou zero.



18. A figura mostra um campo vetorial \mathbf{F} e duas curvas C_1 e C_2 . As integrais de linha de \mathbf{F} sobre C_1 e C_2 são positivas, negativas ou nulas? Explique.



19–22 Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.

19. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j}$, $\mathbf{r}(t) = 11t^4\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$,
 $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin x\mathbf{i} + \cos y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$,
 $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$,
 $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \pi$

23–26 Use uma calculadora ou um SCA para calcular a integral de linha correta até a quarta casa decimal.

23. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + \sin y\mathbf{j}$ e $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$, $1 \leq t \leq 2$

24. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = y \sin z\mathbf{i} + z \sin x\mathbf{j} + x \sin y\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \sin 5t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \pi$

25. $\int_C x \sin(y + z) ds$, onde C tem equações paramétricas $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$, $0 \leq t \leq 5$

26. $\int_C ze^{-xy} ds$, onde C tem equações paramétricas $x = t$, $y = t^2$, $z = e^{-t}$, $0 \leq t \leq 1$

SCA 27–28 Use um gráfico do campo vetorial \mathbf{F} e a curva C para dizer se a integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C é positiva, negativa ou nula. Em seguida, calcule a integral.

27. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$, C é o arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ percorrido no sentido horário de $(2, 0)$ a $(0, -2)$

28. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}$,
 C é a parábola $y = 1 + x^2$ de $(-1, 2)$ a $(1, 2)$

29. (a) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = e^{x-1}\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ e C é dado por $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$.

(b) Ilustre a parte (a) utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para desenhar C e os vetores do campo vetorial correspondentes a $t = 0, 1/\sqrt{2}$ e 1 (como na Figura 13).

30. (a) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ e C é dado por $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$, $-1 \leq t \leq 1$.

(b) Ilustre a parte (a) utilizando um computador para desenhar C e os vetores do campo vetorial correspondentes a $t = \pm 1$ e $\pm \frac{1}{2}$ (como na Figura 13).

SCA 31. Encontre o valor exato de $\int_C x^3 y^2 z ds$, onde C é a curva com equações paramétricas $x = e^{-t} \cos 4t$, $y = e^{-t} \sin 4t$, $z = e^{-t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

32. (a) Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ sobre uma partícula que dá uma volta no círculo $x^2 + y^2 = 4$ orientada no sentido anti-horário.

(b) Utilize um sistema de computação algébrica para desenhar o campo de força e o círculo na mesma tela. Use essa figura para explicar sua resposta para a parte (a).

33. Um arame fino é entortado no formato da semicircunferência $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$. Se a densidade linear for uma constante k , determine a massa e o centro de massa do arame.

34. Um arame fino tem a forma da parte que está no primeiro quadrante da circunferência com centro na origem e raio a . Se a função densidade for $\rho(x, y) = kxy$, encontre a massa e o centro de massa do arame.

35. (a) Escreva fórmulas semelhantes à Equação 4 para o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de um arame fino com forma da curva espacial C se o fio tem função densidade $\rho(x, y, z)$.

(b) Determine o centro de massa de um arame com formato da hélice $x = 2 \sin t$, $y = 2 \cos t$, $z = 3t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, se a densidade for uma constante k .

36. Determine a massa e o centro de massa de um arame com formato da hélice $x = t$, $y = \cos t$, $z = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, se a densidade em qualquer ponto for igual ao quadrado da sua distância do ponto à origem.

37. Se um arame com densidade linear $\rho(x, y)$ está sobre uma curva plana C , seus **momentos de inércia** em relação aos eixos x e y são definidos por

$$I_x = \int_C y^2 \rho(x, y) ds \quad I_y = \int_C x^2 \rho(x, y) ds$$

Determine os momentos de inércia do arame do Exemplo 3.

38. Se um arame com densidade linear $\rho(x, y, z)$ está sobre uma curva espacial C , seus **momentos de inércia** em relação aos eixos x , y e z são definidos por

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$$

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds$$

Determine os momentos de inércia do arame do Exercício 35.

39. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + (y + 2)\mathbf{j}$ sobre um objeto que se move sobre um arco da cicloide $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

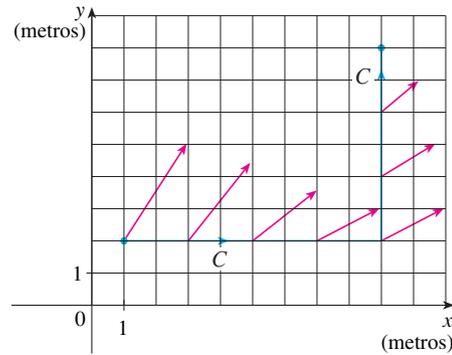
40. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + ye^x\mathbf{j}$ em uma partícula que se move sobre a parábola $x = y^2 + 1$ de $(1, 0)$ a $(2, 1)$.

41. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x - y^2, y - z^2, z - x^2 \rangle$ sobre uma partícula que se move ao longo do segmento de reta de $(0, 0, 1)$ a $(2, 1, 0)$.

42. A força exercida pela carga elétrica colocada na origem sobre uma partícula carregada em um ponto (x, y, z) com vetor posição $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ é $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = K\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, onde K é uma constante. (Veja o Exemplo 5 da Seção 16.1.) Encontre o trabalho feito quando a partícula se move ao longo de uma linha reta de $(2, 0, 0)$ a $(2, 1, 5)$.

43. A posição de um objeto com massa m no instante t é $\mathbf{r}(t) = at^2 \mathbf{i} + bt^3 \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$.
 (a) Qual é a força que age sobre o objeto no instante t ?
 (b) Qual é o trabalho realizado pela força durante o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 1$?
44. Um objeto com massa m se move com função posição $\mathbf{r}(t) = a \sin t \mathbf{i} + b \cos t \mathbf{j} + ct \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Encontre o trabalho realizado sobre o objeto durante este período de tempo.
45. Um homem de 160 libras carrega uma lata de 25 libras de tinta subindo uma escada helicoidal que circunda um silo com um raio de 20 pés. Se o silo é de 90 pés de altura e o homem faz exatamente três rotações completas para subir ao topo, de quanto é o esforço feito pelo homem contra a gravidade?
46. Suponha que exista um furo na lata de tinta do Exercício 45 e 9 lb de tinta vazam da lata de modo contínuo e uniforme durante a subida do homem. Quanto trabalho é realizado?
47. (a) Mostre que um campo de força constante realiza trabalho nulo sobre uma partícula que dá uma única volta completa uniformemente na circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
 (b) Isso também é verdadeiro para um campo de força $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$, onde k é uma constante e $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$?
48. A base de uma cerca circular com raio de 10 m é dada por $x = 10 \cos t$, $y = 10 \sin t$. A altura da cerca na posição (x, y) é dada pela função $h(x, y) = 4 + 0,01(x^2 - y^2)$, de modo a altura varia de 3 m a 5 m. Suponha-se que 1 L de tinta cubra 100 m². Faça um esboço da cerca e determine de quanta tinta você precisará para pintar os dois lados da cerca.
49. Se C é uma curva suave dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, e \mathbf{v} é um vetor constante, mostre que
- $$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot [\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)]$$
50. Se C é uma curva suave dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, mostre que
- $$\int_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} [|\mathbf{r}(b)|^2 - |\mathbf{r}(a)|^2]$$
51. Um objeto se move sobre a curva C , mostrada na figura, de $(1, 2)$ a $(9, 8)$. Os comprimentos dos vetores do campo de força

\mathbf{F} são medidos em newtons pela escala nos eixos. Estime o trabalho realizado por \mathbf{F} sobre o objeto.

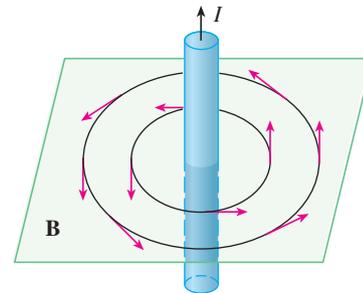


52. Experiências mostram que uma corrente contínua I em um fio comprido produz um campo magnético \mathbf{B} que é tangente a qualquer círculo em um plano perpendicular ao fio cujo centro seja o eixo do fio (como na figura). A Lei de Ampère relaciona a corrente elétrica ao campo magnético criado e afirma que

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

onde I é a corrente total que passa por qualquer superfície limitada por uma curva fechada C , e μ_0 é uma constante chamada permeabilidade no vácuo. Tomando C como um círculo de raio r , mostre que o módulo $B = |\mathbf{B}|$ do campo magnético a uma distância r do centro do fio é dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



16.3 O Teorema Fundamental das Integrais de Linha

Lembre-se, da Seção 5.3, no Volume I, que a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo pode ser escrita como

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

onde F' é contínua em $[a, b]$. A Equação 1 é também chamada Teorema da Variação Total: a integral de uma taxa de variação é a variação total.

Se consideramos o vetor gradiente ∇f de uma função f de duas ou três variáveis como uma espécie de derivada de f , então o teorema seguinte pode ser visto como uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo para as integrais de linha.

2 Teorema Seja C uma curva suave dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C . Então

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

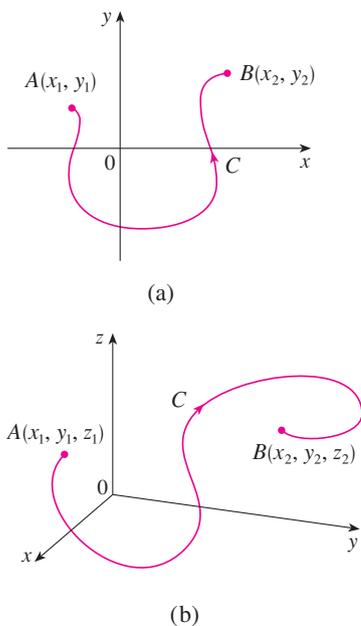


FIGURA 1

OBSERVAÇÃO O Teorema 2 diz que podemos avaliar a integral de linha de um campo vetorial conservativo (o campo vetorial gradiente da função potencial f) simplesmente sabendo o valor de f nos pontos finais de C . De fato, o Teorema 2 diz que a integral de linha de ∇f é a variação total em f . Se f é uma função de duas variáveis e C é uma curva plana com o ponto inicial $A(x_1, y_1)$ e ponto terminal $B(x_2, y_2)$, como na Figura 1, então o Teorema 2 torna-se

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

Se f é uma função de três variáveis e C , uma curva espacial ligando o ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ ao ponto $B(x_2, y_2, z_2)$, então temos

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Vejam agora a demonstração do Teorema 2 para este caso.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2 Usando a Definição 16.2.13, temos

$$\begin{aligned} \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) dt && \text{(pela Regra de Cadeia)} \\ &= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) \end{aligned}$$

O último passo segue do Teorema Fundamental do Cálculo (Equação 1). ■

Apesar de termos demonstrado o Teorema 2 para curvas suaves, ele também vale para curvas suaves por partes. Isso pode ser confirmado subdividindo C em um número finito de curvas suaves e somando as integrais resultantes.

EXEMPLO 1 Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

ao mover uma partícula de massa m do ponto $(3, 4, 12)$ para o ponto $(2, 2, 0)$ ao longo da curva suave por partes C . (Veja o Exemplo 4 da Seção 16.1.)

SOLUÇÃO Da Seção 16.1, sabemos que \mathbf{F} é um campo vetorial conservador e, de fato, $\mathbf{F} = \nabla f$, onde

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Portanto, pelo Teorema 2, o trabalho realizado é

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12) \\ &= \frac{mMG}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = mMG \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13} \right) \end{aligned}$$
■

Independência do Caminho

Suponha que C_1 e C_2 sejam curvas suaves por partes (denominadas **caminhos**) que têm o mesmo ponto inicial A e o mesmo ponto final B . Sabemos do Exemplo 4 da Seção 16.2 que, em geral, $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Mas uma decorrência do Teorema 2 é que

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

sempre que ∇f for contínua. Em outras palavras, a integral de linha de um campo vetorial *conservativo* depende somente das extremidades da curva.

Em geral, se \mathbf{F} for um campo vetorial contínuo com domínio D , dizemos que a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é **independente do caminho** se $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 em D que tenham os mesmos pontos iniciais e finais. Com essa terminologia, podemos dizer que *as integrais de linha de campos vetoriais conservativos são independentes do caminho*.

Uma curva é denominada **fechada** se seu ponto final coincide com seu ponto inicial, ou seja, $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a)$ (veja a Figura 2). Se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D e C é uma curva fechada em D , podemos escolher quaisquer dois pontos A e B sobre C e olhar C como composta por um caminho C_1 de A a B seguido de um caminho C_2 de B a A . (Veja a Figura 3.) Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

já que C_1 e $-C_2$ têm os mesmos pontos inicial e final.

Por outro lado, se é verdade que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ sempre que C for um caminho fechado em D , podemos demonstrar a independência do caminho da seguinte forma. Tome quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 de A a B em D e defina C como a curva constituída por C_1 seguida por $-C_2$. Então

$$0 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

e assim $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Assim, demonstramos o seguinte teorema:

3 Teorema $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D se e somente se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado C em D .

Como sabemos que a integral de linha de qualquer campo vetorial conservativo \mathbf{F} é independente do caminho, segue que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 = 0$ para qualquer caminho fechado. A interpretação física é que o trabalho realizado por qualquer campo de força conservativo (tal como o campo gravitacional ou o campo elétrico da Seção 16.1) para mover um objeto ao redor de um caminho fechado é 0.

O teorema a seguir diz que *todos* os campos vetoriais independentes do caminho são conservativos. Ele foi enunciado e demonstrado para curvas planas, mas existe uma versão espacial desse teorema. Admita que D seja **aberto**, o que significa que para todo ponto P em D existirá uma bola aberta com centro em P inteiramente contida em D . (Portanto, D não tem nenhum ponto de sua fronteira.) Além disso, vamos supor que D seja **conexo por caminhos**: isso significa que quaisquer dois pontos em D podem ser ligados por um caminho que se encontra em D .

4 Teorema Suponha que \mathbf{F} seja um campo vetorial contínuo em uma região aberta conexa por caminhos D . Se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ for independente do caminho em D , então \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo em D , ou seja, existe uma função f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $A(a, b)$ um ponto fixo em D . Vamos construir a função potencial f desejada definindo

$$f(x, y) = \int_{(a, b)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

para qualquer ponto (x, y) em D . Como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho, não interessa qual o caminho C de integração utilizado de (a, b) a (x, y) para calcular $f(x, y)$. Como D é aberto, existe uma bola aberta contida em D com centro em (x, y) . Escolha qualquer ponto (x_1, y) no disco com $x_1 < x$ e considere C como qualquer caminho C_1 de (a, b) a (x_1, y) , seguido pelo segmento de reta horizontal C_2 de (x_1, y) a (x, y) . (Veja a Figura 4.) Então

$$f(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a, b)}^{(x_1, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Observe que a primeira dessas integrais não depende de x , e assim

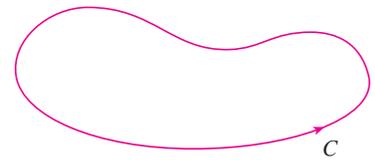


FIGURA 2
Uma curva fechada

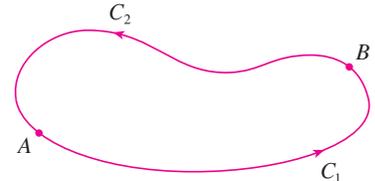


FIGURA 3

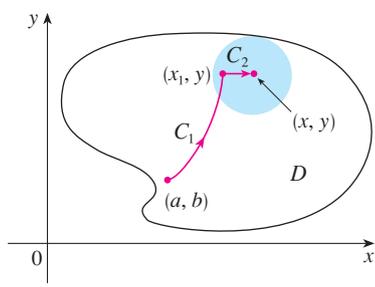


FIGURA 4

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Se escrevemos $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$, então

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} P dx + Q dy$$

Em C_2 , y é constante, portanto $dy = 0$. Usando t como parâmetro, onde $x_1 \leq t \leq x$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} P dx + Q dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x P(t, y) dt = P(x, y)$$

pela Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo (veja a Seção 5.3, no Volume I). Uma argumentação semelhante, usando um segmento de reta vertical (veja a Figura 5), mostra que

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} P dx + Q dy = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_1}^y Q(x, t) dt = Q(x, y)$$

Logo,
$$\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} = \nabla f$$

o que mostra que \mathbf{F} é conservativo. ■

A questão permanece: como é possível saber se um campo vetorial \mathbf{F} é conservativo ou não? Suponha que saibamos que $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$ é conservativo, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Então existe uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, ou seja,

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Portanto, pelo Teorema de Clairaut,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

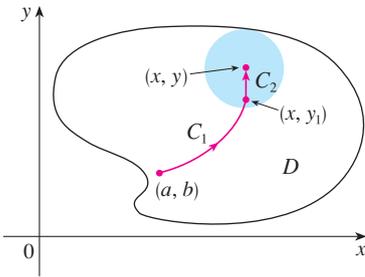


FIGURA 5



FIGURA 6
Tipos de curva

5 Teorema Se $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}$ é um campo vetorial conservativo, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D , então em todos os pontos de D temos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

A recíproca do Teorema 5 só é verdadeira para um tipo especial de região. Para explicarmos isso, precisamos do conceito de **curva simples**, que é uma curva que não se autointercepta em nenhum ponto entre as extremidades. [Veja a Figura 6; $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ para uma curva fechada simples, mas $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ quando $a < t_1 < t_2 < b$.]

No Teorema 4 precisamos de região conexa por caminhos. Para o próximo teorema, precisaremos de uma condição mais forte. Uma **região simplesmente conexa** no plano é uma região conexa por caminhos D tal que toda curva fechada simples em D inclui apenas os pontos que estão em D . Observe a partir da Figura 7 que, intuitivamente falando, uma região simplesmente conexa não contém nenhum buraco e não podem consistir em duas regiões separadas.

Para regiões simplesmente conexas podemos agora enunciar a recíproca do Teorema 5, que fornece um processo conveniente para verificar se um campo vetorial em \mathbb{R}^2 é conservativo. A demonstração será esboçada na próxima seção, como consequência do Teorema de Green.

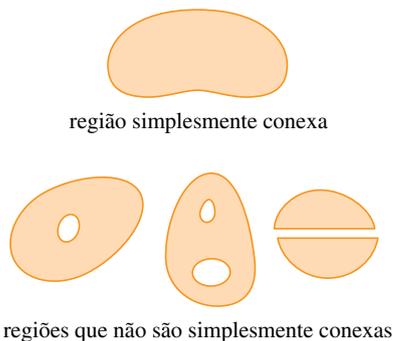


FIGURA 7

6 Teorema Seja $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$ um campo vetorial em uma região aberta simplesmente conexa D . Suponha que P e Q tenham derivadas contínuas de primeira ordem e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{em todo o } D$$

Então \mathbf{F} é conservativo.

EXEMPLO 2 Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y) \mathbf{i} + (x - 2) \mathbf{j}$$

é ou não conservativo.

SOLUÇÃO Sejam $P(x, y) = x - y$ e $Q(x, y) = x - 2$. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Como $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$, pelo Teorema 5, \mathbf{F} não é conservativo.

EXEMPLO 3 Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy) \mathbf{i} + (x^2 - 3y^2) \mathbf{j}$$

é ou não conservativo.

SOLUÇÃO Seja $P(x, y) = 3 + 2xy$ e $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Além disso, o domínio de \mathbf{F} é o plano inteiro ($D = \mathbb{R}^2$), que é aberto e simplesmente conexo. Portanto, podemos aplicar o Teorema 6 e concluir que \mathbf{F} é conservativo.

No Exemplo 3, o Teorema 6 diz que \mathbf{F} é conservativo, mas não mostra como encontrar a função (potencial) f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. A demonstração do Teorema 4 nos dá uma pista de como encontrar f . Usamos "integração parcial", como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4

(a) Se $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy) \mathbf{i} + (x^2 - 3y^2) \mathbf{j}$, encontre uma função de f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

(b) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = e^t \sin t \mathbf{i} + e^t \cos t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

SOLUÇÃO

(a) Do Exemplo 3 sabemos que \mathbf{F} é conservativo e, assim, existe uma função f com $\nabla f = \mathbf{F}$, ou seja,

$$\boxed{7} \quad f_x(x, y) = 3 + 2xy$$

$$\boxed{8} \quad f_y(x, y) = x^2 - 3y^2$$

Integrando $\boxed{7}$ com relação a x , obtemos

$$\boxed{9} \quad f(x, y) = 3x + x^2y + g(y)$$

Observe que a constante de integração é uma constante em relação a x , ou seja, uma função de y , que chamamos $g(y)$. Em seguida, derivamos ambos os lados de $\boxed{9}$ em relação a y :

$$\boxed{10} \quad f_y(x, y) = x^2 + g'(y)$$

Comparando $\boxed{8}$ e $\boxed{10}$, vemos que

$$g'(y) = -3y^2$$

Integrando com relação a y , obtemos

$$g(y) = -y^3 + K$$

onde K é uma constante. Substituindo em $\boxed{9}$, temos

$$f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + K$$

como a função potencial desejada.

(b) Para aplicarmos o Teorema 2, devemos conhecer os pontos inicial e final de C , isto é, $\mathbf{r}(0) = (0, 1)$ e $\mathbf{r}(\pi) = (0, -e^\pi)$. Na expressão para $f(x, y)$ da parte (a), qualquer valor da constante K serve. Então tomemos $K = 0$. Assim, temos

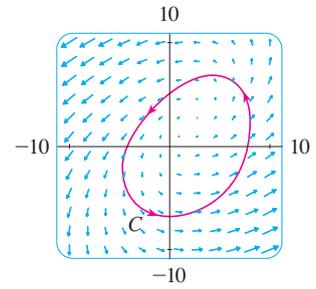


FIGURA 8

As Figuras 8 e 9 mostram os campos vetoriais dos Exemplos 2 e 3, respectivamente. Os vetores da Figura 8 que começam na curva fechada C parecem apontar aproximadamente para a mesma direção que C . Assim, parece que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} > 0$ e portanto \mathbf{F} não seria conservativo. Os cálculos no Exemplo 2 confirmam essa impressão. Alguns dos vetores perto das curvas C_1 e C_2 na Figura 9 apontam aproximadamente para a mesma direção que as curvas, enquanto outros apontam para a direção oposta. Portanto, parece razoável que as integrais de linha sobre toda curva fechada sejam θ . O Exemplo 3 mostra que, de fato, \mathbf{F} é conservativo.

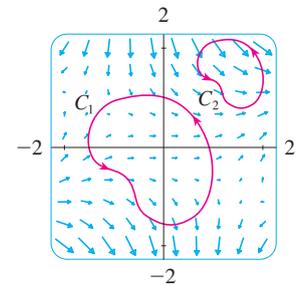


FIGURA 9

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(0, -e^\pi) - f(0, 1) = e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1$$

Esse método é mais curto que o método direto de cálculo para as integrais de linha que aprendemos na Seção 16.2.

Um critério para determinar se um campo vetorial \mathbf{F} em \mathbb{R}^3 é conservativo é dado na Seção 16.5. Entretanto, o exemplo seguinte demonstra que a técnica para encontrar a função potencial é da mesma forma que nos campos vetoriais em \mathbb{R}^2 .

EXEMPLO 5 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \mathbf{i} + (2xy + e^{3z}) \mathbf{j} + 3ye^{3z} \mathbf{k}$, encontre uma função f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

SOLUÇÃO Se existe tal função f , então

$$\text{11} \quad f_x(x, y, z) = y^2$$

$$\text{12} \quad f_y(x, y, z) = 2xy + e^{3z}$$

$$\text{13} \quad f_z(x, y, z) = 3ye^{3z}$$

Integrando [11] em relação a x , obtemos

$$\text{14} \quad f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z)$$

onde $g(y, z)$ é uma constante em relação a x . Em seguida, derivando [14] em relação a y , temos

$$f_y(x, y, z) = 2xy + g_y(y, z)$$

e, comparando com [12] vem

$$g_y(y, z) = e^{3z}$$

Então $g(y, z) = ye^{3z} + h(z)$ e reescrevemos [14] como

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

Finalmente, derivando em relação a z e comparando com [13], obtemos $h'(z) = 0$ e, portanto, $h(z) = K$, uma constante. A função desejada é

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + K$$

É fácil verificar que $\nabla f = \mathbf{F}$.

Conservação de Energia

Vamos aplicar as ideias deste capítulo a um campo de força contínuo \mathbf{F} que move um objeto ao longo de um caminho C dado por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, onde $\mathbf{r}(a) = A$ é o ponto inicial e $\mathbf{r}(b) = B$ é o ponto terminal de C . De acordo com a Segunda Lei do Movimento de Newton (ver Seção 13.4), a força $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ a um ponto em C está relacionada com a aceleração $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ pela equação

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$$

Assim, o trabalho realizado pela força sobre o objeto é

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)] dt && \text{(Teorema 13.2.3, Fórmula 4)} \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|^2 dt = \frac{m}{2} [|\mathbf{r}'(t)|^2]_a^b && \text{(Teorema Fundamental do Cálculo)} \\ &= \frac{m}{2} (|\mathbf{r}'(b)|^2 - |\mathbf{r}'(a)|^2) \end{aligned}$$

Portanto,

$$15 \quad W = \frac{1}{2}m |\mathbf{v}(b)|^2 - \frac{1}{2}m |\mathbf{v}(a)|^2$$

onde $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ é a velocidade.

A quantidade $\frac{1}{2}m |\mathbf{v}(t)|^2$, ou seja, a metade da massa multiplicada pelo quadrado da velocidade escalar, é chamada **energia cinética** do objeto. Portanto, podemos reescrever a Equação 15 como

$$16 \quad W = K(B) - K(A)$$

que diz que o trabalho realizado pelo campo de forças ao longo do caminho C é igual à variação da energia cinética nas extremidades de C .

Agora vamos admitir que \mathbf{F} seja um campo de forças conservativo, ou seja, podemos escrever $\mathbf{F} = \nabla f$. Em física, a **energia potencial** de um objeto no ponto de (x, y, z) é definida como $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, portanto temos $\mathbf{F} = -\nabla P$. Então, pelo Teorema 2, temos

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r} = -[P(\mathbf{r}(b)) - P(\mathbf{r}(a))] = P(A) - P(B)$$

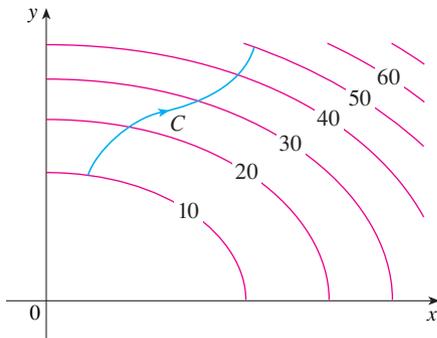
Comparando essa equação com a Equação 16, vemos que

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B)$$

que diz que, se um objeto se move de um ponto A para outro B sob a influência de um campo de forças conservativo, então a soma de sua energia potencial e sua energia cinética permanece constante. Essa é a chamada **Lei da Conservação de Energia** e é a razão pela qual o campo vetorial é denominado *conservativo*.

16.3 Exercícios

1. A figura mostra uma curva C e um mapa de contorno de uma função f cujo gradiente é contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$.



2. É dada uma tabela de valores de uma função f com gradiente contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$, onde C tem equações paramétricas

$$x = t^2 + 1, \quad y = t^3 + t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$x \backslash y$	0	1	2
0	1	6	4
1	3	5	7
2	8	2	9

3–10 Determine se \mathbf{F} é ou não um campo vetorial conservador. Se for, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

3. $\mathbf{F}(x, y) = (2x - 3y)\mathbf{i} + (-3x + 4y - 8)\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \sin y \mathbf{i} + e^x \cos y \mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y \mathbf{i} + e^x \sin y \mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 2y^2)\mathbf{i} + (4xy + 3)\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F}(x, y) = (ye^x + \sin y)\mathbf{i} + (e^x + x \cos y)\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + y^{-2})\mathbf{i} + (x^2 - 2xy^{-3})\mathbf{j}, y < 0$

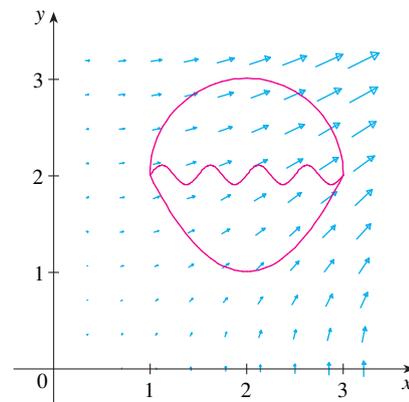
9. $\mathbf{F}(x, y) = (\ln y + 2xy^3)\mathbf{i} + (3x^2y^2 + x/y)\mathbf{j}$

10. $\mathbf{F}(x, y) = (xy \cosh xy + \sinh xy)\mathbf{i} + (x^2 \cosh xy)\mathbf{j}$

11. A figura mostra o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = \langle 2xy, x^2 \rangle$ e três curvas que começam em $(1, 2)$ e terminam em $(3, 2)$.

(a) Explique por que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tem o mesmo valor para as três curvas.

(b) Qual é esse valor comum?



12–18 (a) Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ e (b) use a parte (a) para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sobre a curva C dada.

12. $\mathbf{F}(x, y) = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j}$,
 C é o arco da parábola $y = 2x^2$ de $(-1, 2)$ a $(2, 8)$

13. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2 \mathbf{i} + x^2y \mathbf{j}$,
 $C: \mathbf{r}(t) = \langle t + \sin \frac{1}{2}\pi t, t + \cos \frac{1}{2}\pi t \rangle, 0 \leq t \leq 1$

14. $\mathbf{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy} \mathbf{i} + x^2e^{xy} \mathbf{j}$,
 $C: \mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j}, 0 \leq t \leq \pi/2$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + (xy + 2z) \mathbf{k}$,
 C é o segmento de reta de $(1, 0, -2)$ a $(4, 6, 3)$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2z + 2xz^2) \mathbf{i} + 2xyz \mathbf{j} + (xy^2 + 2x^2z) \mathbf{k}$,
 $C: x = \sqrt{t}, y = t + 1, z = t^2, 0 \leq t \leq 1$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = yze^{xz} \mathbf{i} + e^{xz} \mathbf{j} + xye^{xz} \mathbf{k}$,
 $C: \mathbf{r}(t) = (t^2 + 1) \mathbf{i} + (t^2 - 1) \mathbf{j} + (t^2 - 2t) \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin y \mathbf{i} + (x \cos y + \cos z) \mathbf{j} - y \sin z \mathbf{k}$,
 $C: \mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}, 0 \leq t \leq \pi/2$

19–20 Mostre que a integral de linha é independente do caminho e calcule a integral.

19. $\int_C \operatorname{tg} y \, dx + x \sec^2 y \, dy$,
 C é qualquer caminho de $(1, 0)$ a $(2, \pi/4)$

20. $\int_C (1 - ye^{-x}) \, dx + e^{-x} \, dy$,
 C é qualquer caminho de $(0, 1)$ a $(1, 2)$

21. Suponha que você seja solicitado a determinar a curva que exige o mínimo de trabalho para um campo de força \mathbf{F} para mover uma partícula de um ponto a outro ponto. Você decide verificar primeiro se \mathbf{F} é conservativo, e de fato verifica-se que ela é. Como você responde à solicitação?

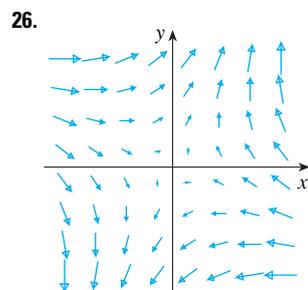
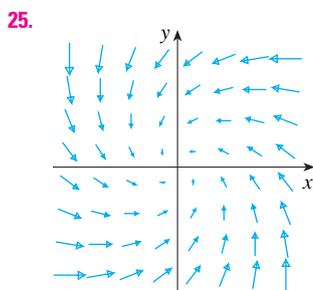
22. Suponhamos que uma experiência determine que a quantidade de trabalho necessária para um campo de força \mathbf{F} para mover uma partícula do ponto $(1, 2)$ para o ponto de $(5, -3)$ ao longo de uma curva C_1 é de $1,2 \mathbf{J}$ e do trabalho realizado por \mathbf{F} em mover a partícula ao longo de outra curva C_2 entre os mesmos dois pontos é de $1,4 \mathbf{J}$. O que você pode dizer sobre \mathbf{F} ? Por quê?

23–24 Determine o trabalho realizado pelo campo de força \mathbf{F} ao mover um objeto de P para Q .

23. $\mathbf{F}(x, y) = 2y^{3/2} \mathbf{i} + 3x\sqrt{y} \mathbf{j}; \quad P(1, 1), Q(2, 4)$

24. $\mathbf{F}(x, y) = e^{-y} \mathbf{i} - xe^{-y} \mathbf{j}; \quad P(0, 1), Q(2, 0)$

25–26 A partir do gráfico de \mathbf{F} você diria que o campo é conservativo? Explique.



27. Se $\mathbf{F}(x, y) = \sin y \mathbf{i} + (1 + x \cos y) \mathbf{j}$, use um gráfico para conjecturar se \mathbf{F} é conservativo. Então, determine se sua conjectura estava correta.

28. Seja $\mathbf{F} = \nabla f$, onde $f(x, y) = \sin(x - 2y)$. Encontre curvas C_1 e C_2 que não sejam fechadas e satisfaçam a equação.

(a) $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ (b) $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1$

29. Mostre que, se um campo vetorial $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$ é conservativo e P, Q, R têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas, então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

30. Use o Exercício 29 para mostrar que a integral de linha $\int_C y \, dx + x \, dy + xyz \, dz$ não é independente do caminho.

31–34 Determine se o conjunto dado é ou não: (a) aberto, (b) conexo por caminhos e (c) simplesmente conexo.

31. $\{(x, y) \mid 0 < y < 3\}$ **32.** $\{(x, y) \mid 1 < |x| < 2\}$

33. $\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

34. $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (2, 3)\}$

35. Seja $\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}}{x^2 + y^2}$.

(a) Mostre que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.

(b) Mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ não é independente do caminho. [Dica: Calcule $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C_1 e C_2 são as metades superior e inferior do círculo $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.] Isto contradiz o Teorema 6?

36. (a) Suponha que \mathbf{F} seja um campo vetorial inverso do quadrado, ou seja,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

para alguma constante c , onde $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$. Determine o trabalho realizado por \mathbf{F} ao mover um objeto de um ponto P_1 por um caminho para um ponto P_2 em termos da distância d_1 e d_2 desses pontos à origem.

(b) Um exemplo de um campo de quadrado inverso é o campo gravitacional $\mathbf{F} = -(mMG)\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ discutido no Exemplo 4 na Seção 16.1. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo gravitacional quando a Terra se move do afélio (em uma distância máxima de $1,52 \times 10^8$ km do Sol) ao periélio (em uma distância mínima de $1,47 \times 10^8$ km). (Use os valores $m = 5,97 \times 10^{24}$ kg, $M = 1,99 \times 10^{30}$ kg e $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg².)

(b) Outro exemplo de campo inverso do quadrado é o campo elétrico $\mathbf{F} = eqQ\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ discutido no Exemplo 5 da Seção 16.1. Suponha que um elétron com carga de $-1,6 \times 10^{-19}$ C esteja localizado na origem. Uma carga positiva unitária é colocada à distância de 10^{-12} m do elétron e se move para uma posição que está à metade da distância original do elétron. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo elétrico. (Use o valor $\epsilon = 8,985 \times 10^9$.)

16.4 Teorema de Green

O teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha ao redor de uma curva fechada simples C e uma integral dupla sobre a região do plano D delimitada por C . (Veja a Figura 1. Assumimos que D é constituído por todos os pontos dentro de C , bem como todos os pontos de C .) Ao enunciarmos o Teorema de Green, usamos a convenção de que a **orientação positiva** de uma curva fechada simples C refere-se ao *sentido anti-horário* de C , percorrido uma só vez. Assim, se C é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, então a região D está sempre do lado esquerdo quando $\mathbf{r}(t)$ percorre C . (Veja a Figura 2.)

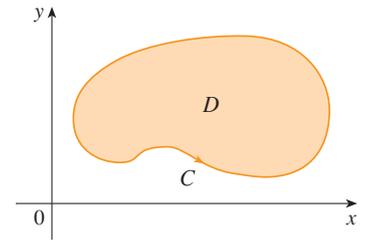


FIGURA 1

Lembre-se de que o lado esquerdo desta equação é outra forma de escrever $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$.

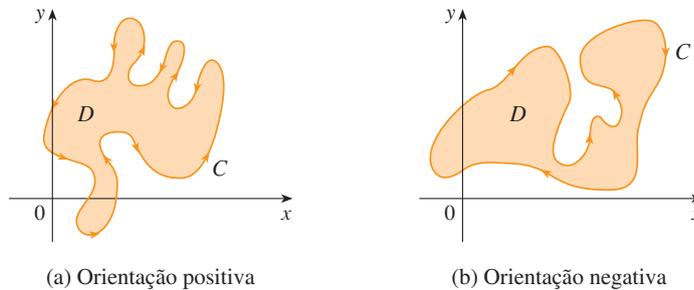


FIGURA 2

(a) Orientação positiva

(b) Orientação negativa

Teorema de Green Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C . Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D , então

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

OBSERVAÇÃO A notação

$$\oint_C P dx + Q dy \quad \text{ou} \quad \oint_C P dx + Q dy$$

é algumas vezes usada para indicar que a integral de linha é calculada usando a orientação positiva da curva fechada C . Outra notação para a curva na fronteira de D , positivamente orientada e ∂D , dá a equação do Teorema de Green pode ser escrita como

$$\boxed{1} \quad \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} P dx + Q dy$$

O Teorema de Green pode ser olhado como o correspondente do Teorema Fundamental do Cálculo para integrais duplas. Compare a Equação 1 com o enunciado da segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo, na seguinte equação:

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

Em ambos os casos existe uma integral envolvendo as derivadas (F' , $\partial Q/\partial x$ e $\partial P/\partial y$) do lado esquerdo da equação. E em ambos os casos, o lado direito envolve os valores das funções originais (F , Q e P) apenas na fronteira do domínio. (No caso unidimensional, o domínio é um intervalo $[a, b]$ cuja fronteira consiste em apenas dois pontos, a e b .)

O Teorema de Green não é fácil de demonstrar no caso geral apresentado no Teorema 1, mas faremos uma demonstração para o caso especial onde a região é tanto de tipo I como de tipo II (veja a Seção 15.3). Chamamos tais regiões de **regiões simples**.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE GREEN NOS CASOS ONDE D É UMA REGIÃO SIMPLES Observe que o Teorema de Green estará demonstrado se mostrarmos que

$$\boxed{2} \quad \int_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

e

$$\boxed{3} \quad \int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA$$

George Green

O teorema de Green tem esse nome por causa do cientista autodidata inglês George Green (1793-1841). Ele trabalhou em tempo integral na padaria de seu pai a partir dos 9 anos de idade e aprendeu sozinho a matemática em livros da biblioteca. Em 1828, Green publicou *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, contudo, somente foram impressas 100 cópias, a maioria presenteada a seus amigos. Esse panfleto continha um teorema equivalente ao que conhecemos como Teorema de Green hoje, mas não se tornou conhecido na época. Finalmente, aos 40 anos, Green entrou para a Universidade de Cambridge como aluno de graduação, porém morreu quatro anos após ter se formado. Em 1846, William Thompson (lord Kelvin) encontrou uma cópia dos ensaios de Green, percebeu sua importância e os reimprimiu. Green foi a primeira pessoa a tentar formular uma teoria matemática da eletricidade e do magnetismo. Seu estudo serviu de base para os trabalhos de teoria do eletromagnetismo subsequentes de Thomson, Stokes, Rayleigh e Maxwell.

Vamos demonstrar a Equação 2 exprimindo D como uma região do tipo I:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

onde g_1 e g_2 são funções contínuas. Isso nos permite calcular a integral dupla do lado direito da Equação 2, como segue:

$$\boxed{4} \quad \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx$$

onde o último passo segue do Teorema Fundamental do Cálculo.

Vamos agora calcular o lado esquerdo da Equação 2, quebrando C como a união das quatro curvas C_1 , C_2 , C_3 e C_4 mostradas na Figura 3. Sobre C_1 tomamos x como parâmetro e escrevemos as equações paramétricas como $x = x$, $y = g_1(x)$, $a \leq x \leq b$. Logo,

$$\int_{C_1} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) dx$$

Observe que C_3 vai da direita para a esquerda, mas $-C_3$ vai da esquerda para a direita, então podemos escrever as equações paramétricas de $-C_3$ como $x = x$, $y = g_2(x)$, $a \leq x \leq b$. Portanto,

$$\int_{-C_3} P(x, y) dx = - \int_{C_3} P(x, y) dx = - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx$$

Sobre C_2 ou C_4 (qualquer uma delas pode se reduzir a um único ponto), x é constante e, assim, $dx = 0$ e

$$\int_{C_2} P(x, y) dx = 0 = \int_{C_4} P(x, y) dx$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y) dx &= \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx + \int_{C_3} P(x, y) dx + \int_{C_4} P(x, y) dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx \end{aligned}$$

Comparando essa expressão com a da Equação 4, vemos que

$$\int_C P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

A Equação 3 pode ser demonstrada de forma semelhante, exprimindo D como região do tipo II (veja o Exercício 30). Então, somando as Equações 2 e 3, obtemos o Teorema de Green. ■

EXEMPLO 1 Calcule $\int_C x^4 dx + xy dy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$, de $(1, 0)$ a $(0, 1)$, e de $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

SOLUÇÃO Apesar desta integral poder ser calculada pelos métodos usuais da Seção 16.2, isto envolveria o cálculo de três integrais separadas sobre os três lados do triângulo. Em vez disso, vamos usar o Teorema de Green. Observe que a região D englobada por C é simples e que C tem orientação positiva (veja a Figura 4). Se tomarmos $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$, então teremos

$$\begin{aligned} \int_C x^4 dx + xy dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx \\ &= -\frac{1}{6} (1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$
■

EXEMPLO 2 Calcule $\oint_C (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 9$.

SOLUÇÃO A região D delimitada por C é o círculo $x^2 + y^2 \leq 9$, então vamos mudar para coordenadas polares depois de aplicar o Teorema de Green:

$$\oint_C (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy$$

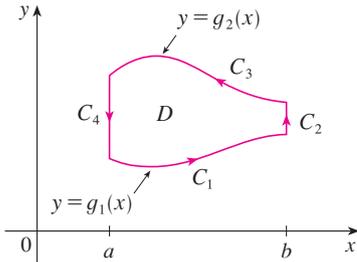


FIGURA 3

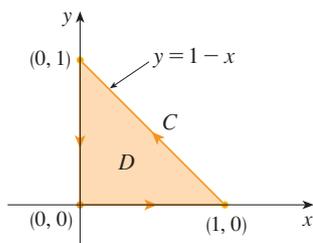


FIGURA 4

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (7x + \sqrt{y^4 + 1}) - \frac{\partial}{\partial y} (3y - e^{\sin x}) \right] dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (7 - 3) r dr d\theta = 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r dr = 36\pi$$

Nos Exemplos 1 e 2, consideramos que a integral dupla era mais fácil de calcular que a integral de linha. (Tente configurar a integral de linha no Exemplo 2 e em breve você vai ser convencido!) Mas às vezes é mais simples calcular a integral de linha, e, nesses casos, usaremos o Teorema de Green na ordem inversa. Por exemplo, se sabemos que $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ sobre uma curva C , então o Teorema de Green fornece

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P dx + Q dy = 0$$

não importando quais os valores das funções P e Q em D .

Outra aplicação da direção inversa do Teorema de Green está no cálculo de áreas. Como a área de uma região D é $\iint_D 1 dA$, desejamos escolher P e Q tais que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Existem várias possibilidades:

$$\begin{array}{lll} P(x, y) = 0 & P(x, y) = -y & P(x, y) = -\frac{1}{2}y \\ Q(x, y) = x & Q(x, y) = 0 & Q(x, y) = \frac{1}{2}x \end{array}$$

Assim, o Teorema de Green dá as seguintes fórmulas para a área de D :

$$A = \oint_C x dy = -\oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

EXEMPLO 3 Determine a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

SOLUÇÃO A elipse tem equações paramétricas $x = a \cos t$ e $y = b \sin t$, onde $0 \leq t \leq 2\pi$. Usando a terceira fórmula da Equação 5 temos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t) dt - (b \sin t)(-a \sin t) dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab \end{aligned}$$

A fórmula 5 pode ser usada para explicar como planímetros trabalham. Um **planímetro** é um instrumento mecânico usado para medir a área de uma região, traçando a curva limite. Esses dispositivos são úteis em todas as ciências: em biologia para medir a área de folhas ou asas, na medicina para medir o tamanho da secção transversal de órgãos ou tumores, em silvicultura, para estimar o tamanho das regiões florestais a partir de fotografias.

A Figura 5 mostra o funcionamento de um planímetro polar: o polo é fixo e, como o traçador é movido ao longo da curva limite da região, a roda desliza parcialmente e parcialmente rola perpendicular ao braço do traçador. O planímetro mede a distância a que a roda gira e é proporcional à área da região fechada. A explicação como consequência de Fórmula 5 pode ser encontrada nos seguintes artigos:

- R. W. Gatterman, “The planimeter as an example of Green’s Theorem”. *Amer. Mat. Monthly*, Vol. 88 (1981), p. 701–4.
- Tanya Leise, “As the planimeter wheel turns”. *College Math. Journal*, Vol. 38 (2007), p. 24–31.

Em vez de utilizarmos as coordenadas polares, podemos simplesmente usar o fato de que D é um círculo de raio 3 e escrever

$$\iint_D 4 dA = 4 \cdot \pi(3)^2 = 36\pi$$

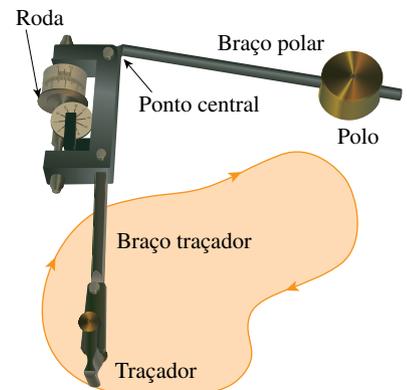


FIGURA 5
Um planímetro polar Keuffel e Esser

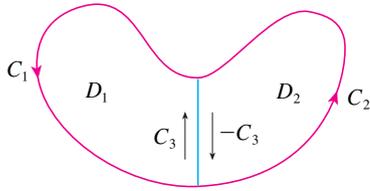


FIGURA 6

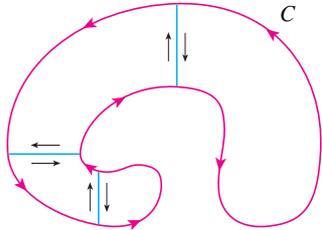


FIGURA 7

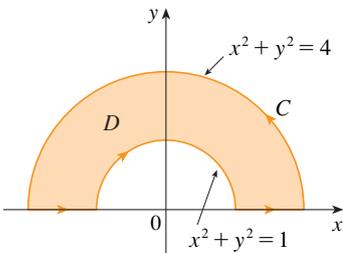


FIGURA 8

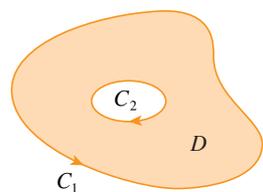


FIGURA 9

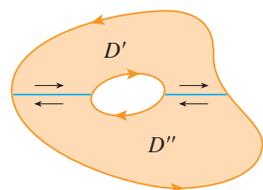


FIGURA 10

Versões estendidas do Teorema de Green

Apesar de termos demonstrado o Teorema de Green somente para o caso particular onde D é simples, podemos estendê-lo agora para o caso em que D é a união finita de regiões simples. Por exemplo, se D é uma região como a mostrada na Figura 6, então podemos escrever $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 são ambas simples. A fronteira de D_1 é $C_1 \cup C_3$ e a fronteira de D_2 é $C_2 \cup (-C_3)$; portanto, aplicando o Teorema de Green em D_1 e D_2 separadamente, obtemos

$$\int_{C_1 \cup C_3} P dx + Q dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\int_{C_2 \cup (-C_3)} P dx + Q dy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Se somarmos essas duas equações, as integrais de linha sobre C_3 e $-C_3$ se cancelam e obtemos

$$\int_{C_1 \cup C_2} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

que é o Teorema de Green para $D = D_1 \cup D_2$ uma vez que sua fronteira é $C = C_1 \cup C_2$.

O mesmo tipo de argumentação nos permite estabelecer o Teorema de Green para qualquer união finita de regiões simples que não se sobreponham (veja a Figura 7).

EXEMPLO 4 Calcule $\oint_C y^2 dx + 3xy dy$, onde C é o limite da região semianular D contida no semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUÇÃO Observe que, apesar de D não ser simples, o eixo y divide em duas regiões simples (veja a Figura 8). Em coordenadas polares, podemos escrever

$$D = \{(r, \theta) | 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Portanto, o Teorema de Green fornece

$$\oint_C y^2 dx + 3xy dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (3xy) - \frac{\partial}{\partial y} (y^2) \right] dA$$

$$= \iint_D y dA = \int_0^\pi \int_1^2 (r \operatorname{sen} \theta) r dr d\theta$$

$$= \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta d\theta \int_1^2 r^2 dr = [-\cos \theta]_0^\pi \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_1^2 = \frac{14}{3}$$

O Teorema de Green pode ser aplicado para regiões com furos, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas. Observe que a fronteira C da região D na Figura 9 é constituída por duas curvas fechadas simples C_1 e C_2 . Nós assumimos que estas curvas de contorno são orientadas de modo que a região D está sempre do lado esquerdo enquanto a curva C é percorrida. Assim, o sentido anti-horário é positivo para a curva exterior C_1 , mas no sentido horário para o interior da curva C_2 . Se dividirmos D em duas regiões D' e D'' , pela introdução das retas mostradas na Figura 10, e então aplicarmos o Teorema de Green a cada uma das regiões D' e D'' , obteremos

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$= \int_{\partial D'} P dx + Q dy + \int_{\partial D''} P dx + Q dy$$

Como as integrais de linha sobre a fronteira comum são em sentidos opostos, elas se cancelam e obtemos

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{C_1} P dx + Q dy + \int_{C_2} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy$$

que é o Teorema de Green para a região D .

EXEMPLO 5 Se $\mathbf{F}(x, y) = (-y \mathbf{i} + x \mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para todo caminho fechado simples que circunde a origem.

SOLUÇÃO Como C é um caminho fechado *arbitrário* contendo a origem em seu interior, é difícil calcular a integral dada diretamente. Então, vamos considerar um círculo anti-horário orientado C' com origem no centro e raio a , onde a é escolhido para ser pequeno o suficiente para que C' esteja contido em C (ver Figura 11). Seja D a região limitada por C e C' . Então a orientação positiva do limite é $C \cup (-C')$ e, aplicando a versão geral do Teorema de Green, temos

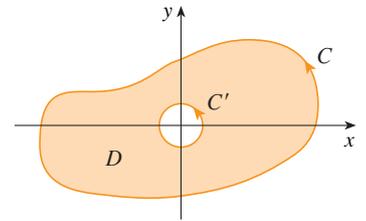


FIGURA 11

$$\begin{aligned} \int_C P dx + Q dy + \int_{-C'} P dx + Q dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] dA = 0 \end{aligned}$$

Logo,
$$\int_C P dx + Q dy = \int_{C'} P dx + Q dy$$

isto é,
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Agora podemos calcular facilmente essa última integral usando a parametrização dada por $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(a \cos t)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned}$$

Terminaremos esta seção utilizando o Teorema de Green para discutir um resultado enunciado na seção anterior.

ESBOÇO DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 16.3.6 Assumimos que $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$ é um campo vetorial em uma região simplesmente conexa D , que P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{em todo o } D$$

Se C é um caminho fechado simples qualquer em D e R é a região envolvida por C , o Teorema de Green nos dá

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_R 0 dA = 0$$

Uma curva que não seja simples se autointercepta em um ou mais pontos e pode ser dividida em diversas curvas fechadas simples. Mostramos que as integrais de linha de \mathbf{F} sobre essas curvas simples são todas 0 e, somando essas integrais, podemos ver que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer curva fechada C . Portanto, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D pelo Teorema 16.3.3. Segue então que \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo.

16.4 Exercícios

1–4 Calcule a integral de linha por dois métodos: (a) diretamente e (b) utilizando o Teorema de Green.

1. $\oint_C (x - y) dx + (x + y) dy$,
 C é o círculo com centro na origem e raio 2

2. $\oint_C xy dx + x^2 dy$,
 C é o retângulo com vértices (0, 0) (3, 0), (3, 1) e (0, 1)

3. $\oint_C xy dx + x^2 y^3 dy$,
 C é o triângulo com vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 2)

4. $\oint_C x^2 y^2 dx + xy dy$, C consiste no arco da parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (1, 1) e os segmentos de reta de (1, 1) a (0, 1) e de (0, 1) a (0, 0)

5–10 Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

5. $\int_C xy^2 dx + 2x^2 y dy$,
 C é o triângulo com vértices (0, 0), (2, 2) e (2, 4)

6. $\int_C \cos y \, dx + x^2 \sin y \, dy$,
 C é o retângulo com vértices $(0, 0)$, $(5, 0)$, $(5, 2)$ e $(0, 2)$
7. $\int_C (y + e^{\sqrt{x}}) \, dx + (2x + \cos y^2) \, dy$,
 C é o limite da região englobada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$
8. $\int_C xe^{-2x} \, dx + (x^4 + 2x^2y^2) \, dy$, C é o limite da região entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$
9. $\int_C y^3 \, dx - x^3 \, dy$, C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$
10. $\int_C (1 - y^3) \, dx + (x^3 + e^{y^2}) \, dy$, C é o limite da região entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$

11–14 Use o teorema de Green para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (Verifique a orientação da curva antes de aplicar o teorema.)

11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y \cos x - xy \sin x, xy + x \cos x \rangle$,
 C é o triângulo de $(0, 0)$ a $(0, 4)$ a $(2, 0)$ a $(0, 0)$
12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle e^{-x} + y^2, e^{-y} + x^2 \rangle$,
 C consiste no arco da curva $y = \cos x$ de $(-\pi/2, 0)$ a $(\pi/2, 0)$ e o segmento de reta de $(\pi/2, 0)$ a $(-\pi/2, 0)$
13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y - \cos y, x \sin y \rangle$,
 C é o círculo $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$ orientado no sentido horário
14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle \sqrt{x^2 + 1}, \operatorname{tg}^{-1}x \rangle$, C é o triângulo de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ a $(0, 1)$ a $(0, 0)$

SCA 15–16 Verifique o Teorema de Green usando um sistema de computação algébrica para calcular tanto a integral de linha como a integral dupla.

15. $P(x, y) = y^2e^x$, $Q(x, y) = x^2e^y$,
 C consiste no segmento de reta de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ seguido pelo arco da parábola $y = 2 - x^2$ de $(1, 1)$ a $(-1, 1)$
16. $P(x, y) = 2x - x^3y^5$, $Q(x, y) = x^3y^8$,
 C é a elipse $4x^2 + y^2 = 4$

17. Use o Teorema de Green para achar o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}(x, y) = x(x + y) \mathbf{i} + xy^2 \mathbf{j}$ ao mover uma partícula da origem ao longo do eixo x para $(1, 0)$, em seguida ao longo de um segmento de reta até $(0, 1)$, e então de volta à origem ao longo do eixo y .
18. Uma partícula inicialmente no ponto $(-2, 0)$ se move ao longo do eixo x para $(2, 0)$, e então ao longo da semicircunferência $y = \sqrt{4 - x^2}$ até o ponto inicial. Utilize o Teorema de Green para determinar o trabalho realizado nessa partícula pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, x^3 + 3xy^2 \rangle$.
19. Use uma das fórmulas em **[5]** para achar a área sob um arco da cicloide $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

[5] 20. Se uma circunferência C de raio 1 rola ao longo do interior da circunferência $x^2 + y^2 = 16$, um ponto fixo P de C descreve uma curva chamada *epicicloide*, com equações paramétricas $x = 5 \cos t - \cos 5t$, $y = 5 \sin t - \sin 5t$. Faça o gráfico da epicicloide e use **[5]** para calcular a área da região que ela envolve.

21. (a) Se C é o segmento de reta ligando o ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2) , mostre que

$$\int_C x \, dy - y \, dx = x_1y_2 - x_2y_1$$

- (b) Se os vértices de um polígono, em sentido anti-horário, são (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , \dots , (x_n, y_n) mostre que a área do polígono é

$$A = \frac{1}{2} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \dots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)]$$

- (c) Encontre a área do pentágono com vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(0, 2)$ e $(-1, 1)$.

22. Seja D a região limitada por um caminho fechado simples C no plano xy . Utilize o Teorema de Green para demonstrar que as coordenadas do centroide (\bar{x}, \bar{y}) de D são

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \oint_C x^2 \, dy \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A} \oint_C y^2 \, dx$$

onde A é a área de D .

23. Use o Exercício 22 para encontrar o centroide de um quarto de uma região circular de raio a .
24. Use o Exercício 22 para encontrar o centroide da região triangular de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$ e (a, b) , onde $a > 0$ e $b > 0$.
25. Uma lâmina plana com densidade constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa uma região do plano xy limitada por um caminho fechado simples C . Mostre que seus momentos de inércia em relação aos eixos são

$$I_x = -\frac{\rho}{3} \oint_C y^3 \, dx \quad I_y = \frac{\rho}{3} \oint_C x^3 \, dy$$

26. Utilize o Exercício 25 para achar o momento de inércia de um círculo de raio a com densidade constante ρ em relação a um diâmetro. (Compare com o Exemplo 4 da Seção 15.5.)
27. Use o método do Exercício 5 para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{2xy \mathbf{i} + (y^2 - x^2) \mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^2}$$

e C é qualquer curva fechada simples positivamente orientada que envolve a origem.

28. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2 + y, 3x - y^2 \rangle$ e C é a fronteira positivamente orientada de uma região D que tem área 6.
29. Se \mathbf{F} é o campo vetorial do Exemplo 5, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado simples que não passe pela origem e nem a circunde.
30. Complete a demonstração do Teorema de Green demonstrando a Equação 3.
31. Utilize o Teorema de Green para demonstrar a fórmula de mudança de variáveis para as integrais duplas (Fórmula 15.10.9) para o caso onde $f(x, y) = 1$:

$$\iint_R dx \, dy = \iint_S \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \, dv$$

Aqui, R é a região do plano xy que corresponde à região S no plano uv sob a transformação dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$. [Dica: Observe que o lado esquerdo é $A(R)$ e aplique a primeira parte da Equação 5. Converta a integral de linha sobre ∂R para uma integral sobre ∂S e aplique o Teorema de Green no plano uv .]

16.5 Rotacional e Divergente

Nesta seção, definiremos duas operações que podem ser realizadas com campos vetoriais e que são essenciais nas aplicações de cálculo vetorial em mecânica dos fluidos e em eletricidade e magnetismo. Cada operação lembra uma derivação, mas uma produz um campo vetorial enquanto a outra gera um campo escalar.

Rotacional

Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e as derivadas parciais de P , Q e R existem, então o **rotacional** de \mathbf{F} é o campo vetorial em \mathbb{R}^3 definido por

$$\mathbf{1} \quad \text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Para auxiliarmos na memorização, vamos reescrever a Equação 1 usando notação de operadores. Introduziremos o operador diferencial vetorial ∇ (“del”) como

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Quando ele opera sobre uma função escalar, produz o gradiente de f :

$$\nabla f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

Se pensarmos em ∇ como um vetor de componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ e $\partial/\partial z$, podemos também considerar o produto vetorial formal de ∇ pelo campo vetorial \mathbf{F} como segue:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \text{rot } \mathbf{F} \end{aligned}$$

Assim, o modo mais fácil de lembrar a Definição 1 é pela expressão simbólica

2

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

EXEMPLO 1 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$, determine $\text{rot } \mathbf{F}$.

SOLUÇÃO Usando a Equação 2, temos

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz) \right] \mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz) \right] \mathbf{j} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz) \right] \mathbf{k} \\ &= (-2y - xy) \mathbf{i} - (0 - x) \mathbf{j} + (yz - 0) \mathbf{k} \\ &= -y(2 + x) \mathbf{i} + x \mathbf{j} + yz \mathbf{k} \end{aligned}$$

SCA A maioria dos sistemas de computação algébrica tem comandos para calcular rotacional e divergência de campos vetoriais. Se você tem acesso a um SCA, use esses comandos para verificar as respostas dos exemplos e exercícios desta seção.

Lembre-se de que o gradiente de uma função f de três variáveis é um campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 , de modo que podemos calcular seu rotacional. O próximo teorema diz que o rotacional do gradiente de um campo vetorial é $\mathbf{0}$.

3 Teorema Se f é uma função de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\text{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$$

DEMONSTRAÇÃO Temos

$$\begin{aligned} \text{rot}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k} \\ &= 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Observe a semelhança com o que sabemos da Seção 12.4: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ para cada vetor tridimensional \mathbf{a} .

pelo Teorema de Clairaut. ■

Como um campo vetorial conservativo é da forma $\mathbf{F} = \nabla f$, o Teorema 3 pode ser reescrito como segue:

$$\text{Se } \mathbf{F} \text{ é conservativo, então } \text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

E assim obtemos um modo de verificar que um campo vetorial não é conservativo.

EXEMPLO 2 Mostre que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + xyz \mathbf{j} - y^2 \mathbf{k}$ não é conservativo.

SOLUÇÃO No Exemplo 1, mostramos que

$$\text{rot } \mathbf{F} = -y(2 + x) \mathbf{i} + x \mathbf{j} + yz \mathbf{k}$$

Isso mostra que $\text{rot } \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ e portanto, pelo Teorema 3, \mathbf{F} não é conservativo. ■

Em geral, a recíproca do Teorema 3 não é verdadeira, mas o próximo teorema afirma que, se \mathbf{F} for definido em todo o espaço, a recíproca vale. (Mais especificamente, a recíproca vale se o domínio é simplesmente conexo, ou seja, “não apresenta furos”.) O teorema 4 é a versão tridimensional do Teorema 16.3.6. Sua demonstração requer o teorema de Stokes e será esboçada no final da Seção 16.8.

4 Teorema Se \mathbf{F} for um campo vetorial definido sobre todo \mathbb{R}^3 cujas funções componentes tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, \mathbf{F} será um campo vetorial conservativo.

EXEMPLO 3

Mostre que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 z^3 \mathbf{i} + 2xyz^3 \mathbf{j} + 3xy^2 z^2 \mathbf{k}$$

é um campo vetorial conservativo.

(b) Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

SOLUÇÃO

(a) Calculemos o rotacional de \mathbf{F} :

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2 z^2 \end{vmatrix} \\ &= (6xyz^2 - 6xyz^2) \mathbf{i} - (3y^2 z^2 - 3y^2 z^2) \mathbf{j} + (2yz^3 - 2yz^3) \mathbf{k} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Compare isso com o Exercício 29 da Seção 16.3

Como $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ e o domínio de \mathbf{F} é \mathbb{R}^3 , \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo pelo Teorema 4.
 (b) A técnica para encontrar f foi dada na Seção 16.3. Temos

$$\begin{aligned} \text{5} \quad & f_x(x, y, z) = y^2z^3 \\ \text{6} \quad & f_y(x, y, z) = 2xyz^3 \\ \text{7} \quad & f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 \end{aligned}$$

Integrando [5] em relação a x , obtemos

$$\text{8} \quad f(x, y, z) = xy^2z^3 + g(y, z)$$

Derivando [8] em relação a y , obtemos $f_y(x, y, z) = 2xyz^3 + g_y(y, z)$. Comparando com [6], obtemos $g_y(y, z) = 0$. Assim, $g(y, z) = h(z)$ e

$$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 + h'(z)$$

Então [7] fornece $h'(z) = 0$. Portanto,

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$$

A razão para o nome *rotacional* é que o vetor rotacional está associado com rotações. Uma conexão será explicada no Exercício 37. Outra ocorre quando \mathbf{F} representa um campo de velocidade em mecânica dos fluidos (veja o Exemplo 3 na Seção 16.1). Partículas perto de (x, y, z) no fluido tendem a rodar em torno do eixo que aponta na direção de $\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z)$, e o comprimento do vetor rotacional é a medida de quão rápido as partículas se movem em torno desse eixo (veja a Figura 1). Se $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ no ponto P , então o fluido é isento de rotações em P e \mathbf{F} é chamado **irrotacional** em P . Em outras palavras, não há nenhum turbilhão ou redemoinho em P . Se $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, uma pequena roda de pás move-se com o líquido, mas não roda em torno do seu eixo. Se $\text{rot } \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, a roda com pás giraria em torno de seu eixo. Veremos mais detalhes sobre essa explanação na Seção 16.8, como consequência do Teorema de Stokes.

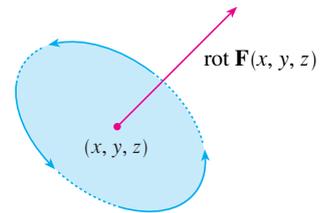


FIGURA 1

Divergente

Se $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ e $\partial R/\partial z$ existem, então o **divergente de \mathbf{F}** é a função de três variáveis definida por

$$\text{9} \quad \text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Observe que $\text{rot } \mathbf{F}$ é um campo vetorial, mas $\text{div } \mathbf{F}$ é um campo escalar. Em termos do operador gradiente $\nabla = (\partial/\partial x) \mathbf{i} + (\partial/\partial y) \mathbf{j} + (\partial/\partial z) \mathbf{k}$, o divergente de \mathbf{F} pode ser escrito simbolicamente como o produto escalar de ∇ e \mathbf{F} :

$$\text{10} \quad \text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

EXEMPLO 4 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + xyz \mathbf{j} - y^2 \mathbf{k}$, determine $\text{div } \mathbf{F}$.

SOLUÇÃO Pela definição de divergente (Equação 9 ou 10), temos

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) = z + xz$$

Se \mathbf{F} é um campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 , então $\text{rot } \mathbf{F}$ também é um campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 . Como tal, podemos calcular seu divergente. O próximo teorema mostra que o resultado é 0.

11 Teorema Se $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$ é um campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 e P , Q e R têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\text{div } \text{rot } \mathbf{F} = 0$$

Observe a analogia com o produto misto:
 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Usando as definições de divergente e rotacional, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois os termos se cancelam aos pares, pelo Teorema de Clairaut. ■

EXEMPLO 5 Mostre que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + xyz \mathbf{j} - y^2 \mathbf{k}$ não pode ser escrito como o rotacional de outro campo vetorial, ou seja, $\mathbf{F} \neq \operatorname{rot} \mathbf{G}$.

SOLUÇÃO No Exemplo 4 mostramos que

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = z + xz$$

e, portanto, $\mathbf{F} \neq 0$. Se fosse verdade que $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$, então o Teorema 11 daria

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{G} = 0$$

o que contradiz $\mathbf{F} \neq 0$. Portanto \mathbf{F} não é o rotacional de outro campo vetorial. ■

A razão para essa interpretação de $\operatorname{div} \mathbf{F}$ será explicada ao final da Seção 16.9 como consequência do Teorema do Divergente.

Novamente, a razão para o nome *divergente* pode ser entendida no contexto da mecânica dos fluidos. Se $\mathbf{F}(x, y, z)$ é a velocidade de um fluido (ou gás), então $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)$ representa a taxa de variação total (com relação ao tempo) da massa do fluido (ou gás) escoando do ponto (x, y, z) por unidade de volume. Em outras palavras, $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)$ mede a tendência de o fluido divergir do ponto (x, y, z) . Se $\mathbf{F} = 0$, então \mathbf{F} é dito **incompressível**.

Outro operador diferencial aparece quando calculamos o divergente do gradiente de um campo vetorial ∇f . Se f é uma função de três variáveis, temos

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

e essa expressão aparece tão frequentemente que vamos abreviá-la como $\nabla^2 f$. Esse operador

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

é chamado **operador de Laplace** por sua relação com a **equação de Laplace**

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Podemos também aplicar o laplaciano ∇^2 a um campo vetorial

$$\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$$

em termos de suas componentes:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 P \mathbf{i} + \nabla^2 Q \mathbf{j} + \nabla^2 R \mathbf{k}$$

Formas Vetoriais do Teorema de Green

Os operadores divergente e rotacional nos permitem escrever o Teorema de Green em uma versão que será útil futuramente. Consideramos uma região plana D , sua curva fronteira C e funções P e Q que satisfaçam as hipóteses do Teorema de Green. Em seguida, consideramos o campo vetorial $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$. A sua integral de linha é

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P dx + Q dy$$

e, considerando \mathbf{F} como um campo vetorial em \mathbb{R}^3 com terceira componente 0, temos

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Portanto,

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

e podemos reescrever a equação do Teorema de Green na forma vetorial

$$\boxed{12} \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA$$

A Equação 12 expressa a integral de linha da componente tangencial de \mathbf{F} ao longo de C como uma integral dupla da componente vertical rotacional \mathbf{F} sobre a região D delimitada por C . Vamos deduzir, agora, uma fórmula semelhante, envolvendo a componente *normal* de \mathbf{F} .

Se C é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} \quad a \leq t \leq b$$

então o vetor tangente unitário (veja a Seção 13.2) é

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{j}$$

Você pode verificar que o vetor normal unitário externo a C é dado por

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{j}$$

(Veja a Figura 2). Então, da Equação 16.2.3, temos

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(t) |\mathbf{r}'(t)| \, dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{P(x(t), y(t)) y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} - \frac{Q(x(t), y(t)) x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)| \, dt \\ &= \int_a^b P(x(t), y(t)) y'(t) \, dt - Q(x(t), y(t)) x'(t) \, dt \\ &= \int_C P \, dy - Q \, dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA \end{aligned}$$

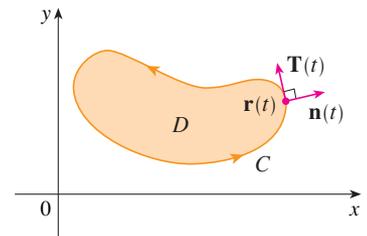


FIGURA 2

pele Teorema de Green. Mas o integrando na integral dupla é o divergente de \mathbf{F} . Logo, temos uma segunda forma vetorial do Teorema de Green:

$$\boxed{13} \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \text{div } \mathbf{F}(x, y) \, dA$$

Essa versão diz que a integral de linha da componente normal de \mathbf{F} ao longo de C é igual à integral dupla do divergente de \mathbf{F} na região D delimitada por C .

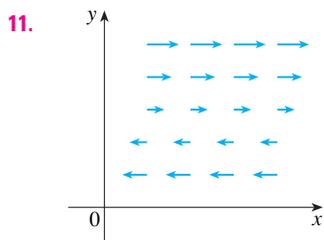
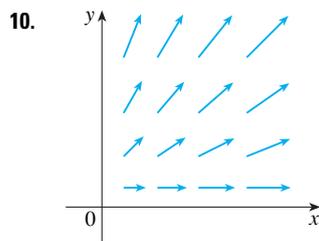
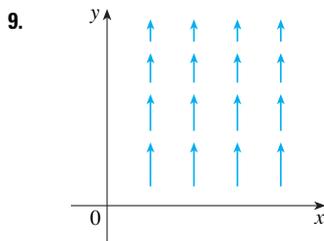
16.5 Exercícios

1-8 Determine (a) o rotacional e (b) o divergente do campo vetorial.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz \mathbf{i} - x^2 y \mathbf{k}$
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 yz \mathbf{i} + xy^2 z \mathbf{j} + xyz^2 \mathbf{k}$
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^z \mathbf{i} + yze^x \mathbf{k}$
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = \text{sen } yz \mathbf{i} + \text{sen } zx \mathbf{j} + \text{sen } xy \mathbf{k}$
5. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})$
6. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy} \text{sen } z \mathbf{j} + y \text{tg}^{-1}(x/z) \mathbf{k}$
7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle e^x \text{sen } y, e^y \text{sen } z, e^z \text{sen } x \rangle$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = \left\langle \frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x} \right\rangle$

9–11 O campo vetorial \mathbf{F} é mostrado no plano xy e é o mesmo em todos os planos horizontais (em outras palavras, \mathbf{F} é independente de z e sua componente z é 0).

- (a) O $\text{div } \mathbf{F}$ será positivo, negativo ou nulo? Explique.
 (b) Determine se $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Se não, em que direção $\text{rot } \mathbf{F}$ aponta?



12. Seja f um campo escalar e \mathbf{F} um campo vetorial. Diga se cada expressão tem significado. Em caso negativo, explique por quê. Em caso afirmativo, diga se é um campo vetorial ou escalar.

- | | |
|--|--|
| (a) $\text{rot } f$ | (b) $\text{grad } f$ |
| (c) $\text{div } \mathbf{F}$ | (d) $\text{rot}(\text{grad } f)$ |
| (e) $\text{grad } \mathbf{F}$ | (f) $\text{grad}(\text{div } \mathbf{F})$ |
| (g) $\text{div}(\text{grad } f)$ | (h) $\text{grad}(\text{div } f)$ |
| (i) $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{F})$ | (j) $\text{div}(\text{div } \mathbf{F})$ |
| (k) $(\text{grad } f) \times (\text{div } \mathbf{F})$ | (l) $\text{div}(\text{rot}(\text{grad } f))$ |

13–18 Determine se o campo vetorial é conservativo ou não. Se for conservativo, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3 \mathbf{i} + 2xyz^3 \mathbf{j} + 3xy^2z^2 \mathbf{k}$
 14. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz^2 \mathbf{i} + x^2yz^2 \mathbf{j} + x^2y^2z \mathbf{k}$
 15. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy^2z^2 \mathbf{i} + 2x^2yz^3 \mathbf{j} + 3x^2y^2z^2 \mathbf{k}$
 16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \sin z \mathbf{j} + y \cos z \mathbf{k}$
 17. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{yz} \mathbf{i} + xze^{yz} \mathbf{j} + xye^{yz} \mathbf{k}$
 18. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \sin yz \mathbf{i} + ze^x \cos yz \mathbf{j} + ye^x \cos yz \mathbf{k}$

19. Existe um campo vetorial \mathbf{G} em \mathbb{R}^3 tal que $\text{rot } \mathbf{G} = \langle x \sin y, \cos y, z - xy \rangle$? Explique.

20. Existe um campo vetorial \mathbf{G} em \mathbb{R}^3 tal que $\text{rot } \mathbf{G} = \langle xyz, -y^2z, yz^2 \rangle$? Explique.

21. Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x) \mathbf{i} + g(y) \mathbf{j} + h(z) \mathbf{k}$$

onde f, g e h são diferenciáveis, é irrotacional.

22. Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(y, z) \mathbf{i} + g(x, z) \mathbf{j} + h(x, y) \mathbf{k}$$

é incompressível.

23–29 Demonstre a identidade, admitindo que as derivadas parciais apropriadas existem e são contínuas. Se f for um campo escalar e \mathbf{F}, \mathbf{G} forem campos vetoriais, então $f \mathbf{F}, \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$ e $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ serão definidos por

$$(f \mathbf{F})(x, y, z) = f(x, y, z) \mathbf{F}(x, y, z)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{G}(x, y, z)$$

$$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \times \mathbf{G}(x, y, z)$$

23 $\text{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \text{div } \mathbf{F} + \text{div } \mathbf{G}$

24. $\text{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \text{rot } \mathbf{F} + \text{rot } \mathbf{G}$

25. $\text{div}(f \mathbf{F}) = f \text{div } \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$

26. $\text{rot}(f \mathbf{F}) = f \text{rot } \mathbf{F} + (\nabla f) \times \mathbf{F}$

27. $\text{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \text{rot } \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{G}$

28. $\text{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$

29. $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{F}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$

30–32 Sejam $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ e $r = |\mathbf{r}|$.

30. Verifique as identidades.

- | | |
|-----------------------------------|--|
| (a) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ | (b) $\nabla \cdot (r \mathbf{r}) = 4r$ |
| (c) $\nabla^2 r^3 = 12r$ | |

31. Verifique as identidades.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| (a) $\nabla r = \mathbf{r}/r$ | (b) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ |
| (c) $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$ | (d) $\nabla \ln r = \mathbf{r}/r^2$ |

32. Se $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^p$, determine $\text{div } \mathbf{F}$. Existe um valor de p para que $\text{div } \mathbf{F} = 0$?

33. Use o Teorema de Green na forma da Equação 13 para demonstrar a **primeira identidade de Green**:

$$\iint_D f \nabla^2 g \, dA = \oint_C f(\nabla g) \cdot \mathbf{n} \, ds - \iint_D \nabla f \cdot \nabla g \, dA$$

onde D e C satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas. (A quantidade $\nabla g \cdot \mathbf{n} = D_n g$ aparece na integral de linha. Essa é a derivada direcional na direção do vetor normal \mathbf{n} e é chamada **derivada normal** de g .)

34. Use a primeira identidade de Green (Exercício 33) para demonstrar a **segunda identidade de Green**:

$$\iint_D (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dA = \oint_C (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} \, ds$$

onde D e C satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas.

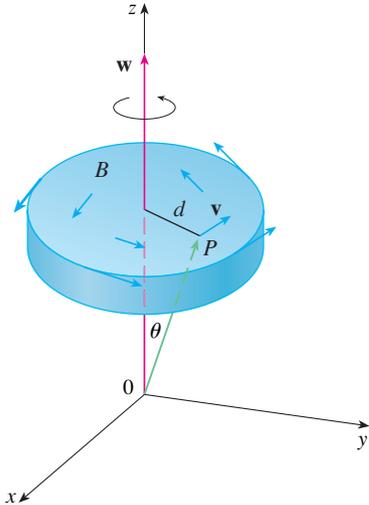
35. Lembre-se, da Seção 14.3, de que uma função g é chamada **harmônica** em D se satisfaz a equação de Laplace, isto é, $\nabla^2 g = 0$ em D . Utilize primeira identidade de Green (com as mesmas hipóteses que no Exercício 33) para mostrar que se g é harmônica em D , então $\oint_C D_n g \, ds = 0$. Aqui, $D_n g$ é a derivada normal de g definida no Exercício 33.

36. Use a primeira identidade de Green para mostrar que se f for harmônica em D , e se $f(x, y) = 0$ na curva limite C , então $\iint_D |\nabla f|^2 \, dA = 0$. (Suponha que são válidas as mesmas hipóteses que no Exercício 33.)

37. Este exercício ilustra a relação entre vetor rotacional e rotações. Seja B ser um corpo rígido girando sobre o eixo z . A rotação

pode ser descrita pelo vetor $\mathbf{w} = \omega \mathbf{k}$, onde ω é a velocidade angular de B , ou seja, a velocidade tangencial de qualquer ponto P em B dividida pela distância d do eixo de rotação. Seja $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ o vetor posição de P .

- (a) Considerando o ângulo θ da figura, mostre que o campo de velocidade de B é dado por $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$.
- (b) Mostre que $\mathbf{v} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$.
- (c) Mostre que $\text{rot } \mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.



38. As equações de Maxwell relacionam o campo elétrico \mathbf{E} e o campo magnético \mathbf{H} , quando eles variam com o tempo em uma região que não contenha carga nem corrente, como segue:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= 0 & \text{div } \mathbf{H} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

onde c é a velocidade da luz. Use essas equações para demonstrar o seguinte:

- (a) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$
- (b) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$
- (c) $\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ [Sugestão: Use o Exercício 29.]
- (d) $\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$

39. Vimos que todos os campos vetoriais da forma $\mathbf{F} = \nabla g$ satisfazem a equação $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ e que todos os campos vetoriais da forma $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$ satisfazem a equação $\text{div } \mathbf{F} = 0$ (supondo a continuidade das correspondentes derivadas parciais). Isto sugere a pergunta: existe alguma equação que todas as funções da forma $f = \text{div } \mathbf{G}$ devam satisfazer? Mostre que a resposta para essa pergunta é “Não” demonstrando que toda função contínua f em \mathbb{R}^3 é a divergência de algum campo de vetores. [Dica: Seja $\mathbf{G}(x, y, z) = \langle g(x, y, z), 0, 0 \rangle$, onde $g(x, y, z) = \int_0^x f(t, y, z) dt$.]

16.6 Superfícies Parametrizadas e suas Áreas

Até agora temos considerado tipos especiais de superfícies: cilindros, superfícies quádricas, gráficos de funções de duas variáveis e superfícies de nível de funções de três variáveis. Aqui, usaremos funções vetoriais para descrever superfícies mais gerais, chamadas *superfícies parametrizadas* e calcularemos suas áreas. A seguir, tomaremos a fórmula para a área de superfícies gerais e veremos como se aplica a superfícies especiais.

Superfícies Parametrizadas

De modo muito semelhante à nossa descrição de curvas espaciais por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ de um único parâmetro t , podemos descrever uma superfície por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$ de dois parâmetros u e v . Suponhamos que

$$\mathbf{1} \quad \mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}$$

seja uma função a valores vetoriais definida sobre uma região D do plano uv . Então x, y e z , os componentes de funções de \mathbf{r} , serão funções das duas variáveis u e v com domínio D . O conjunto de todos os pontos (x, y, z) em \mathbb{R}^3 tal que

$$\mathbf{2} \quad x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v)$$

em (u, v) varia ao longo de D , é chamado de **superfície parametrizada** S e Equações 2 são chamados **equações parametrizadas** de S . Cada escolha de u e v resulta um ponto em S ; fazendo todas as escolhas, temos todos os pontos de S . Em outras palavras, a superfície é

traçada pela ponta do vetor posição $\mathbf{r}(u, v)$ enquanto (u, v) se move ao longo da região D . (Veja a Figura 1.)

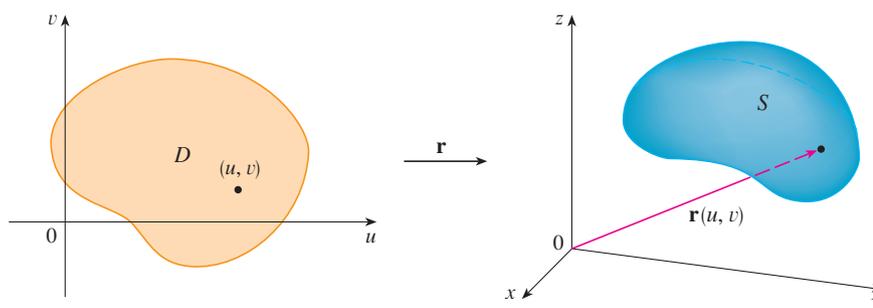


FIGURA 1

Uma superfície parametrizada

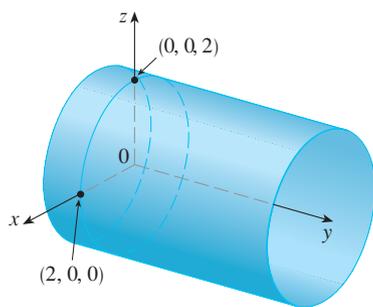


FIGURA 2

EXEMPLO 1 Identifique e esboce a superfície com equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + 2 \sin u \mathbf{k}$$

SOLUÇÃO As equações paramétricas para essa superfície são

$$x = 2 \cos u \quad y = v \quad z = 2 \sin u$$

então, para qualquer ponto (x, y, z) da superfície, temos

$$x^2 + z^2 = 4 \cos^2 u + 4 \sin^2 u = 4$$

Isso significa que todas as seções transversais paralelas ao plano xz (isto é, com y constante) são circunferências de raio 2. Como $y = v$ e não existe restrição ao valor de v , a superfície é um cilindro circular de raio 2 cujo eixo é o eixo y (veja a Figura 2).

No Exemplo 1 não existiam restrições quanto aos parâmetros u e v e assim obtivemos o cilindro inteiro. Se, por exemplo, restringíssemos u e v , escrevendo o domínio dos parâmetros como

$$0 \leq u \leq \pi/2 \quad 0 \leq v \leq 3$$

Então $x \geq 0$, $z \geq 0$, $0 \leq y \leq 3$ e obteríamos o quarto do cilindro de comprimento 3 ilustrado na Figura 3.

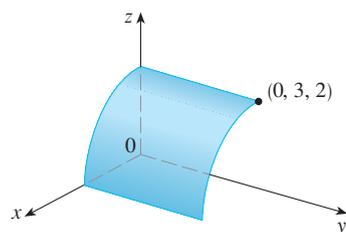


FIGURA 3

Se uma superfície parametrizada S é dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$, então existem duas famílias de curvas úteis contidas em S , uma família com u constante e outra com v constante. Essas famílias correspondem a retas verticais e horizontais no plano uv . Se mantivermos u constante, impondo $u = u_0$, então $\mathbf{r}(u_0, v)$ se torna uma função vetorial com um único parâmetro v que define uma curva C_1 sobre S . (Veja a Figura 4.)

TEC Visual 16.6 mostra versões animadas de Figuras 4 e 5, com o movimento das curvas de grade, para diversas superfícies parametrizadas.

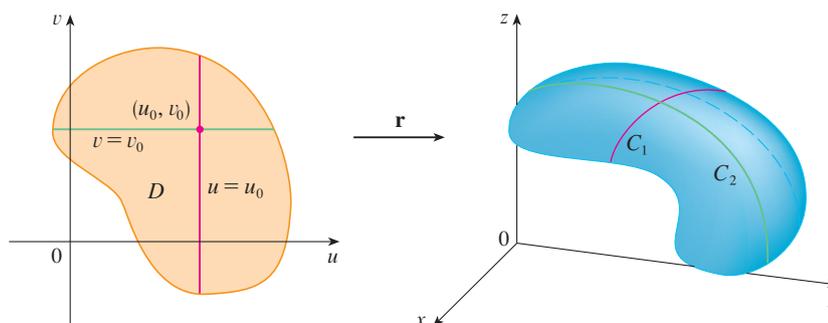


FIGURA 4

Da mesma forma, se mantivermos v constante tomando $v = v_0$, obteremos a curva C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que está sobre S . Chamamos essas curvas **curva da grade**. (No Exemplo 1, por exemplo, as curvas da grade obtidas tornando u constante são linhas horizontais, enquanto as curvas da grade obtidas com v constante são circunferências.) Na verdade, quando um computador elabora em gráfico uma superfície parametrizada, que normalmente apresenta a superfície traçando as curvas da grade, como podemos ver no exemplo a seguir.

EXEMPLO 2 Use um sistema de computação algébrica para traçar o gráfico da superfície

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \sin v) \cos u, (2 + \sin v) \sin u, u + \cos v \rangle$$

Quais são as curvas da grade com u constante? Quais têm v constante?

SOLUÇÃO Traçamos o pedaço da superfície com os parâmetros delimitados por $0 \leq u \leq 4\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$ na Figura 5. Esse gráfico tem a aparência de um tubo espiral. Para identificarmos as curvas da grade, escrevemos as equações paramétricas correspondentes:

$$x = (2 + \sin v) \cos u \quad y = (2 + \sin v) \sin u \quad z = u + \cos v$$

Se v é constante, então $\sin v$ e $\cos v$ são constantes, portanto, as equações paramétricas se assemelham às da hélice no Exemplo 4 na Seção 13.1. Assim, as curvas de grade com v constante são as curvas em espiral na Figura 5. Deduzimos que as curvas de grade com u constante devem ser curvas que parecem círculos na figura. Maior evidência dessa afirmação é que, se mantivermos u constante, $u = u_0$, então as equações $z = u_0 + \cos v$ mostram que os valores de z variam de $u_0 - 1$ até $u_0 + 1$.

Nos Exemplos 1 e 2 nos foi dada uma equação vetorial e pedido o gráfico da superfície parametrizada correspondente. Nos exemplos seguintes, entretanto, teremos o problema mais desafiador de achar a função vetorial que representa uma superfície dada. No restante deste capítulo, teremos de fazer exatamente isso muitas vezes.

EXEMPLO 3 Determine a função vetorial que representa o plano que passa pelo ponto P_0 com vetor posição \mathbf{r}_0 e que contenha dois vetores não paralelos \mathbf{a} e \mathbf{b}

SOLUÇÃO Se P é qualquer ponto no plano, podemos ir de P_0 até P movendo uma certa distância na direção de \mathbf{a} e uma outra distância na direção de \mathbf{b} . Então, existem escalares u e v tais que $\overrightarrow{P_0P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$. (A Figura 6 ilustra como isto funciona, por meio da lei do paralelogramo, para o caso em que u e v são positivos. Veja também o Exercício 46 na Seção 12.2.) Se \mathbf{r} é o vetor posição de P , então

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

Assim, a equação vetorial do plano pode ser escrita como

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

onde u e v são números reais.

Se escrevermos $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, podemos escrever as equações paramétricas do plano pelo ponto (x_0, y_0, z_0) como segue:

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1 \quad y = y_0 + ua_2 + vb_2 \quad z = z_0 + ua_3 + vb_3$$

EXEMPLO 4 Determine uma representação parametrizada da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

SOLUÇÃO A esfera tem uma representação simples $\rho = a$ em coordenadas esféricas, então vamos escolher os ângulos ϕ e θ das coordenadas esféricas como parâmetros (veja a Seção 15.9). Tomando $\rho = a$ nas equações para conversão de coordenadas esféricas para coordenadas retangulares (Equação 15.9.1), obtemos

$$x = a \sin \phi \cos \theta \quad y = a \sin \phi \sin \theta \quad z = a \cos \phi$$

como equações parametrizadas da esfera. A equação vetorial correspondente é

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + a \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k}$$

Temos $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, de modo que o domínio dos parâmetros é o retângulo $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. As curvas da grade com ϕ constante são as circunferências de latitude constante (incluindo o equador). As curvas da grade com θ constante são os meridianos (semicircunferências), que ligam os Polos Norte e Sul (veja a Figura 7).

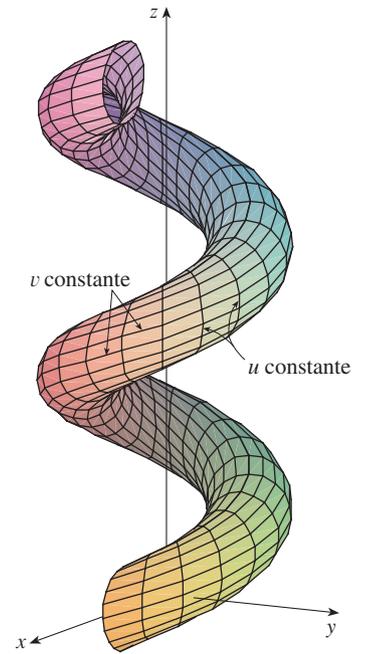


FIGURA 5

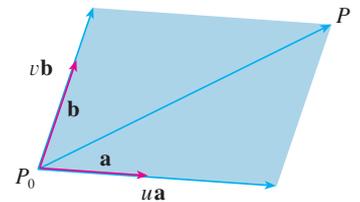


FIGURA 6

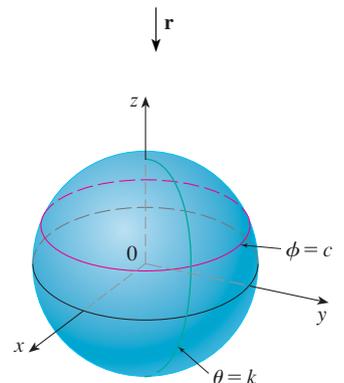
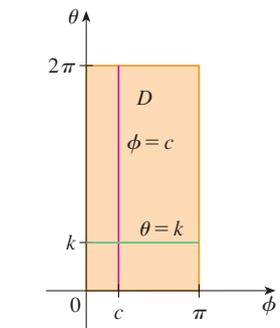


FIGURA 7

OBSERVAÇÃO Vimos no Exemplo 4 que as curvas de grade para uma esfera são curvas de latitude e longitude constantes. Para uma superfície parametrizada geral, estamos realmente fazendo um mapa e as curvas da grade são semelhantes a linhas de latitude e longitude. Descrever um ponto sobre uma superfície parametrizada (como o da Figura 5) dando valores específicos de u e v é como dar a latitude e a longitude de um ponto.

Um dos usos de superfícies parametrizadas é na computação gráfica. A Figura 8 mostra o resultado de tentar traçar a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ resolvendo a equação para z e traçando os hemisférios de cima e de baixo separadamente. Parte da esfera parece estar ausente por causa do sistema de grade retangular utilizado pelo computador. A imagem, muito melhor na Figura 9, foi produzida por um computador, utilizando as equações parametrizadas encontradas no Exemplo 4.

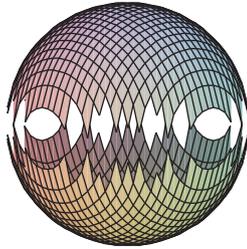


FIGURA 8

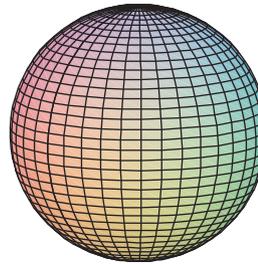


FIGURA 9

EXEMPLO 5 Determine uma representação parametrizada do cilindro

$$x^2 + y^2 = 4 \quad 0 \leq z \leq 1$$

SOLUÇÃO O cilindro tem representação $r = 2$ em coordenadas cilíndricas; assim escolhemos como parâmetros θ e z das coordenadas cilíndricas. Então as equações paramétricas do cilindro são

$$x = 2 \cos \theta \quad y = 2 \sin \theta \quad z = z$$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 1$.

EXEMPLO 6 Determine uma função vetorial que represente o parabolóide elíptico $z = x^2 + 2y^2$.

SOLUÇÃO Se olharmos para x e y como parâmetros, as equações paramétricas ficam simplesmente

$$x = x \quad y = y \quad z = x^2 + 2y^2$$

e a equação vetorial é

$$\mathbf{r}(x, y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + (x^2 + 2y^2) \mathbf{k}$$

Em geral, uma superfície dada como o gráfico de uma função de x e y , ou seja, com equação da forma $z = f(x, y)$, pode sempre ser olhada como uma superfície parametrizada, tomando x e y como parâmetros e escrevendo as equações paramétricas como

$$x = x \quad y = y \quad z = f(x, y)$$

Representações parametrizadas (também chamadas parametrizações) de superfícies não são únicas. O próximo exemplo mostra dois modos de parametrizar um cone.

EXEMPLO 7 Determine uma representação parametrizada para a superfície $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, a metade superior do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

SOLUÇÃO 1 Uma possível representação é obtida escolhendo-se x e y como parâmetros:

$$x = x \quad y = y \quad z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Assim, a equação vetorial é

$$\mathbf{r}(x, y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + 2\sqrt{x^2 + y^2} \mathbf{k}$$

SOLUÇÃO 2 Outra representação resulta da escolha das coordenadas polares r e θ . Um ponto (x, y, z) sobre o cone satisfaz $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e $z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$. Assim, uma equação vetorial para o cone é

$$\mathbf{r}(r, \theta) = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + 2r \mathbf{k}$$

onde $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

TEC Em *Module 16.6* você pode investigar várias famílias de superfícies parametrizadas.

Para alguns propósitos, as representações parametrizadas das Soluções 1 e 2 são igualmente boas, mas a Solução 2 pode ser preferível em certas situações. Se estivermos interessados somente na parte do cone que está abaixo do plano $z = 1$, por exemplo, tudo que devemos fazer na Solução 2 é mudar o domínio do parâmetro para

$$0 \leq r \leq \frac{1}{2} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Superfícies de Revolução

As superfícies de revolução podem ser representadas na forma parametrizada e, portanto, seus gráficos podem ser traçados usando-se um computador. Por exemplo, vamos considerar a superfície S obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, sobre o eixo x , onde $f(x) \geq 0$. Seja θ o ângulo de rotação, como mostrado na Figura 10. Se (x, y, z) é um ponto em S , então

$$3 \quad x = x \quad y = f(x) \cos \theta \quad z = f(x) \sin \theta$$

Portanto, tomamos x e θ como parâmetros e olhamos as Equações 3 como equações paramétricas de S . O domínio do parâmetro é dado por $a \leq x \leq b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

EXEMPLO 8 Encontre equações paramétricas para a superfície gerada pela rotação da curva $y = \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ sobre o eixo x . Use essas equações para o gráfico da superfície de revolução.

SOLUÇÃO Das Equações 3, as equações paramétricas são

$$x = x \quad y = \sin x \cos \theta \quad z = \sin x \sin \theta$$

e o domínio do parâmetro é $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Usando um computador para traçar essas equações e girar a imagem, obtemos o gráfico da Figura 11.

Podemos adaptar as Equações 3 para representar uma superfície obtida pela revolução em torno do eixo y ou do eixo z (veja o Exercício 30).

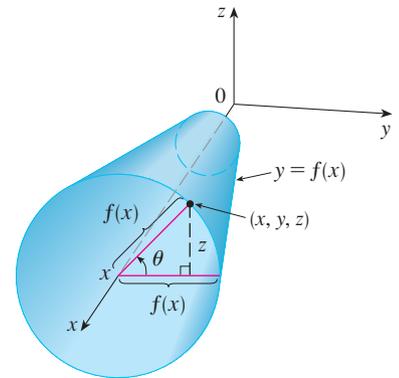


FIGURA 10

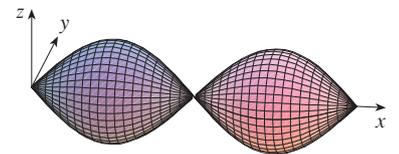


FIGURA 11

Planos Tangentes

Agora vamos determinar o plano tangente a uma superfície parametrizada determinada por uma função vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}$$

em um ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Se mantivermos u constante usando $u = u_0$, então $\mathbf{r}(u_0, v)$ torna-se uma função vetorial do parâmetro único v e define uma curva de grade C_1 em S . (Veja a Figura 12.) O vetor tangente a C_1 em P_0 é obtido tomando-se a derivada parcial de \mathbf{r} em relação a v :

$$4 \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \mathbf{k}$$

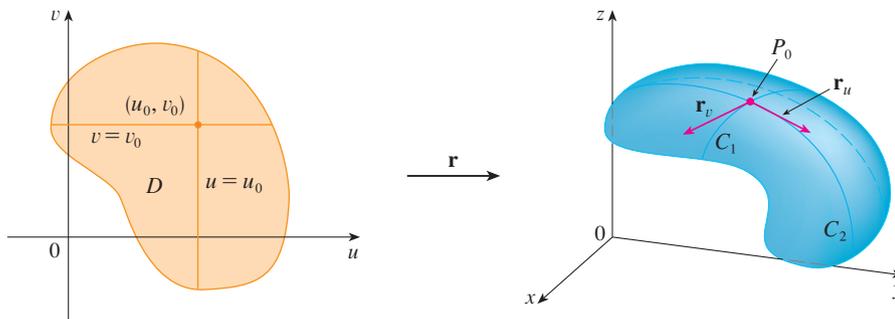


FIGURA 12

Da mesma forma, se mantivermos v constante tomando $v = v_0$, obteremos a curva da grade C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que está sobre S , e cujo vetor tangente em P_0 é

$$5 \quad \mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \mathbf{k}$$

Se $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ não é $\mathbf{0}$, então a superfície S é dita **suave** (sem “bicos”). Para uma superfície suave, o **plano tangente** é o que contém os vetores tangentes \mathbf{r}_u e \mathbf{r}_v e $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ é o vetor normal ao plano tangente.

A Figura 13 mostra a superfície que se autointercepta no Exemplo 9 e seu plano tangente em (1, 1, 3).

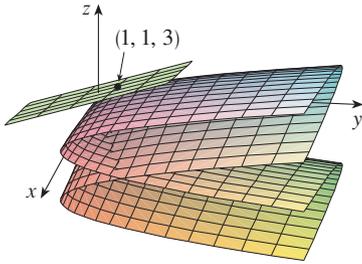


FIGURA 13

EXEMPLO 9 Determine o plano tangente à superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u + 2v$ no ponto (1, 1, 3).

SOLUÇÃO Primeiro, vamos calcular os vetores tangentes:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} = 2u \mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k} = 2v \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$$

Assim, o vetor normal ao plano tangente é

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v \mathbf{i} - 4u \mathbf{j} + 4uv \mathbf{k}$$

Observe que o ponto (1, 1, 3) corresponde aos valores dos parâmetros $u = 1$ e $v = 1$, de forma que o vetor normal ali é

$$-2 \mathbf{i} - 4 \mathbf{j} + 4 \mathbf{k}$$

Portanto, uma equação do plano tangente em (1, 1, 3) é

$$-2(x - 1) - 4(y - 1) + 4(z - 3) = 0$$

ou
$$x + 2y - 2z + 3 = 0$$

Área da Superfície

Definiremos agora a área de uma superfície parametrizada geral dada pela Equação 1. Para simplificar, vamos considerar inicialmente uma superfície cujo domínio dos parâmetros D é um retângulo, que dividiremos em sub-retângulos R_{ij} . Vamos escolher (u_i^*, v_j^*) como o canto

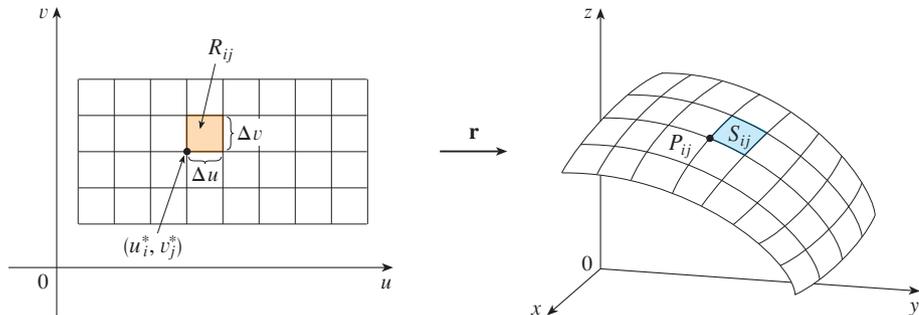


FIGURA 14

A imagem do sub-retângulo R_{ij} é o retalho S_{ij}

inferior esquerdo do retângulo R_{ij} . (Veja a Figura 14.)

A parte S_{ij} da superfície S que corresponde a R_{ij} é chamada de *retalho* e tem um ponto P_{ij} com vetor posição $\mathbf{r}(u_i^*, v_j^*)$ como um de seus cantos. Sejam

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*) \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$$

os vetores tangentes em P_{ij} calculados pelas Equações 5 e 4.

A Figura 15(a) mostra como os dois lados do retalho que se encontram em P_{ij} podem ser aproximados por vetores. Esses vetores, por sua vez, podem ser aproximados pelos vetores $\Delta u \mathbf{r}_u^*$ e $\Delta v \mathbf{r}_v^*$ porque as derivadas parciais podem ser aproximadas pelos quocientes de diferenças. Assim, aproximamos S_{ij} pelo paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u \mathbf{r}_u^*$ e $\Delta v \mathbf{r}_v^*$. Esse paralelogramo está representado na Figura 15(b) e está contido no plano tangente a S em P_{ij} . A área desse paralelogramo é

$$|(\Delta u \mathbf{r}_u^*) \times (\Delta v \mathbf{r}_v^*)| = |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*| \Delta u \Delta v$$

e então uma aproximação da área de S é

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*| \Delta u \Delta v$$

A intuição nos diz que essa aproximação fica melhor à medida que aumentamos o número de sub-retângulos e reconhecemos a soma dupla como a soma de Riemann para a integral dupla $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$. Isso justifica a seguinte definição:

6 Definição Se uma superfície parametrizada suave S é dada pela equação

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k} \quad (u, v) \in D$$

e S é coberta uma única vez quando (u, v) abrange todo o domínio D dos parâmetros, então a **área da superfície** de S é

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$$

onde $\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k}$ $\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$

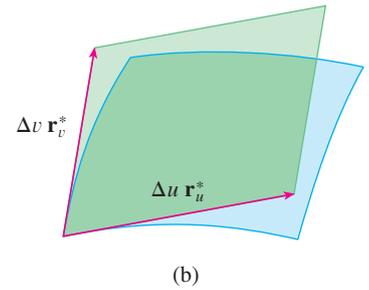
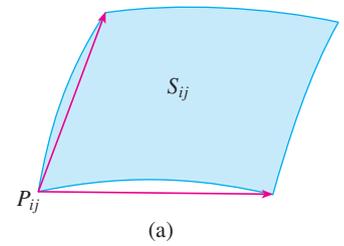


FIGURA 15
Aproximando um retalho por um paralelogramo

EXEMPLO 10 Determine a área da esfera de raio a .

SOLUÇÃO No Exemplo 4 encontramos a representação parametrizada

$$x = a \sin \phi \cos \theta \quad y = a \sin \phi \sin \theta \quad z = a \cos \phi$$

onde o domínio dos parâmetros é

$$D = \{(\phi, \theta) \mid 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Vamos calcular primeiro o produto cruzado dos vetores tangentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos \phi \cos \theta & a \cos \phi \sin \theta & -a \sin \phi \\ -a \sin \phi \sin \theta & a \sin \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= a^2 \sin^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + a^2 \sin^2 \phi \sin \theta \mathbf{j} + a^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{k} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| &= \sqrt{a^4 \sin^4 \phi \cos^2 \theta + a^4 \sin^4 \phi \sin^2 \theta + a^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} \\ &= \sqrt{a^4 \sin^4 \phi + a^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} = a^2 \sqrt{\sin^2 \phi} = a^2 \sin \phi \end{aligned}$$

uma vez que $\sin \phi \geq 0$ para $0 \leq \phi \leq \pi$. Portanto, pela Definição 6, a área da esfera é

$$\begin{aligned} A &= \iint_D |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi = a^2 (2\pi) 2 = 4\pi a^2 \end{aligned}$$

Área de Superfície do Gráfico de uma Função

Para o caso especial de uma superfície S com equação $z = f(x, y)$, onde (x, y) está em D e f tem derivadas parciais contínuas, tomamos x e y como parâmetros. As equações paramétricas são

$$\begin{aligned} x &= x & y &= y & z &= f(x, y) \\ \mathbf{r}_x &= \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \mathbf{k} & \mathbf{r}_y &= \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

assim,

e

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Então temos

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

e a fórmula de área da superfície na Definição 6 fica

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

Observe a semelhança entre a fórmula da área da superfície da Equação 9 e a fórmula do comprimento do arco

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

da Seção 8.1, no Volume I.

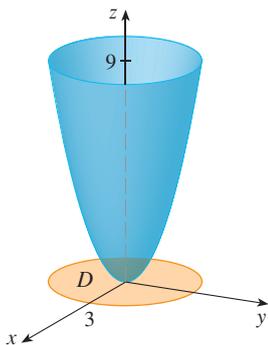


FIGURA 16

EXEMPLO 11 Determine a área da parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

SOLUÇÃO O plano intercepta o paraboloide no círculo $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Portanto, a superfície dada fica acima do disco D com centro na origem e raio 3. (Veja a Figura 16.) Usando a Fórmula 9, temos

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dA \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dA \end{aligned}$$

Convertendo para coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r \sqrt{1 + 4r^2} dr \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^3 = \frac{\pi}{6} (37\sqrt{37} - 1) \end{aligned}$$

Precisamos ainda verificar se nossa definição da área de superfície [6] é coerente com a fórmula da área de superfície obtida no cálculo com uma única variável (8.2.4).

Consideremos a superfície S obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x , onde $f(x) \geq 0$ e f' é contínua. Da Equação 3, sabemos que as equações paramétricas de S são

$$x = x \quad y = f(x) \cos \theta \quad z = f(x) \sin \theta \quad a \leq x \leq b \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Para calcularmos a área da superfície S , precisamos dos vetores tangentes

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f'(x) \cos \theta \mathbf{j} + f'(x) \sin \theta \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -f(x) \sin \theta \mathbf{j} + f(x) \cos \theta \mathbf{k}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f'(x) \cos \theta & f'(x) \sin \theta \\ 0 & -f(x) \sin \theta & f(x) \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= f(x)f'(x) \mathbf{i} - f(x) \cos \theta \mathbf{j} - f(x) \sin \theta \mathbf{k} \end{aligned}$$

E também

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| &= \sqrt{[f(x)]^2 [f'(x)]^2 + [f(x)]^2 \cos^2 \theta + [f(x)]^2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{[f(x)]^2 [1 + [f'(x)]^2]} = f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \end{aligned}$$

porque $f(x) \geq 0$. Portanto, a área de S é

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| dA = \int_0^{2\pi} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx d\theta$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Isso é precisamente a fórmula que usamos para definir a área de uma superfície de revolução no cálculo com uma única variável (8.2.4).

16.6 Exercícios

1–2 Determine se os pontos P e Q estão na superfície dada.

1. $\mathbf{r}(u, v) = \langle 2u + 3v, 1 + 5u - v, 2 + u + v \rangle$
 $P(7, 10, 4), Q(5, 22, 5)$

2. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, u^2 - v, u + v^2 \rangle$
 $P(3, -1, 5), Q(-1, 3, 4)$

3–6 Identifique a superfície que tem a equação paramétrica dada.

3. $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (3 - v)\mathbf{j} + (1 + 4u + 5v)\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \sin u \mathbf{i} + 3 \cos u \mathbf{j} + v \mathbf{k}, 0 \leq v \leq 2$

5. $\mathbf{r}(s, t) = \langle s, t, t^2 - s^2 \rangle$

6. $\mathbf{r}(s, t) = \langle s, \sin 2t, s^2 \cos 2t \rangle$

 7–12 Use um computador para traçar o gráfico da superfície parametrizada. Imprima o resultado e indique sobre essa impressão quais são as curvas da grade que têm u constante e quais têm v constante.

7. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u^2, v^2, u + v \rangle, -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1$

8. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u, v^3, -v \rangle, -2 \leq u \leq 2, -2 \leq v \leq 2$

9. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u \cos v, u \sin v, u^5 \rangle, -1 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$

10. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u, \sin(u + v), \sin v \rangle,$
 $-\pi \leq u \leq \pi, -\pi \leq v \leq \pi$

11. $x = \sin v, y = \cos u \sin 4v, z = \sin 2u \sin 4v,$
 $0 \leq u \leq 2\pi, -\pi/2 \leq v \leq \pi/2$

12. $x = \sin u, y = \cos u \sin v, z = \sin v,$
 $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$

13–18 Faça uma correspondência entre as equações e os gráficos identificados por I–VI e justifique sua resposta. Determine quais famílias de curvas da grade têm u constante e quais têm v constante.

13. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}$

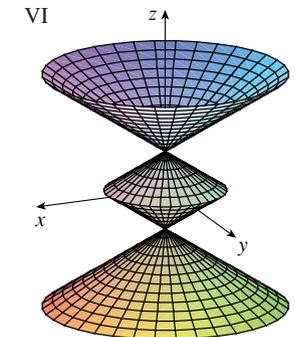
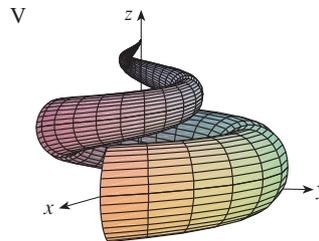
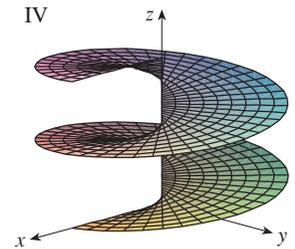
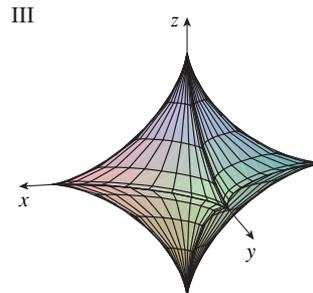
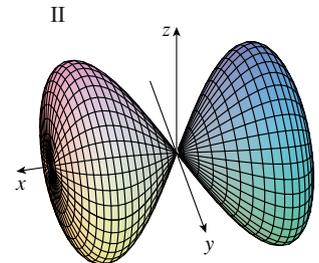
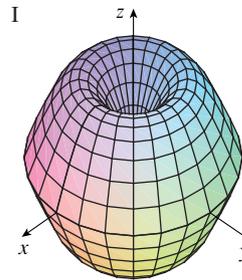
14. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + \sin u \mathbf{k}, -\pi \leq u \leq \pi$

15. $\mathbf{r}(u, v) = \sin v \mathbf{i} + \cos u \sin 2v \mathbf{j} + \sin u \sin 2v \mathbf{k}$

16. $x = (1 - u)(3 + \cos v) \cos 4\pi u,$
 $y = (1 - u)(3 + \cos v) \sin 4\pi u,$
 $z = 3u + (1 - u) \sin v$

17. $x = \cos^3 u \cos^3 v, y = \sin^3 u \cos^3 v, z = \sin^3 v$

18. $x = (1 - |u|) \cos v, y = (1 - |u|) \sin v, z = u$



13. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}$
14. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + \sin u \mathbf{k}, -\pi \leq u \leq \pi$
15. $\mathbf{r}(u, v) = \sin v \mathbf{i} + \cos u \sin 2v \mathbf{j} + \sin u \sin 2v \mathbf{k}$
16. $x = (1 - u)(3 + \cos v) \cos 4\pi u,$
 $y = (1 - u)(3 + \cos v) \sin 4\pi u,$
 $z = 3u + (1 - u) \sin v$

19–26 Determine uma representação parametrizada para a superfície.

19. O plano que passa pela origem que contém os vetores $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{j} - \mathbf{k}$
20. O plano que passa pelo ponto $(0, -1, 5)$ e contém os vetores $(2, 1, 4)$ e $(-3, 2, 5)$

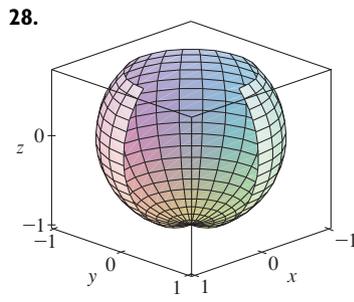
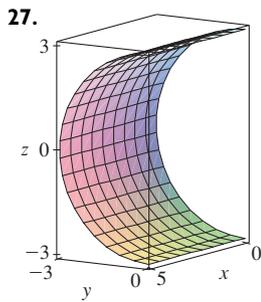
 É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

 É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

21. A parte do hiperboloide $4x^2 - 4y^2 - z^2 = 4$ que está em frente do plano yz
22. A parte do elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ que se encontra à esquerda do plano xz
23. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se situa acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
24. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que se encontra entre os planos $z = -2$ e $z = 2$
25. A parte do cilindro $y^2 + z^2 = 16$ que se encontra entre os planos $x = 0$ e $x = 5$
26. A parte do plano $z = x + 3$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

SCA 27–28 Use um sistema de computação algébrica para produzir um gráfico semelhante ao das figuras.



29. Determine as equações paramétricas da superfície obtida pela rotação da curva $y = e^{-x}$, $0 \leq x \leq 3$, em torno do eixo x e use-as para traçar o gráfico da superfície.
30. Determine as equações paramétricas da superfície obtida pela rotação da curva $x = 4y^2 - y^4$, $-2 \leq y \leq 2$, em torno do eixo y e use-as para traçar o gráfico da superfície.
31. (a) O que acontecerá com o tubo espiral do Exemplo 2 (veja a Figura 5) se substituirmos $\cos u$ por $\sin u$ e $\sin u$ por $\cos u$?
 (b) O que acontece se substituirmos $\cos u$ por $2u$ e $\sin u$ por $\sin 2u$?

32. A superfície com as equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos \theta + r \cos(\theta/2) \\ y &= 2 \sin \theta + r \cos(\theta/2) \\ z &= r \sin(\theta/2) \end{aligned}$$

onde $-\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{2}$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é chamada **Faixa de Möbius**. Trace o gráfico dessa superfície sob vários pontos de vista. O que há de estranho nela?

33–36 Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada dada no ponto especificado.

33. $x = u + v$, $y = 3u^2$, $z = u - v$; $(2, 3, 0)$
34. $x = u^2 + 1$, $y = v^3 + 1$, $z = u + v$; $(5, 2, 3)$
35. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}$; $u = 1, v = \pi/3$
36. $\mathbf{r}(u, v) = \sin u \mathbf{i} + \cos u \sin v \mathbf{j} + \sin v \mathbf{k}$; $u = \pi/6, v = \pi/6$

SCA 37–38 Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada dada no ponto especificado. Desenhe a superfície e o plano tangente.

37. $\mathbf{r}(u, v) = u^2 \mathbf{i} + 2u \sin v \mathbf{j} + u \cos v \mathbf{k}$; $u = 1, v = 0$
38. $\mathbf{r}(u, v) = (1 - u^2 - v^2) \mathbf{i} - v \mathbf{j} - u \mathbf{k}$; $(-1, -1, -1)$

39–50 Determine a área da superfície.

39. A parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante
40. A parte do plano com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, 2 - 3u, 1 + u - v \rangle$ que é dada por $0 \leq u \leq 2, -1 \leq v \leq 1$
41. A parte do plano $x + 2y + 3z = 1$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 3$
42. A parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que se encontra entre o plano $y = x$ e o cilindro $y = x^2$
43. A superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
44. A parte da superfície $z = 1 + 3x + 3y^2$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 1)$
45. A parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$
46. A parte do parabolóide $x = y^2 + z^2$ que está dentro do cilindro $y^2 + z^2 = 9$
47. A parte da superfície $y = 4x + z^2$ que se encontra entre os planos $x = 0, x = 1, z = 0$ e $z = 1$
48. O helicóide (ou rampa em espiral) com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}$, $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi$
49. A superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = uv$, $z = \frac{1}{2}v^2$, $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2$
50. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, onde $0 < a < b$

51. Se a equação de uma superfície S é $z = f(x, y)$, onde $x^2 + y^2 \leq R^2$, e você sabe que $|f_x| \leq 1$ e $|f_y| \leq 1$, o que você pode dizer sobre $A(S)$?

52–53 Encontre a área da superfície com precisão de quatro casas decimais, expressando-a em termos de uma integral unidimensional e usando sua calculadora para estimar a integral.

52. A parte da superfície $z = \cos(x^2 + y^2)$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$
53. A parte da superfície $z = e^{-x^2 - y^2}$ que está acima do círculo $x^2 + y^2 \leq 4$

SCA 54. Determine, com precisão de quatro casas decimais, a área da parte da superfície $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$ que está acima do quadrado $|x| + |y| \leq 1$. Ilustre, traçando o gráfico dessa parte de superfície.

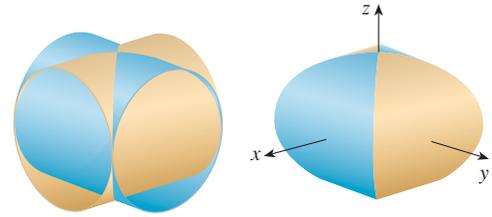
55. (a) Use a Regra do Ponto Médio para integrais duplas (veja a Seção 15.1) com seis quadrados para estimar a área da superfície $z = 1/(1 + x^2 + y^2)$, $0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4$.
 (b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a área de superfície da parte (a) até a quarta casa decimal. Compare com sua resposta para a parte (a).

SCA 56. Determine a área da superfície de equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos^3 u \cos^3 v, \sin^3 u \cos^3 v, \sin^3 v \rangle$, $0 \leq u \leq \pi$,

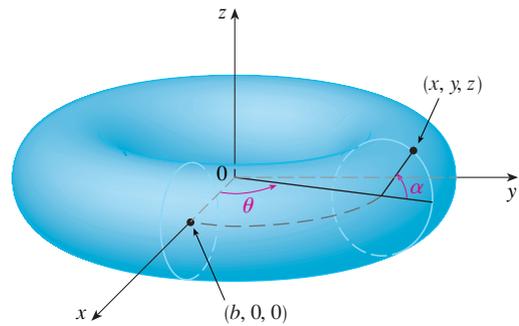
$0 \leq v \leq 2\pi$. Dê sua resposta com precisão de quatro casas decimais.

- SCA 57. Determine a área exata da superfície $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$, $1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1$.
- 58. (a) Determine, mas não calcule, a integral dupla da área da superfície com as equações paramétricas $x = au \cos v$, $y = bu \sin v$, $z = u^2$, $0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi$.
 (b) Elimine os parâmetros para mostrar que a superfície é um parabolóide elíptico e escreva outra integral dupla que forneça sua área.
- ✉ (c) Use as equações paramétricas da parte (a) com $a = 2$ e $b = 3$ para traçar o gráfico da superfície.
- SCA (d) Para o caso $a = 2, b = 3$, use um sistema de computação algébrica para achar a área da superfície com precisão de quatro casas decimais.
- 59. (a) Mostre que as equações paramétricas $x = a \sin u \cos v$, $y = b \sin u \sin v$, $z = c \cos u$, $0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi$, representam um elipsoide. ✉
 (b) Use as equações paramétricas da parte (a) para traçar o gráfico do elipsoide para o caso $a = 1, b = 2, c = 3$.
 (c) Determine, mas não calcule, uma integral dupla que dá a área de superfície da parte do elipsoide da parte (b).
- 60. (a) Mostre que as equações paramétricas $x = a \cosh u \cos v$, $y = b \cosh u \sin v$, $z = c \sinh u$ representam um hiperbolóide de uma folha.
 (b) Use as equações paramétricas da parte (a) para traçar o gráfico do hiperbolóide para o caso $a = 1, b = 2, c = 3$.
 (c) Determine, mas não calcule, a integral dupla que dá a área de superfície da porção do hiperbolóide da parte (b) que está entre os planos $z = -3$ e $z = 3$.
- ✉ 61. Encontre a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro do parabolóide $z = x^2 + y^2$.

62. A figura mostra a superfície criada quando o cilindro $y^2 + z^2 = 1$ intercepta o cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Encontre a área desta superfície.



- 63. Encontre a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ax$.
- 64. (a) Determine a representação parametrizada do toro obtido ao girar pelo eixo z o círculo no plano xz com centro $(b, 0, 0)$ e raio $a < b$. [Dica: Tome-se como parâmetros os ângulos θ e α mostrados na figura.]
 (b) Use as equações paramétricas encontradas na parte (a) para traçar o gráfico do toro para diversos valores de a e b .
 (c) Use a representação parametrizada da parte (a) para achar a área do toro.



16.7 Integrais de Superfície

A relação entre integral de superfície e área de superfície é semelhante àquela entre a integral de linha e o comprimento de arco. Suponha que f seja uma função de três variáveis cujo domínio inclui uma superfície S . Definiremos a integral de superfície de f sobre S de tal forma que, no caso em que $f(x, y, z) = 1$, o valor da integral de superfície seja igual à área da superfície de S . Começamos com superfícies parametrizadas e trataremos em seguida o caso especial onde S é o gráfico de uma função de duas variáveis.

Superfícies parametrizadas

Suponha que a superfície S tenha equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k} \quad (u, v) \in D$$

Vamos admitir inicialmente que o domínio dos parâmetros D seja um retângulo e vamos dividi-lo em sub-retângulos R_{ij} com dimensões Δu e Δv . Então, a superfície S é dividida em retalhos correspondentes S_{ij} , como na Figura 1. Calculamos f em um ponto P_{ij}^* de cada retalho, multiplicamos pela área ΔS_{ij} do retalho e formamos a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij}$$

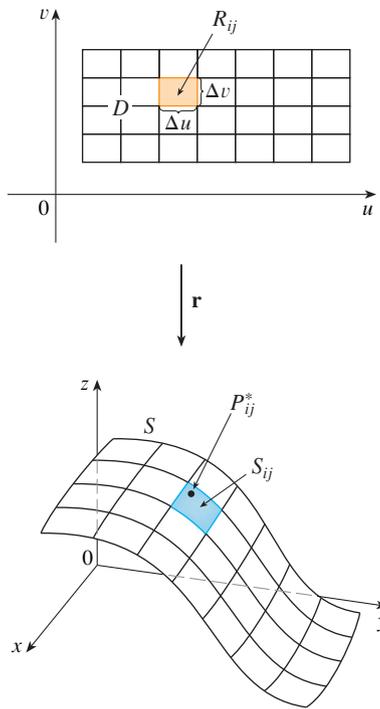


FIGURA 1

Nós assumimos que a superfície é coberta apenas uma vez quando (u, v) varia ao longo de D . O valor do integral de superfície não depende da parametrização usada.

A seguir, tomamos o limite quando o número de retalhos aumenta e definimos a **integral de superfície de f na superfície S** como

1

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}^*) \, \Delta S_{ij}$$

Observe a analogia com a definição de integral de linha (16.2.2) e também a analogia com a definição de integral dupla (15.1.5).

Para calcularmos a integral de superfície na Equação 1, aproximamos a área do retalho ΔS_{ij} pela área de um paralelogramo aproximador no plano tangente. Em nossa discussão sobre a área de superfície na Seção 16.6, fizemos a aproximação

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, \Delta u \, \Delta v$$

onde
$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$$

são os vetores tangentes em um canto de S_{ij} . Se as componentes são contínuas e \mathbf{r}_u e \mathbf{r}_v são não nulos e não paralelos no interior de D , pode ser mostrado, da Definição 1, mesmo quando D não é retangular, que

2

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA$$

Compare com a fórmula para a integral de linha:

$$\int_C f(x, y, z) \, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| \, dt$$

Observe também que

$$\iint_S 1 \, dS = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA = A(S)$$

A Fórmula 2 permite calcular uma integral de superfície, convertendo-a em uma integral dupla sobre o domínio do parâmetro D . Ao usar essa fórmula, lembre-se de que $f(\mathbf{r}(u, v))$ é avaliado ao escrever $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$ na fórmula $f(x, y, z)$.

EXEMPLO 1 Calcule a integral de superfície $\iint_S x^2 \, dS$, onde S é a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 4 da Seção 16.6, utilizamos a representação parametrizada

$$x = \text{sen } \phi \cos \theta \quad y = \text{sen } \phi \text{ sen } \theta \quad z = \cos \phi \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

isto é, $\mathbf{r}(\phi, \theta) = \text{sen } \phi \cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \phi \text{ sen } \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k}$

Como no Exemplo 10 da Seção 16.6, podemos obter que

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \text{sen } \phi$$

Portanto, pela Fórmula 2,

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 \, dS &= \iint_D (\text{sen } \phi \cos \theta)^2 |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{sen}^2 \phi \cos^2 \theta \text{ sen } \phi \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^\pi \text{sen}^3 \phi \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \, d\theta \int_0^\pi (\text{sen } \phi - \text{sen } \phi \cos^2 \phi) \, d\phi \\ &= \frac{1}{2} [\theta + \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta]_0^{2\pi} \left[-\cos \phi + \frac{1}{3} \cos^3 \phi \right]_0^\pi = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

As integrais de superfície têm aplicações semelhantes àsquelas das integrais que estudamos anteriormente. Por exemplo, se uma folha fina (digamos, uma folha de alumínio) tiver a forma de uma superfície S e se a densidade (massa por unidade de área) no ponto (x, y, z) for $\rho(x, y, z)$, então o total da **massa** da folha será

Aqui, usamos as identidades

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \\ \text{sen}^2 \phi &= 1 - \cos^2 \phi \end{aligned}$$

Em vez disso, poderíamos usar as Fórmulas 64 e 67 da Tabela de Integrais.

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dS$$

e o **centro de massa** será $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x \rho(x, y, z) dS \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y \rho(x, y, z) dS \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z \rho(x, y, z) dS$$

Os momentos de inércia também podem ser definidos como antes (veja o Exercício 41).

Gráficos

Qualquer superfície S com equação $z = g(x, y)$ pode ser considerada uma superfície parametrizada com equações parametrizadas

$$x = x \quad y = y \quad z = g(x, y)$$

e, então, temos $\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \mathbf{k}$ $\mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) \mathbf{k}$

de modo que

$$\mathbf{3} \quad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{e} \quad |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

Logo, neste caso, a Fórmula 2 se torna

$$\mathbf{4} \quad \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA$$

Existem fórmulas análogas para quando for mais conveniente projetar S no plano yz ou no plano xz . Por exemplo, se S for a superfície com equação $y = h(x, z)$ e D for sua projeção no plano xz , então

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, h(x, z), z) \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1} dA$$

EXEMPLO 2 Calcule $\iint_S y dS$, onde S é a superfície $z = x + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$. (Veja a Figura 2.)

SOLUÇÃO Uma vez que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

a Fórmula 4 dá

$$\begin{aligned} \iint_S y dS &= \iint_D y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA \\ &= \int_0^1 \int_0^2 y \sqrt{1 + 1 + 4y^2} dy dx \\ &= \int_0^1 dx \sqrt{2} \int_0^2 y \sqrt{1 + 2y^2} dy \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} (1 + 2y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{13\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

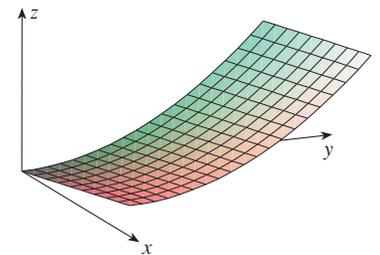


FIGURA 2

Se S é uma superfície suave por partes, ou seja, uma união finita de superfícies suaves S_1, S_2, \dots, S_n que se interceptam somente ao longo de suas fronteiras, então a integral de superfície de f sobre S é definida por

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + \dots + \iint_{S_n} f(x, y, z) dS$$

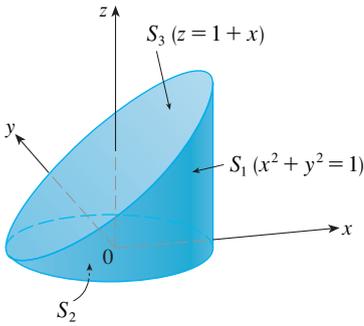


FIGURA 3

EXEMPLO 3 Calcule $\iint_S z \, dS$, onde S é a superfície cujo lado S_1 é dado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, cujo fundo S_2 é o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ no plano $z = 0$, e cujo topo S_3 é a parte do plano $z = 1 + x$ que está acima de S_2 .

SOLUÇÃO A superfície S é mostrada na Figura 3 (trocamos a posição usual dos eixos para enxergar melhor S). Para S_1 , usamos como parâmetros θ e z (veja o Exemplo 5 da Seção 16.6) e escrevemos suas equações parametrizadas como

$$x = \cos \theta \quad y = \sin \theta \quad z = z$$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 1 + x = 1 + \cos \theta$

Portanto,

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

e $|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$

Então, a integral de superfície em S_1 é

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} z \, dS &= \iint_D z |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos \theta} z \, dz \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)^2 \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 + 2 \cos \theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)] \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \theta + 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Como S_2 está no plano $z = 0$, temos

$$\iint_{S_2} z \, dS = \iint_{S_2} 0 \, dS = 0$$

A superfície superior S_3 se encontra acima do disco D e faz parte do plano $z = 1 + x$. Assim, tomando $g(x, y) = 1 + x$ na Fórmula 4 e convertendo para coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} z \, dS &= \iint_D (1 + x) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r \cos \theta) \sqrt{1 + 1 + 0} \, r \, dr \, d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r + r^2 \cos \theta) \, dr \, d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos \theta\right) \, d\theta \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin \theta}{3} \right]_0^{2\pi} = \sqrt{2} \pi \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \iint_S z \, dS &= \iint_{S_1} z \, dS + \iint_{S_2} z \, dS + \iint_{S_3} z \, dS \\ &= \frac{3\pi}{2} + 0 + \sqrt{2} \pi = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) \pi \end{aligned}$$

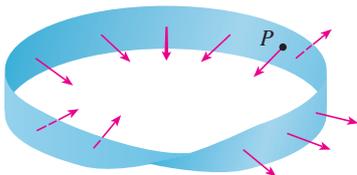


FIGURA 4
Uma faixa de Möbius

Superfícies Orientadas

Para definir integrais de superfície de campos vetoriais, precisamos descartar superfícies não orientáveis tais como a faixa de Möbius mostrado na Figura 4. [Nomeado assim por causa do geômetra alemão August Möbius (1790–1868).] Você pode construir uma tomando uma faixa retangular longa de papel, dando-lhe uma meia-torção e juntando as arestas curtas,

como na Figura 5. Se uma formiga andasse sobre uma faixa de Möbius começando no ponto P , ela acabaria do “outro lado” da faixa (ou seja, com sua parte de cima apontando para o sentido oposto). Então, se a formiga continuasse a andar na mesma direção, ela acabaria de volta no mesmo ponto P sem ter nunca cruzado uma aresta (se você construiu uma faixa de Möbius, tente desenhar uma linha a lápis pelo meio). Portanto, uma fita de Möbius realmente tem apenas um lado. Você pode traçar a faixa de Möbius usando as equações parametrizadas no Exercício 32 da Seção 16.6.

TEC Visual 16.7 mostra uma faixa de Möbius com um vetor normal que pode ser movido ao longo da superfície.

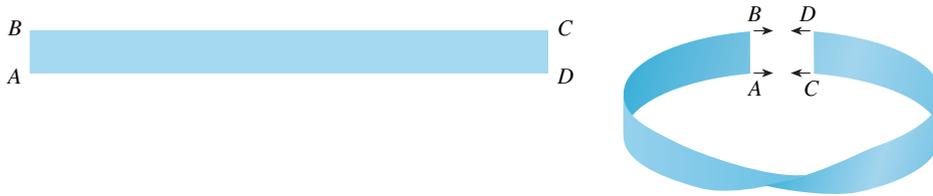


FIGURA 5
Construção de uma faixa de Möbius

Daqui para a frente consideraremos somente as superfícies orientáveis (com dois lados). Começaremos com uma superfície S que tenha um plano tangente em todos os pontos (x, y, z) em S (exceto nos pontos da fronteira). Existem dois vetores normais unitários \mathbf{n}_1 e $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ em (x, y, z) (veja a Figura 6).

Se for possível escolher um vetor normal \mathbf{n} em cada ponto (x, y, z) de modo que \mathbf{n} varie continuamente sobre S , então S é chamada **superfície orientada** e a escolha dada de \mathbf{n} fornece S com uma **orientação**. Existem duas possíveis orientações para qualquer superfície orientada (veja a Figura 7).

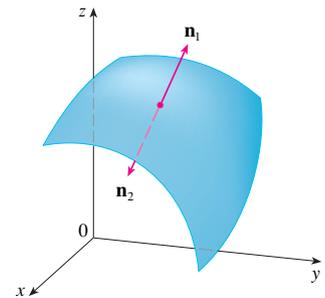


FIGURA 6

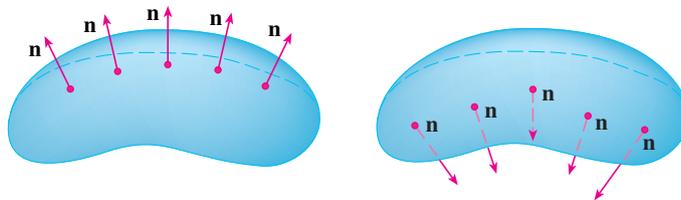


FIGURA 7
As duas orientações de uma superfície orientável

Para uma superfície $z = g(x, y)$ dada como o gráfico de g , usamos a Equação 3 e vemos que a orientação induzida é dada pelo vetor normal unitário

$$\mathbf{n} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} \tag{5}$$

Como a componente na direção de \mathbf{k} é positiva, isso fornece a orientação ascendente da superfície.

Se S for uma superfície orientada suave dada na forma parametrizada pela equação vetorial $\mathbf{r}(u, v)$, então ela está automaticamente associada à orientação do vetor normal unitário.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \tag{6}$$

e a orientação oposta é dada por $-\mathbf{n}$. Por exemplo, no Exemplo 4 na Seção 16.6 nós encontramos a representação parametrizada

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + a \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k}$$

para a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Então, no Exemplo 10 da Seção 16.6, encontramos que

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = a^2 \sin^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + a^2 \sin^2 \phi \sin \theta \mathbf{j} + a^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

e
$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = a^2 \sin \phi$$

Assim, a orientação induzida por $\mathbf{r}(\phi, \theta)$ é definida pelo vetor normal unitário

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|} = \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k} = \frac{1}{a} \mathbf{r}(\phi, \theta)$$

Observe que \mathbf{n} aponta na mesma direção que o vetor posição, ou seja, para fora da esfera (veja a Figura 8). A orientação oposta (para dentro) poderia ser obtida (veja a Figura 9) se tivéssemos trocado a ordem dos parâmetros, porque $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = -\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$.

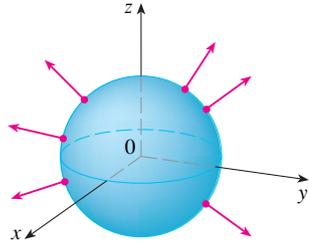


FIGURA 8
Orientação positiva

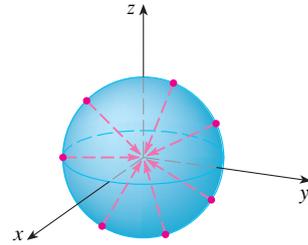


FIGURA 9
Orientação negativa

Para uma **superfície fechada**, isto é, uma superfície que seja a fronteira de uma região sólida E , a convenção é que a **orientação positiva** é aquela para a qual os vetores normais *apontam para fora* de E , e os vetores normais que apontam para dentro correspondem à orientação negativa (veja as Figuras 8 e 9).

Integrais de Superfície de Campos Vetoriais

Suponha que S seja uma superfície orientada com vetor unitário normal \mathbf{n} , e imagine um fluido com densidade $\rho(x, y, z)$ e campo de velocidade $\mathbf{v}(x, y, z)$ que flui através de S . (Pense em S como uma superfície imaginária que não impede o fluxo de fluido, tal como uma rede de pesca por um fluxo.) Em seguida, a taxa de fluxo (massa por unidade de tempo) por unidade de área é $\rho\mathbf{v}$. Se dividirmos S em pequenos retalhos S_{ij} , como na Figura 10 (compare com a Figura 1), então S_{ij} é aproximadamente plana, de modo que podemos aproximar a massa de fluido que passa por S_{ij} na direção da normal \mathbf{n} por unidade de tempo pela quantidade

$$(\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})A(S_{ij})$$

onde ρ , \mathbf{v} e \mathbf{n} são avaliados em algum ponto em S_{ij} . (Recorde-se de que o componente do vetor de $\rho\mathbf{v}$ na direção da unidade de vetor \mathbf{n} é $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$.) Somando essas quantidades e tomando o limite, obtemos, de acordo com a Definição 1, a integral de superfície da função $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ sobre S :

$$\boxed{7} \quad \iint_S \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S \rho(x, y, z) \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) \, dS$$

e ela é interpretada fisicamente como a vazão através de S .

Se escrevermos $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$, então \mathbf{F} também é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e a integral da Equação 7 fica

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Uma integral de superfície dessa forma aparece frequentemente em física, mesmo quando \mathbf{F} não é $\rho\mathbf{v}$, e é denominada *integral de superfície* (ou *integral de fluxo*) de \mathbf{F} em S .

8 Definição Se \mathbf{F} for um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada S com vetor normal unitário \mathbf{n} , então a **superfície integral de \mathbf{F} sobre S** é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Essa integral é também chamada **fluxo** de \mathbf{F} através de S .

Em palavras, a Definição 8 diz que a integral de superfície de um campo vetorial sobre S é igual à integral de superfície de sua componente normal em S (como definido anteriormente).

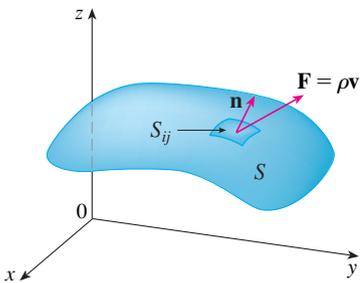


FIGURA 10

Se S é uma função vetorial dada por $\mathbf{r}(u, v)$, então \mathbf{n} é dado pela Equação 6 da Definição 8 e, da Equação 2, temos

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} dS \\ &= \iint_D \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \right] |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA \end{aligned}$$

onde D é o domínio dos parâmetros. Assim, temos

9

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA$$

EXEMPLO 4 Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$ através da esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 1, utilizamos a representação parametrizada

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k} \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Então $\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \sin \phi \cos \theta \mathbf{k}$ e, do Exemplo 10 da Seção 16.6,

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \sin^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin^2 \phi \sin \theta \mathbf{j} + \sin \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

Portanto,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) = \cos \phi \sin^2 \phi \cos \theta + \sin^3 \phi \sin^2 \theta + \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta$$

e, pela Fórmula 9, o fluxo é

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (2 \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta + \sin^3 \phi \sin^2 \theta) d\phi d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \sin^2 \phi \cos \phi d\phi \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + \int_0^\pi \sin^3 \phi d\phi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= 0 + \int_0^\pi \sin^3 \phi d\phi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \quad \left(\text{uma vez que } \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0 \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

pelos mesmos cálculos que no Exemplo 1.

Se, por exemplo, o campo vetorial do Exemplo 4 é um campo de velocidade descrevendo o escoamento de um fluido de densidade 1, então a resposta $4\pi/3$ representa a vazão através da esfera unitária em unidade de massa por unidade de tempo.

No caso de uma superfície S dada por um gráfico $z = g(x, y)$, podemos considerar x e y como parâmetros e usar a Equação 3 para escrever

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right)$$

Logo, a Fórmula 9 se torna

10

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA$$

Compare a Equação 9 com a expressão análoga para o cálculo da integral de linha de campos vetoriais da Definição 16.2.13:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

A Figura 11 mostra o campo vetorial \mathbf{F} do Exemplo 4 em pontos da esfera unitária

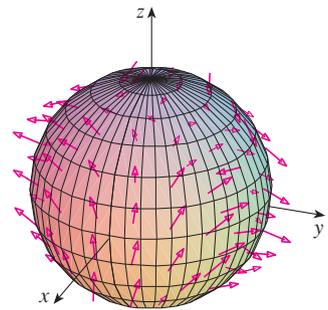


FIGURA 11

Esta fórmula pressupõe uma orientação ascendente de S ; para uma orientação descendente, multiplicamos por -1 . Fórmulas semelhantes podem ser trabalhadas se S é dada por $y = h(x, z)$ ou $x = k(y, z)$. (Veja os Exercícios 37 e 38.)

EXEMPLO 5 Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ e S é o limite da região sólida E delimitada pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e o plano $z = 0$.

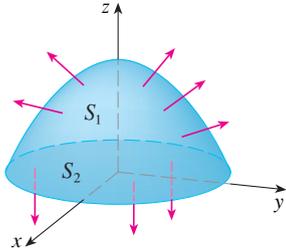


FIGURA 12

SOLUÇÃO A superfície S é constituída pela superfície parabolóide superior S_1 e pela superfície circular do fundo S_2 (veja a Figura 12). Como S é uma superfície fechada, usamos a convenção de orientação positiva (para fora). Isso significa que S_1 é orientada para cima e podemos usar a Equação 10 com D sendo a projeção de S_1 sobre o plano xy , ou seja, o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Como

$$P(x, y, z) = y \quad Q(x, y, z) = x \quad R(x, y, z) = z = 1 - x^2 - y^2$$

sobre S_1 e $\frac{\partial g}{\partial x} = -2x \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -2y$

temos

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \left(-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA \\ &= \iint_D [-y(-2x) - x(-2y) + 1 - x^2 - y^2] dA \\ &= \iint_D (1 + 4xy - x^2 - y^2) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 4r^2 \cos \theta \sin \theta - r^2) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3 + 4r^3 \cos \theta \sin \theta) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \cos \theta \sin \theta \right) d\theta = \frac{1}{4}(2\pi) + 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

O disco S_2 é orientado para baixo, então seu vetor normal unitário é $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ e temos

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) \, dS = \iint_D (-z) \, dA = \iint_D 0 \, dA = 0$$

uma vez que $z = 0$ em S_2 . Finalmente, calculamos, pela definição, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ como a soma das integrais de superfície de \mathbf{F} sobre as partes S_1 e S_2 :

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

Embora tenhamos exemplificado a integral de superfície de um campo de vetores com seu uso em mecânica dos fluidos, esse conceito também aparece em outras situações físicas. Por exemplo, se \mathbf{E} é um campo elétrico (veja o Exemplo 5 da Seção 16.1), então a integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

chama-se a **fluxo elétrico** de \mathbf{E} através da superfície S . Uma importante lei de eletrostática é a **Lei de Gauss**, que diz que a carga total englobada por uma superfície S é

11
$$Q = \epsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

onde ϵ_0 é uma constante (denominada permissividade no vácuo) que depende das unidades usadas (no sistema SI, $\epsilon_0 \approx 8,8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$). Portanto, se o campo vetorial \mathbf{F} do Exemplo 4 representa um campo elétrico, podemos concluir que a carga envolvida por S é $Q = \frac{4}{3}\pi \epsilon_0$.

Outra aplicação de integrais de superfície ocorre no estudo de fluxo de calor. Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) em um corpo seja $u(x, y, z)$. Então, o **fluxo de calor** é definido como o campo vetorial

$$\mathbf{F} = -K \nabla u$$

onde K é uma constante determinada experimentalmente, chamada **condutividade** da substância. A taxa de transmissão de calor através da superfície S no corpo é então dada pela integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -K \iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}$$

EXEMPLO 6 A temperatura u em uma bola metálica é proporcional ao quadrado da distância do centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera S de raio a e centro no centro da bola.

SOLUÇÃO Tomando o centro da bola como origem, temos

$$u(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2)$$

onde C é a constante de proporcionalidade. Então o fluxo de calor é

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -K \nabla u = -KC(2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + 2z \mathbf{k})$$

onde K é a condutividade do metal. Em vez de usar a parametrização usual da esfera dada no Exemplo 4, observamos que o vetor normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que aponta para fora no ponto (x, y, z) é

$$\mathbf{n} = \frac{1}{a} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})$$

e assim

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{2KC}{a} (x^2 + y^2 + z^2)$$

Mas, sobre S temos $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, então $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2aKC$. Portanto, a taxa de transmissão de calor através de S é

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = -2aKC \iint_S dS \\ &= -2aKCA(S) = -2aKC(4\pi a^2) = -8KC\pi a^3 \end{aligned}$$

16.7 Exercícios

- Seja S a superfície que é fronteira da caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$ e $z = 6$. Aproxime $\iint_S e^{-0.1(x+y+z)} \, dS$ usando uma soma de Riemann, como na Definição 1, tomando os retalhos S_{ij} como os retângulos que são as faces da caixa S e os pontos P_{ij}^* como os centros destes retângulos.
- Uma superfície S é formada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leq z \leq 1$, e por círculos no fundo e no topo. Suponha que você saiba que f é uma função contínua com $f(\pm 1, 0, 0) = 2$, $f(0, \pm 1, 0) = 3$, $f(0, 0, \pm 1) = 4$.
Estime o valor de $\iint_S f(x, y, z) \, dS$ usando a soma de Riemann, tomando como retalhos S_{ij} os círculos do fundo e do topo e a lateral dividida em quatro partes.
- Seja H o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 50$, $z \geq 0$, e suponha que f seja uma função contínua com $f(3, 4, 5) = 7$, $f(3, -4, 5) = 8$, $f(-3, 4, 5) = 9$ e $f(-3, -4, 5) = 12$. Ao dividir H em quatro partes, estime o valor de $\iint_H f(x, y, z) \, dS$.
- Suponha que $f(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, onde g é uma função de uma variável tal que $g(2) = -5$. Calcule $\iint_S f(x, y, z) \, dS$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
- 5–20 Calcule a integral de superfície.
- $\iint_S (x + y + z) \, dS$,
 S é o paralelogramo com equações paramétricas $x = u + v$, $y = u - v$, $z = 1 + 2u + v$, $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 1$
- $\iint_S xyz \, dS$,
 S é o cone com equações paramétricas $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \pi/2$
- $\iint_S y \, dS$, S é o helicóide com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle u \cos v, u \sin v, v \rangle$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \pi$
- $\iint_S (x^2 + y^2) \, dS$,
 S é o superfície com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle 2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2 \rangle$, $u^2 + v^2 \leq 1$
- $\iint_S x^2 y z \, dS$,
 S é a parte do plano $z = 1 + 2x + 3y$ que está acima do retângulo $[0, 3] \times [0, 2]$
- $\iint_S xz \, dS$,
 S é a parte do plano $2x + 2y + z = 4$ que está no primeiro octante

11. $\iint_S x \, dS$,
 S é a região triangular com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$ e $(0, 0, 4)$
12. $\iint_S y \, dS$,
 S é a superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$
13. $\iint_S x^2 z^2 \, dS$,
 S é a parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que está entre os planos $z = 1$ e $z = 3$
14. $\iint_S z \, dS$,
 S é a superfície $x = y + 2z^2$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$
15. $\iint_S y \, dS$,
 S é a parte do parabolóide $y = x^2 + z^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + z^2 = 4$
16. $\iint_S y^2 \, dS$,
 S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy
17. $\iint_S (x^2 z + y^2 z) \, dS$,
 S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$
18. $\iint_S xz \, dS$,
 S é o limite da região delimitada pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$ e $x + y = 5$
19. $\iint_S (z + x^2 y) \, dS$,
 S é a parte do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ que está entre os planos $x = 0$ e $x = 3$ no primeiro octante
20. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \, dS$,
 S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ entre os planos $z = 0$ e $z = 2$, juntamente com os discos inferior e superior

21–32 Avalie a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para o campo vetorial dado \mathbf{F} e a superfície orientada S . Em outras palavras, localize o fluxo de \mathbf{F} através de S . Para superfícies fechadas, use a orientação (para o exterior) positiva.

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = ze^{xy} \mathbf{i} - 3ze^{xy} \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$,
 S é o paralelogramo do Exercício 5 com orientação ascendente.
22. $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$,
 S é o helicóide do Exercício 7 com orientação ascendente.
23. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + zx \mathbf{k}$,
 S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do quadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, e com orientação ascendente.
24. $\mathbf{F}(x, y, z) = -x \mathbf{i} - y \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$,
 S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que está entre os planos $z = 1$ e $z = 3$ com orientação descendente
25. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} - z \mathbf{j} + y \mathbf{k}$,
 S é parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante, com orientação para a origem
26. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + x \mathbf{j} + y \mathbf{k}$,
 S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $y \geq 0$, orientado na direção do eixo positivo y
27. $\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{j} - z \mathbf{k}$,
 S é formada pelo parabolóide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 1$, e pelo disco $x^2 + z^2 \leq 1$, $y = 1$

28. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + 4x^2 \mathbf{j} + yz \mathbf{k}$,
 S é a superfície $z = xe^y$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, com orientação ascendente
29. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + 3z \mathbf{k}$,
 S é o cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$
30. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + 5 \mathbf{k}$,
 S é o limite da região delimitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $x + y = 2$
31. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$,
 S é o limite do semicilindro sólido $0 \leq z \leq \sqrt{1 - y^2}$, $0 \leq x \leq 2$
32. $\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + (z - y) \mathbf{j} + x \mathbf{k}$,
 S é a superfície do tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$

SCA 33. Calcule $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \, dS$ com precisão de quatro casas decimais, quando S é a superfície $z = xe^y$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

SCA 34. Determine o valor exato de $\iint_S x^2 yz \, dS$, onde S é a superfície $z = xy$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

SCA 35. Determine o valor de $\iint_S x^2 y^2 z^2 \, dS$ correto até a quarta casa decimal, onde S é a parte do parabolóide $z = 3 - 2x^2 - y^2$ que está acima do plano xy .

SCA 36. Determine o fluxo de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen}(xyz) \mathbf{i} + x^2 y \mathbf{j} + z^2 e^{x/z} \mathbf{k}$$

através da parte do cilindro $4y^2 + z^2 = 4$ que está acima do plano xy e entre os planos $x = -2$ e $x = 2$ com orientação ascendente. Ilustre, usando um sistema de computação algébrica para desenhá-lo e o campo vetorial na mesma tela.

37. Determine uma fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ semelhante à Fórmula 10 para o caso onde S é dada por $y = h(x, z)$ e \mathbf{n} é o vetor normal unitário que aponta para a esquerda.
38. Determine uma fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ semelhante à Fórmula 10 para o caso onde S é dada por $x = k(y, z)$ e \mathbf{n} é o vetor normal unitário que aponta para a frente (ou seja, para o observador, quando os eixos estão desenhados na posição usual).
39. Determine o centro de massa do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, se ele tiver densidade constante.
40. Determine a massa de um funil fino com o formato do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leq z \leq 4$, se sua função densidade é $\rho(x, y, z) = 10 - z$.
41. (a) Dê uma expressão integral para o momento de inércia I_z em torno do eixo z de uma folha fina no formato da superfície S se a função densidade é ρ .
 (b) Determine o momento de inércia em torno do eixo z do funil do Exercício 40.
42. Seja S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está acima do plano $z = 4$. Se S tem densidade constante k , determine (a) o centro da massa e (b) o momento de inércia em torno do eixo z .
43. Um fluido tem densidade 870 kg/m^3 e escoia com velocidade $\mathbf{v} = z \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + x^2 \mathbf{k}$, onde x , y e z são medidos em metros e as componentes de \mathbf{v} , em metros por segundo. Encontre a taxa de vazão para fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 1$.
44. A água do mar tem densidade 1.025 kg/m^3 e flui em um campo de velocidade $\mathbf{v} = y \mathbf{i} + x \mathbf{j}$, onde x , y e z são medidos em me-

tros e as componentes de \mathbf{v} , em metros por segundo. Encontre a taxa de vazão para fora do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$.

45. Use a Lei de Gauss para achar a carga contida no hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0$, se o campo elétrico for

$$\mathbf{E}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + 2z \mathbf{k}.$$

46. Use a Lei de Gauss para achar a carga dentro de um cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ se o campo elétrico for

$$\mathbf{E}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}.$$

47. A temperatura no ponto (x, y, z) em uma substância com uma condutividade $K = 6,5$ é $u(x, y, z) = 2y^2 + 2z^2$. Determine a taxa

de transmissão de calor nessa substância para dentro superfície cilíndrica $y^2 + z^2 = 6, 0 \leq x \leq 4$.

48. A temperatura em um ponto de uma bola com condutividade K é inversamente proporcional à distância do centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera S de raio a e centro no centro da bola.

49. Seja \mathbf{F} um campo inverso do quadrado, ou seja, $\mathbf{F}(r) = c\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ para alguma constante c , onde $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$. Mostre que o fluxo de \mathbf{F} através de uma esfera S com o centro de origem é independente do raio de S .

16.8 Teorema de Stokes

O Teorema de Stokes pode ser visto como uma versão em dimensão maior do Teorema de Green. Enquanto o Teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma região plana D com uma integral de linha em torno de sua curva limite plana, o Teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície sobre uma superfície S com uma integral em torno da curva da fronteira S (que é uma curva no espaço). A Figura 1 mostra uma superfície orientada com vetor normal unitário \mathbf{n} . A orientação de S induz a **orientação positiva da curva fronteira** C mostrada na figura. Isso significa que, se você andar na direção positiva ao redor da curva C com sua cabeça na direção e sentido de \mathbf{n} , então a superfície estará sempre à sua esquerda.

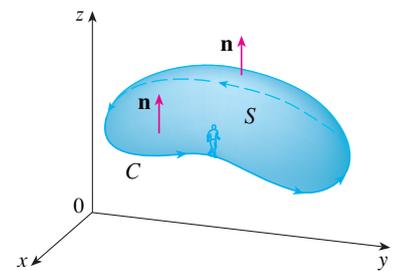


FIGURA 1

Teorema de Stokes Seja S uma superfície orientada, suave por partes, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada, simples, suave por partes, com orientação positiva. Seja \mathbf{F} um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta de \mathbb{R}^3 que contém S . Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds \quad \text{e} \quad \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

o Teorema de Stokes nos diz que a integral de linha em torno da curva fronteira de S da componente tangencial de \mathbf{F} é igual à integral de superfície sobre S da componente normal do rotacional de \mathbf{F} .

A curva na fronteira orientada positivamente da superfície orientada S é com frequência denotada por ∂S , de modo que o Teorema de Stokes pode ser escrito como

$$\boxed{1} \quad \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Existe uma analogia entre o Teorema de Stokes, o de Green e o Teorema Fundamental do Cálculo. Como anteriormente, existe uma integral envolvendo derivadas do lado esquerdo da Equação 1 (lembre-se de que $\text{rot } \mathbf{F}$ é uma espécie de derivada de \mathbf{F}) e do lado direito, envolvendo valores de \mathbf{F} calculados somente na *fronteira* de S .

De fato, no caso especial em que a superfície S é plana e pertence ao plano xy , com orientação ascendente, o vetor normal unitário é \mathbf{k} , a integral de superfície se transforma em uma integral dupla, e o Teorema de Stokes fica

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA$$

Essa é precisamente a forma vetorial do Teorema de Green dada na Equação 16.5.12. Assim, vemos que o Teorema de Green é realmente um caso especial do Teorema de Stokes.

Apesar de o Teorema de Stokes ser muito difícil de demonstrar no caso geral, podemos fazer uma demonstração quando S for um gráfico e \mathbf{F}, S e C forem bem comportados.

George Stokes

O Teorema de Stokes tem seu nome em homenagem ao físico matemático irlandês sir George Stokes (1819-1903). Stokes era professor na Universidade de Cambridge (ele detinha a mesma cadeira de Newton, Lucasian Professor of Mathematics) e se sobressaiu por seus estudos sobre vazão de fluidos e luz. O teorema que hoje chamamos Teorema de Stokes foi, na verdade, descoberto pelo físico escocês sir William Thomson (1824- 1907, conhecido como lorde Kelvin). Stokes soube desse teorema por uma carta de Thomson em 1850 e pediu a seus estudantes que o demonstrassem em um exame em Cambridge, em 1854. Não se sabe se algum de seus estudantes foi capaz de fazê-lo.

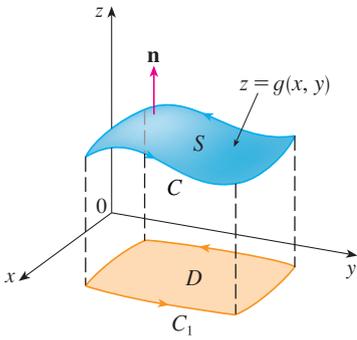


FIGURA 2

DEMONSTRAÇÃO DE UM CASO ESPECIAL DO TEOREMA DE STOKES Admitiremos que a equação de S é $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, onde g tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, e que D seja uma região plana simples cuja curva fronteira C_1 corresponde a C . Se a orientação de S for ascendente, a orientação positiva de C corresponde à orientação positiva de C_1 . (Veja a Figura 2.) Foi-nos dado que $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$, onde as derivadas parciais de P , Q e R são contínuas.

Como S é um gráfico de uma função, podemos aplicar a Fórmula 16.7.10 com \mathbf{F} substituído por $\text{rot } \mathbf{F}$. O resultado é

$$\begin{aligned} \text{2} \quad \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \right] dA \end{aligned}$$

onde as derivadas parciais de P , Q e R são calculadas em $(x, y, g(x, y))$. Se

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad a \leq t \leq b$$

é a representação parametrizada de C_1 , então a representação parametrizada de C é

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = g(x(t), y(t)) \quad a \leq t \leq b$$

Isso nos permite, com ajuda da Regra da Cadeia, calcular a integral de linha como segue:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \left[P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \right] dt \\ &= \int_a^b \left[\left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] dt \\ &= \int_{C_1} \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dA \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema de Green no último passo. Então, utilizando novamente a Regra da Cadeia e lembrando que P , Q e R são funções de x , y e z e que z é, por sua vez, função de x e y , obtemos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + R \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) \right] dA \end{aligned}$$

Quatro dos termos da integral dupla se cancelam, e os seis restantes podem ser rearranjados para que coincidam com o lado direito da Equação 2. Portanto

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 1 Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2 \mathbf{i} + x \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$ e C é a curva da interseção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (Oriente C no sentido anti-horário quando observado de cima.)

SOLUÇÃO A curva C (uma elipse) está mostrada na Figura 3. Apesar de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ poder ser calculada diretamente, é mais simples usar o Teorema de Stokes. Vamos inicialmente calcular

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y) \mathbf{k}$$

Apesar de existirem muitas superfícies com fronteira C , a escolha mais conveniente é a região elíptica S no plano $y + z = 2$ cuja fronteira é C . Se orientarmos S para cima, em seguida, C tem a orientação induzida positiva. A projeção D de S no plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leq 1$ e portanto, usando a Equação 16.7.10 com $z = g(x, y) = 2 - y$, temos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (1 + 2y) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + 2 \frac{r^3}{3} \sin \theta \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin \theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2}(2\pi) + 0 = \pi \end{aligned}$$

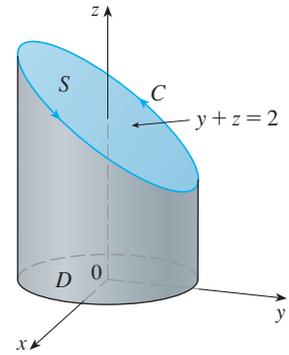


FIGURA 3

EXEMPLO 2 Use o Teorema de Stokes para calcular a integral $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy . (Veja a Figura 4.)

SOLUÇÃO Para acharmos a curva fronteira C , resolvemos as equações $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$. Subtraindo, obtemos $z^2 = 3$ e, portanto, $z = \sqrt{3}$ (uma vez que $z > 0$). Então C é a circunferência dada pelas equações $x^2 + y^2 = 1, z = \sqrt{3}$. A equação vetorial de C é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \sqrt{3} \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Assim,
Temos também

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{3} \cos t \mathbf{i} + \sqrt{3} \sin t \mathbf{j} + \cos t \sin t \mathbf{k}$$

Portanto, pelo Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3} \cos t \sin t + \sqrt{3} \sin t \cos t) dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} 0 dt = 0 \end{aligned}$$

Observe que no Exemplo 2, calculamos uma integral de superfície simplesmente conhecendo os valores de \mathbf{F} na fronteira C . Isso significa que, se tivermos outra superfície orientada com a mesma fronteira C , obteremos o mesmo valor para a integral de superfície!

Em geral, se S_1 e S_2 são superfícies orientadas com mesma fronteira orientada C e ambas satisfazem as hipóteses do Teorema de Stokes, então

$$\boxed{3} \quad \iint_{S_1} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Esse fato é muito útil quando for difícil integrar sobre uma das superfícies, mas for mais fácil integrar sobre a outra.

Usaremos agora o Teorema de Stokes para tentar explicar o significado do vetor rotacional. Suponha que C seja uma curva fechada orientada e \mathbf{v} represente o campo de velocidade de um fluido. Considere a integral de linha

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} ds$$

e recorde que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ é a componente do vetor \mathbf{v} na direção do vetor tangente unitário \mathbf{T} . Isto significa que quanto mais perto a direção de \mathbf{v} é a direção de \mathbf{T} , maior é o valor de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$. Assim, $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ é a medida da tendência de o fluido se mover em torno de C e é chamada **circulação** de \mathbf{v} em torno de C . (Veja a Figura 5.)

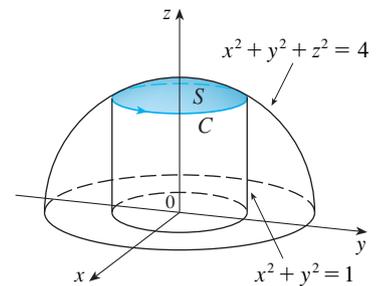


FIGURA 4

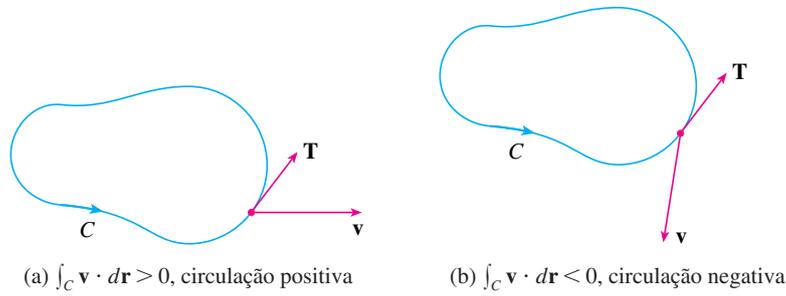


FIGURA 5

Seja agora $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do fluido e seja S_a um pequeno círculo com raio a e centro P_0 . Então $(\text{rot } \mathbf{F})(P) \approx (\text{rot } \mathbf{F})(P_0)$ para todos os pontos P em S_a porque $\text{rot } \mathbf{F}$ é contínuo. Então, pelo Teorema de Stokes, temos a seguinte aproximação do fluxo em torno do círculo fronteira C_a :

$$\begin{aligned} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &\approx \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \, dS = \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \pi a^2 \end{aligned}$$

Essa aproximação se torna melhor quando $a \rightarrow 0$ e temos

4
$$\text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

Imagine uma roda pequena formada por pás colocadas em um fluido em um ponto P , como na Figura 6; essa roda vai girar mais rapidamente quando seu eixo for paralelo a $\text{rot } \mathbf{v}$.

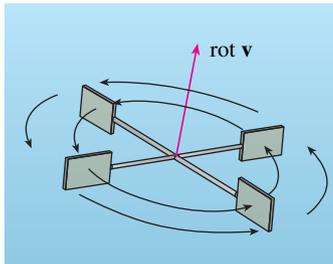


FIGURA 6

A Equação 4 fornece a relação entre o rotacional e a circulação. Ela mostra que $\text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ é uma medida do efeito de rotação do fluido em torno do eixo \mathbf{n} . O efeito de ondulação é maior sobre o eixo paralelo a $\text{rot } \mathbf{v}$.

Finalmente, mencionamos que o Teorema de Stokes pode ser usado para demonstrar o Teorema 16.5.4 (que afirma que, se $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ sobre \mathbb{R}^3 , então \mathbf{F} é conservativo). Do nosso trabalho anterior (16.3.3 e 16.3.4 Teoremas), sabemos que \mathbf{F} é conservativo se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cada caminho fechado C . Dado C , suponha que possamos encontrar uma superfície orientável S cuja fronteira é C . (Isso pode ser feito, mas a demonstração exige técnicas avançadas.) Em seguida, o teorema de Stokes fornece

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Uma curva que não seja simples pode ser quebrada em diversas curvas simples e as integrais ao longo dessas curvas simples são todas 0. Somando essas integrais, obtemos $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer curva fechada C .

16.8 Exercícios

- Um hemisfério H e uma porção P de um parabolóide são mostrados. Suponha que \mathbf{F} seja um campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 cujas componentes tenham derivadas parciais contínuas. Explique por quê $\iint_H \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_P \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$
- Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y \cos z \mathbf{i} + e^x \sin z \mathbf{j} + xe^y \mathbf{k}$, S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$, de orientação ascendente
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z^2 \mathbf{i} + y^2z^2 \mathbf{j} + xyz \mathbf{k}$, S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, com orientação ascendente
- $\mathbf{F}(x, y, z) = \text{tg}^{-1}(x^2yz^2) \mathbf{i} + x^2y \mathbf{j} + x^2z^2 \mathbf{k}$, S é o cone $x = \sqrt{y^2 - z^2}, 0 \leq x \leq 2$, orientado na direção do eixo positivo x
- $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + x^2yz \mathbf{k}$, S é formada pelo topo e pelos quatro lados (mas não pelo fundo) do cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, com orientação para fora.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy} \mathbf{i} + e^{xz} \mathbf{j} + x^2z \mathbf{k}$, S é a metade do elipsoide

$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ que se situa à direita do plano xz orientado na direção do eixo positivo y

7-10 Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Em cada caso, C é orientado no sentido anti-horário quando visto de cima.

- 7.** $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$, C é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$
- 8.** $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + (x + yz)\mathbf{j} + (xy - \sqrt{z})\mathbf{k}$, C é o limite da parte do plano $3x + 2y + z = 1$ no primeiro octante
- 9.** $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} + e^{yz}\mathbf{k}$, C é o círculo $x^2 + y^2 = 16$, $z = 5$
- 10.** $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$, C é a curva da interseção do plano $x + z = 5$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 9$

11. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

e C é a curva da interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.



(b) Trace o gráfico do plano e do cilindro com domínios escolhidos de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).



(c) Determine equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C .

12. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} + \frac{1}{3}x^3\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ e C é a curva da interseção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.



(b) Trace o gráfico do parabolóide hiperbólico e do cilindro com domínios escolhidos de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).



(c) Determine equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C .

13-15 Verifique que o Teorema de Stokes é verdadeiro para o campo vetorial dado \mathbf{F} e a superfície S .

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, S é o cone $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 4$, com orientação descendente

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2yz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3x\mathbf{k}$, S é a parte do parabolóide $z = 5 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 1$, com orientação ascendente

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$, orientado na direção do eixo positivo y

16. Seja C uma curva fechada simples suave que se situa no plano $x + y + z = 1$. Mostre que a integral de linha

$$\int_C z \, dx - 2x \, dy + 3y \, dz$$

depende apenas da área da região englobada por C e não da forma de C ou de sua posição no plano.

17. Uma partícula se move ao longo de segmentos de reta da origem aos pontos $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 2, 1)$, e de volta para a origem sob a influência do campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + 4y^2\mathbf{k}$$

Encontre o trabalho realizado.

18. Calcule

$$\int_C (y + \sin x) \, dx + (z^2 + \cos y) \, dy + x^3 \, dz$$

onde C é a curva $\mathbf{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, \sin 2t \rangle$, $0 \leq t \leq 2\pi$. [Dica: observe que C está na superfície $z = 2xy$.]

19. Se S é uma esfera e \mathbf{F} satisfaz as hipóteses do Teorema de Stokes, mostre que $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

20. Suponha que S e C satisfaçam as hipóteses do Teorema de Stokes e f e g tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Use os Exercícios 24 e 26 da Seção 16.5 para demonstrar o seguinte:

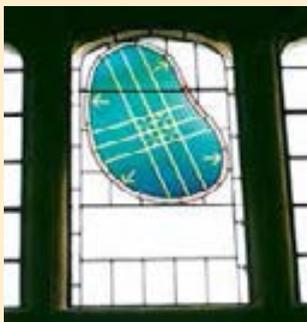
(a) $\int_C (f \nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S}$

(b) $\int_C (f \nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

(c) $\int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

PROJETO APLICADO

A ilustração mostra um vitral da Universidade de Cambridge em homenagem a George Green.



Cortesia de Masters and Fellows of Gonville e Caius College, University of Cambridge, Inglaterra

TRÊS HOMENS E DOIS TEOREMAS

Apesar de dois dos mais importantes teoremas em cálculo vetorial terem seus nomes em homenagem a George Green e George Stokes, um terceiro homem, William Thomson (também conhecido como lorde Kelvin), teve um papel muito importante na formulação, disseminação e aplicação dos dois resultados. Os três homens estavam interessados em como usar os dois teoremas para explicar e prever fenômenos físicos em eletricidade e magnetismo e em escoamento de fluidos.

Escreva um trabalho sobre as origens históricas dos Teoremas de Green e de Stokes. Explique as semelhanças e as relações entre os teoremas. Discuta o papel que Green, Thomson e Stokes tiveram na descoberta desses teoremas e em torná-los conhecidos. Mostre como esses teoremas apareceram em pesquisas em eletricidade e magnetismo e foram depois usados no estudo de diversos outros problemas físicos.

O dicionário editado por Gillispie [2] é uma boa fonte tanto para dados biográficos como para informações científicas. O livro de Hutchinson [5] trata da vida de Stokes e o livro de Thomson [8] é uma biografia de lorde Kelvin. Os artigos de Grattan-Guinness [3] e Gray [4] e o livro de Cannell [1] fornecem uma descrição da vida extraordinária e dos trabalhos de Green. Informações adicionais históricas e matemáticas podem ser encontradas nos livros de Katz [6] e Kline [7].

1. D. M. Cannell. *George Green, Matemático e Físico 1793-1841: O fundo para sua vida e obra* (Filadélfia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001).

2. C. C. Gillispie, (Ed.). *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Scribner's, 1974. Veja o artigo em Green por P. J. Wallis no Volume XV e os artigos no Thomson por Jed Buchwald e em Stokes por E. M. Parkinson no Volume XIII.

3. I. Grattan-Guinness. "Por que George Green escrever seu ensaio de 1828 sobre eletricidade e magnetismo?" *Amer. Mat. mensal*, Vol. 102 (1995), p. 387–96.
4. J. Gray. "Houve um moleiro alegre". *The New Scientist*, Vol. 139 (1993), p. 24–27.
5. G. E. Hutchinson. *The Enchanted Voyage and Other Studies*. Westport, CT: Greenwood Press, 1978.
6. Victor Katz. *A History of Mathematics: An Introduction*. Nova York: HarperCollins, 1993, p. 678–80.
7. Morris Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nova York: Oxford University Press, 1972, p. 683–85.
8. Sylvanus P. Thompson. *The Life of Lord Kelvin*. Nova York: Chelsea, 1976.

16.9 O Teorema do Divergente

Na Seção 16.5, reescrevemos o Teorema de Green na versão vetorial

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) \, dA$$

onde C é a fronteira positivamente orientada da região do plano D . Se quisermos estender esse teorema para campos de vetores em \mathbb{R}^3 , podemos fazer a suposição de que

$$\boxed{1} \quad \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) \, dV$$

onde S é a superfície fronteira da região sólida E . A Equação 1 é verdadeira sob hipóteses apropriadas e é chamada Teorema do Divergente. Observe sua semelhança com os Teoremas de Green e de Stokes, pois ele relaciona a integral da derivada de uma função ($\operatorname{div} \mathbf{F}$, nesse caso) sobre uma região com a integral da função original \mathbf{F} sobre a fronteira da região.

Nesta fase você pode querer rever os vários tipos de regiões sobre as quais calculamos integrais triplas na Seção 15.7. Enunciaremos e demonstraremos o Teorema do Divergente para regiões E que são, simultaneamente, dos tipos 1, 2 e 3 e que chamamos de **regiões sólidas simples**. (Por exemplo, as regiões delimitadas por elipsoides ou caixas retangulares são simples regiões sólidas.) A fronteira de E é uma superfície fechada e usaremos a convenção, introduzida na Seção 16.7, de que a orientação positiva é para fora, ou seja, o vetor normal unitário \mathbf{n} apontará para fora de E .

O Teorema do Divergente Seja E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E , orientada positivamente (para fora). Seja \mathbf{F} um campo vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E . Então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Portanto, o Teorema do Divergente afirma que, sob as condições dadas, o fluxo de \mathbf{F} pela fronteira de E é igual à integral tripla da divergência de \mathbf{F} em E .

DEMONSTRAÇÃO Seja $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$. Então

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

assim,
$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} \, dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} \, dV + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} \, dV$$

Se \mathbf{n} é o vetor normal unitário para fora de S , então a integral de superfície do lado esquerdo do Teorema do Divergente é

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S (P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \iint_S P \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_S Q \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_S R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS \end{aligned}$$

O Teorema do Divergente é às vezes chamado Teorema de Gauss, em homenagem ao grande matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777–1855), que descobriu esse teorema durante suas pesquisas sobre eletrostática. Em muitos países da Europa, o Teorema do Divergente é conhecido como Teorema de Ostrogradsky, em homenagem ao matemático russo Mikhail Ostrogradsky (1801–1862), que publicou esse resultado em 1826.

Portanto, para demonstrar o Teorema do Divergente, é suficiente demonstrar as três seguintes equações:

$$2 \quad \iint_S P \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} \, dV$$

$$3 \quad \iint_S Q \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} \, dV$$

$$4 \quad \iint_S R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} \, dV$$

Para demonstrarmos a Equação 4, usamos o fato de que E é uma região do tipo 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xy . Pela Equação 15.7.6, temos

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} \, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) \, dz \right] dA$$

e, portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$5 \quad \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} \, dV = \iint_D [R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y))] \, dA$$

A fronteira S é constituída por três partes: a superfície inferior S_1 , a superfície superior S_2 , e, possivelmente, uma superfície vertical S_3 , que se situa acima da curva fronteira de D . (Veja a Figura 1. S_3 pode não aparecer, tal como no caso de uma esfera.) Observe que em S_3 temos $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$, porque \mathbf{k} é vertical e \mathbf{n} é horizontal, e assim

$$\iint_{S_3} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_3} 0 \, dS = 0$$

Logo, independentemente da existência de uma superfície vertical, podemos escrever

$$6 \quad \iint_S R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_1} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_{S_2} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

A equação de S_2 é $z = u_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, e o vetor normal que sai de \mathbf{n} aponta para cima. Da Equação 16.7.10 (com \mathbf{F} substituído por $R \mathbf{k}$), temos

$$\iint_{S_2} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_D R(x, y, u_2(x, y)) \, dA$$

Sobre S_1 temos $z = u_1(x, y)$, mas aqui a normal \mathbf{n} aponta para baixo, então multiplicamos por -1 :

$$\iint_{S_1} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \iint_D R(x, y, u_1(x, y)) \, dA$$

Portanto, a Equação 6 fornece

$$\iint_S R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_D [R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y))] \, dA$$

Comparando com a Equação 5, temos que

$$\iint_S R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} \, dV$$

As Equações 2 e 3 são demonstradas de modo análogo, usando as expressões para E como uma região do tipo 2 ou do tipo 3.

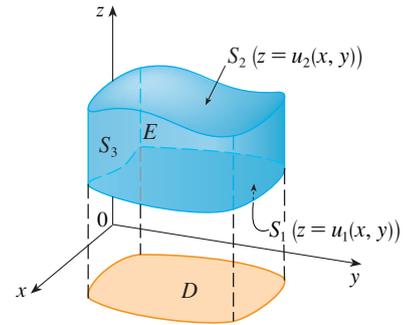


FIGURA 1

Observe que o método de demonstração do Teorema do Divergente é muito semelhante ao do Teorema de Green.

EXEMPLO 1 Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$ sobre a unidade esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO Primeiro calcularemos o divergente de \mathbf{F} :

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 1$$

A solução do Exemplo 1 deve ser comparada com a solução do Exemplo 4 na Seção 16.7.

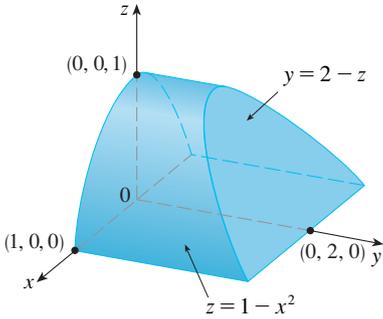


FIGURA 2

A esfera unitária S é a fronteira da bola unitária B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Então, o Teorema do Divergente dá o fluxo como

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iiint_B 1 \, dV = V(B) = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4\pi}{3}$$

EXEMPLO 2 Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2}) \mathbf{j} + \operatorname{sen}(xy) \mathbf{k}$$

E é a superfície da região E delimitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e os planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$. (Veja a Figura 2.)

SOLUÇÃO Seria extremamente difícil calcular a integral de superfície determinada diretamente (teríamos de calcular quatro integrais de superfícies correspondentes às quatro partes de S). Além disso, o divergente de \mathbf{F} é muito menos complicado que o próprio \mathbf{F} :

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{sen} xy) = y + 2y = 3y$$

Portanto, usamos o Teorema do Divergente para transformar a integral da superfície dada em uma integral tripla. O modo mais fácil de calcular a integral tripla é escrever E como uma região do tipo 3:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2, 0 \leq y \leq 2 - z\}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iiint_E 3y \, dV \\ &= 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} y \, dy \, dz \, dx = 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2} \, dz \, dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left[-\frac{(2-z)^3}{3} \right]_0^{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 [(x^2 + 1)^3 - 8] \, dx \\ &= -\int_0^1 (x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7) \, dx = \frac{184}{35} \end{aligned}$$

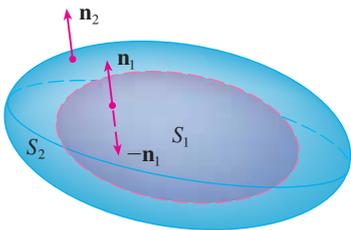


FIGURA 3

Apesar de termos demonstrado o Teorema do Divergente somente para o caso de regiões sólidas simples, ele pode ser demonstrado para regiões que são a união finita de regiões sólidas simples. (O procedimento é semelhante ao usado na Seção 16.4 para estender o Teorema de Green.)

Por exemplo, vamos considerar a região E que está entre as superfícies fechadas S_1 e S_2 , onde S_1 está dentro de S_2 . Sejam \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 as normais apontando para fora de S_1 e S_2 . Então, a fronteira de E é $S = S_1 \cup S_2$ e a sua normal \mathbf{n} é dada por $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$ em S_1 e $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ em S_2 (veja a Figura 3). Aplicando o Teorema do Divergente para S , obtemos

$$\begin{aligned} \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}_1) \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 \, dS \\ &= -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

EXEMPLO 3 No exemplo 5 na Seção 16.1 consideramos o campo elétrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

onde a carga elétrica Q está localizada na origem e $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é um vetor posição. Use o Teorema do Divergente para mostrar que o fluxo elétrico de \mathbf{E} através de qualquer superfície fechada S_2 que inclui a origem é

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi\varepsilon Q$$

SOLUÇÃO A dificuldade é que não temos uma equação explícita para S_2 porque S_2 é *qualquer* superfície fechada envolvendo a origem. O exemplo mais simples de tal superfície seria uma esfera. Seja então S_1 uma pequena esfera de raio a e centrada à origem. Você pode verificar que $\text{div } \mathbf{E} = 0$. (Veja a Exercício 23.) Portanto, a Equação 7 dá

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_E \text{div } \mathbf{E} \, dV = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

O ponto importante nesse cálculo é que podemos calcular a integral de superfície sobre S_1 porque S_1 é uma esfera. O vetor normal em \mathbf{x} é $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Portanto,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{\epsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) = \frac{\epsilon Q}{|\mathbf{x}|^4} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \frac{\epsilon Q}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{\epsilon Q}{a^2}$$

uma vez que a equação de S_1 é $|\mathbf{x}| = a$. Assim, temos

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{\epsilon Q}{a^2} \iint_{S_1} dS = \frac{\epsilon Q}{a^2} A(S_1) = \frac{\epsilon Q}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi\epsilon Q$$

Isso mostra que o fluxo elétrico de \mathbf{E} é $4\pi\epsilon Q$ através de *qualquer* superfície fechada S_2 que contenha a origem. [Esse é um caso especial da Lei de Gauss (Equação 16.7.11) para uma única carga. A relação entre ϵ e ϵ_0 é $\epsilon = 1/(4\pi\epsilon_0)$.]

Outra aplicação do Teorema do Divergente aparece no escoamento de fluidos. Seja $\mathbf{v}(x, y, z)$ o campo de velocidade de um fluido com densidade constante ρ . Então $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$ é a taxa de vazão do fluido por unidade de área. Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto no fluido e B_a é uma bola com centro em P_0 e raio muito pequeno a , então $\text{div } \mathbf{F}(P) \approx \text{div } \mathbf{F}(P_0)$ para todos os pontos em B_a uma vez que $\text{div } \mathbf{F}$ é contínuo. Aproximamos o fluxo sobre a fronteira esférica S_a como segue:

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{B_a} \text{div } \mathbf{F} \, dV \approx \iiint_{B_a} \text{div } \mathbf{F}(P_0) \, dV = \text{div } \mathbf{F}(P_0)V(B_a)$$

Essa aproximação se torna melhor à medida que $a \rightarrow 0$ e sugere que

8
$$\text{div } \mathbf{F}(P_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{V(B_a)} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

A Equação 8 diz que $\text{div } \mathbf{F}(P_0)$ é a taxa líquida de fluxo para o exterior por unidade de volume em P_0 . (Esta é a razão para o nome *divergente*). Se $\text{div } \mathbf{F}(P) > 0$, o fluxo líquido é exteriormente perto de P e P é chamado uma **fonte**. Se $\text{div } \mathbf{F}(P) < 0$, o escoamento total perto de P é para dentro e P é denominado **sorvedouro**.

Para o campo vetorial da Figura 4, parece que os vetores que terminam próximo de P_1 são menores que os vetores que iniciam perto do mesmo ponto P_1 . Então, o fluxo total é para fora perto de P_1 , assim, $\text{div } \mathbf{F}(P_1) > 0$ e P_1 é uma fonte. Por outro lado, perto de P_2 , os vetores que chegam são maiores que os que saem. Aqui o fluxo total é para dentro, assim $\text{div } \mathbf{F}(P_2) < 0$ e P_2 é um sorvedouro. Podemos usar a fórmula para \mathbf{F} para confirmar essa impressão. Uma vez que $\mathbf{F} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j}$, temos $\text{div } \mathbf{F} = 2x + 2y$, que é positivo quando $y > -x$. Assim, os pontos acima da linha $y = -x$ são fontes e os que estão abaixo são sorvedouros.

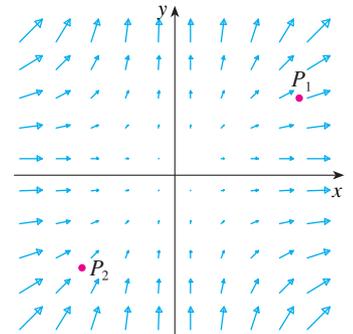


FIGURA 4
Campo vetorial $\mathbf{F} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j}$

16.9 Exercícios

1–4 Verifique se o Teorema do Divergente é verdadeiro para o campo vetorial \mathbf{F} na região E .

- $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + 2xz \mathbf{k}$, E é o cubo limitado pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 1$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, E é o sólido delimitado pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano xy

- $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle z, y, x \rangle$,
 E é a bola sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$

- $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x^2, -y, z \rangle$,
 E é o cilindro sólido $y^2 + z^2 \leq 9$, $0 \leq x \leq 2$

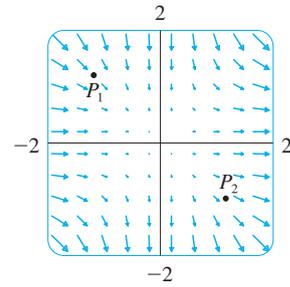
5–15 Use o Teorema do Divergente para calcular a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$; ou seja, calcule o fluxo de \mathbf{F} através de S .

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^z \mathbf{i} + xy^2z^3 \mathbf{j} - ye^z \mathbf{k}$,
 S é a superfície da caixa delimitada pelos planos coordenados e pelos planos $x = 3, y = 2, z = 1$
6. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz \mathbf{i} + xy^2z \mathbf{j} + xyz^2 \mathbf{k}$,
 S é a superfície da caixa delimitada pelos planos $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0$ e $z = c$, onde a, b e c são números positivos
7. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy^2 \mathbf{i} + xe^z \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$,
 S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ e os planos $x = -1$ e $x = 2$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + y^3) \mathbf{i} + (y^3 + z^3) \mathbf{j} + (z^3 + x^3) \mathbf{k}$,
 S é a esfera com origem no centro e raio 2
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \text{sen } y \mathbf{i} + x \text{cos } y \mathbf{j} - xz \text{sen } y \mathbf{k}$,
 S é a “esfera gorda” $x^8 + y^8 + z^8 = 8$
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} - zx \mathbf{k}$,
 S é a superfície do tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano

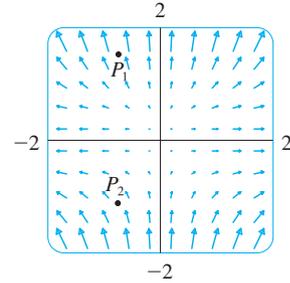
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

onde a, b e c são números positivos

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos z + xy^2) \mathbf{i} + xe^{-z} \mathbf{j} + (\text{sen } y + x^2z) \mathbf{k}$,
 S é a superfície do sólido limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$
 12. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^4 \mathbf{i} - x^3z^2 \mathbf{j} + 4xy^2z \mathbf{k}$,
 S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e os planos $z = x + 2$ e $z = 0$
 13. $\mathbf{F} = \mathbf{r}|\mathbf{r}|$, onde $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$,
 S consiste no hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e no disco $x^2 + y^2 \leq 1$ no plano xy
 14. $\mathbf{F} = |\mathbf{r}|^2 \mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$,
 S é a esfera com raio R e origem no centro
- SCA 15. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y \text{tg } z \mathbf{i} + y\sqrt{3 - x^2} \mathbf{j} + x \text{sen } y \mathbf{k}$,
 S é a superfície do sólido que está acima do plano xy e abaixo da superfície $z = 2 - x^4 - y^4, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$
- SCA 16. Use um sistema de computação algébrica para traçar o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = \text{sen } x \cos^2 y \mathbf{i} + \text{sen}^3 y \cos^4 z \mathbf{j} + \text{sen}^5 z \cos^6 x \mathbf{k}$ no cubo obtido cortando o primeiro octante pelos planos $x = \pi/2, y = \pi/2$ e $z = \pi/2$. Em seguida, calcule o fluxo através da superfície do cubo.
17. Use o Teorema do Divergente para calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2x \mathbf{i} + (\frac{1}{3}y^3 + \text{tg } z) \mathbf{j} + (x^2z + y^2) \mathbf{k}$ e S é a metade superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. [Dica: Note que S não é uma superfície fechada. Calcule primeiro as integrais sobre S_1 e S_2 , onde S_1 é o disco $x^2 + y^2 \leq 1$, orientado para baixo, e $S_2 = S \cup S_1$.]
 18. Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = z \text{tg}^{-1}(y^2) \mathbf{i} + z^3 \ln(x^2 + 1) \mathbf{j} + z \mathbf{k}$. Determine o fluxo de \mathbf{F} através da parte do parabolóide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está acima do plano $z = 1$ e tem orientação descendente.
 19. Um campo vetorial \mathbf{F} é mostrado. Use a interpretação do Divergente deduzida nesta seção para determinar se $\text{div } \mathbf{F}$ é positivo ou negativo em P_1 e em P_2 .



20. (a) Os pontos P_1 e P_2 são fontes ou sorvedouros no campo vetorial \mathbf{F} mostrado na figura? Dê uma explicação baseada exclusivamente na figura.
 (b) Dado que $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, y^2 \rangle$, use a definição de divergente para verificar sua resposta da parte (a).



SCA 21–22 Trace o campo do vetor e adivinhe onde $\text{div } \mathbf{F} > 0$ e onde $\text{div } \mathbf{F} < 0$. Então calcule $\text{div } \mathbf{F}$ para verificar o seu palpite.

21. $\mathbf{F}(x, y) = \langle xy, x + y^2 \rangle$
 22. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2, y^2 \rangle$
 23. Verifique se $\text{div } \mathbf{E} = 0$ para o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$.
 24. Use o Teorema do Divergente para avaliar $\iint_S (2x + 2y + z^2) dS$ onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- 25–30 Demonstre cada identidade, supondo que S e E satisfaçam as condições do Teorema do Divergente e que as funções escalares e as componentes dos campos vetoriais tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.
25. $\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = 0$, onde \mathbf{a} é um vetor constante
 26. $V(E) = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$
 27. $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$
 28. $\iint_S D_n f dS = \iiint_E \nabla^2 f dV$
 29. $\iint_S (f \nabla g) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_E (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV$
 30. $\iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_E (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV$
31. Suponha que S e E satisfaçam as condições do Teorema do Divergente e que f seja uma função escalar com derivadas parciais contínuas. Demonstre que

$$\iint_S f \mathbf{n} dS = \iiint_E \nabla f dV$$

Estas integrais de superfície e triplos de funções vetoriais são vetores definidos por meio da integração de cada função do componente. [Dica: Comece por aplicar o Teorema do Divergente para $\mathbf{F} = f\mathbf{c}$, onde \mathbf{c} é um vetor constante arbitrário.]

32. Um sólido ocupa uma região E com superfície S e é imerso num líquido com uma densidade constante ρ . Escolhemos um sistema de coordenadas de modo que o plano xy coincida com a superfície do líquido e valores positivos de z sejam medidos para baixo, adentrando o líquido. Então, a pressão na profundidade z é $p = \rho gz$, onde g é a aceleração da gravidade (veja a Seção 6.5, no Volume I). A força de empuxo total sobre o sólido devida à distribuição de pressão é dada pela integral de superfície

$$\mathbf{F} = - \iint_S p \mathbf{n} \, dS$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário apontando para fora. Use o resultado do Exercício 31 para mostrar que $\mathbf{F} = -W\mathbf{k}$, onde W é o peso do líquido deslocado pelo sólido. (Observe que \mathbf{F} é dirigida para cima porque z é dirigida para baixo.) O resultado é o *Princípio de Arquimedes*: A força de empuxo sobre um objeto é igual ao peso do líquido deslocado.

16.10 Resumo

Os principais resultados deste capítulo são versões em dimensão maior do Teorema Fundamental do Cálculo. Para facilitar a memorização, reunimos os teoremas (sem suas hipóteses) para que você possa visualizar mais facilmente suas semelhanças essenciais. Observe que em cada caso temos uma integral de uma “derivada” sobre uma região do lado esquerdo e do lado direito temos os valores da função original somente na *fronteira* da região.

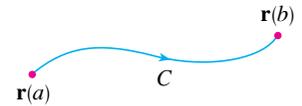
Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b F'(x) \, dx = F(b) - F(a)$$



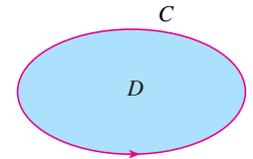
Teorema Fundamental para as Integrais de Linha

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$



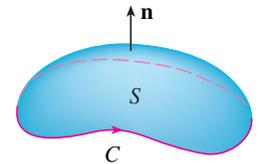
Teorema de Green

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P \, dx + Q \, dy$$



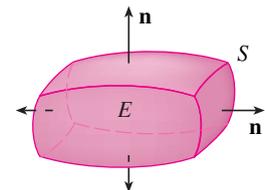
Teorema de Stokes

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



Teorema do Divergente

$$\iiint_E \text{div } \mathbf{F} \, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



16 Revisão

Verificação de Conceitos

- O que é um campo vetorial? Dê três exemplos com significado físico.
- (a) O que é um campo vetorial conservativo?
(b) O que é uma função potencial?
- (a) Escreva a definição da integral de linha para uma função escalar f ao longo de uma curva suave C em relação ao comprimento de arco.
(b) Como calcular tal integral?
(c) Escreva expressões para a massa e para o centro de massa de um arame fino com o formato da curva C se o arame tiver função densidade linear $\rho(x, y)$.
(d) Escreva as definições das integrais de linha sobre C de uma função escalar f com relação a x , y e z .
(e) Como calcular essas integrais de linha?
- (a) Defina a integral de linha do campo vetorial \mathbf{F} ao longo da curva suave C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.
(b) Se \mathbf{F} é um campo de força, o que essa integral de linha representa?
(c) Se $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$, qual é a relação entre a integral de linha de \mathbf{F} e as integrais de linha das componentes P , Q e R ?
- Enuncie o Teorema Fundamental das Integrais de Linha.
- (a) O que significa dizer que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho?
(b) Se você souber que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho, o que poderá dizer sobre \mathbf{F} ?
- Enuncie o Teorema de Green.
- Escreva expressões para a área delimitada pela curva C em termos da integral de linha em torno de C .
- Suponha que \mathbf{F} seja um campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 .
(a) Defina $\text{rot } \mathbf{F}$. (b) Defina $\text{div } \mathbf{F}$.
(c) Se \mathbf{F} for um campo de velocidade em um fluido, qual a interpretação física de $\text{rot } \mathbf{F}$ e de $\text{div } \mathbf{F}$?
- Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, como é que você testa para determinar se \mathbf{F} é conservativo? E se \mathbf{F} for um campo vetorial em \mathbb{R}^3 ?
- (a) O que é uma superfície parametrizada? O que são suas curvas de grade?
(b) Escreva uma expressão para a área de uma superfície parametrizada.
(c) Qual é a área da superfície dada pela equação $z = g(x, y)$?
- (a) Escreva a definição da integral de superfície de uma função escalar f sobre uma superfície S .
(b) Como calcular tal integral se S for uma superfície parametrizada dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$?
(c) E se S for dada pela equação $z = g(x, y)$?
(d) Se uma folha fina tem o formato de uma superfície S e a densidade em (x, y, z) é $\rho(x, y, z)$, escreva expressões para a massa e o centro de massa da folha.
- (a) O que é uma superfície orientada? Dê um exemplo de superfície não orientável.
(b) Defina a integral de superfície (ou fluxo) de um campo vetorial \mathbf{F} sobre uma superfície orientada S com vetor normal unitário \mathbf{n} .
(c) Como calcular tal integral se S for uma superfície parametrizada dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$?
(d) E se S for dada pela equação $z = g(x, y)$?
- Enuncie o Teorema de Stokes.
- Enuncie o Teorema do Divergente.
- Quais as semelhanças entre o Teorema Fundamental das Integrais de Linha, o Teorema de Green, o Teorema de Stokes e o Teorema do Divergente?

Teste – Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

- Se \mathbf{F} for um campo vetorial, então $\text{div } \mathbf{F}$ é um campo vetorial.
- Se \mathbf{F} for um campo vetorial, então $\text{rot } \mathbf{F}$ é um campo vetorial.
- Se f tem derivadas parciais de todas as ordens contínuas sobre \mathbb{R}^3 , então $\text{div}(\text{rot } \nabla f) = 0$.
- Se f tem derivadas parciais contínuas sobre \mathbb{R}^3 e C for um círculo qualquer, então $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$.
- Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ e $P_y = Q_x$ em uma região aberta D , então \mathbf{F} é conservativo.
- $\int_{-c}^c f(x, y) ds = -\int_c^{-c} f(x, y) ds$
- Se \mathbf{F} e \mathbf{G} são campos vetoriais e $\mathbf{F} = \text{div } \mathbf{G}$, então $\mathbf{F} = \mathbf{G}$.
- O trabalho feito por um campo de força conservativo em movimento de uma partícula em torno de um caminho fechado é igual a zero.
- Se \mathbf{F} e \mathbf{G} são campos vetoriais, então

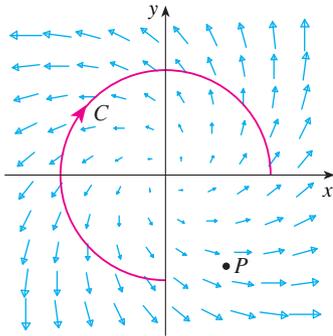
$$\text{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \text{rot}\mathbf{F} + \text{rot}\mathbf{G}$$
- Se \mathbf{F} e \mathbf{G} são campos vetoriais, então

$$\text{rot}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \text{rot}\mathbf{F} \cdot \text{rot}\mathbf{G}$$
- Se S é uma esfera e \mathbf{F} é uma constante de campo vetorial, então $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.
- Existe um campo vetorial \mathbf{F} tal que

$$\text{rot } \mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Exercícios

- São mostrados um campo vetorial \mathbf{F} , uma curva C e um ponto P .
 - $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positivo, negativo ou zero? Explique.
 - $\text{div } \mathbf{F}(P)$ é positivo ou negativo? Explique.



2-9 Calcule a integral de linha.

- $\int_C x \, ds$, C é o arco de parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$
 - $\int_C yz \cos x \, ds$, $C: x = t, y = 3 \cos t, z = 3 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$
 - $\int_C y \, dx + (x + y^2) \, dy$, C é a elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ com a orientação anti-horária
 - $\int_C y^3 \, dx + x^2 \, dy$, C é o arco da parábola $x = 1 - y^2$ de $(0, -1)$ a $(0, 1)$
 - $\int_C \sqrt{xy} \, dx + e^y \, dy + xz \, dz$, C é dado por $\mathbf{r}(t) = t^4 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$
 - $\int_C xy \, dx + y^2 \, dy + yz \, dz$, C é o segmento de reta de $(1, 0, -1)$ a $(3, 4, 2)$
 - $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = xy \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}$, e C é dado por $\mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + (1 + t) \mathbf{j}, 0 \leq t \leq \pi$
 - $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + (x + y) \mathbf{k}$ e C é dado por $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j} - t \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$
-
- Encontre o trabalho feito pelo campo de força.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + x \mathbf{j} + y \mathbf{k}$$
 ao mover uma partícula do ponto $(3, 0, 0)$ ao ponto $(0, \pi/2, 3)$ ao longo
 - de uma reta
 - da hélice $x = 3 \cos t, y = t, z = 3 \sin t$
-
- 11-12 Mostre que \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo. Então determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.
- $\mathbf{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy} \mathbf{i} + (e^y + x^2 e^{xy}) \mathbf{j}$
 - $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin y \mathbf{i} + x \cos y \mathbf{j} - \sin z \mathbf{k}$
-
- 13-14 Mostre que \mathbf{F} é conservativo e use esse fato para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ao longo da curva dada.
- $\mathbf{F}(x, y) = (4x^3 y^2 - 2xy^3) \mathbf{i} + (2x^4 y - 3x^2 y^2 + 4y^3) \mathbf{j}$, $C: \mathbf{r}(t) = (t + \sin \pi t) \mathbf{i} + (2t + \cos \pi t) \mathbf{j}, 0 \leq t \leq 1$
 - $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y \mathbf{i} + (xe^y + e^z) \mathbf{j} + ye^z \mathbf{k}$, C é o segmento de reta que liga $(0, 2, 0)$ a $(4, 0, 3)$
-
- Verifique que o Teorema de Green é verdadeiro para a integral de linha $\int_C xy^2 \, dx - x^2 y \, dy$, onde C consiste na parábola $y = x^2$ de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ e no segmento de reta de $(1, 1)$ a $(-1, 1)$.
 - Use o teorema de Green para calcular

$$\int_C \sqrt{1 + x^3} \, dx + 2xy \, dy$$
 onde C é o triângulo com vértices $(0, 0), (1, 0)$ e $(1, 3)$.
 - Use o Teorema de Green para calcular $\int_C x^2 y \, dx - xy^2 \, dy$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$ orientado no sentido anti-horário.
 - Determine $\text{rot } \mathbf{F}$ e $\text{div } \mathbf{F}$ se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-x} \sin y \mathbf{i} + e^{-y} \sin z \mathbf{j} + e^{-z} \sin x \mathbf{k}$$
 - Mostre que não existe um campo vetorial \mathbf{G} tal que

$$\text{rot } \mathbf{G} = 2x \mathbf{i} + 3yz \mathbf{j} - xz^2 \mathbf{k}$$
 - Mostre que, sob algumas condições a serem enunciadas sobre campos vetoriais \mathbf{F} e \mathbf{G} ,

$$\text{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F} \text{ div } \mathbf{G} - \mathbf{G} \text{ div } \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G}$$
 - Se C é uma curva fechada simples suave por partes e f e g são funções diferenciáveis, mostre que $\int_C f(x) \, dx + g(y) \, dy = 0$.
 - Se f e g são funções com derivadas de segunda ordem, mostre que

$$\nabla^2(fg) = f \nabla^2 g + g \nabla^2 f + 2 \nabla f \cdot \nabla g$$
 - Se f é uma função harmônica, ou seja, $\nabla^2 f = 0$, mostre que a integral de linha $\int f_y \, dx - f_x \, dy$ é independente do caminho em qualquer região simples D .
 - (a) Esboce a curva C com equações paramétricas

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
 (b) Determine

$$\int_C 2xe^{2y} \, dx + (2x^2 e^{2y} + 2y \cot g z) \, dy - y^2 \text{cosec}^2 z \, dz.$$
 - Determine a área da parte da superfície $z = x^2 + 2y$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0), (1, 0)$ e $(1, 2)$.
 - (a) Determine uma equação do plano tangente no ponto $(4, -2, 1)$ à superfície parametrizada S dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = v^2 \mathbf{i} - uv \mathbf{j} + u^2 \mathbf{k}, 0 \leq u \leq 3, -3 \leq v \leq 3$$
 (b) Use um computador para traçar o gráfico da superfície S e do plano tangente encontrado na parte (a).
 (c) Escreva, mas não calcule, uma integral que dê a área da superfície S .
 (d) Se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{z^2}{1 + x^2} \mathbf{i} + \frac{x^2}{1 + y^2} \mathbf{j} + \frac{y^2}{1 + z^2} \mathbf{k}$$
 Encontre $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ correta até a quarta casa decimal.
-
- 27-30 Calcule a integral de superfície.
- $\iint_S z \, dS$, onde S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 4$
 - $\iint_S (x^2 z + y^2 z) \, dS$, onde S é a parte do plano $z = 4 + x + y$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$
 - $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} - 2y \mathbf{j} + 3x \mathbf{k}$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com orientação para fora

30. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 1$ com orientação ascendente
31. Verifique se o Teorema de Stokes é verdadeiro para o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, onde S é a parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ que está acima do plano xy e S tem orientação ascendente.
32. Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + z^3e^{xy}\mathbf{k}$, S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ que está acima do plano $z = 1$ e S tem orientação ascendente.
33. Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$ e C é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, orientado no sentido horário, como visto de cima.
34. Use o Teorema do Divergente para calcular a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ e S é a superfície do sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 2$.
35. Verifique se o Teorema do Divergente é verdadeiro para o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, onde E é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

36. Calcule o fluxo para fora de

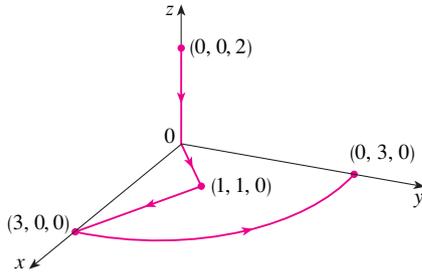
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

através do elipsoide $4x^2 + 9y^2 + 6z^2 = 36$.

37. Seja

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2yz - 3y)\mathbf{i} + (x^3z - 3x)\mathbf{j} + (x^3y + 2z)\mathbf{k}$$

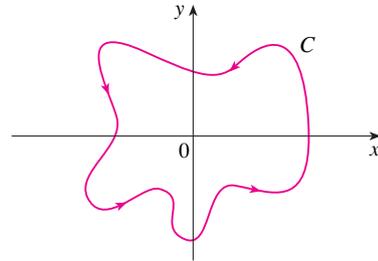
Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva com início em $(0, 0, 2)$ e término em $(0, 3, 0)$, como mostrado na figura.



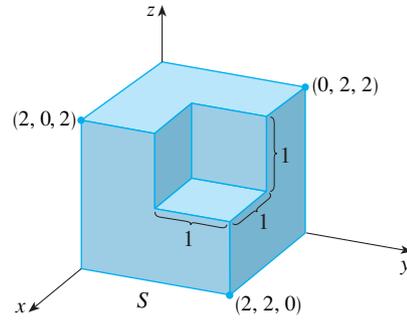
38. Seja

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(2x^3 + 2xy^2 - 2y)\mathbf{i} + (2y^3 + 2x^2y + 2x)\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

Calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C está representado na figura.



39. Determine $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e S é a superfície mostrada na figura, com orientação para fora (o limite do cubo com um cubo unitário removido).



40. Se as componentes de \mathbf{F} têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas e S é a superfície limite de uma região sólida simples, mostre que $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

41. Se \mathbf{a} é um vetor constante, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e S é uma superfície orientada suave com uma curva fronteira C fechada simples, suave e positivamente orientada, mostre que

$$\iint_S 2\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_C (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

Problemas Quentes

- Seja S uma superfície parametrizada suave e seja P um ponto tal que cada reta que comece em P intercepte S no máximo uma vez. O **ângulo sólido** $\Omega(S)$ subtendido por S em P é o conjunto de retas a partir de P e passando por S . Seja $S(a)$ a interseção de $\Omega(S)$ com a superfície da esfera com centro em P e raio a . Então, a medida do ângulo sólido (em *estereoradianos*) é definida como

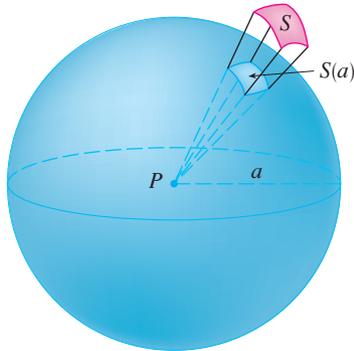
$$|\Omega(S)| = \frac{\text{área de } S(a)}{a^2}$$

Aplique o Teorema do Divergente para a parte de $\Omega(S)$ entre $S(a)$ e S e mostre que

$$|\Omega(S)| = \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} \, dS$$

onde \mathbf{r} é o vetor radial de P a um ponto qualquer sobre S , $r = |\mathbf{r}|$, e o sentido do vetor normal unitário \mathbf{n} é dirigido para longe de P .

Isso mostra que a definição de medida de um ângulo sólido independe do raio a da esfera. Assim, a medida do ângulo sólido é igual à área subtendida sobre uma esfera unitária (observe a analogia com a definição da medida em radianos). O ângulo sólido total subtendido por uma esfera em seu centro é, portanto, 4π esterradianos.



2. Encontre uma curva fechada simples C para a qual o valor da integral de linha

$$\int_C (y^3 - y) dx - 2x^3 dy$$

é máxima.

3. Seja C uma curva espacial simples fechada suave por partes que esteja contida em um plano com vetor unitário normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ e orientada positivamente em relação a \mathbf{n} . Mostre que a área do plano delimitada por C é

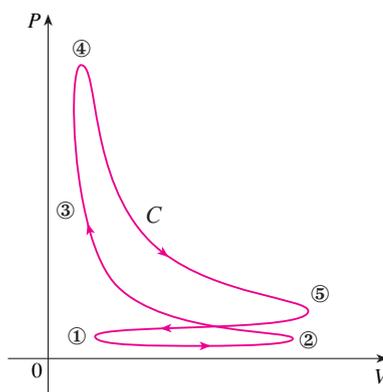
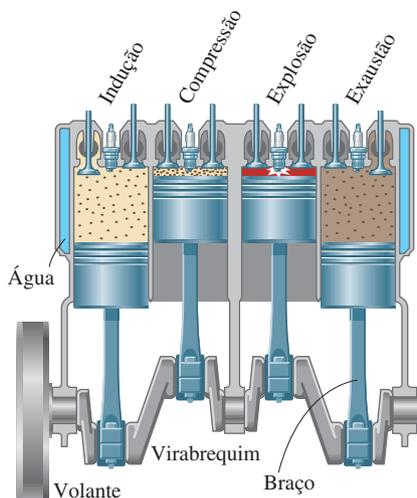
$$\frac{1}{2} \int_C (bz - cy) dx + (cx - az) dy + (ay - bx) dz$$

4. Investigue a forma da superfície com as equações parametrizadas $x = \sin u$, $y = \sin v$, $z = \sin(u + v)$. Comece traçando a superfície sob diversos pontos de vista. Explique a aparência dos gráficos determinando os cortes nos planos horizontais $z = 0$, $z = \pm 1$ e $z = \pm \frac{1}{2}$.

5. Demonstre a seguinte identidade:

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times \text{rot } \mathbf{G} + \mathbf{G} \times \text{rot } \mathbf{F}$$

6. A figura retrata a sequência de eventos em cada cilindro de um motor de quatro cilindros de combustão interna. Cada pistão se move para cima e para baixo e está ligado por um braço-pivô ao virabrequim. Sejam $P(t)$ e $V(t)$ a pressão e o volume dentro de um cilindro no instante t , onde $a \leq t \leq b$ é o tempo necessário para um ciclo completo. O gráfico mostra como P e V variam durante um ciclo em um motor de quatro tempos.



Durante o estágio de indução (de ① a ②) a mistura de ar e gasolina à pressão atmosférica é aspirada para o interior do cilindro pela válvula de entrada à medida que o pistão se move para baixo. Então, o pistão comprime rapidamente a mistura com a válvula fechada, no estágio de compressão (de ② a ③), durante o qual a pressão aumenta e o volume diminui. Em ③ uma faísca proveniente da vela de ignição provoca a combustão da mistura, elevando a temperatura e a pressão com um volume praticamente constante até ④. Em seguida, com a válvula fechada, uma rápida expansão do volume força o pistão para baixo durante o estágio de potência (de ④ a ⑤). A válvula se abre, a temperatura e a pressão caem e a energia mecânica armazenada no volante em rotação impulsiona o pistão para cima, forçando a saída dos gases que se formaram no interior pela válvula, no estágio de exaustão. A válvula de exaustão se fecha e a válvula de entrada se abre. Estamos de volta a ① e o ciclo se reinicia.

- (a) Mostre que o trabalho realizado pelo pistão durante um ciclo de um motor de quatro tempos é $W = \int_C P dV$, onde C é a curva no plano PV mostrada na figura.
 [Dica: Seja $x(t)$ a distância do pistão até o topo do cilindro e observe que a força sobre o pistão é $\mathbf{F} = AP(t) \mathbf{i}$, onde A é a área do topo do pistão. Então $W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C_1 é dado por $\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i}$, $a \leq t \leq b$. Um modo alternativo é trabalhar diretamente com as somas de Riemann.]
- (b) Use a Fórmula 16.4.5 para mostrar que o trabalho é a diferença das áreas englobadas pelos dois laços de C .