

Sumário

Prefácio	xi
Testes de Verificação	xxi
Uma Apresentação do Cálculo	xxvii

9 Equações Diferenciais 525

9.1	Modelagem com Equações Diferenciais	526
9.2	Campos de Direções e Método de Euler	531
9.3	Equações Separáveis	538
	Projeto Aplicado ■ Quanto Rapidamente um Tanque Esvazia?	546
	Projeto Aplicado ■ O Que É Mais Rápido, Subir ou Descer?	547
9.4	Modelos para Crescimento Populacional	548
9.5	Equações Lineares	557
9.6	Sistemas Predador-Presa	563
	Revisão	569
	Problemas Quentes	572



10 Equações Paramétricas e Coordenadas Polares 575

10.1	Curvas Definidas por Equações Paramétricas	576
	Projeto de Laboratório ■ Rolando Círculos ao Redor de Círculos	583
10.2	Cálculo com Curvas Parametrizadas	584
	Projeto de Laboratório ■ Curvas de Bézier	591
10.3	Coordenadas Polares	592
	Projeto de Laboratório ■ Famílias de Curvas Polares	601
10.4	Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares	602
10.5	Seções Cônicas	606
10.6	Seções Cônicas em Coordenadas Polares	613
	Revisão	619
	Problemas Quentes	621



11 Sequências e Séries Infinitas 623

11.1	Sequências	624
	Projeto de Laboratório ■ Sequências Logísticas	635
11.2	Séries	636
11.3	O Teste da Integral e Estimativas de Somas	645
11.4	Os Testes de Comparação	652
11.5	Séries Alternadas	657
11.6	Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz	661
11.7	Estratégia para Testes de Séries	667



11.8	Séries de Potência	669
11.9	Representações de Funções como Séries de Potências	674
11.10	Séries de Taylor e Maclaurin	679
	Projeto de Laboratório ■ Um Limite Elusivo	691
	Projeto Escrito ■ Como Newton Descobriu a Série Binomial	691
11.11	Aplicações dos Polinômios de Taylor	692
	Projeto Aplicado ■ Radiação Proveniente das Estrelas	700
	Revisão	701
	Problemas Quentes	703

12 Vetores e a Geometria do Espaço 707

12.1	Sistemas de Coordenadas Tridimensionais	708
12.2	Vetores	713
12.3	O Produto Escalar	721
12.4	O Produto Vetorial	727
	Projeto de Descoberta ■ A Geometria de um Tetraedro	734
12.5	Equações de Retas e Planos	735
	Projeto de Laboratório ■ Colocando 3D em Perspectiva	743
12.6	Cilindros e Superfícies Quádricas	744
	Revisão	750
	Problemas Quentes	752



13 Funções Vetoriais 755

13.1	Funções Vetoriais e Curvas Espaciais	756
13.2	Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais	763
13.3	Comprimento de Arco e Curvatura	768
13.4	Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração	776
	Projeto Aplicado ■ Leis de Kepler	785
	Revisão	786
	Problemas Quentes	789



14 Derivadas Parciais 791

14.1	Funções de Várias Variáveis	792
14.2	Limites e Continuidade	804
14.3	Derivadas Parciais	811
14.4	Planos Tangentes e Aproximações Lineares	823
14.5	A Regra da Cadeia	831
14.6	Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente	839
14.7	Valores Máximo e Mínimo	850
	Projeto Aplicado ■ Projeto de uma Caçamba	858
	Projeto de Descoberta ■ Aproximações Quadráticas e Pontos Críticos	859
14.8	Multiplicadores de Lagrange	860
	Projeto Aplicado ■ Ciência dos Foguetes	866
	Projeto Aplicado ■ Otimização de uma Turbina Hidráulica	867
	Revisão	868
	Problemas Quentes	871





15 Integrais Múltiplas 873

- 15.1 Integrais Duplas sobre Retângulos 874
 - 15.2 Integrais Iteradas 882
 - 15.3 Integrais Duplas sobre Regiões Gerais 887
 - 15.4 Integrais Duplas em Coordenadas Polares 895
 - 15.5 Aplicações de Integrais Duplas 901
 - 15.6 Área de Superfície 910
 - 15.7 Integrais Triplas 913
 - Projeto de Descoberta ■ Volumes de Hiperesferas 922
 - 15.8 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas 922
 - Projeto de Laboratório ■ A Intersecção de Três Cilindros 926
 - 15.9 Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas 927
 - Projeto Aplicado ■ Corrida na Rampa 933
 - 15.10 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas 933
 - Revisão 941
- Problemas Quentes 944



16 Cálculo Vetorial 947

- 16.1 Campos Vetoriais 948
 - 16.2 Integrais de Linha 954
 - 16.3 O Teorema Fundamental das Integrais de Linha 963
 - 16.4 Teorema de Green 971
 - 16.5 Rotacional e Divergente 977
 - 16.6 Superfícies Parametrizadas e suas Áreas 983
 - 16.7 Integrais de Superfície 993
 - 16.8 Teorema de Stokes 1003
 - Projeto Aplicado ■ Três Homens e Dois Teoremas 1007
 - 16.9 O Teorema do Divergente 1008
 - 16.10 Resumo 1013
 - Revisão 1014
- Problemas Quentes 1016



17 Equações Diferenciais de Segunda Ordem 1019

- 17.1 Equações Lineares de Segunda Ordem 1020
- 17.2 Equações Lineares Não Homogêneas 1026
- 17.3 Aplicações de Equações Diferenciais de Segunda Ordem 1032
- 17.4 Soluções em Séries 1039
 - Revisão 1043

Apêndices A1

- A Números, Desigualdades e Valores Absolutos A2
- B Geometria Analítica e Retas A9
- C Gráficos de Equações de Segundo Grau A14
- D Trigonometria A21
- E Notação de Somatória (Ou Notação Sigma) A30
- F Demonstrações dos Teoremas A35

G	O Logaritmo Definido como uma Integral	A44
H	Números Complexos	A51
I	Respostas para os Exercícios Ímpares	A58

Índice Remissivo I1

Volume I

Capítulo 1	Funções e Modelos
Capítulo 2	Limites e Derivadas
Capítulo 3	Regras de Derivação
Capítulo 4	Aplicações de Derivação
Capítulo 5	Integrais
Capítulo 6	Aplicações de Integração
Capítulo 7	Técnicas de Integração
Capítulo 8	Mais Aplicações de Integração

15

Integrais Múltiplas



Os geólogos estudam como as cadeias de montanhas foram formadas e estimam o trabalho necessário para elevá-las em relação ao nível do mar. Na Seção 15.8 é solicitado que você use a integral tripla para calcular o trabalho realizado na formação do Monte Fuji, no Japão.

Pichugin Dmitry/Shutterstock

Neste capítulo estendemos a ideia de integrais definidas para integrais duplas e triplas de funções de duas ou três variáveis. Essas ideias serão usadas para calcular volumes, áreas de superfícies, massas e centroides de regiões mais gerais do que as consideradas nos Capítulos 6 e 8, no Volume I. Usaremos também as integrais duplas para calcular probabilidades quando duas variáveis aleatórias estiverem envolvidas.

Veremos que as coordenadas polares são úteis no cálculo de integrais duplas em alguns tipos de região. De modo parecido, introduziremos dois novos sistemas de coordenadas no espaço tridimensional – coordenadas cilíndricas e coordenadas esféricas –, que simplificam muito o cálculo de integrais triplas em certas regiões sólidas que ocorrem frequentemente.

15.1 Integrais Duplas sobre Retângulos

A tentativa de resolvermos o problema de determinar áreas nos levou à definição de integral definida. Aplicaremos um procedimento semelhante para calcular o volume de um sólido, e este processo nos levará à definição de integral dupla.

Revisão da Integral Definida

Antes de tudo, vamos relembra os fatos básicos relativos à integral definida de funções de uma variável real. Se $f(x)$ é definida em $a \leq x \leq b$, começamos subdividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimento igual $\Delta x = (b - a)/n$ e escolhemos pontos de amostragem x_i^* em cada um desses subintervalos. Assim, formamos a soma de Riemann

$$\boxed{1} \quad \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

e tomamos o limite dessa soma quando $n \rightarrow \infty$ para obter a integral definida de a até b da função f :

$$\boxed{2} \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

No caso especial em que $f(x) \geq 0$, a soma de Riemann pode ser interpretada como a soma das áreas dos retângulos aproximadores da Figura 1 e $\int_a^b f(x) dx$ representa a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b .

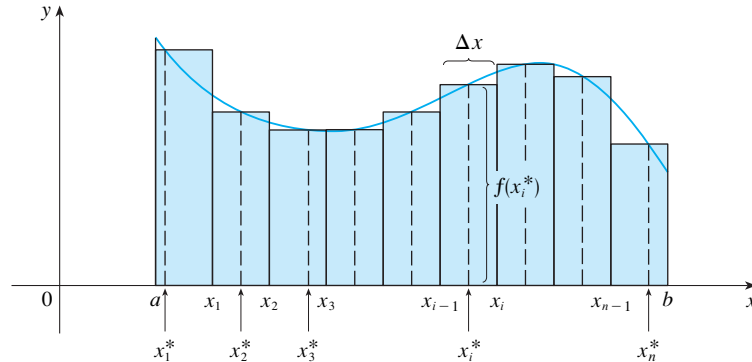


FIGURA 1

Volumes e Integrais Duplas

De modo semelhante, vamos considerar uma função f de duas variáveis definida em um retângulo fechado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

e vamos inicialmente supor que $f(x, y) \geq 0$. O gráfico de f é a superfície com equação $z = f(x, y)$. Seja S o sólido que está acima da região R e abaixo do gráfico de f , isto é,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$$

(Veja a Figura 2.) Nosso objetivo é determinar o volume de S .

O primeiro passo consiste em dividir o retângulo R em sub-retângulos. Faremos isso dividindo o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesmo comprimento $\Delta x = (b - a)/m$ e dividindo o intervalo $[c, d]$ em n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de mesmo comprimento $\Delta y = (d - c)/n$. Traçando retas paralelas aos eixos coordenados, passando pelas extremidades dos subintervalos, como na Figura 3, formamos os sub-retângulos

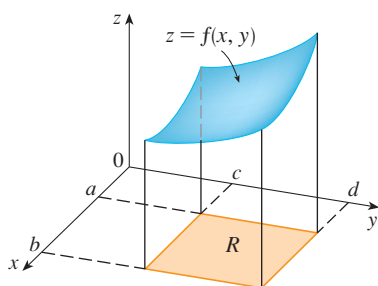


FIGURA 2

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

cada um dos quais com área $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

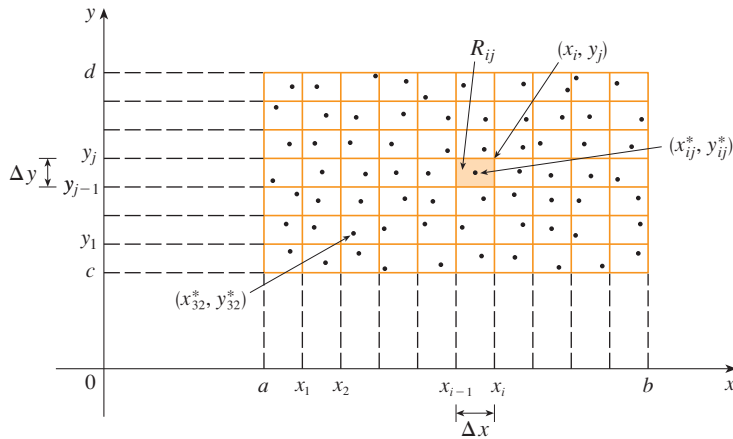


FIGURA 3
Dividindo R em sub-retângulos

Se escolhermos um ponto arbitrário, que chamaremos **ponto de amostragem**, (x_{ij}^*, y_{ij}^*) , em cada R_{ij} , poderemos aproximar a parte de S que está acima de cada R_{ij} por uma caixa retangular fina (ou “coluna”) com base R_{ij} e altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, como mostrado na Figura 4. (Compare com a Figura 1.) O volume dessa caixa é dado pela sua altura vezes a área do retângulo da base:

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

Se seguirmos com esse procedimento para todos os retângulos e somarmos os volumes das caixas correspondentes, obteremos uma aproximação do volume total de S :

3

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

(Veja a Figura 5.) Essa soma dupla significa que, para cada sub-retângulo, calculamos o valor de f no ponto escolhido, multiplicamos esse valor pela área do sub-retângulo e então adicionamos os resultados.

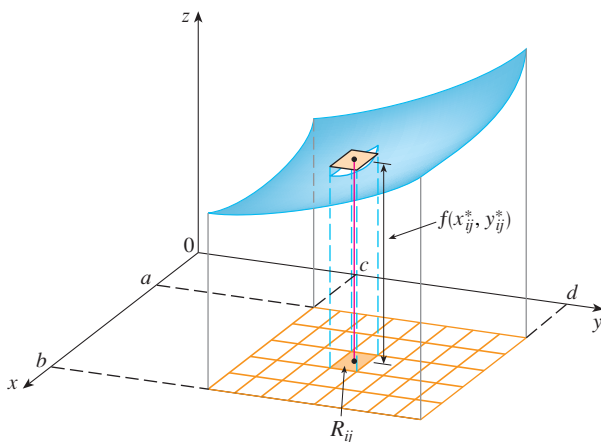


FIGURA 4

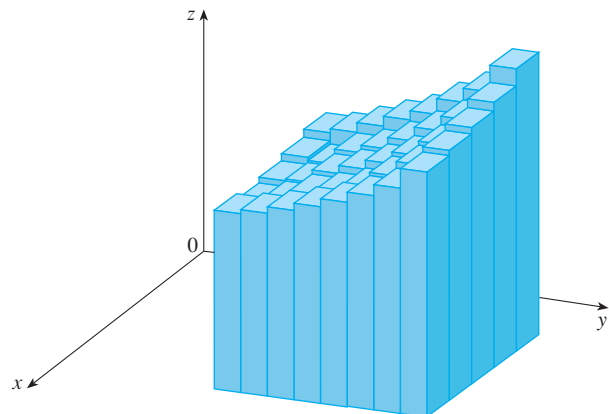


FIGURA 5

Nossa intuição diz que a aproximação dada em **3** melhora quando aumentamos os valores de m e n e, portanto, devemos esperar que

O significado do limite duplo na Equação 4 é que podemos tornar a somatória dupla tão próxima quanto desejarmos do número V [para qualquer escolha de (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij}] tomando m e n suficientemente grandes.

Observe a semelhança entre a Definição 5 e a definição de integral unidimensional na Equação 2.

Embora tenhamos definido a integral dupla dividindo R em sub-retângulos de mesmo tamanho, poderíamos ter usado sub-retângulos R_{ij} de tamanhos diferentes. Mas então teríamos de garantir que todas as dimensões deles tendessem a zero no processo de limite.

4

$$V = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

Usamos a expressão da Equação 4 para definir o **volume** do sólido S que corresponde à região que está abaixo do gráfico de f e acima do retângulo R . (Pode-se mostrar que essa definição é coerente com nossa fórmula de volume da Seção 6.2.)

Limites do tipo que aparecem na Equação 4 ocorrem muito frequentemente, não somente quando estamos determinando volumes, mas também em diversas outras situações – como será visto na Seção 15.5 – mesmo f não sendo uma função positiva. Assim, faremos a seguinte definição:

5 Definição A **integral dupla** de f sobre o retângulo R é

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

se esse limite existir.

O significado preciso do limite da Definição 5 é que para todo $\varepsilon > 0$ existe um inteiro N tal que

$$\left| \iint_R f(x, y) dA - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \right| < \varepsilon$$

para todos os inteiros m e n maiores que N e para qualquer escolha de (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij} .

Uma função f é dita **integrável** se o limite na Definição 5 existir. É mostrado em cursos de cálculo avançado que todas as funções contínuas são integráveis. Na realidade, a integral dupla de f existe contanto que f “não seja descontínua demais”. Em particular, se f for limitada [isto é, existe uma constante M tal que $|f(x, y)| \leq M$ para todo (x, y) em R], e se f for contínua ali, exceto em um número finito de curvas suaves, então f é integrável em R .

O ponto de amostragem (x_{ij}^*, y_{ij}^*) pode ser tomado como qualquer ponto no sub-retângulo R_{ij} , porém, se o escolhermos como o canto superior direito de R_{ij} [ou seja, (x_i, y_j) , veja a Figura 3], a expressão da soma dupla ficará mais simples:

6

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A$$

Comparando as Definições 4 e 5, vemos que o volume pode ser escrito como uma integral dupla:

Se $f(x, y) \geq 0$, então o volume V do sólido que está acima do retângulo R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ é

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

A soma na Definição 5,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

é chamada **soma dupla de Riemann** e é usada como uma aproximação do valor da integral dupla. [Observe a semelhança dessa soma com a de Riemann em \square para funções de uma única variável.] Se f for uma função *positiva*, então a soma dupla de Riemann representa a soma dos volumes das colunas, como na Figura 5, e é uma aproximação do volume abaixo do gráfico de f .

EXEMPLO 1 Estime o volume do sólido que está acima do quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ e abaixo do parabolóide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Divida R em quatro quadrados iguais e escolha o ponto de amostragem como o canto superior direito de cada quadrado R_{ij} . Faça um esboço do sólido e das caixas retangulares aproximadoras.

SOLUÇÃO Os quadrados estão ilustrados na Figura 6. O parabolóide elíptico é o gráfico de $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ e a área de cada quadrado é $\Delta A = 1$. Aproximando o volume pela soma de Riemann com $m = n = 2$, temos

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(x_i, y_j) \Delta A \\ &= f(1, 1) \Delta A + f(1, 2) \Delta A + f(2, 1) \Delta A + f(2, 2) \Delta A \\ &= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34 \end{aligned}$$

Esse é o volume das caixas aproximadoras mostradas na Figura 7.

Obtemos melhores aproximações do volume no Exemplo 1 quando aumentamos o número de quadrados. A Figura 8 mostra como as colunas começam a parecer mais com o sólido verdadeiro e as aproximações correspondentes vão se tornando mais precisas quando usamos 16, 64 e 256 quadrados. Na próxima seção mostraremos que o volume exato é 48.

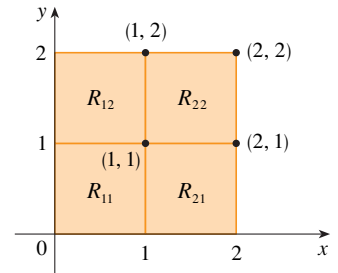
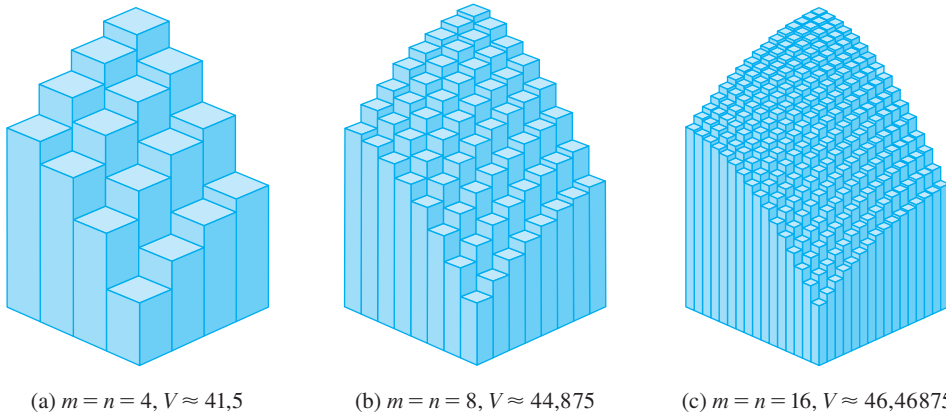


FIGURA 6

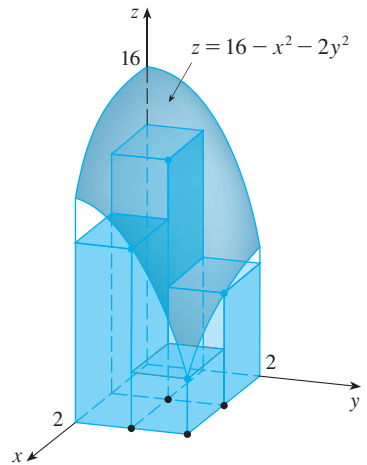


FIGURA 7

FIGURA 8

As aproximações para as somas de Riemann do volume abaixo de $z = 16 - x^2 - 2y^2$ ficam mais precisas quando m e n aumentam.

EXEMPLO 2 Se $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$, calcule a integral

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2} \, dA$$

SOLUÇÃO Seria muito difícil calcular a integral diretamente da Definição 5, mas, como $\sqrt{1 - x^2} \geq 0$, podemos calcular a integral interpretando-a como um volume. Se $z = \sqrt{1 - x^2}$, então $x^2 + z^2 = 1$ e $z \geq 0$, logo a integral dupla dada representa o volume do sólido S que está abaixo do cilindro circular $x^2 + z^2 = 1$ e acima do retângulo R . (Veja a Figura 9.) O volume de S é a área de um semicírculo com raio uma vez o comprimento do cilindro. Portanto

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2} \, dA = \frac{1}{2} \pi (1)^2 \times 4 = 2\pi$$

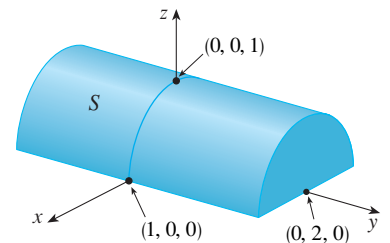


FIGURA 9

A Regra do Ponto Médio

Os métodos usados para aproximar as integrais de funções de uma variável real (a Regra do Ponto Médio, a Regra dos Trapézios, a Regra de Simpson) têm seus correspondentes para integrais duplas. Consideraremos aqui somente a Regra do Ponto Médio para integrais duplas. Isso significa que usaremos a soma dupla de Riemann para aproximar a integral dupla, na qual o ponto de amostragem (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij} é tomado como o ponto central (\bar{x}_i, \bar{y}_j) de R_{ij} . Em outras palavras, \bar{x}_i é o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$ e \bar{y}_j é o ponto médio de $[y_{j-1}, y_j]$.

Regra do Ponto Médio para Integrais Múltiplas

$$\iint_R f(x, y) \, dA \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta A$$

onde \bar{x}_i é o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$ e \bar{y}_j é o ponto médio de $[y_{j-1}, y_j]$.

EXEMPLO 3 Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar o valor da integral $\iint_R (x - 3y^2) \, dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

SOLUÇÃO Usando a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$, calcularemos $f(x, y) = x - 3y^2$ no centro dos quatro sub-retângulos mostrados na Figura 10. Logo, $\bar{x}_1 = \frac{1}{2}$, $\bar{x}_2 = \frac{3}{2}$, $\bar{y}_1 = \frac{5}{4}$ e $\bar{y}_2 = \frac{7}{4}$. A área de cada sub-retângulo é $\Delta A = \frac{1}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} \iint_R (x - 3y^2) \, dA &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta A \\ &= f(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \Delta A + f(\bar{x}_1, \bar{y}_2) \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_1) \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \Delta A \\ &= f\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) \Delta A + f\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right) \Delta A \\ &= \left(-\frac{67}{16}\right)\frac{1}{2} + \left(-\frac{139}{16}\right)\frac{1}{2} + \left(-\frac{51}{16}\right)\frac{1}{2} + \left(-\frac{123}{16}\right)\frac{1}{2} \\ &= -\frac{95}{8} = -11,875 \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\iint_R (x - 3y^2) \, dA \approx -11,875$$

OBSERVAÇÃO Na próxima seção desenvolveremos um processo eficiente para calcular integrais duplas e veremos que o valor exato da integral dupla do Exemplo 3 é -12 . (Lembre-se de que a interpretação da integral dupla como volume só é válida quando a função f é uma função *positiva*. O integrando no Exemplo 3 não é uma função positiva, dessa forma, a integral dupla não é um volume. Nos Exemplos 2 e 3 na Seção 15.2, discutiremos como interpretar integrais de uma função que não é sempre positiva em termos de volumes.) Se continuarmos dividindo cada sub-retângulo da Figura 10 em quatro menores, todos com a mesma forma, obteremos as aproximações pela Regra do Ponto Médio exibidas no gráfico na margem. Observe como esses valores estão se aproximando do valor exato da integral dupla, -12 .

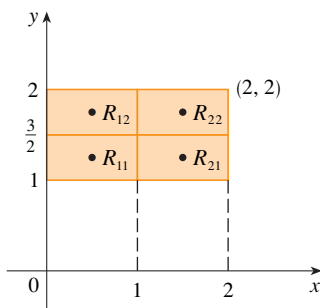


FIGURA 10

Número de sub-retângulos	Aproximação pela Regra do Ponto Médio
1	-11,5000
4	-11,8750
16	-11,9687
64	-11,9922
256	-11,9980
1 024	-11,9995

Valor Médio

Na Seção 6.5, no Volume I, mostramos que o valor médio de uma função f de uma variável definida em um intervalo $[a, b]$ é

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

De modo semelhante, definimos o **valor médio** de uma função f de duas variáveis em um retângulo R contido em seu domínio como

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) \, dA$$

onde $A(R)$ é a área de R .

Se $f(x, y) \geq 0$, a equação

$$A(R) \times f_{\text{med}} = \iint_R f(x, y) \, dA$$

diz que a caixa com base R e altura f_{med} tem o mesmo volume que o sólido sob o gráfico de f . [Se $z = f(x, y)$ descreve uma região montanhosa e você corta os topos dos morros na altura f_{med} , então pode usá-los para encher os vales de forma a tornar a região completamente plana. Veja a Figura 11.]

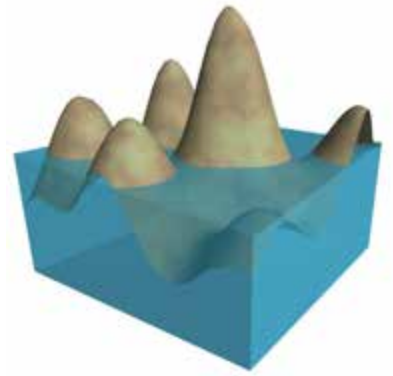


FIGURA 11

EXEMPLO 4 O mapa de contorno na Figura 12 mostra a precipitação de neve, em polegadas, no estado do Colorado em 20 e 21 de dezembro de 2006. (O Estado tem a forma de um retângulo que mede 388 milhas de Oeste a Leste e 276 milhas do Sul ao Norte.) Use o mapa de contorno para estimar a queda de neve média em todo o Estado do Colorado naqueles dias.

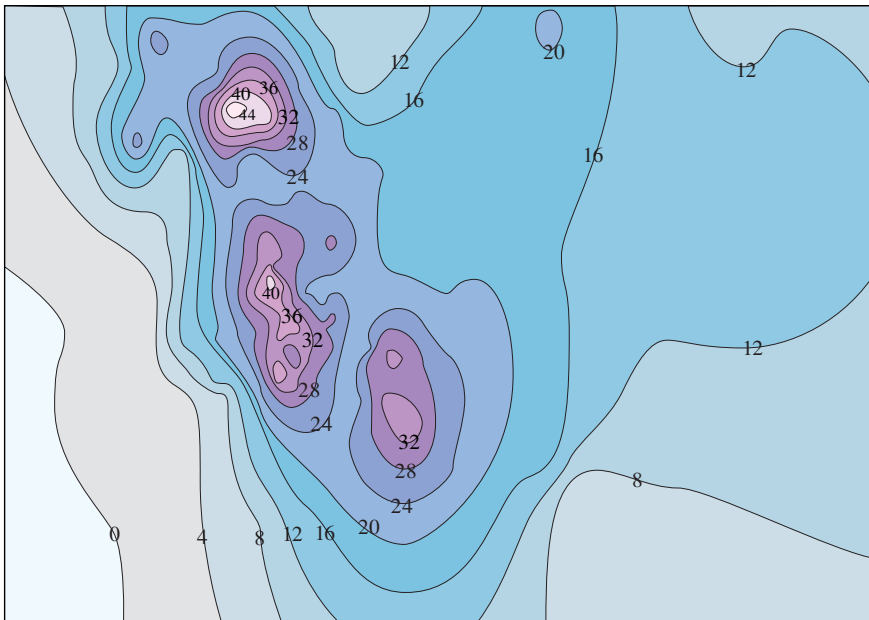


FIGURA 12

SOLUÇÃO Vamos colocar a origem no canto sudoeste do estado. Então, $0 \leq x \leq 388$, $0 \leq y \leq 276$ e $f(x, y)$ é a queda de neve, em polegadas, no local x milhas para leste e y milhas para norte da origem. Se R é o retângulo que representa o estado do Colorado, então a precipitação média de neve no Colorado em 20 e 21 de dezembro foi

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) \, dA$$

onde $A(R) = 388 \cdot 276$. Para estimarmos o valor dessa integral dupla, vamos usar a Regra do Ponto Médio com $m = n = 4$. Em outras palavras, dividimos R em 16 sub-retângulos de tamanhos iguais, como na Figura 13. A área de cada sub-retângulo é

$$\Delta A = \frac{1}{16}(388)(276) = 6\,693 \text{ mi}^2$$

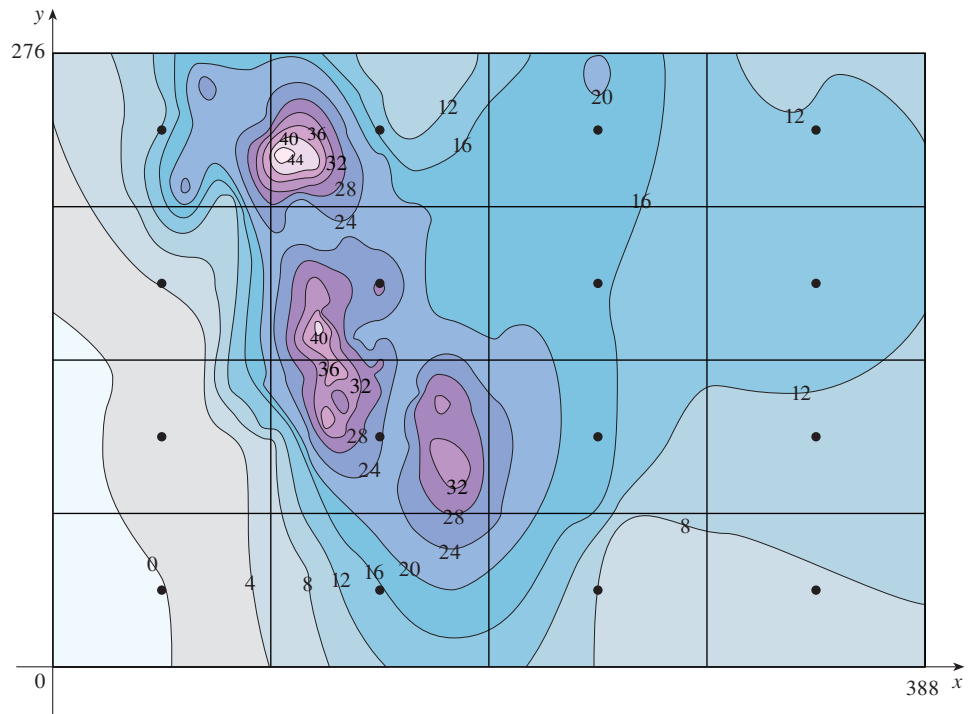


FIGURA 13

Usando o mapa de contorno para estimar o valor de f no ponto central de cada sub-retângulo, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dA &\approx \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta A \\ &\approx \Delta A [0 + 15 + 8 + 7 + 2 + 25 + 18,5 + 11 \\ &\quad + 4,5 + 28 + 17 + 13,5 + 12 + 15 + 17,5 + 13] \\ &= (6\,693)(207) \end{aligned}$$

Logo,
$$f_{\text{med}} \approx \frac{(6\,693)(207)}{(388)(276)} \approx 12,9$$

Em 20 e 21 de dezembro de 2006, o Colorado recebeu uma média de aproximadamente 13 polegadas de neve.

Propriedades das Integrais Duplas

Listaremos aqui três propriedades das integrais duplas que podem ser demonstradas como na Seção 5.2, no Volume I. Admitiremos que todas as integrais existam. As Propriedades 7 e 8 são conhecidas como *linearidade* da integral.

Integrais duplas se comportam assim porque as somas duplas que as definem se comportam dessa forma.

$$\boxed{7} \quad \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] \, dA = \iint_R f(x, y) \, dA + \iint_R g(x, y) \, dA$$

$$\boxed{8} \quad \iint_R cf(x, y) \, dA = c \iint_R f(x, y) \, dA, \quad \text{onde } c \text{ é uma constante}$$

Se $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo (x, y) em R , então

$$\boxed{9} \quad \iint_R f(x, y) \, dA \geq \iint_R g(x, y) \, dA$$

15.1 Exercícios

1. (a) Estime o volume do sólido que está abaixo da superfície $z = xy$ e acima do retângulo

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$$

Utilize a soma de Riemann com $m = 3, n = 2$ e tome como ponto de amostragem o canto superior direito de cada sub-retângulo.

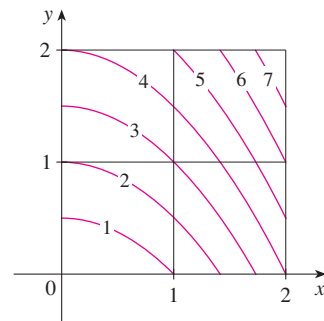
- (b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do sólido da parte (a).
2. Se $R = [0, 4] \times [-1, 2]$, use a soma de Riemann com $m = 2, n = 3$ para estimar o valor de $\iint_R (1 - xy^2) dA$. Tome os pontos de amostragem como (a) os cantos inferiores direitos e (b) como os cantos superiores esquerdos dos retângulos.
3. (a) Use uma soma de Riemann com $m = n = 2$ para estimar o valor de $\iint_R xe^{-xy} dA$, onde $R = [0, 2] \times [0, 1]$. Tome os pontos de amostragem como os cantos superiores direitos.
- (b) Use a Regra do Ponto Médio para dar uma estimativa da integral do item (a).
4. (a) Estime o volume do sólido que está abaixo da superfície $z = 1 + x^2 + 3y$ e acima do retângulo $R = [1, 2] \times [0, 3]$. Use a soma de Riemann com $m = n = 2$ e escolha os pontos de amostragem como os cantos inferiores esquerdos.
- (b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do item (a).
5. É dada a tabela de valores de uma função $f(x, y)$ definida em $R = [0, 4] \times [2, 4]$.
- (a) Estime $\iint_R f(x, y) dA$ utilizando a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$.
- (b) Estime a integral dupla com $m = n = 4$, escolhendo como pontos de amostragem os pontos mais próximos da origem.

$x \backslash y$	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
0	-3	-5	-6	-4	-1
1	-1	-2	-3	-1	1
2	1	0	-1	1	4
3	2	2	1	3	-7
4	3	4	2	5	9

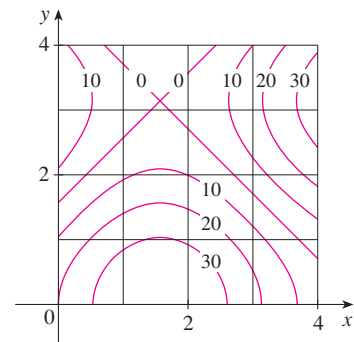
6. Uma piscina de 8 por 12 metros está cheia de água. A profundidade é medida em intervalos de 2 metros, começando em um canto da piscina, e os valores foram registrados na tabela. Estime o volume de água na piscina.

	0	2	4	6	8	10	12
0	1	1,5	2	2,4	2,8	3	3
2	1	1,5	2	2,8	3	3,6	3
4	1	1,8	2,7	3	3,6	4	3,2
6	1	1,5	2	2,3	2,7	3	2,5
8	1	1	1	1	1,5	2	2

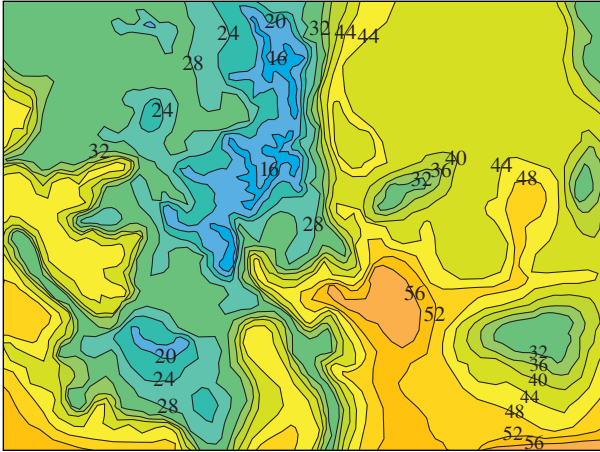
7. Seja V o volume do sólido que está abaixo do gráfico de $f(x, y) = \sqrt{52 - x^2 - y^2}$ e acima do retângulo dado por $2 \leq x \leq 4, 2 \leq y \leq 6$. Usamos as retas $x = 3$ e $y = 4$ para dividir R em sub-retângulos. Sejam L e U as somas de Riemann calculadas utilizando como pontos de amostragem os cantos inferiores esquerdos e os cantos superiores direitos, respectivamente. Sem calcular os números V, L e U , coloque-os em ordem crescente de valor e explique seu raciocínio.
8. A figura mostra curvas de nível da função f no quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$. Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar $\iint_R f(x, y) dA$. Como você melhoraria sua estimativa?



9. A figura mostra o mapa de contorno de f no quadrado $R = [0, 4] \times [0, 4]$.
- (a) Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar o valor de $\iint_R f(x, y) dA$.
- (b) Estime o valor médio de f .



10. O mapa de contorno mostra a temperatura, em graus Fahrenheit, às 4 horas da tarde do dia 26 de fevereiro de 2007, no Estado do Colorado. (O Estado mede 388 milhas de Leste a Oeste e 276 milhas de norte a sul.) Utilize a Regra do Ponto Médio com $m = n = 4$ para estimar a temperatura média do Colorado nessa hora.



- 11–13 Calcule a integral dupla, identificando-a antes com o volume de um sólido.

11. $\iint_R 3 \, dA$, $R = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 6\}$

12. $\iint_R (5 - x) \, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3\}$

13. $\iint_R (4 - 2y) \, dA$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$

14. A integral $\iint_R \sqrt{9 - y^2} \, dA$, onde $R = [0, 4] \times [0, 2]$, representa o volume de um sólido. Esboce o sólido.

15. Utilize uma calculadora programável ou computador (ou o comando de soma de um SCA) para estimar

$$\iint_R \sqrt{1 + xe^{-y}} \, dA$$

onde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Utilize a Regra do Ponto Médio com os seguintes números de quadrados de tamanhos iguais: 1, 4, 16, 64, 256 e 1 024.

16. Repita o Exercício 15 para a integral $\iint_R \sin(x + \sqrt{y}) \, dA$.

17. Se f é uma função constante, $f(x, y) = k$ e $R = [a, b] \times [c, d]$, mostre que

$$\iint_R k \, dA = k(b - a)(d - c).$$

18. Use o resultado do Exercício 17 para mostrar que

$$0 \leq \iint_R \sin \pi x \cos \pi y \, dA \leq \frac{1}{32}$$

$$\text{onde } R = \left[0, \frac{1}{4}\right] \times \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right].$$

15.2 Integrais Iteradas

Lembremos que geralmente é difícil calcular as integrais de funções de uma variável real diretamente da definição de integral, mas que o Teorema Fundamental do Cálculo fornece um método mais fácil para calculá-las. O cálculo de integrais duplas pela definição é ainda mais complicado, porém, nesta seção, veremos como expressar uma integral dupla como uma integral iterada, cujo valor pode ser obtido calculando-se duas integrais unidimensionais.

Suponha que f seja uma função de duas variáveis que é integrável no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Usaremos a notação $\int_c^d f(x, y) \, dy$ significando que x é mantido fixo e $f(x, y)$ é integrada em relação a y de $y = c$ até $y = d$. Esse procedimento é chamado *integração parcial em relação a y* . (Observe a semelhança com a derivada parcial.) Como $\int_c^d f(x, y) \, dy$ é um número que depende do valor de x , ele define uma função de x :

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$$

Se agora integrarmos a função A com relação à variável x de $x = a$ a $x = b$, obteremos

$$\boxed{1} \quad \int_a^b A(x) \, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx$$

A integral do lado direito da Equação 1 é chamada **integral iterada**. Em geral, os colchetes são omitidos. Assim,

$$\boxed{2} \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx$$

significa que primeiro integramos com relação a y de c a d e depois em relação a x de a até b . Da mesma forma, a integral iterada

3

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

significa que primeiro integramos com relação a x (fixando y) de $x = a$ a $x = b$ e em seguida integramos a função de y resultante com relação a y de $y = c$ a $y = d$. Observe que em ambas as Equações, 2 e 3, trabalhamos *de dentro para fora*.

EXEMPLO 1 Calcule o valor das integrais iteradas

$$(a) \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx \quad (b) \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy$$

SOLUÇÃO

(a) Olhando x como constante, obtemos

$$\int_1^2 x^2 y dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = x^2 \left(\frac{2^2}{2} \right) - x^2 \left(\frac{1^2}{2} \right) = \frac{3}{2} x^2$$

Portanto, a função A da discussão precedente é dada por $A(x) = \frac{3}{2} x^2$ neste exemplo. Integramos agora essa função de x de 0 até 3:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx &= \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y dy \right] dx \\ &= \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{2} \right]_0^3 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

(b) Aqui integraremos primeiro em relação a x :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy &= \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy \\ &= \int_1^2 9y dy = 9 \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^2 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

Observe que no Exemplo 1 obtemos a mesma resposta se integramos primeiro em relação a y ou a x . Em geral acontece (veja o Teorema 4) de as duas integrais iteradas das Equações 2 e 3 serem sempre iguais, ou seja, a ordem da integração não é importante. (Isso é semelhante ao Teorema de Clairaut sobre as igualdades das derivadas parciais mistas.)

O seguinte teorema fornece um método prático para calcular uma integral dupla, expressando-a como uma integral iterada (em qualquer ordem).

4 Teorema de Fubini Se f for contínua no retângulo

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}, \text{ então}$$

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

De modo mais geral, esse resultado vale se supusermos que f seja limitada em R , f tenha descontinuidades apenas em um número finito de curvas suaves e que a integral iterada exista.

O Teorema 4 tem o nome do matemático italiano Guido Fubini (1879 -1943), que demonstrou uma versão geral desse teorema em 1907. Mas a versão para as funções contínuas era conhecida pelo menos um século antes pelo matemático francês Augustin-Louis Cauchy.

A demonstração do Teorema de Fubini foge ao escopo deste livro, mas podemos ao menos fornecer uma justificativa razoável de sua validade quando $f(x, y) \geq 0$. Lembremos que se f é positiva, podemos interpretar a integral dupla $\iint_R f(x, y) dA$ como o volume V do sólido S que está acima de R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$. Contudo, temos outra fórmula usada para calcular volume, vista no Capítulo 6, no Volume I, que é

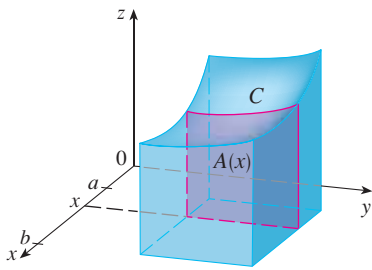


FIGURA 1

TEC Visual 15.2 ilustra o Teorema de Fubini mostrando uma animação das Figuras 1 e 2.

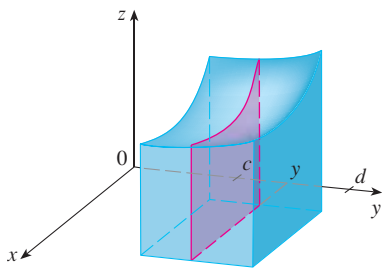


FIGURA 2

Observe a resposta negativa no Exemplo 2; não há nada errado com isso. A função f não é positiva e a integral não representa um volume. Da Figura 3 vemos que, se f for sempre negativa em R , o valor da integral é menos o volume que está acima do gráfico de f e abaixo de R .

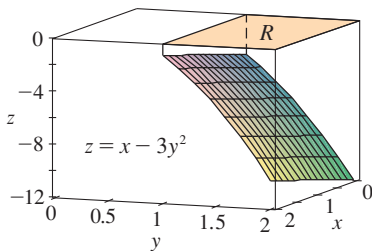


FIGURA 3

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

onde $A(x)$ é a área da secção transversal de S em um plano x perpendicular ao eixo x . Você pode ver a partir da Figura 1 que $A(x)$ é a área abaixo da curva C cuja equação é $z = f(x, y)$, onde x é mantido constante e $c \leq y \leq d$. Portanto,

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

e temos

$$\iint_R f(x, y) dA = V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

Uma argumentação semelhante, usando a secção transversal perpendicular ao eixo y como na Figura 2, mostra que

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

EXEMPLO 2 Calcule a integral dupla $\iint_R (x - 3y^2) dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$. (Compare com o Exemplo 3 da Seção 15.1.)

SOLUÇÃO 1 O Teorema de Fubini nos dá

$$\begin{aligned} \iint_R (x - 3y^2) dA &= \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2) dy dx = \int_0^2 [xy - y^3]_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_0^2 (x - 7) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 7x \right]_0^2 = -12 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO 2 Novamente, aplicando o Teorema de Fubini, mas dessa vez integrando com relação a x primeiro, temos

$$\begin{aligned} \iint_R (x - 3y^2) dA &= \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2) dx dy \\ &= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2 \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_1^2 (2 - 6y^2) dy = [2y - 2y^3]_1^2 = -12 \end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Calcule $\iint_R y \sin(xy) dA$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

SOLUÇÃO 1 Se integrarmos primeiro em relação a x , obteremos

$$\begin{aligned} \iint_R y \sin(xy) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 y \sin(xy) dx dy = \int_0^\pi [-\cos(xy)]_{x=1}^{x=2} dy \\ &= \int_0^\pi (-\cos 2y + \cos y) dy \\ &= \left[-\frac{1}{2} \sin 2y + \sin y \right]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO 2 Se invertermos a ordem de integração, obteremos

$$\iint_R y \sin(xy) dA = \int_1^2 \int_0^\pi y \sin(xy) dy dx$$

Para calcularmos a integral interna, usamos a integração por partes com

$$u = y \qquad dv = \text{sen}(xy) \, dy$$

$$du = dy \qquad v = -\frac{\cos(xy)}{x}$$

e, então,

$$\int_0^\pi y \text{sen}(xy) \, dy = -\frac{y \cos(xy)}{x} \Big|_{y=0}^{y=\pi} + \frac{1}{x} \int_0^\pi \cos(xy) \, dy$$

$$= -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{1}{x^2} [\text{sen}(xy)]_{y=0}^{y=\pi}$$

$$= -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\text{sen } \pi x}{x^2}$$

Se agora integrarmos o primeiro termo por partes com $u = -1/x$ e $dv = \pi \cos \pi x \, dx$, obteremos $du = dx/x^2$, $v = \text{sen } \pi x$ e

$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x} \right) dx = -\frac{\text{sen } \pi x}{x} - \int \frac{\text{sen } \pi x}{x^2} dx$$

Logo,

$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\text{sen } \pi x}{x^2} \right) dx = -\frac{\text{sen } \pi x}{x}$$

e, assim,

$$\int_1^2 \int_0^\pi y \text{sen}(xy) \, dy \, dx = \left[-\frac{\text{sen } \pi x}{x} \right]_1^2$$

$$= -\frac{\text{sen } 2\pi}{2} + \text{sen } \pi = 0$$

EXEMPLO 4 Determine o volume do sólido S que é limitado pelo parabolóide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, pelos planos $x = 2$ e $y = 2$ e pelos três planos coordenados.

SOLUÇÃO Observemos primeiro que S é o sólido que está abaixo da superfície $z = 16 - x^2 - 2y^2$ e acima do quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$. (Veja a Figura 5.) Esse sólido foi considerado no Exemplo 1 da Seção 15.1, mas agora temos condições de calcular a integral dupla usando o Teorema de Fubini. Portanto,

$$V = \iint_R (16 - x^2 - 2y^2) \, dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) \, dx \, dy$$

$$= \int_0^2 \left[16x - \frac{1}{3}x^3 - 2y^2x \right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2 \right) dy = \left[\frac{88}{3}y - \frac{4}{3}y^3 \right]_0^2 = 48$$

No caso especial em que $f(x, y)$ pode ser fatorado como o produto de uma função só de x por uma função só de y , a integral dupla de f pode ser escrita de forma particularmente simples. Para sermos específicos, suponha que $f(x, y) = g(x)h(y)$ e $R = [a, b] \times [c, d]$. Então, o Teorema de Fubini nos dá

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_a^b g(x)h(y) \, dx \, dy = \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y) \, dx \right] dy$$

Na integral interna, y é uma constante, então $h(y)$ é uma constante e podemos escrever

$$\int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y) \, dx \right] dy = \int_c^d \left[h(y) \left(\int_a^b g(x) \, dx \right) \right] dy = \int_a^b g(x) \, dx \int_c^d h(y) \, dy$$

já que $\int_a^b g(x) \, dx$ é uma constante. Portanto, nesse caso, a integral dupla de f pode ser escrita como o produto de duas integrais unidimensionais:

Para uma função f com valores positivos e negativos, $\iint_R f(x, y) \, dA$ é a diferença dos volumes: $V_1 - V_2$, onde V_1 é o volume acima de R e abaixo do gráfico de f e V_2 é o volume abaixo de R e acima do gráfico. O fato de a integral do Exemplo 3 ser 0 significa que os dois volumes V_1 e V_2 são iguais. (Veja a Figura 4.)

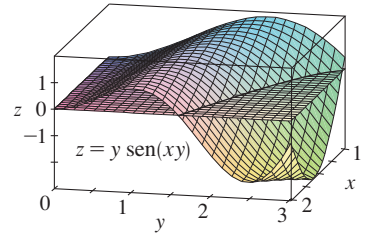


FIGURA 4

No Exemplo 2, as Soluções 1 e 2 são igualmente simples, mas no Exemplo 3 a primeira solução é muito mais simples que a segunda. Portanto, ao calcular uma integral dupla, é recomendável escolher a ordem de integração que forneça integrais mais simples.

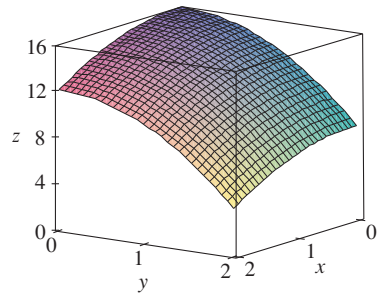


FIGURA 5

$$\boxed{5} \quad \iint_R g(x)h(y) dA = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy \quad \text{onde } R = [a, b] \times [c, d]$$

EXEMPLO 5 Se $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, então, pela Equação 5,

A função $f(x, y) = \sen x \cos y$ do Exemplo 5 é positiva em R , assim, a integral representa o volume do sólido que está acima de R e entre o gráfico de f , como mostrado na Figura 6.

$$\begin{aligned} \iint_R \sen x \cos y dA &= \int_0^{\pi/2} \sen x dx \int_0^{\pi/2} \cos y dy \\ &= [-\cos x]_0^{\pi/2} [\sen y]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

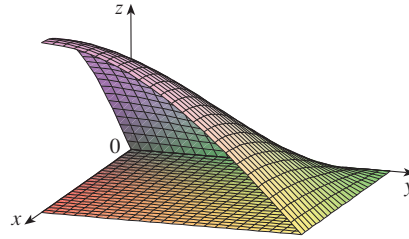


FIGURA 6

15.2 Exercícios

1–2 Determine $\int_0^3 f(x, y) dx$ e $\int_0^1 f(x, y) dy$.

1. $f(x, y) = 12x^2y^3$ 2. $f(x, y) = y + xe^y$

3–14 Calcule a integral iterada.

3. $\int_1^4 \int_0^2 (6x^2 - 2x) dy dx$ 4. $\int_0^1 \int_1^2 (4x^3 - 9x^2y^2) dy dx$

5. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \sen y dy dx$ 6. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-1}^5 \cos y dx dy$

7. $\int_{-3}^3 \int_0^{\pi/2} (y + y^2 \cos x) dx dy$ 8. $\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y} dy dx$

9. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dy dx$ 10. $\int_0^1 \int_0^3 e^{x+3y} dx dy$

11. $\int_0^1 \int_0^1 v(u - v^2)^4 du dv$ 12. $\int_0^1 \int_0^1 xy\sqrt{x^2 + y^2} dy dx$

13. $\int_0^2 \int_0^{\pi} r \sen^2 \theta d\theta dr$ 14. $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s+t} ds dt$

15–22 Calcule a integral dupla.

15. $\iint_R \sen(x+y) dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2\}$

16. $\iint_R (y + xy^{-2}) dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$

17. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1} dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3\}$

18. $\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2} dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

19. $\iint_R x \sen(x+y) dA$, $R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

20. $\iint_R \frac{x}{1+xy} dA$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$

21. $\iint_R ye^{-xy} dA$, $R = [0, 2] \times [0, 3]$

22. $\iint_R \frac{1}{1+x+y} dA$, $R = [1, 3] \times [1, 2]$

23–24 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

23. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y) dx dy$

24. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2) dy dx$

25. Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do plano $4x + 6y - 2z + 15 = 0$ e acima do retângulo

$$R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}.$$

26. Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do parabolóide hiperbólico $z = 3y^2 - x^2 + 2$ e acima do retângulo

$$R = [-1, 1] \times [-2, 2].$$




27. Determine o volume do sólido que está abaixo do parabolóide elíptico $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ e acima do retângulo

$$R = [-1, 1] \times [-2, 2].$$

28. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = 1 + e^x \sen y$ e pelos planos $x = \pm 1, y = 0, y = \pi$ e $z = 0$.

29. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x \sec^2 y$ e pelos planos $z = 0, x = 0, x = 2, y = 0$ e $y = \pi/4$.


30. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro $z = 16 - x^2$ e pelo plano $y = 5$.

31. Determine o volume do sólido limitado pelo parabolóide $z = 2 + x^2 + (y - 2)^2$ e pelos planos $z = 1, x = 1, x = -1, y = 0$ e $y = 4$.
-  32. Desenhe o sólido que está entre a superfície $z = 2xy/(x^2 + 1)$ e o plano $z = x + 2y$ e é limitado pelos planos $x = 0, x = 2, y = 0$ e $y = 4$. A seguir, determine seu volume.
-  33. Utilize um sistema de computação algébrica para determinar o valor exato da integral $\iint_R x^5 y^3 e^{xy} dA$, onde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Em seguida, use o SCA para desenhar o sólido cujo volume é dado pela integral.
-  34. Desenhe o sólido contido entre as superfícies $z = e^{-x^2} \cos(x^2 + y^2)$ e $z = 2 - x^2 - y^2$ para $|x| \leq 1, |y| \leq 1$. Utilize um sistema de computação algébrica para aproximar o volume desse sólido até a quarta casa decimal.
- 35–36 Determine o valor médio de f sobre o retângulo dado.
35. $f(x, y) = x^2 y, R$ possui vértices $(-1, 0), (-1, 5), (1, 5), (1, 0)$
36. $f(x, y) = e^y \sqrt{x + e^y}, R = [0, 4] \times [0, 1]$

37–38 Utilize a simetria para calcular a integral dupla.

37. $\iint_R \frac{xy}{1 + x^4} dA, R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

38. $\iint_R (1 + x^2 \sen y + y^2 \sen x) dA, R = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$

 39. Utilize seu SCA para calcular as integrais iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dy dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dx dy$$

Suas respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique o que acontece.

40. (a) Em que aspectos os teoremas de Fubini e Clairaut são semelhantes?
 (b) Se $f(x, y)$ é contínuo em $[a, b] \times [c, d]$ e

$$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(s, t) dt ds$$

para $a < x < b, c < y < d$, mostre que $g_{xy} = g_{yx} = f(x, y)$.

15.3 Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Para as integrais de funções de uma variável real, a região sobre a qual integramos é sempre um intervalo. Porém, para integrais duplas, queremos integrar a função f não somente sobre retângulos, como também sobre uma região D de forma mais geral, como a ilustrada na Figura 1. Vamos supor que D seja uma região limitada, o que significa que D pode estar contida em uma região retangular R como na Figura 2. Definimos, então, uma nova função F , com domínio R , por

1
$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ está em } D \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ está em } R \text{ mas não em } D \end{cases}$$

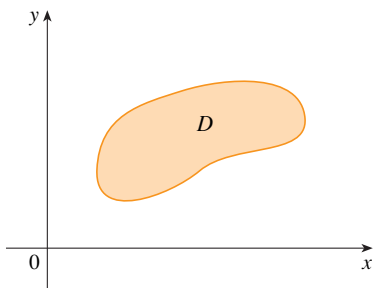


FIGURA 1

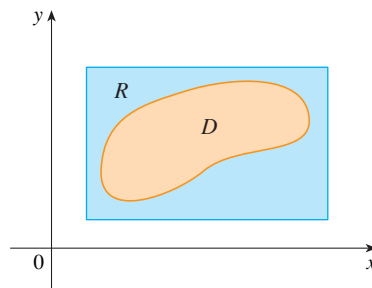


FIGURA 2

Se F for integrável em R , então definimos a **integral dupla de f em D** por

2
$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA \quad \text{onde } F \text{ é dada pela Equação 1}$$

A Definição 2 faz sentido porque R é um retângulo e, portanto, $\iint_R F(x, y) dA$ já foi definida na Seção 15.1. O procedimento usado é razoável, pois os valores de $F(x, y)$ são 0 quando

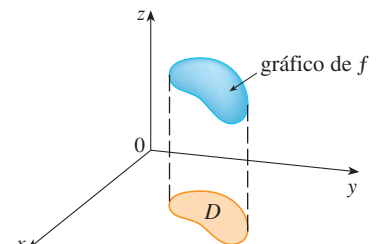


FIGURA 3

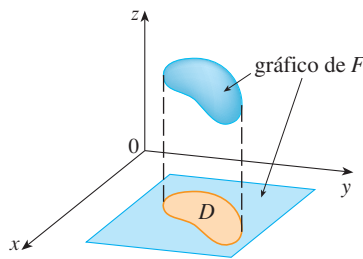


FIGURA 4

(x, y) está fora de D e dessa forma não contribuem para o valor da integral. Isso significa que não importa qual o retângulo R tomado, desde que contenha D .

No caso em que $f(x, y) \geq 0$, podemos ainda interpretar $\iint_D f(x, y) \, dA$ como o volume do sólido que está acima de D e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ (o gráfico de f). Você pode constatar que isso é razoável comparando os gráficos de f e F nas Figuras 3 e 4 e lembrando que $\iint_R F(x, y) \, dA$ é o volume abaixo do gráfico de F .

A Figura 4 mostra também que F provavelmente tem descontinuidades nos pontos de limite de D . Apesar disso, se f for contínua em D e se a curva limite de D for “comportada” (em um sentido que está fora do escopo deste livro), então pode ser mostrado que $\iint_D F(x, y) \, dA$ existe e, portanto, $\iint_D f(x, y) \, dA$ existe. Em particular, esse é o caso para os dois tipos de regiões listados a seguir.

Uma região plana D é dita do **tipo I** se for a região entre o gráfico de duas funções contínuas de x , ou seja,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

onde g_1 e g_2 são contínuas em $[a, b]$. Alguns exemplos de regiões do tipo I estão mostrados na Figura 5.

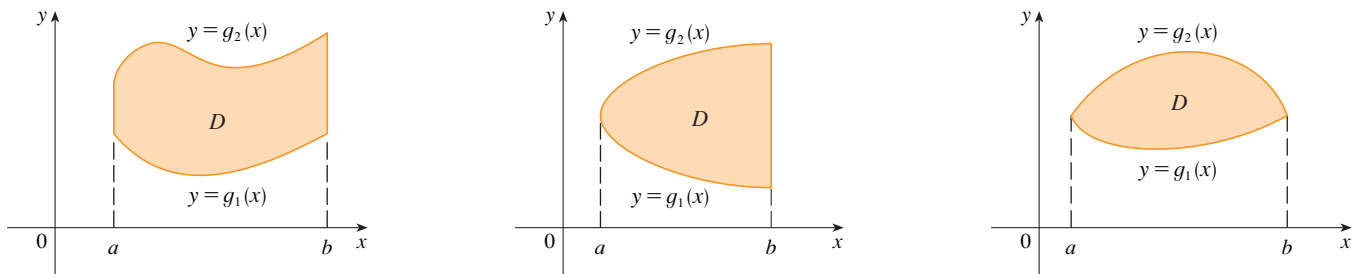


FIGURA 5 Algumas regiões do tipo I

Para calcularmos $\iint_D f(x, y) \, dA$ quando D é do tipo I, escolhemos um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ que contenha D , como na Figura 6, e consideramos a função F definida na Equação 1; ou seja, F coincide com f em D e F é 0 fora da região D . Então, pelo Teorema de Fubini,

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \iint_R F(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y) \, dy \, dx$$

Observe que $F(x, y) = 0$ se $y < g_1(x)$ ou $y > g_2(x)$ porque (x, y) está fora da região D . Portanto,

$$\int_c^d F(x, y) \, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y) \, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy$$

porque $F(x, y) = f(x, y)$ quando $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Portanto, temos a seguinte fórmula, que nos permite calcular a integral dupla como uma integral iterada.

3 Se f é contínua em uma região D do tipo I tal que

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

então,

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

A integral do lado direito de **3** é uma integral iterada semelhante às consideradas na seção anterior, exceto que na integral de dentro consideramos x constante não só em $f(x, y)$, mas também nos limites de integração $g_1(x)$ e $g_2(x)$.

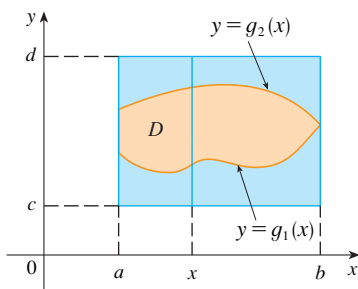


FIGURA 6

Consideraremos também regiões planas do **tipo II**, que podem ser expressas como

$$4 \quad D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

onde h_1 e h_2 são contínuas. Essas duas regiões estão ilustradas na Figura 7.

Utilizando o mesmo método que usamos para estabelecer [3], podemos mostrar que

$$5 \quad \iint_D f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy$$

onde D é uma região do tipo II dada pela Equação 4.

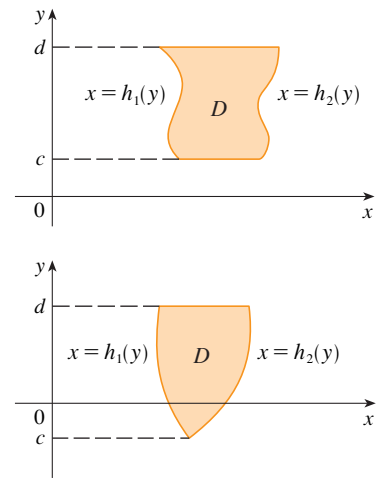


FIGURA 7 Algumas regiões do tipo II

EXEMPLO 1 Calcule $\iint_D (x + 2y) \, dA$, onde D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

SOLUÇÃO As parábolas se interceptam quando $2x^2 = 1 + x^2$, ou seja, $x^2 = 1$, logo, $x = \pm 1$. Observamos que a região D , ilustrada na Figura 8, é uma região do tipo I, mas não do tipo II, e podemos escrever

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}$$

Como o limite inferior é $y = 2x^2$ e o superior é $y = 1 + x^2$, a Equação 3 leva a

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y) \, dA &= \int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y) \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^1 [xy + y^2]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} \, dx \\ &= \int_{-1}^1 [x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2] \, dx \\ &= \int_{-1}^1 (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1) \, dx \\ &= \left. -3 \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2 \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right|_{-1}^1 = \frac{32}{15} \end{aligned}$$

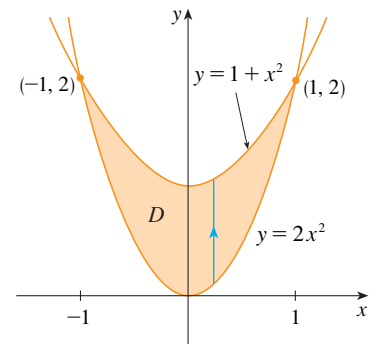


FIGURA 8

OBSERVAÇÃO Quando escrevemos uma integral dupla como no Exemplo 1, é essencial desenhar um diagrama. Frequentemente é útil desenhar uma seta vertical, como na Figura 8. Assim, os limites de integração da integral de *dentro* podem ser lidos do diagrama desta forma: a seta começa na fronteira inferior $y = g_1(x)$, que fornece o extremo inferior da integral, e termina na fronteira de cima $y = g_2(x)$, que dá o extremo superior de integração. Para uma região do tipo II, a seta é desenhada horizontalmente da fronteira esquerda para a fronteira direita.

EXEMPLO 2 Determine o volume do sólido que está abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

SOLUÇÃO 1 Da Figura 9 vemos que D é uma região do tipo I e

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$$

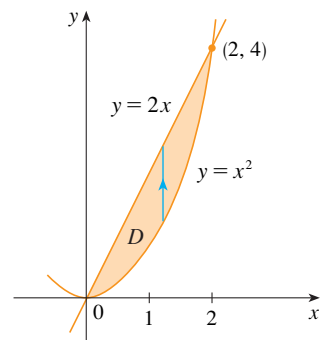


FIGURA 9 D como uma região do tipo I

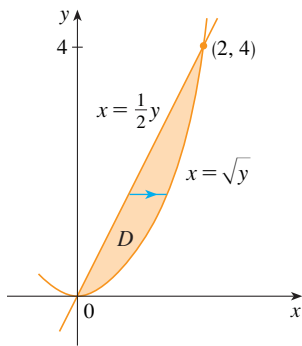


FIGURA 10
D como uma região do tipo II

Portanto, o volume abaixo de $z = x^2 + y^2$ e acima de D é

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx \\ &= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 \left[x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2 x^2 - \frac{(x^2)^3}{3} \right] dx \\ &= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx = \left[-\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6} \right]_0^2 = \frac{216}{35} \end{aligned}$$

SOLUÇÃO 2 Da Figura 10, vemos que D pode ser descrita como uma região do tipo II:

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4, \frac{1}{2}y \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

Logo, outra expressão para V é

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy \\ &= \left[\frac{2}{15}y^{5/2} + \frac{2}{7}y^{7/2} - \frac{13}{96}y^4 \right]_0^4 = \frac{216}{35} \end{aligned}$$

A Figura 11 mostra o sólido cujo volume é calculado no Exemplo 2. Ele está acima do plano xy , abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e entre o plano $y = 2x$ e o cilindro parabólico $y = x^2$.

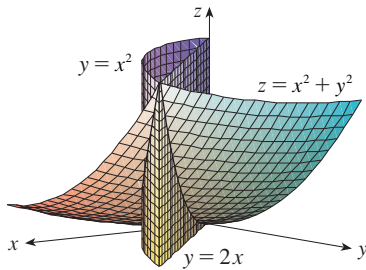


FIGURA 11

EXEMPLO 3 Calcule $\iint_D xy dA$, onde D é a região limitada pela reta $y = x - 1$ pelas parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUÇÃO A região D é mostrada na Figura 12. Novamente, D pode ser vista tanto como uma região do tipo I como uma região do tipo II, mas a descrição de D como região do tipo I é mais complicada, porque o limite inferior é constituído de duas partes. Portanto, preferimos expressar D como uma região do tipo II:

$$D = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq 4, \frac{1}{2}y^2 - 3 \leq x \leq y + 1\}$$

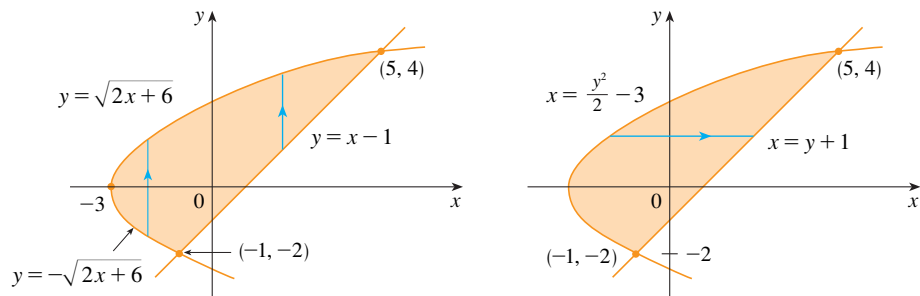


FIGURA 12

(a) D como uma região do tipo I

(b) D como uma região do tipo II

Então, $\boxed{5}$ dá

$$\begin{aligned} \iint_D xy dA &= \int_{-2}^4 \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy dx dy = \int_{-2}^4 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 y \left[(y+1)^2 - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3 \right)^2 \right] dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y \right) dy \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2 \right]_{-2}^4 = 36
 \end{aligned}$$

Se tivéssemos expressado D como uma região do tipo I usando a Figura 12(a), obteríamos

$$\iint_D xy \, dA = \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy \, dx + \int_{-1}^5 \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy \, dx$$

mas isso daria muito mais trabalho que o outro método.

EXEMPLO 4 Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

SOLUÇÃO Em uma questão como essa, é prudente desenhar dois diagramas: um do sólido tridimensional e outro da região plana D sobre a qual o sólido se encontra. A Figura 13 mostra o tetraedro T limitado pelos planos coordenados $x = 0$, $z = 0$, pelo plano vertical $x = 2y$ e pelo plano $x + 2y + z = 2$. Como o plano $x + 2y + z = 2$ intercepta o plano xy (cuja equação é $z = 0$) na reta $x + 2y = 2$, vemos que T está acima da região triangular D no plano xy limitado pelas retas $x = 2y$, $x + 2y = 2$ e $x = 0$. (Veja a Figura 14.)

O plano $x + 2y + z = 2$ pode ser escrito como $z = 2 - x - 2y$, de modo que o volume pedido está sob o gráfico da função $z = 2 - x - 2y$ e acima de

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x/2 \leq y \leq 1 - x/2\}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (2 - x - 2y) \, dA = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 [2y - xy - y^2]_{y=x/2}^{y=1-x/2} \, dx \\
 &= \int_0^1 \left[2 - x - x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \right] \, dx \\
 &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Calcule a integral iterada $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) \, dy \, dx$.

SOLUÇÃO Se tentarmos calcular a integral na forma pela qual ela se apresenta, teremos inicialmente de resolver o problema de calcular $\int \sin(y^2) \, dy$. Mas isso é impossível de fazer em termos finitos, uma vez que $\int \sin(y^2) \, dy$ não é uma função elementar. (Veja o final da Seção 7.5.) Precisamos então mudar a ordem de integração, o que pode ser conseguido escrevendo-se inicialmente a integral iterada dada como uma integral dupla. Usando [3] na ordem inversa, temos

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) \, dy \, dx = \iint_D \sin(y^2) \, dA$$

onde $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$

Esboçamos essa região D na Figura 15. Então, da Figura 16, vemos que um modo alternativo de descrever D é

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

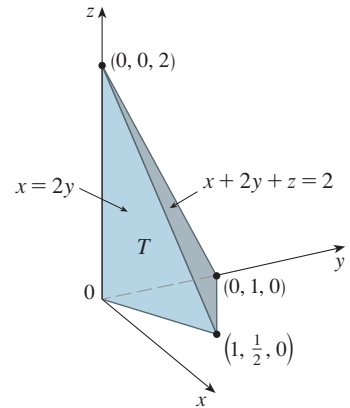


FIGURA 13

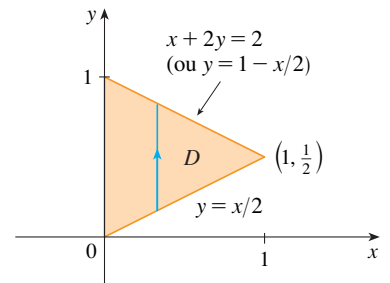


FIGURA 14

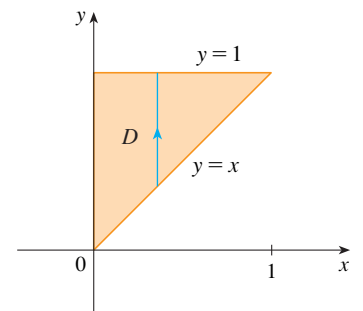


FIGURA 15
 D como uma região do tipo I

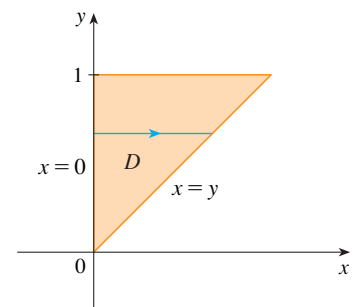


FIGURA 16
 D como uma região do tipo II

Isso nos permite usar [5] para exprimir a integral dupla como uma integral iterada na ordem reversa:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_x^1 \text{sen}(y^2) \, dy \, dx &= \iint_D \text{sen}(y^2) \, dA \\ &= \int_0^1 \int_0^y \text{sen}(y^2) \, dx \, dy = \int_0^1 [x \text{sen}(y^2)]_{x=0}^{x=y} \, dy \\ &= \int_0^1 y \text{sen}(y^2) \, dy = -\frac{1}{2} \cos(y^2) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 1) \end{aligned}$$

Propriedades das Integrais Duplas

Suponha que todas as seguintes integrais existam. As primeiras três propriedades das integrais duplas sobre uma região D seguem imediatamente da Definição 2 desta seção e das Propriedades 7, 8 e 9 da Seção 15.1.

[6]
$$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] \, dA = \iint_D f(x, y) \, dA + \iint_D g(x, y) \, dA$$

[7]
$$\iint_D c f(x, y) \, dA = c \iint_D f(x, y) \, dA$$

Se $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo (x, y) em R , então

[8]
$$\iint_D f(x, y) \, dA \geq \iint_D g(x, y) \, dA$$

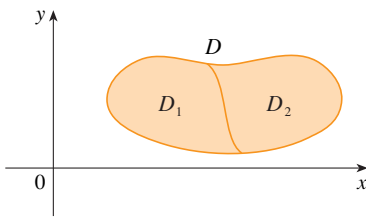


FIGURA 17

A próxima propriedade de integral dupla é semelhante à propriedade de integral de uma função de uma variável real, dada pela equação $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$.

Se $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 não se sobrepõem exceto talvez nas fronteiras (veja a Figura 17), então

[9]
$$\iint_D f(x, y) \, dA = \iint_{D_1} f(x, y) \, dA + \iint_{D_2} f(x, y) \, dA$$

A Propriedade 9 pode ser usada para calcular integrais duplas sobre regiões D que não sejam nem do tipo I nem do tipo II. A Figura 18 ilustra esse procedimento. (Veja os Exercícios 55 e 56.)

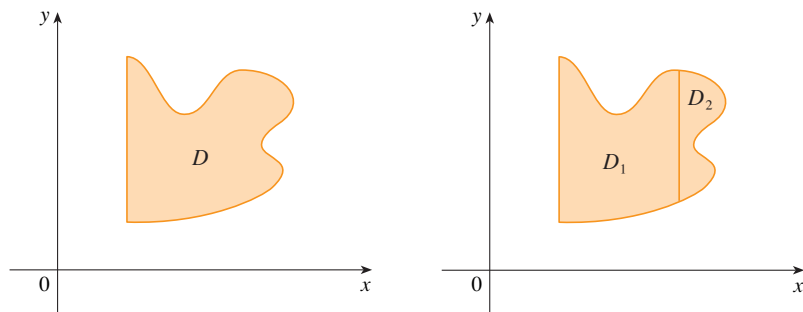


FIGURA 18

(a) D não é do tipo I nem do tipo II.

(b) $D = D_1 \cup D_2$, D_1 é do tipo I, D_2 é do tipo II.

A próxima propriedade de integrais diz que, se integrarmos a função constante $f(x, y) = 1$ sobre uma região D , obteremos a área de D :

10

$$\iint_D 1 \, dA = A(D)$$

A Figura 19 ilustra por que a Equação 10 é verdadeira: um cilindro sólido, cuja base é D e a altura é 1, tem volume $A(D) \cdot 1 = A(D)$, mas sabemos que também podemos escrever seu volume como $\iint_D 1 \, dA$.

Finalmente, podemos combinar as Propriedades 7, 8 e 10 para demonstrar a seguinte propriedade. (Veja o Exercício 61.)

11

Se $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo (x, y) em D , então

$$mA(D) \leq \iint_D f(x, y) \, dA \leq MA(D)$$

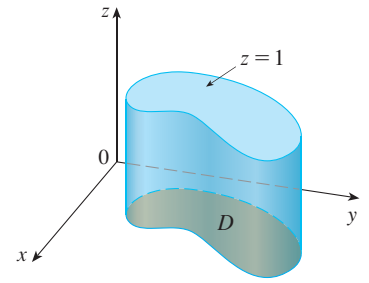


FIGURA 19 Cilindro com base D e altura 1

EXEMPLO 6 Utilize a Propriedade 11 para estimar a integral $\iint_D e^{\sin x \cos y} \, dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 2.

SOLUÇÃO Como $-1 \leq \sin x \leq 1$ e $-1 \leq \cos y \leq 1$, temos $-1 \leq \sin x \cos y \leq 1$ e, portanto,

$$e^{-1} \leq e^{\sin x \cos y} \leq e^1 = e$$

Assim, usando $m = e^{-1} = 1/e$, $M = e$ e $A(D) = \pi(2)^2$ na Propriedade 11, obtemos

$$\frac{4\pi}{e} \leq \iint_D e^{\sin x \cos y} \, dA \leq 4\pi e$$

1-6 Calcule a integral iterada.

15.3 Exercícios

- 1. $\int_0^4 \int_{x^2}^{\sqrt{y}} -xy^2 \, dx \, dy$
- 2. $\int_0^1 \int_{2x}^2 (x - y) \, dy \, dx$
- 3. $\int_0^1 \int_{x^2}^{2x} (1 + 2y) \, dy \, dx$
- 4. $\int_0^2 \int_y^{2y} xy \, dx \, dy$
- 5. $\int_0^1 \int_0^{s^2} \cos(s^3) \, dt \, ds$
- 6. $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1 - v^2} \, du \, dv$

7-10 Calcule a integral dupla.

- 7. $\iint_D y^2 \, dA$, $D = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 1, -y - 2 \leq x \leq y\}$
- 8. $\iint_D \frac{y}{x^5 + 1} \, dA$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$
- 9. $\iint_D x \, dA$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$
- 10. $\iint_D x^3 \, dA$, $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x\}$

11. Desenhe um exemplo de uma região que seja

- (a) do tipo I, mas não do tipo II
 - (b) do tipo II, mas não do tipo I
12. Desenhe um exemplo de uma região que seja
- (a) tanto do tipo I quanto do tipo II
 - (b) nem do tipo I nem do tipo II
- 13-14 Expresse D como a região do tipo I e também como uma região do tipo II. Em seguida, calcule a integral dupla de duas maneiras.
- 13. $\iint_D x \, dA$, D é limitada pelas retas $y = x$, $y = 0$, $x = 1$
 - 14. $\iint_D xy \, dA$, D é limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 3x$
- 15-16 Defina as integrais iteradas para ambas as ordens de integração. Então, calcule a integral dupla usando a ordem mais fácil e explique por que ela é mais fácil.
- 15. $\iint_D y \, dA$, D é limitada por $y = x - 2$, $x = y^2$

16. $\iint_D y^2 e^{xy} dA$, D é limitada por $y = x$, $y = 4$, $x = 0$

17–22 Calcule a integral dupla.

17. $\iint_D x \cos y dA$, D é limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$

18. $\iint_D (x^2 + 2y) dA$, D é limitada por $y = x$, $y = x^3$, $x \geq 0$

19. $\iint_D y^2 dA$, D é a região triangular com vértices $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 1)$

20. $\iint_D xy^2 dA$, D é limitada por $x = 0$ e $x = \sqrt{1 - y^2}$

21. $\iint_D (2x - y) dA$, D é limitada pelo círculo de centro na origem e raio 2

22. $\iint_D 2xy dA$, D é a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 2)$ e $(0, 3)$

23–32 Determine o volume do sólido dado.

23. Abaixo do plano $x - 2y + z = 1$ e acima da região limitada por $x + y = 1$ e $x^2 + y = 1$

24. Abaixo da superfície $z = 2x + y^2$ e acima da região limitada por $x = y^2$ e $x = y^3$

25. Abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo e vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ e $(1, 2)$

26. Limitado pelo parabolóide $z = x^2 + 3y^2$ e pelos planos $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, $z = 0$

27. Limitado pelos planos coordenados e pelo plano $3x + 2y + z = 6$

28. Limitado pelos planos $z = x$, $y = x$, $x + y = 2$ e $z = 0$

29. Limitado pelos cilindros $z = x^2$, $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 4$

30. Limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$ no primeiro octante

31. Limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ no primeiro octante

32. Limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$

33. Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para estimar a coordenada x dos pontos de intersecção da curva $y = x^4$ e $y = 3x - x^2$. Se D é a região limitada por essas curvas, estime $\iint_D x dA$.



34. Encontre o volume aproximado do sólido no primeiro octante limitado pelos planos $y = x$, $z = 0$ e $z = x$ e pelo cilindro $y = \cos x$. (Utilize uma ferramenta gráfica para estimar os pontos de intersecção.)



35–36 Determine o volume do sólido por subtração de dois volumes.

35. O sólido limitado pelos cilindros parabólicos $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$ e pelos planos $x + y + z = 2$, $2x + 2y - z + 10 = 0$

36. O sólido limitado pelo parabolóide cilíndrico $y = x^2$ e pelos planos $z = 3y$, $z = 2 + y$

37–38 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

37. $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy dx$ 38. $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - x) dy dx$

39–42 Use um sistema de computação algébrica para determinar o volume exato do sólido.

39. Abaixo da superfície $z = x^2y^4 + xy^2$ e acima da região limitada pelas curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 + x$ para $x \geq 0$

40. Entre os parabolóides $z = 2x^2 + y^2$ e $z = 8 - x^2 - 2y^2$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

41. Limitado por $z = 1 - x^2 - y^2$ e $z = 0$

42. Limitado por $z = x^2 + y^2$ e $z = 2y$

43–48 Esboce a região de integração e mude a ordem de integração.

43. $\int_0^1 \int_0^y f(x, y) dy dx$

44. $\int_0^2 \int_{x^2}^4 f(x, y) dy dx$

45. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} f(x, y) dy dx$

46. $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dx dy$

47. $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx$

48. $\int_0^1 \int_{\arctg x}^{\pi/4} f(x, y) dy dx$

49–54 Calcule a integral trocando a ordem de integração.

49. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$

50. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2) dx dy$

51. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1} dy dx$

52. $\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y} dy dx$

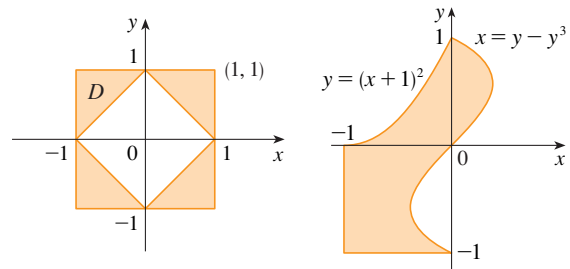
53. $\int_0^1 \int_{\arcsen y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy$

54. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy$

55–56 Expresse D como a união de regiões do tipo I ou do tipo II e calcule a integral.

55. $\iint_D x^2 dA$

56. $\iint_D y dA$



57–58 Use a Propriedade 8 para estimar o valor da integral.

57. $\iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2} dA$, Q é o quarto de círculo com centro na origem e raio $\frac{1}{2}$ no primeiro quadrante

58. $\iint_T \sin^4(x + y) dA$, T é o triângulo limitado pelas retas $y = 0$, $y = 2x$ e $x = 1$

59–60 Encontre o valor médio de f na região D

59. $f(x, y) = xy$, D é o triângulo com vértices, $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 3)$

60. $f(x, y) = x \sin y$, D é limitada pelas curvas $y = 0$, $y = x^2$ e $x = 1$

61. Demonstre a Propriedade 11.

62. No cálculo de uma integral dupla sobre uma região D , obtivemos uma soma de integrais iteradas como a que segue:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y) dx dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y) dx dy$$

Esboce a região D e expresse a integral dupla como uma integral iterada com ordem de integração contrária.

63–67 Use a geometria ou simetria, ou ambas, para calcular a integral dupla.

63. $\iint_D (x + 2) dA, D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}\}$

64. $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dA, D$ é o disco com centro na origem e raio R

65. $\iint_D (2x + 3y) dA, D$ é o retângulo $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$

66. $\iint_D (2 + x^2y^3 + y^2\text{sen } x) dA, D = \{(x, y) \mid |x| \leq |y| \leq 1\}$

67. $\iint_D (ax^3 + by^3 + \sqrt{a^2 - x^2}) dA, D = [-a, a] \times [-b, b]$

SCA 68. Desenhe o sólido limitado pelo plano $x + y + z = 1$ e pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e determine seu volume exato. (Utilize seu SCA para fazer esse desenho, para achar as equações dos limites da região de integração e para calcular a integral dupla.)

15.4 Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Suponha que queiramos calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y) dA$, onde R é uma das regiões mostradas na Figura 1. Em qualquer dos casos, a descrição de R é complicada em coordenadas retangulares, mas a descrição de R fica mais fácil utilizando-se coordenadas polares.

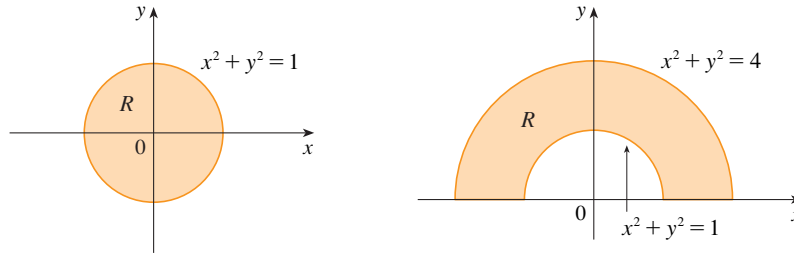


FIGURA 1 (a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ (b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$

Lembre-se, a partir da Figura 2, de que as coordenadas polares (r, θ) de um ponto estão relacionadas com as coordenadas retangulares (x, y) pelas equações

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad x = r \cos \theta \quad y = r \text{sen } \theta$$

(Veja a Seção 10.3.)

As regiões da Figura 1 são casos especiais de um **retângulo polar**

$$R = \{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

que é apresentado na Figura 3. Para calcularmos a integral dupla $\iint_R f(x, y) dA$, onde R é um retângulo polar, dividimos o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de larguras iguais $\Delta r = (b - a)/m$ e dividimos o intervalo $[\alpha, \beta]$ em n subintervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ de larguras iguais $\Delta \theta = (\beta - \alpha)/n$. Então, os círculos $r = r_i$ e os raios $\theta = \theta_j$ dividem o retângulo polar R nos retângulos polares menores R_{ij} mostrados na Figura 4.

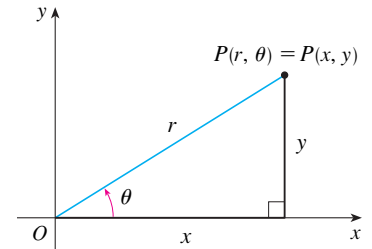


FIGURA 2

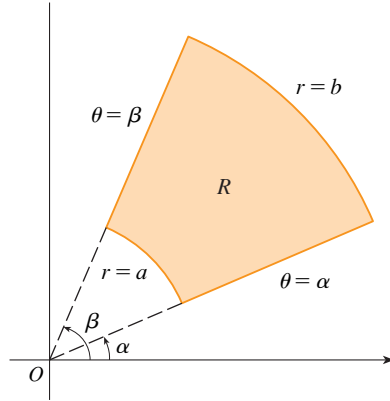


FIGURA 3 Retângulo polar

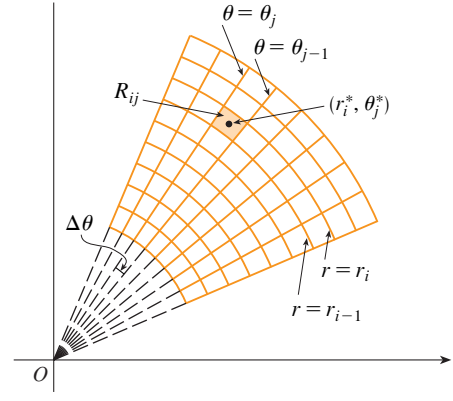


FIGURA 4 Divisão de R em sub-retângulos polares

O “centro” do sub-retângulo polar

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$$

tem coordenadas polares

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \quad \theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Calculamos a área de R_{ij} usando o fato de que a área de um setor de círculo de raio r e ângulo central θ é $\frac{1}{2}r^2\theta$. Subtraindo as áreas de dois desses setores, cada um deles com ângulo central $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, descobrimos que a área de R_{ij} é

$$\begin{aligned} \Delta A_i &= \frac{1}{2}r_i^2 \Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2 \Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2) \Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1}) \Delta\theta = r_i^* \Delta r \Delta\theta \end{aligned}$$

Apesar de termos definido a integral dupla $\iint_R f(x, y) dA$ em termos de retângulos convencionais, podemos mostrar que, para as funções contínuas f , obtemos a mesma resposta usando retângulos polares. As coordenadas retangulares do centro de R_{ij} são $(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*)$, portanto, uma soma de Riemann típica é

$$\boxed{1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta A_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta\theta$$

Se escrevermos $g(r, \theta) = rf(r \cos \theta, r \sin \theta)$, a soma de Riemann na Equação 1 pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \theta_j^*) \Delta r \Delta\theta$$

que é a soma de Riemann para a integral dupla

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r, \theta) dr d\theta$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta A_i \\ &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \theta_j^*) \Delta r \Delta\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r, \theta) dr d\theta \end{aligned}$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

2 Mudança para Coordenadas Polares em uma Integral Dupla Se f é contínua no retângulo polar R dado por $0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$, onde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, então

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

A fórmula em [2] diz que convertemos coordenadas retangulares para coordenadas polares em uma integral dupla escrevendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, usando os limites de integração adequados para r e θ e substituindo dA por $r \, dr \, d\theta$. **Cuidado para não esquecer o fator adicional r no lado direito da Fórmula 2.** Um método clássico para se lembrar disso está na Figura 5, onde podemos pensar nos retângulos polares “infinitesimais” como retângulos convencionais com dimensões $r \, d\theta$ e dr e, portanto, com “área” $dA = r \, dr \, d\theta$.

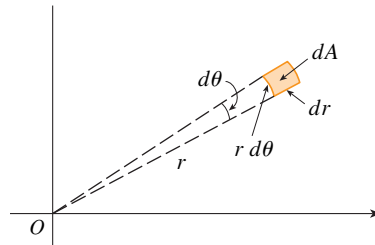


FIGURA 5

EXEMPLO 1 Calcule $\iint_R (3x + 4y^2) \, dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUÇÃO A região R pode ser descrita como

$$R = \{(x, y) \mid y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

É a metade do anel mostrado na Figura 1(b), e em coordenadas polares é dado por $1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi$. Portanto, pela Fórmula 2,

$$\begin{aligned} \iint_R (3x + 4y^2) \, dA &= \int_0^{\pi} \int_1^2 (3r \cos \theta + 4r^2 \sin^2 \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_1^2 (3r^2 \cos \theta + 4r^3 \sin^2 \theta) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} [r^3 \cos \theta + r^4 \sin^2 \theta]_{r=1}^{r=2} \, d\theta = \int_0^{\pi} (7 \cos \theta + 15 \sin^2 \theta) \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left[7 \cos \theta + \frac{15}{2}(1 - \cos 2\theta) \right] \, d\theta \\ &= 7 \sin \theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4} \sin 2\theta \Big|_0^{\pi} = \frac{15\pi}{2} \end{aligned}$$

Aqui usamos a identidade trigonométrica

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

Veja a Seção 7.2, no Volume I, para informações sobre a integração de funções trigonométricas.

EXEMPLO 2 Determine o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.

SOLUÇÃO Se tomarmos $z = 0$ na equação do parabolóide, obteremos $x^2 + y^2 = 1$. Isso significa que o plano intercepta o parabolóide no círculo $x^2 + y^2 = 1$ e o sólido está abaixo do parabolóide e acima do disco circular D dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ [veja as Figuras 6 e 1(a)]. Em coordenadas polares, D é dado por $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, o volume é

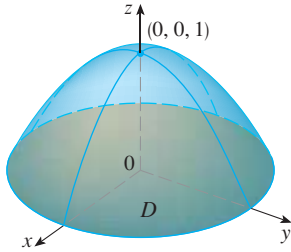


FIGURA 6

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (1 - x^2 - y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3) dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Se trabalhássemos com coordenadas retangulares em vez de coordenadas polares, obteríamos

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dA = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy dx$$

que não é fácil de calcular, pois envolve determinar $\int (1 - x^2)^{3/2} dx$. ■

O que fizemos até aqui pode ser estendido para tipos de região mais complicados, como o mostrado na Figura 7. Isso é semelhante à região com coordenadas retangulares do tipo II vista na Seção 15.3. De fato, combinando a Fórmula 2 desta seção com a Fórmula 15.3.5, obtemos o seguinte.

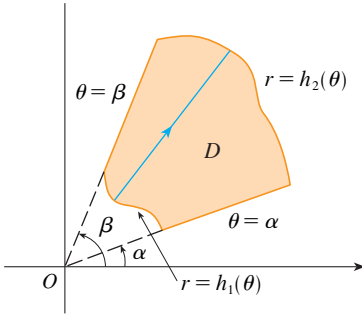


FIGURA 7

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

3 Se f é contínua em uma região polar da forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

então
$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Em particular, tomando $f(x, y) = 1, h_1(\theta) = 0$ e $h_2(\theta) = h(\theta)$ nessa fórmula, vemos que a área da região D limitada por $\theta = \alpha, \theta = \beta$ e $r = h(\theta)$ é

$$\begin{aligned}
 A(D) &= \iint_D 1 dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{h(\theta)} r dr d\theta \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{h(\theta)} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [h(\theta)]^2 d\theta
 \end{aligned}$$

que coincide com a Fórmula 10.4.3.

EXEMPLO 3 Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

SOLUÇÃO Do esboço da curva na Figura 8, vemos que um laço da rosácea de quatro pétalas corresponde à região

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4, 0 \leq r \leq \cos 2\theta\}$$

Então, a área é

$$\begin{aligned}
 A(D) &= \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r dr d\theta \\
 &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{4} \left[\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}
 \end{aligned}$$
■

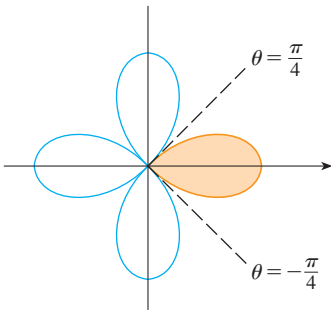


FIGURA 8

EXEMPLO 4 Determine o volume do sólido que está sob o parabolóide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

SOLUÇÃO O sólido está acima do disco D cujo limite tem equação $x^2 + y^2 = 2x$ ou, após completar os quadrados,

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

(Veja as Figuras 9 e 10.)

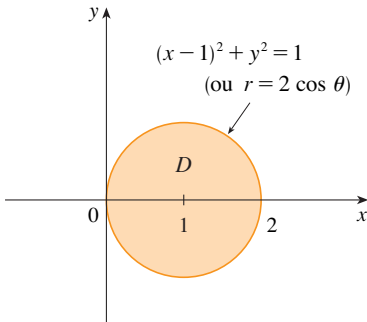


FIGURA 9

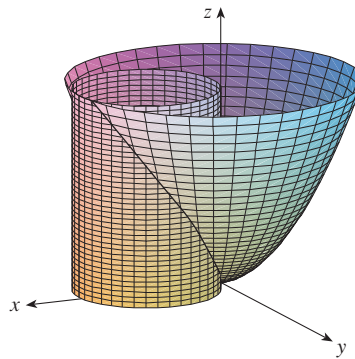


FIGURA 10

Em coordenadas polares, temos $x^2 + y^2 = r^2$ e $x = r \cos \theta$, assim, o limite circular fica $r^2 = 2r \cos \theta$ ou $r = 2 \cos \theta$. Portanto, o disco D é dado por

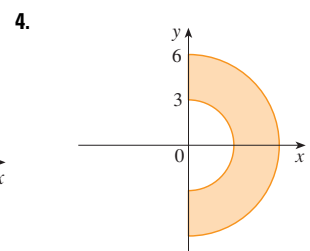
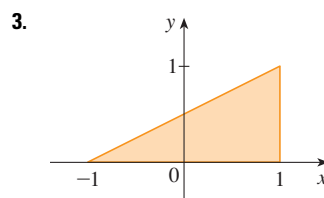
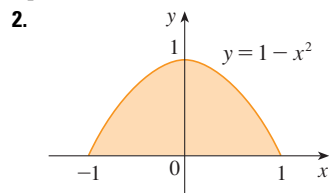
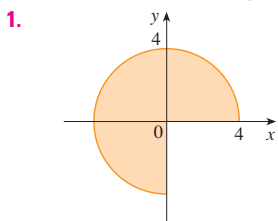
$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta\}$$

e, da Fórmula 3, temos

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 r dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2 \cos \theta} d\theta \\ &= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} [1 + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)] d\theta \\ &= 2 \left[\frac{3}{2} \theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8} \sin 4\theta \right]_0^{\pi/2} = 2 \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

15.4 Exercícios

1–4 Uma região R é mostrada. Decida se você deve usar coordenadas polares ou retangulares, e escreva $\iint_R f(x, y) dA$ como uma integral iterada, onde f é uma função qualquer contínua em R .



5–6 Esboce a região cuja área é dada pela integral e calcule-a.

5. $\int_{\pi}^{3\pi/4} \int_1^2 r dr d\theta$

6. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2 \sin \theta} r dr d\theta$

7–14 Calcule a integral dada, colocando-a em coordenadas polares.

7. $\iint_D x^2 y \, dA$, onde D é a metade superior do disco com centro na origem e raio 5
8. $\iint_R (2x - y) \, dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$ e as retas $x = 0$ e $y = x$
9. $\iint_R \sin(x^2 + y^2) \, dA$, onde R é a região do primeiro quadrante entre os círculos com centro na origem e raios 1 e 3
10. $\iint_R \frac{y^2}{x^2 + y^2} \, dA$, onde R é a região que fica entre os círculos $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$ com $0 < a < b$
11. $\iint_D e^{-x^2-y^2} \, dA$, onde D é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ e o eixo y
12. $\iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} \, dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 2
13. $\iint_R \arctg(y/x) \, dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$
14. $\iint_D x \, dA$, onde D é a região no primeiro quadrante que se encontra entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 2x$

15–18 Utilize a integral dupla para determinar a área da região.

15. Um laço da rosácea $r = \cos 3\theta$
16. A região limitada por ambos os cardioides $r = 1 + \cos \theta$ e $r = 1 - \cos \theta$
17. A região dentro do círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e fora do círculo $x^2 + y^2 = 1$
18. A região dentro do círculo $r = 1 + \cos \theta$ e fora do círculo $r = 3 \cos \theta$

19–27 Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido dado.

19. Abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e acima do disco $x^2 + y^2 \leq 4$
20. Abaixo do parabolóide $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ e acima do plano xy
21. Limitado pelo hiperbolóide $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e pelo plano $z = 2$
22. Dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$
23. Uma esfera de raio a
24. Limitado pelo parabolóide $z = 1 + zx^2 + zy^2$ e pelo plano $z = 7$ no primeiro octante
25. Acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
26. Limitado pelos parabolóides $z = 3x^2 + 3y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$
27. Dentro tanto do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ quanto do elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$

28. (a) Uma broca cilíndrica de raio r_1 é usada para fazer um furo que passa pelo centro de uma esfera de raio r_2 . Determine o volume do sólido em formato de anel resultante.
(b) Expresse o volume da parte (a) em termos da altura h do anel. Observe que o volume depende somente de h e não de r_1 ou r_2 .

29–32 Calcule a integral iterada, convertendo-a antes para coordenadas polares.

29. $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2 + y^2) \, dy \, dx$
30. $\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^0 x^2 y \, dx \, dy$
31. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} (x + y) \, dx \, dy$
32. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx$

33–34 Expresse a integral dupla em termos de uma integral unidimensional com relação a r . Em seguida, use a calculadora para ava-

liar a integral correta com quatro casas decimais.

33. $\iint_D e^{(x^2+y^2)^2} \, dA$, D onde está o disco com centro na origem e raio 1
34. $\iint_D xy\sqrt{1+x^2+y^2} \, dA$, onde D é a porção do disco $x^2 + y^2 \leq 1$ que fica no primeiro quadrante

35. Uma piscina circular tem diâmetro de 10 metros. A profundidade é constante ao longo das retas de leste para oeste e cresce linearmente de 1 metro na extremidade sul para dois metros na extremidade norte. Encontre o volume de água da piscina.
36. Um pulverizador agrícola distribui água em um padrão circular de 50 m de raio. Ele fornece água até uma profundidade de e^{-r} metros por hora a uma distância de r metros do pulverizador.
(a) Se $0 < R \leq 50$, qual a quantidade total de água fornecida por hora para a região dentro do círculo de raio R centrada no pulverizador?
(b) Determine uma expressão para a quantidade média de água por hora por metro quadrado fornecida à região dentro do círculo de raio R .
37. Encontre o valor médio da função $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ na região anular $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, onde $0 < a < b$.
38. Seja D o disco com centro na origem e raio a . Qual é a distância média dos pontos em D em relação à origem?
39. Utilize coordenadas polares para combinar a soma

$$\int_{1/\sqrt{2}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xy \, dy \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy \, dy \, dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy \, dy \, dx$$

em uma única integral dupla. Em seguida calcule essa integral dupla.

40. (a) Definimos a integral imprópria (sobre todo o plano \mathbb{R}^2)

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dy \, dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} \, dA$$

onde D_a é o disco com raio a e centro na origem. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dA = \pi$$

- (b) Uma definição equivalente da integral imprópria da parte (a) é

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dA = \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)} \, dA$$

onde S_a é o quadrado com vértices $(\pm a, \pm a)$. Use isto para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, dy = \pi$$

- (c) Deduza que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$$

- (d) Fazendo a mudança de variável $t = \sqrt{2} x$, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \, dx = \sqrt{2\pi}$$

(Esse é um resultado fundamental em probabilidade e estatística.)

41. Utilize o resultado do Exercício 40, parte (c), para calcular as seguintes integrais.

- (a) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} \, dx$

- (b) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} \, dx$

15.5 Aplicações de Integrais Duplas

Já vimos uma aplicação da integral dupla: o cálculo de volumes. Outra aplicação geométrica importante é a determinação de áreas de superfícies, o que será feito na próxima seção. Nesta seção, vamos explorar as aplicações físicas, tais como cálculo de massa, carga elétrica, centro de massa e momento de inércia. Veremos que essas ideias físicas também são importantes quando aplicadas a funções densidade de probabilidade de duas variáveis aleatórias.

Densidade e Massa

Na Seção 8.3, no volume I, calculamos momentos e centro de massa de placas finas ou lâminas de densidade constante usando as integrais unidimensionais. Agora, com auxílio das integrais duplas, temos condições de considerar as lâminas com densidade variável. Suponha que uma lâmina ocupe uma região D do plano xy e que sua **densidade** (em unidades de massa por unidade de área) no ponto (x, y) em D é dada por $\rho(x, y)$, onde ρ é uma função contínua em D . Isso significa que

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

onde Δm e ΔA são a massa e a área de um pequeno retângulo que contém (x, y) e tomamos o limite quando as dimensões do retângulo se aproximam de 0 (veja a Figura 1).

Para determinarmos a massa total m da lâmina, dividimos o retângulo R contendo D em sub-retângulos R_{ij} , todos do mesmo tamanho (como na Figura 2), e consideramos $\rho(x, y)$ como 0 fora de D . Se escolhermos um ponto (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij} , então a massa da parte da lâmina que ocupa R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$, onde ΔA é a área de R_{ij} . Se somarmos todas essas massas, obteremos uma aproximação do valor da massa total:

$$m \approx \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

Aumentando o número de sub-retângulos, obtemos a massa total m da lâmina como o valor-limite das aproximações:

1

$$m = \lim_{k, l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D \rho(x, y) dA$$

Físicos consideram ainda outros tipos de densidade que podem ser tratados da mesma maneira. Por exemplo: se uma carga elétrica está distribuída sobre uma região D e a densidade de carga (em unidades de carga por unidade de área) é dada por $\sigma(x, y)$ em um ponto (x, y) em D , então a carga total Q é dada por

2

$$Q = \iint_D \sigma(x, y) dA$$

EXEMPLO 1 Uma carga está distribuída na região triangular D da Figura 3 de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = xy$, medida em coulombs por metro quadrado (C/m^2). Determine a carga total.

SOLUÇÃO Da Equação 2 e da Figura 3, temos

$$Q = \iint_D \sigma(x, y) dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy \, dy \, dx$$

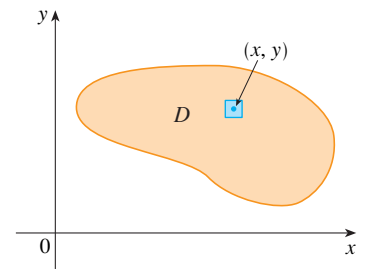


FIGURA 1

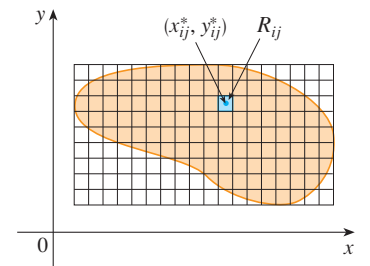


FIGURA 2

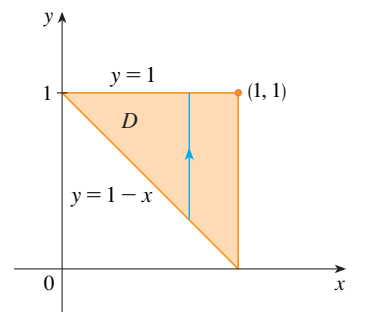


FIGURA 3

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} [1^2 - (1-x)^2] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 - x^3) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{24}
 \end{aligned}$$

Logo, a carga total é $\frac{5}{24}$ C.

Momentos e Centros de Massa

Na Seção 8.3, no Volume I, determinamos o centro de massa de uma lâmina de densidade constante; aqui, consideraremos uma lâmina de densidade variável. Suponha que a lâmina ocupe uma região D e que tenha $\rho(x, y)$ como função densidade. Lembre-se de que no Capítulo 8 definimos o momento de uma partícula em relação a um eixo como o produto de sua massa pela distância (perpendicular) ao eixo. Dividimos D em retângulos pequenos, como na Figura 2. Então a massa de R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$, e podemos aproximar o momento de R_{ij} com relação ao eixo x por

$$[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A] y_{ij}^*$$

Se somarmos essas quantidades e tomarmos o limite quando o número de sub-retângulos cresce indefinidamente, obteremos o **momento** da lâmina inteira **em relação ao eixo x** :

$$3 \quad M_x = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D y \rho(x, y) dA$$

Da mesma forma, o **momento em relação ao eixo y** é

$$4 \quad M_y = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D x \rho(x, y) dA$$

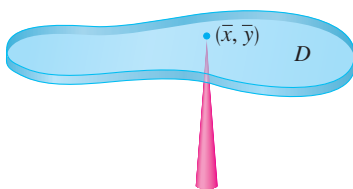


FIGURA 4

Como anteriormente, definimos o centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) de modo que $m\bar{x} = M_y$ e $m\bar{y} = M_x$. O significado físico disso é que a lâmina se comporta como se toda sua massa estivesse concentrada em seu centro de massa. Assim, a lâmina permanece horizontal quando equilibrada em seu centro de massa (veja a Figura 4).

5 As coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) do centro de massa de uma lâmina ocupando a região D e tendo função densidade $\rho(x, y)$ são

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dA \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA$$

onde a massa m é dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA$$

EXEMPLO 2 Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$, se a função densidade for $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.

SOLUÇÃO O triângulo está mostrado na Figura 5. (Observe que a equação do limite superior é $y = 2 - 2x$.) A massa da lâmina é

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y) dy dx$$

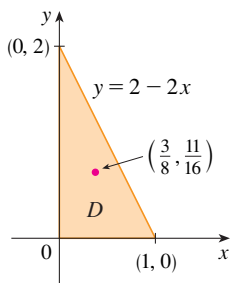


FIGURA 5

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\
 &= 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 4 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

Então, as fórmulas em [5] fornecem

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dA = \frac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy) dy dx \\
 &= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[xy + 3x^2y + x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^1 (x - x^3) dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{8} \\
 \bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA = \frac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (y + 3xy + y^2) dy dx \\
 &= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + 3x \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (7 - 9x - 3x^2 + 5x^3) dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[7x - 9 \frac{x^2}{2} - x^3 + 5 \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{11}{16}
 \end{aligned}$$

O centro de massa é o ponto $(\frac{3}{8}, \frac{11}{16})$.

EXEMPLO 3 A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância ao centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.

SOLUÇÃO Vamos posicionar a lâmina na metade superior do círculo $x^2 + y^2 = a^2$. (Veja a Figura 6.) Então a distância do ponto (x, y) ao centro do círculo (origem) é $\sqrt{x^2 + y^2}$. Portanto, a função densidade é

$$\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$$

onde K é alguma constante. Tanto a função densidade como o formato da lâmina sugerem a conversão para coordenadas polares. Então $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ e a região D é dada por $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Logo, a massa da lâmina é

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_D \rho(x, y) dA = \iint_D K\sqrt{x^2 + y^2} dA \\
 &= \int_0^\pi \int_0^a (Kr) r dr d\theta = K \int_0^\pi d\theta \int_0^a r^2 dr \\
 &= K\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a = \frac{K\pi a^3}{3}
 \end{aligned}$$

Tanto a lâmina como a função densidade são simétricas com relação ao eixo y e, assim, o centro de massa precisa estar sobre o eixo y , ou seja, $\bar{x} = 0$. A coordenada y é dada por

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA = \frac{3}{K\pi a^3} \int_0^\pi \int_0^a r \sen \theta (Kr) r dr d\theta \\
 &= \frac{3}{\pi a^3} \int_0^\pi \sen \theta d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{3}{\pi a^3} [-\cos \theta]_0^\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a \\
 &= \frac{3}{\pi a^3} \frac{2a^4}{4} = \frac{3a}{2\pi}
 \end{aligned}$$

Portanto, o centro de massa está localizado no ponto $(0, 3a/(2\pi))$.

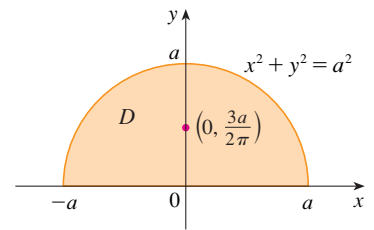


FIGURA 6

Compare a localização do centro de massa no Exemplo 3 com o Exemplo 4 na Seção 8.3, no Volume I, onde encontramos que o centro de massa da lâmina com o mesmo formato, mas com densidade uniforme, está localizado no ponto $(0, 4a/(3\pi))$.

Momento de Inércia

O **momento de inércia** (também chamado **segundo momento**) de uma partícula de massa m em relação a um eixo é definido como mr^2 , onde r é a distância da partícula ao eixo. Estendemos o conceito a uma lâmina com função densidade $\rho(x, y)$ e que ocupa uma região D pelo mesmo processo que fizemos para os momentos normais. Dividimos D em pequenos retângulos, aproximamos o momento de inércia de cada sub-retângulo em relação ao eixo x e tomamos o limite da soma quando o número de sub-retângulos aumenta indefinidamente. O resultado é o **momento de inércia da lâmina em relação ao eixo x** :

$$6 \quad I_x = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D y^2 \rho(x, y) dA$$

Da mesma forma, o **momento de inércia em relação ao eixo y** é

$$7 \quad I_y = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D x^2 \rho(x, y) dA$$

É de interesse, ainda, considerar o **momento de inércia em relação à origem**, também chamado **momento polar de inércia**:

$$8 \quad I_0 = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [(x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2] \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA$$

Observe que $I_0 = I_x + I_y$.

EXEMPLO 4 Determine os momentos de inércia I_x , I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a .

SOLUÇÃO O limite de D é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$, que em coordenadas polares D é descrito por $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq a$. Vamos calcular I_0 primeiro:

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_D (x^2 + y^2) \rho dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r dr d\theta \\ &= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = 2\pi\rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\pi\rho a^4}{2} \end{aligned}$$

Em vez de calcularmos I_x e I_y diretamente, vamos usar o fato de que $I_x + I_y = I_0$ e $I_x = I_y$ (da simetria do problema). Assim

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi\rho a^4}{4}$$

No Exemplo 4, observe que a massa do disco é

$$m = \text{densidade} \times \text{área} = \rho(\pi a^2)$$

de modo que o momento de inércia do disco em torno da origem (como uma roda em torno de seu eixo) pode ser escrito como

$$I_0 = \frac{\pi\rho a^4}{2} = \frac{1}{2}(\rho\pi a^2)a^2 = \frac{1}{2}ma^2$$

Portanto, se aumentarmos a massa ou o raio do disco, aumentaremos o momento de inércia. Em geral, o momento de inércia tem um papel em um movimento de rotação semelhante ao que a massa tem em um movimento linear. O momento de inércia de uma roda é o que torna difícil começar ou parar a rotação da roda, assim como a massa do carro dificulta seu movimento inicial e a frenagem.

O raio de giração de uma lâmina em relação a um eixo é o número R tal que

$$\boxed{9} \quad mR^2 = I$$

onde m é a massa da lâmina e I é o momento de inércia em relação ao eixo dado. A Equação 9 nos diz que, se a massa da lâmina estiver concentrada a uma distância R do eixo, então o momento de inércia dessa “massa pontual” será o mesmo que o momento de inércia da lâmina.

Em particular, o raio de giração \bar{y} em relação ao eixo x e o raio de giração \bar{x} em relação ao eixo y têm as equações

$$\boxed{10} \quad m\bar{y}^2 = I_x \quad m\bar{x}^2 = I_y$$

Então (\bar{x}, \bar{y}) é o ponto no qual podemos concentrar a massa da lâmina sem modificar os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados resultantes. (Observe a analogia com o centro de massa.)

EXEMPLO 5 Determine o raio de giração em torno do eixo x do disco do Exemplo 4.

SOLUÇÃO Como observado, a massa do disco é $m = \rho\pi a^2$, e da Equação 10 temos

$$\bar{y}^2 = \frac{I_x}{m} = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho a^4}{\rho\pi a^2} = \frac{a^2}{4}$$

Portanto, o raio de giração em relação ao eixo x é $\bar{y} = \frac{1}{2}a$, que é metade do raio do disco.

Probabilidade

Na Seção 8.5, no Volume I, consideramos a *função densidade de probabilidade* f de uma variável aleatória contínua X . Isso significa que $f(x) \geq 0$ para todo x , $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ e a probabilidade de que X esteja entre a e b é determinada integrando-se f de a até b :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Consideremos agora um par de variáveis aleatórias X e Y como o tempo de vida de dois componentes de uma máquina ou a altura e o peso de uma mulher adulta escolhida ao acaso. A **função densidade conjunta** de X e Y é uma função f de duas variáveis tais que a probabilidade de que (X, Y) esteja em uma região D seja

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dA$$

Em particular, se a região for um retângulo, a probabilidade de que X esteja entre a e b e de que Y esteja entre c e d é

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

(Veja a Figura 7.)

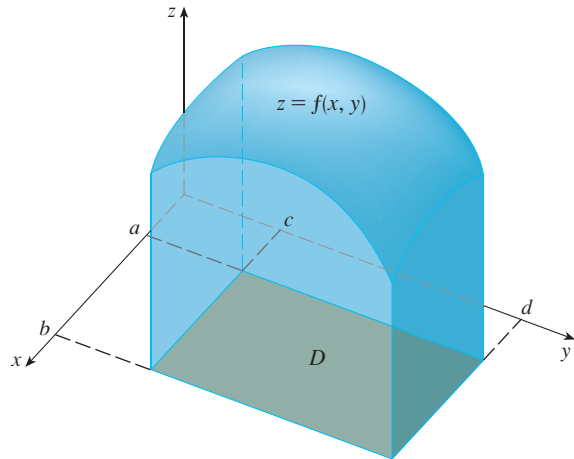


FIGURA 7

A probabilidade de que X esteja entre a e b e de que Y esteja entre c e d é o volume do sólido acima do retângulo $D = [a, b] \times [c, d]$ e abaixo do gráfico da função densidade conjunta.

Como probabilidades não podem ser negativas e são medidas na escala de 0 a 1, a função densidade conjunta tem as seguintes propriedades:

$$f(x, y) \geq 0 \quad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dA = 1$$

Como no Exercício 40 da Seção 15.4, a integral dupla sobre \mathbb{R}^2 é uma integral imprópria, definida como o limite da integral dupla sobre os círculos ou retângulos que se expandem, e podemos escrever

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \, dy = 1$$

EXEMPLO 6 Se a função densidade conjunta de X e Y for dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{se } 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor da constante C . Então, calcule $P(X \leq 7, Y \geq 2)$.

SOLUÇÃO Determinamos o valor de C garantindo que a integral dupla de f seja igual a 1. Como $f(x, y) = 0$ está fora do retângulo $[0, 10] \times [0, 10]$, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dy \, dx &= \int_0^{10} \int_0^{10} C(x + 2y) \, dy \, dx = C \int_0^{10} [xy + y^2]_{y=0}^{y=10} \, dx \\ &= C \int_0^{10} (10x + 100) \, dx = 1\,500C \end{aligned}$$

Portanto, $1\,500C = 1$ e, assim, $C = \frac{1}{1\,500}$.

Agora, podemos calcular a probabilidade de X ser no máximo 7 e de Y ser no mínimo 2:

$$\begin{aligned} P(X \leq 7, Y \geq 2) &= \int_{-\infty}^7 \int_2^{\infty} f(x, y) \, dy \, dx = \int_0^7 \int_2^{10} \frac{1}{1\,500}(x + 2y) \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{1\,500} \int_0^7 [xy + y^2]_{y=2}^{y=10} \, dx = \frac{1}{1\,500} \int_0^7 (8x + 96) \, dx \\ &= \frac{868}{1\,500} \approx 0,5787 \end{aligned}$$

Suponha que X seja uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f_1(x)$ e Y seja uma variável aleatória com função densidade $f_2(y)$. Então, X e Y são ditas **variáveis aleatórias independentes** se a função densidade conjunta for o produto das funções densidade individuais:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

Na Seção 8.5, modelamos o tempo de espera utilizando a função densidade exponencial

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \mu^{-1} e^{-t/\mu} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

onde μ é o tempo médio de espera. No próximo exemplo consideraremos a situação com dois tempos de espera independentes.

EXEMPLO 7 O gerente de um cinema determina que o tempo médio de espera na fila para as pessoas comprarem entrada para o filme da semana seja de dez minutos e que o tempo médio que levam para comprar pipoca seja de cinco minutos. Supondo que os tempos de espera sejam independentes, determine a probabilidade de um espectador esperar menos de 20 minutos até se dirigir a seu assento.

SOLUÇÃO Supondo que os tempos de espera X para comprar a entrada e Y para comprar pipoca possam ser modelados por funções densidade de probabilidade exponencial, podemos escrever as funções densidade individuais como

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{10} e^{-x/10} & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ \frac{1}{5} e^{-y/5} & \text{se } y \geq 0 \end{cases}$$

Como X e Y são independentes, a função densidade conjunta é o produto:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50} e^{-x/10} e^{-y/5} & \text{se } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Foi pedida também a probabilidade de $X + Y < 20$:

$$P(X + Y < 20) = P((X, Y) \in D)$$

onde D é a região triangular mostrada na Figura 8. Então,

$$\begin{aligned} P(X + Y < 20) &= \iint_D f(x, y) \, dA = \int_0^{20} \int_0^{20-x} \frac{1}{50} e^{-x/10} e^{-y/5} \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{50} \int_0^{20} \left[e^{-x/10} (-5) e^{-y/5} \right]_{y=0}^{y=20-x} \, dx \\ &= \frac{1}{10} \int_0^{20} e^{-x/10} (1 - e^{-(x-20)/5}) \, dx \\ &= \frac{1}{10} \int_0^{20} (e^{-x/10} - e^{-4} e^{x/10}) \, dx \\ &= 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0,7476 \end{aligned}$$

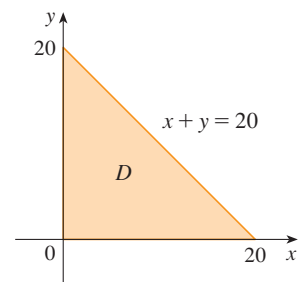


FIGURA 8

Isso significa que cerca de 75% dos espectadores esperam menos de 20 minutos antes de tomarem seus assentos.

Valores Esperados

Lembre-se da Seção 8.5, no Volume I, de que, se X é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade f , então sua *média* é

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, dx$$

Se X e Y são variáveis aleatórias com função densidade conjunta f , definimos a **média X** e a **média Y** , também chamadas **valores esperados** de X e Y , como

$$\mu_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} xf(x, y) dA \quad \mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} yf(x, y) dA$$

Observe como são parecidas as expressões de μ_1 e μ_2 em [11] com os momentos M_x e M_y de uma lâmina com função densidade ρ nas Equações 3 e 4. De fato, podemos pensar na probabilidade como uma massa continuamente distribuída. Calculamos probabilidade da mesma maneira que calculamos massa: integrando a função densidade. E, como a “massa de probabilidade” total é 1, as expressões de \bar{x} e \bar{y} em [5] mostram que podemos pensar que os valores esperados de X e Y , μ_1 e μ_2 , são as coordenadas do “centro de massa” da distribuição de probabilidade.

No próximo exemplo trabalharemos com distribuições normais. Como na Seção 8.5, uma única variável aleatória tem *distribuição normal* se sua função densidade de probabilidade é da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

onde μ é sua média e σ é seu desvio-padrão.

EXEMPLO 8 Uma fábrica produz rolamentos (de forma cilíndrica) que são vendidos como tendo 4,0 cm de diâmetro e 6,0 cm de comprimento. Na verdade, o diâmetro X tem distribuição normal com média 4,0 cm e desvio-padrão 0,01 cm, enquanto o comprimento Y tem distribuição normal com média 6,0 cm e desvio-padrão 0,01 cm. Supondo que X e Y sejam independentes, escreva a função densidade conjunta e faça seu gráfico. Determine a probabilidade de que um rolamento escolhido aleatoriamente da linha de produção tenha comprimento ou diâmetro que difiram dos valores médios em mais que 0,02 cm.

SOLUÇÃO Temos que X e Y têm distribuições normais com $\mu_1 = 4,0$, $\mu_2 = 6,0$ e $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,01$. As funções densidade individuais para X e Y são

$$f_1(x) = \frac{1}{0,01\sqrt{2\pi}} e^{-(x-4)^2/0,0002} \quad f_2(y) = \frac{1}{0,01\sqrt{2\pi}} e^{-(y-6)^2/0,0002}$$

Como X e Y são independentes, a função densidade conjunta é o produto:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_1(x)f_2(y) = \frac{1}{0,0002\pi} e^{-(x-4)^2/0,0002} e^{-(y-6)^2/0,0002} \\ &= \frac{5\,000}{\pi} e^{-5\,000[(x-4)^2+(y-6)^2]} \end{aligned}$$

O gráfico dessa função é mostrado na Figura 9.

Vamos inicialmente calcular a probabilidade de ambos, X e Y , diferirem de seus valores médios por menos de 0,02 cm. Usando uma calculadora ou computador para estimar a integral, temos

$$\begin{aligned} P(3,98 < X < 4,02, 5,98 < Y < 6,02) &= \int_{3,98}^{4,02} \int_{5,98}^{6,02} f(x, y) dy dx \\ &= \frac{5\,000}{\pi} \int_{3,98}^{4,02} \int_{5,98}^{6,02} e^{-5\,000[(x-4)^2+(y-6)^2]} dy dx \\ &\approx 0,91 \end{aligned}$$

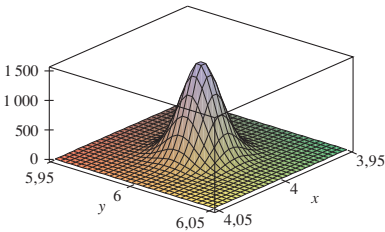


FIGURA 9
Gráfico da função densidade normal conjunta em duas variáveis do Exemplo 8

Então, a probabilidade de X ou Y diferir de seu valor médio em 0,02 cm ou mais é de aproximadamente

$$1 - 0,91 = 0,09$$

15.5 Exercícios

- Uma carga elétrica é distribuída sobre o retângulo $0 \leq x \leq 5$, $2 \leq y \leq 5$, de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = 2x + 4y$ (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total no retângulo.
 - Uma carga elétrica é distribuída sobre o disco $x^2 + y^2 \leq 1$, de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total no disco.
- 3–10** Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região D e tem função densidade ρ .
- $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4\}$; $\rho(x, y) = ky^2$
 - $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$; $\rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$
 - D é a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$; $\rho(x, y) = x + y$
 - D é a região triangular limitada pelas retas $x = 0$, $y = x$ e $2x + y = 6$; $\rho(x, y) = x^2$
 - D é limitada por $y = 1 - x^2$ e $y = 0$; $\rho(x, y) = ky$
 - D é limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$; $\rho(x, y) = ky$
 - $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sin(\pi x/L), 0 \leq x \leq L\}$; $\rho(x, y) = y$
 - D é limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$; $\rho(x, y) = \sqrt{x}$

- Uma lâmina ocupa a parte do disco $x^2 + y^2 \leq 1$ no primeiro quadrante. Determine o centro de massa se a densidade em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao eixo x .
- Determine o centro de massa da lâmina do Exercício 11 se a densidade em qualquer ponto for proporcional ao quadrado da distância do ponto à origem.
- O limite de uma lâmina consiste nos semicírculos $y = \sqrt{1 - x^2}$ e $y = \sqrt{4 - x^2}$ juntamente com as partes do eixo x que os une. Encontre o centro de massa da lâmina se a densidade em qualquer ponto é proporcional à sua distância da origem.
- Encontre o centro de massa da lâmina do Exercício 13 se a densidade em qualquer ponto for inversamente proporcional à sua distância da origem.
- Encontre o centro de massa de uma lâmina em forma de triângulo retângulo isósceles, com os lados iguais tendo comprimento a , se a densidade em qualquer ponto for proporcional ao quadrado da distância do vértice oposto à hipotenusa.
- A lâmina ocupa a região dentro do círculo $x^2 + y^2 = 2y$, mas fora do círculo $x^2 + y^2 = 1$. Encontre o centro de massa se a densidade em qualquer ponto for inversamente proporcional à sua distância da origem.
- Encontre os momentos de inércia I_x, I_y, I_0 para a lâmina do Exercício 7.
- Encontre os momentos de inércia I_x, I_y, I_0 para a lâmina do Exercício 12.
- Encontre os momentos de inércia I_x, I_y, I_0 para a lâmina do Exercício 15.
- Considere uma pá quadrada de um ventilador com lados de comprimento 2 e com o canto inferior esquerdo colocado na origem. Se a densidade da pá for $\rho(x, y) = 1 + 0,1x$, é mais difícil girar a pá em torno do eixo x ou do eixo y ?

21–24 Uma lâmina com densidade constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa a região dada. Encontre os momentos de inércia I_x e I_y e os raios de giração \bar{x} e \bar{y} .

- O retângulo $0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq h$
- O triângulo com vértices $(0, 0)$, $(b, 0)$ e $(0, h)$
- A parte do disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ no primeiro quadrante
- A região sob a curva $y = \sin x$ de $x = 0$ a $x = \pi$

SCA 25–26 Utilize um sistema de computação algébrica para determinar a massa, o centro de massa e os momentos de inércia da lâmina que ocupa a região D e tem a densidade dada.

- D está limitada pelo laço direito da rosácea de quatro folhas $r = \cos 2\theta$; $\rho(x, y) = x^2 + y^2$
- $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq xe^{-x}, 0 \leq x \leq 2\}$; $\rho(x, y) = x^2y^2$

27. A função densidade conjunta para um par de variáveis aleatórias X e Y é

$$f(x, y) = \begin{cases} Cx(1 + y) & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Determine o valor da constante C .
- Encontre $P(X \leq 1, Y \leq 1)$.
- Encontre $P(X + Y \leq 1)$.

28. (a) Verifique que

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é uma função densidade conjunta.

- Se X e Y são variáveis aleatórias cuja função densidade conjunta é a função f da parte (a), determine
 - $P(X \geq \frac{1}{2})$
 - $P(X \geq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2})$
- Determine os valores esperados de X e Y .

29. Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 0,1e^{-(0,5x+0,2y)} & \text{se } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Verifique que f é de fato uma função densidade conjunta.
- Determine as seguintes probabilidades.
 - $P(Y \geq 1)$
 - $P(X \leq 2, Y \leq 4)$
- Determine os valores esperados de X e Y .

- (a) Uma luminária tem duas lâmpadas de um tipo com tempo de vida médio de 1 000 horas. Supondo que possamos modelar a probabilidade de falha dessas lâmpadas por uma função densidade exponencial com média $\mu = 1 000$, determine a probabilidade de que ambas as lâmpadas venham a falhar dentro de um período de 1 000 horas.
 - Outra luminária tem somente uma lâmpada do mesmo tipo das da parte (a). Se a lâmpada queima e é trocada por outra do mesmo tipo, determine a probabilidade de que as duas venham a falhar dentro de 1 000 horas.

SCA 31. Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias, onde X tem distribuição normal com média 45 e desvio-padrão 0,5 e Y tem distribuição normal com média 20 e desvio-padrão 0,1.

- Encontre $P(40 \leq X \leq 50, 20 \leq Y \leq 25)$.
 - Encontre $P(4(X - 45)^2 + 100(Y - 20)^2 \leq 2)$.
- 32.** Xavier e Yolanda têm aulas que terminam ao meio-dia e concordaram em se encontrar todo dia depois das aulas. Eles chegam em um café separadamente. O tempo de chegada de Xavier é X e o da Yolanda é Y , onde X e Y são medidos em minutos após o meio-dia. As funções densidade individuais são

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}y & \text{se } 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(Xavier chega algumas vezes depois do meio-dia, e é mais provável que ele chegue na hora do que se atrase. Yolanda sempre chega às 12h10 e é mais provável que se atrase do que chegue pontualmente.) Depois de Yolanda chegar, ela espera até meia hora por Xavier, mas ele não espera por ela. Determine a probabilidade de eles se encontrarem.

33. Quando estudamos uma contaminação epidêmica, supomos que a probabilidade de um indivíduo infectado disseminar a doença para um indivíduo não infectado seja uma função da distância entre eles. Considere uma cidade circular com raio de 10 km na qual a população está uniformemente distribuída. Para um indivíduo

não infectado no ponto $A(x_0, y_0)$, suponha que a função probabilidade seja dada por

$$f(P) = \frac{1}{20}[20 - d(P, A)]$$

onde $d(P, A)$ denota a distância entre os pontos P e A .

- (a) Suponha que a exposição de uma pessoa à doença seja a soma das probabilidades de adquirir a doença de todos os membros da população. Suponha ainda que as pessoas infectadas estejam uniformemente distribuídas pela cidade, existindo k indivíduos contaminados por quilômetro quadrado. Determine a integral dupla que representa a exposição de uma pessoa que reside em A .
- (b) Calcule a integral para o caso em que A está no centro da cidade e para o caso em que A está na periferia da cidade. Onde seria preferível viver?

15.6 Área de Superfície

Na Seção 16.6 trabalharemos com áreas de superfícies mais gerais, denominadas superfícies parametrizadas, portanto, esta seção não precisa ser estudada se a seção posterior for estudada.

Nesta seção, aplicamos as integrais duplas ao problema de calcular a área de uma superfície. Na Seção 8.2, no Volume I, descobrimos a área de um tipo muito especial de superfície – uma superfície de revolução – pelos métodos de cálculo de uma variável única. Aqui, calculamos a área de uma superfície com equação $z = f(x, y)$, o gráfico de uma função de duas variáveis.

Seja S a superfície com a equação $z = f(x, y)$, onde f tem derivadas parciais contínuas. Para simplificar a dedução da fórmula da área de superfície, supomos que $f(x, y) \geq 0$ e o domínio D de f é um retângulo. Dividimos D em pequenos retângulos R_{ij} com área $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Se (x_i, y_j) é o canto de R_{ij} mais próximo da origem, seja $P_{ij}(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ o ponto em S diretamente acima dele (veja a Figura 1). O plano tangente a S em P_{ij} é uma aproximação a S próximo de P_{ij} . Então, a área ΔT_{ij} da parte deste plano tangente (um paralelogramo) que fica diretamente acima de R_{ij} é uma aproximação à área ΔS_{ij} da parte de S que fica diretamente acima de R_{ij} . Portanto, a soma $\sum \sum \Delta T_{ij}$ é uma aproximação à área total de S e essa aproximação parece melhorar conforme o número de retângulos aumenta. Portanto, definimos a **área da superfície** de S como

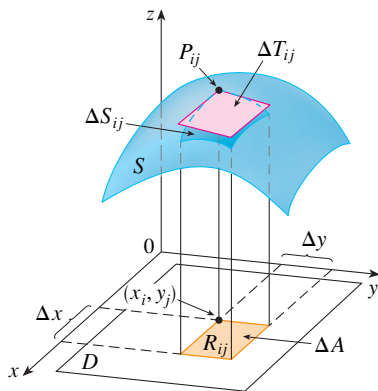


FIGURA 1

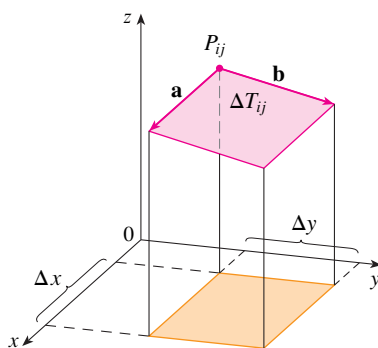


FIGURA 2

1

$$A(S) = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta T_{ij}$$

Para encontrar uma fórmula que seja mais conveniente do que a Equação 1 para fins de cálculo, sejam \mathbf{a} e \mathbf{b} os vetores que começam em P_{ij} e ficam ao longo dos lados do paralelogramo com área ΔT_{ij} . (Veja a Figura 2.) Então, $\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Lembre-se, da Seção 14.3, de que $f_x(x_i, y_i)$ e $f_y(x_i, y_i)$ são as inclinações das retas tangentes através de P_{ij} nas direções de \mathbf{a} e \mathbf{b} . Portanto,

$$\mathbf{a} = \Delta x \mathbf{i} + f_x(x_i, y_i) \Delta x \mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = \Delta y \mathbf{j} + f_y(x_i, y_i) \Delta y \mathbf{k}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & 0 & f_x(x_i, y_i) \Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(x_i, y_i) \Delta y \end{vmatrix} \\ &= -f_x(x_i, y_i) \Delta x \Delta y \mathbf{i} - f_y(x_i, y_i) \Delta x \Delta y \mathbf{j} + \Delta x \Delta y \mathbf{k} \\ &= [-f_x(x_i, y_i) \mathbf{i} - f_y(x_i, y_i) \mathbf{j} + \mathbf{k}] \Delta A \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{[f_x(x_i, y_i)]^2 + [f_y(x_i, y_i)]^2 + 1} \Delta A$$

Da Definição 1 temos, então,

$$\begin{aligned}
 A(S) &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta T_{ij} \\
 &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1} \Delta A
 \end{aligned}$$

e pela definição de uma integral dupla, obtemos a seguinte fórmula.

2 A área da superfície com equação $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, onde f_x e f_y são contínuas, é

$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} \, dA$$

Na Seção 16.6, verificaremos que essa fórmula é consistente com nossa fórmula anterior para a área de uma superfície de revolução. Se usarmos a notação alternativa para derivadas parciais, podemos reescrever a Fórmula 2 da seguinte maneira:

3

$$A(s) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA$$

Observe a semelhança entre a fórmula da área da superfície da Equação 3 e a fórmula do comprimento do arco da Seção 8.1, no Volume I:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

EXEMPLO 1 Determine a área de superfície da parte da superfície $z = x^2 + 2y$ que fica acima da região triangular T no plano xy com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

SOLUÇÃO A região T é mostrada na Figura 3 e é descrita por

$$T = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

Usando a Fórmula 2 com $f(x, y) = x^2 + 2y$, obtemos

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_T \sqrt{(2x)^2 + (2)^2 + 1} \, dA = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{4x^2 + 5} \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 x\sqrt{4x^2 + 5} \, dx = \left. \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}(4x^2 + 5)^{3/2} \right|_0^1 = \frac{1}{12}(27 - 5\sqrt{5})
 \end{aligned}$$

A Figura 4 mostra a porção da superfície cuja área acabamos de calcular.

EXEMPLO 2 Determine a área da parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

SOLUÇÃO O plano intercepta o parabolóide no círculo $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Portanto, a superfície dada fica acima do disco D com centro na origem e raio 3. (Veja a Figura 5.) Usando a Fórmula 3, temos

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} \, dA \\
 &= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \, dA
 \end{aligned}$$

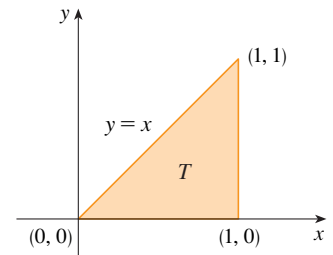


FIGURA 3

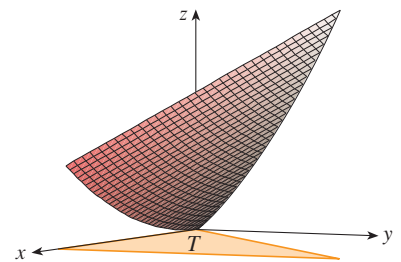


FIGURA 4

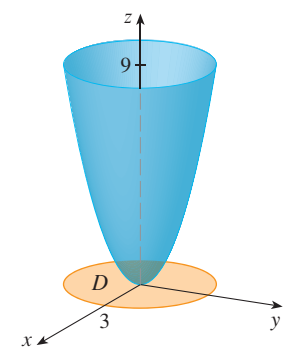


FIGURA 5

Convertendo para coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1+4r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1+4r^2} dr \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{8} (1+4r^2)^{3/2} \right) \Big|_0^3 = \frac{\pi}{6} (37\sqrt{37} - 1) \end{aligned}$$

15.6 Exercícios

1–12 Determine a área da superfície.

1. A parte do plano $z = 2 + 3x + 4y$ que está acima do retângulo $[0, 5] \times [1, 4]$
2. A parte do plano $2x + 5y + z = 10$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$
3. A parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante
4. A parte da superfície $z = 1 + 3x + 2y^2$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 1)$
5. A parte do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ que está acima do retângulo com vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 2)$ e $(4, 2)$
6. A parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do plano xy
7. A parte do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$
8. A superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$
9. A parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$
10. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está acima do plano $z = 1$
11. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ax$ e acima do plano xy
12. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro do parabolóide $z = x^2 + y^2$

13–14 Encontre a área da superfície com precisão de quatro casas decimais, expressando-a em termos de uma integral unidimensional e usando sua calculadora para estimar a integral.

13. A parte da superfície $z = e^{-x^2-y^2}$ que está acima do círculo $x^2 + y^2 \leq 4$
14. A parte da superfície $z = \cos(x^2 + y^2)$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

15. (a) Use a Regra do Ponto Médio para integrais duplas (veja a Seção 15.1) com quatro quadrados para estimar a área da superfície da porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está acima do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

(b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a área de superfície da parte (a) até a quarta casa decimal. Compare com sua resposta para a parte (a).

16. (a) Use a Regra do Ponto Médio para integrais duplas com $m = n = 2$ para estimar a área da superfície $z = xy + x^2 + y^2$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$.

(b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a área de superfície da parte (a) até a quarta casa decimal. Compare com sua resposta para a parte (a).

17. Determine a área exata da superfície $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$, $1 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 1$.

18. Determine a área exata da superfície $z = 1 + x + y + x^2$, $-2 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. Ilustre, traçando o gráfico da superfície.

19. Determine, com precisão de quatro casas decimais, a área da parte da superfície $z = 1 + x^2y^2$ que está acima do disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

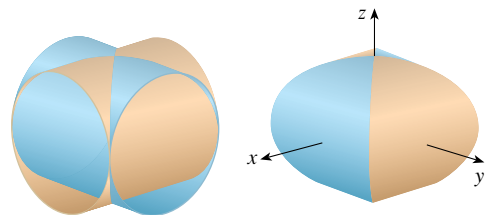
20. Determine, com precisão de quatro casas decimais, a área da parte da superfície $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$ que está acima do quadrado $|x| + |y| \leq 1$. Ilustre, traçando o gráfico dessa parte de superfície.

21. Mostre que a área da parte do plano $z = ax + by + c$ que projeta sobre uma região D no plano xy com área $A(D)$ é $\sqrt{a^2 + b^2 + 1}A(D)$.

22. Se você tentar usar a Fórmula 2 para encontrar a área da metade superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, você terá um pequeno problema, pois a integral dupla é imprópria. De fato, o integrando tem uma descontinuidade infinita em cada ponto do limite circular $x^2 + y^2 = a^2$. No entanto, a integral pode ser calculada como o limite da integral sobre o disco $x^2 + y^2 \leq t^2$ quando $t \rightarrow a^-$. Utilize este método para mostrar que a área de uma esfera de raio a é $4\pi a^2$.

23. Determine a área da parte finita do parabolóide $y = x^2 + z^2$ limitada pelo plano $y = 25$. [Sugestão: Projete a superfície sobre o plano xy .]

24. A figura mostra a superfície criada quando o cilindro $y^2 + z^2 = 1$ intercepta o cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Encontre a área desta superfície.



15.7 Integrais Triplas

Assim como definimos integrais unidimensionais para funções de uma única variável e duplas para funções de duas variáveis, vamos definir integrais triplas para funções de três variáveis. Inicialmente, trataremos o caso mais simples, quando f é definida em uma caixa retangular:

$$1 \quad B = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

O primeiro passo é dividir B em subcaixas. Fazemos isso dividindo o intervalo $[a, b]$ em l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimentos iguais Δx , dividindo $[c, d]$ em m subintervalos de comprimentos Δy , e dividindo $[r, s]$ em n subintervalos de comprimento Δz . Os planos que passam pelas extremidades desses subintervalos, paralelos aos planos coordenados, subdividem a caixa B em lmn subcaixas

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

como mostrado na Figura 1. Cada subcaixa tem volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.

Assim formamos a **soma tripla de Riemann**

$$2 \quad \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

onde o ponto de amostragem $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ está em B_{ijk} . Por analogia com a definição da integral dupla (15.1.5), definimos a integral tripla como o limite das somas triplas de Riemann em [2].

3 Definição A **integral tripla** de f na caixa B é

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

se esse limite existir.

Novamente, a integral tripla sempre existe se f for contínua. Escolhemos o ponto de amostragem como qualquer ponto de cada subcaixa, mas, se escolhermos o ponto (x_i, y_j, z_k) , obteremos uma expressão com aparência menos complicada para a integral tripla:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta V$$

Assim como para as integrais duplas, o método prático para calcular uma integral tripla consiste em expressá-la como uma integral iterada, como segue.

4 Teorema de Fubini para as Integrais Triplas Se f é contínua em uma caixa retangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, então

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

A integral iterada do lado direito do Teorema de Fubini indica que primeiro integramos em relação a x (mantendo y e z fixados), em seguida integramos em relação a y (mantendo z fixado) e, finalmente, em relação a z . Existem cinco outras ordens possíveis de integração,

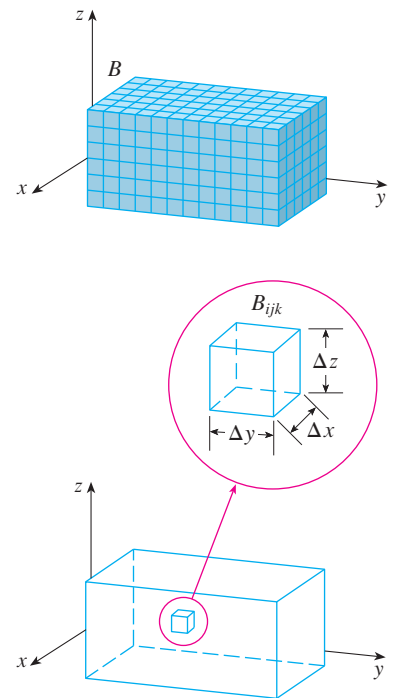


FIGURA 1

todas fornecendo o mesmo resultado. Por exemplo, se primeiro integrarmos em relação a y , então em relação a z e depois a x , teremos

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx$$

EXEMPLO 1 Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2 \, dV$, onde B é a caixa retangular dada por

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$$

SOLUÇÃO Podemos usar qualquer uma das seis possíveis ordens de integração. Se escolhermos integrar primeiro em relação a x , depois em relação a y e então em relação a z , obtemos

$$\begin{aligned} \iiint_B xyz^2 \, dV &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 \, dx \, dy \, dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2 y z^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} \, dy \, dz \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{y z^2}{2} \, dy \, dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2 z^2}{4} \right]_{y=-1}^{y=2} \, dz \\ &= \int_0^3 \frac{3z^2}{4} \, dz = \left[\frac{z^3}{4} \right]_0^3 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

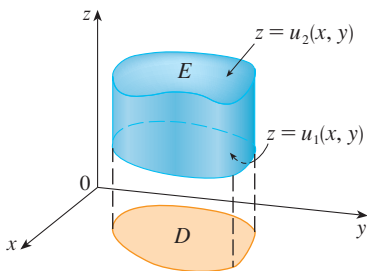


FIGURA 2
Uma região sólida do tipo 1

Agora definiremos a **integral tripla sobre uma região limitada geral E** no espaço tridimensional (um sólido) pelo mesmo método usado para as integrais duplas (15.3.2). Envolveremos E por uma caixa B do tipo dado pela Equação 1. Em seguida, definiremos uma função F de modo que ela coincida com f em E e seja 0 nos pontos de B fora de E . Por definição,

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iiint_B F(x, y, z) \, dV$$

Essa integral existe se f for contínua e se o limite de E for “razoavelmente liso”. A integral tripla tem essencialmente as mesmas propriedades da integral dupla (Propriedades 6-9 da Seção 15.3).

Vamos nos restringir às funções contínuas f e a certos tipos de regiões. Uma região sólida E é dita do **tipo I** se estiver contida entre os gráficos de duas funções contínuas de x e y , ou seja,

$$\boxed{5} \quad E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xy , como mostrado na Figura 2. Observe que o limite superior do sólido E é a superfície de equação $z = u_2(x, y)$, enquanto o limite inferior é a superfície $z = u_1(x, y)$.

Pelos mesmos argumentos que nos levaram à (15.3.3), podemos mostrar que, se E é uma região do tipo 1 dada pela Equação 5, então

$$\boxed{6} \quad \iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] \, dA$$

O significado da integral de dentro do lado direito da Equação 6 é que x e y são mantidos fixos e, assim, $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$ são vistas como constantes, enquanto $f(x, y, z)$ é integrada em relação a z .

Em particular, se a projeção D de E sobre o plano xy é uma região plana do tipo I (como na Figura 3), então

$$E = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

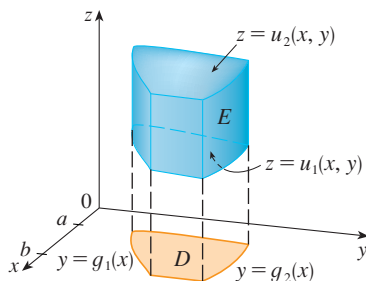


FIGURA 3
Uma região sólida do tipo 1 na qual a projeção D é uma região plana de tipo I

e a Equação 6 se torna

$$7 \quad \iiint_E f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

Se, por outro lado, D é uma região plana do tipo II (como na Figura 4), então

$$E = \{(x, y, z) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

e a Equação 6 se torna

$$8 \quad \iiint_E f(x, y, z) \, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$$

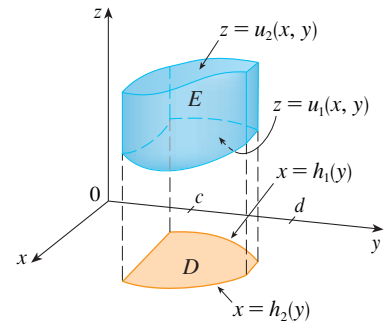


FIGURA 4
Uma região sólida de tipo 1 com uma projeção de tipo II

EXEMPLO 2 Calcule $\iiint_E z \, dV$, onde E é o tetraedro sólido limitado pelos quatro planos $x = 0, y = 0, z = 0$ e $x + y + z = 1$.

SOLUÇÃO Para escrevermos a integral tripla, é recomendável desenhar *dois* diagramas: um da região sólida E (veja a Figura 5) e outro de sua projeção D no plano xy (veja a Figura 6). A fronteira inferior do tetraedro é o plano $z = 0$ e a superior é o plano $x + y + z = 1$ (ou $z = 1 - x - y$) e então usamos $u_1(x, y) = 0$ e $u_2(x, y) = 1 - x - y$ na Fórmula 7. Observe que os planos $x + y + z = 1$ e $z = 0$ se interceptam na reta $x + y = 1$ (ou $y = 1 - x$) no plano xy . Logo, a projeção de E é a região triangular da Figura 6, e temos

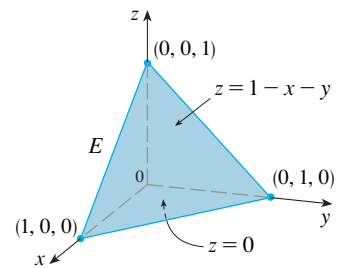


FIGURA 5

$$9 \quad E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Essa descrição de E como região do tipo 1 nos permite calcular a integral como segue:

$$\begin{aligned} \iiint_E z \, dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{6} \left[-\frac{(1-x)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

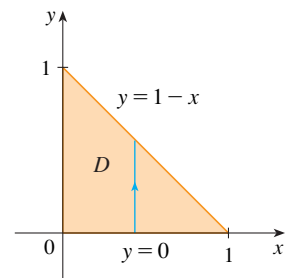


FIGURA 6

Uma região sólida E é do **tipo 2** se for da forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

onde, desta vez, D é a projeção de E sobre o plano yz (veja a Figura 7). A superfície de trás é $x = u_1(y, z)$ e a superfície da frente é $x = u_2(y, z)$. Assim, temos

$$10 \quad \iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) \, dx \right] dA$$

Finalmente, uma região do **tipo 3** é da forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xz , $y = u_1(x, z)$ é a superfície da esquerda e $y = u_2(x, z)$ é a superfície da direita (veja a Figura 8). Para esse tipo de região, temos

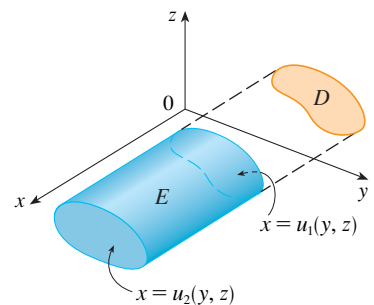


FIGURA 7
Uma região do tipo 2

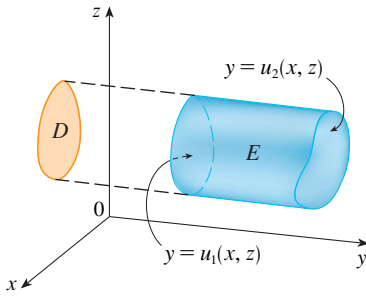


FIGURA 8

TEC Visual 15.7 Ilustra como regiões sólidas (incluindo aquela na Figura 9) projetam-se sobre planos coordenados

$$11 \quad \iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) \, dy \right] \, dA$$

Em cada uma das Equações, 10 e 11, podem existir duas possíveis expressões para a integral, dependendo de D ser uma região plana do tipo I ou II (e correspondendo às Equações 7 e 8).

EXEMPLO 3 Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} \, dV$, onde E é a região limitada pelo parabolóide $y = x^2 + z^2$ e pelo plano $y = 4$.

SOLUÇÃO O sólido E está mostrado na Figura 9. Se o olharmos como uma região do tipo 1, então precisaremos considerar sua projeção D_1 sobre o plano xy , que é a região parabólica da Figura 10. (O corte de $y = x^2 + z^2$ no plano $z = 0$ é a parábola $y = x^2$.)

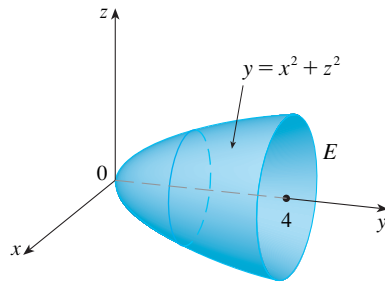


FIGURA 9
Região de integração

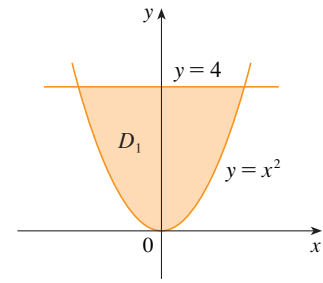


FIGURA 10
Projeção sobre o plano-xy

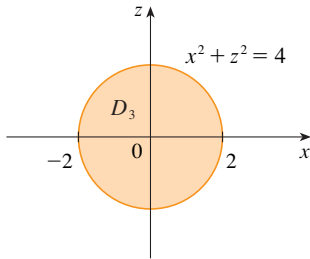


FIGURA 11
Projeção sobre o plano-xz

De $y = x^2 + z^2$ obtemos $z = \pm\sqrt{y - x^2}$, e então a superfície limite de baixo de E é $z = -\sqrt{y - x^2}$ e a superfície de cima é $z = \sqrt{y - x^2}$. Portanto, a descrição de E como região do tipo 1 é

$$E = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, -\sqrt{y - x^2} \leq z \leq \sqrt{y - x^2}\}$$

e obtemos

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} \, dV = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2} \, dz \, dy \, dx$$

Apesar de essa expressão estar correta, é extremamente difícil calculá-la. Então, em vez disso, vamos considerar E como a região do tipo 3. Como tal, sua projeção D_3 sobre o plano xz é o disco $x^2 + z^2 \leq 4$ mostrado na Figura 11.

Então, a superfície lateral esquerda de E é o parabolóide $y = x^2 + z^2$ e a superfície lateral direita é o plano $y = 4$. Assim, tomando $u_1(x, z) = x^2 + z^2$ e $u_2(x, z) = 4$ na Equação 11, temos

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} \, dV = \iint_{D_3} \left[\int_{x^2+z^2}^4 \sqrt{x^2 + z^2} \, dy \right] \, dA = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} \, dA$$

Apesar de essa integral poder ser escrita como

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} \, dz \, dx$$

fica mais simples convertê-la para coordenadas polares no plano xz : $x = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$. Isso fornece

$$\begin{aligned} \iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} \, dV &= \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2 - r^4) \, dr \\ &= 2\pi \left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^2 = \frac{128\pi}{15} \end{aligned}$$

❗ A maior dificuldade no cálculo de uma integral tripla é escrever uma expressão para a região de integração (como na Equação 9 do Exemplo 2). Lembre-se de que os limites de integração da integral de dentro contêm no máximo duas variáveis, os limites de integração da integral do meio contêm no máximo uma variável e os limites de integração de fora precisam ser constantes.

EXEMPLO 4 Exprese a integral iterada $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx$ como a integral tripla e, então, reescreva-a como uma integral iterada em uma ordem diferente, integrando primeiro em relação a x , então z , e então y .

SOLUÇÃO Podemos escrever

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx = \iiint_E f(x, y, z) dV$$

onde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq z \leq y\}$. Essa descrição de E nos permite esboçar projeções sobre os três planos coordenados, como a seguir:

sobre o plano xy : $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$
 $= \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 1\}$

sobre o plano yz : $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq y\}$

sobre o plano xz : $D_3 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$

A partir dos esboços resultantes das projeções na Figura 12, esboçamos o sólido E na Figura 13. Vemos que se trata do sólido limitado pelos planos $z = 0, x = 1, y = z$ pelo cilindro parabólico $y = x^2$ (ou $x = \sqrt{y}$).

Se integrarmos primeiro em relação a x , em seguida a z e, então, a y , usamos uma descrição alternativa de E :

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq y, \sqrt{y} \leq x \leq 1\}$$

Logo,

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y, z) dx dz dy$$

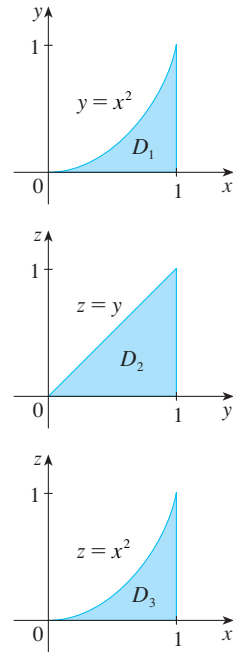


FIGURA 12
Projeções de E

Aplicações de Integrais Triplas

Lembre-se de que, se $f(x) \geq 0$, então a integral $\int_a^b f(x) dx$ representa a área abaixo da curva $y = f(x)$ de a até b , e se $f(x, y) \geq 0$, então a integral dupla $\iint_D f(x, y) dA$ representa o volume sob a superfície $z = f(x, y)$ acima de D . A interpretação correspondente para a integral tripla $\iiint_E f(x, y, z) dV$, onde $f(x, y, z) \geq 0$, não é muito útil, porque seria um “hipervolume” de um objeto de quatro dimensões e, é claro, de muito difícil visualização. (Lembre-se de que E é somente o domínio da função f ; o gráfico de f pertence ao espaço quadridimensional.) Apesar disso, a integral tripla $\iiint_E f(x, y, z) dV$ pode ser interpretada de forma diversa em diferentes situações físicas, dependendo das interpretações físicas de x, y, z e $f(x, y, z)$.

Vamos começar com o caso especial onde $f(x, y, z) = 1$ para todos os pontos em E . Nesse caso, a integral tripla representa o volume de E :

12

$$V(E) = \iiint_E dV$$

Por exemplo, você pode ver isso no caso de uma região do tipo 1 colocando $f(x, y, z) = 1$ na Fórmula 6:

$$\iiint_E 1 dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} dz \right] dA = \iint_D [u_2(x, y) - u_1(x, y)] dA$$

e, da Seção 15.3, sabemos que isso representa o volume que está entre as superfícies $z = u_1(x, y)$ e $z = u_2(x, y)$.

EXEMPLO 5 Use a integral tripla para determinar o volume do tetraedro T limitado pelos planos $x + 2y + z = 2, x = 2y, x = 0$ e $z = 0$.

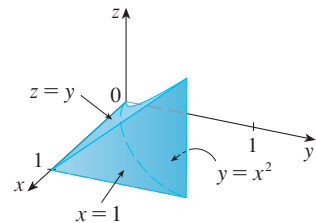


FIGURA 13
O sólido E

SOLUÇÃO O tetraedro T e sua projeção D sobre o plano xy são mostrados nas Figuras 14 e 15. O limite inferior de T é o plano $z = 0$ e o limite superior é o plano $x + 2y + z = 2$, isto é, $z = 2 - x - 2y$.

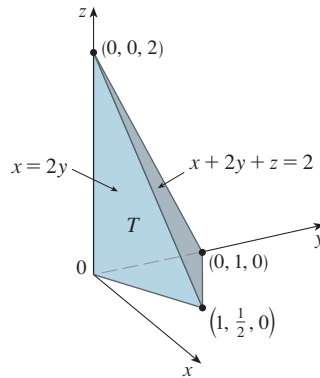


FIGURA 14

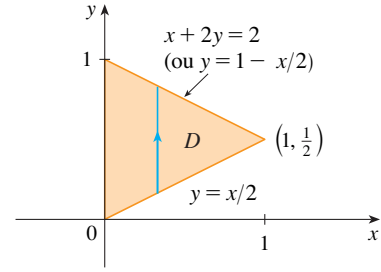


FIGURA 15

Portanto, temos

$$\begin{aligned} V(T) &= \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y) \, dy \, dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

pelo mesmo cálculo usado no Exemplo 4 da Seção 15.3.

(Observe que não é necessário usar as integrais triplas para calcular volumes. As integrais triplas simplesmente fornecem um método alternativo para descrever os cálculos.)

Todas as aplicações de integrais duplas da Seção 15.5 podem ser imediatamente estendidas para as integrais triplas. Por exemplo, se a função densidade de um objeto sólido que ocupa a região E é $\rho(x, y, z)$, em unidades de massa por unidade de volume, em qualquer ponto (x, y, z) , então sua **massa** é

$$\boxed{13} \quad m = \iiint_E \rho(x, y, z) \, dV$$

e seus **momentos** em relação aos três planos coordenados são

$$\boxed{14} \quad M_{yz} = \iiint_E x \rho(x, y, z) \, dV \quad M_{xz} = \iiint_E y \rho(x, y, z) \, dV$$

$$M_{xy} = \iiint_E z \rho(x, y, z) \, dV$$

O **centro de massa** está localizado no ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\boxed{15} \quad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Se a densidade é constante, o centro de massa do sólido é chamado **centroide** de E . Os **momentos de inércia** em relação aos três eixos coordenados são

$$\boxed{16} \quad I_x = \iiint_E (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dV \quad I_y = \iiint_E (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dV$$

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) dV$$

Como na Seção 15.5, a carga **elétrica total** sobre um objeto sólido ocupando a região E e tendo uma densidade de carga $\sigma(x, y, z)$ é

$$Q = \iiint_E \sigma(x, y, z) dV$$

Se tivermos três variáveis aleatórias X, Y e Z , sua **função densidade conjunta** é uma função das três variáveis, de forma que a probabilidade de (X, Y, Z) estar em E é

$$P((X, Y, Z) \in E) = \iiint_E f(x, y, z) dV$$

Em particular,

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d, r \leq Z \leq s) = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z) dz dy dx$$

A função densidade conjunta satisfaz

$$f(x, y, z) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dz dy dx = 1$$

EXEMPLO 6 Determine o centro de massa de um sólido com densidade constante que é limitado pelo cilindro parabólico $x = y^2$ e pelos planos $x = z, z = 0$ e $x = 1$.

SOLUÇÃO O sólido E e sua projeção sobre o plano xy são mostrados nas Figuras 16. As superfícies inferior e superior de E são os planos $z = 0$ e $z = x$, então, descrevemos E como uma região do tipo I:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x\}$$

Então, se a densidade é $\rho(x, y, z) = \rho$, a massa é

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E \rho dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x \rho dz dx dy \\ &= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x dx dy = \rho \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 (1 - y^4) dy = \rho \int_0^1 (1 - y^4) dy \\ &= \rho \left[y - \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4\rho}{5} \end{aligned}$$

Por causa da simetria de E e ρ em relação ao plano xz , podemos dizer imediatamente que $M_{xz} = 0$ e, portanto, $\bar{y} = 0$. Os outros momentos são

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_E x\rho dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x x\rho dz dx dy \\ &= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x^2 dx dy = \rho \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \frac{2\rho}{3} \int_0^1 (1 - y^6) dy = \frac{2\rho}{3} \left[y - \frac{y^7}{7} \right]_0^1 = \frac{4\rho}{7} \end{aligned}$$

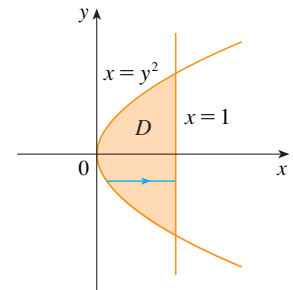
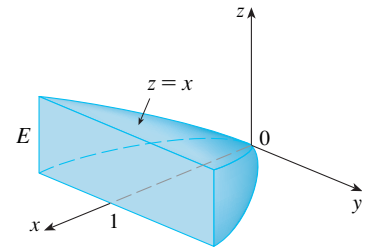


FIGURA 16

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= \iiint_E z\rho \, dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x z\rho \, dz \, dx \, dy \\
 &= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=x} dx \, dy = \frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x^2 dx \, dy \\
 &= \frac{\rho}{3} \int_0^1 (1 - y^6) dy = \frac{2\rho}{7}
 \end{aligned}$$

Logo, o centro de massa é

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m} \right) = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14} \right)$$

15.7 Exercícios

1. Calcule a integral do Exemplo 1, integrando primeiro em relação a y , depois z e então x .

2. Calcule a integral $\iiint_E (xz - y^3) \, dV$, onde

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$$

utilizando três ordens diferentes de integração.

3–8 Calcule a integral iterada.

3. $\int_0^2 \int_0^{2z} \int_0^{y-z} (2x - y) \, dx \, dy \, dz$ 4. $\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^y 2xyz \, dz \, dy \, dx$
5. $\int_1^2 \int_0^{2z} \int_0^{\ln x} xe^{-y} \, dy \, dx \, dz$ 6. $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{z}{y+1} \, dx \, dz \, dy$
7. $\int_0^{\pi/2} \int_0^y \int_0^x \cos(x+y+z) \, dz \, dx \, dy$
8. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^{xz} x^2 \sin y \, dy \, dz \, dx$

9–18 Calcule a integral tripla.

9. $\iiint_E 2x \, dV$, onde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, 0 \leq z \leq y\}$
10. $\iiint_E e^{z/y} \, dV$, onde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}$
11. $\iiint_E \frac{z}{x^2 + z^2} \, dV$, onde $E = \{(x, y, z) \mid 1 \leq y \leq 4, y \leq z \leq 4, 0 \leq x \leq z\}$
12. $\iiint_E \sin y \, dV$, onde E está abaixo do plano $z = x$ e acima da região triangular com vértices $(0, 0, 0)$, $(\pi, 0, 0)$ e $(0, \pi, 0)$
13. $\iiint_E 6xy \, dV$, onde E está abaixo do plano $z = 1 + x + y$ e acima da região do plano xy limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$
14. $\iiint_E xy \, dV$, onde E é limitado pelos cilindros parabólicos $y = x^2$ e $x = y^2$ e pelos planos $z = 0$ e $z = x + y$
15. $\iiint_T x^2 \, dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$
16. $\iiint_T xyz \, dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$
17. $\iiint_E x \, dV$, onde E é limitado pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$
18. $\iiint_E z \, dV$, onde E é limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 3x$ e $z = 0$ no primeiro octante

19–22 Use a integral tripla para determinar o volume do sólido dado.

19. O tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $2x + y + z = 4$
20. O sólido limitado pelos parabolóides $y = x^2 + z^2$ e $y = 8 - x^2 - z^2$
21. O sólido limitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$ e $y + z = 1$
22. O sólido limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $y = -1$ e $y + z = 4$

23. (a) Expresse o volume da cunha no primeiro octante que é cortada do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ pelos planos $y = x$ e $x = 1$ como uma integral tripla.

(b) Utilize a Tabela de Integrais (nas *Páginas de Referência 6-11*) ou um sistema de computação algébrica para determinar o valor exato da integral tripla da parte (a).

24. (a) Na **Regra do Ponto Médio para as Integrais Triplas**, usamos a soma tripla de Riemann para aproximar a integral tripla em uma caixa B , onde $f(x, y, z)$ é calculada no centro $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)$ da caixa B_{ijk} . Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV$, onde B é o cubo definido por $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$, $0 \leq z \leq 4$. Divida B em oito cubos de igual tamanho.

(b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a integral da parte (a) com precisão para o número inteiro mais próximo. Compare com sua resposta para a parte (a).

25–26 Use a Regra do Ponto Médio para as integrais triplas (Exercício 24) para estimar o valor da integral. Divida B em oito subcaixas de igual tamanho.

25. $\iiint_B \cos(xyz) \, dV$, onde

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

26. $\iiint_B \sqrt{x} e^{xyz} \, dV$, onde

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$$

27–28 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

$$27. \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy \, dz \, dx \qquad 28. \int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx \, dz \, dy$$

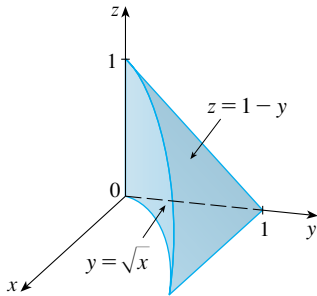
29–32 Expresse a integral $\iiint_E f(x, y, z) dV$ como uma integral iterada de seis modos diferentes, onde E é o sólido limitado pelas superfícies dadas.

- 29. $y = 4 - x^2 - 4z^2, y = 0$
- 30. $y^2 + z^2 = 9, x = -2, x = 2$
- 31. $y = x^2, z = 0, y + 2z = 4$
- 32. $x = 2, y = 2, z = 0, x + y - 2z = 2$

33. A figura mostra a região de integração da integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz dy dx$$

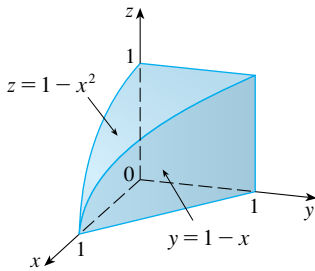
Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente nas cinco outras ordens.



34. A figura mostra a região de integração da integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy dz dx$$

Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente nas cinco outras ordens.



35–36 Escreva cinco outras integrais iteradas que sejam iguais à integral iterada dada.

- 35. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x, y, z) dz dx dy$
- 36. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^z f(x, y, z) dz dy dx$

37–38 Calcule a integral tripla usando apenas interpretação geométrica e simetria.

- 37. $\iiint_C (4 + 5x^2yz^2) dV$, onde C é a região cilíndrica $x^2 + y^2 \leq 4, -2 \leq z \leq 2$
- 38. $\iiint_B (z^2 + \text{sen } y + 3) dV$, onde B é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

39–42 Determine a massa e o centro de massa do sólido dado E com função densidade dada ρ .

- 39. E é o sólido do Exercício 13; $\rho(x, y, z) = 2$
- 40. E é limitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e os planos

$$x + z = 1, x = 0 \text{ e } z = 0; \quad \rho(x, y, z) = 4$$

- 41. E é o cubo dado por $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- 42. E é o tetraedro limitado pelos planos $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$; $\rho(x, y, z) = y$

43–46 Suponha que o sólido tenha densidade constante k .

- 43. Encontre os momentos de inércia para um cubo com comprimento de lado L se um vértice está localizado na origem e três arestas estão nos eixos coordenados.
- 44. Encontre os momentos de inércia de um tijolo retangular com dimensões a, b e c e massa M se o centro do tijolo está localizado na origem e as arestas são paralelas aos eixos coordenados.
- 45. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z do cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h$.
- 46. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z do cone sólido $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h$.

47–48 Escreva, mas não calcule, as expressões integrais para (a) a massa, (b) o centro de massa e (c) o momento de inércia em relação ao eixo z .

- 47. O sólido do Exercício 21; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 48. O hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

49. Seja E o sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z, x = 0$ e $z = 0$ com função densidade $\rho(x, y, z) = 1 + x + y + z$. Use um sistema de computação algébrica para determinar os valores exatos das seguintes quantidades para E .

SCA

- (a) A massa
- (b) O centro de massa
- (c) O momento de inércia em relação ao eixo z

50. Se E é o sólido do Exercício 18 com função densidade $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, determine as seguintes quantidades, com precisão de três casas decimais.

SCA

- (a) A massa
- (b) O centro de massa
- (c) O momento de inércia em relação ao eixo z

51. A função densidade conjunta das variáveis aleatórias X, Y e Z é $f(x, y, z) = Cxyz$ se $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2$ e $f(x, y, z) = 0$, caso contrário.

- (a) Determine o valor da constante C .
- (b) Determine $P(X \leq 1, Y \leq 1, Z \leq 1)$.
- (c) Determine $P(X + Y + Z \leq 1)$.

52. Suponha que X, Y e Z sejam variáveis aleatórias com função densidade conjunta $f(x, y, z) = Ce^{-(0,5x+0,2y+0,1z)}$ se $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ e $f(x, y, z) = 0$, caso contrário.

- (a) Determine o valor da constante C .
- (b) Determine $P(X \leq 1, Y \leq 1)$.
- (c) Determine $P(X \leq 1, Y \leq 1, Z \leq 1)$.

53–54 O valor médio de uma função $f(x, y, z)$ em uma região sólida E é definido como

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x, y, z) dV$$

onde $V(E)$ é o volume de E . Por exemplo, se ρ é a função densidade, então ρ_{med} é a densidade média de E .

53. Determine o valor médio da função $f(x, y, z) = xyz$ no cubo com lados de comprimento L que está no primeiro octante, com um vértice na origem e arestas paralelas aos eixos coordenados.
54. Encontre o valor médio da função $f(x, y, z) = x^2z + y^2z$ na região limitada pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 0$.

SCA

55. (a) Determine a região E para a qual a integral tripla

$$\iiint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2) dV$$

é máxima.

- (b) Use um sistema de computação algébrica para calcular o valor máximo exato da integral tripla na parte (a)

PROJETO DE DESCOBERTA VOLUMES DE HIPERESFERAS

Neste projeto, determinaremos as fórmulas para o volume limitado por uma hiperesfera em um espaço n -dimensional.

1. Utilize uma integral dupla e substituições trigonométricas, juntamente com a Fórmula 64 da Tabela de Integrais, para determinar a área do círculo de raio r .
2. Use uma integral tripla e substituições trigonométricas para determinar o volume da esfera de raio r .
3. Utilize uma integral quádrupla para determinar o hipervolume limitado pela hiperesfera $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$ em \mathbb{R}^4 . (Use somente substituição trigonométrica e fórmulas de redução para $\int \operatorname{sen}^n x dx$ ou $\int \operatorname{cos}^n x dx$.)
4. Use uma integral n -upla para determinar o volume limitado por uma hiperesfera de raio r no espaço n -dimensional \mathbb{R}^n . [Sugestão: As fórmulas são diferentes para n par e n ímpar.]

15.8 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas

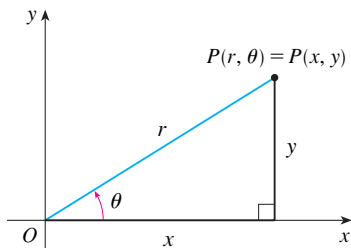


FIGURA 1

Em geometria plana, o sistema de coordenadas polares é usado para dar uma descrição conveniente de certas curvas e regiões. (Veja a Seção 10.3.) A Figura 1 nos permite relembrar a ligação entre coordenadas polares e cartesianas. Se o ponto P tiver coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ) , então, a partir da figura,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & y &= r \operatorname{sen} \theta \\ r^2 &= x^2 + y^2 & \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Em três dimensões, há um sistema de coordenadas, chamado *coordenadas cilíndricas*, que é análogo às coordenadas polares e dá descrições convenientes de algumas superfícies e sólidos que ocorrem usualmente. Como veremos, algumas integrais triplas são muito mais fáceis de calcular em coordenadas cilíndricas.

Coordenadas Cilíndricas

No **sistema de coordenadas cilíndricas**, um ponto P no espaço tridimensional é representado pela tripla ordenada (r, θ, z) , onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy e z é a distância orientada do plano xy a P . (Veja a Figura 2.)

Para convertermos de coordenadas cilíndricas para retangulares, usamos as equações

$$\boxed{1} \quad x = r \cos \theta \quad y = r \operatorname{sen} \theta \quad z = z$$

enquanto que para converter de coordenadas retangulares para cilíndricas, usamos

$$\boxed{2} \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad z = z$$

EXEMPLO 1

(a) Marque o ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ e encontre suas coordenadas retangulares.

(b) Encontre as coordenadas cilíndricas do ponto com coordenadas retangulares $(3, -3, -7)$.

SOLUÇÃO

(a) O ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ está marcado na Figura 3. Das Equações 1, suas coordenadas retangulares são

$$x = 2 \cos \frac{2\pi}{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) = -1$$

$$y = 2 \sin \frac{2\pi}{3} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3}$$

$$z = 1$$

Logo, o ponto é $(-1, \sqrt{3}, 1)$ em coordenadas retangulares.

(b) Das Equações 2 temos

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-3}{3} = -1 \quad \text{logo} \quad \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$

$$z = -7$$

Portanto, um conjunto de coordenadas cilíndricas é $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$. Outro é $(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7)$. Como no caso das coordenadas polares, existem infinitas escolhas.

Coordenadas cilíndricas são úteis em problemas que envolvem simetria em torno de um eixo e o eixo z é escolhido de modo a coincidir com o eixo de simetria. Por exemplo, o eixo do cilindro circular com equação cartesiana $x^2 + y^2 = c^2$ é o eixo z . Em coordenadas cilíndricas, este cilindro tem a equação muito simples $r = c$. (Veja a Figura 4.) Esta é a razão para o nome coordenadas “cilíndricas”.

EXEMPLO 2 Descreva a superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é $z = r$.

SOLUÇÃO A equação diz que o valor z , ou altura, de cada ponto da superfície é o mesmo que r , a distância do ponto ao eixo z . Como θ não aparece, ele pode variar. Assim, qualquer corte horizontal no plano $z = k$ ($k > 0$) é um círculo de raio k . Esses cortes sugerem que a superfície é um cone. Essa previsão pode ser confirmada convertendo a equação para coordenadas retangulares. Da primeira equação em [2], temos

$$z^2 = r^2 = x^2 + y^2$$

Reconhecemos a equação $z^2 = x^2 + y^2$ (pela comparação com a Tabela 1 na Seção 12.6) como o cone circular cujo eixo é o eixo z . (Veja a Figura 5.)

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas

Suponha que E seja uma região do tipo 1, cuja projeção D no plano xy tenha uma representação conveniente em coordenadas polares (veja a Figura 6). Em particular, suponha que f seja contínua e

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

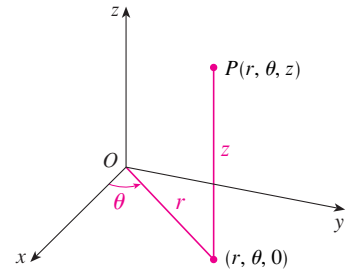


FIGURA 2

As coordenadas cilíndricas de um ponto P

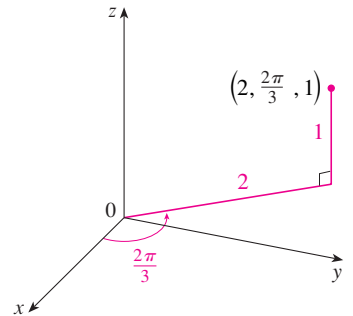


FIGURA 3

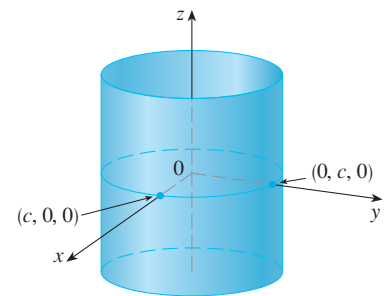


FIGURA 4

$r = c$, um cilindro

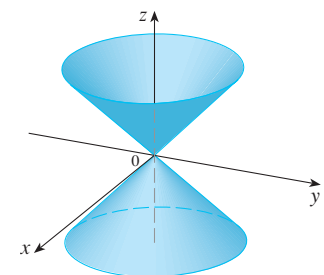


FIGURA 5

$z = r$, um cone

onde D é dado em coordenadas polares por

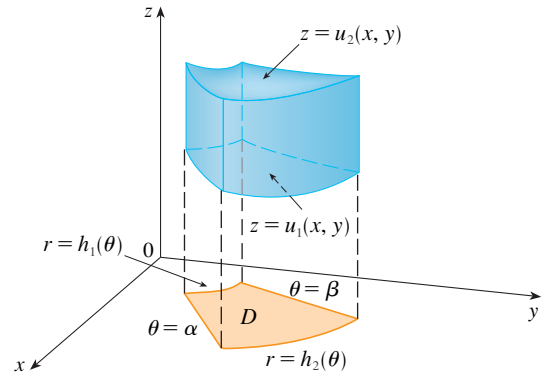


FIGURA 6

Sabemos da Equação 15.7.6 que

$$\boxed{3} \quad \iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dA$$

Mas também sabemos como calcular integrais duplas em coordenadas polares. De fato, combinando a Equação 3 com a Equação 15.4.3, obtemos

$$\boxed{4} \quad \iiint_E f(x, y, z) \, dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dz \, dr \, d\theta$$

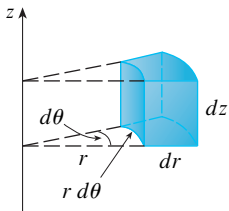


FIGURA 7
Elemento de volume em coordenadas cilíndricas:
 $dV = r \, dz \, dr \, d\theta$

A Fórmula 4 é a **fórmula para a integração tripla em coordenadas cilíndricas**. Ela nos diz que convertemos uma integral tripla em coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas escrevendo $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e deixando z como está, utilizando os limites apropriados de integração para z , r e θ , e trocando dV por $r \, dz \, dr \, d\theta$. (A Figura 7 mostra como lembrar disto.) É recomendável a utilização dessa fórmula quando E for uma região sólida cuja descrição é mais simples em coordenadas cilíndricas e, especialmente, quando a função $f(x, y, z)$ envolver a expressão $x^2 + y^2$.

EXEMPLO 3 Um sólido E está contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ e acima do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$. (Veja a Figura 8.) A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro. Determine a massa de E .

SOLUÇÃO Em coordenadas cilíndricas, o cilindro é $r = 1$ e o parabolóide é $z = 1 - r^2$ e podemos escrever

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 1 - r^2 \leq z \leq 4\}$$

Como a densidade em (x, y, z) é proporcional à distância do eixo z , a função densidade é

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr$$

onde K é a constante de proporcionalidade. Portanto, da Fórmula 15.7.13, a massa de E é

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2} \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 (Kr) r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Kr^2 [4 - (1 - r^2)] \, dr \, d\theta \\ &= K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4) \, dr \end{aligned}$$

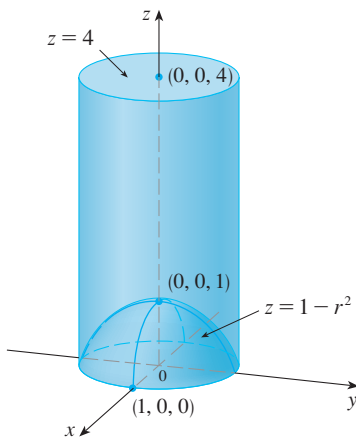


FIGURA 8

$$= 2\pi K \left[r^3 + \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5}$$

EXEMPLO 4 Calcule $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx$.

SOLUÇÃO Essa integral iterada é uma integral tripla sobre a região sólida

$$E = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\}$$

e a projeção de E sobre o plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$. A superfície inferior de E é o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e a superfície superior é o plano $z = 2$. (Veja a Figura 9.) Essa região tem uma descrição muito mais simples em coordenadas cilíndricas:

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 2\}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx &= \iiint_E (x^2 + y^2) dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 r^2 r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3(2-r) dr \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{5}r^5 \right]_0^2 = \frac{16}{5}\pi \end{aligned}$$

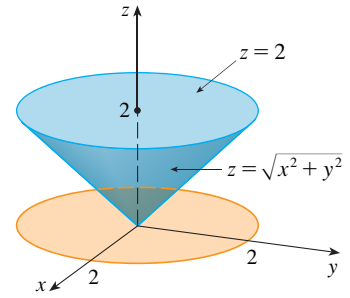


FIGURA 9

15.8 Exercícios

1–2 Marque o ponto cujas coordenadas cilíndricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.

1. (a) $(4, \pi/3, -2)$ (b) $(2, -\pi/2, 1)$
2. (a) $(\sqrt{2}, 3\pi/4, 2)$ (b) $(1, 1, 1)$

3–4 Mude de coordenadas retangulares para cilíndricas.

3. (a) $(-1, 1, 1)$ (b) $(-2, 2\sqrt{3}, 3)$
4. (a) $(2\sqrt{3}, 2, -1)$ (b) $(4, -3, 2)$

5–6 Descreva com palavras a superfície cuja equação é dada.

5. $\theta = \pi/4$
6. $r = 5$

7–8 Identifique a superfície cuja equação é dada.

7. $z = 4 - r^2$
8. $2r^2 + z^2 = 1$

9–10 Escreva as equações em coordenadas cilíndricas.

9. (a) $x^2 - x + y^2 + z^2 = 1$ (b) $z = x^2 - y^2$
10. (a) $3x + 2y + z = 6$ (b) $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

11–12 Esboce o sólido descrito pelas desigualdades dadas.

11. $0 \leq r \leq 2, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq z \leq 1$
12. $0 \leq \theta \leq \pi/2, r \leq z \leq 2$

13. Uma casca cilíndrica tem 20 cm de comprimento, com raio interno 6 cm e raio externo 7 cm. Escreva desigualdades que descrevam a casca em um sistema de coordenadas adequado. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas em relação à casca.

14. Use uma ferramenta gráfica para desenhar o sólido limitado pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 5 - x^2 - y^2$.

15–16 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral e calcule-a.

$$15. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^2 r dz dr d\theta \qquad 16. \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^r r dz d\theta dr$$

17–28 Utilize coordenadas cilíndricas.

17. Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} dV$, onde E é a região que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$.
18. Calcule $\iiint_E z dV$, onde E é limitado pelo paraboloides $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$.
19. Calcule $\iiint_E (x + y + z) dV$, onde E é o sólido do primeiro octante que está abaixo do paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$.
20. Calcule $\iiint_E x dV$, onde E é limitado pelos planos $z = 0$ e $z = x + y + 5$ e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.
21. Calcule $\iiint_E x^2 dV$, onde E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z = 4x^2 + 4y^2$.

22. Determine o volume do sólido que está dentro tanto do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ como da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
23. Determine o volume do sólido que é limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
24. Determine o volume do sólido que está entre o parabolóide $z = x^2 + y^2$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
25. (a) Encontre o volume da região E limitada pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.
 (b) Encontre o centroide do E (centro de massa no caso em que a densidade é constante).
26. (a) Determine o volume do sólido que o cilindro $r = a \cos \theta$ corta da esfera de raio a centrada na origem.
 (b) Ilustre o sólido da parte (a) desenhando a esfera e o cilindro na mesma tela.
27. Determine a massa e o centro de massa do sólido S limitado pelo parabolóide $z = 4x^2 + 4y^2$ e pelo plano $z = a$ ($a > 0$), se S tem densidade constante K .
28. Determine a massa da bola B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ se a densidade em qualquer ponto for proporcional à sua distância do eixo z .



29-30 Calcule a integral, transformando para coordenadas cilíndricas.

29.
$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xz \, dz \, dx \, dy$$
30.
$$\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx$$

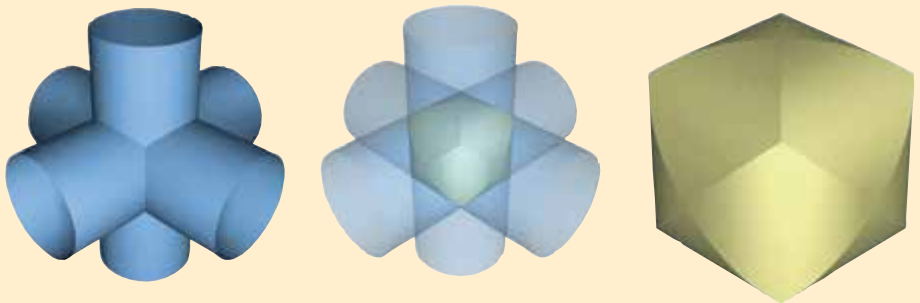
31. Quando estudam a formação de cordilheiras, os geólogos estimam a quantidade de trabalho necessária para erguer uma montanha a partir do nível do mar. Considere uma montanha que tenha essencialmente o formato de um cone circular reto. Suponha que a densidade do material na vizinhança de um ponto P seja $g(P)$ e a altura seja $h(P)$.
- (a) Determine a integral definida que representa o trabalho total exercido para formar a montanha.
- (b) Assuma que o monte Fuji no Japão tenha o formato de um cone circular reto com raio de 19 000 m, altura de 3 800 m e densidade constante de 3 200 kg/m³. Quanto trabalho foi feito para formar o monte Fuji se a terra estivesse inicialmente ao nível do mar?



S.R. Lee Photo Traveller/Shutterstock

PROJETO DE LABORATÓRIO A INTERSECÇÃO DE TRÊS CILINDROS

A figura mostra o sólido limitado por três cilindros circulares de mesmo diâmetro que se interceptam em ângulos retos. Neste projeto, vamos calcular seu volume e determinar como sua forma varia quando os cilindros têm diâmetros diferentes.



- Esboce cuidadosamente o sólido limitado pelos três cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$. Indique as posições dos eixos coordenados e rotule as faces com as equações dos cilindros correspondentes.
- Determine o volume do sólido do Problema 1.
- Utilize um sistema de computação algébrica para desenhar as arestas do sólido.
- O que aconteceria ao sólido do Problema 1 se o raio do primeiro cilindro fosse diferente de 1? Ilustre com um desenho à mão livre ou com um gráfico no computador.
- Se o primeiro cilindro for $x^2 + y^2 = a^2$, onde $a < 1$, escreva, mas não calcule, uma integral dupla que forneça o volume do sólido. E se $a > 1$?

SCA

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

15.9 Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

Outro sistema de coordenadas tridimensionais útil é o *sistema de coordenadas esféricas*. Ele simplifica o cálculo de integrais triplas em regiões limitadas por esferas ou cones.

Coordenadas Esféricas

As **coordenadas esféricas** (ρ, θ, ϕ) de um ponto P no espaço são mostradas na Figura 1, onde $\rho = |OP|$ é a distância da origem a P , θ é o mesmo ângulo que nas coordenadas cilíndricas e ϕ é o ângulo entre o eixo z positivo e o segmento de reta OP . Observe que

$$\rho \geq 0 \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

O sistema de coordenadas esféricas é especialmente útil em problemas nos quais exista simetria em torno de um ponto e a origem esteja colocada neste ponto. Por exemplo, a esfera com centro na origem e raio c tem a equação simples $\rho = c$ (veja a Figura 2) – essa é a razão do nome “coordenadas esféricas”. O gráfico da equação $\theta = c$ é um semiplano vertical (veja a Figura 3) e a equação $\phi = c$ representa um semicone com o eixo z como seu eixo (veja a Figura 4).

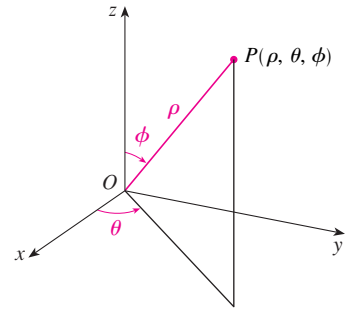


FIGURA 1 As coordenadas esféricas de um ponto

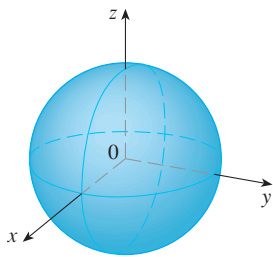


FIGURA 2 $\rho = c$, uma esfera

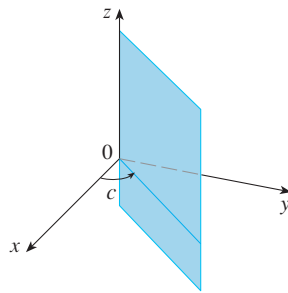
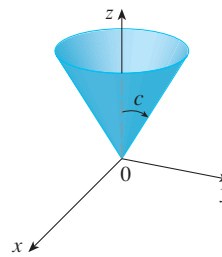
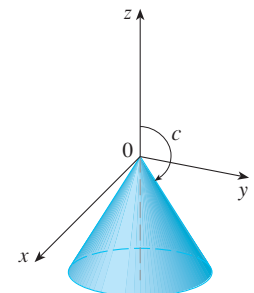


FIGURA 3 $\theta = c$, um semiplano



$$0 < c < \pi/2$$

FIGURA 4 $\phi = c$, um cone



$$\pi/2 < c < \pi$$

A relação entre coordenadas esféricas e retangulares pode ser vista na Figura 5. Dos triângulos OPQ e OPP' , temos

$$z = \rho \cos \phi \quad r = \rho \sin \phi$$

Mas $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, de modo que para converter de coordenadas esféricas para retangulares, usamos as equações

$$\boxed{1} \quad x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

Além disso, a fórmula da distância mostra que

$$\boxed{2} \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Usamos essa equação para converter de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas.

EXEMPLO 1 O ponto $(2, \pi/4, \pi/3)$ é dado em coordenadas esféricas. Marque o ponto e encontre suas coordenadas retangulares.

SOLUÇÃO Marcamos o ponto na Figura 6. Das Equações 1, temos

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta = 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

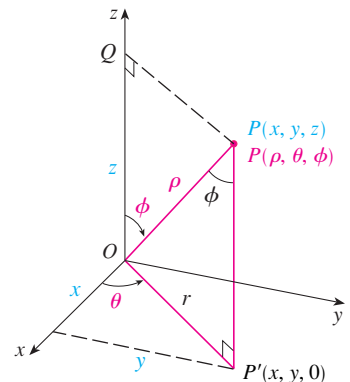


FIGURA 5

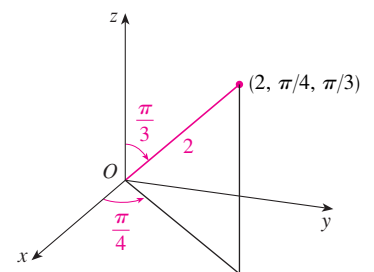


FIGURA 6

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho \cos \phi = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1$$

Logo, o ponto $(2, \pi/4, \pi/3)$ é $(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1)$ em coordenadas retangulares.

ATENÇÃO Não existe uma convenção universal na notação de coordenadas esféricas. A maioria dos livros de física troca os significados de θ e ϕ e usa r no lugar de ρ .

EXEMPLO 2 O ponto $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ está dado em coordenadas retangulares. Encontre coordenadas esféricas para este ponto.

SOLUÇÃO Da Equação 2, temos

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0 + 12 + 4} = 4$$

e, assim, as Equações 1 fornecem

$$\cos \phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho \operatorname{sen} \phi} = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

TEC Em *Module 15.9* você pode investigar famílias de superfícies em coordenadas cilíndricas e esféricas.

(Observe que $\theta \neq 3\pi/2$ porque $y = 2\sqrt{3} > 0$.) Portanto, as coordenadas esféricas do ponto dado são $(4, \pi/2, 2\pi/3)$.

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas

Neste sistema de coordenadas, o correspondente à caixa retangular é uma **cunha esférica**

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

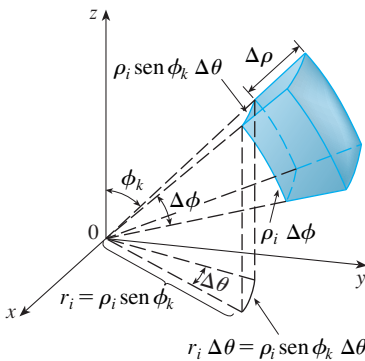


FIGURA 7

onde $a \geq 0$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$ e $d - c \leq \pi$. Apesar de termos definido as integrais triplas dividindo sólidos em pequenas caixas, podemos mostrar que, dividindo o sólido em pequenas cunhas esféricas, obtemos sempre o mesmo resultado. Assim, dividiremos E em pequenas cunhas esféricas E_{ijk} por meio de esferas igualmente espaçadas $\rho = \rho_i$, semiplanos $\theta = \theta_j$ e semicones $\phi = \phi_k$. A Figura 7 mostra que E_{ijk} é aproximadamente uma caixa retangular com dimensões $\Delta\rho$, $\rho_i \Delta\phi$ (arco de circunferência de raio ρ_i , e ângulo $\Delta\phi$) e $\rho_i \operatorname{sen} \phi_k \Delta\theta$ (arco de circunferência de raio $\rho_i \operatorname{sen} \phi_k$, e ângulo $\Delta\theta$). Logo, uma aproximação do volume de E_{ijk} é dada por

$$\Delta V_{ijk} \approx (\Delta\rho)(\rho_i \Delta\phi)(\rho_i \operatorname{sen} \phi_k \Delta\theta) = \rho_i^2 \operatorname{sen} \phi_k \Delta\rho \Delta\theta \Delta\phi$$

De fato, pode ser mostrado, com a ajuda do Teorema do Valor Médio (Exercício 47), que o valor exato do volume de E_{ijk} é dado por

$$\Delta V_{ijk} = \tilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen} \tilde{\phi}_k \Delta\rho \Delta\theta \Delta\phi$$

onde $(\tilde{\rho}_i, \tilde{\theta}_j, \tilde{\phi}_k)$ é algum ponto em E_{ijk} . Sejam $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ as coordenadas retangulares desse ponto. Então

$$\begin{aligned} \iiint_E f(x, y, z) dV &= \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V_{ijk} \\ &= \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\tilde{\rho}_i \operatorname{sen} \tilde{\phi}_k \cos \tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \operatorname{sen} \tilde{\phi}_k \operatorname{sen} \tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \cos \tilde{\phi}_k) \tilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen} \tilde{\phi}_k \Delta\rho \Delta\theta \Delta\phi \end{aligned}$$

Mas essa é uma soma de Riemann para a função

$$F(\rho, \theta, \phi) = f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

Conseqüentemente, chegamos à seguinte **fórmula para a integração tripla em coordenadas esféricas**.

$$\begin{aligned}
 \text{3} \quad & \iiint_E f(x, y, z) \, dV \\
 &= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \cos \phi \sin \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi
 \end{aligned}$$

onde E é uma cunha esférica dada por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

A Fórmula 3 nos diz que, para converter uma integral tripla de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas, escrevemos

$$x = \rho \cos \phi \sin \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

utilizando os limites de integração apropriados e substituindo dV por $\rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$. Isso é ilustrado na Figura 8.

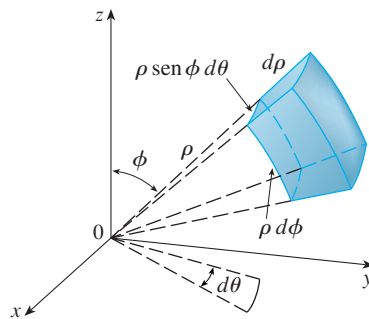


FIGURA 8
Elemento de volume em coordenadas esféricas: $dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

Essa fórmula pode ser estendida para incluir regiões esféricas mais gerais, como

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d, g_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq g_2(\theta, \phi)\}$$

Nesse caso, a fórmula é a mesma que [3], exceto que os limites de integração para ρ são $g_1(\theta, \phi)$ e $g_2(\theta, \phi)$.

Em geral, as coordenadas esféricas são utilizadas nas integrais triplas quando superfícies como cones e esferas formam o limite da região de integração.

EXEMPLO 3 Calcule $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV$, onde B é a bola unitária:

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

SOLUÇÃO Como o limite de B é uma esfera, utilizaremos coordenadas esféricas:

$$B = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

Além disso, as coordenadas esféricas são convenientes, pois

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Portanto, [3] fornece

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\pi \sen \phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} \, d\rho \\
 &= [-\cos \phi]_0^\pi (2\pi) \left[\frac{1}{3} e^{\rho^3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \pi (e - 1)
 \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO Seria extremamente complicado calcular a integral do Exemplo 3 sem coordenadas esféricas. Com coordenadas retangulares, a integral iterada seria

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dz \, dy \, dx$$

EXEMPLO 4 Utilize coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido que fica acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. (Veja a Figura 9.)

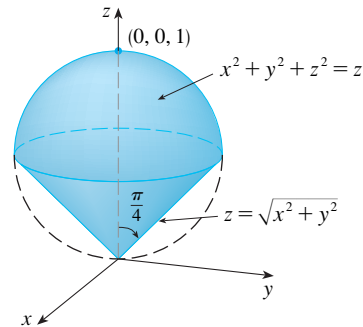


FIGURA 9

SOLUÇÃO Observe que a esfera passa pela origem e tem centro em $(0, 0, \frac{1}{2})$. Escrevemos a equação da esfera em coordenadas esféricas como

$$\rho^2 = \rho \cos \phi \quad \text{ou} \quad \rho = \cos \phi$$

A equação do cone pode ser escrita como

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \sen^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sen^2 \phi \sen^2 \theta} = \rho \sen \phi$$

Isto resulta em $\sen \phi = \cos \phi$, ou $\phi = \pi/4$. Portanto, a descrição do sólido E em coordenadas esféricas é

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/4, 0 \leq \rho \leq \cos \phi\}$$

A Figura 11 mostra como E é apagado se integramos primeiro em relação a ρ , depois em relação a ϕ , e então em relação a θ . O volume de E é

$$\begin{aligned}
 V(E) &= \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sen \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sen \phi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=\cos \phi} d\phi \\
 &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \sen \phi \cos^3 \phi \, d\phi = \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{\cos^4 \phi}{4} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}
 \end{aligned}$$

A Figura 10 mostra uma visão (desta vez, utilizando o MAPLE) do sólido do Exemplo 4.

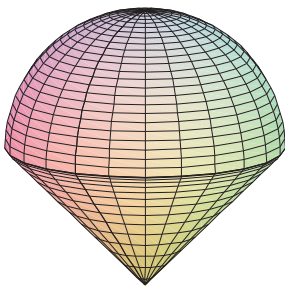


FIGURA 10

TEC Visual 15.9 mostra uma animação da Figura 11.

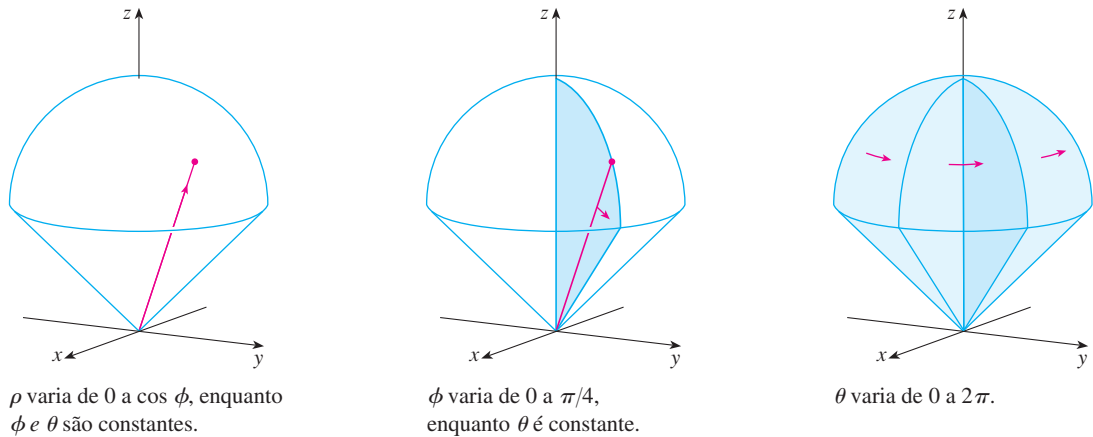


FIGURA 11

15.9 Exercícios

1–2 Marque o ponto cujas coordenadas esféricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.

1. (a) $(6, \pi/3, \pi/6)$ (b) $(3, \pi/2, 3\pi/4)$
2. (a) $(2, \pi/2, \pi/2)$ (b) $(4, -\pi/4, \pi/3)$

3–4 Mude de coordenadas retangulares para esféricas.

3. (a) $(0, -2, 0)$ (b) $(-1, 1, -\sqrt{2})$
4. (a) $(1, 0, \sqrt{3})$ (b) $(\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3})$

5–6 Descreva com palavras a superfície cuja equação é dada.

5. $\phi = \pi/3$ 6. $\rho = 3$

7–8 Identifique a superfície cuja equação é dada.

7. $\rho = \sin\theta \sin\phi$
8. $\rho^2(\sin^2\phi \sin^2\theta + \cos^2\phi) = 9$

9–10 Escreva a equação em coordenadas esféricas.

9. (a) $z^2 = x^2 + y^2$ (b) $x^2 + z^2 = 9$
10. (a) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$ (b) $x + 2y + 3z = 1$

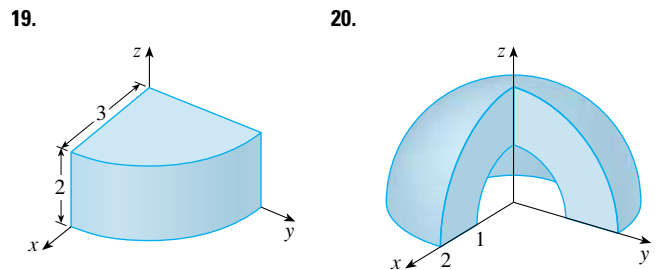
11–14 Esboce o sólido descrito pelas desigualdades dadas.

11. $2 \leq \rho \leq 4, 0 \leq \phi \leq \pi/3, 0 \leq \theta \leq \pi$
12. $1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq \pi/2, \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$
13. $\rho \leq 1, 3\pi/4 \leq \phi \leq \pi$
14. $\rho \leq 2, \rho \leq \operatorname{cosec}\phi$
15. Um sólido está cima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. Escreva uma descrição do sólido em termos de desigualdades envolvendo coordenadas esféricas.
16. (a) Determine desigualdades que descrevem uma bola oca com diâmetro de 30 cm e espessura de 0,5 cm. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas.
(b) Suponha que a bola seja cortada pela metade. Escreva desigualdades que descrevam uma das metades.

17–18 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral e calcule-a.

17. $\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$
18. $\int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

19–20 Escreva a integral tripla de uma função contínua arbitrária $f(x, y, z)$ em coordenadas cilíndricas ou esféricas sobre o sólido mostrado.



21–34 Utilize coordenadas esféricas.

21. Calcule $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, dV$, onde B é a bola com centro na origem e raio 5.
22. Calcule $\iiint_H (9 - x^2 - y^2) \, dV$, onde H é o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0$.
23. Calcule $\iiint_E (x^2 + y^2) \, dV$, onde E está entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
24. Calcule $\iiint_E y^2 \, dV$, onde E é o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0$.
25. Calcule $\iiint_E x e^{x^2+y^2+z^2} \, dV$, onde E é a porção da bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ que fica no primeiro octante.
26. Calcule $\iiint_E xyz \, dV$, onde E fica entre as esferas $\rho = 2$ e $\rho = 4$ e acima do cone $\phi = \pi/3$.
27. Encontre o volume da parte da bola $\rho \leq a$ a que está entre os cones $\phi = \pi/6$ e $\phi = \pi/3$.
28. Encontre a distância média de um ponto em uma bola de raio a a seu centro.

29. (a) Determine o volume do sólido que está acima do cone $\phi = \pi/3$ e abaixo da esfera $\rho = 4 \cos \phi$.
 (b) Encontre o centroide do sólido na parte (a).
30. Determine o volume do sólido que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
31. (a) Encontre o centroide do sólido no Exemplo 4.
 (b) Encontre o momento de inércia em torno do eixo z para este sólido.
32. Seja H um hemisfério sólido de raio a cuja densidade em qualquer ponto é proporcional à distância ao centro da base.
 (a) Determine a massa de H .
 (b) Determine o centro de massa de H .
 (c) Determine o momento de inércia de H em relação a seu eixo.
33. (a) Determine o centroide do hemisfério sólido homogêneo de raio a .
 (b) Determine o momento de inércia do sólido da parte (a) em relação a um diâmetro de sua base.
34. Determine a massa e o centro de massa do hemisfério sólido de raio a se a densidade em qualquer ponto for proporcional à sua distância da base.

35–38 Dentre as coordenadas cilíndricas ou esféricas, utilize a que lhe parecer mais apropriada.

35. Determine o volume e o centroide do sólido E que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
36. Determine o volume da menor cunha esférica cortada de uma esfera de raio a por dois planos que se interceptam ao longo de um diâmetro com um ângulo de $\pi/6$.

SCA 37. Calcule $\iiint_E z \, dV$, onde E está acima do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e abaixo do plano $z = 2y$. Utilize a Tabela de Integrais (veja as Páginas de Referência 6–11) ou um sistema de computação algébrica para calcular a integral.

SCA 38. (a) Determine o volume limitado pelo toro $\rho = \sin \phi$.
 (b) Utilize um computador para desenhar o toro.

39–41 Calcule a integral, transformando para coordenadas esféricas.

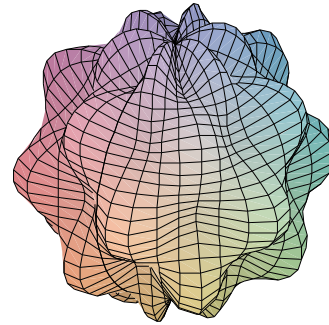
39. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy \, dz \, dy \, dx$
40. $\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2z + y^2z + z^3) \, dz \, dx \, dy$
41. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \, dz \, dx \, dy$

42. Um modelo para a densidade δ da atmosfera terrestre próxima à superfície é

$$\delta = 619,09 - 0,000097\rho$$

onde ρ (a distância do centro da Terra) é medido em metros e δ é medido em quilogramas por metro cúbico. Se tomarmos a superfície da Terra como uma esfera com raio de 6 370 km, então, este modelo é razoável para $6\,370 \times 10^6 \leq \rho \leq 6\,375 \times 10^6$. Use este modelo para estimar a massa da atmosfera entre o solo e uma altitude de 5 km.

43. Use uma ferramenta gráfica para desenhar um silo que consista em um cilindro de raio 3 e altura 10 com um hemisfério no topo.
44. A latitude e a longitude de um ponto P no hemisfério norte estão relacionadas com as coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ como a seguir. Tomamos a origem como o centro da Terra e o eixo z passando pelo polo norte. O eixo x positivo passa pelo ponto onde o meridiano principal (o meridiano por Greenwich, na Inglaterra) intercepta o equador. Então a latitude de P é $\alpha = 90^\circ - \phi$ e a longitude é $\beta = 360^\circ - \theta$. Encontre a distância sobre um círculo máximo de Los Angeles (lat. $34,06^\circ$ N, long. $118,25^\circ$ W) a Montreal (lat. $45,50^\circ$ N, long. $73,60^\circ$ W). Tome o raio da Terra como 6 370 km. (Um círculo máximo é o círculo de intersecção de uma esfera com um plano que passe pelo centro da esfera.)
- SCA 45. As superfícies $\rho = 1 + \frac{1}{5} \sin m\theta \sin n\phi$ têm sido usadas para modelar tumores. A “esfera rugosa” com $m = 6$ e $n = 5$ está mostrada. Utilize um sistema de computação algébrica para determinar seu volume.



46. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-(x^2+y^2+z^2)} \, dx \, dy \, dz = 2\pi$$

(A integral imprópria tripla é definida como o limite da integral tripla sobre uma esfera sólida quando o raio da esfera aumenta indefinidamente.)

47. (a) Utilize coordenadas cilíndricas para mostrar que o volume do sólido limitado por cima pela esfera $r^2 + z^2 = a^2$ e por baixo pelo cone $z = r \cot \phi_0$ (ou $\phi = \phi_0$), onde $0 < \phi_0 < \pi/2$, é

$$V = \frac{2\pi a^3}{3} (1 - \cos \phi_0)$$

(b) Deduza que o volume da cunha esférica dada por $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ é

$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2)(\theta_2 - \theta_1)$$

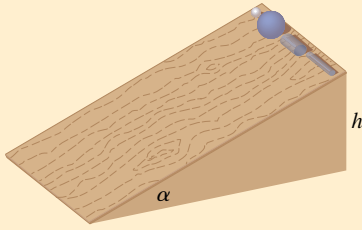
(c) Utilize o Teorema do Valor Médio para mostrar que o volume da parte (b) pode ser escrito como

$$\Delta V = \bar{\rho}^2 \sin \bar{\phi} \Delta \rho \Delta \theta \Delta \phi$$

onde $\bar{\rho}$ está entre ρ_1 e ρ_2 , $\bar{\phi}$ está entre ϕ_1 e ϕ_2 , $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1, \Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$ e $\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1$.

PROJETO APLICADO

CORRIDA NA RAMPA



Suponha que uma bola sólida (de gude), uma bola oca (de squash), um cilindro sólido (uma barra de aço) e um cilindro oco (um cano de chumbo) rolem em um plano inclinado. Qual desses objetos chegará embaixo mais depressa? (Dê seu palpite antes de continuar.)

Para responder a essa questão, consideramos a bola ou o cilindro com massa m , raio r e momento de inércia I (em relação ao eixo de rotação). Se a queda vertical for h , a energia potencial no topo será mgh . Suponha que o objeto chegue embaixo com velocidade v e velocidade angular ω , de modo que $v = \omega r$. A energia cinética na base da rampa é composta por duas partes: $\frac{1}{2}mv^2$ da translação (movimento de descida da rampa) e $\frac{1}{2}I\omega^2$ da rotação. Se supusermos que a perda de energia por atrito na descida é desprezível, então a lei de conservação de energia nos dá

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

1. Mostre que

$$v^2 = \frac{2gh}{1 + I^*} \quad \text{onde } I^* = \frac{I}{mr^2}$$

2. Se $y(t)$ é a distância vertical percorrida até o instante t , então o mesmo raciocínio utilizado no Problema 1 mostra que $v^2 = 2gy/(1 + I^*)$ em qualquer instante t . Utilize esse resultado para mostrar que y satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{1 + I^*}} (\text{sen } \alpha) \sqrt{y}$$

onde α é o ângulo de inclinação da rampa.

3. Resolvendo a equação diferencial do Problema 2, mostre que o tempo total de percurso é

$$T = \sqrt{\frac{2h(1 + I^*)}{g \text{sen}^2 \alpha}}$$

Isso mostra que o objeto com menor valor de I^* ganha a corrida.

4. Mostre que $I^* = \frac{1}{2}$ para o cilindro sólido e $I^* = 1$ para o cilindro oco.
5. Calcule I^* para a bola parcialmente oca com raio interior a e raio externo r . Expresse sua resposta em termos do coeficiente $b = a/r$. O que acontece quando $a \rightarrow 0$ e quando $a \rightarrow r$?
6. Mostre que $I^* = \frac{2}{5}$ para a bola sólida e $I^* = \frac{2}{3}$ para a bola oca. Assim, os objetos terminam a corrida na seguinte ordem: bola sólida, cilindro sólido, bola oca, cilindro oco.

15.10 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Em cálculo unidimensional, frequentemente usamos uma mudança de variável (uma substituição) para simplificar uma integral. Revertendo os papéis de x e u , podemos escrever a Regra da Substituição (5.5.6, no Volume I) como

$$1 \quad \int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u))g'(u) du$$

onde $x = g(u)$ e $a = g(c)$, $b = g(d)$. Outro modo de escrever a Fórmula 1 é o seguinte:

$$2 \quad \int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(x(u)) \frac{dx}{du} du$$

Uma mudança de variáveis pode também ser útil em integrais duplas. Já vimos um exemplo disso: a conversão para coordenadas polares. As novas variáveis r e θ estão relacionadas às velhas variáveis x e y pelas equações

$$x = r \cos \theta \quad y = r \operatorname{sen} \theta$$

e a fórmula de mudança de variáveis (15.4.2) pode ser escrita como

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \iint_S f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \, r \, dr \, d\theta$$

onde S é a região no plano $r\theta$ que corresponde à região R no plano xy .

De modo mais geral, consideremos uma mudança de variável dada pela **transformação** T do plano uv no plano xy :

$$T(u, v) = (x, y)$$

onde x e y estão relacionados com u e v pelas equações

3
$$x = g(u, v) \quad y = h(u, v)$$

ou, como às vezes escrevemos,

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v)$$

Em geral, consideramos T uma **transformação C^1** , o que significa que g e h têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas.

Uma transformação T é de fato somente uma função cujo domínio e imagem são ambos subconjuntos de \mathbb{R}^2 . Se $T(u_1, v_1) = (x_1, y_1)$, então o ponto (x_1, y_1) é denominado **imagem** do ponto (u_1, v_1) . Se não existem dois pontos com a mesma imagem, T é **injetora**. A Figura 1 mostra o efeito de uma transformação T em uma região S do plano uv . T transforma S em uma região R no plano xy denominada **imagem de S** , constituída das imagens de todos os pontos de S .

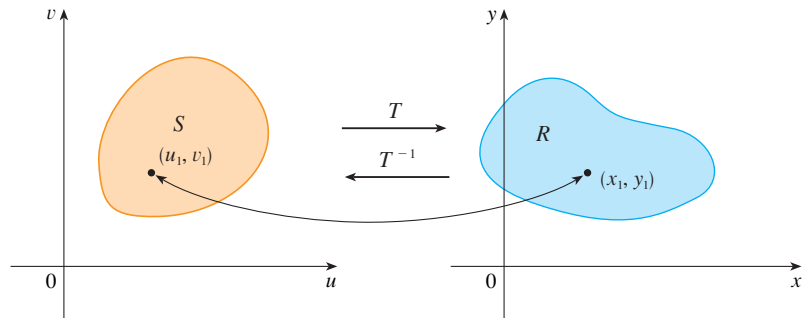


FIGURA 1

Se T é injetora, então existe uma **transformação inversa** T^{-1} do plano xy para o plano uv e pode ser possível inverter as Equações 3 para escrever u e v em termos de x e y :

$$u = G(x, y) \quad v = H(x, y)$$

EXEMPLO 1 Uma transformação é definida pelas equações

$$x = u^2 - v^2 \quad y = 2uv$$

Determine a imagem do quadrado $S = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$.

SOLUÇÃO A transformação leva a fronteira de S na fronteira da imagem. Assim, começamos por determinar a imagem dos lados de S . O primeiro lado, S_1 , é dado por $v = 0$ ($0 \leq u \leq 1$). (Veja a Figura 2.) Das equações dadas, temos $x = u^2$, $y = 0$ e, então, $0 \leq x \leq 1$. Então, S_1 é levado no segmento de reta que liga $(0, 0)$ a $(1, 0)$ no plano xy . O segundo lado, S_2 , é $u = 1$ ($0 \leq v \leq 1$) e, colocando $u = 1$ nas equações dadas, temos

$$x = 1 - v^2 \quad y = 2v$$

Eliminando v , obtemos

4
$$x = 1 - \frac{y^2}{4} \quad 0 \leq x \leq 1$$

que é parte de uma parábola. Da mesma forma, S_3 é dado por $v = 1$ ($0 \leq u \leq 1$), cuja imagem é o arco parabólico

5
$$x = \frac{y^2}{4} - 1 \quad -1 \leq x \leq 0$$

Finalmente, S_4 é dado por $u = 0$ ($0 \leq v \leq 1$), cuja imagem é $x = -v^2$, $y = 0$, ou seja, $-1 \leq x \leq 0$. (Observe que quando nos movemos ao redor do quadrado no sentido anti-horário, também nos movemos ao redor da região parabólica no sentido anti-horário.) A imagem de S é a região R (mostrada na Figura 2) limitada pelo eixo x e pelas parábolas dadas pelas Equações 4 e 5.

Agora vamos ver como a mudança de variáveis afeta a integral dupla. Começemos com um retângulo pequeno S no plano uv cujo canto inferior esquerdo é o ponto (u_0, v_0) e cujas dimensões são Δu e Δv . (Veja a Figura 3.)

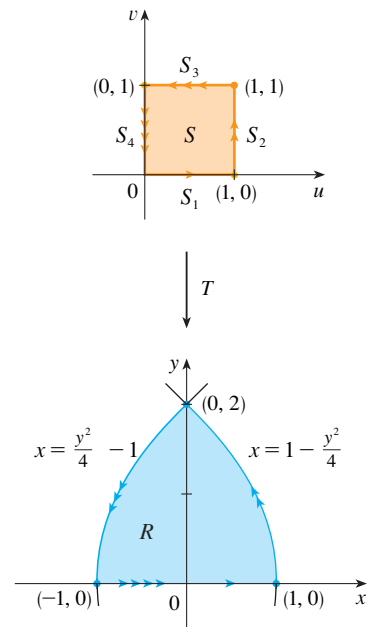


FIGURA 2

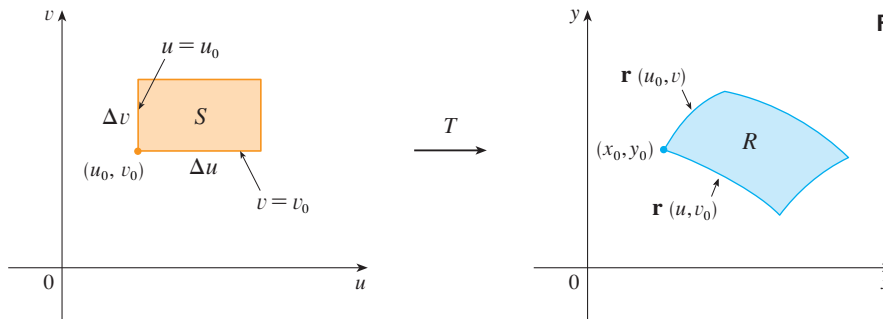


FIGURA 3

A imagem de S é a região R do plano xy , sendo que um dos pontos do limite é $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$. O vetor

$$\mathbf{r}(u, v) = g(u, v) \mathbf{i} + h(u, v) \mathbf{j}$$

é o vetor posição da imagem do ponto (u, v) . A equação do lado inferior de S é $v = v_0$, cuja curva imagem é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(u, v_0)$. O vetor tangente em (x_0, y_0) a essa curva imagem é

$$\mathbf{r}_u = g_u(u_0, v_0) \mathbf{i} + h_u(u_0, v_0) \mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j}$$

Da mesma forma, o vetor tangente em (x_0, y_0) à curva imagem do lado esquerdo de S é (a saber, $u = u_0$) é

$$\mathbf{r}_v = g_v(u_0, v_0) \mathbf{i} + h_v(u_0, v_0) \mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j}$$

Podemos aproximar a região imagem $R = T(S)$ pelo paralelogramo determinado pelos vetores secantes

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \quad \mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

mostrados na Figura 4. Mas

$$\mathbf{r}_u = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

e assim

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta u \mathbf{r}_u$$

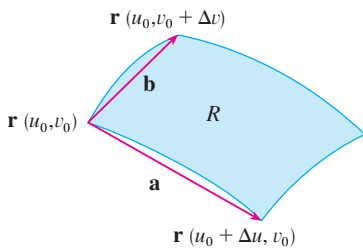


FIGURA 4

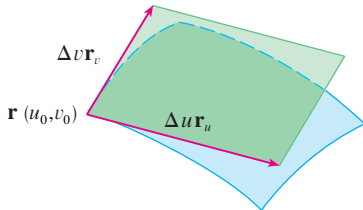


FIGURA 5

O jacobiano recebeu esse nome em homenagem ao matemático alemão Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Apesar de o matemático francês Cauchy ter sido o primeiro a usar estes determinantes especiais, envolvendo derivadas parciais, Jacobi usou-os para desenvolver um método para cálculo de integrais múltiplas.

Da mesma forma $\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta v \mathbf{r}_v$

Isso significa que podemos aproximar R por um paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u \mathbf{r}_u$ e $\Delta v \mathbf{r}_v$. (Veja a Figura 5.) Portanto, podemos aproximar a área de R pela área desse paralelogramo, que, da Seção 12.4, é

$$6 \quad |(\Delta u \mathbf{r}_u) \times (\Delta v \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

Calculando o produto vetorial, obtemos

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

O determinante que aparece nesse cálculo é chamado *jacobiano* da transformação e tem uma notação especial:

7 **Definição** O **jacobiano** da transformação T dada por $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$ é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Com essa notação, podemos utilizar a Equação 6 para obter uma aproximação da área ΔA de R :

$$8 \quad \Delta A \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v$$

onde o jacobiano é calculado em (u_0, v_0) .

Em seguida, dividimos a região S do plano uv em retângulos S_{ij} e chamamos suas imagens no plano xy de R_{ij} . (Veja a Figura 6.)

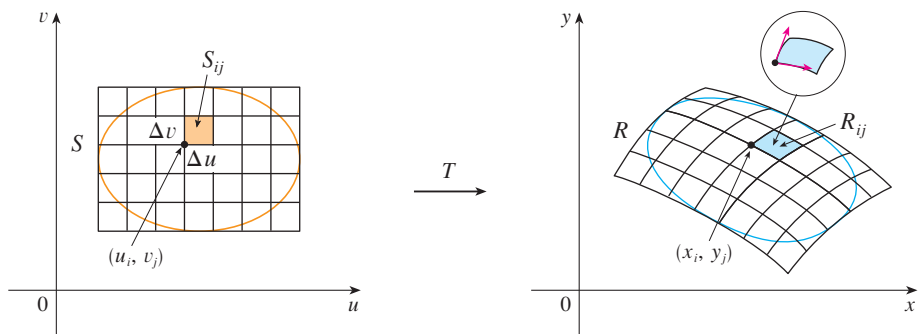


FIGURA 6

Aplicando a aproximação 8 a cada R_{ij} , aproximamos a integral dupla de f sobre R , como segue:

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dA &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A \\ &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(g(u_i, v_j), h(u_i, v_j)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v \end{aligned}$$

onde o jacobiano é calculado em (u_i, v_j) . Observe que a soma dupla é a soma de Riemann para a integral

$$\iint_S f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

A argumentação precedente sugere que o seguinte teorema seja verdadeiro. (Uma demonstração completa é dada em livros de cálculo avançado.)

9 Mudança de Variáveis em uma Integral Dupla Suponha que T seja uma transformação C^1 cujo jacobiano seja não nulo e leve uma região S do plano uv para uma região R do plano xy . Suponha que f seja contínua sobre R e que R e S sejam regiões planas do tipo I ou II. Suponha ainda que T seja injetora, exceto possivelmente nos pontos de fronteira de S . Então,

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

O Teorema 9 diz que mudamos de uma integral em x e y para uma integral em u e v escrevendo x e y em termos de u e v e escrevendo

$$dA = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Observe a semelhança entre o Teorema 9 e a fórmula unidimensional da Equação 2. Em vez da derivada dx/du , temos o valor absoluto do jacobiano, ou seja, $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$.

Como primeira ilustração do Teorema 9, vamos mostrar que a fórmula de integração em coordenadas polares é um caso especial deste. Aqui, a transformação T do plano $r\theta$ para o plano xy é dada por

$$x = g(r, \theta) = r \cos \theta \quad y = h(r, \theta) = r \sin \theta$$

e a geometria da transformação é mostrada na Figura 7. T transforma um retângulo comum do plano $r\theta$ em um retângulo polar do plano xy . O jacobiano de T é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r > 0$$

Assim, o Teorema 9 fornece

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

que é o mesmo que a Fórmula 15.4.2

EXEMPLO 2 Utilize a mudança de variáveis $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para calcular a integral $\iint_R y dA$, onde R é a região limitada pelo eixo x e pelas parábolas $y^2 = 4 - 4x$ e $y^2 = 4 + 4x$, $y \geq 0$.

SOLUÇÃO A região R está mostrada na Figura 2, (na página 935). No Exemplo 1, descobrimos que $T(S) = R$, onde S é o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. De fato, a razão que nos levou a fazer a mudança de variável para calcular a integral é que S é uma região muito mais simples que R . Vamos calcular o jacobiano:

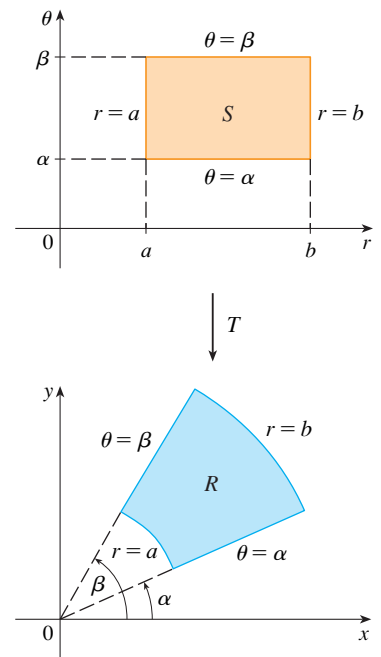


FIGURA 7
Transformação para as coordenadas polares

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

Portanto, pelo Teorema 9,

$$\begin{aligned} \iint_R y \, dA &= \iint_S 2uv \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, dA = \int_0^1 \int_0^1 (2uv)4(u^2 + v^2) \, du \, dv \\ &= 8 \int_0^1 \int_0^1 (u^3v + uv^3) \, du \, dv = 8 \int_0^1 \left[\frac{1}{4}u^4v + \frac{1}{2}u^2v^3 \right]_{u=0}^{u=1} \, dv \\ &= \int_0^1 (2v + 4v^3) \, dv = [v^2 + v^4]_0^1 = 2 \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO O Exemplo 2 não foi um problema muito difícil de resolver porque já conhecíamos uma mudança de variáveis apropriada. Se não a conhecêssemos de antemão, então o primeiro passo seria descobrir uma mudança de variáveis apropriada. Se $f(x, y)$ for difícil de integrar, então a forma de $f(x, y)$ pode sugerir uma transformação. Se a região de integração R é complicada, então a transformação deve ser escolhida para que a região S correspondente no plano uv tenha uma descrição mais conveniente.

EXEMPLO 3 Calcule a integral $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)} \, dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ e $(0, -1)$.

SOLUÇÃO Como não é fácil integrar $e^{(x+y)/(x-y)}$, vamos fazer a mudança de variáveis sugerida pela forma da função:

10
$$u = x + y \quad v = x - y$$

Essas equações definem a transformação T^{-1} do plano xy para o plano uv . O Teorema 9 diz respeito à transformação T do plano uv para o plano xy . Esta é obtida isolando-se x e y nas Equações 10 de x e y :

11
$$x = \frac{1}{2}(u + v) \quad y = \frac{1}{2}(u - v)$$

O jacobiano de T é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Para determinarmos a região S do plano uv correspondente a R , observamos que os lados de R estão sobre as retas

$$y = 0 \quad x - y = 2 \quad x = 0 \quad x - y = 1$$

e, das Equações 10 ou 11, as retas imagem do plano uv são

$$u = v \quad v = 2 \quad u = -v \quad v = 1$$

Então, a região S é a região trapezoidal com vértices $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(-2, 2)$ e $(-1, 1)$ mostrada na Figura 8. Como

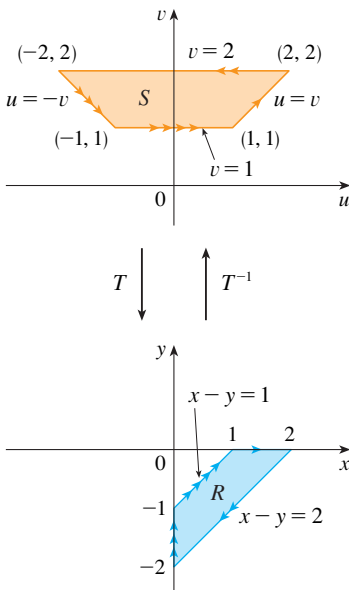


FIGURA 8

$$S = \{(u, v) \mid 1 \leq v \leq 2, -v \leq u \leq v\}$$

o Teorema 9 leva a

$$\begin{aligned} \iint_R e^{(x+y)/(x-y)} dA &= \iint_S e^{u/v} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \int_1^2 \int_{-v}^v e^{u/v} \left(\frac{1}{2}\right) du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 [ve^{u/v}]_{u=-v}^{u=v} dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 (e - e^{-1})v dv = \frac{3}{4}(e - e^{-1}) \end{aligned}$$

Integrais Triplas

Existe uma fórmula de mudança de variáveis semelhante para as integrais triplas. Seja T a transformação que leva uma região S no espaço uvw para uma região R no espaço xyz por meio das equações

$$x = g(u, v, w) \quad y = h(u, v, w) \quad z = k(u, v, w)$$

O **Jacobiano** de T é o seguinte determinante 3×3 :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Sob hipóteses semelhantes àsquelas do Teorema 9, temos a seguinte fórmula para integrais triplas:

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

EXEMPLO 4 Utilize a Fórmula 13 para deduzir a fórmula para a integração tripla em coordenadas esféricas.

SOLUÇÃO Aqui a mudança de variáveis é dada por

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

Calculamos o jacobiano como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} &= \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix} \\ &= \cos \phi \begin{vmatrix} -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \end{vmatrix} - \rho \operatorname{sen} \phi \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \cos \phi (-\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \operatorname{sen}^2 \theta - \rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \cos^2 \theta) \\ &\quad - \rho \operatorname{sen} \phi (\rho \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta) \\ &= -\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi - \rho^2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen}^2 \phi = -\rho^2 \operatorname{sen} \phi \end{aligned}$$

Visto que $0 \leq \phi \leq \pi$, temos $\sin \phi \geq 0$. Portanto,

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| = |-\rho^2 \sin \phi| = \rho^2 \sin \phi$$

e a Fórmula 13 nos dá

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_S f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

que é equivalente à Fórmula 15.9.3. ■

15.10 Exercícios

1–6 Determine o jacobiano da transformação.

- $x = 5u - v, y = u + 3v$
- $x = uv, y = u/v$
- $x = e^{-t} \sin \theta, y = e^t \cos \theta$
- $x = e^{st}, y = e^{-t}$
- $x = u/v, y = v/w, z = w/u$
- $x = v + w^2, y = w + u^2, z = u + v^2$

7–10 Determine a imagem do conjunto S sob a transformação dada.

- $S = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\}$;
 $x = 2u + 3v, y = u - v$
- S é o quadrado limitado pelas retas $u = 0, u = 1, v = 0, v = 1$;
 $x = v, y = u(1 + v^2)$
- S é a região triangular com vértices $(0, 0), (1, 1), (0, 1)$; $x = u^2, y = v$
- S é o disco dado por $u^2 + v^2 \leq 1$; $x = au, y = bv$

11–14 Uma região R no plano xy é dada. Determine equações para a transformação T que mapeia uma região retangular S no plano uv sobre R , onde os lados de S são paralelos aos eixos u e v .

- R é limitado por $y = 2x - 1, y = 2x + 1, y = 1 - x, y = 3 - x$
- R é o paralelogramo com vértices $(0, 0), (4, 3), (2, 4), (-2, 1)$
- R está entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 2$ no primeiro quadrante
- R é ligado pelas hipérbolas $y = 1/x, y = 4/x$ e pelas retas $y = x, y = 4x$ no primeiro quadrante

15–20 Utilize a transformação dada para calcular a integral.

- $\iint_R (x - 3y) dA$, onde R é a região triangular com vértices $(0, 0), (2, 1)$ e $(1, 2)$; $x = 2u + v, y = u + 2v$
- $\iint_R (4x + 8y) dA$, onde R é o paralelogramo com vértices $(-1, 3), (1, -3), (3, -1)$ e $(1, 5)$; $x = \frac{1}{4}(u - v), y = \frac{1}{4}(v - 3u)$
- $\iint_R x^2 dA$, onde R é a região limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$; $x = 2u, y = 3v$
- $\iint_R (x^2 - xy + y^2) dA$, onde R é a região limitada pela elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$; $x = \sqrt{2}u - \sqrt{2/3}v, y = \sqrt{2}u + \sqrt{2/3}v$
- $\iint_R xy dA$, onde R é a região no primeiro quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 3x$ e as hipérbolas $xy = 1, xy = 3$; $x = u/v, y = v$
- $\iint_R y^2 dA$, onde R é a região limitada pelas curvas $xy = 1, xy = 2, xy^2 = 1, xy^2 = 2$; $u = xy, v = xy^2$. Ilustre utilizando uma cal-

culadora gráfica ou um computador para traçar R .

- (a) Calcule $\iiint_E dV$, onde E é o sólido limitado pelo elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Utilize a transformação $x = au, y = bv, z = cw$.
(b) A Terra não é perfeitamente esférica; como resultado da rotação, os polos foram achatados. Assim, seu formato pode ser aproximado por um elipsoide com $a = b = 6\,378$ km e $c = 6\,356$ km. Use o item (a) para estimar o volume da Terra.
(c) Se o sólido do item (a) tiver densidade constante k , encontre seu momento de inércia em relação ao eixo z .
- Um problema importante na termodinâmica é determinar o trabalho realizado por um motor de Carnot ideal. Um ciclo consiste na expansão alternada e compressão de gás em um pistão. O trabalho realizado pelo motor é igual à área da região R limitada por duas curvas isotérmicas $xy = a, xy = b$ e duas curvas adiabáticas $xy^{1.4} = c, xy^{1.4} = d$, onde $0 < a < b$ e $0 < c < d$. Calcule o trabalho realizado determinando a área de R .
- Calcule a integral, efetuando uma mudança de variáveis apropriada.
- $\iint_R \frac{x - 2y}{3x - y} dA$, onde R é o paralelogramo limitado pelas retas $x - 2y = 0, x - 2y = 4, 3x - y = 1$ e $3x - y = 8$
- $\iint_R (x + y)e^{x^2 - y^2} dA$, onde R é o retângulo limitado pelas retas $x - y = 0, x - y = 2, x + y = 0$ e $x + y = 3$

- $\iint_R \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right) dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0), (2, 0), (0, 2)$ e $(0, 1)$
- $\iint_R \sin(9x^2 + 4y^2) dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$
- $\iint_R e^{x+y} dA$, onde R é dada pela inequação $|x| + |y| \leq 1$
- Seja f uma função contínua em $[0, 1]$ e seja R a região triangular com vértices $(0, 0), (1, 0)$ e $(0, 1)$. Mostre que

$$\iint_R f(x + y) dA = \int_0^1 uf(u) du$$

8 Revisão

Verificação de Conceitos

- Suponha que f seja uma função contínua definida sobre um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$.
 - Escreva uma expressão para uma soma de Riemann de uma função f . Se $f(x, y) \geq 0$, o que representa a soma?
 - Escreva a definição de $\iint_R f(x, y) dA$ como um limite.
 - Qual é a interpretação geométrica de $\iint_R f(x, y) dA$ se $f(x, y) \geq 0$? E se f tiver valores positivos e valores negativos?
 - Como calcular $\iint_R f(x, y) dA$?
 - O que a Regra do Ponto Médio para integrais duplas diz?
 - Escreva uma expressão para o valor médio de f .
- Como você define $\iint_D f(x, y) dA$ se D é uma região limitada que não é retangular?
 - O que é uma região do tipo I? Como calcular $\iint_D f(x, y) dA$ se D for uma região do tipo I?
 - O que é uma região do tipo II? Como calcular $\iint_D f(x, y) dA$ se D for uma região do tipo II?
 - Quais as propriedades de uma integral dupla?
- Como transformar uma integral dupla em coordenadas retangulares para uma integral dupla em coordenadas polares? Por que você faria isso?
- Se uma lâmina ocupa uma região plana D e tem densidade $\rho(x, y)$, escreva expressões para cada um dos seguintes itens em termos de integral dupla.
 - A massa
 - Os momentos em relação aos eixos
 - O centro de massa
 - Os momentos de inércia em relação aos eixos e à origem
- Seja f uma função densidade conjunta de um par de variáveis aleatórias X e Y .
 - Escreva uma integral dupla que represente a probabilidade de X estar entre a e b e Y estar entre c e d .
 - Que propriedades f possui?
 - Quais são os valores esperados de X e Y ?
- Escreva uma expressão para a área de uma superfície $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.
 - Escreva a definição da integral tripla de f sobre uma caixa retangular B .
 - Como calcular $\iiint_B f(x, y, z) dV$?
 - Como definir $\iiint_E f(x, y, z) dV$ se E for uma região sólida limitada diferente de uma caixa retangular?
 - O que é uma região sólida do tipo 1? Como calcular $\iiint_E f(x, y, z) dV$ se E for uma região deste tipo?
 - O que é uma região sólida do tipo 2? Como calcular $\iiint_E f(x, y, z) dV$ se E for uma região deste tipo?
 - O que é uma região sólida do tipo 3? Como calcular $\iiint_E f(x, y, z) dV$ se E for uma região deste tipo?
- Suponha que um objeto sólido ocupe uma região E e tenha função densidade $\rho(x, y, z)$. Escreva expressões para cada um dos seguintes itens.
 - A massa
 - Os momentos em relação aos planos coordenados
 - As coordenadas do centro de massa
 - Os momentos de inércia em relação aos eixos
- Como, em uma integral tripla, mudar de coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas?
 - Como, em uma integral tripla, mudar de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas?
 - Em que situações você deve mudar para coordenadas cilíndricas ou esféricas?
- Se uma transformação T é dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$, qual é o jacobiano de T ?
 - Como você muda de variáveis em uma integral dupla?
 - Como você muda de variáveis em uma integral tripla?

Testes Verdadeiro-Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

- $\int_{-1}^2 \int_0^6 x^2 \operatorname{sen}(x - y) dx dy = \int_0^6 \int_{-1}^2 x^2 \operatorname{sen}(x - y) dy dx$
- $\int_0^1 \int_0^x \sqrt{x + y^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x + y^2} dx dy$
- $\int_1^2 \int_3^4 x^2 e^y dy dx = \int_1^2 x^2 dx \int_3^4 e^y dy$
- $\int_{-1}^1 \int_0^1 e^{x^2+y^2} \operatorname{sen} y dx dy = 0$
- Se f for contínua em $[0, 1]$, então,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x) f(y) dy dx = \left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2$$

- $\int_1^4 \int_0^1 (x^2 + \sqrt{y}) \operatorname{sen}(x^2 y^2) dx dy \leq 9$
- Se D é um disco dado por $x^2 + y^2 \leq 4$, então

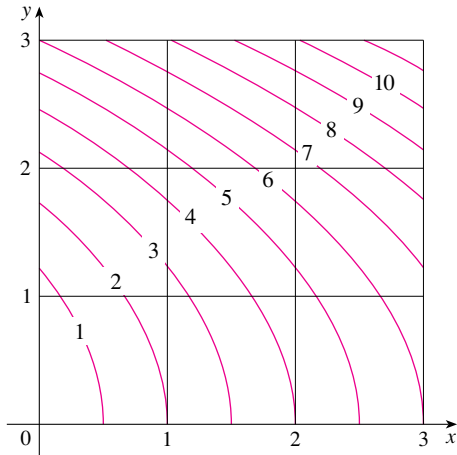
$$\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dA = \frac{16}{3} \pi$$
- A integral $\iiint_E kr^3 dz dr d\theta$ representa o momento de inércia em relação ao eixo z de um sólido E com densidade constante k .
- A integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 dz dr d\theta$$

representa o volume limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 2$.

Exercícios

1. A figura mostra o mapa de contorno de f no quadrado $R = [0, 3] \times [0, 3]$. Utilize uma soma de Riemann de nove termos para estimar o valor de $\iint_R f(x, y) dA$. Tome os pontos de amostragem como os cantos superiores direitos dos quadrados.

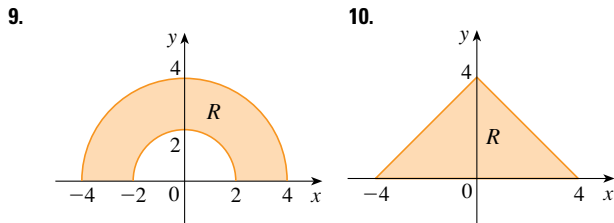


2. Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar a integral do Exercício 1.

3–8 Calcule a integral iterada.

3. $\int_1^2 \int_0^2 (y + 2xe^y) dx dy$ 4. $\int_0^1 \int_0^1 ye^{xy} dx dy$
 5. $\int_0^1 \int_0^x \cos(x^2) dy dx$ 6. $\int_0^1 \int_x^{e^x} 3xy^2 dy dx$
 7. $\int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} y \sin x dz dy dx$ 8. $\int_0^1 \int_0^y \int_x^1 6xyz dz dx dy$

9–10 Escreva $\iint_R f(x, y) dA$ como uma integral iterada, onde R é a região mostrada e f é uma função arbitrária contínua em R .



11. Descreva a região cuja área é dada pela integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin 2\theta} r dr d\theta$$

12. Descreva o sólido cujo volume é dado pela integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

e calcule a integral.

13–14 Calcule a integral iterada, primeiro invertendo a ordem de integração.

13. $\int_0^1 \int_x^1 \cos(y^2) dy dx$ 14. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{ye^{x^2}}{x^3} dx dy$

15–28 Calcule o valor da integral múltipla.

15. $\iint_R ye^{xy} dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$

16. $\iint_D xy dA$, onde $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y + 2\}$
 17. $\iint_D \frac{y}{1+x^2} dA$, onde D é limitado por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$
 18. $\iint_D \frac{1}{1+x^2} dA$, onde D é a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$
 19. $\iint_D y dA$, onde D é a região no primeiro quadrante limitada pelas parábolas $x = y^2$ e $x = 8 - y^2$
 20. $\iint_D y dA$, onde D é a região do primeiro quadrante que está acima da hipérbole $xy = 1$ e da reta $y = x$ e abaixo da reta $y = 2$
 21. $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} dA$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $y = 0$ e $y = \sqrt{3}x$ e pelo círculo $x^2 + y^2 = 9$
 22. $\iint_D x dA$, onde D é a região no primeiro quadrante que se encontra entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 2$
 23. $\iiint_E xy dV$, onde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x + y\}$
 24. $\iiint_T xy dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(\frac{1}{3}, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$
 25. $\iiint_E y^2 z^2 dV$, onde E é limitado pelo parabolóide $x = 1 - y^2 - z^2$ e pelo plano $x = 0$
 26. $\iiint_E z dV$, onde E é limitado pelos planos $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$ e pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ no primeiro octante
 27. $\iiint_E yz dV$, onde E está acima do plano $z = 0$, abaixo do plano $z = y$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$
 28. $\iiint_H z^3 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$, onde H é o hemisfério sólido com centro na origem e raio 1, que está acima do plano xy

29–34 Determine o volume do sólido dado.

29. Abaixo do parabolóide $z = x^2 + 4y^2$ e acima do retângulo $R = [0, 2] \times [1, 4]$
 30. Abaixo da superfície $z = x^2 y$ e acima do triângulo no plano xy com vértices $(1, 0)$, $(2, 1)$ e $(4, 0)$
 31. O tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 2, 0)$ e $(2, 2, 0)$
 32. Limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = 0$ e $y + z = 3$
 33. Uma das cunhas obtidas pelo corte do cilindro $x^2 + 9y^2 = a^2$ pelos planos $z = 0$ e $z = mx$
 34. Acima do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e abaixo do semicone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

35. Considere uma lâmina que ocupa, no primeiro quadrante, a região D limitada pela parábola $x = 1 - y^2$ e pelos eixos coordenados, com função densidade $\rho(x, y) = y$.
 (a) Determine a massa da lâmina.
 (b) Determine o centro de massa.
 (c) Determine os momentos de inércia e os raios de giração em relação aos eixos x e y .
 36. Uma lâmina ocupa a parte do disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ que está no primeiro quadrante.
 (a) Determine o centroide da lâmina.
 (b) Determine o centro de massa da lâmina se a função densidade for $\rho(x, y) = xy^2$.

37. (a) Determine o centroide de um cone circular reto com altura h e base com raio a . (Coloque o cone de forma que a base esteja sobre o plano xy com o centro na origem e seu eixo esteja sobre o eixo z .)

(b) Encontre o momento de inércia do cone em relação a seu eixo (o eixo z).

38. Encontre a área da parte do cone $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.

39. Determine a área da parte da superfície $z = x^2 + y$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$.

SCA 40. Trace a superfície $z = x \sin y$, $-3 \leq x \leq 3$, $-\pi \leq y \leq \pi$ e encontre seu comprimento correto com 4 casas decimais.

41. Utilize coordenadas polares para calcular

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^3 + xy^2) dy dx$$

42. Utilize coordenadas esféricas para calcular

$$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dx dy$$

43. Se D é uma região limitada pelas curvas $y = 1 - x^2$ e $y = e^x$, determine o valor aproximado da integral $\iint_D y^2 dA$. (Utilize uma ferramenta gráfica para estimar os pontos de intersecção das curvas.)

44. Determine o centro de massa do tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$ e função densidade $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

45. A função densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y é

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + y) & \text{se } 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante C .

(b) Encontre $P(X \leq 2, Y \geq 1)$.

(c) Encontre $P(X + Y \leq 1)$.

46. Uma luminária tem três lâmpadas, cada uma com vida média de 800 horas. Se modelarmos a probabilidade de falha das lâmpadas por uma função densidade exponencial com média 800, determine a probabilidade das três lâmpadas virem a falhar dentro de um intervalo de 1 000 horas.

47. Reescreva a integral

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz dy dx$$

como uma integral iterada na ordem $dx dy dz$.

48. Dê outras cinco integrais iteradas iguais a

$$\int_0^2 \int_0^{y^3} \int_0^{y^2} f(x, y, z) dz dx dy$$

49. Utilize a transformação $u = x - y$, $v = x + y$ para avaliar

$$\iint_R \frac{x - y}{x + y} dA$$

onde R é o quadrado com vértices $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ e $(1, 3)$.

50. Utilize a transformação $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$ para determinar o volume da região limitada pela superfície $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ e pelos planos coordenados.

51. Utilize a fórmula de mudança de variáveis e uma transformação adequada para calcular $\iint_R xy dA$, onde R é o quadrado com vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ e $(1, -1)$.

52. O Teorema do Valor Médio para as integrais duplas diz que, se f é uma função contínua em uma região plana D do tipo I ou do tipo II, então existe um ponto (x_0, y_0) em D , tal que

$$\iint_D f(x, y) dA = f(x_0, y_0) A(D)$$

Utilize o Teorema do Valor Extremo (14.7.8) e a Propriedade 15.3.11 das integrais para demonstrar esse teorema. (Use a demonstração da versão unidimensional da Seção 6.5, no Volume I, como guia.)

53. Suponha que f seja contínua sobre um disco que contém o ponto (a, b) . Seja D_r o disco fechado com centro em (a, b) e raio r . Utilize o Teorema do Valor Médio para as integrais duplas (veja o Exercício 52) para mostrar que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x, y) dA = f(a, b)$$

54. (a) Calcule $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{n/2}} dA$, onde n é um inteiro e D é a região limitada pelos círculos com centro na origem e raios r e R , $0 < r < R$.

(b) Para que valores de n a integral da parte (a) tem limite quando $r \rightarrow 0^+$?

(c) Determine $\iiint_E \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}} dV$, onde E é a região limitada pelas esferas com centro na origem e raios r e R , $0 < r < R$.

(d) Para que valores de n a integral da parte (c) tem limite quando $r \rightarrow 0^+$?

Problemas Quentes

1. Se $\llbracket x \rrbracket$ denota o maior inteiro contido em x , calcule a integral

$$\iint_R \llbracket x + y \rrbracket dA$$

onde $R = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 5\}$.

2. Calcule a Integral

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{\max\{x^2, y^2\}} dy dx$$

onde $\max\{x^2, y^2\}$ significa o maior dos números x^2 e y^2 .

3. Encontre o valor médio da função $f(x) = \int_x^1 \cos(t^2) dt$ no intervalo $[0, 1]$.
 4. Se \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} são vetores constantes, \mathbf{r} é o vetor posição $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e E é dado pelas inequações $0 \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} \leq \alpha$, $0 \leq \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} \leq \beta$, $0 \leq \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} \leq \gamma$, mostre que

$$\iiint_E (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) dV = \frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{8|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|}$$

5. A integral dupla $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy$ é uma integral imprópria e pode ser definida como o limite da integral dupla sobre o retângulo $[0, t] \times [0, t]$ quando $t \rightarrow 1^-$. Mas, se expandirmos o integrando como uma série geométrica, podemos exprimir a integral como a soma de uma série infinita. Mostre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

6. Leonhard Euler determinou o valor exato da soma da série do Problema 5. Em 1736, ele demonstrou que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Neste problema, pedimos que você demonstre esse fato calculando a integral dupla do Problema 5. Comece fazendo a mudança de variável

$$x = \frac{u-v}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$$

Isso corresponde a uma rotação em torno da origem de um ângulo de $\pi/4$. Você precisará esboçar a região correspondente no plano uv .

[Sugestão: Se, ao avaliar a integral, você encontrar uma das expressões $(1 - \sin \theta)/\cos \theta$ ou $(\cos \theta)/(1 + \sin \theta)$, você pode usar a identidade $\cos \theta = \sin((\pi/2) - \theta)$ e a identidade correspondente para $\sin \theta$.]

7. (a) Mostre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xyz} dx dy dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

(Ninguém jamais foi capaz de determinar o valor exato da soma dessa série.)

- (b) Mostre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1+xyz} dx dy dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$$

Use essa equação para calcular a integral tripla com precisão de duas casas decimais.

8. Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \pi x - \operatorname{arctg} x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \pi$$

primeiro escrevendo a integral como uma integral iterada.

9. (a) Mostre que quando a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

é escrita em coordenadas cilíndricas, ela se torna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

(b) Mostre que quando a equação de Laplace é escrita em coordenadas esféricas ela se torna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cotg \phi}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2 \text{sen}^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

10. (a) Uma lâmina tem densidade constante ρ e o formato de um disco com centro na origem e raio R . Utilize a Lei de Newton da Gravitação (veja a Seção 13.4) para mostrar que a intensidade da força de atração que a lâmina exerce sobre um corpo com massa m colocado em um ponto $(0, 0, d)$ no eixo z positivo é

$$F = 2\pi G m \rho d \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} \right)$$

[Sugestão: Divida o disco como na Figura 4 da Seção 15.4 e calcule primeiro a componente vertical da força exercida pelo sub-retângulo polar R_{ij} .]

- (b) Mostre que a intensidade da força de atração da lâmina com densidade ρ que ocupa o plano inteiro sobre um objeto de massa m localizado à distância d do plano é

$$F = 2\pi G m \rho$$

Observe que esta expressão não deve depender de d .

11. Se f for contínua, mostre que

$$\int_0^x \int_0^y \int_0^z f(t) dt dz dy = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$$

12. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2 + ni + j}}$.

13. O plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

corta o elipsoide sólido

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

em dois pedaços. Encontre o volume do pedaço menor.