

# Sumário

Prefácio	xi
Testes de Verificação	xxi
Uma Apresentação do Cálculo	xxvii

---

## 9 Equações Diferenciais 525

---

9.1	Modelagem com Equações Diferenciais	526
9.2	Campos de Direções e Método de Euler	531
9.3	Equações Separáveis	538
	Projeto Aplicado ■ Quanto Rapidamente um Tanque Esvazia?	546
	Projeto Aplicado ■ O Que É Mais Rápido, Subir ou Descer?	547
9.4	Modelos para Crescimento Populacional	548
9.5	Equações Lineares	557
9.6	Sistemas Predador-Presa	563
	Revisão	569
	Problemas Quentes	572



## 10 Equações Paramétricas e Coordenadas Polares 575

---

10.1	Curvas Definidas por Equações Paramétricas	576
	Projeto de Laboratório ■ Rolando Círculos ao Redor de Círculos	583
10.2	Cálculo com Curvas Parametrizadas	584
	Projeto de Laboratório ■ Curvas de Bézier	591
10.3	Coordenadas Polares	592
	Projeto de Laboratório ■ Famílias de Curvas Polares	601
10.4	Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares	602
10.5	Seções Cônicas	606
10.6	Seções Cônicas em Coordenadas Polares	613
	Revisão	619
	Problemas Quentes	621



## 11 Sequências e Séries Infinitas 623

---

11.1	Sequências	624
	Projeto de Laboratório ■ Sequências Logísticas	635
11.2	Séries	636
11.3	O Teste da Integral e Estimativas de Somas	645
11.4	Os Testes de Comparação	652
11.5	Séries Alternadas	657
11.6	Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz	661
11.7	Estratégia para Testes de Séries	667



11.8	Séries de Potência	669
11.9	Representações de Funções como Séries de Potências	674
11.10	Séries de Taylor e Maclaurin	679
	Projeto de Laboratório ■ Um Limite Elusivo	691
	Projeto Escrito ■ Como Newton Descobriu a Série Binomial	691
11.11	Aplicações dos Polinômios de Taylor	692
	Projeto Aplicado ■ Radiação Proveniente das Estrelas	700
	Revisão	701
	Problemas Quentes	703

## 12 Vetores e a Geometria do Espaço 707

12.1	Sistemas de Coordenadas Tridimensionais	708
12.2	Vetores	713
12.3	O Produto Escalar	721
12.4	O Produto Vetorial	727
	Projeto de Descoberta ■ A Geometria de um Tetraedro	734
12.5	Equações de Retas e Planos	735
	Projeto de Laboratório ■ Colocando 3D em Perspectiva	743
12.6	Cilindros e Superfícies Quádricas	744
	Revisão	750
	Problemas Quentes	752



## 13 Funções Vetoriais 755

13.1	Funções Vetoriais e Curvas Espaciais	756
13.2	Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais	763
13.3	Comprimento de Arco e Curvatura	768
13.4	Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração	776
	Projeto Aplicado ■ Leis de Kepler	785
	Revisão	786
	Problemas Quentes	789



## 14 Derivadas Parciais 791

14.1	Funções de Várias Variáveis	792
14.2	Limites e Continuidade	804
14.3	Derivadas Parciais	811
14.4	Planos Tangentes e Aproximações Lineares	823
14.5	A Regra da Cadeia	831
14.6	Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente	839
14.7	Valores Máximo e Mínimo	850
	Projeto Aplicado ■ Projeto de uma Caçamba	858
	Projeto de Descoberta ■ Aproximações Quadráticas e Pontos Críticos	859
14.8	Multiplicadores de Lagrange	860
	Projeto Aplicado ■ Ciência dos Foguetes	866
	Projeto Aplicado ■ Otimização de uma Turbina Hidráulica	867
	Revisão	868
	Problemas Quentes	871





## 15 Integrais Múltiplas 873

- 15.1 Integrais Duplas sobre Retângulos 874
  - 15.2 Integrais Iteradas 882
  - 15.3 Integrais Duplas sobre Regiões Gerais 887
  - 15.4 Integrais Duplas em Coordenadas Polares 895
  - 15.5 Aplicações de Integrais Duplas 901
  - 15.6 Área de Superfície 910
  - 15.7 Integrais Triplas 913
    - Projeto de Descoberta ■ Volumes de Hiperesferas 922
  - 15.8 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas 922
    - Projeto de Laboratório ■ A Intersecção de Três Cilindros 926
  - 15.9 Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas 927
    - Projeto Aplicado ■ Corrida na Rampa 933
  - 15.10 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas 933
    - Revisão 941
- Problemas Quentes 944



## 16 Cálculo Vetorial 947

- 16.1 Campos Vetoriais 948
  - 16.2 Integrais de Linha 954
  - 16.3 O Teorema Fundamental das Integrais de Linha 963
  - 16.4 Teorema de Green 971
  - 16.5 Rotacional e Divergente 977
  - 16.6 Superfícies Parametrizadas e suas Áreas 983
  - 16.7 Integrais de Superfície 993
  - 16.8 Teorema de Stokes 1003
    - Projeto Aplicado ■ Três Homens e Dois Teoremas 1007
  - 16.9 O Teorema do Divergente 1008
  - 16.10 Resumo 1013
    - Revisão 1014
- Problemas Quentes 1016



## 17 Equações Diferenciais de Segunda Ordem 1019

- 17.1 Equações Lineares de Segunda Ordem 1020
- 17.2 Equações Lineares Não Homogêneas 1026
- 17.3 Aplicações de Equações Diferenciais de Segunda Ordem 1032
- 17.4 Soluções em Séries 1039
  - Revisão 1043

## Apêndices A1

- A Números, Desigualdades e Valores Absolutos A2
- B Geometria Analítica e Retas A9
- C Gráficos de Equações de Segundo Grau A14
- D Trigonometria A21
- E Notação de Somatória (Ou Notação Sigma) A30
- F Demonstrações dos Teoremas A35

<b>G</b>	O Logaritmo Definido como uma Integral	A44
<b>H</b>	Números Complexos	A51
<b>I</b>	Respostas para os Exercícios Ímpares	A58

## Índice Remissivo I1

---

### Volume I

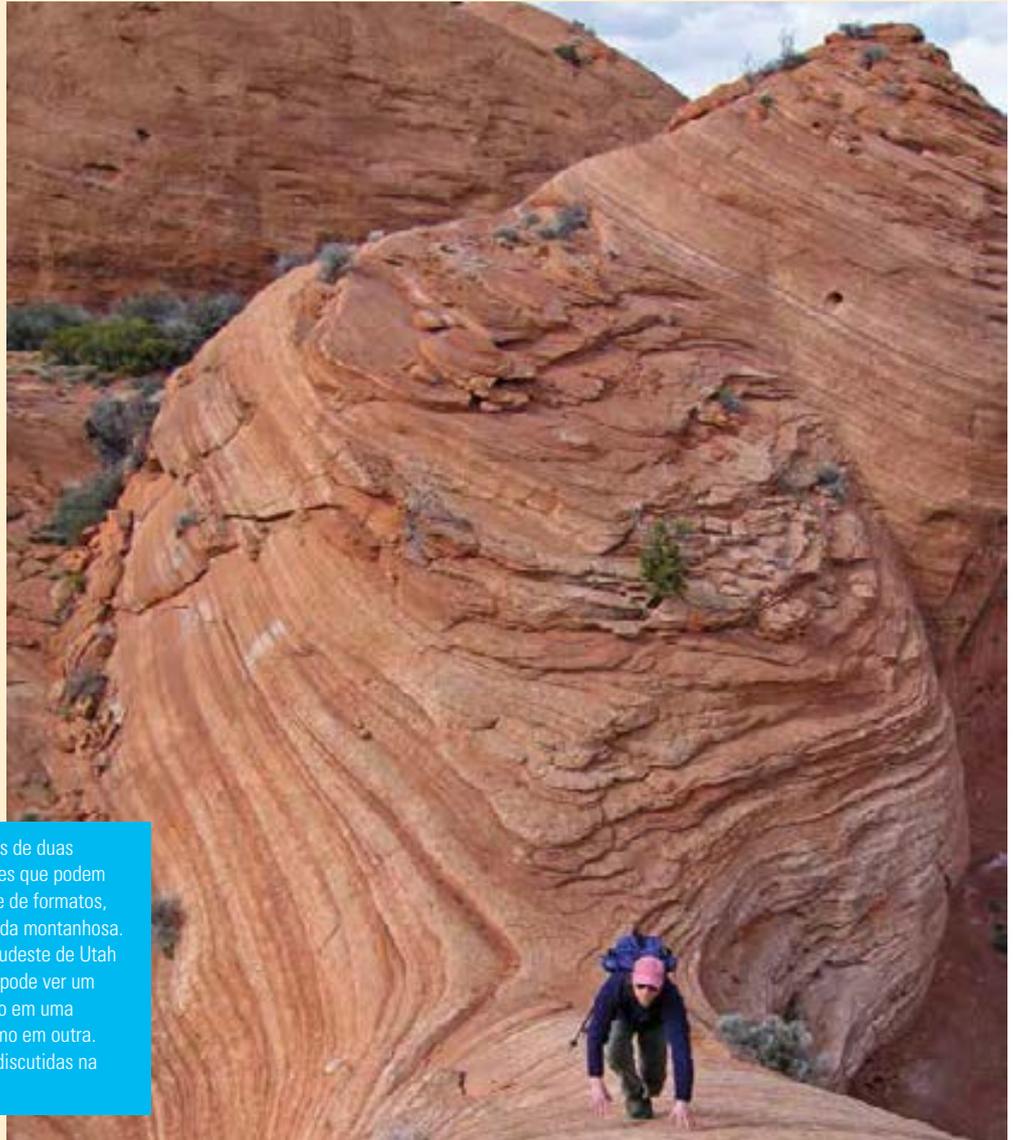
---

<b>Capítulo 1</b>	Funções e Modelos
<b>Capítulo 2</b>	Limites e Derivadas
<b>Capítulo 3</b>	Regras de Derivação
<b>Capítulo 4</b>	Aplicações de Derivação
<b>Capítulo 5</b>	Integrais
<b>Capítulo 6</b>	Aplicações de Integração
<b>Capítulo 7</b>	Técnicas de Integração
<b>Capítulo 8</b>	Mais Aplicações de Integração

# 14

## Derivadas Parciais

Os gráficos das funções de duas variáveis são superfícies que podem assumir uma variedade de formatos, incluindo sela ou estrada montanhosa. Nesta localização no sudeste de Utah (Arco de Phipps), você pode ver um ponto que é um mínimo em uma direção, mas um máximo em outra. Essas superfícies são discutidas na Seção 14.7.



Stan Wagon, Macalester College

Até aqui tratamos o cálculo de funções de uma única variável. No entanto, no mundo real, quantidades físicas frequentemente dependem de duas ou mais variáveis, de modo que, neste capítulo, focalizaremos nossa atenção em funções de várias variáveis e estenderemos nossas ideias básicas do cálculo diferencial para tais funções.

## 14.1 Funções de Várias Variáveis

Nesta seção estudaremos as funções de duas ou mais variáveis sob quatro pontos de vista diferentes:

- verbalmente (pela descrição em palavras)
- numericamente (por uma tabela de valores)
- algebricamente (por uma fórmula explícita)
- visualmente (por um gráfico ou curvas de nível)

### Funções de Duas Variáveis

A temperatura  $T$  em um ponto da superfície da Terra em dado instante de tempo depende da longitude  $x$  e da latitude  $y$  do ponto. Podemos pensar em  $T$  como uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$ , ou como uma função do par  $(x, y)$ . Indicamos essa dependência funcional escrevendo  $T = f(x, y)$ .

O volume  $V$  de um cilindro circular depende de seu raio  $r$  e de sua altura  $h$ . De fato, sabemos que  $V = \pi r^2 h$ . Podemos dizer que  $V$  é uma função de  $r$  e de  $h$ , e escrevemos  $V(r, h) = \pi r^2 h$ .

**Definição** Uma **função  $f$  de duas variáveis** é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais  $(x, y)$  de um conjunto  $D$  um único valor real, denotado por  $f(x, y)$ . O conjunto  $D$  é o **domínio** de  $f$  e sua **imagem** é o conjunto de valores possíveis de  $f$ , ou seja,  $\{f(x, y) | (x, y) \in D\}$ .

Frequentemente escrevemos  $z = f(x, y)$  para tornar explícitos os valores tomados por  $f$  em um ponto genérico  $(x, y)$ . As variáveis  $x$  e  $y$  são **variáveis independentes** e  $z$  é a **variável dependente**. [Compare com a notação  $y = f(x)$  para as funções de uma única variável.]

Uma função de duas variáveis é simplesmente aquela cujo domínio é um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  e cuja imagem é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Uma maneira de visualizar essa função é pelo diagrama de setas (veja a Figura 1), no qual o domínio  $D$  é representado como um subconjunto do plano  $xy$  e a imagem é um conjunto de números na reta real, mostrado como um eixo  $z$ . Por exemplo, se  $f(x, y)$  representa a temperatura em um ponto  $(x, y)$  em uma placa de metal chata com o formato de  $D$ , podemos pensar que o eixo  $z$  é um termômetro exibindo as temperaturas registradas.

Se a função  $f$  é dada por uma fórmula e seu domínio não é especificado, fica subtendido que o domínio de  $f$  é o conjunto de todos os pares  $(x, y)$  para os quais a expressão dada fornece um número real bem definido.

**EXEMPLO 1** Para cada uma das seguintes funções, calcule  $f(3, 2)$  e encontre o domínio.

$$(a) f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$$

$$(b) f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$$

**SOLUÇÃO**

$$(a) f(3, 2) = \frac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

A expressão para  $f$  está bem definida se o denominador for diferente de 0 e o número cuja raiz quadrada será extraída for não negativo. Portanto, o domínio de  $f$  é

$$D = \{(x, y) | x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}$$

A desigualdade  $x + y + 1 \geq 0$ , ou  $y \geq -x - 1$ , descreve os pontos que estão na linha  $y = -x - 1$  ou acima dela, enquanto  $x \neq 1$  significa que os pontos na linha  $x = 1$  devem ser excluídos do domínio. (Veja a Figura 2.)

$$(b) f(3, 2) = 3 \ln(2^2 - 3) = 3 \ln 1 = 0$$

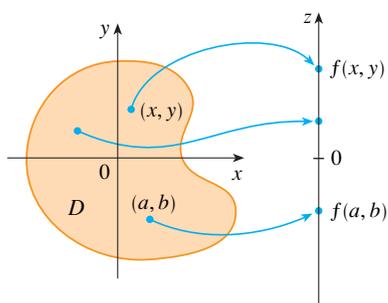


FIGURA 1

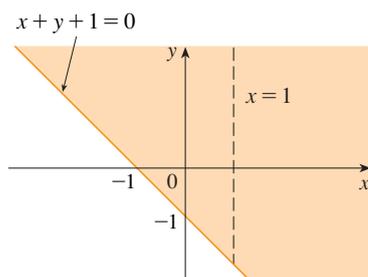
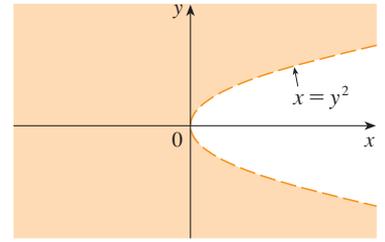


FIGURA 2

Domínio de  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

Já que  $\ln(y^2 - x)$  é definido somente quando  $y^2 - x > 0$ , isto é,  $x < y^2$ , o domínio de  $f$  é  $D = \{(x, y) | x < y^2\}$ . Isso representa o conjunto de pontos à esquerda da parábola  $x = y^2$ . (Veja a Figura 3.)

Nem todas as funções podem ser representadas por fórmulas explícitas. A função do próximo exemplo é descrita verbalmente e por estimativas numéricas de seus valores.



**FIGURA 3**  
Domínio de  $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

**EXEMPLO 2** Em regiões com inverno severo, o *índice de sensação térmica* é frequentemente utilizado para descrever a severidade aparente do frio. Esse índice  $W$  mede a temperatura subjetiva que depende da temperatura real  $T$  e da velocidade do vento,  $v$ . Assim,  $W$  é uma função de  $T$  e de  $v$ , e podemos escrever  $W = f(T, v)$ . A Tabela 1 apresenta valores de  $W$  compilados pelo Serviço Nacional de Meteorologia dos Estados Unidos e pelo Serviço Meteorológico do Canadá.

**TABELA 1** Índice de sensação térmica como função da temperatura do ar e velocidade do vento

		Velocidade do vento (km/h)											
		$v$	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
Temperatura real (°C)	$T$	5	4	3	2	1	1	0	-1	-1	-2	-2	-3
	0	-2	-3	-4	-5	-6	-6	-7	-8	-9	-9	-10	-10
	-5	-7	-9	-11	-12	-12	-13	-14	-15	-16	-16	-17	-17
	-10	-13	-15	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23	-23	-24	-24
	-15	-19	-21	-23	-24	-25	-26	-27	-29	-30	-30	-31	-31
	-20	-24	-27	-29	-30	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-37	-38
	-25	-30	-33	-35	-37	-38	-39	-41	-42	-43	-44	-44	-45
	-30	-36	-39	-41	-43	-44	-46	-48	-49	-50	-51	-51	-52
	-35	-41	-45	-48	-49	-51	-52	-54	-56	-57	-58	-58	-60
	-40	-47	-51	-54	-56	-57	-59	-61	-63	-64	-65	-65	-67

Por exemplo, a tabela mostra que, se a temperatura é  $-5$  °C e a velocidade do vento, 50 km/h, então subjetivamente parecerá tão frio quanto uma temperatura de cerca de  $-15$  °C sem vento. Portanto,

$$f(-5, 50) = -15$$

**EXEMPLO 3** Em 1928, Charles Cobb e Paul Douglas publicaram um estudo no qual modelaram o crescimento da economia norte-americana durante o período de 1899–1922. Eles consideraram uma visão simplificada da economia em que a saída da produção é determinada pela quantidade de trabalho envolvido e pela quantidade de capital investido. Apesar de existirem muitos outros fatores afetando o desempenho da economia, o modelo mostrou-se bastante preciso. A função utilizada para modelar a produção era da forma

**1** 
$$P(L, K) = bL^\alpha K^{1-\alpha}$$

onde  $P$  é a produção total (valor monetário dos bens produzidos no ano);  $L$ , a quantidade de trabalho (número total de pessoas-hora trabalhadas em um ano); e  $K$ , a quantidade de capital investido (valor monetário das máquinas, equipamentos e prédios). Na Seção 14.3, mostraremos como obter a Equação 1 a partir de algumas hipóteses econômicas.

Cobb e Douglas usaram dados econômicos publicados pelo governo para construir a Tabela 2. Eles tomaram o ano de 1899 como base e  $P$ ,  $L$  e  $K$  foram tomados valendo 100 nesse ano. Os valores para outros anos foram expressos como porcentagens dos valores de 1899.

Cobb e Douglas utilizaram o método dos mínimos quadrados para ajustar os dados da Tabela 2 à função

**2** 
$$P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$$

**O Novo Índice de Sensação Térmica**  
Um novo índice de sensação térmica foi introduzido em novembro de 2001 e é muito mais preciso que o velho índice de medição de quanto frio se sente quando está ventando. O novo índice é baseado em um modelo de quão rápido um rosto humano perde calor. Foi desenvolvido por meio de ensaios clínicos nos quais voluntários eram expostos a uma variedade de temperaturas e velocidade do vento em um túnel de vento refrigerado.

**TABELA 2**

Ano	$P$	$L$	$K$
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

(Veja o Exercício 79 para detalhes.)

Se usarmos o modelo dado pela função na Equação 2 para calcular a produção nos anos de 1910 e 1920, obteremos os valores

$$P(147, 208) = 1,01(147)^{0,75}(208)^{0,25} \approx 161,9$$

$$P(194, 407) = 1,01(194)^{0,75}(407)^{0,25} \approx 235,8$$

que são muito próximos dos valores reais, 159 e 231.

A função de produção [1] foi usada posteriormente em muitos contextos, de empresas individuais até questões globais de economia. Ela passou a ser conhecida como **função de produção de Cobb-Douglas**. Seu domínio é  $\{(L, K) \mid L \geq 0, K \geq 0\}$ , pois, como  $L$  e  $K$  representam mão de obra e capital, não podem ser negativos.

**EXEMPLO 4** Determine o domínio e a imagem de  $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ .

**SOLUÇÃO** O domínio de  $g$  é

$$D = \{(x, y) \mid 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$

que é o disco com centro  $(0, 0)$  e raio 3 (veja a Figura 4). A imagem de  $g$  é

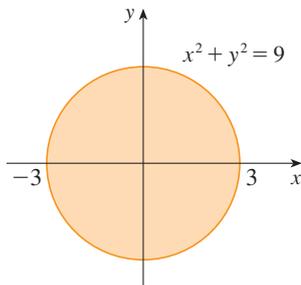
$$\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}$$

Como  $z$  é a raiz quadrada positiva,  $z \geq 0$ . Da mesma forma, por causa de  $9 - x^2 - y^2 \leq 9$ , temos

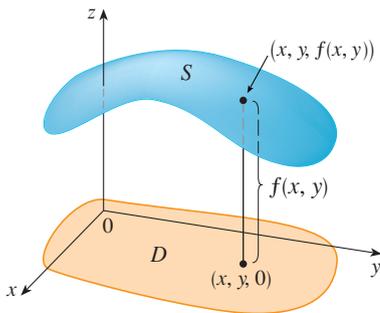
$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3$$

Assim, a imagem é

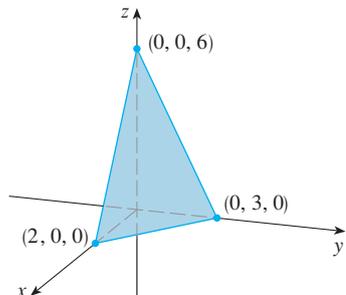
$$\{z \mid 0 \leq z \leq 3\} = [0, 3]$$



**FIGURA 4**  
Domínio de  $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$



**FIGURA 5**



**FIGURA 6**

## Gráficos

Outra forma de visualizar o comportamento de uma função de duas variáveis é considerar seu gráfico.

**Definição** Se  $f$  é uma função de duas variáveis com domínio  $D$ , então o **gráfico** de  $f$  é o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z)$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $z = f(x, y)$  e  $(x, y)$  pertença a  $D$ .

Assim como o gráfico de uma função  $f$  de uma única variável é uma curva  $C$  com equação  $y = f(x)$ , o gráfico de uma função  $f$  com duas variáveis é uma superfície  $S$  com equação  $z = f(x, y)$ . Podemos visualizar o gráfico  $S$  de  $f$  como estando diretamente acima ou abaixo de seu domínio  $D$  no plano  $xy$  (veja a Figura 5).

**EXEMPLO 5** Esboce o gráfico da função  $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ .

**SOLUÇÃO** O gráfico de  $f$  tem a equação  $z = 6 - 3x - 2y$ , ou  $3x + 2y + z = 6$ , que representa um plano. Para desenharmos o plano, primeiro achamos as intersecções com os eixos. Colocando  $y = z = 0$  na equação, obtemos  $x = 2$  como a intersecção com o eixo  $x$ . Da mesma forma, a intersecção com  $y$  é 3 e a intersecção com  $z$  é 6. Isso nos permite esboçar a porção do gráfico pertencente ao primeiro octante na Figura 6.

A função do Exemplo 5 é um caso especial da função

$$f(x, y) = ax + by + c$$

e é chamada **função linear**. O gráfico de uma dessas funções tem a equação

$$z = ax + by + c \quad \text{ou} \quad ax + by - z + c = 0$$

e, portanto, é um plano. Do mesmo modo que as funções lineares de uma única variável são importantes no cálculo de uma variável, veremos que as funções lineares de duas variáveis têm um papel central no cálculo com muitas variáveis.

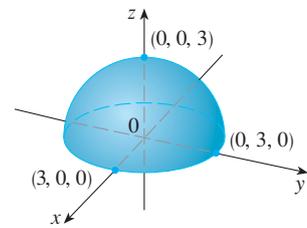
**EXEMPLO 6** Esboce o gráfico de  $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ .

**SOLUÇÃO** O gráfico tem a equação  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ . Elevando ao quadrado ambos os lados da equação, obtemos  $z^2 = 9 - x^2 - y^2$ , ou  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , que reconhecemos como a equação da esfera de centro na origem e raio 3. Mas, como  $z \geq 0$ , o gráfico de  $g$  é somente a metade superior da esfera (veja a Figura 7).

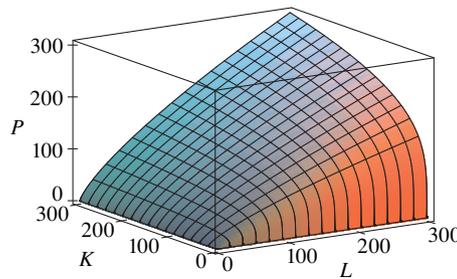
**OBSERVAÇÃO** Uma esfera inteira não pode ser representada por uma única função de  $x$  e  $y$ . Como vimos no Exemplo 6, o hemisfério superior da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  é representado pela função  $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ . O hemisfério inferior é representado pela função  $h(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ .

**EXEMPLO 7** Utilize o computador para traçar o gráfico da função de produção de Cobb-Douglas  $P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$ .

**SOLUÇÃO** A Figura 8 mostra o gráfico de  $P$  para os valores de mão de obra  $L$  e capital  $K$  que estão entre 0 e 300. O computador utilizou os cortes verticais para desenhar a superfície. Vemos a partir desses cortes que o valor da produção  $P$  aumenta com o crescimento de  $L$  ou de  $K$ , como esperado.



**FIGURA 7**  
Gráfico de  $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

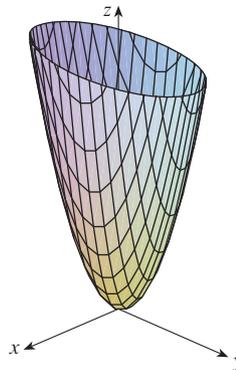


**FIGURA 8**

**EXEMPLO 8** Determine o domínio e a imagem e esboce o gráfico de  $h(x, y) = 4x^2 + y^2$ .

**SOLUÇÃO** Observe que  $h(x, y)$  é definida para todos os possíveis pares ordenados de números reais  $(x, y)$  e seu domínio é  $\mathbb{R}^2$ , o plano  $xy$  todo. A imagem de  $h$  é o conjunto  $[0, \infty)$  de todos os reais não negativos. [Observe que  $x^2 \geq 0$  e  $y^2 \geq 0$ , portanto  $h(x, y) \geq 0$  para todo  $x$  e  $y$ .]

O gráfico de  $h$  tem a equação  $z = 4x^2 + y^2$ , que é o parabolóide elíptico que esboçamos no Exemplo 4 na Seção 12.6. Os cortes horizontais são elipses e os cortes verticais são parábolas (veja a Figura 9).



**FIGURA 9**  
Gráfico de  $h(x, y) = 4x^2 + y^2$

Existem programas de computador desenvolvidos para traçar os gráficos de funções de duas variáveis. Na maioria desses programas, são desenhados os cortes nos planos verticais  $x = k$  e  $y = k$  para os valores de  $k$  igualmente espaçados, e as linhas do gráfico que estariam escondidas são removidas.

A Figura 10 mostra uma série de gráficos de diversas funções, gerados por computador. Observe que obtemos uma visão melhor da função quando a giramos de modo a olhá-la por diferentes pontos de vista. Nos itens (a) e (b) o gráfico de  $f$  é achatado e próximo do plano  $xy$ , exceto perto da origem; isso se dá porque  $e^{-x^2-y^2}$  é muito pequeno quando  $x$  ou  $y$  é grande.

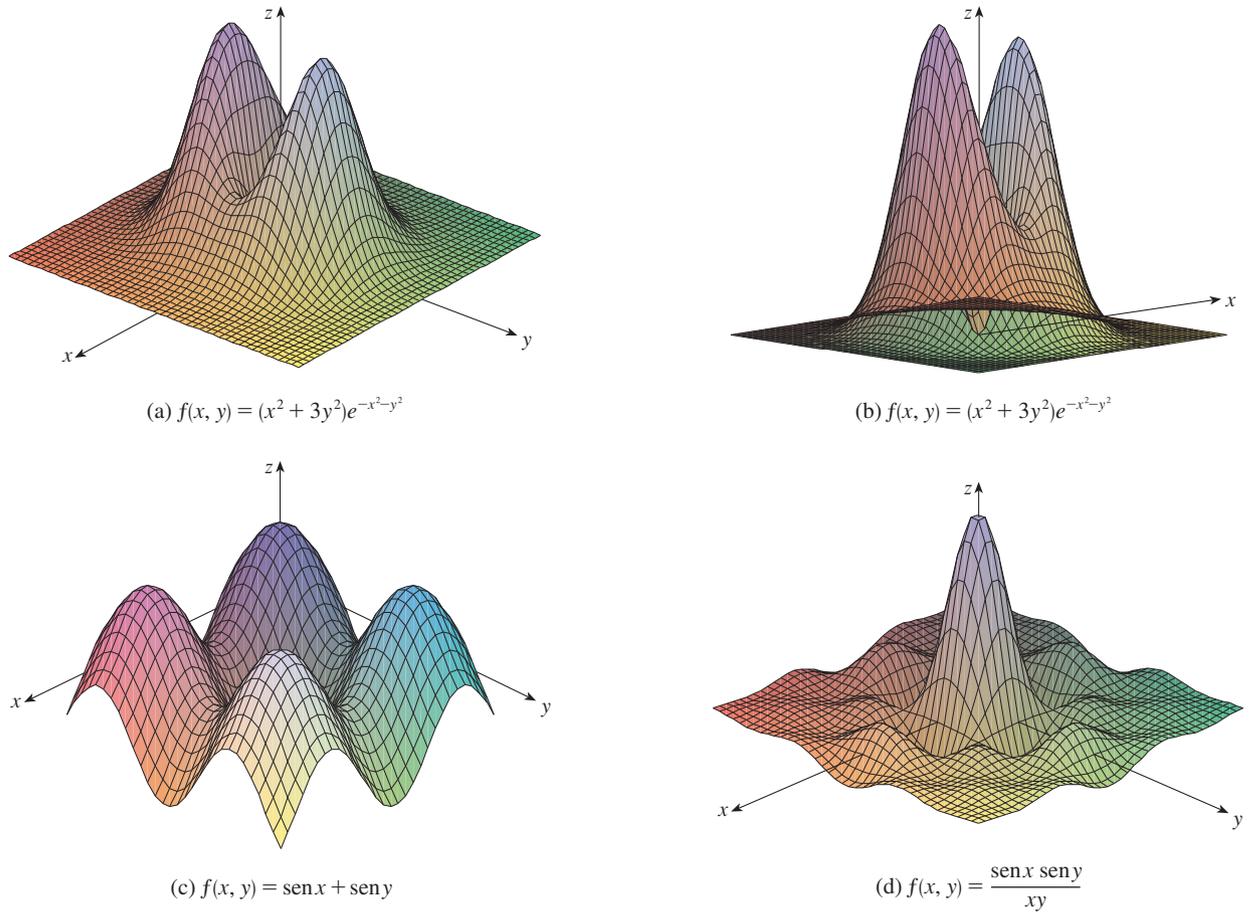


FIGURA 10

### Curvas de Nível

Até aqui vimos dois métodos diferentes para visualizar funções: diagramas de flechas e gráficos. Um terceiro método, emprestado dos cartógrafos, é um mapa de contorno, em que os pontos com elevações constantes são ligados para formar *curvas de contorno* ou *curvas de nível*.

**Definição** As **curvas de nível** de uma função  $f$  de duas variáveis são aquelas com equação  $f(x, y) = k$ , onde  $k$  é uma constante (na imagem de  $f$ ).

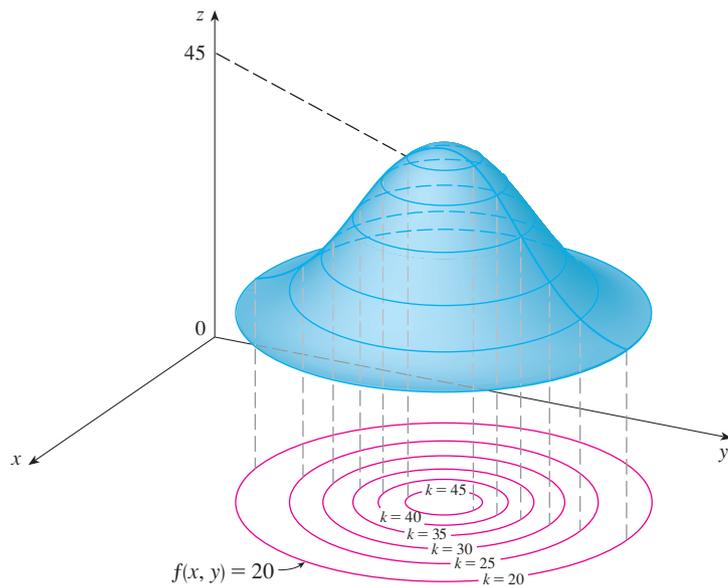


FIGURA 11

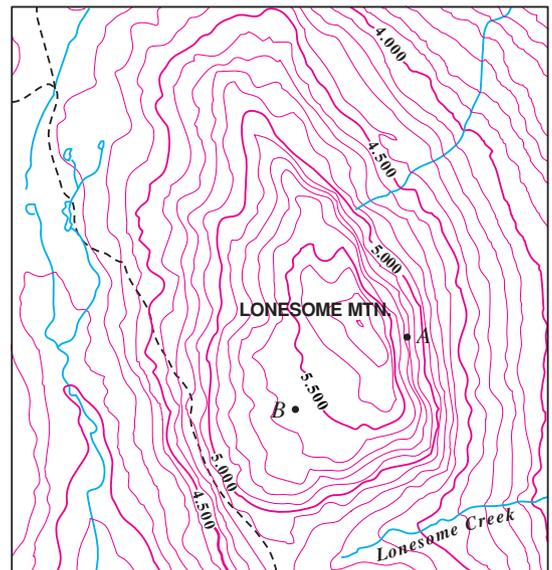


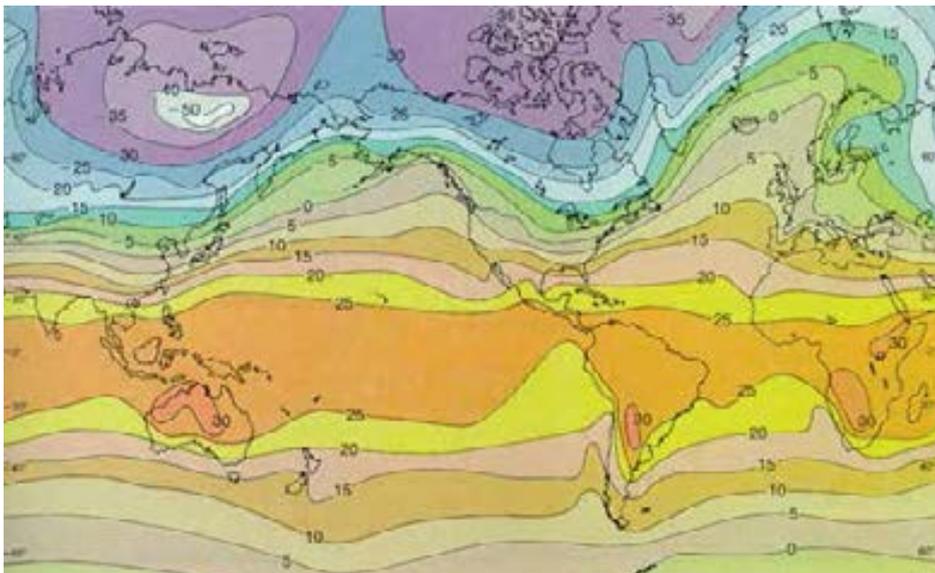
FIGURA 12

Uma curva de nível  $f(x, y) = k$  é o conjunto de todos os pontos do domínio de  $f$  nos quais o valor de  $f$  é  $k$ . Em outras palavras, ela mostra onde o gráfico de  $f$  tem altura  $k$ .

Você pode ver na Figura 11 a relação entre as curvas de nível e os cortes horizontais. As curvas de nível  $f(x, y) = k$  são apenas cortes do gráfico de  $f$  no plano horizontal  $z = k$  projetados sobre o plano  $xy$ . Assim, se você traçar as curvas de nível da função e visualizá-las elevadas para a superfície na altura indicada, poderá imaginar o gráfico da função colocando as duas informações juntas. A superfície será mais inclinada onde as curvas de nível estiverem mais próximas umas das outras. Ela será um pouco mais achatada onde as curvas de nível estão distantes umas das outras.

Um exemplo comum de curvas de nível ocorre em mapas topográficos de regiões montanhosas, como o mapa da Figura 12. As curvas de nível são aquelas em que a elevação em relação ao nível do mar é constante. Se você andar sobre um desses contornos, nem descerá nem subirá. Outro exemplo comum é a função temperatura apresentada no parágrafo inicial desta seção. Aqui as curvas de nível são chamadas **curvas isotérmicas** e ligam localidades que têm a mesma temperatura. A Figura 13 mostra um mapa de clima indicando as temperaturas médias do mês de janeiro. Isotérmicas são as curvas que separam as bandas destacadas.

**TEC** Visual 14.1 A apresenta uma animação da Figura 11 ao mostrar as curvas de nível sendo elevadas para os gráficos das funções.



**FIGURA 13**  
Temperaturas médias ao nível do mar no mês de janeiro, em graus Celsius  
TARBUCK, EDWARD J.; TASA, DENNIS, *ATMOSPHERE, THE: AN INTRODUCTION TO METEOROLOGY*, 11. ed.  
© 2010. Impresso e reproduzido eletronicamente com permissão da Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ

**EXEMPLO 9** Um mapa de contorno para uma função  $f$  é mostrado na Figura 14. Use-o para estimar os valores de  $f(1, 3)$  e  $f(4, 5)$ .

**SOLUÇÃO** O ponto  $(1, 3)$  está na parte entre as curvas de nível cujos valores de  $z$  são 70 e 80. Estimamos que

$$f(1, 3) \approx 73$$

Da mesma forma, estimamos que  $f(4, 5) \approx 56$

**EXEMPLO 10** Esboce as curvas de nível da função  $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$  para os valores  $k = -6, 0, 6, 12$ .

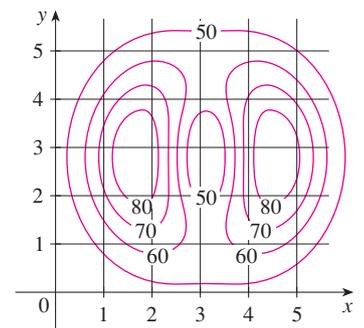
**SOLUÇÃO** As curvas de nível são

$$6 - 3x - 2y = k \quad \text{ou} \quad 3x + 2y + (k - 6) = 0$$

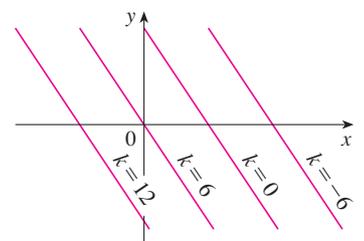
Essa é uma família de retas com inclinação  $-\frac{3}{2}$ . As quatro curvas de nível particulares pedidas com  $k = -6, 0, 6$  e  $12$  são  $3x + 2y - 12 = 0$ ,  $3x + 2y - 6 = 0$ ,  $3x + 2y = 0$  e  $3x + 2y + 6 = 0$ . Elas estão esboçadas na Figura 15. As curvas de nível são retas paralelas, igualmente espaçadas, porque o gráfico de  $f$  é um plano (veja a Figura 6).

**EXEMPLO 11** Esboce as curvas de nível da função

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, 3$$



**FIGURA 14**

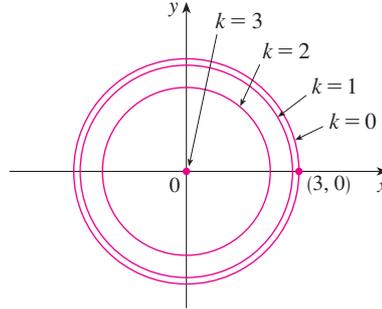


**FIGURA 15**  
Mapa de contorno de  $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

**SOLUÇÃO** As curvas de nível são

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

Essa é uma família de circunferências concêntricas com centro em  $(0, 0)$  e raio  $\sqrt{9 - k^2}$ . Os casos  $k = 0, 1, 2, 3$  são mostrados na Figura 16. Tente visualizar essas curvas de nível elevadas para formar uma superfície e compare com o gráfico de  $g$  (um hemisfério) na Figura 7. (Veja a TEC Visual 14.1A.)



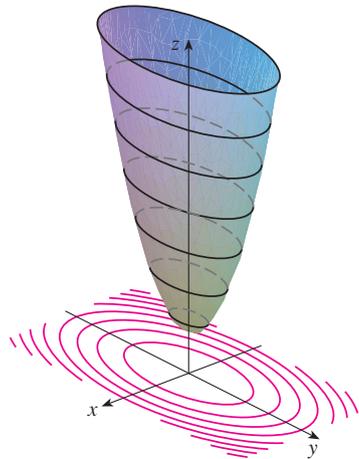
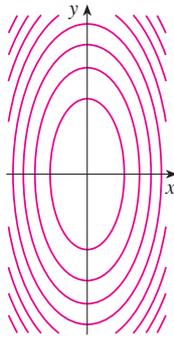
**FIGURA 16**  
Mapa de contorno de  $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

**EXEMPLO 12** Esboce algumas curvas de nível da função  $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$ .

**SOLUÇÃO** As curvas de nível são

$$4x^2 + y^2 + 1 = k \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{\frac{1}{4}(k-1)} + \frac{y^2}{k-1} = 1$$

que, para  $k > 1$ , descrevem uma família de elipses com semieixos  $\frac{1}{2}\sqrt{k-1}$  e  $\sqrt{k-1}$ . A Figura 17(a) mostra um mapa de contorno de  $h$  desenhado por um computador. A Figura 17(b) apresenta essas curvas de nível elevadas para o gráfico de  $h$  (um parabolóide elíptico), onde elas se tornam os cortes horizontais. Vemos na Figura 17 como o gráfico de  $h$  é montado a partir de suas curvas de nível.

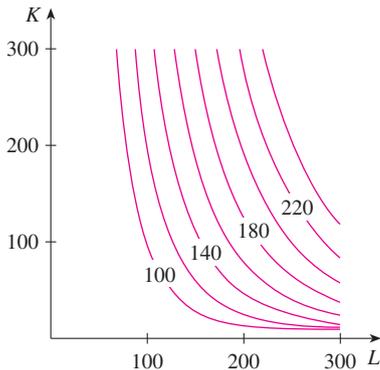


(a) Mapa de contorno

(b) Cortes horizontais são curvas de nível elevadas

**FIGURA 17**

O gráfico de  $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$  é formado levantando-se as curvas de nível.



**FIGURA 18**

**EXEMPLO 13** Trace as curvas de nível da função de produção de Cobb-Douglas do Exemplo 3.

**SOLUÇÃO** Na Figura 18 usamos o computador para desenhar um mapa de contorno da função de produção de Cobb-Douglas

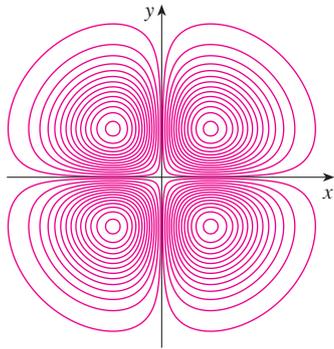
$$P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$$

As curvas de nível são rotuladas com o valor da produção  $P$ . Por exemplo, a curva de nível indicada com 140 mostra todos os valores da mão de obra  $L$  e do capital de investimento  $K$  que resultam em uma produção de  $P = 140$ . Vemos que, para um valor fixo de  $P$ ,  $L$  aumenta e  $K$  decresce e vice-versa.

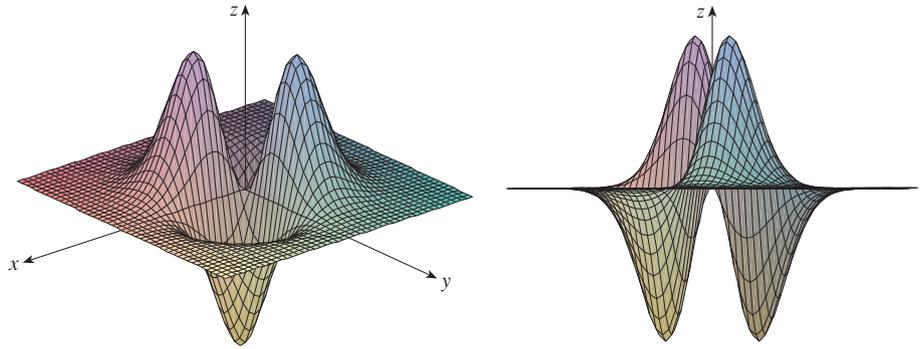
Para alguns propósitos, o mapa de contorno é mais útil que um gráfico. Certamente isto é verdadeiro no Exemplo 13. (Compare a Figura 18 com a Figura 8.) Isso também é verdadeiro na estimativa dos valores da função, como no Exemplo 9.

**TEC** Visual 14.1B demonstra a conexão entre as superfícies e seus mapas de contorno.

A Figura 19 apresenta algumas curvas de nível geradas por computador juntamente com os gráficos correspondentes. Observe que as curvas de nível na parte (c) da figura aparecem muito amontoadas perto da origem. Isso corresponde ao fato de o gráfico na parte (d) ser muito íngreme perto da origem.



(a) Curvas de nível de  $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



(b) Duas vistas de  $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$

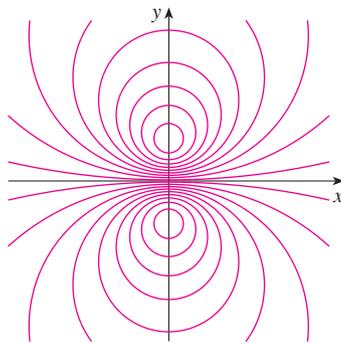
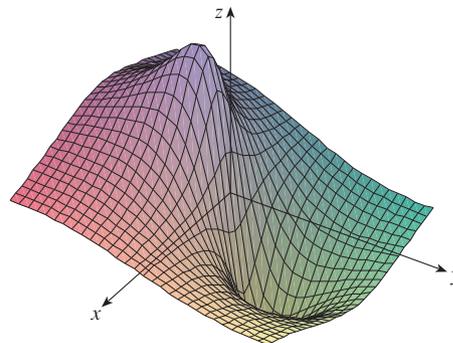


FIGURA 19

(c) Curvas de nível de  $f(x, y) = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$



(d)  $f(x, y) = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

### Funções de Três ou Mais Variáveis

Uma **função com três variáveis**,  $f$ , é uma regra que associa a cada tripla ordenada  $(x, y, z)$  em um domínio  $D \subset \mathbb{R}^3$  um único número real, denotado por  $f(x, y, z)$ . Por exemplo, a temperatura  $T$  em um ponto da superfície terrestre depende da latitude  $x$  e da longitude  $y$  do ponto e do tempo  $t$ , de modo que podemos escrever  $T = f(x, y, t)$ .

**EXEMPLO 14** Encontre o domínio de  $f$  se

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \operatorname{sen} z$$

**SOLUÇÃO** A expressão para  $f(x, y, z)$  é definida enquanto  $z - y > 0$ , assim, o domínio de  $f$  é

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\}$$

Esse é um **semiespaço** que consiste em todos pontos que estão acima do plano  $z = y$ .

É muito difícil visualizar uma função de  $f$  de três variáveis por seu gráfico, já que ele estaria em um espaço de quatro dimensões. No entanto, obtemos certo conhecimento de  $f$  ao examinar suas **superfícies de nível**, que são aquelas com equações  $f(x, y, z) = k$ , onde  $k$  é uma constante. Se o ponto  $(x, y, z)$  move-se ao longo de uma superfície de nível, o valor  $f(x, y, z)$  permanece fixo.

**EXEMPLO 15** Encontre as superfícies de nível da função.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

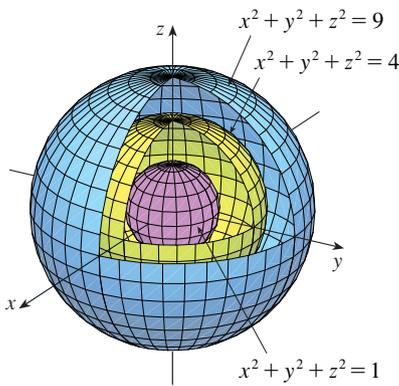


FIGURA 20

**SOLUÇÃO** As superfícies de nível são  $x^2 + y^2 + z^2 = k$ , onde  $k \geq 0$ . Elas formam uma família de esferas concêntricas com raio  $\sqrt{k}$ . (Veja a Figura 20.) Assim, enquanto  $(x, y, z)$  varia sobre qualquer esfera com centro  $O$ , o valor de  $f(x, y, z)$  permanece fixo.

Funções com qualquer número de variáveis podem ser consideradas. Uma **função com  $n$  variáveis** é uma regra que associa um número  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  a uma  $n$ -upla  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de números reais. Denotamos por  $\mathbb{R}^n$  o conjunto de todas essas  $n$ -uplas. Por exemplo, se uma companhia usa  $n$  ingredientes diferentes na fabricação de um produto alimentício,  $c_i$  é o custo por unidade do  $i$ -ésimo ingrediente e  $x_i$  unidades do ingrediente são usadas; então o custo total  $C$  dos ingredientes é uma função das  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$C = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

A função de  $f$  é de valor real cujo domínio é um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Por vezes, usamos uma notação vetorial para escrever estas funções de maneira mais compacta: Se  $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ , frequentemente escrevemos  $f(\mathbf{x})$  no lugar  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Com essa notação, podemos reescrever a função definida na Equação 3 como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

onde  $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, \dots, c_n \rangle$  e  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$  denota o produto escalar dos vetores  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{x}$  em  $V_n$ .

Em vista da correspondência de um-para-um entre os pontos  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  em  $\mathbb{R}^n$  e seus vetores posição  $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  em  $V_n$ , temos três maneiras de ver uma função  $f$  definida em um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ :

1. Como uma função de  $n$  variáveis reais  $x_1, x_2, \dots, x_n$
2. Como uma função de um único ponto  $n$ -dimensional  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
3. Como uma função de um único vetor  $n$ -dimensional  $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$

Veremos que todos os três pontos de vista são úteis.

## 14.1 Exercícios

1. No Exemplo 2 consideramos a função  $W = f(T, v)$ , onde  $W$  era o índice de sensação térmica,  $T$  é a temperatura real, e  $v$  é a velocidade do vento. A representação numérica foi fornecida pela Tabela 1.
  - (a) Qual é o valor de  $f(-15, 40)$ ? Qual é o seu significado?
  - (b) Descreva em palavras o significado da questão “Para quais valores de  $v$  é verdade que  $f(-20, v) = -30$ ?”. Em seguida, responda à questão.
  - (c) Descreva o significado da questão “Para quais valores de  $T$  é verdade que  $f(T, 20) = -49$ ?”. Em seguida, responda à questão.
  - (d) Qual o significado da função  $W = f(-5, v)$ ? Descreva seu comportamento.
  - (e) Qual o significado da função  $W = f(T, 50)$ ? Descreva seu comportamento.
2. O *índice I de temperatura-umidade* (ou simplesmente *humidex*) é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real é  $T$  e a umidade relativa é  $h$ , de modo que podemos escrever  $I = f(T, h)$ . A tabela seguinte com valores de  $I$  foi extraída de uma tabela do Environment Canada.

TABELA 3

Temperatura aparente como função da temperatura e da umidade

		Umidade relativa(%)					
		20	30	40	50	60	70
Temperatura real (°C)	$T \ h$	20	20	20	21	22	23
	25	25	25	26	28	30	32
	30	30	31	34	36	38	41
	35	36	39	42	45	48	51
	40	43	47	51	55	59	63

- (a) Qual é o valor de  $f(35, 60)$ ? Qual é o seu significado?
- (b) Para que valor de  $h$  temos  $f(30, h) = 36$ ?
- (c) Para que valor de  $T$  temos  $f(T, 40) = 42$ ?
- (d) Quais são os significados das funções  $I = f(20, h)$  e  $I = f(40, h)$ ? Compare o comportamento dessas duas funções de  $h$ .

3. Um fabricante modelou sua função  $P$  da produção anual (o valor monetário de toda a produção em milhões de dólares) como uma função de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1,47L^{0,65}K^{0,35}$$

onde  $L$  é o número de horas trabalhadas (em milhares) e  $K$  é o capital investido (em milhões de dólares). Encontre  $P(120, 20)$  e interprete-o.

4. Verifique se, para a função de produção de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$$

discutida no Exemplo 3, a produção dobrará se as quantidades de trabalho e a de capital investido forem dobradas. Determine se isso também é verdade para uma função de produção genérica

$$P(L, K) = bL^\alpha K^{1-\alpha}$$

5. Um modelo para a área da superfície de um corpo humano é dado pela função

$$S = f(w, h) = 0,1091w^{0,425}h^{0,725}$$

onde  $w$  é o peso (em libras),  $h$  é a altura (em polegadas) e  $S$  é medida em pés quadrados.

- (a) Encontre  $f(160, 70)$  e interprete-a.  
 (b) Qual é sua própria área de superfície?  
 6. O indicador de sensação térmica  $W$  discutido no Exemplo 2 foi modelado pela seguinte função:

$$W(T, v) = 13,12 + 0,6215T - 11,37v^{0,16} + 0,3965Tv^{0,16}$$

Verifique quão próximo este modelo está dos valores da Tabela 1 para alguns valores de  $T$  e  $v$ .

7. A altura  $h$  de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento  $v$  e do tempo  $t$  durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função  $h = f(v, t)$ , dados em metros, são apresentados na Tabela 4.

- (a) Qual é o valor de  $f(80, 15)$ ? Qual é o seu significado?  
 (b) Qual o significado da função  $h = f(60, t)$ ? Descreva seu comportamento.  
 (c) Qual o significado da função  $h = f(v, 30)$ ? Descreva seu comportamento.

Duração (horas)

$v \backslash t$	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

8. Uma empresa fabrica caixas de papelão de três tamanhos: pequena, média e grande. O custo é de \$ 2,50 para fabricar uma

caixa pequena, \$ 4,00 para uma caixa média e \$ 4,50 para uma caixa grande. Os custos fixos são de \$ 8.000.

- (a) Expresse o custo da fabricação de  $x$  caixas pequenas,  $y$  caixas médias e  $z$  caixas grandes como uma função de três variáveis:  $C = f(x, y, z)$ .  
 (b) Encontre  $f(3\ 000, 5\ 000, 4\ 000)$  e interprete-a.  
 (c) Qual o domínio de  $f$ ?

9. Seja  $g(x, y) = \cos(x + 2y)$ .

- (a) Calcule  $g(2, -1)$ .  
 (b) Determine o domínio de  $g$ .  
 (c) Determine a imagem de  $g$ .

10. Seja  $F(x, y) = 1 + \sqrt{4 - y^2}$ .

- (a) Calcule  $F(3, 1)$ .  
 (b) Determine e esboce o domínio de  $F$ .  
 (c) Determine a imagem de  $F$ .

11. Seja  $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$ .

- (a) Calcule  $f(1, 1, 1)$ .  
 (b) Determine o domínio de  $f$ .

12. Seja  $g(x, y, z) = x^3 y^2 z \sqrt{10 - x - y - z}$ .

- (a) Calcule  $g(1, 2, 3)$ .  
 (b) Determine o domínio de  $g$ .

13–22 Determine e esboce o domínio da função.

13.  $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

14.  $f(x, y) = \sqrt{xy}$

15.  $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

16.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

17.  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

18.  $f(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

19.  $f(x, y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

20.  $f(x, y) = \arcsen(x^2 + y^2 - 2)$

21.  $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

22.  $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

23–31 Esboce o gráfico da função.

23.  $f(x, y) = 1 + y$

24.  $f(x, y) = 2 - x$

25.  $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$

26.  $f(x, y) = e^{-y}$

27.  $f(x, y) = y^2 + 1$

28.  $f(x, y) = 1 + 2x^2 + 2y^2$

29.  $f(x, y) = 9 - x^2 - 9y^2$

30.  $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$

31.  $f(x, y) = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$

32. Faça uma correspondente entre a função e seu gráfico (identificado por I–VI). Justifique sua escolha.

(a)  $f(x, y) = |x| + |y|$

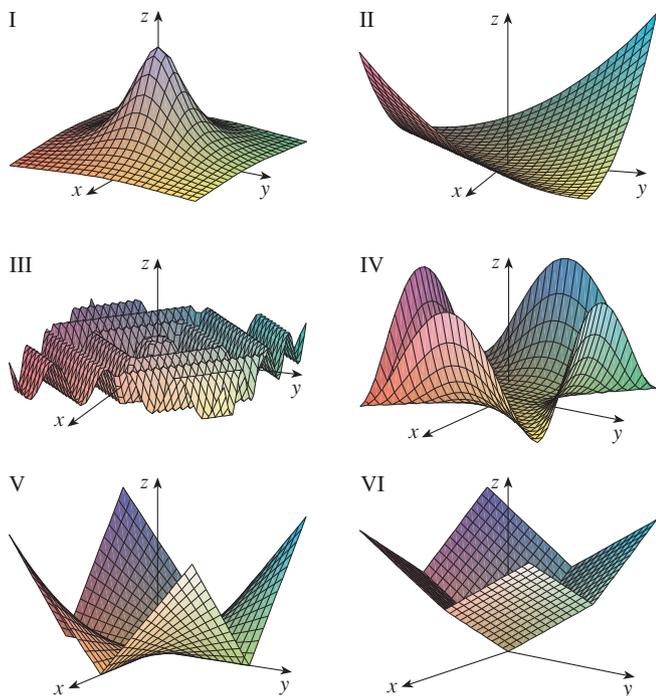
(b)  $f(x, y) = |xy|$

(c)  $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$

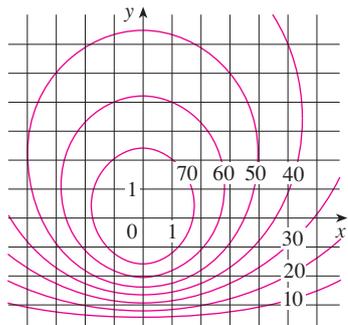
(d)  $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$

(e)  $f(x, y) = (x - y)^2$

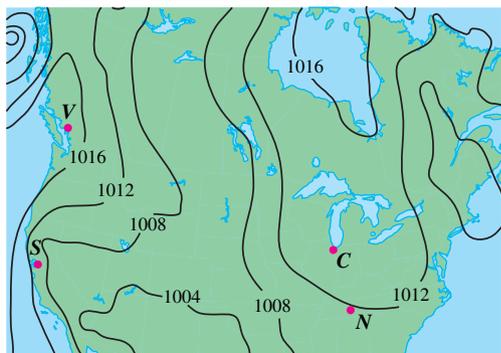
(f)  $f(x, y) = \text{sen}(|x| + |y|)$



33. Um mapa de contorno de uma função  $f$  é apresentado. Use-o para estimar os valores de  $f(-3, 3)$  e  $f(3, -2)$ . O que você pode dizer sobre a forma do gráfico?

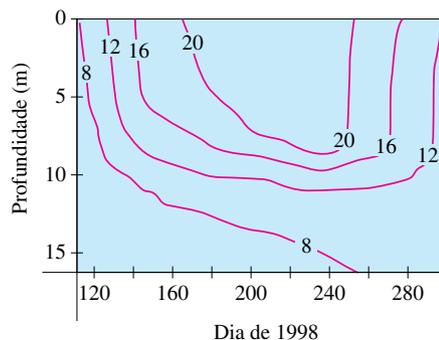


34. Um mapa de contorno da pressão atmosférica na América do Norte é mostrado em 12 de agosto de 2008. Nas curvas de nível (chamadas isobáricas) a pressão é indicada em milibares (mb).  
 (a) Estime a pressão em  $C$  (Chicago),  $N$  (Nashville),  $S$  (São Francisco) e  $V$  (Vancouver).  
 (b) Em quais desses lugares os ventos eram mais fortes?

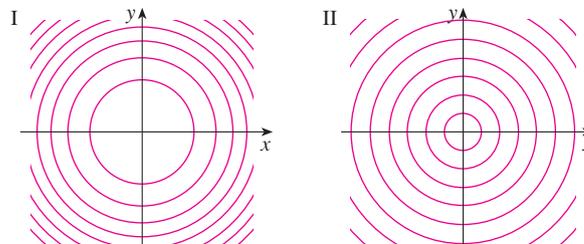


35. As curvas de nível (isotérmicas) são mostradas para a temperatura da água (em  $^{\circ}\text{C}$ ) em Long Lake (Minnesota) em 1998 como

uma função de profundidade e da época do ano. Estime a temperatura do lago em 9 de junho (dia 160) em uma profundidade de 10 m e em 29 de junho (dia 180) em uma profundidade de 5 m.

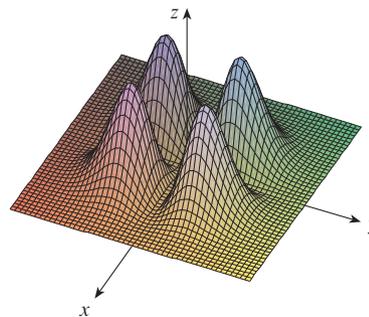


36. Dois mapas de contorno são mostrados na figura. Um é de uma função  $f$  cujo gráfico é um cone. O outro é de uma função  $g$  cujo gráfico é um parabolóide. Qual é qual? Por quê?

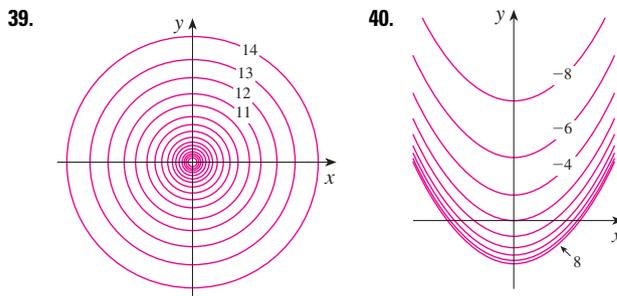


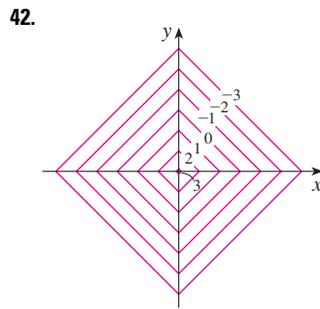
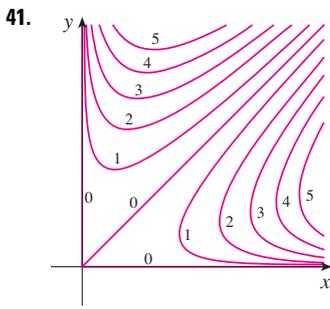
37. Localize os pontos  $A$  e  $B$  no mapa da Montanha Solitária (Figura 12). Como você descreveria o terreno perto de  $A$ ? É perto de  $B$ ?

38. Faça um esboço de um mapa de contorno da função cujo gráfico está mostrado.



39–42 Um mapa de contorno de uma função é mostrado. Use-o para fazer um esboço do gráfico da  $f$ .





43–50 Faça o mapa de contorno da função mostrando várias curvas de nível.

43.  $f(x, y) = (y - 2x)^2$       44.  $f(x, y) = x^3 - y$   
 45.  $f(x, y) = \sqrt{x} + y$       46.  $f(x, y) = \ln(x^2 + 4y^2)$   
 47.  $f(x, y) = ye^x$       48.  $f(x, y) = y \sec x$   
 49.  $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$       50.  $f(x, y) = y/(x^2 + y^2)$

51–52 Faça o esboço do mapa de contorno e do gráfico da função e compare-os.

51.  $f(x, y) = x^2 + 9y^2$       52.  $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

53. Uma placa fina de metal, localizada no plano  $xy$ , tem temperatura  $T(x, y)$  no ponto  $(x, y)$ . As curvas de nível de  $T$  são chamadas *isotérmicas* porque todos os pontos em uma dessas curvas

têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função temperatura for dada por

$$T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$$

54. Se  $V(x, y)$  é o potencial elétrico em um ponto  $(x, y)$  no plano  $xy$ , então as curvas de nível de  $V$  são chamadas *curvas equipotenciais*, porque em todos os pontos dessa curva o potencial elétrico é o mesmo. Esboce algumas curvas equipotenciais de  $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ , onde  $c$  é uma constante positiva.

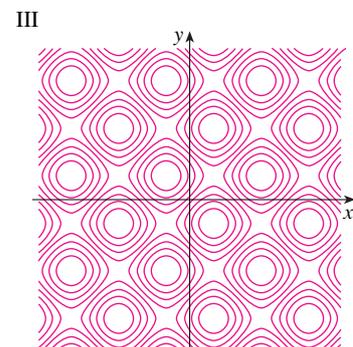
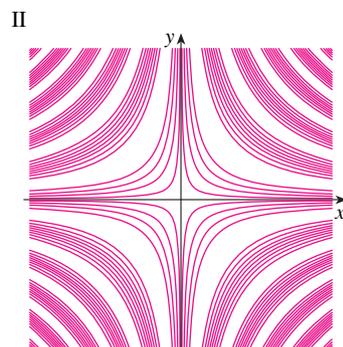
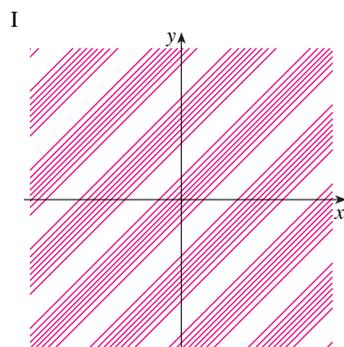
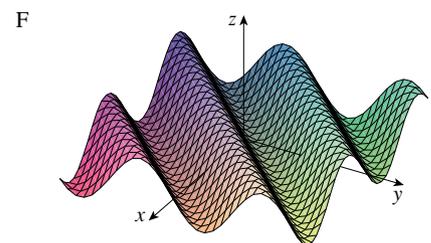
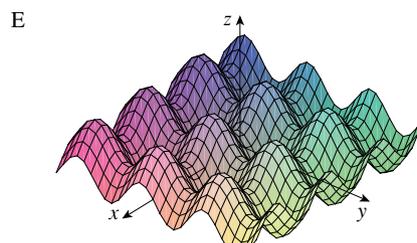
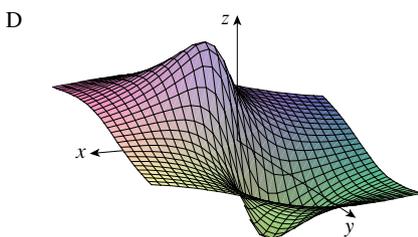
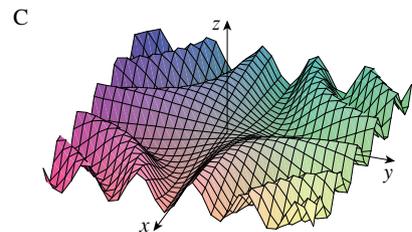
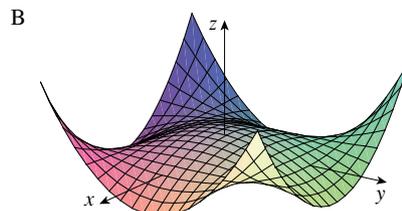
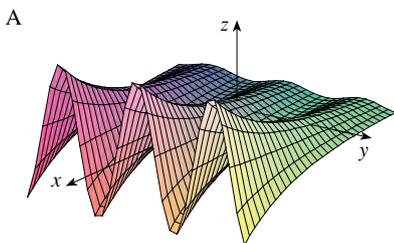


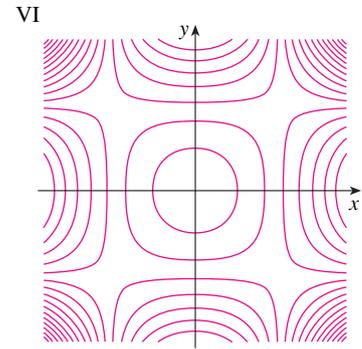
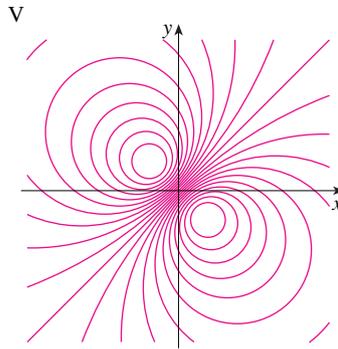
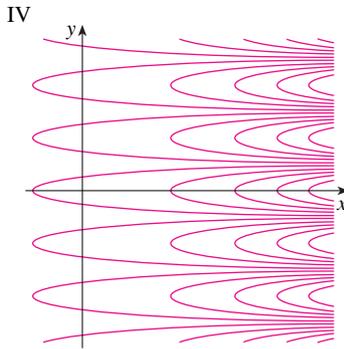
55–58 Utilize um computador para traçar o gráfico da função usando vários domínios e pontos de vista. Imprima a que, em sua opinião, oferece a melhor visão. Se seu programa também produz curvas de nível, trace o mapa de contorno da mesma função e compare.

55.  $f(x, y) = xy^2 - x^3$  (sela do macaco)  
 56.  $f(x, y) = xy^3 - yx^3$  (sela do cachorro)  
 57.  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/3}(\sin(x^2) + \cos(y^2))$   
 58.  $f(x, y) = \cos x \cos y$

59–64 Faça uma correspondência entre a função (a) e seu gráfico (indicado por A–F a seguir), (b) e seus mapas de contorno (indicado por I–VI). Justifique sua escolha.

59.  $z = \sin(xy)$       60.  $z = e^x \cos y$   
 61.  $z = \sin(x - y)$       62.  $z = \sin x - \sin y$   
 63.  $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$       64.  $z = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$





65–68 Descreva as superfícies de nível da função.

65.  $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

66.  $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

67.  $f(x, y, z) = y^2 + z^2$

68.  $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$

69–70 Descreva como o gráfico de  $g$  é obtido a partir do gráfico de  $f$ .

69. (a)  $g(x, y) = f(x, y) + 2$

(b)  $g(x, y) = 2f(x, y)$

(c)  $g(x, y) = -f(x, y)$

(d)  $g(x, y) = 2 - f(x, y)$

70. (a)  $g(x, y) = f(x - 2, y)$

(b)  $g(x, y) = f(x, y + 2)$

(c)  $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$

71–72 Utilize um computador para traçar o gráfico da função usando vários domínios e pontos de vista. Imprima aquela que apresente melhor os “picos e vales”. Você acha que essa função tem um valor máximo? Você poderia identificar os pontos do gráfico correspondentes aos “máximos locais”? E aos “mínimos locais”?

71.  $f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$

72.  $f(x, y) = xy e^{-x^2 - y^2}$

73–74 Utilize um computador para traçar o gráfico da função usando vários domínios e pontos de vista. Comente o comportamento da função no limite. O que acontece quando  $x$  e  $y$  se tornam muito grandes? O que acontece quando  $(x, y)$  se aproxima da origem?

73.  $f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$

74.  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

75. Use um computador para investigar a família de funções  $f(x, y) = e^{cx^2 + y^2}$ . De que maneira a forma do gráfico depende de  $c$ ?

76. Use um computador para investigar a família de superfícies

$$z = (ax^2 + by^2)e^{-x^2 - y^2}$$

Como a forma do gráfico depende dos números  $a$  e  $b$ ?

77. Use um computador para investigar a família de superfícies  $z = x^2 + y^2 + cxy$ . Em particular, você deve determinar os valores de transição de  $c$  para os quais a superfície muda de um tipo de superfície quádrlica para outro.

78. Faça o gráfico da função

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = \text{sen}(\sqrt{x^2 + y^2})$$

e

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Em geral, se  $g(t)$  é uma função de uma variável, como obter o gráfico de

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$$

a partir do gráfico de  $g$ ?

79. (a) Mostre que, tomando logaritmos, a função geral de Cobb-Douglas  $P = bL^\alpha K^{1-\alpha}$  pode ser expressa como

$$\ln \frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln \frac{L}{K}$$

(b) Se deixarmos  $x = \ln(L/K)$  e  $y = \ln(P/K)$ , a equação no item (a) torna-se a equação linear  $y = \alpha x + \ln b$ . Use a Tabela 2 (no Exemplo 3) para fazer a tabela dos valores de  $\ln(L/K)$  e  $\ln(P/K)$  para os anos 1899–1922. Em seguida, use uma calculadora gráfica ou o computador para encontrar a linha de regressão dos quadrado mínimos pelos pontos  $(\ln(L/K), \ln(P/K))$ .

(c) Deduza que a função de produção de Cobb-Douglas é  $P = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$ .

## 14.2 Limites e Continuidade

Vamos comparar o comportamento das funções

$$f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

quando  $x$  e  $y$  se aproximam de 0 [e, portanto, o ponto  $(x, y)$  se aproxima da origem].

As Tabelas 1 e 2 mostram valores de  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$ , com precisão de três casas decimais, para pontos  $(x, y)$  próximos da origem. (Observe que nenhuma das funções está definida na origem.)

TABELA 1 Valores de  $f(x, y)$

$x \backslash y$	-1,0	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	1,0
-1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455
-0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
-0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0	0,841	0,990	1,000		1,000	0,990	0,841
0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455

TABELA 2 Valores de  $g(x, y)$

$x \backslash y$	-1,0	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	1,0
-1,0	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000
-0,5	-0,600	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	-0,600
-0,2	-0,923	-0,724	0,000	1,000	0,000	-0,724	-0,923
0	-1,000	-1,000	-1,000		-1,000	-1,000	-1,000
0,2	-0,923	-0,724	0,000	1,000	0,000	-0,724	-0,923
0,5	-0,600	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	-0,600
1,0	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000

Parece que, quando  $(x, y)$  se aproxima de  $(0, 0)$ , os valores de  $f(x, y)$  se aproximam de 1, ao passo que os valores de  $g(x, y)$  não se aproximam de valor algum. Essa nossa observação baseada em evidências numéricas está correta, e podemos escrever

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ não existe}$$

Em geral, usamos a notação

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

para indicar que os valores de  $f(x, y)$  se aproximam do número  $L$  à medida que o ponto  $(x, y)$  se aproxima do ponto  $(a, b)$  ao longo de qualquer caminho que esteja no domínio de  $f$ . Em outras palavras, podemos fazer os valores de  $f(x, y)$  tão próximos de  $L$  quanto quisermos tornando o ponto  $(x, y)$  suficientemente próximo do ponto  $(a, b)$ , mas não igual a  $(a, b)$ . Uma definição mais precisa é a seguinte:

**1 Definição** Seja  $f$  uma função de duas variáveis cujo domínio  $D$  contém pontos arbitrariamente próximos de  $(a, b)$ . Dizemos que o **limite de  $f(x, y)$  quando  $(x, y)$  tende a  $(a, b)$  é  $L$**  e escrevemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

se para todo número  $\varepsilon > 0$  houver um número correspondente de  $\delta > 0$  tal que se  $(x, y) \in D$  e  $0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$  então  $|f(x, y) - L| < \varepsilon$

Outras notações para o limite da Definição 1 são

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = L \quad \text{e} \quad f(x, y) \rightarrow L \text{ as } (x, y) \rightarrow (a, b)$$

Observe que  $|f(x, y) - L|$  corresponde à distância entre os números  $f(x, y)$  e  $L$ , e  $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$  é a distância entre o ponto  $(x, y)$  e o ponto  $(a, b)$ . Assim, a Definição 1 diz que a distância entre  $f(x, y)$  e  $L$  pode ser feita arbitrariamente pequena se tomarmos a

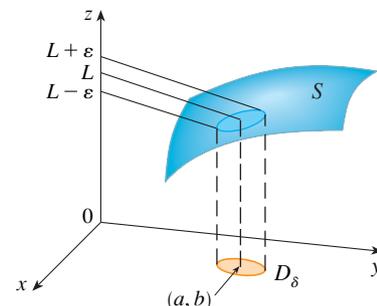
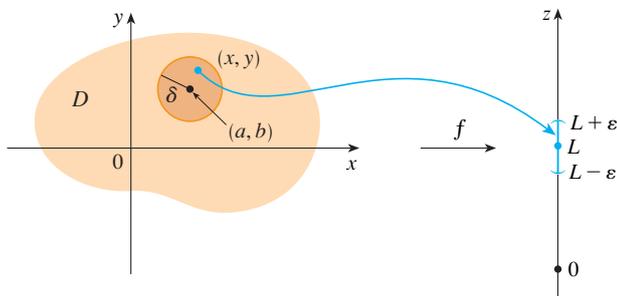


FIGURA 1

FIGURA 2

distância de  $(x, y)$  a  $(a, b)$  suficientemente pequena (mas não nula). A Figura 1 ilustra a Definição 1 por meio de um diagrama de setas. Se qualquer intervalo pequeno  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  for dado em volta de  $L$ , poderemos encontrar um disco  $D_\delta$  com o centro em  $(a, b)$  e raio  $\delta > 0$  tal que  $f$  mapeia todos os pontos em  $D_\delta$  [exceto, possivelmente,  $(a, b)$ ] no intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

Outra ilustração da Definição 1 é dada na Figura 2, onde a superfície  $S$  é o gráfico de  $f$ . Se  $\varepsilon > 0$  for dado, podemos achar  $\delta > 0$  tal que se  $(x, y)$  for restrito ao disco  $D_\delta$  e  $(x, y) \neq (a, b)$ , então a parte correspondente de  $S$  fica entre os planos horizontais  $z = L - \varepsilon$  e  $z = L + \varepsilon$ .

Para as funções de uma única variável, quando fazemos  $x$  tender a  $a$ , só existem duas direções possíveis de aproximação: pela esquerda ou pela direita. Lembremos a partir do Capítulo 2 que se  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  não existe.

Já para as funções de duas variáveis essa situação não é tão simples porque existem infinitas maneiras de  $(x, y)$  se aproximar de  $(a, b)$  por uma quantidade infinita de direções e de qualquer maneira que se queira (veja a Figura 3), bastando que  $(x, y)$  se mantenha no domínio de  $f$ .

A Definição 1 diz que a distância entre  $f(x, y)$  e  $L$  pode ser feita arbitrariamente pequena se tomarmos a distância de  $(x, y)$  para  $(a, b)$  suficientemente pequena (mas não nula). A definição refere-se somente à *distância* entre  $(x, y)$  e  $(a, b)$ . Ela não se refere à direção da abordagem. Portanto, se o limite existe,  $f(x, y)$  deve se aproximar do mesmo valor-limite, independentemente do modo como  $(x, y)$  se aproxima de  $(a, b)$ . Assim, se acharmos dois caminhos diferentes de aproximação ao longo dos quais  $f(x, y)$  tenha limites diferentes, segue então que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$  não existe.

Se  $f(x, y) \rightarrow L_1$  quando  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  ao longo do caminho  $C_1$  e  $f(x, y) \rightarrow L_2$  quando  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  ao longo do caminho  $C_2$ , com  $L_1 \neq L_2$ , então  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$  não existe.

**EXEMPLO 1** Mostre que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  não existe.

**SOLUÇÃO** Seja  $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ . Primeiro vamos considerar  $(0, 0)$  ao longo do eixo  $x$ . Então  $y = 0$  dá  $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$  para todo  $x \neq 0$ , portanto

$$f(x, y) \rightarrow 1 \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ ao longo do eixo } x$$

Agora vamos nos aproximar ao longo do eixo  $y$ , colocando  $x = 0$ . Então

$$f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1 \text{ para todo } y \neq 0, \text{ portanto}$$

$$f(x, y) \rightarrow -1 \text{ quando } (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ ao longo do eixo } y$$

(veja a Figura 4). Como  $f$  tem dois limites diferentes ao longo de duas retas diferentes, o limite não existe. (Isso confirma a conjectura que fizemos com base na evidência numérica no início desta seção.)

**EXEMPLO 2** Se  $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ , será que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  existe?

**SOLUÇÃO** Se  $y = 0$ , então  $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$ . Portanto,

$$f(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ ao longo do eixo } x$$

Se  $x = 0$ , então  $f(0, y) = 0/y^2 = 0$ , portanto

$$f(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ ao longo do eixo } y$$

Apesar de termos encontrado valores idênticos ao longo dos eixos, não podemos afirmar que o limite exista e seja 0. Vamos agora nos aproximar de  $(0, 0)$  ao longo de outra reta; por exemplo,  $y = x$ . Para todo  $x \neq 0$ ,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

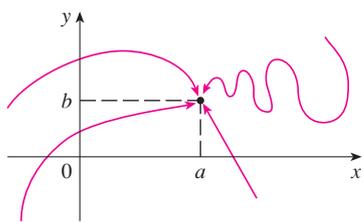


FIGURA 3

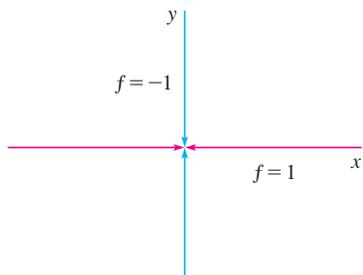


FIGURA 4

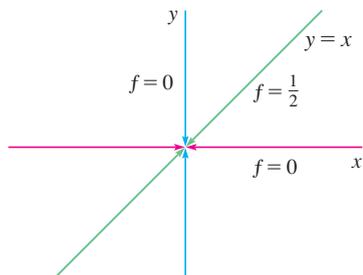


FIGURA 5

Portanto  $f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo de  $y = x$

(Veja a Figura 5.) Como obtivemos valores diferentes para o limite ao longo de caminhos diferentes, podemos afirmar que o limite dado não existe.

A Figura 6 nos dá uma ideia do que acontece no Exemplo 2. A cumeeira que ocorre acima da reta  $y = x$  corresponde ao fato de que  $f(x, y) = \frac{1}{2}$  para todos os pontos  $(x, y)$  dessa reta, exceto na origem.

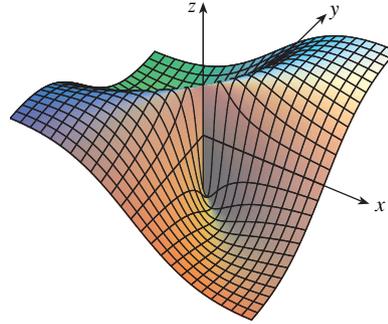


FIGURA 6

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

**EXEMPLO 3** Se  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ , será que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  existe?

**SOLUÇÃO** Com a Solução do Exemplo 2 em mente, vamos tentar economizar tempo deixando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo de qualquer reta não vertical através da origem. Tomemos  $y = mx$ , onde  $m$  é a inclinação da reta e

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2}$$

Portanto  $f(x, y) \rightarrow 0$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo de  $y = mx$

Logo,  $f$  tem o mesmo limite ao longo de qualquer reta não vertical que passe pela origem. Mas isso ainda não garante que o limite seja 0, pois, se tomarmos agora  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo da parábola  $x = y^2$ , teremos

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

Portanto  $f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo de  $x = y^2$

Como caminhos diferentes levaram a resultados diferentes, o limite não existe.

Vamos agora olhar o caso em que o limite *existe*. Como para a função de uma única variável, o cálculo do limite de funções com duas variáveis pode ser muito simplificado usando-se as propriedades dos limites. As Propriedades do Limite listadas na Seção 2.3, no Volume I, podem ser estendidas para as funções de duas variáveis: o limite da soma é a soma dos limites; o limite do produto é o produto dos limites; e assim por diante. Em particular, as seguintes equações são verdadeiras:

$$\boxed{2} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} c = c$$

O Teorema do Confronto também vale.

**EXEMPLO 4** Ache  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$  se existir.

**SOLUÇÃO** Como no Exemplo 3, podemos mostrar que o limite ao longo de uma reta qualquer que passa pela origem é 0. Isso não prova que o limite seja 0, mas o limite ao longo das parábolas  $y = x^2$  e  $x = y^2$  também obtemos o limite 0, portanto começamos a suspeitar que o limite existe e é igual a 0.

A Figura 7 mostra o gráfico da função do Exemplo 3. Observe a cumeeira sobre a pa-

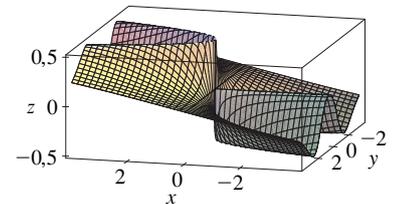


FIGURA 7

Seja  $\varepsilon > 0$ . Queremos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ então } \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

ou seja, 
$$\text{se } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ então } \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

Mas  $x^2 \leq x^2 + y^2$  uma vez que  $y^2 \geq 0$ , portanto  $x^2/(x^2 + y^2) \leq 1$  e, assim,

$$\boxed{3} \quad \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

Dessa forma, se escolhermos  $\delta = \varepsilon/3$  e fizermos  $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ , teremos

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

Logo, pela Definição 1,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

Outro modo de resolver o Exemplo 4 é pelo Teorema do Confronto em vez de usar a Definição 1. De  $\boxed{2}$  segue que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 3|y| = 0$$

e, portanto, a primeira desigualdade em  $\boxed{3}$  mostra que o limite dado é 0.

### Continuidade

Lembremo-nos de que o cálculo de limites de funções *contínuas* de uma única variável é fácil. Ele pode ser obtido por substituição direta, porque, pela definição de função contínua,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Funções contínuas de duas variáveis também são definidas pela propriedade da substituição direta.

**4 Definição** Uma função  $f$  de duas variáveis é dita **contínua em**  $(a, b)$  se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Dizemos que  $f$  é **contínua em**  $D$  se  $f$  for contínua em todo ponto  $(a, b)$  de  $D$ .

O significado intuitivo de continuidade é que, se o ponto  $(x, y)$  varia por uma pequena quantidade, o valor de  $f(x, y)$  variará por uma pequena quantidade. Isso quer dizer que a superfície que corresponde ao gráfico de uma função contínua não tem buracos ou rupturas.

Usando as propriedades de limites, podemos ver que soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas são contínuos em seus domínios. Vamos usar esse fato para dar exemplos de funções contínuas.

Uma **função polinomial de duas variáveis** (ou simplesmente polinômio) é uma soma de termos da forma  $cx^m y^n$ , onde  $c$  é uma constante e  $m$  e  $n$  são números inteiros não negativos. Uma **função racional** é uma razão de polinômios. Por exemplo,

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$$

é um polinômio, ao passo que

$$g(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2}$$

é uma função racional.

Os limites em  $\boxed{2}$  mostram que as funções  $f(x, y) = x$ ,  $g(x, y) = y$  e  $h(x, y) = c$  são contínuas. Como qualquer polinômio pode ser obtido a partir das funções  $f$ ,  $g$  e  $h$  por multiplicação e adição, segue que *todos os polinômios são funções contínuas em*  $\mathbb{R}^2$ . Da mesma forma, qualquer função racional é contínua em seu domínio, porque ela é o quociente de funções contínuas.

**EXEMPLO 5** Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$ .

**SOLUÇÃO** Como  $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$  é um polinômio, ela é contínua em qualquer lugar, portanto podemos calcular seu limite pela substituição direta:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11$$

**EXEMPLO 6** Onde a função  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  é contínua?

**SOLUÇÃO** A função  $f$  é descontínua em  $(0, 0)$ , pois ela não está definida nesse ponto. Como  $f$  é uma função racional, ela é contínua em seu domínio, o que corresponde ao conjunto  $D = \{(x, y) | (x, y) \neq (0, 0)\}$ .

**EXEMPLO 7** Seja

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Aqui  $g$  está definida em  $(0, 0)$ , mas  $g$  ainda é descontínua porque  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$  não existe (veja o Exemplo 1).

**EXEMPLO 8** Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Sabemos que  $f$  é contínua para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , uma vez que ela é uma função racional definida nessa região. Do Exemplo 4, temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

Portanto  $f$  é contínua em  $(0, 0)$  e, conseqüentemente, contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

Como para as funções de uma variável, a composição é outra maneira de combinar funções contínuas para obter outra também contínua. De fato, pode ser mostrado que, se  $f$  é uma função contínua de duas variáveis e  $g$  é uma função contínua de uma única variável definida na imagem de  $f$ , a função composta  $h = g \circ f$  definida por  $h(x, y) = g(f(x, y))$  também é contínua.

**EXEMPLO 9** Onde a função  $h(x, y) = \text{arctg}(y/x)$  é contínua?

**SOLUÇÃO** A função  $f(x, y) = y/x$  é racional e, desse modo, contínua em todo lugar, exceto sobre a reta  $x = 0$ . A função  $g(t) = \text{arctg } t$  é contínua em toda parte. Logo, a função composta

$$g(f(x, y)) = \text{arctg}(y/x) = h(x, y)$$

é contínua, exceto onde  $x = 0$ . O desenho da Figura 9 mostra a ruptura existente no gráfico da função  $h$  acima do eixo  $y$ .

### Funções de Três ou Mais Variáveis

Tudo o que fizemos até aqui pode ser estendido para as funções com três ou mais variáveis. A notação

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} f(x, y, z) = L$$

significa que os valores de  $f(x, y, z)$  se aproximam do número  $L$  à medida que o ponto  $(x, y, z)$  se aproxima do ponto  $(a, b, c)$  ao longo de qualquer caminho que esteja no domínio de  $f$ . Como a distância entre dois pontos  $(x, y, z)$  e  $(a, b, c)$  em  $\mathbb{R}^3$  é dada por  $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$ , podemos escrever a definição precisa da seguinte forma: para todo número  $\varepsilon > 0$  existe um número correspondente  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } (x, y, z) \text{ está no domínio de } f \text{ e } 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < \delta$$

$$\text{então } |f(x, y, z) - L| < \varepsilon$$

A Figura 8 mostra o gráfico da função contínua do Exemplo 8.

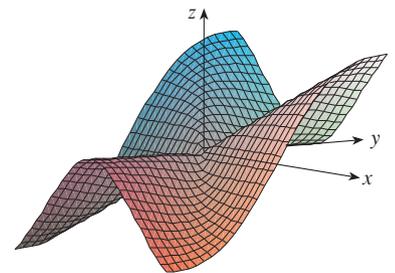


FIGURA 8

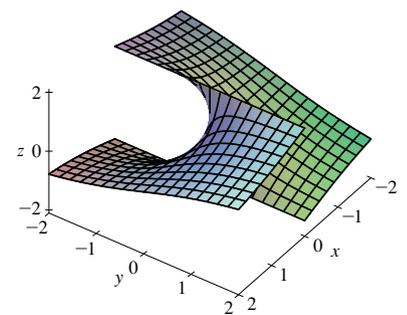


FIGURA 9

A função  $h(x, y) = \text{arctg}(y/x)$  é descontínua, onde  $x = 0$ .

A função  $f$  é **contínua** em  $(a, b, c)$  se

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$$

Por exemplo, a função

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

é uma função racional em três variáveis, e portanto é contínua em todo ponto de  $\mathbb{R}^3$ , exceto onde  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Em outras palavras, é descontínua na esfera com o centro na origem e raio 1.

Se usarmos a notação vetorial introduzida no fim da Seção 14.1, poderemos escrever as definições de limite para as funções de duas ou três variáveis de uma forma compacta, como a seguir.

**5** Se  $f$  é definida em um subconjunto  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ , então  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$  significa que para todo número  $\varepsilon > 0$  existe um número correspondente  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \text{ então } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

Observe que se  $n = 1$ , então  $\mathbf{x} = x$  e  $\mathbf{a} = a$  e **5** é exatamente a definição do limite para as funções de uma única variável. Para o caso  $n = 2$ , temos  $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$ ,  $\mathbf{a} = \langle a, b \rangle$  e  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ , de modo que **5** se torna a Definição 1. Se  $n = 3$ , então  $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ ,  $\mathbf{a} = \langle a, b, c \rangle$ , e **5** é a definição de limite de uma função de três variáveis. Em cada caso, a definição de continuidade pode ser escrita como

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

## 14.2 Exercícios

1. Suponha que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (3, 1)} f(x, y) = 6$ . O que podemos dizer do valor de  $f(3, 1)$ ? E se a função  $f$  for contínua?

2. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
- A temperatura externa como função da latitude, da longitude e do tempo.
  - A altura acima do nível do mar como função da longitude, da latitude e do tempo.
  - O custo da tarifa do táxi como função da distância percorrida e do tempo gasto.

**3–4** Utilize uma tabela de valores numéricos de  $f(x, y)$  para  $(x, y)$  perto da origem para conjecturar sobre o limite de  $f(x, y)$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Em seguida, explique por que sua conjectura está correta.

3.  $f(x, y) = \frac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$       4.  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

**5–22** Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

5.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} (5x^3 - x^2y^2)$       6.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, -1)} e^{-xy} \cos(x + y)$

7.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 1)} \frac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$       8.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \ln\left(\frac{1 + y^2}{x^2 + xy}\right)$

9.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^4 - 4y^4}{x^2 + 2y^2}$

11.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy \cos y}{3x^2 + y^2}$

13.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

15.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2ye^y}{x^4 + 4y^2}$

17.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

19.  $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (\pi, \theta, 1)} e^{y^2} \operatorname{tg}(xz)$

21.  $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$

10.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 + \operatorname{sen}^2 y}{2x^2 + y^2}$

12.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{xy - y}{(x - 1)^2 + y^2}$

14.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

16.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 2y^2}$

18.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^4}{x^2 + y^8}$

20.  $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$

22.  $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{yz}{x^2 + 4y^2 + 9z^2}$

**23–24** Utilize um gráfico feito por computador para explicar por que o limite não existe.

23.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$       24.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$

25–26 Determine  $h(x, y) = g(f(x, y))$  e o conjunto no qual  $h$  é contínua.

25.  $g(t) = t^2 + \sqrt{t}$ ,  $f(x, y) = 2x + 3y - 6$

26.  $g(t) = t + \ln t$ ,  $f(x, y) = \frac{1 - xy}{1 + x^2y^2}$

 27–28 Trace o gráfico da função e observe onde ela é descontínua. Em seguida, utilize a fórmula para explicar o que você observou.

27.  $f(x, y) = e^{1/(x-y)}$       28.  $f(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$

29–38 Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

29.  $F(x, y) = \frac{xy}{1 + e^{x-y}}$       30.  $F(x, y) = \cos \sqrt{1 + x - y}$

31.  $F(x, y) = \frac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}$       32.  $H(x, y) = \frac{e^x + e^y}{e^{xy} - 1}$

33.  $G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

34.  $G(x, y) = \text{tg}^{-1}((x + y)^{-2})$

35.  $f(x, y, z) = \arcsen(x^2 + y^2 + z^2)$

36.  $f(x, y, z) = \sqrt{y - x^2} \ln z$

37.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

38.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

39–41 Utilize coordenadas polares para determinar o limite. [Se  $(r, \theta)$  são as coordenadas polares do ponto  $(x, y)$  com  $r \geq 0$ , observe que  $r \rightarrow 0^+$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .]

39.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

40.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

41.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

 42. No início desta seção consideramos a função

$$f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

e conjecturamos que  $f(x, y) \rightarrow 1$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  com base em evidências numéricas. Utilize coordenadas polares para comprovar o valor do limite. Em seguida, faça o gráfico da função.



43. Trace o gráfico e analise a continuidade da função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen } xy}{xy} & \text{se } xy \neq 0 \\ 1 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

44. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \text{ or } y \geq x^4 \\ 1 & \text{se } 0 < y < x^4 \end{cases}$$

(a) Mostre que  $f(x, y) \rightarrow 0$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  por qualquer caminho da forma  $y = mx^a$  passando por  $(0, 0)$  com  $a < 4$ .

(b) Independentemente do item (a), mostre que  $f$  é descontínua em  $(0, 0)$ .

(c) Mostre que  $f$  é descontínua em duas curvas inteiras.

45. Mostre que a função  $f$  dada por  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$  é contínua em  $\mathbb{R}^n$ . [Dica: Considere  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$ .]

46. Se  $\mathbf{c} \in V_n$ , mostre que a função  $f$  dada por  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$  é contínua em  $\mathbb{R}^n$ .

## 14.3 Derivadas Parciais

Em um dia quente, a umidade muito alta aumenta a sensação de calor, ao passo que, se o ar está muito seco, temos a sensação de temperatura mais baixa que a indicada no termômetro. O Serviço Meteorológico do Canadá introduziu o *humidex* (ou índice de temperatura-umidade) para descrever os efeitos combinados da temperatura e umidade. O *humidex*  $I$  é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real for  $T$  e a umidade relativa for  $H$ . Desse modo,  $I$  é uma função de  $T$  e  $H$  e podemos escrever  $I = f(T, H)$ . A tabela de valores de  $I$  a seguir é a parte de uma tabela compilada pelo Serviço Meteorológico.

		Umidade relativa (%)									
		$H$	40	45	50	55	60	65	70	75	80
Temperatura real (°C)	$T$										
	26	28	28	29	31	31	32	33	34	35	
	28	31	32	33	34	35	36	37	38	39	
	30	34	35	36	37	38	40	41	42	43	
	32	37	38	39	41	42	43	45	46	47	
	34	41	42	43	45	47	48	49	51	52	
	36	43	45	47	48	50	51	53	54	56	

**TABELA 1**  
Índice de calor  $I$  como função da temperatura e umidade

Se nos concentrarmos na coluna assinalada da tabela que corresponde à umidade relativa de  $H = 60\%$ , estaremos considerando o humidex como uma função de uma única variável  $T$  para um valor fixado de  $H$ . Vamos escrever  $g(T) = f(T, 60)$ . Então,  $g(T)$  descreve como o humidex  $I$  aumenta à medida que a temperatura real  $T$  aumenta quando a umidade relativa é  $60\%$ . A derivada de  $g$  quando  $T = 30^\circ\text{C}$  é a taxa de variação de  $I$  com relação a  $T$  quando  $T = 30^\circ\text{C}$ :

$$g'(30) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(30+h) - g(30)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(30+h, 60) - f(30, 60)}{h}$$

Podemos aproximar seu valor usando a Tabela 1 e tomando  $h = 2$  e  $-2$ :

$$g'(30) \approx \frac{g(32) - g(30)}{2} = \frac{f(32, 60) - f(30, 60)}{2} = \frac{42 - 38}{2} = 2$$

$$g'(30) \approx \frac{g(28) - g(30)}{-2} = \frac{f(28, 60) - f(30, 60)}{-2} = \frac{35 - 38}{-2} = 1,5$$

Calculando a média desses valores, podemos dizer que a derivada  $g'(30)$  é aproximadamente 1,75. Isso significa que, quando a temperatura real é  $30^\circ\text{C}$  e a umidade relativa é  $60\%$ , a temperatura aparente (humidex) aumenta cerca de  $1,75^\circ\text{C}$  para cada grau que a temperatura real sobe.

Olhemos agora para a linha sombreada da Tabela 1, que corresponde à temperatura fixa de  $T = 30^\circ\text{C}$ . Os números nesta linha são valores da função  $G(H) = f(30, H)$ , que descreve como o humidex aumenta à medida que a umidade relativa  $H$  aumenta quando a temperatura real é  $T = 30^\circ\text{C}$ . A derivada dessa função quando  $H = 60\%$  é a taxa de variação de  $I$  com relação a  $H$  quando  $T = 60\%$ :

$$G'(60) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(60+h) - G(60)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(30, 60+h) - f(30, 60)}{h}$$

Tomando  $h = 5$  e  $-5$ , aproximamos o valor de  $G'(60)$  usando os valores tabelados:

$$G'(60) \approx \frac{G(65) - G(60)}{5} = \frac{f(30, 65) - f(30, 60)}{5} = \frac{40 - 38}{5} = 0,4$$

$$G'(60) \approx \frac{G(55) - G(60)}{-5} = \frac{f(30, 55) - f(30, 60)}{-5} = \frac{37 - 38}{-5} = 0,2$$

Ao calcularmos a média desses valores, obtemos a estimativa  $G'(60) \approx 0,3$ . Isso nos diz que, quando a temperatura é de  $30^\circ\text{C}$  e a umidade relativa é de  $60\%$ , o humidex aumenta em cerca de  $0,3^\circ\text{C}$  para cada ponto percentual que a umidade relativa aumenta.

Em geral, se  $f$  é uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$ , suponha que deixemos somente  $x$  variar enquanto mantemos fixo o valor de  $y$ , por exemplo, fazendo  $y = b$ , onde  $b$  é uma constante. Estaremos então considerando, realmente, uma função de uma única variável  $x$ , a saber,  $g(x) = f(x, b)$ . Se  $g$  tem derivada em  $a$ , nós a chamaremos **derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$  em  $(a, b)$**  e a denotaremos por  $f'_x(a, b)$ . Assim,

1

$$f'_x(a, b) = g'(a) \quad \text{onde} \quad g(x) = f(x, b)$$

Pela definição de derivada, temos

$$g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

e assim a Equação 1 torna-se

2

$$f'_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

Da mesma forma, a **derivada parcial de  $f$  em relação a  $y$  em  $(a, b)$** , denotada por  $f_y(a, b)$ , é obtida mantendo-se  $x$  fixo ( $x = a$ ) e determinando-se a derivada em  $b$  da função  $G(y) = f(a, y)$ :

3

$$f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Com essa notação para as derivadas parciais, podemos escrever as taxas de variação do humidex  $I$  com relação à temperatura real  $T$  e umidade relativa  $H$  quando  $T = 30^\circ\text{C}$  e  $H = 60\%$  como segue:

$$f_T(30, 60) \approx 1,75 \quad f_H(30, 60) \approx 0,3$$

Se agora deixamos o ponto  $(a, b)$  variar nas Equações 2 e 3,  $f_x$  e  $f_y$  se tornam funções de duas variáveis.

4

Se  $f$  é uma função de duas variáveis, suas **derivadas parciais** são as funções  $f_x$  e  $f_y$  definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Existem diversas notações alternativas para as derivadas parciais. Por exemplo, em vez de  $f_x$ , podemos escrever  $f_1$  ou  $D_1 f$  (para indicar a derivação em relação à *primeira* variável) ou  $\partial f / \partial x$ . Mas aqui  $\partial f / \partial x$  não pode ser interpretada como uma razão de diferenciais.

**Notações para as Derivadas Parciais** Se  $z = f(x, y)$ , escrevemos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Para calcularmos as derivadas parciais, tudo o que temos a fazer é nos lembrarmos, a partir da Equação 1, que a derivada parcial com relação a  $x$  é a derivada *ordinária* da função  $g$  de uma única variável obtida mantendo-se fixo o valor de  $y$ . Então, temos a seguinte regra.

**Regra para Determinar as Derivadas Parciais de  $z = f(x, y)$**

1. Para determinar  $f_x$ , trate  $y$  como uma constante e derive  $f(x, y)$  com relação a  $x$ .
2. Para determinar  $f_y$ , trate  $x$  como uma constante e derive  $f(x, y)$  com relação a  $y$ .

**EXEMPLO 1** Se  $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ , encontre  $f_x(2, 1)$  e  $f_y(2, 1)$ .

**SOLUÇÃO** Mantendo  $y$  constante e derivando em relação a  $x$ , obtemos

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

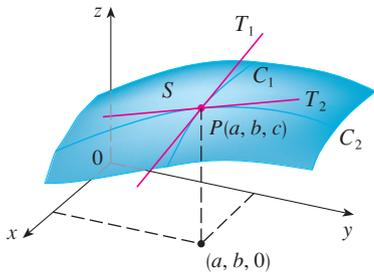
e, assim,

$$f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

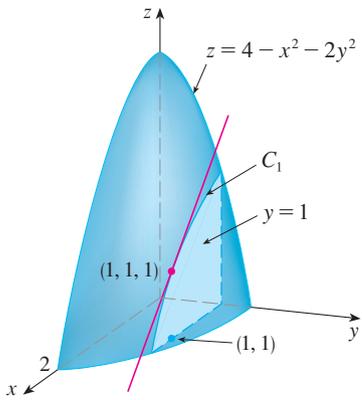
Mantendo  $x$  constante e derivando em relação a  $y$ , obtemos

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

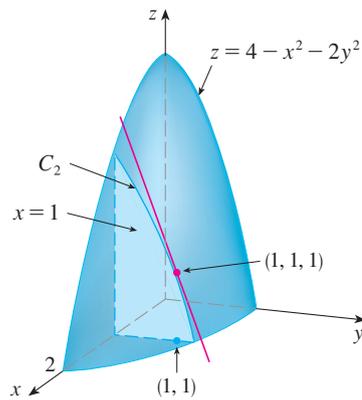
$$f_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$$



**FIGURA 1**  
As derivadas parciais de  $f$  em  $(a, b)$  são as inclinações das retas tangentes a  $C_1$  e  $C_2$ .



**FIGURA 2**



**FIGURA 3**

**Interpretações das Derivadas Parciais**

Para darmos uma interpretação geométrica para as derivadas parciais, lembremo-nos de que a equação  $z = f(x, y)$  representa uma superfície  $S$  (o gráfico de  $f$ ). Se  $f(a, b) = c$ , então o ponto  $P(a, b, c)$  está em  $S$ . Ao fixar  $y = b$ , estamos restringindo nossa atenção à curva  $C_1$ , na qual o plano vertical  $y = b$  intersecciona  $S$ . (Em outras palavras,  $C_1$  é o corte de  $S$  no plano  $y = b$ .) Dessa maneira, o plano vertical  $x = a$  intersecciona  $S$  em uma curva  $C_2$ . As curvas  $C_1$  e  $C_2$  passam pelo ponto  $P$  (Veja a Figura 1.)

Observe que a curva  $C_1$  é o gráfico da função  $g(x) = f(x, b)$ , de modo que a inclinação da tangente  $T_1$  em  $P$  é  $g'(a) = f'_x(a, b)$ . A curva  $C_2$  é o gráfico da função  $G(y) = f(a, y)$ , de modo que a inclinação da tangente  $T_2$  em  $P$  é  $G'(b) = f'_y(a, b)$ .

Então, as derivadas parciais  $f'_x(a, b)$  e  $f'_y(a, b)$  podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes em  $P(a, b, c)$  aos cortes  $C_1$  e  $C_2$  de  $S$  nos planos  $y = b$  e  $x = a$ .

Como vimos no caso da função humidex, as derivadas parciais podem ser interpretadas como *taxas de variação*. Se  $z = f(x, y)$ , então  $\partial z / \partial x$  representa a taxa de variação de  $z$  com relação a  $x$  quando  $y$  é mantido fixo. Da mesma forma,  $\partial z / \partial y$  representa a taxa de variação de  $z$  em relação a  $y$  quando  $x$  é mantido fixo.

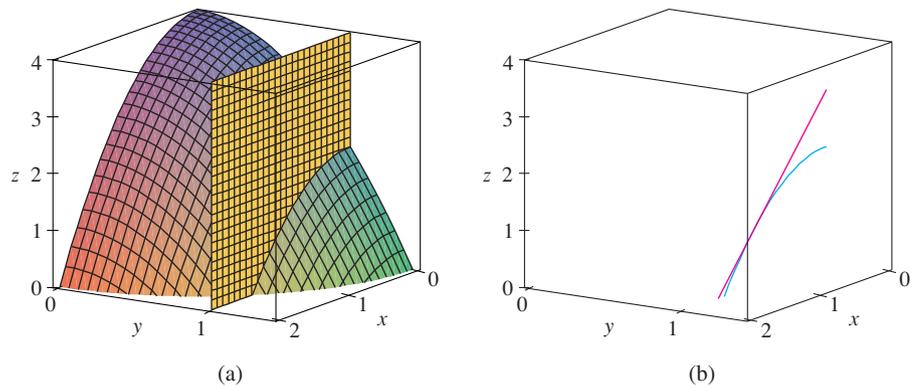
**EXEMPLO 2** Se  $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$ , determine  $f'_x(1, 1)$  e  $f'_y(1, 1)$  e interprete esses números como inclinações.

**SOLUÇÃO** Temos

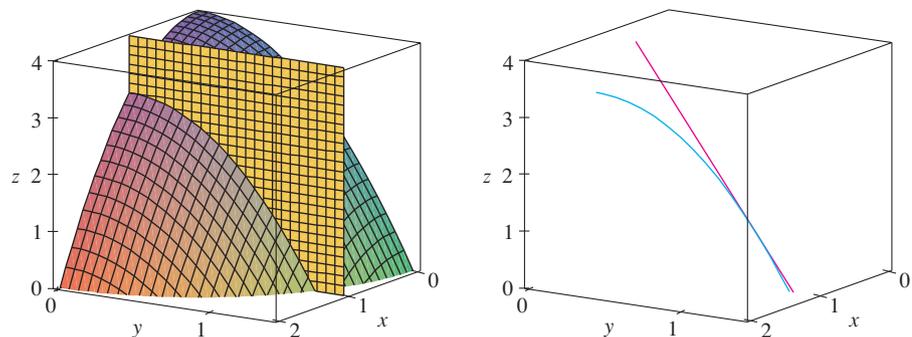
$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= -2x & f'_y(x, y) &= -4y \\ f'_x(1, 1) &= -2 & f'_y(1, 1) &= -4 \end{aligned}$$

O gráfico de  $f$  é o parabolóide  $z = 4 - x^2 - 2y^2$ , e o plano vertical  $y = 1$  intercepta-o na parábola  $z = 2 - x^2, y = 1$ . (Como na discussão anterior, rotulamos  $C_1$  na Figura 2.) A inclinação da reta tangente a essa parábola no ponto  $(1, 1, 1)$  é  $f'_x(1, 1) = -2$ . Da mesma forma, a curva  $C_2$  na qual o plano  $x = 1$  intercepta o parabolóide é a parábola  $z = 3 - 2y^2, x = 1$ , e a inclinação da reta tangente em  $(1, 1, 1)$  é  $f'_y(1, 1) = -4$ . (Veja a Figura 3.)

A Figura 4 nos mostra o gráfico desenhado pelo computador correspondente à Figura 2. O item (a) exhibe o plano  $y = 1$  interceptando a superfície para formar a curva  $C_1$ , e o item (b) mostra  $C_1$  e  $T_1$ . [Usamos as equações vetoriais  $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1, 2 - t^2 \rangle$  para  $C_1$  e  $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 1, 1 - 2t \rangle$  para  $T_1$ .] Do mesmo modo, a Figura 5 corresponde à Figura 3.



**FIGURA 4**



**FIGURA 5**

**EXEMPLO 3** Se  $f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$ , calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$

**SOLUÇÃO** Usando a Regra da Cadeia para funções de uma variável, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{1+y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{x}{(1+y)^2}$$

**EXEMPLO 4** Determine  $\partial z/\partial x$  e  $\partial z/\partial y$  se  $z$  é definido implicitamente como uma função de  $x$  e  $y$  pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

**SOLUÇÃO** Para determinarmos  $\partial z/\partial x$ , diferenciando implicitamente em relação a  $x$ , tomando o cuidado de tratar  $y$  como constante:

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Resolvendo essa equação para  $\partial z/\partial x$ , obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

Da mesma forma, derivando implicitamente em relação a  $y$ , temos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

Alguns sistemas de computação algébrica podem traçar superfícies definidas por equações implícitas com três variáveis. A Figura 6 mostra o desenho da superfície definida implicitamente pela equação do Exemplo 4.

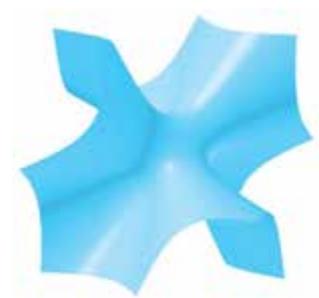


FIGURA 6

## Funções de Mais de Duas Variáveis

As derivadas parciais também podem ser definidas para funções de três ou mais variáveis. Por exemplo, se  $f$  é uma função de três variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ , então sua derivada parcial em relação a  $x$  é definida como

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

e é determinada olhando-se  $y$  e  $z$  como constantes e derivando  $f(x, y, z)$  em relação a  $x$ . Se  $w = f(x, y, z)$ , então  $f_x = \partial w/\partial x$  pode ser interpretada como a taxa de variação de  $w$  com relação a  $x$  quando  $y$  e  $z$  são mantidos fixos. Entretanto, não podemos interpretá-la geometricamente porque o gráfico de  $f$  pertence ao espaço de dimensão quatro.

Em geral, se  $u$  é uma função de  $n$  variáveis,  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , sua derivada parcial em relação à  $i$ -ésima variável  $x_i$  é

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

e podemos também escrever

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f$$

**EXEMPLO 5** Determine  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_z$  se  $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$ .

**SOLUÇÃO** Mantendo  $y$  e  $z$  constantes e derivando em relação a  $x$ , temos

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

Da mesma forma,  $f_y = xe^{xy} \ln z$  e  $f_z = \frac{e^{xy}}{z}$

### Derivadas de Ordem Superior

Se  $f$  é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  são funções de duas variáveis, de modo que podemos considerar novamente suas derivadas parciais  $(f_x)_x$ ,  $(f_x)_y$ ,  $(f_y)_x$  e  $(f_y)_y$ , chamadas **derivadas parciais de segunda ordem** de  $f$ . Se  $z = f(x, y)$ , usamos a seguinte notação:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Portanto, a notação  $f_{xy}$  (ou  $\partial^2 f / \partial y \partial x$ ) significa que primeiro derivamos com relação a  $x$  e depois em relação a  $y$ , ao passo que no cálculo de  $f_{yx}$  a ordem é invertida.

**EXEMPLO 6** Determine as derivadas parciais de

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

**SOLUÇÃO** No Exemplo 1, descobrimos que

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \quad f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

Portanto,

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3 \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2 \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$$

A Figura 7 mostra o gráfico da função  $f$  do Exemplo 6 e os gráficos de suas derivadas parciais de primeira e segunda ordens para  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq y \leq 2$ . Observe que esses gráficos são consistentes com nossas interpretações de  $f_x$  e  $f_y$  como inclinações das linhas das tangentes para os cortes do gráfico de  $f$ . Por exemplo, o gráfico de  $f$  decresce se começarmos em  $(0, -2)$  e nos movemos na direção  $x$  positiva. Isso é refletido nos valores negativos de  $f_x$ . Você deveria comparar os gráficos de  $f_{yx}$  e  $f_{xy}$  com  $f_y$  para ver as relações.

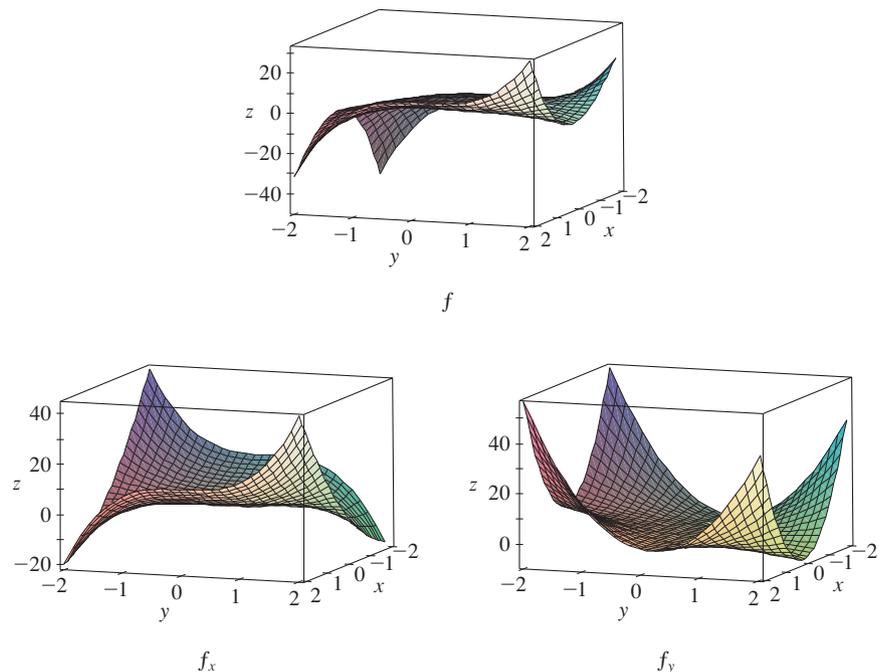
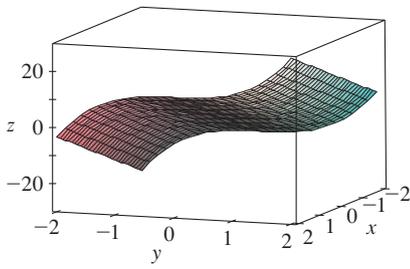
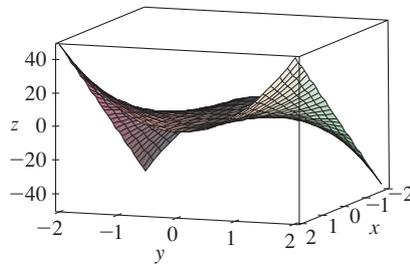


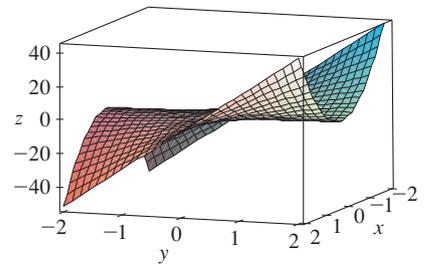
FIGURA 7



$f_{xx}$



$f_{xy} = f_{yx}$



$f_{yy}$

Observe que  $f_{xy} = f_{yx}$  no Exemplo 6. Isso não é só uma coincidência. As derivadas parciais mistas  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  são iguais para a maioria das funções que encontramos na prática. O próximo teorema, do matemático francês Alexis Clairaut (1713-1765), fornece condições sob as quais podemos afirmar que  $f_{xy} = f_{yx}$ . A demonstração é feita no Apêndice F.

**Teorema de Clairaut** Suponha que  $f$  seja definida em uma bola aberta  $D$  que contenha o ponto  $(a, b)$ . Se as funções  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  forem ambas contínuas em  $D$ , então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Derivadas parciais de ordem 3 ou maior também podem ser definidas. Por exemplo,

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

e usando o Teorema de Clairaut podemos mostrar que  $f_{xyy} = f_{xyy} = f_{yyx}$  se essas funções forem contínuas.

**EXEMPLO 7** Calcule  $f_{xyz}$  se  $f(x, y, z) = \text{sen}(3x + yz)$ .

**SOLUÇÃO**

$$\begin{aligned} f_x &= 3 \cos(3x + yz) \\ f_{xx} &= -9 \text{sen}(3x + yz) \\ f_{xy} &= -9z \cos(3x + yz) \\ f_{xyz} &= -9 \cos(3x + yz) + 9yz \text{sen}(3x + yz) \end{aligned}$$

### Equações Diferenciais Parciais

As derivadas parciais ocorrem em *equações diferenciais parciais* que exprimem certas leis físicas. Por exemplo, a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

é denominada **equação de Laplace** em homenagem a Pierre Laplace (1749-1827). As soluções dessa equação são chamadas **funções harmônicas** e são muito importantes no estudo de condução de calor, escoamento de fluidos e potencial elétrico.

**EXEMPLO 8** Mostre que a função  $u(x, y) = e^x \text{sen } y$  é solução da equação de Laplace.

**SOLUÇÃO** Primeiro calcularemos as derivadas parciais necessárias de segunda ordem:

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \text{sen } y & u_y &= e^x \cos y \\ u_{xx} &= e^x \text{sen } y & u_{yy} &= -e^x \text{sen } y \end{aligned}$$

Assim, 
$$u_{xx} + u_{yy} = e^x \text{sen } y - e^x \text{sen } y = 0$$

Portanto  $u$  satisfaz a equação de Laplace.

#### A equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

descreve o movimento de uma onda, que pode ser do mar, de som, luminosa ou se movendo em uma corda vibrante. Por exemplo, se  $u(x, t)$  representa o deslocamento da corda vibrante

#### Clairaut

Alexis Clairaut foi uma criança prodígio na área da matemática: aos 10 anos leu o texto de cálculo de l'Hôpital, e aos 13 apresentou um artigo sobre geometria na Academia Francesa de Ciências. Aos 18 anos, Clairaut publicou *Recherches sur les courbes à double courbure*, o primeiro tratado sistemático em geometria analítica tridimensional, em que incluiu o cálculo de curvas espaciais.

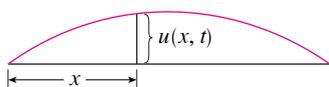


FIGURA 8

te de violino no instante  $t$  e à distância  $x$  de uma das extremidades da corda (como na Figura 8), então  $u(x, t)$  satisfaz a equação da onda. A constante  $a$  depende da densidade da corda e da tensão aplicada nela.

**EXEMPLO 9** Verifique se a função  $u(x, t) = \text{sen}(x - at)$  satisfaz a equação de onda.

**SOLUÇÃO**

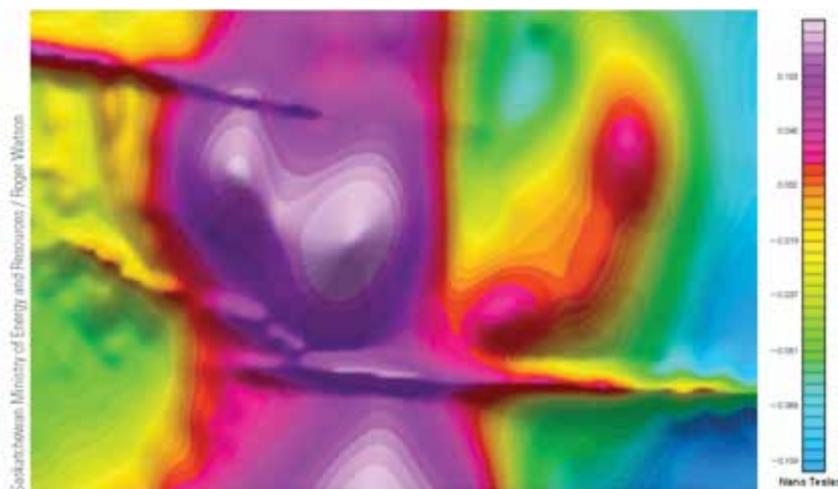
$$\begin{aligned} u_x &= \cos(x - at) & u_t &= -a \cos(x - at) \\ u_{xx} &= -\text{sen}(x - at) & u_{tt} &= -a^2 \text{sen}(x - at) = a^2 u_{xx} \end{aligned}$$

Então  $u$  satisfaz a equação de onda. ■

As equações diferenciais parciais que envolvem as funções de três variáveis também são muito importantes na ciência e na engenharia. A equação tridimensional de Laplace é

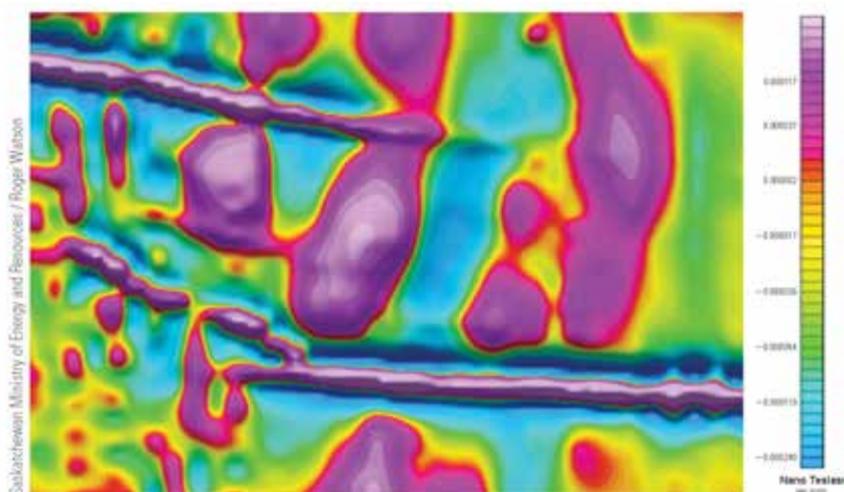
$$\boxed{5} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

e um lugar em que ocorre é na geofísica. Se  $u(x, y, z)$  representa a força do campo magnético na posição  $(x, y, z)$ , então ela satisfaz a Equação 5. A força do campo magnético indica a distribuição de minerais ricos em ferro e reflete diferentes tipos de rochas e a localização de falhas. A Figura 9 mostra um mapa de contorno do campo magnético da Terra, que foi registrado de uma aeronave transportando um magnetômetro que voava a 200 m acima da superfície do solo. O mapa de contorno é intensificado pela codificação por cores das regiões entre as curvas de nível.



**FIGURA 9**  
Força do campo magnético da Terra

A Figura 10 mostra um mapa de contorno para a derivada parcial de segunda ordem de  $u$  na direção vertical, ou seja,  $u_{zz}$ . Verifica-se que os valores das derivadas parciais  $u_{xx}$  e  $u_{yy}$  são mensurados de maneira relativamente fácil a partir de um mapa do campo magnético. Então os valores de  $u_{zz}$  podem ser calculados a partir da equação de Laplace 5.



**FIGURA 10**  
Segunda derivada vertical  
do campo magnético

## A Função de Produção de Cobb-Douglas

No Exemplo 3 da Seção 14.1 descrevemos o trabalho de Cobb e Douglas na modelagem da produção total  $P$  de um sistema econômico como função da quantidade de trabalho  $L$  e do capital investido  $K$ . Usaremos agora as derivadas parciais para mostrar como a forma particular desse modelo deriva de certas hipóteses que eles fizeram sobre a economia.

Se a função de produção é denotada por  $P = P(L, K)$ , a derivada parcial  $\partial P/\partial L$  é a taxa de variação da produção em relação à quantidade de trabalho. Os economistas chamam isso de produção marginal em relação ao trabalho, ou **produtividade marginal do trabalho**. Da mesma forma, a derivada parcial  $\partial P/\partial K$  é a taxa de variação da produção em relação ao capital investido, e é denominada **produtividade marginal do capital**. Nesses termos, as hipóteses feitas por Cobb e Douglas podem ser enunciadas da seguinte forma:

- (i) Se ou o trabalho ou o capital se anulam, o mesmo acontece com a produção.
- (ii) A produtividade marginal do trabalho é proporcional à quantidade de produção por unidade de trabalho.
- (iii) A produtividade marginal do capital é proporcional à quantidade de produção por unidade de capital.

Como a produção por unidade de trabalho é  $P/L$ , a hipótese (ii) diz

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \frac{P}{L}$$

para alguma constante  $\alpha$ . Se mantivermos  $K$  constante ( $K = K_0$ ), então essa equação diferencial parcial se transforma na equação diferencial ordinária:

$$\boxed{6} \quad \frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L}$$

Se resolvermos essa equação diferencial separável pelos métodos da Seção 9.3 (veja também o Exercício 85), obteremos

$$\boxed{7} \quad P(L, K_0) = C_1(K_0)L^\alpha$$

Observe que escrevemos a constante  $C_1$  como função de  $K_0$  porque ela pode depender do valor de  $K_0$ .

Analogamente, a hipótese (iii) diz que

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \frac{P}{K}$$

e podemos resolver essa equação diferencial obtendo

$$\boxed{8} \quad P(L_0, K) = C_2(L_0)K^\beta$$

Comparando as Equações 7 e 8, temos

$$\boxed{9} \quad P(L, K) = bL^\alpha K^\beta$$

onde  $b$  é uma constante independente de  $L$  e  $K$ . A hipótese (i) mostra que  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ . Observe que, pela Equação 9, se o trabalho e o capital são ambos aumentados por um fator  $m$ , temos

$$P(mL, mK) = b(mL)^\alpha (mK)^\beta = m^{\alpha+\beta} bL^\alpha K^\beta = m^{\alpha+\beta} P(L, K)$$

Se  $\alpha + \beta = 1$ , então  $P(mL, mK) = mP(L, K)$ , o que significa que a produção também é aumentada pelo fator  $m$ . Essa é a razão pela qual Cobb e Douglas supuseram que  $\alpha + \beta = 1$ , portanto,

$$P(L, K) = bL^\alpha K^{1-\alpha}$$

Essa é a função de produção de Cobb-Douglas, discutida na Seção 14.1.

### 14.3 Exercícios

- A temperatura  $T$  (em °C) de uma localidade do Hemisfério Norte depende da longitude  $x$ , da latitude  $y$  e do tempo  $t$ , de modo que podemos escrever  $T = f(x, y, t)$ . Vamos medir o tempo em horas a partir do início de janeiro.
  - Qual o significado das derivadas parciais  $\partial T/\partial x$ ,  $\partial T/\partial y$  e  $\partial T/\partial t$ ?
  - Honolulu tem longitude de 158° W e latitude de 21° N. Suponha que às 9 horas em 1° de janeiro esteja ventando para noroeste uma brisa quente, de forma que a Oeste e a Sul o ar esteja quente e a Norte e Leste o ar esteja mais frio. Você esperaria que  $f_x(158, 21, 9)$ ,  $f_y(158, 21, 9)$  e  $f_t(158, 21, 9)$  fossem positivos ou negativos? Explique.
- No início desta seção discutimos a função  $I = f(T, H)$ , onde  $I$  era o humidex;  $T$ , a temperatura; e  $H$ , a umidade relativa. Utilize a Tabela 1 para estimar  $f_T(34, 75)$  e  $f_H(34, 75)$ . Quais são as interpretações práticas desses valores?
- O índice de sensação térmica  $W$  é a temperatura sentida quando a temperatura real é  $T$  e a velocidade do vento,  $v$ . Portanto, podemos escrever  $W = f(T, v)$ . A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1.

Velocidade do vento (km/h)

$T \backslash v$	20	30	40	50	60	70
-10	-18	-20	-21	-22	-23	-23
-15	-24	-26	-27	-29	-30	-30
-20	-30	-33	-34	-35	-36	-37
-25	-37	-39	-41	-42	-43	-44

- Estime os valores de  $f_T(-15, 30)$  e  $f_v(-15, 30)$ . Quais são as interpretações práticas desses valores?
- Em geral, o que se pode dizer sobre o sinal de  $\partial W/\partial T$  e  $\partial W/\partial v$ ?
- Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\partial W}{\partial v}$$

- A altura  $h$  de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento  $v$  e do tempo  $t$  durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função  $h = f(v, t)$  são apresentados na seguinte tabela.

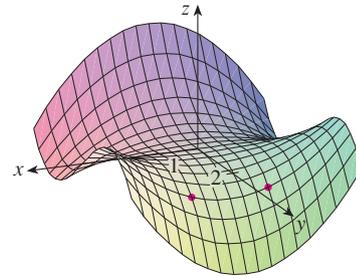
Duração (horas)

$v \backslash t$	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

- Qual o significado das derivadas parciais  $\partial h/\partial v$  e  $\partial h/\partial t$ ?
- Estime os valores de  $f_v(80, 15)$  e  $f_t(80, 15)$ . Quais são as interpretações práticas desses valores?
- Qual parece ser o valor do seguinte limite?

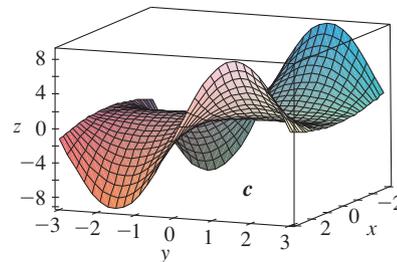
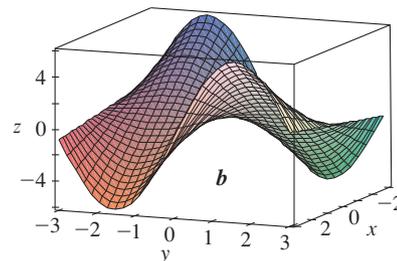
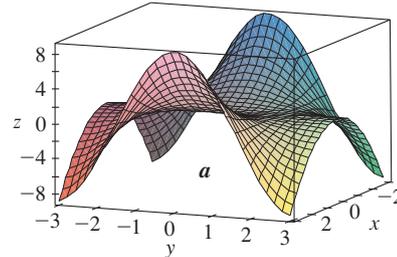
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

- 5–8 Determine os sinais das derivadas parciais da função  $f$  cujo gráfico está mostrado.

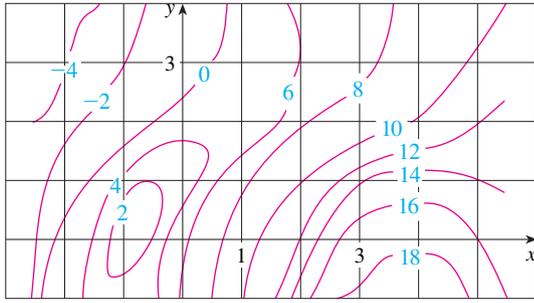


- (a)  $f_x(1, 2)$  (b)  $f_y(1, 2)$
- (a)  $f_x(-1, 2)$  (b)  $f_y(-1, 2)$
- (a)  $f_{xx}(-1, 2)$  (b)  $f_{yy}(-1, 2)$
- (a)  $f_{xy}(1, 2)$  (b)  $f_{xy}(-1, 2)$

- As seguintes superfícies, rotuladas  $a$ ,  $b$  e  $c$ , são gráficos de uma função  $f$  e de suas derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$ . Identifique cada superfície e dê razões para sua escolha.



10. Um mapa de contorno de uma função  $f$  é apresentado. Utilize-o para estimar  $f_x(2, 1)$  e  $f_y(2, 1)$ .



11. Se  $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$ , determine  $f_x(1, 2)$  e  $f_y(1, 2)$  e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

12. Se  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ , determine  $f_x(1, 0)$  e  $f_y(1, 0)$  e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

13–14 Determine  $f_x$  e  $f_y$  e faça os gráficos  $f$ ,  $f_x$  e  $f_y$  com domínios e pontos de vista que lhe permitam ver a relação entre eles.

13.  $f(x, y) = x^2y^3$                       14.  $f(x, y) = \frac{y}{1 + x^2y^2}$

15–40 Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

- 15.  $f(x, y) = y^5 - 3xy$                       16.  $f(x, y) = x^4y^3 + 8x^2y$
- 17.  $f(x, t) = e^{-t} \cos \pi x$                       18.  $f(x, t) = \sqrt{x} \ln t$
- 19.  $z = (2x + 3y)^{10}$                       20.  $z = \operatorname{tg} xy$
- 21.  $f(x, y) = \frac{x}{y}$                       22.  $f(x, y) = \frac{x}{(x + y)^2}$
- 23.  $f(x, y) = \frac{ax + by}{cx + dy}$                       24.  $w = \frac{e^v}{u + v^2}$
- 25.  $g(u, v) = (u^2v - v^3)^5$                       26.  $f(x, t) = \arctg(x\sqrt{t})$
- 27.  $w = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$                       28.  $f(x, y) = x^y$
- 29.  $F(x, y) = \int_y^x \cos(e^t) dt$                       30.  $F(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{t^3 + 1} dt$
- 31.  $f(x, y, z) = xz - 5x^2y^3z^4$                       32.  $f(x, y, z) = x \operatorname{sen}(y - z)$
- 33.  $w = \ln(x + 2y + 3z)$                       34.  $w = ze^{xyz}$
- 35.  $u = xy \operatorname{sen}^{-1}(yz)$                       36.  $u = x^{yz}$
- 37.  $h(x, y, z, t) = x^2y \cos(z/t)$
- 38.  $\phi(x, y, z, t) = \frac{\alpha x + \beta y^2}{\gamma z + \delta y^2}$
- 39.  $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$
- 40.  $u = \operatorname{sen}(x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n)$

41–44 Determine as derivadas parciais indicadas.

- 41.  $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ ;  $f_x(3, 4)$
- 42.  $f(x, y) = \arctg(y/x)$ ;  $f_x(2, 3)$
- 43.  $f(x, y, z) = \frac{y}{x + y + z}$ ;  $f_y(2, 1, -1)$
- 44.  $f(x, y, z) = \sqrt{\operatorname{sen}^2x + \operatorname{sen}^2y + \operatorname{sen}^2z}$ ;  $f_z(0, 0, \pi/4)$

45–46 Use a definição de derivadas parciais como limites [4] para encontrar  $f_x(x, y)$  e  $f_y(x, y)$ .

45.  $f(x, y) = xy^2 - x^3y$                       46.  $f(x, y) = \frac{x}{x + y^2}$

47–50 Use a derivação implícita para encontrar  $\partial z/\partial x$  e  $\partial z/\partial y$ .

47.  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$                       48.  $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$   
 49.  $e^z = xyz$                       50.  $yz + x \ln y = z^2$

51–52 Determine  $\partial z/\partial x$  e  $\partial z/\partial y$ .

- 51. (a)  $z = f(x) + g(y)$                       (b)  $z = f(x + y)$
- 52. (a)  $z = f(x)g(y)$                       (b)  $z = f(xy)$   
 (c)  $z = f(x/y)$

53–58 Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem.

- 53.  $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$                       54.  $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(mx + ny)$
- 55.  $w = \sqrt{u^2 + v^2}$                       56.  $v = \frac{xy}{x - y}$
- 57.  $z = \arctg \frac{x + y}{1 - xy}$                       58.  $v = e^{xe^v}$

59–62 Verifique se a conclusão do Teorema de Clairaut é válida, isto é,  $u_{xy} = u_{yx}$ .

- 59.  $u = x^4y^3 - y^4$                       60.  $u = e^{xy} \operatorname{sen} y$
- 61.  $u = \cos(x^2y)$                       62.  $u = \ln(x + 2y)$

63–70 Determine a(s) derivada(s) parcial(is) indicada(s).

- 63.  $f(x, y) = x^4y^2 - x^3y$ ;  $f_{xxx}$ ,  $f_{xyx}$
- 64.  $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 5y)$ ;  $f_{xyx}$
- 65.  $f(x, y, z) = e^{xyz^2}$ ;  $f_{xyz}$
- 66.  $g(r, s, t) = e^r \operatorname{sen}(st)$ ;  $g_{rst}$
- 67.  $u = e^{r\theta} \operatorname{sen} \theta$ ;  $\frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta}$
- 68.  $z = u\sqrt{v - w}$ ;  $\frac{\partial^3 z}{\partial u \partial v \partial w}$
- 69.  $w = \frac{x}{y + 2z}$ ;  $\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}$ ,  $\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$
- 70.  $u = x^a y^b z^c$ ;  $\frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}$

71. Se  $f(x, y, z) = xy^2z^3 + \arcsen(x\sqrt{z})$ , determine  $f_{xyz}$ . [Dica: Qual ordem de diferenciação é a mais fácil?]

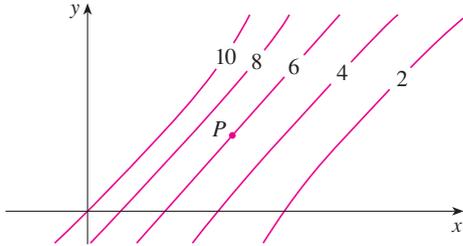
72. Se  $g(x, y, z) = \sqrt{1 + xz} + \sqrt{1 - xy}$ , determine  $g_{xyz}$ . [Dica: Use uma ordem de diferenciação diferente para cada termo.]

73. Use a tabela de valores de  $f(x, y)$  para estimar os valores de  $f_x(3, 2)$ ,  $f_x(3, 2, 2)$  e  $f_{xy}(3, 2)$ .

$x \backslash y$	1,8	2,0	2,2
2,5	12,5	10,2	9,3
3,0	18,1	17,5	15,9
3,5	20,0	22,4	26,1

74. As curvas de nível são mostradas para uma função  $f$ . Determine se as seguintes derivadas parciais são positivas ou negativas no ponto  $P$ .

- (a)  $f_x$                       (b)  $f_y$                       (c)  $f_{xx}$   
 (d)  $f_{xy}$                     (e)  $f_{yy}$



75. Verifique se a função  $u = e^{-\alpha^2 k^2 t} \text{sen } kx$  é solução da equação de condução do calor  $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ .

76. Determine se cada uma das seguintes funções é solução da equação de Laplace  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ .

- (a)  $u = x^2 + y^2$                       (b)  $u = x^2 - y^2$   
 (c)  $u = x^3 + 3xy^2$                     (d)  $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$   
 (e)  $u = \text{sen } x \cosh y + \cos x \sinh y$   
 (f)  $u = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$

77. Verifique se a função  $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  é uma solução da equação de Laplace tridimensional  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ .

78. Mostre que cada uma das seguintes funções é uma solução da equação da onda  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ .

- (a)  $u = \text{sen}(kx) \text{sen}(akt)$   
 (b)  $u = t/(a^2 t^2 - x^2)$   
 (c)  $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$   
 (d)  $u = \text{sen}(x - at) + \ln(x + at)$

79. Se  $f$  e  $g$  são funções duas vezes diferenciáveis de uma única variável, mostre que a função

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

é solução da equação de onda dada no Exercício 78.

80. Se  $u = e^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}$ , onde  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$ , mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

81. Verifique que a função  $z = \ln(e^x + e^y)$  é uma solução das equações diferenciais

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

e

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$$

82. A temperatura em um ponto  $(x, y)$  de uma chapa de metal é dada por  $T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2)$ , onde  $T$  é medido em °C e  $x, y$  em metros. Determine a taxa de variação da temperatura no ponto  $(2, 1)$  em (a) a direção  $x$  e (b) a direção  $y$ .

83. A resistência total  $R$  produzida por três condutores com resistência  $R_1, R_2$  e  $R_3$  conectados em paralelo em um circuito elétrico é dada pela fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Determine  $\partial R / \partial R_1$ .

84. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas  $P = bL^\alpha K^\beta$  satisfaz a equação

$$L \frac{\partial P}{\partial L} + K \frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

85. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas satisfaz  $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^\alpha$  resolvendo a equação diferencial

$$\frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L}$$

(Veja a Equação 6.)

86. Cobb e Douglas usaram a equação  $P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$  para o modelo de economia norte-americana de 1899 a 1922, onde  $L$  é a quantidade de trabalho e  $K$ , a quantidade de capital. (Veja o Exemplo 3 na Seção 14.1.)

- (a) Calcule  $P_L$  e  $P_K$ .  
 (b) Encontre a produtividade marginal de trabalho e a produtividade marginal de capital no ano de 1920, quando  $L = 194$  e  $K = 407$  (em comparação com os valores atribuídos  $L = 100$  e  $K = 100$  em 1899). Interprete os resultados.  
 (c) No ano de 1920, o que trouxe mais benefícios para a produção: um aumento no capital de investimento ou um aumento nos gastos com mão de obra?

87. A equação de van der Waals para  $n$  mols de um gás é

$$\left( P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

onde  $P$  é a pressão,  $V$  é o volume e  $T$  é a temperatura do gás. A constante  $R$  é a constante universal de gás e  $a$  e  $b$  são constantes positivas que são características de um gás em particular. Calcule  $\partial T / \partial P$  e  $\partial P / \partial V$ .

88. A lei dos gases para uma massa fixa  $m$  de um gás ideal à temperatura absoluta  $T$ , pressão  $P$  e volume  $V$  é  $PV = mRT$ , onde  $R$  é a constante do gás. Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

89. Para o gás ideal do Exercício 88, mostre que

$$T \frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial V}{\partial T} = mR$$

90. O índice de sensação térmica é modelado pela função

$$W = 13,12 + 0,6215T - 11,37v^{0,16} + 0,3965Tv^{0,16}$$

onde  $T$  é a temperatura (°C) e  $v$ , a velocidade do vento (km/h). Quando  $T = -15$  °C e  $v = 30$  km/h, quanto você espera que a temperatura aparente  $W$  caia se a temperatura real decrescer em 1 °C? E se a velocidade do vento aumentar em 1 km/h?

91. A energia cinética de um corpo com massa  $m$  e velocidade  $v$  é  $K = \frac{1}{2}mv^2$ . Mostre que

$$\frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

92. Se  $a, b$  e  $c$  são os lados de um triângulo e  $A, B$  e  $C$  são os ângulos opostos, determine  $\partial A / \partial a, \partial A / \partial b$  e  $\partial A / \partial c$  pela derivação implícita da Lei dos Cossenos.

93. Disseram-lhe que existe uma função  $f$  cujas derivadas parciais são  $f_x(x, y) = x + 4y$  e  $f_y(x, y) = 3x - y$ . Você deve acreditar nisso?

94. O parabolóide  $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$  intercepta o plano  $x = 1$  em uma parábola. Determine as equações paramétricas para a reta tangente a essa parábola no ponto  $(1, 2, -4)$ . Use um computador para fazer o gráfico do parabolóide, da parábola e da reta tangente em uma mesma tela.
95. O elipsoide  $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$  intercepta o plano  $y = 2$  em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente a essa elipse no ponto  $(1, 2, 2)$ .

96. No estudo de penetração do congelamento descobriu-se que a temperatura  $T$  no instante  $t$  (medido em dias) a uma profundidade  $x$  (medida em metros) pode ser modelada pela função

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$$

onde  $\omega = 2\pi/365$  e  $\lambda$  é uma constante positiva.

- (a) Determine  $\partial T/\partial x$ . Qual seu significado físico?  
 (b) Determine  $\partial T/\partial t$ . Qual seu significado físico?  
 (c) Mostre que  $T$  satisfaz a equação do calor  $T_t = kT_{xx}$  para uma certa constante  $k$ .  
 (d) Se  $\lambda = 0,2$ ,  $T_0 = 0$  e  $T_1 = 10$ , use um computador para traçar o gráfico de  $T(x, t)$ .  
 (e) Qual é o significado físico do termo  $-\lambda x$  na expressão  $\sin(\omega t - \lambda x)$ ?



97. Utilize o Teorema de Clairaut para mostrar que, se as derivadas parciais de terceira ordem de  $f$  forem contínuas, então

$$f_{xyy} = f_{yyx} = f_{yxy}$$

98. (a) Quantas derivadas parciais de  $n$ -ésima ordem têm uma função de duas variáveis?  
 (b) Se essas derivadas parciais forem contínuas, quantas delas podem ser distintas?  
 (c) Responda a parte (a) da questão para uma função de três variáveis.

99. (a) Se  $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2} e^{\sin(x^2y)}$ , determine  $f'_x(1, 0)$ .  
 [Dica: Em vez de determinar  $f'_x(x, y)$  primeiro, observe que é mais fácil utilizar a Equação 1 ou a Equação 2.]

100. (a) Se  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ , determine  $f'_x(0, 0)$ .

101. (a) . Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Use um computador para traçar o gráfico de  $f$ .  
 (b) Determine  $f'_x(x, y)$  e  $f'_y(x, y)$  quando  $(x, y) \neq (0, 0)$ .  
 (c) Determine  $f'_x(0, 0)$  e  $f'_y(0, 0)$  usando as Equações 2 e 3.  
 (d) Mostre que  $f'_{xy}(0, 0) = -1$  e  $f'_{yx}(0, 0) = 1$ .  
 (e) O resultado da parte (d) contradiz o Teorema de Clairaut? Use os gráficos de  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  para ilustrar sua resposta.

## 14.4 Planos Tangentes e Aproximações Lineares

Uma das ideias mais importantes em cálculo de funções com uma única variável é que, à medida que damos *zoom* em torno de um ponto no gráfico de uma função diferenciável, esse gráfico vai se tornando indistinguível de sua reta tangente, e podemos aproximar a função por uma função linear (veja a Seção 3.10, no Volume I.) Desenvolveremos ideias semelhantes em três dimensões. À medida que damos *zoom* em torno de um ponto na superfície que é o gráfico de uma função diferenciável de duas variáveis, essa superfície parece mais e mais com um plano (seu plano tangente) e podemos aproximar a função, nas proximidades do ponto, por uma função linear de duas variáveis. Estenderemos também a ideia de diferencial para as funções de duas ou mais variáveis.

### Planos Tangentes

Suponha que uma superfície  $S$  tenha a equação  $z = f(x, y)$ , onde  $f$  tenha derivadas parciais contínuas de primeira ordem, e seja  $P(x_0, y_0, z_0)$  um ponto em  $S$ . Como na seção anterior, sejam  $C_1$  e  $C_2$  as curvas obtidas pela intersecção dos planos verticais  $y = y_0$  e  $x = x_0$  com a superfície  $S$ . Então o ponto  $P$  fica em  $C_1$  e  $C_2$ . Sejam  $T_1$  e  $T_2$  as retas tangentes à curva  $C_1$  e  $C_2$  no ponto  $P$ . Então o **plano tangente** à superfície  $S$  no ponto  $P$  é definido como o plano que contém as retas tangente  $T_1$  e  $T_2$  (veja a Figura 1.)

Veremos na Seção 14.6 que, se  $C$  é outra curva qualquer que esteja contida na superfície  $S$  e que passe pelo ponto  $P$ , então sua reta tangente no ponto  $P$  também pertence ao plano tangente. Portanto, podemos pensar no plano tangente a  $S$  em  $P$  como o plano que contém todas as retas tangentes a curvas contidas em  $S$  que passam pelo ponto  $P$ . O plano tangente em  $P$  é o plano que melhor aproxima a superfície  $S$  perto do ponto  $P$ .

Sabemos da Equação 12.5.7 que qualquer plano passando pelo ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$  tem equação da forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Dividindo essa equação por  $C$  e tomando  $a = -A/C$  e  $b = -B/C$ , podemos escrevê-la como

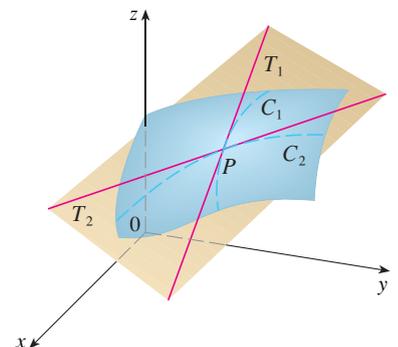


FIGURA 1

O plano tangente contém as retas tangentes  $T_1$  e  $T_2$ .

**1** 
$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

Se a Equação 1 representa o plano tangente em  $P$ , sua intersecção com o plano  $y = y_0$  precisa ser a reta  $T_1$ . Impondo  $y = y_0$  na Equação 1, obtemos

$$z - z_0 = a(x - x_0) \quad \text{onde } y = y_0$$

e reconhecemos isso como a equação (na forma ponto-inclinação) de uma linha com a inclinação  $a$ . Mas a partir da Seção 14.3 sabemos que a inclinação da tangente  $T_1$  é  $f'_x(x_0, y_0)$ . Portanto,  $a = f'_x(x_0, y_0)$ .

Da mesma forma, tomando  $x = x_0$  na Equação 1, obtemos  $z - z_0 = b(y - y_0)$ , que precisa representar a reta tangente  $T_2$  e, portanto,  $b = f'_y(x_0, y_0)$ .

**2** Suponha que  $f$  tenha derivadas parciais contínuas. Uma equação do plano tangente à superfície  $z = f(x, y)$  no ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$  é dada por

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Observe a semelhança entre a equação do plano tangente e a equação da reta tangente

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

**EXEMPLO 1** Determine o plano tangente ao parabolóide elíptico  $z = 2x^2 + y^2$  no ponto  $(1, 1, 3)$ .

**SOLUÇÃO** Seja  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ . Então

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 4x & f'_y(x, y) &= 2y \\ f'_x(1, 1) &= 4 & f'_y(1, 1) &= 2 \end{aligned}$$

Portanto, por **2** temos a equação do plano tangente em  $(1, 1, 3)$  como

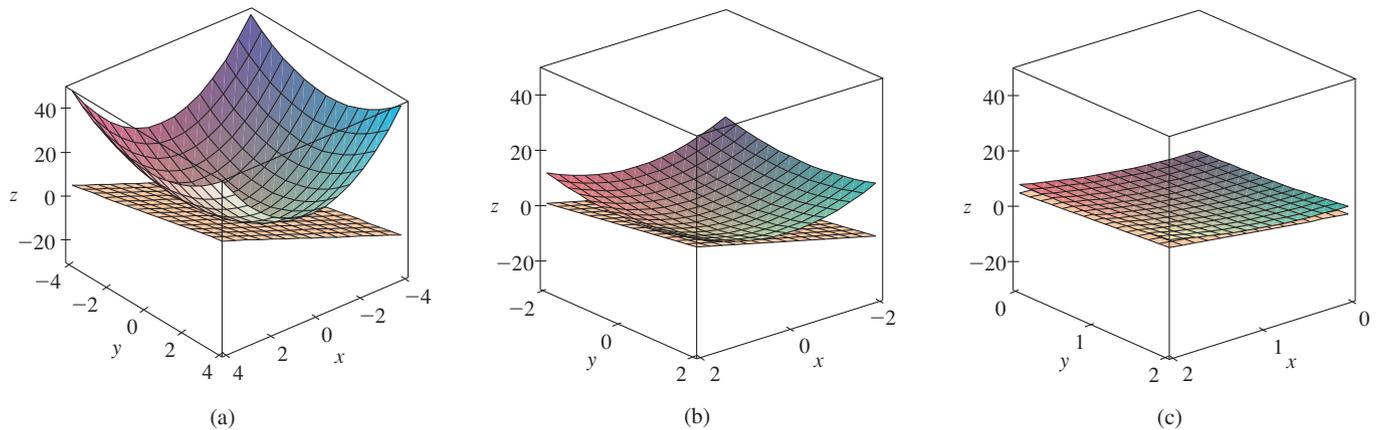
$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

ou

$$z = 4x + 2y - 3$$

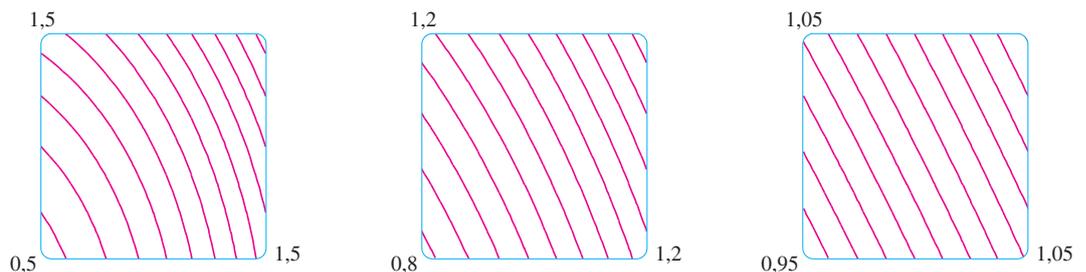
**TEC** O Visual 14.4A mostra uma animação das Figuras 2 e 3.

A Figura 2(a) mostra o parabolóide elíptico e seu plano tangente em  $(1, 1, 3)$  que encontramos no Exemplo 1. Nas partes (b) e (c) damos *zoom* em direção ao ponto  $(1, 1, 3)$  restringindo o domínio da função  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ . Observe que, quanto mais ampliamos a região próxima ao ponto, mais plano parece o gráfico da superfície e mais se parece com o plano tangente.



**FIGURA 2** O parabolóide elíptico  $z = 2x^2 + y^2$  parece coincidir com o plano tangente quando damos *zoom* em torno de  $(1, 1, 3)$ .

Na Figura 3 reforçamos essa impressão dando *zoom* em torno de  $(1, 1)$  no mapa de contorno da função  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ . Observe que, quanto mais ampliamos, mais as curvas de nível parecem retas igualmente espaçadas, o que caracteriza uma região plana.



**FIGURA 3** Dando *zoom* em torno do ponto  $(1, 1)$  no mapa de contorno de  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$

### Aproximações Lineares

No Exemplo 1 descobrimos que uma equação do plano tangente ao gráfico da função  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$  no ponto  $(1, 1, 3)$  é  $z = 4x + 2y - 3$ . Portanto, em vista da evidência visual nas Figuras 2 e 3, a função linear de duas variáveis

$$L(x, y) = 4x + 2y - 3$$

é uma boa aproximação de  $f(x, y)$  quando  $(x, y)$  está próximo de  $(1, 1)$ . A função  $L$  é chamada *linearização* de  $f$  em  $(1, 1)$ , e a aproximação

$$f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$$

é denominada *aproximação linear* ou *aproximação pelo plano tangente* de  $f$  em  $(1, 1)$ .

Por exemplo, no ponto  $(1,1, 0,95)$ , a aproximação linear fornece

$$f(1,1, 0,95) \approx 4(1,1) + 2(0,95) - 3 = 3,3$$

que está bastante próximo do valor verdadeiro de  $f(1,1, 0,95) = 2(1,1)^2 + (0,95)^2 = 3,3225$ . Se, entretanto, tomarmos um ponto longe de  $(1, 1)$ , como  $(2, 3)$ , não teremos mais uma boa aproximação. De fato,  $L(2, 3) = 11$ , ao passo que  $f(2, 3) = 17$ .

Em geral, sabemos de [2] que uma equação do plano tangente ao gráfico de uma função  $f$  de duas variáveis que tem derivadas parciais contínuas em um ponto  $(a, b, f(a, b))$  é

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

A função linear cujo gráfico é esse plano tangente, a saber,

$$\text{3} \quad L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

é denominada **linearização** de  $f$  em  $(a, b)$ , e a aproximação

$$\text{4} \quad f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

é chamada **aproximação linear** ou **aproximação pelo plano tangente** de  $f$  em  $(a, b)$ .

Definimos o plano tangente para as superfícies  $z = f(x, y)$ , onde  $f$  tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas. O que acontece se  $f_x$  e  $f_y$  não são contínuas? A Figura 4 apresenta uma tal função. Sua equação é

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Podemos verificar (veja o Exercício 46) que suas derivadas parciais existem na origem e são  $f_x(0, 0) = 0$  e  $f_y(0, 0) = 0$ , mas  $f_x$  e  $f_y$  não são contínuas. A aproximação linear seria  $f(x, y) \approx 0$ , mas  $f(x, y) = \frac{1}{2}$  em todos os pontos na reta  $y = x$ . Portanto a função de duas variáveis pode comportar-se mal mesmo se ambas as derivadas parciais existirem. Para evitar esse comportamento, introduzimos a ideia de função diferenciável de duas variáveis.

Lembre-mos de que para uma função de uma variável,  $y = f(x)$ , se  $x$  varia de  $a$  para  $a + \Delta x$ , definimos o incremento de  $y$  como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

No Capítulo 3, no Volume I, mostramos que, se  $f$  é diferenciável em  $a$ , então

$$\text{5} \quad \Delta y = f'(a) \Delta x + \varepsilon \Delta x \quad \text{onde} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ quando } \Delta x \rightarrow 0$$

Considere agora uma função de duas variáveis,  $z = f(x, y)$ , e suponha que  $x$  varie de  $a$  para  $a + \Delta x$  e  $y$  varie de  $b$  para  $b + \Delta y$ . Então, o **incremento** correspondente de  $z$  é

$$\text{6} \quad \Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

Portanto, o incremento  $\Delta z$  representa a variação de valor de  $f$  quando  $(x, y)$  varia de  $(a, b)$  para  $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ . Por analogia a [5], definimos a diferenciabilidade de uma função de duas variáveis como segue.

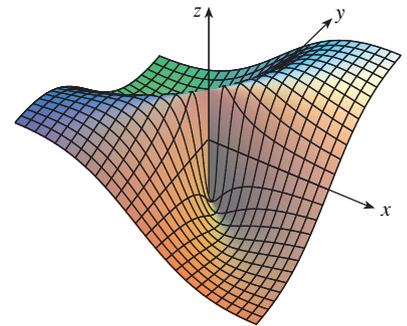


FIGURA 4

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ se } (x, y) \neq (0, 0), \\ f(0, 0) = 0$$

Esta é a Equação 3.4.7.

**7 Definição** Se  $z = f(x, y)$ , então  $f$  é **diferenciável** em  $(a, b)$  se  $\Delta z$  puder ser expresso na forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

onde  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  quando  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ .

A Definição 7 diz que uma função diferenciável é aquela para a qual a aproximação linear [4] é uma boa aproximação quando  $(x, y)$  está próximo de  $(a, b)$ . Em outras palavras, o plano tangente aproxima bem o gráfico de  $f$  perto do ponto de tangência.

Algumas vezes é difícil usar a Definição 7 diretamente para verificar a diferenciabilidade da função, mas o próximo teorema nos dá uma condição suficientemente conveniente para a diferenciabilidade.

**8 Teorema** Se as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  existirem perto do ponto  $(a, b)$  e forem contínuas em  $(a, b)$ , então  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ .

**EXEMPLO 2** Mostre que  $f(x, y) = xe^{xy}$  é diferenciável em  $(1, 0)$  e encontre sua linearização ali. Em seguida, use a linearização para aproximar  $f(1, 1, -0, 1)$ .

**SOLUÇÃO** As derivadas parciais são

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= e^{xy} + xye^{xy} & f_y(x, y) &= x^2e^{xy} \\ f_x(1, 0) &= 1 & f_y(1, 0) &= 1 \end{aligned}$$

Tanto  $f_x$  quanto  $f_y$  são funções contínuas; portanto,  $f$  é diferenciável pelo Teorema 8. A linearização é dada por

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) \\ &= 1 + 1(x - 1) + 1 \cdot y = x + y \end{aligned}$$

A aproximação linear correspondente é

$$xe^{xy} \approx x + y$$

Assim,

$$f(1, 1, -0, 1) \approx 1, 1 - 0, 1 = 1$$

Compare esse valor com o valor real de  $f(1, 1, -0, 1) = 1, 1 e^{-0, 11} \approx 0, 98542$ .

**EXEMPLO 3** No início da Seção 14.3 discutimos o humidex (temperatura aparente)  $I$  como uma função da temperatura real  $T$  e da umidade relativa  $H$  e fornecemos a seguinte tabela de valores:

		Umidade relativa (%)									
		$H$	40	45	50	55	60	65	70	75	80
Temperatura real (°C)	$T$	26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
	28	31	32	33	34	35	36	37	38	39	
	30	34	35	36	37	38	40	41	42	43	
	32	37	38	39	41	42	43	45	46	47	
	34	41	42	43	45	47	48	49	51	52	
	36	43	45	47	48	50	51	53	54	56	

Determine uma aproximação linear para o humidex  $I = f(T, H)$  quando  $T$  está próximo de  $30^\circ\text{C}$  e  $H$  está próximo de  $60\%$ . Use essa estimativa do humidex quando a temperatura estiver a  $31^\circ\text{C}$  e a umidade relativa for  $62\%$ .

**SOLUÇÃO** Lemos na tabela que  $f(30, 60) = 38$ . Na Seção 14.3 usamos os valores tabelados para estimar  $f_T(30, 60) \approx 1, 75$  e  $f_H(30, 60) \approx 0, 3$ . Assim, a aproximação linear é

O Teorema 8 está demonstrado no Apêndice F.

A Figura 5 mostra o gráfico da função  $f$  e sua linearização  $L$  no Exemplo 2.

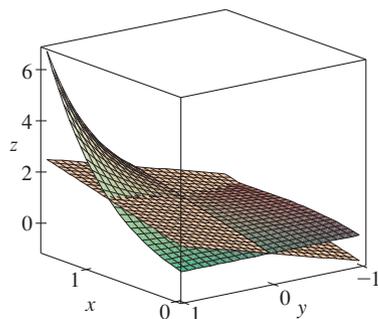


FIGURA 5

$$f(T, H) \approx f(30, 60) + f_T(30, 60)(T - 30) + f_H(30, 60)(H - 60) \\ \approx 38 + 1,75(T - 30) + 0,3(H - 60)$$

Em particular,

$$f(31, 62) \approx 38 + 1,75(1) + 0,3(2) = 40,35$$

Portanto, quando  $T = 31 \text{ }^\circ\text{C}$  e  $H = 62\%$ , o humidex é

$$I \approx 40,4 \text{ }^\circ\text{C}$$

### Diferenciais

Para uma função de uma única variável,  $y = f(x)$ , definimos a diferencial  $dx$  como uma variável independente; ou seja,  $dx$  pode valer qualquer número real. A diferencial de  $y$  é definida como

$$9 \quad dy = f'(x) dx$$

(Veja a Seção 3.10.) A Figura 6 mostra as relações entre o incremento  $\Delta y$  e a diferencial  $dy$ :  $\Delta y$  representa a variação de altura da curva  $y = f(x)$  e  $dy$  representa a variação de altura da reta tangente quando  $x$  varia da quantidade  $dx = \Delta x$ .

Para uma função de duas variáveis,  $z = f(x, y)$ , definimos as **diferenciais**  $dx$  e  $dy$  como variáveis independentes; ou seja, podem ter qualquer valor. Então a **diferencial**  $dz$  também chamada de **diferenciação total**, é definida por

$$10 \quad dz = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

(Compare com a Equação 9.) Algumas vezes a notação  $df$  é usada no lugar de  $dz$ .

Se tomamos  $dx = \Delta x = x - a$  e  $dy = \Delta y = y - b$  na Equação 10, então a diferencial de  $z$  é

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

E assim, com a notação de diferencial, a aproximação linear [4] pode ser escrita como

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

A Figura 7 é uma correspondente tridimensional da Figura 6 e mostra a interpretação geométrica da diferencial  $dz$  e o incremento  $\Delta z$ :  $dz$  representa a alteração da altura do plano tangente, ao passo que  $\Delta z$  representa a alteração da altura da superfície  $z = f(x, y)$  quando  $(x, y)$  varia de  $(a, b)$  para  $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ .

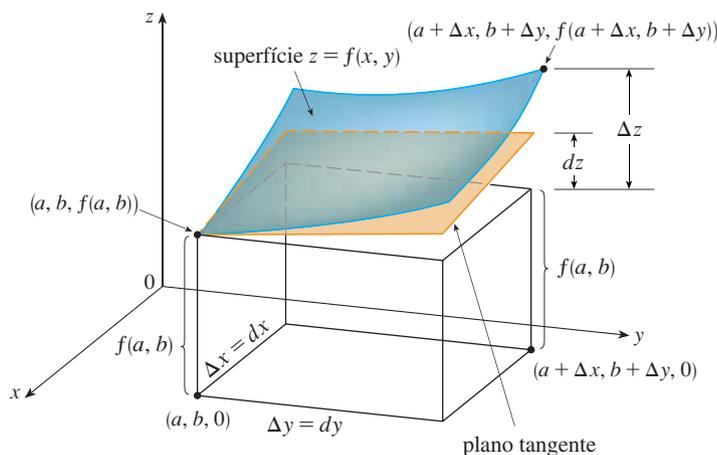


FIGURA 7

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

### EXEMPLO 4

(a) Se  $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$ , determine a diferencial  $dz$ .

(b) Se  $x$  varia de 2 para 2,05 e  $y$  varia de 3 a 2,96, compare os valores de  $\Delta z$  e  $dz$ .

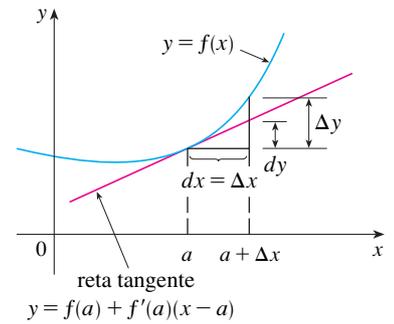


FIGURA 6

No Exemplo 4,  $dz$  está próximo de  $\Delta z$  porque o plano tangente é uma boa aproximação da superfície  $z = x^2 + 3xy - y^2$  perto do ponto  $(2, 3, 13)$ . (Veja a Figura 8.)

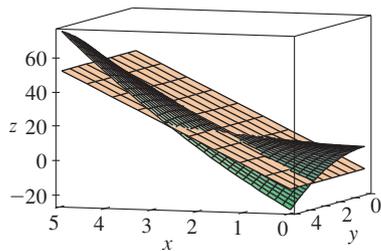


FIGURA 8

### SOLUÇÃO

(a) Da Definição 10 vem

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2x + 3y) dx + (3x - 2y) dy$$

(b) Tomando  $x = 2$ ,  $dx = \Delta x = 0,05$ ,  $y = 3$  e  $dy = \Delta y = -0,04$ , obtemos

$$dz = [2(2) + 3(3)]0,05 + [3(2) - 2(3)](-0,04) = 0,65$$

O incremento de  $z$  é

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(2,05, 2,96) - f(2, 3) \\ &= [(2,05)^2 + 3(2,05)(2,96) - (2,96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2] \\ &= 0,6449 \end{aligned}$$

Observe que  $\Delta z \approx dz$ , mas  $dz$  é mais simples de calcular. ■

**EXEMPLO 5** Foram feitas medidas do raio da base e da altura de um cone circular reto e obtivemos 10 cm e 25 cm, respectivamente, com possível erro nessas medidas de, no máximo, 0,1 cm. Utilize a diferencial para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume do cone.

**SOLUÇÃO** O volume  $V$  do cone com raio da base  $r$  e altura  $h$  é  $V = \pi r^2 h/3$ . Logo, a diferencial de  $V$  é

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \frac{2\pi r h}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh$$

Como cada erro é de, no máximo, 0,1 cm, temos  $|\Delta r| \leq 0,1$ ,  $|\Delta h| \leq 0,1$ . Para estimarmos o maior erro no volume, tomamos o maior erro na mensuração de  $r$  e de  $h$ ; portanto, tomamos  $dr = 0,1$  e  $dh = 0,1$  para  $r = 10$ ,  $h = 25$ . Isso dá

$$dV = \frac{500\pi}{3} (0,1) + \frac{100\pi}{3} (0,1) = 20\pi$$

Assim, o erro máximo cometido no cálculo do volume é de cerca de  $20\pi \text{ cm}^3 \approx 63 \text{ cm}^3$ . ■

## Funções de Três ou Mais Variáveis

Aproximações lineares, diferenciabilidade e diferenciais podem ser definidas de maneira análoga para as funções de mais que duas variáveis. Uma função diferenciável é definida por uma expressão semelhante àquela da Definição 7. Para essas funções a **aproximação linear** é

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

e a linearização  $L(x, y, z)$  é o lado direito dessa expressão.

Se  $w = f(x, y, z)$ , então o **incremento** de  $w$  é

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

A **diferencial**  $dw$  é definida em termos das diferenciais  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  das variáveis independentes por

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

**EXEMPLO 6** As dimensões de uma caixa retangular são medidas como 75 cm, 60 cm e 40 cm, e cada medida foi feita com precisão de 0,2 cm. Use diferenciais para estimar o maior erro possível quando calculamos o volume da caixa usando essas medidas.

**SOLUÇÃO** Se as dimensões da caixa são  $x$ ,  $y$  e  $z$ , seu volume é  $V = xyz$ ; portanto,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = yz dx + xz dy + xy dz$$

Foi-nos dado que  $|\Delta x| \leq 0,2$ ,  $|\Delta y| \leq 0,2$  e  $|\Delta z| \leq 0,2$ . Para estimarmos o maior erro no volume, utilizamos, portanto,  $dx = 0,2$ ,  $dy = 0,2$  e  $dz = 0,2$  junto com  $x = 75$ ,  $y = 60$  e  $z = 40$ :

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0,2) + (75)(40)(0,2) + (75)(60)(0,2) = 1980$$

Portanto, um erro de apenas 0,2 cm nas medidas de cada dimensão pode nos levar a um erro da ordem de 1.980 cm<sup>3</sup> no cálculo do volume! Isso pode parecer um erro muito grande, mas, na verdade, é um erro de apenas cerca de 1% do volume da caixa.

## 14.4 Exercícios

**1-6** Determine uma equação do plano tangente à superfície no ponto especificado.

1.  $z = 3y^2 - 2x^2 + x$ , (2, -1, -3)

2.  $z = 3(x - 1)^2 + 2(y + 3)^2 + 7$ , (2, -2, 12)

3.  $z = \sqrt{xy}$ , (1, 1, 1)

4.  $z = xe^{xy}$ , (2, 0, 2)

5.  $z = x \operatorname{sen}(x + y)$ , (-1, 1, 0)

6.  $z = \ln(x - 2y)$ , (3, 1, 0)

 **7-8** Desenhe a superfície e o plano tangente no ponto dado. (Escolha o domínio e o ponto de vista de modo a ver tanto a superfície quanto o plano tangente.) Em seguida, dê *zoom* até que a superfície e o plano tangente se tornem indistinguíveis.

7.  $z = x^2 + xy + 3y^2$ , (1, 1, 5)

8.  $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$ , (1, 1,  $\pi/4$ )

 **9-10** Desenhe o gráfico de  $f$  e de seu plano tangente no ponto dado. (Utilize um sistema de computação algébrica tanto para calcular as derivadas parciais quanto para traçar os gráficos da função e de seu plano tangente.) Em seguida, dê *zoom* até que a superfície e o plano tangente se tornem indistinguíveis.

9.  $f(x, y) = \frac{xy \operatorname{sen}(x - y)}{1 + x^2 + y^2}$ , (1, 1, 0) (1, 1, 0)

10.  $f(x, y) = e^{-xy/10}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy})$ , (1, 1,  $3e^{-0,1}$ )

**11-16** Explique por que a função é diferenciável no ponto dado. A seguir, encontre a linearização  $L(x, y)$  da função naquele ponto.

11.  $f(x, y) = 1 + x \ln(xy - 5)$ , (2, 3)

12.  $f(x, y) = x^3y^4$ , (1, 1)

13.  $f(x, y) = \frac{x}{x + y}$ , (2, 1)

14.  $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}$ , (3, 0)

15.  $f(x, y) = e^{-xy} \cos y$ , ( $\pi$ , 0)

16.  $f(x, y) = y + \operatorname{sen}(x/y)$ , (0, 3)

**17-18** Verifique a aproximação linear em (0, 0).

17.  $\frac{2x + 3}{4y + 1} \approx 3 + 2x - 12y$     18.  $\sqrt{y + \cos^2 x} \approx 1 + \frac{1}{2}y$

19. Dado que  $f$  é uma função diferenciável  $f(2, 5) = 6$ ,  $f_x(2, 5) = 1$  e  $f_y(2, 5) = -1$ , use uma aproximação linear para estimar  $f(2,2, 4,9)$ .

 **20.** Determine a aproximação linear da função  $f(x, y) = 1 - xy \cos \pi y$  em (1, 1) e use-a para aproximar o número  $f(1,02, 0,97)$ . Ilustre, traçando o gráfico de  $f$  e do plano tangente.

21. Determine a aproximação linear da função  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  em (3, 2, 6) e use-a para aproximar o número  $\sqrt{(3,02)^2 + (1,97)^2 + (5,99)^2}$ .

22. A altura  $h$  de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento  $v$  e do tempo  $t$  durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função  $h = f(v, t)$  são apresentados na seguinte tabela. Use a tabela para determinar uma aproximação linear da função altura da onda quando  $v$  está próximo de 80 km/h e  $t$  está próximo de 20 horas. Em seguida, estime a altura das ondas quando está ventando por 24 horas a 84 km/h.

		Duração (horas)						
		5	10	15	20	30	40	50
Velocidade do vento (km/h)	$v \backslash t$	5	10	15	20	30	40	50
	40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
	60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
	80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
	100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
	120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

23. Utilize a tabela do Exemplo 3 para encontrar a aproximação linear da função humidex quando a temperatura está próxima de 32 °C e a umidade relativa do ar é de aproximadamente 65%. Estime também o humidex quando a temperatura é de 33 °C e a umidade relativa, 63%.

24. O índice de sensação térmica  $W$  é a temperatura sentida quando a temperatura real é  $T$  e a velocidade do vento,  $v$ . Portanto, podemos escrever  $W = f(T, v)$ . A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1. Use essa tabela para determinar a aproximação linear da função de sensação térmica quando  $T$  estiver a -15 °C e  $v$  estiver próximo de 50 km/h. Estime, a seguir, a sensação térmica quando a temperatura estiver a -17 °C e a velocidade do vento for de 55 km/h.

 É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

 É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em [www.stewartcalculus.com](http://www.stewartcalculus.com)

		Velocidade do vento (km/h)						
		$v$	20	30	40	50	60	70
Temperatura real (°C)	$T$							
	-10	-18	-20	-21	-22	-23	-23	
	-15	-24	-26	-27	-29	-30	-30	
	-20	-30	-33	-34	-35	-36	-37	
-25	-37	-39	-41	-42	-43	-44		

**25–30** Determine a diferencial da função.

**25.**  $z = e^{-2x} \cos 2\pi t$       **26.**  $u = \sqrt{x^2 + 3y^2}$

**27.**  $m = p^5 q^3$       **28.**  $T = \frac{v}{1 + uvw}$

**29.**  $R = \alpha\beta^2 \cos \lambda$       **30.**  $L = xze^{-y^2-z^2}$

**31.** Se  $z = 5x^2 + y^2$  e  $(x, y)$  varia de  $(1, 2)$  a  $(1,05, 2,1)$ , compare os valores de  $\Delta z$  e  $dz$ .

**32.** Se  $z = x^2 - xy + 3y^2$  e  $(x, y)$  varia de  $(3, -1)$  a  $(2,96, -0,95)$ , compare os valores de  $\Delta z$  e  $dz$ .

**33.** O comprimento e a largura de um retângulo foram medidos como 30 cm e 24 cm, respectivamente, com um erro de medida de, no máximo, 0,1 cm. Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da área do retângulo.

**34.** Use diferenciais para estimar a quantidade de metal em uma lata cilíndrica fechada de 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro se o metal das tampas de cima e de baixo possui 0,1 cm de espessura e o das laterais tem espessura de 0,05 cm.

**35.** Utilize diferenciais para estimar a quantidade de estanho em uma lata cilíndrica fechada com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura se a espessura da folha de estanho for de 0,04 cm.

**36.** O índice de sensação térmica é modelado pela função

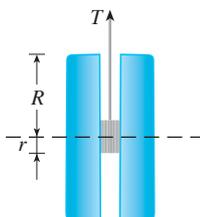
$$W = 13,12 + 0,6215T - 11,37v^{0,16} + 0,3965Tv^{0,16}$$

onde  $T$  é a temperatura (em °C) e  $v$ , a velocidade do vento (em km/h). A velocidade do vento é medida como 26 km/h, com uma possibilidade de erro de  $\pm 2$  km/h, e a temperatura é medida como  $-11$  °C, com a possibilidade de erro de  $\pm 1$  °C. Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo cometido no valor calculado de  $W$  em decorrência dos erros de medida em  $T$  e  $v$ .

**37.** A tensão  $T$  no cordel do ioiô na figura é

$$T = \frac{mgR}{2r^2 + R^2}$$

onde  $m$  é a massa do ioiô e  $g$  é a aceleração pela gravidade. Utilize as diferenciais para estimar a variação na tensão se  $R$  aumentar de 3 cm para 3,1 cm e  $r$  aumentar de 0,7 cm para 0,8 cm. A tensão aumenta ou decresce?



**38.** A pressão, o volume e a temperatura de um mol de um gás ideal estão relacionados pela equação  $PV = 8,31T$ , onde  $P$  é medida em quilopascals,  $V$  em litros e  $T$  em kelvins. Utilize diferenciais para determinar a variação aproximada da pressão se o volume aumenta de 12 L para 12,3 L e a temperatura decresce de 310 K para 305 K.

**39.** Se  $R$  é a resistência equivalente de três resistores conectados em paralelo, com resistências  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ , então

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Se as resistências são medidas em ohms como  $R_1 = 25 \Omega$ ,  $R_2 = 40 \Omega$  e  $R_3 = 50 \Omega$ , com margem de erro de 0,5% em cada uma, estime o erro máximo no valor calculado de  $R$ .

**40.** Quatro números positivos, cada um menor que 50, são arredondados até a primeira casa decimal e depois multiplicados. Utilize diferenciais para estimar o máximo erro possível no cálculo do produto que pode resultar do arredondamento.

**41.** Um modelo para a área da superfície do corpo humano é dado por  $S = 72,09w^{0,425} h^{0,725}$ , onde  $w$  é o peso (em quilogramas),  $h$  é a altura (em centímetros) e  $S$  é medida em centímetros quadrados. Se os erros nas medidas de  $w$  e  $h$  forem no máximo de 2%, use diferenciais para estimar a porcentagem de erro máxima na área da superfície calculada.

**42.** Suponha que você precise saber uma equação do plano tangente à superfície  $S$  no ponto  $P(2, 1, 3)$ . Você não tem uma equação para  $S$ , mas sabe que as curvas

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle 2 + 3t, 1 - t^2, 3 - 4t + t^2 \rangle$$

$$\mathbf{r}_2(u) = \langle 1 + u^2, 2u^3 - 1, 2u + 1 \rangle$$

ambas estão em  $S$ . Encontre uma equação para o plano tangente em  $P$ .

**43–44** Mostre que a função é diferenciável achando valores de  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  que satisfaçam à Definição 7.

**43.**  $f(x, y) = x^2 + y^2$

**44.**  $f(x, y) = xy - 5y^2$

**45.** Demonstre que se  $f$  é uma função de duas variáveis diferenciáveis em  $(a, b)$ , então  $f$  é contínua em  $(a, b)$ .

*Dica:* Mostre que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b)$$

**46.** (a) A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

foi representada em um gráfico na Figura 4. Mostre que  $f_x(0, 0)$  e  $f_y(0, 0)$  existem, mas  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ . [*Dica:* Utilize o resultado do Exercício 45.]

(b) Explique por que  $f_x$  e  $f_y$  não são contínuas em  $(0, 0)$ .

## 14.5 Regra da Cadeia

Lembre-mos de que a Regra da Cadeia para uma função de uma única variável nos dava uma regra para derivar uma função composta: se  $y = f(x)$  e  $x = g(t)$ , onde  $f$  e  $g$  são funções diferenciáveis, então  $y$  é uma função indiretamente diferenciável de  $t$  e

$$\boxed{1} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Para as funções de mais de uma variável, a Regra da Cadeia tem muitas versões, cada uma delas fornecendo uma regra de derivação de uma função composta. A primeira versão (Teorema 2) lida com o caso onde  $z = f(x, y)$  e cada uma das variáveis  $x$  e  $y$  é, por sua vez, uma função de uma variável  $t$ . Isso significa que  $z$  é indiretamente uma função de  $t$ ,  $z = f(g(t), h(t))$ , e a Regra da Cadeia dá uma fórmula para diferenciar  $z$  como uma função de  $t$ . Presumimos que  $f$  seja diferenciável (Definição 14.4.7.) Lembremo-nos de que este é o caso quando  $f_x$  e  $f_y$  são contínuas (Teorema 14.4.8).

**2 A Regra da Cadeia (Caso 1)** Suponha que  $z = f(x, y)$  seja uma função diferenciável de  $x$  e  $y$ , onde  $x = g(t)$  e  $y = h(t)$  são funções diferenciáveis de  $t$ . Então  $z$  é uma função diferenciável de  $t$  e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

**DEMONSTRAÇÃO** Uma variação de  $\Delta t$  em  $t$  produz variações de  $\Delta x$  em  $x$  e  $\Delta y$  em  $y$ . Essas, por sua vez, produzem uma variação de  $\Delta z$  em  $z$  e, da Definição 14.4.7, temos

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

onde  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  e  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  quando  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ . [Se as funções  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  não estão definidas em  $(0, 0)$ , podemos defini-las como 0.] Dividindo ambos os lados desta equação por  $\Delta t$ , temos

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Se fizermos  $\Delta t \rightarrow 0$ , então  $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) \rightarrow 0$  porque  $g$  é diferenciável e, portanto, contínua. Da mesma forma,  $\Delta y \rightarrow 0$ . Isso, por sua vez, implica que  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  e  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ , portanto

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1 \right) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2 \right) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

Como frequentemente escrevemos  $\partial z / \partial x$  no lugar de  $\partial f / \partial x$ , podemos reescrever a Regra da Cadeia na forma

Observe a semelhança com a definição da diferencial:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

**EXEMPLO 1** Se  $z = x^2y + 3xy^4$ , onde  $x = \sin 2t$  e  $y = \cos t$ , determine  $dz/dt$  quando  $t = 0$

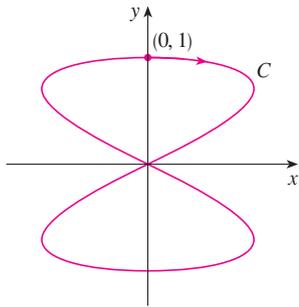
**SOLUÇÃO** A Regra da Cadeia fornece

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= (2xy + 3y^4)(2 \cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t) \end{aligned}$$

Não é necessário substituir as expressões por  $x$  e  $y$  em termos de  $t$ . Nós simplesmente observamos que quando  $t = 0$ , temos  $x = \sin 0 = 0$  e  $y = \cos 0 = 1$ . Portanto,

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = (0 + 3)(2 \cos 0) + (0 + 0)(-\sin 0) = 6$$

A derivada no Exemplo 1 pode ser interpretada como a taxa de variação de  $z$  com relação a  $t$  quando o ponto  $(x, y)$  se move ao longo da curva  $C$  com equações paramétricas  $x = \sin 2t$ ,  $y = \cos t$  (Veja a Figura 1.) Em particular, quando  $t = 0$ , o ponto  $(x, y)$  é  $(0, 1)$ , e  $dz/dt = 6$  é a taxa de aumento quando nos movemos ao longo da curva  $C$  por  $(0, 1)$ . Se, por exemplo,  $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$  representar a temperatura no ponto  $(x, y)$ , então a função composta  $z = T(\sin 2t, \cos t)$  representa a temperatura dos pontos da curva  $C$  e sua derivada  $dz/dt$  corresponde à taxa de variação de temperatura ao longo da curva  $C$ .



**FIGURA 1**

A curva  $x = \sin 2t$ ,  $y = \cos t$

**EXEMPLO 2** A pressão em  $P$  (em kilopascals), volume  $V$  (em litros) e temperatura  $T$  (em kelvins) de um mol de um gás ideal relacionam-se pela equação  $PV = 8,31T$ . Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é 300 K e está aumentando com a taxa de 0,1 K/s e o volume é 100 L e está aumentando com a taxa de 0,2 L/s.

**SOLUÇÃO** Se  $t$  representa o tempo decorrido, medido em segundos, então em um dado instante temos  $T = 300$ ,  $dT/dt = 0,1$ ,  $V = 100$ ,  $dV/dt = 0,2$ . Como

$$P = 8,31 \frac{T}{V}$$

pela Regra da Cadeia

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V} \frac{dV}{dt} = \frac{8,31}{V} \frac{dT}{dt} - \frac{8,31T}{V^2} \frac{dV}{dt} \\ &= \frac{8,31}{100} (0,1) - \frac{8,31(300)}{100^2} (0,2) = -0,04155 \end{aligned}$$

A pressão está decrescendo com a taxa de 0,042 kPa/s. ■

Vamos considerar agora a situação onde  $z = f(x, y)$ , mas  $x$  e  $y$  são funções de outras duas variáveis  $s$  e  $t$ :  $x = g(s, t)$ ,  $y = h(s, t)$ . Então  $z$  é indiretamente uma função de  $s$  e  $t$  e desejamos determinar  $\partial z/\partial s$  e  $\partial z/\partial t$ . Lembre-se de que para calcular  $\partial z/\partial t$  mantemos  $s$  fixo e calculamos a derivada ordinária de  $z$  em relação a  $t$ . Portanto, aplicando o Teorema 2, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Argumento análogo serve para  $\partial z/\partial s$ , e assim demonstramos a seguinte versão da Regra da Cadeia.

**3 A Regra da Cadeia (Caso 2)** Suponha que  $z = f(x, y)$  seja uma função diferenciável de  $x$  e  $y$ , onde  $x = g(s, t)$  e  $y = h(s, t)$  são funções diferenciáveis de  $s$  e  $t$ .

Então

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

**EXEMPLO 3** Se  $z = e^x \sen y$ , onde  $x = st^2$  e  $y = s^2t$ , determine  $\partial z/\partial s$  e  $\partial z/\partial t$ .

**SOLUÇÃO** Aplicando o Caso 2 da Regra da Cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \sen y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st) \\ &= t^2 e^{st^2} \sen(s^2t) + 2ste^{st^2} \cos(s^2t) \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \sen y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2) \\ &= 2ste^{st^2} \sen(s^2t) + s^2 e^{st^2} \cos(s^2t) \end{aligned}$$

O Caso 2 da Regra da Cadeia contém três tipos de variáveis:  $s$  e  $t$  são variáveis **independentes**,  $x$  e  $y$  são chamadas de variáveis **intermediárias**, e  $z$  é a variável **dependente**. Observe que o Teorema 3 tem um termo para cada variável intermediária e que cada um desses termos se assemelha à Regra da Cadeia unidimensional da Equação 1.

Para lembrar a Regra da Cadeia, é útil desenhar o **diagrama em árvore** da Figura 2. Desenhamos os ramos da árvore saindo da variável dependente  $z$  para as variáveis intermediárias  $x$  e  $y$  a fim de indicar que  $z$  é uma função de  $x$  e  $y$ . Então desenhamos os ramos saindo de  $x$  e  $y$  para as variáveis independentes  $s$  e  $t$ . Em cada ramo indicamos a derivada parcial correspondente. Para determinar  $\partial z/\partial s$ , nós determinamos o produto das derivadas parciais ao longo de cada caminho de  $z$  a  $s$  e somamos esses produtos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

Da mesma forma, para determinar  $\partial z/\partial t$  usamos os caminhos de  $z$  a  $t$ .

Consideremos agora uma situação mais geral, na qual a variável dependente  $u$  é uma função de  $n$  variáveis intermediárias  $x_1, \dots, x_n$ , cada uma das quais, por seu turno, é função de  $m$  variáveis independentes  $t_1, \dots, t_m$ . Observe que existem  $n$  termos, um para cada variável intermediária. A demonstração é semelhante à do Caso 1.

**4 A Regra da Cadeia (Versão Geral)** Suponha que  $u$  seja uma função diferenciável de  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  onde cada  $x_j$  é uma função diferenciável de  $m$  variáveis  $t_1, t_2, \dots, t_m$ . Então  $u$  é uma função de  $t_1, t_2, \dots, t_m$  e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ .

**EXEMPLO 4** Escreva a Regra da Cadeia para o caso onde  $w = f(x, y, z, t)$  e  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  e  $t = t(u, v)$ .

**SOLUÇÃO** Aplicamos o Teorema 4 com  $n = 4$  e  $m = 2$ . A Figura 3 mostra o diagrama em árvore. Apesar de não termos escrito as derivadas nos ramos, entendemos que se um ramo liga  $y$  e  $u$ , então a derivada parcial para este ramo é  $\partial y/\partial u$ . Com a ajuda do diagrama em árvore, podemos escrever as expressões pedidas:

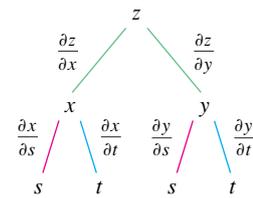


FIGURA 2

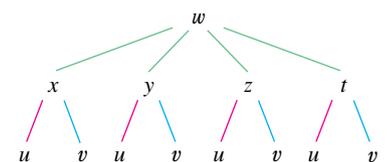


FIGURA 3

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v}$$

**EXEMPLO 5** Se  $u = x^4y + y^2z^3$ , onde  $x = rse^t$ ,  $y = rs^2e^{-t}$  e  $z = r^2s \operatorname{sen} t$ , determine o valor de  $\partial u/\partial s$  quando  $r = 2$ ,  $s = 1$ ,  $t = 0$ .

**SOLUÇÃO** Com o auxílio do diagrama em árvore da Figura 4, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2 \operatorname{sen} t) \end{aligned}$$

Quando  $r = 2$ ,  $s = 1$  e  $t = 0$ , temos  $x = 2$ ,  $y = 2$  e  $z = 0$ , portanto

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192$$

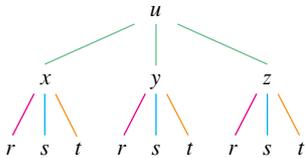


FIGURA 4

**EXEMPLO 6** Se  $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$  e  $f$  é diferenciável, mostre que  $g$  satisfaz a equação

$$t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

**SOLUÇÃO** Seja  $x = s^2 - t^2$  e  $y = t^2 - s^2$ . Então  $g(s, t) = f(x, y)$  e a Regra da Cadeia nos fornece

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} (2s) + \frac{\partial f}{\partial y} (-2s) \\ \frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} (-2t) + \frac{\partial f}{\partial y} (2t) \end{aligned}$$

Portanto,

$$t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = \left( 2st \frac{\partial f}{\partial x} - 2st \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \left( -2st \frac{\partial f}{\partial x} + 2st \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$$

**EXEMPLO 7** Se  $z = f(x, y)$  tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e  $x = r^2 + s^2$  e  $y = 2rs$ , determine (a)  $\partial z/\partial r$  e (b)  $\partial^2 z/\partial r^2$ .

**SOLUÇÃO**

(a) A Regra da Cadeia fornece

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} (2r) + \frac{\partial z}{\partial y} (2s)$$

(b) Aplicando a Regra do Produto na expressão da parte (a), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( 2r \frac{\partial z}{\partial x} + 2s \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) + 2s \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Mas, usando a Regra da Cadeia novamente (veja a Figura 5), temos

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} (2s)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} (2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (2s)$$

Colocando essas expressões na Equação 5 e usando a igualdade das derivadas parciais de segunda ordem mistas, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2r \left( 2r \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) + 2s \left( 2r \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2s \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \\ &= 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4s^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned}$$

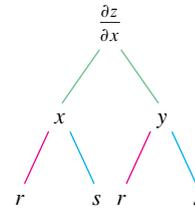


FIGURA 5

### Diferenciação Implícita

A Regra da Cadeia pode ser usada para dar uma descrição mais completa do processo de derivação implícita introduzida nas Seções 3.5, no Volume I, e 14.3. Supomos que uma equação da forma  $F(x, y) = 0$  defina  $y$  implicitamente como uma função diferenciável de  $x$ , isto é,  $y = f(x)$ , onde  $F(x, f(x)) = 0$  para todo  $x$  no domínio de  $f$ . Se  $F$  é diferenciável, podemos aplicar o Casa 1 da Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da equação  $F(x, y) = 0$  com relação a  $x$ . Já que  $x$  e  $y$  são funções de  $x$ , obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

No entanto,  $dx/dx = 1$ , então se  $\partial F/\partial y \neq 0$  resolvemos para  $dy/dx$  e obtemos

6

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = - \frac{F_x}{F_y}$$

Para deduzir essa equação, presumimos que  $F(x, y) = 0$  define  $y$  implicitamente como função de  $x$ . O **Teorema da Função Implícita**, demonstrado em cálculo avançado, fornece condições sob as quais essa suposição é válida: Ele afirma que se  $F$  é definida em uma bola aberta contendo  $(a, b)$ , onde  $F(a, b) = 0$ ,  $F_y(a, b) \neq 0$  e  $F_x$  e  $F_y$  são funções contínuas nessa bola, então a equação  $F(x, y) = 0$  define  $y$  como uma função de  $x$  perto do ponto  $(a, b)$  e a derivada dessa função é dada pela Equação 6.

**EXEMPLO 8** Determine  $y'$  se  $x^3 + y^3 = 6xy$ .

**SOLUÇÃO** A equação dada pode ser escrita como

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

e, dessa forma, a Equação 6 nos dá

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F_x}{F_y} = - \frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = - \frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

Suponha agora que  $z$  seja dado implicitamente como uma função  $z = f(x, y)$  por uma equação da forma  $F(x, y, z) = 0$ . Isso significa que  $F(x, y, f(x, y)) = 0$  para todo  $(x, y)$  no domínio de  $f$ . Se  $F$  e  $f$  forem diferenciáveis, utilizamos a Regra da Cadeia para derivar a equação  $F(x, y, z) = 0$  da seguinte forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

A solução do Exemplo 8 deve ser comparada com a do Exemplo 2 da Seção 3.5, no Volume I.

$$\text{Mas,} \quad \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$$

portanto, essa equação se torna

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Se  $\partial F/\partial z \neq 0$ , resolvemos para  $\partial z/\partial x$  e obtemos a primeira fórmula das Equações 7. A fórmula para  $\partial z/\partial y$  é obtida de uma maneira semelhante.

7

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Novamente, uma versão do **Teorema da Função Implícita** estipula condições sob as quais nossa suposição é válida: se  $F$  é definida dentro de uma esfera contendo  $(a, b, c)$ , onde  $F(a, b, c) = 0$ ,  $F_z(a, b, c) \neq 0$  e  $F_x, F_y$  e  $F_z$  são contínuas dentro da esfera, então a equação  $F(x, y, z) = 0$  define  $z$  como uma função de  $x$  e  $y$  perto do ponto  $(a, b, c)$ , e as derivadas parciais dessa função são dadas por [7].

**EXEMPLO 9** Determine  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  se  $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$ .

**SOLUÇÃO** Seja  $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$ . Então, das Equações 7, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

A solução do Exemplo 9 deve ser comparada com a do Exemplo 4 na Seção 14.3.

## 14.5 Exercícios

**1–6** Use a Regra da Cadeia para achar  $dz/dt$  ou  $dw/dt$ .

- $z = x^2 + y^2 + xy, \quad x = \sin t, \quad y = e^t$
- $z = \cos(x + 4y), \quad x = 5t^4, \quad y = 1/t$
- $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \quad x = \ln t, \quad y = \cos t$
- $z = \operatorname{tg}^{-1}(y/x), \quad x = e^t, \quad y = 1 - e^{-t}$
- $w = xe^{y/z}, \quad x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t$
- $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = \operatorname{tg} t$

**7–12** Use a Regra da Cadeia para achar  $\partial z/\partial s$  e  $\partial z/\partial t$ .

- $z = x^2y^3, \quad x = s \cos t, \quad y = s \sin t$
- $z = \arcsen(x - y), \quad x = s^2 + t^2, \quad y = 1 - 2st$
- $z = \sin \theta \cos \phi, \quad \theta = st^2, \quad \phi = s^2t$
- $z = e^{x+2y}, \quad x = s/t, \quad y = t/s$

**11.**  $z = e^r \cos \theta, \quad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

**12.**  $z = \operatorname{tg}(u/v), \quad u = 2s + 3t, \quad v = 3s - 2t$

**13.** Se  $z = f(x, y)$ , onde  $f$  é diferenciável, e

$$\begin{aligned} x &= g(t) & y &= h(t) \\ g(3) &= 2 & h(3) &= 7 \\ g'(3) &= 5 & h'(3) &= -4, \\ f_x(2, 7) &= 6 & f_y(2, 7) &= -8 \end{aligned}$$

determine  $dz/dt$  quando  $t = 3$ .

**14.** Seja  $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$ , onde  $F, u$  e  $v$  são diferenciáveis, e

$$\begin{aligned} u(1, 0) &= 2 & v(1, 0) &= 3 \\ u_s(1, 0) &= -2 & v_s(1, 0) &= 5 \\ u_t(1, 0) &= 6 & v_t(1, 0) &= 4 \\ F_u(2, 3) &= -1 & F_v(2, 3) &= 10 \end{aligned}$$

Encontre  $W_s(1, 0)$  e  $W_t(1, 0)$ .

15. Suponha que  $f$  seja uma função diferenciável de  $x$  e  $y$ , e  $g(u, v) = f(e^u + \sen v, e^u + \cos v)$ . Use a tabela de valores para calcular  $g_u(0, 0)$  e  $g_v(0, 0)$ .

	$f$	$g$	$f_x$	$f_y$
$(0, 0)$	3	6	4	8
$(1, 2)$	6	3	2	5

16. Suponha que  $f$  seja uma função diferenciável de  $x$  e  $y$ , e  $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$ . Use a tabela de valores do Exercício 15 para calcular  $g_r(1, 2)$  e  $g_s(1, 2)$ .

17–20 Utilize um diagrama em árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso dado. Suponha que todas as funções sejam diferenciáveis.

17.  $u = f(x, y)$ , onde  $x = x(r, s, t)$ ,  $y = y(r, s, t)$   
 18.  $R = f(x, y, z, t)$ , onde  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$ ,  $t = t(u, v, w)$   
 19.  $w = f(r, s, t)$ , onde  $r = r(x, y)$ ,  $s = s(x, y)$ ,  $t = t(x, y)$   
 20.  $t = f(u, v, w)$ , onde  $u = u(p, q, r, s)$ ,  $v = v(p, q, r, s)$ ,  $w = w(p, q, r, s)$

21–26 Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

21.  $z = x^2 + xy^3$ ,  $x = uv^2 + w^3$ ,  $y = u + ve^w$ ;  
 $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial w}$  quando  $u = 2$ ,  $v = 1$ ,  $w = 0$   
 22.  $u = \sqrt{r^2 + s^2}$ ,  $r = y + x \cos t$ ,  $s = x + y \sen t$ ;  
 $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}$  quando  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $t = 0$   
 23.  $w = xy + yz + zx$ ,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sen \theta$ ,  $z = r\theta$ ;  
 $\frac{\partial w}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial \theta}$  quando  $r = 2$ ,  $\theta = \pi/2$   
 24.  $P = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ ,  $u = xe^y$ ,  $v = ye^x$ ,  $w = e^{xy}$ ;  
 $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$  quando  $x = 0$ ,  $y = 2$   
 25.  $N = \frac{p + q}{p + r}$ ,  $p = u + vw$ ,  $q = v + uw$ ,  $r = w + uv$ ;  
 $\frac{\partial N}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial N}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial N}{\partial w}$  quando  $u = 2$ ,  $v = 3$ ,  $w = 4$   
 26.  $u = xe^{vy}$ ,  $x = \alpha^2\beta$ ,  $y = \beta^2\gamma$ ,  $t = \gamma^2\alpha$ ;  
 $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \beta}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \gamma}$  quando  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 1$

27–30 Utilize a Equação 6 para determinar  $dy/dx$ .

27.  $y \cos x = x^2 + y^2$       28.  $\cos(xy) = 1 + \sen y$   
 29.  $\tg^{-1}(x^2y) = x + xy^2$       30.  $e^y \sen x = x + xy$

31–34 Utilize as Equações 7 para determinar  $\partial z/\partial x$  e  $\partial z/\partial y$ .

31.  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$       32.  $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$   
 33.  $e^z = xyz$       34.  $yz + x \ln y = z^2$

35. A temperatura em um ponto  $(x, y)$  é  $T(x, y)$ , medida em graus Celsius. Um inseto rasteja, de modo que sua posição após  $t$  segundos é dada por  $x = \sqrt{1 + t}$ ,  $y = 2 + \frac{1}{3}t$ , onde  $x$  e  $y$  são medidos em centímetros. A função da temperatura satisfaz  $T_x(2, 3) = 4$  e  $T_y(2, 3) = 3$ . Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de três segundos?

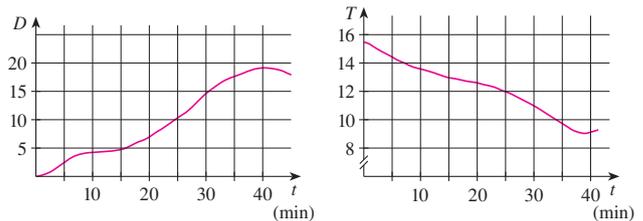
36. A produção de trigo  $W$  em um determinado ano depende da temperatura média  $T$  e do volume anual das chuvas  $R$ . Cientistas estimam que a temperatura média anual está crescendo à taxa de  $0,15$  °C/ano e a quantidade anual de chuva está decrescendo à taxa de  $0,1$  cm/ano. Eles também estimam que, no atual nível de produção,  $\partial W/\partial T = -2$  e  $\partial W/\partial R = 8$ .

- (a) Qual é o significado do sinal dessas derivadas parciais?  
 (b) Estime a taxa de variação corrente da produção de trigo  $dW/dt$ .

37. A velocidade da propagação do som através do oceano com salinidade de 35 partes por milhar foi modelada pela equação

$$C = 1449,2 + 4,6T - 0,055T^2 + 0,00029T^3 + 0,016D$$

onde  $C$  é a velocidade do som (em metros por segundo),  $T$  é a temperatura (em graus Celsius) e  $D$  é a profundidade abaixo do nível do mar (em metros). Um mergulhador começa um mergulho tranquilo nas águas oceânicas, e a profundidade do mergulho e a temperatura da água ao redor são registradas nos gráficos a seguir. Estime a taxa de variação (em relação ao tempo) da velocidade do som através do oceano experimentada pelo mergulhador 20 minutos depois do início do mergulho. Quais são as unidades?



38. O raio de um cone circular reto está aumentando em uma taxa de  $4,6$  cm/s enquanto sua altura está decrescendo em uma taxa de  $6,5$  cm/s. Em qual taxa o volume do cone está variando quando o raio é  $300$  cm e a altura é  $350$  cm?

39. O comprimento  $\ell$ , a largura  $w$  e a altura  $h$  de uma caixa variam com o tempo. Em um determinado momento, as dimensões são  $\ell = 1$  m e  $w = h = 2$  m,  $\ell$  e  $w$  estão aumentando em uma taxa de  $2$  m/s enquanto  $h$  está decrescendo em uma taxa de  $3$  m/s. Nesse instante, encontre as taxas em que as seguintes quantidades estão variando.

- (a) O volume  
 (b) A área da superfície  
 (c) O comprimento da diagonal

40. A voltagem  $V$  em um circuito elétrico simples decresce lentamente à medida que a pilha se descarrega. A resistência  $R$  aumenta lentamente com o aumento de calor do resistor. Use a Lei de Ohm,  $V = IR$ , para achar como a corrente  $I$  está variando no momento em que  $R = 400 \Omega$ ,  $I = 0,08$  A,  $dV/dt = -0,01$  V/s e  $dR/dt = 0,03 \Omega/s$ .

41. A pressão de  $1$  mol de um gás ideal está aumentando em uma taxa de  $0,05$  kPa/s e a temperatura está aumentando em uma taxa de  $0,15$  K/s. Use a equação no Exemplo 2 para determinar a taxa de variação do volume quando a pressão for  $20$  kPa e a temperatura for  $320$  K.

42. Um fabricante modelou sua função  $P$  da produção anual (o valor de toda essa produção em milhões de dólares) como uma função Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1,47 L^{0,65} K^{0,35}$$

onde  $L$  é o número de horas trabalhadas (em milhares) e  $K$  é o capital investido (em milhões de dólares). Suponha que quando  $L = 30$  e  $K = 8$ , a força de trabalho esteja decrescendo em uma taxa de 2.000 horas trabalhadas por ano e o capital esteja aumentando em uma taxa de \$ 500.000 por ano. Encontre a taxa de variação da produção.

43. Um lado de um triângulo está aumentando em uma taxa de 3 cm/s e um segundo lado está decrescendo em uma taxa de 2 cm/s. Se a área do triângulo permanece constante, a que taxa varia o ângulo entre os lados quando o primeiro lado tem 20 cm de comprimento, o segundo lado tem 30 cm de comprimento e o ângulo é  $\pi/6$ ?
44. Se um som com frequência  $f_s$  for produzido por uma fonte se movendo ao longo de uma reta com velocidade  $v_s$  e um observador estiver se movendo com velocidade  $v_o$  ao longo da mesma reta a partir da direção oposta, em direção à fonte, então a frequência do som ouvido pelo observador é

$$f_o = \left( \frac{c + v_o}{c - v_s} \right) f_s$$

onde  $c$  é a velocidade do som, cerca de 332 m/s. (Este é o **efeito Doppler**.) Suponha que, em um dado momento, você esteja em um trem que se move a 34 m/s e acelera a 1,2 m/s<sup>2</sup>. Um trem se aproxima de você da direção oposta no outro trilho a 40 m/s, acelerando a 1,4 m/s<sup>2</sup>, e toca seu apito, com frequência de 460 Hz. Neste instante, qual é a frequência aparente que você ouve e quão rapidamente ela está variando?

45–48 Suponha que todas as funções dadas sejam diferenciáveis.

45. Se  $z = f(x, y)$ , onde  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , (a) determine  $\partial z / \partial r$  e  $\partial z / \partial \theta$  e (b) mostre que

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = \left( \frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2$$

46. Se  $u = f(x, y)$ , onde  $x = e^s \cos t$  e  $y = e^s \sin t$ , mostre que

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = e^{-2s} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right]$$

47. Se  $z = f(x - y)$ , mostre que  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

48. Se  $z = f(x, y)$ , onde  $x = s + t$  e  $y = s - t$ , mostre que

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t}$$

49–54 Suponha que todas as funções dadas tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

49. Mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é uma solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[Dica: Seja  $u = x + at$ ,  $v = x - at$ .]

50. Se  $u = f(x, y)$ , onde  $x = e^s \cos t$  e  $y = e^s \sin t$ , mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]$$

51. Se  $z = f(x, y)$ , onde  $x = r^2 + s^2$ ,  $y = 2rs$ , determine  $\partial^2 z / \partial r \partial s$ . (Compare com o Exemplo 7.)

52. Se  $z = f(x, y)$ , onde  $x = r \cos \theta$ , e  $y = r \sin \theta$ , determine (a)  $\partial z / \partial r$ , (b)  $\partial z / \partial \theta$  e (c)  $\partial^2 z / \partial r \partial \theta$ .

53. Se  $z = f(x, y)$ , onde  $x = r \cos \theta$ , e  $y = r \sin \theta$ , mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r}$$

54. Suponha que  $z = f(x, y)$ , onde  $x = g(s, t)$  e  $y = h(s, t)$ . (a) Mostre que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{aligned}$$

(b) Determine uma fórmula semelhante para  $\partial^2 z / \partial s \partial t$ .

55. Uma função  $f$  é chamada **homogênea de  $n$ -ésimo grau** se satisfaz a equação  $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$  para todo  $t$ , onde  $n$  é um inteiro positivo e  $f$  tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

(a) Verifique se  $f(x, y) = x^2 y + 2xy^2 + 5y^3$  é homogênea de grau 3.

(b) Mostre que, se  $f$  é homogênea de grau  $n$ , então

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y)$$

[Dica: Utilize a Regra da Cadeia para derivar  $f(tx, ty)$  com relação a  $t$ .]

56. Se  $f$  é homogênea de grau  $n$ , mostre que

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)f(x, y)$$

57. Se  $f$  é homogênea de grau  $n$ , mostre que

$$f_x(tx, ty) = t^{n-1} f_x(x, y)$$

58. Suponha que a equação  $F(x, y, z) = 0$  defina implicitamente cada uma das três variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  como funções das outras duas:  $z = f(x, y)$ ,  $y = g(x, z)$ ,  $x = h(y, z)$ . Se  $F$  for diferenciável e  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  forem todas não nulas, mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = -1$$

59. A Equação 6 é uma fórmula para a derivada  $dy/dx$  de uma função definida implicitamente por uma equação  $F(x, y) = 0$ , sendo que  $F$  é diferenciável e  $F_y \neq 0$ . Comprove que se  $F$  tem derivadas contínuas de segunda ordem, então uma fórmula para a segunda derivada de  $y$  é

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{F_{xx} F_y^2 - 2F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2}{F_y^3}$$

## 14.6 Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente

A Figura 1 mostra um mapa de contorno da função temperatura  $T(x, y)$  para a China às 15 horas em 28 de dezembro de 2004. As curvas de nível, ou isotérmicas, ligam-se às localidades que têm a mesma temperatura. A derivada parcial  $T_x$  em um local como Chongqing é a taxa de variação da temperatura com relação à distância se nos movermos para o leste a partir de Chongqing;  $T_y$  é a taxa de variação da temperatura se nos movermos para o norte. Mas, e se quisermos saber a taxa de variação da temperatura quando viajamos para sudoeste ou em alguma outra direção? Nesta seção, introduziremos um tipo de derivada, chamada derivada direcional, que nos permite encontrar a taxa de variação de uma função de duas ou mais variáveis em qualquer direção.

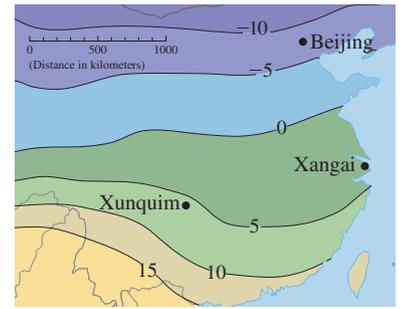


FIGURA 1

### Derivadas Direcionais

Lembremo-nos de que, se  $z = f(x, y)$ , as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  são definidas como

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

1

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

e representam as taxas de mudança de  $z$  nas direções  $x$  e  $y$ , ou seja, na direção dos vetores de unidade  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$ .

Suponha que queiramos determinar a taxa de variação de  $z$  em  $(x_0, y_0)$  na direção de um vetor unitário arbitrário  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ . (Veja a Figura 2.) Para fazê-lo, devemos considerar a superfície  $S$  com equação  $z = f(x, y)$  (gráfico de  $f$ ) e tomar  $z_0 = f(x_0, y_0)$ . Então o ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$  está em  $S$ . O plano vertical que passa por  $P$  na direção de  $\mathbf{u}$  intercepta  $S$  em uma curva  $C$ . (Veja a Figura 3.) A inclinação da reta tangente  $T$  a  $C$  em  $P$  é a taxa de variação de  $z$  na direção de  $\mathbf{u}$ .

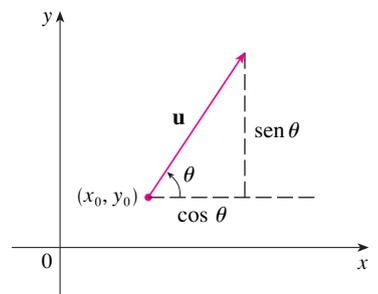


FIGURA 2

Um vetor unitário  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle = \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$

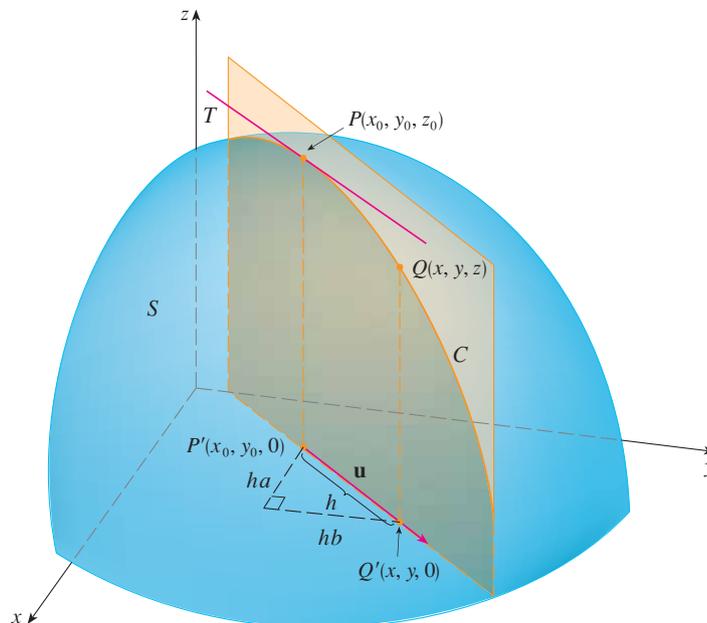


FIGURA 3

Se  $Q(x, y, z)$  é outro ponto sobre  $C$  e  $P', Q'$  são as projeções de  $P, Q$  sobre o plano  $xy$ , então o vetor  $\overrightarrow{P'Q'}$  é paralelo a  $\mathbf{u}$  e, portanto

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

para alguma escalar  $h$ . Logo,  $x - x_0 = ha$ ,  $y - y_0 = hb$ , portanto  $x = x_0 + ha$ ,  $y = y_0 + hb$ , e

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

**TEC** Visual 14.6A mostra uma animação da Figura 3 ao rotacionar  $\mathbf{u}$  e, portanto  $T$ .

Se tomarmos o limite quando  $h \rightarrow 0$ , obteremos a taxa de variação de  $z$  na direção de  $\mathbf{u}$ , que é chamada derivada direcional de  $f$  na direção e sentido de  $\mathbf{u}$ .

**2 Definição** A derivada direcionada de  $f$  em  $(x_0, y_0)$  na direção do vetor unitário  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$  é

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esse limite existir.

Comparando a Definição 2 com as Equações [1], vemos que, se  $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ , então  $D_{\mathbf{i}}f = f_x$  e se  $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ , então  $D_{\mathbf{j}}f = f_y$ . Em outras palavras, as derivadas parciais de  $f$  relacionadas a  $x$  e  $y$  são apenas casos especiais da derivada direcional.

**EXEMPLO 1** Use o mapa climático na Figura 1 para estimar o valor da derivada direcional da função da em Chongqing na direção Sudoeste.

**SOLUÇÃO** O vetor unitário na direção Sudeste é dado por  $\mathbf{u} = -(\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$ , mas não necessitaremos dessa expressão. Em vez disso, inicialmente traçamos uma reta que passa por Chongqing na direção sudeste. (Veja a Figura 4.)

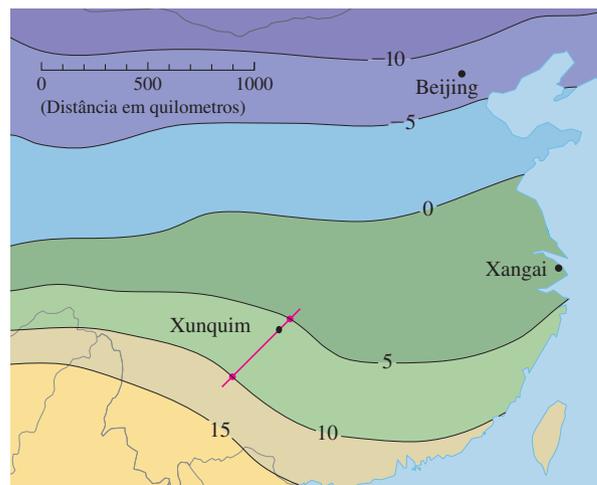


FIGURA 4

Aproximamos a derivada direcional  $D_{\mathbf{u}}T$  pela taxa média da variação da temperatura entre os pontos onde essa linha intercepta as isotérmicas  $T = 5$  e  $T = 10$ . A temperatura no ponto sudoeste de Chongqing é  $T = 10$  °C e a temperatura no ponto nordeste de Chongqing é  $T = 5$  °C. A distância entre esses pontos parece ser aproximadamente de 380 km. Portanto a taxa de variação da temperatura na direção sudoeste é

$$D_{\mathbf{u}}T \approx \frac{10 - 5}{380} = \frac{5}{380} \approx 0,013 \text{ °C/km}$$

Quando calculamos a derivada direcional de uma função definida por uma fórmula, geralmente usamos o seguinte teorema:

**3 Teorema** Se  $f$  é uma função diferenciável de  $x$  e  $y$ , então  $f$  tem derivada direcional na direção de qualquer vetor  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$  e

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

**DEMONSTRAÇÃO** Se definirmos uma função  $g$  de uma única variável  $h$  por

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

então, pela definição de derivada direcional, temos

$$\begin{aligned}
 \boxed{4} \quad g'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \\
 &= D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)
 \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos escrever  $g(h) = f(x, y)$ , onde  $x = x_0 + ha, y = y_0 + hb$  e, pela Regra da Cadeia (Teorema 14.5.2), vem

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dh} = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Se tomarmos  $h = 0$ , então  $x = x_0, y = y_0$ , e

$$\boxed{5} \quad g'(0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$$

Comparando as Equações 4 e 5, vemos que

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$$

Se o vetor unitário  $\mathbf{u}$  faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$  positivo (como na Figura 2), então podemos escrever  $\mathbf{u} = \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$  e a fórmula do Teorema 3 fica

$$\boxed{6} \quad D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

**EXEMPLO 2** Encontre a derivada direcional  $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$  se

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

e  $\mathbf{u}$  é o vetor unitário dado pelo ângulo  $\theta = \pi/6$ . Qual será  $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$ ?

**SOLUÇÃO** A Fórmula 6 dá

$$\begin{aligned}
 D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= f_x(x, y) \cos \frac{\pi}{6} + f_y(x, y) \sin \frac{\pi}{6} \\
 &= (3x^2 - 3y) \frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y) \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} [3\sqrt{3}x^2 - 3x + (8 - 3\sqrt{3})y]
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 2) = \frac{1}{2} [3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + (8 - 3\sqrt{3})(2)] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

A derivada direcional  $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$  no Exemplo 2 representa a taxa de variação de  $z$  na direção de  $\mathbf{u}$ . Isso é a inclinação da reta da tangente para a curva de interseção da superfície  $z = x^3 - 3xy + 4y^2$  e o plano vertical por  $(1, 2, 0)$  na direção de  $\mathbf{u}$  mostrado na Figura 5.

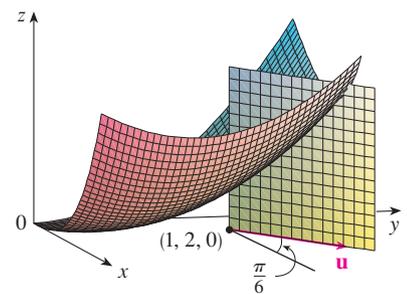


FIGURA 5

### O Vetor Gradiente

Observe no Teorema 3 que a derivada direcional de uma função diferenciável pode ser escrita como o produto escalar de dois vetores:

$$\begin{aligned}
 \boxed{7} \quad D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= f_x(x, y)a + f_y(x, y)b \\
 &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \langle a, b \rangle \\
 &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \mathbf{u}
 \end{aligned}$$

O primeiro vetor no produto escalar ocorre não somente no cômputo da derivada direcional, mas também em muitas outras situações. Assim, daremos a ele um nome especial (o *gradiente* de  $f$ ) e uma notação especial (**grad**  $f$  ou  $\nabla f$ , que lemos “del  $f$ ”).

**8 Definição** Se  $f$  é uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$ , então o **gradiente** de  $f$  é a função vetorial  $\nabla f$  definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$$

**EXEMPLO 3** Se  $f(x, y) = \text{sen } x + e^{xy}$ , então

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$$

e

$$\nabla f(0, 1) = \langle 2, 0 \rangle$$

Com a notação de vetor gradiente, podemos reescrever a Equação 7 para a derivada direcional de uma função diferenciável como

**9**

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

Isso expressa a derivada direcional na direção de  $\mathbf{u}$  como a projeção escalar do vetor gradiente sobre  $\mathbf{u}$ .

O vetor gradiente  $\nabla f(2, -1)$  do Exemplo 4 é mostrado na Figura 6 com ponto inicial  $(2, -1)$ . Também é mostrado o vetor  $\mathbf{v}$ , que dá a direção da derivada direcional. Ambos os vetores estão sobrepostos ao mapa de contorno do gráfico de  $f$ .

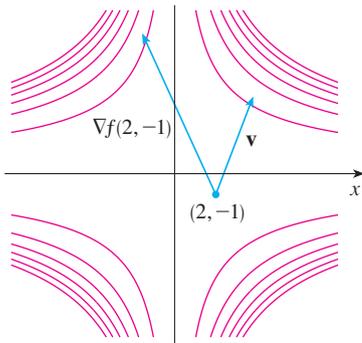


FIGURA 6

**EXEMPLO 4** Determine a derivada direcional da função  $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$  no ponto  $(2, -1)$  na direção do vetor  $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ .

**SOLUÇÃO** Primeiramente, vamos calcular o vetor gradiente em  $(2, -1)$ :

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\mathbf{j}$$

$$\nabla f(2, -1) = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

Observe que  $\mathbf{v}$  não é um vetor unitário, mas, como  $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$ , o vetor unitário na direção de  $\mathbf{v}$  é

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{j}$$

Portanto, pela Equação 9, temos

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(2, -1) &= \nabla f(2, -1) \cdot \mathbf{u} = (-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) \cdot \left( \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{j} \right) \\ &= \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$

## Funções de Três Variáveis

Para as funções de três variáveis podemos definir derivadas direcionais de modo semelhante. Novamente  $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$  pode ser interpretado como a taxa de variação da função na direção de um vetor unitário  $\mathbf{u}$ .

**10 Definição** A derivada direcionada de  $f$  em  $(x_0, y_0, z_0)$  na direção do vetor unitário  $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$  é

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

se esse limite existir.

Se usarmos a notação vetorial, poderemos escrever tanto a definição (2) quanto a (10) da derivada direcional na forma compacta

**11**

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

onde  $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$  se  $n = 2$  e  $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$  se  $n = 3$ . Isso era esperado, porque a equação vetorial da reta que passa por  $\mathbf{x}_0$  na direção do vetor  $\mathbf{u}$  é dada por  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}$  (Equação 12.5.1), e, portanto,  $f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u})$  representa o valor de  $f$  em um ponto dessa reta.

Se  $f(x, y, z)$  for diferenciável e  $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ , então o mesmo método usado na demonstração do Teorema 3 pode ser usado para mostrar que

$$12 \quad D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = f_x(x, y, z)a + f_y(x, y, z)b + f_z(x, y, z)c$$

Para uma função  $f$  de três variáveis, o **vetor gradiente**, denotado por  $\nabla f$  ou **grad**  $f$ , é

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle$$

ou, de modo mais abreviado,

$$13 \quad \nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

Então, como para as funções de duas variáveis, a Fórmula 12 para a derivada direcional pode ser reescrita como

$$14 \quad D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$

**EXEMPLO 5** Se  $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$ , (a) determine o gradiente de  $f$  e (b) determine a derivada direcional de  $f$  em  $(1, 3, 0)$  na direção de  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ .

### SOLUÇÃO

(a) O gradiente de  $f$  é

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle \\ &= \langle \operatorname{sen} yz, xz \cos yz, xy \cos yz \rangle \end{aligned}$$

(b) No ponto  $(1, 3, 0)$  temos  $\nabla f(1, 3, 0) = \langle 0, 0, 3 \rangle$ . O vetor unitário na direção de  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$  é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}} \mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{k}$$

Portanto, da Equação 14, vem

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(1, 3, 0) &= \nabla f(1, 3, 0) \cdot \mathbf{u} \\ &= 3\mathbf{k} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}} \mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{k} \right) \\ &= 3 \left( -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

## Maximizando a Derivada Direcional

Suponha que tenhamos uma função  $f$  de duas ou três variáveis e consideremos todas as derivadas direcionais possíveis de  $f$  em um ponto determinado. Isso nos dará a taxa de variação de  $f$  em todas as direções possíveis. Podemos então perguntar: em qual dessas direções  $f$  varia mais rapidamente e qual a taxa máxima de variação? A resposta a essas perguntas é dada pelo seguinte teorema.

**15 Teorema** Suponha que  $f$  seja uma função diferenciável de duas ou três variáveis. O valor máximo da derivada direcional  $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$  é  $|\nabla f(\mathbf{x})|$  ocorre quando  $\mathbf{u}$  tem a mesma direção do vetor gradiente  $\nabla f(\mathbf{x})$ .

**TEC** Visual 14.6B realiza uma confirmação visual do Teorema 15.

**DEMONSTRAÇÃO** Da Equação 9 ou 14 temos

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f| |\mathbf{u}| \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta$$

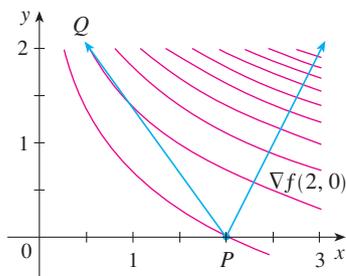


FIGURA 7

Em  $(2, 0)$  a função no Exemplo 6 aumenta mais rápido na direção do vetor gradiente  $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$ . Na Figura 7 observe que esse vetor parece ser perpendicular à curva de nível que passa por  $(2, 0)$ . A Figura 8 mostra o gráfico de  $f$  e o vetor gradiente.

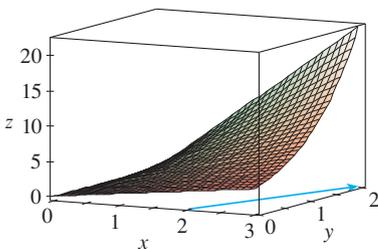


FIGURA 8

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\nabla f$  e  $\mathbf{u}$ . O valor máximo de  $\cos \theta$  é 1 e isso ocorre quando  $\theta = 0$ . Logo, o valor máximo de  $D_{\mathbf{u}}f$  é  $|\nabla f|$  e ocorre quando  $\theta = 0$ , ou seja, quando  $\mathbf{u}$  tem a mesma direção que  $\nabla f$ .

**EXEMPLO 6**

(a) Se  $f(x, y) = xe^y$ , determine a taxa de variação de  $f$  no ponto  $P(2, 0)$  na direção de  $P$  a  $Q(\frac{1}{2}, 2)$ .

(b) Em que direção  $f$  tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação?

**SOLUÇÃO**

(a) Primeiro calcularemos o vetor gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e, xe^y \rangle$$

$$\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$$

O vetor unitário na direção  $\overrightarrow{PQ} = \langle -1, 5, 2 \rangle$  é  $\mathbf{u} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$ , logo a taxa de variação de  $f$  na direção que vai de  $P$  a  $Q$  é

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(2, 0) &= \nabla f(2, 0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle \\ &= 1(-\frac{3}{5}) + 2(\frac{4}{5}) = 1 \end{aligned}$$

(b) De acordo com o Teorema 15,  $f$  aumenta mais depressa na direção do gradiente  $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$ . A taxa máxima de variação é

$$|\nabla f(2, 0)| = |\langle 1, 2 \rangle| = \sqrt{5}$$

**EXEMPLO 7**

Suponha que a temperatura em um ponto  $(x, y, z)$  do espaço seja dada por  $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ , onde  $T$  é medida em graus Celsius e  $x, y$  e  $z$  em metros. Em que direção no ponto  $(1, 1, -2)$  a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual é a taxa máxima de aumento?

**SOLUÇÃO** O gradiente de  $T$  é

$$\begin{aligned} \nabla T &= \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= -\frac{160x}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2} \mathbf{i} - \frac{320y}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2} \mathbf{j} - \frac{480z}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2} \mathbf{k} \\ &= \frac{160}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2} (-x \mathbf{i} - 2y \mathbf{j} - 3z \mathbf{k}) \end{aligned}$$

No ponto  $(1, 1, -2)$ , o vetor gradiente é

$$\nabla T(1, 1, -2) = \frac{160}{256} (-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \frac{5}{8} (-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

Pelo Teorema 15, a temperatura aumenta mais rapidamente na direção do vetor gradiente  $\nabla T(1, 1, -2) = \frac{5}{8} (-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$  ou, de forma equivalente, na direção de  $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$  ou o vetor unitário  $(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})/\sqrt{41}$ . A taxa máxima de aumento é o módulo do vetor gradiente

$$|\nabla T(1, 1, -2)| = \frac{5}{8} |-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}| = \frac{5}{8} \sqrt{41}$$

Portanto, a taxa máxima de aumento da temperatura é  $\frac{5}{8} \sqrt{41} \approx 4^\circ\text{C/m}$ .

**Planos Tangente às Superfícies de Nível**

Suponha que  $S$  seja a superfície com a equação  $F(x, y, z) = k$ , ou seja, uma superfície de nível de uma função  $F$  de três variáveis, e seja  $P(x_0, y_0, z_0)$  um ponto em  $S$ . Seja  $C$  qualquer curva na superfície  $S$  e que passe pelo ponto  $P$ . Lembremo-nos da Seção 13.1 que a curva  $C$  é descrita por uma função vetorial contínua  $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ . Seja  $t_0$  o valor do parâmetro

correspondente ao ponto  $P$ ; ou seja,  $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ . Como  $C$  pertence a  $S$ , qualquer ponto  $(x(t), y(t), z(t))$  precisa satisfazer a equação de  $S$ , ou seja,

$$16 \quad F(x(t), y(t), z(t)) = k$$

Se  $x, y$  e  $z$  são funções diferenciáveis de  $t$  e  $F$  também diferenciável, então podemos usar a Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da Equação 16 como segue:

$$17 \quad \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

Mas, já que  $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z \rangle$  e  $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$ , a Equação 17 pode ser escrita em termos de produto notável como

$$\nabla F \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

Em particular, quando  $t = t_0$ , temos  $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ , e assim

$$18 \quad \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$

A Equação 18 nos diz que o vetor gradiente em  $P$ ,  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ , é perpendicular ao vetor tangente  $\mathbf{r}'(t_0)$  a qualquer curva  $C$  em  $S$  que passe por  $P$ . (Veja Figura 9.) Se  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ , é natural definir o **plano tangente à superfície de nível**  $F(x, y, z) = k$  em  $P(x_0, y_0, z_0)$  como o plano que passa por  $P$  e tem vetor normal  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ . Utilizando a equação geral do plano (Equação 12.5.7), podemos escrever a equação do plano tangente como

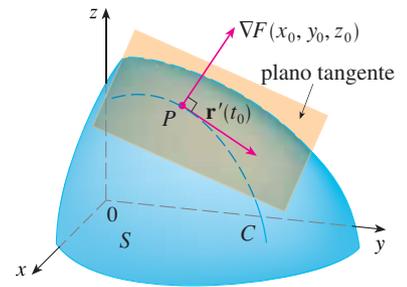


FIGURA 9

$$19 \quad F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

A **reta normal** a  $S$  em  $P$  é a reta passando através de  $P$  e perpendicular ao plano tangente. A direção da reta normal é, portanto, dada pelo vetor gradiente  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$  e, assim, pela Equação 12.5.3, suas equações simétricas são

$$20 \quad \frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

No caso especial em que a equação de uma superfície  $S$  é da forma  $z = f(x, y)$  (ou seja,  $S$  é o gráfico da função  $f$  de duas variáveis), podemos reescrever a equação como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

e considerar  $S$  como uma superfície de nível (com  $k = 0$ ) de  $F$ . Então

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)$$

$$F_y(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0)$$

$$F_z(x_0, y_0, z_0) = -1$$

de modo que a Equação 19 se torna

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

que é equivalente à Equação 14.4.2. Então, nossa nova, mais geral, definição de plano tangente é consistente com a definição que foi dada no caso especial da Seção 14.4.

**EXEMPLO 8** Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto  $(-2, 1, -3)$  ao elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

**SOLUÇÃO** O elipsoide é a superfície de nível (com  $k = 3$ ) da função

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

A Figura 10 mostra o elipsoide, o plano tangente e a reta normal do Exemplo 8.

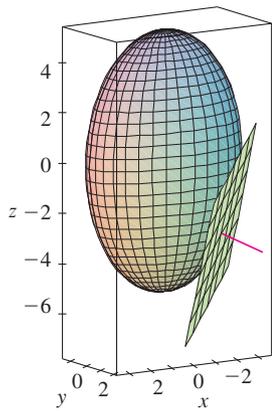


FIGURA 10

Portanto, temos

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2} \qquad F_y(x, y, z) = 2y \qquad F_z(x, y, z) = \frac{2z}{9}$$

$$F_x(-2, 1, -3) = -1 \qquad F_y(-2, 1, -3) = 2 \qquad F_z(-2, 1, -3) = -\frac{2}{3}$$

Então, da Equação 19, temos que a equação do plano tangente no ponto  $(-2, 1, -3)$  é

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \frac{2}{3}(z + 3) = 0$$

que pode ser simplificada para  $3x - 6y + 2z + 18 = 0$ .

Pela Equação 20, as equações simétricas da reta normal são

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-\frac{2}{3}}$$

### Importância do Vetor Gradiente

Vamos resumir agora as maneiras pelas quais o vetor gradiente é importante. Primeiro, consideramos uma função  $f$  de três variáveis e um ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$  em seu domínio. Por um lado, sabemos do Teorema 15 que o vetor gradiente  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  dá a direção de um aumento mais rápido de  $f$ . Por outro, sabemos que  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  é ortogonal à superfície de nível  $S$  de  $f$  em  $P$ . (Consulte a Figura 9.) Essas duas propriedades são compatíveis intuitivamente porque, quando nos afastamos de  $P$  em uma superfície de nível  $S$ , o valor da função  $f$  não se altera. Parece razoável que, se nos movermos em uma direção perpendicular, obteremos o maior aumento.

De maneira semelhante, consideramos uma função  $f$  de duas variáveis e um ponto  $P(x_0, y_0)$  em seu domínio. Novamente, o vetor gradiente  $\nabla f(x_0, y_0)$  dá a direção de um aumento mais rápido de  $f$ . Da mesma forma, pelas considerações semelhantes à nossa discussão dos planos tangente, pode ser mostrado que  $\nabla f(x_0, y_0)$  é perpendicular à curva de nível  $f(x, y) = k$  que passa por  $P$ . Mais uma vez, isso é intuitivamente plausível porque os valores de  $f$  continuam constantes à medida que movemos ao longo da curva. (Veja a Figura 11.)

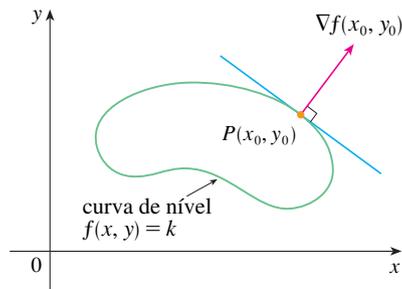


FIGURA 11

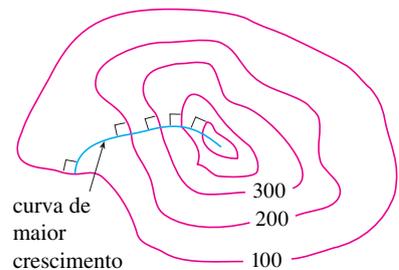


FIGURA 12

Se considerarmos um mapa topográfico de um morro e se  $f(x, y)$  representar a altura acima do nível do mar do ponto de coordenadas  $(x, y)$ , então a curva de aclave máximo pode ser desenhada como na Figura 12, fazendo-a perpendicular a todas as curvas de contorno. Esse fenômeno pode ser observado na Figura 12 na Seção 14.1, onde o Lonesome Creek segue a curva de declive máximo.

Os sistemas de computação algébrica têm comandos que traçam alguns vetores gradientes. Cada vetor gradiente  $\nabla f(a, b)$  é traçado partindo-se do ponto  $(a, b)$ . A Figura 13 mostra esse gráfico (chamado *campo de vetor gradiente*) para a função  $f(x, y) = x^2 - y^2$  sobreimposto a um mapa de contornos de  $f$ . Como esperado, os vetores gradientes apontam na direção "ladeira acima" e são perpendiculares às curvas de nível.

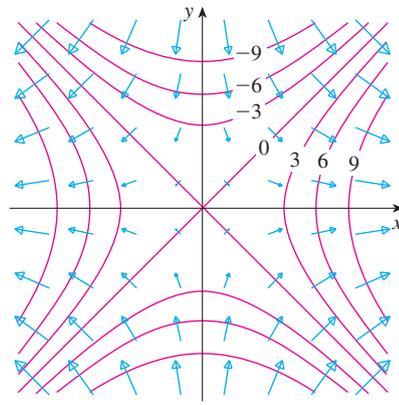
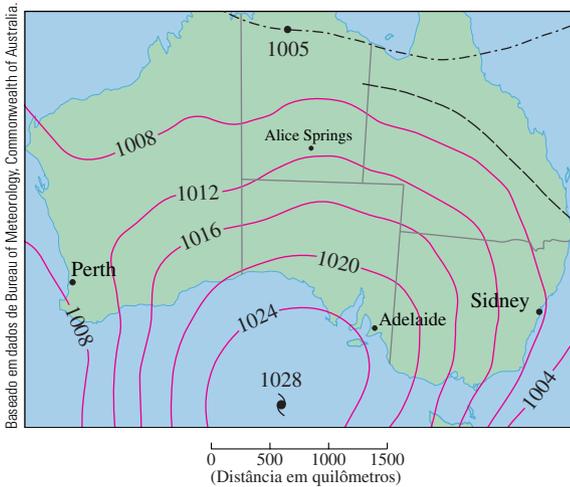


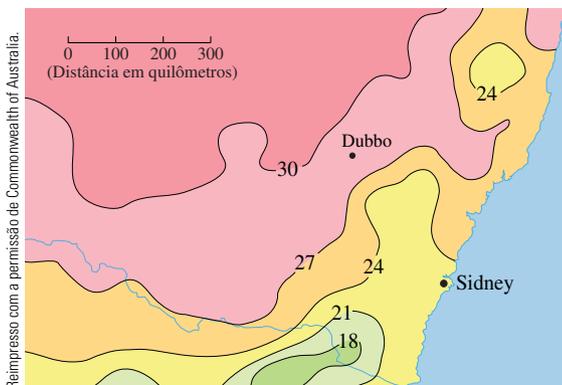
FIGURA 13

### 14.6 Exercícios

1. É dado o mapa de contornos mostrando a pressão barométrica em hectopascals (hPa) na Austrália em 28 de dezembro de 2004. Estime o valor da derivada direcional da função pressão em Alice Springs na direção de Adelaide. Quais são as unidades da derivada direcional?



2. O mapa de contorno mostra a temperatura máxima média em novembro de 2004 (em °C). Estime o valor da derivada direcional da função da temperatura em Dubbo, New South Wales, na direção de Sydney. Quais são as unidades?



3. Uma tabela de valores do índice de sensação térmica  $W = f(T, v)$  é dada no Exercício 3 da Seção 14.3. Use-a para estimar o valor de  $D_{\mathbf{u}}f(-20, 30)$ , onde  $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$ .

4-6 Determine a derivada direcional de  $f$  no ponto dado e na direção indicada pelo ângulo  $\theta$ .

4.  $f(x, y) = x^3y^4 - x^4y^3$ ,  $(1, 1)$ ,  $\theta = \pi/6$   
 5.  $f(x, y) = ye^{-x}$ ,  $(0, 4)$ ,  $\theta = 2\pi/3$   
 6.  $f(x, y) = e^x \cos y$ ,  $(0, 0)$ ,  $\theta = \pi/4$

7-10

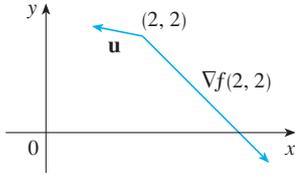
- (a) Determine o gradiente de  $f$ .  
 (b) Calcule o gradiente no ponto  $P$ .  
 (c) Determine a taxa de variação de  $f$  em  $P$  na direção do vetor  $\mathbf{u}$ .

7.  $f(x, y) = \text{sen}(2x + 3y)$ ,  $P(-6, 4)$ ,  $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\mathbf{i} - \mathbf{j})$   
 8.  $f(x, y) = y^2/x$ ,  $P(1, 2)$ ,  $\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \sqrt{5}\mathbf{j})$   
 9.  $f(x, y, z) = xe^{2yz}$ ,  $P(3, 0, 2)$ ,  $\mathbf{u} = \langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \rangle$   
 10.  $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}$ ,  $P(1, 3, 1)$ ,  $\mathbf{u} = \langle \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \rangle$

11-17 Determine a derivada direcional da função no ponto dado na direção do vetor  $\mathbf{v}$ .

11.  $f(x, y) = e^x \text{sen } y$ ,  $(0, \pi/3)$ ,  $\mathbf{v} = \langle -6, 8 \rangle$   
 12.  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $(1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = \langle 3, 5 \rangle$   
 13.  $g(p, q) = p^4 - p^2q^3$ ,  $(2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$   
 14.  $g(r, s) = \text{tg}^{-1}(rs)$ ,  $(1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$   
 15.  $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$ ,  $(0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v} = \langle 5, 1, -2 \rangle$   
 16.  $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$ ,  $(3, 2, 6)$ ,  $\mathbf{v} = \langle -1, -2, 2 \rangle$   
 17.  $h(r, s, t) = \ln(3r + 6s + 9t)$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

18. Use a figura para estimar  $D_u f(2, 2)$ .



19. Determine a derivada direcional de  $f(x, y) = \sqrt{xy}$  em  $P(2, 8)$  na direção de  $Q(5, 4)$ .

20. Determine a derivada direcional de  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$  em  $P(1, -1, 3)$  na direção de  $Q(2, 4, 5)$ .

21–26 Determine a taxa de variação máxima de  $f$  no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

21.  $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$ , (4, 1)

22.  $f(s, t) = te^{st}$ , (0, 2)

23.  $f(x, y) = \text{sen}(xy)$ , (1, 0)

24.  $f(x, y, z) = (x + y)/z$ , (1, 1, -1)

25.  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , (3, 6, -2)

26.  $f(p, q, r) = \text{arctg}(pqr)$ , (1, 2, 1)

27. (a) Mostre que uma função diferenciável  $f$  decresce mais rapidamente em  $\mathbf{x}$  na direção oposta à do vetor gradiente, ou seja, na direção de  $-\nabla f(\mathbf{x})$ .

(b) Utilize o resultado do item (a) para determinar a direção onde  $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$  decresce mais rápido no ponto  $(2, -3)$ .

28. Determine as direções em que a derivada direcional de  $f(x, y) = ye^{-xy}$  no ponto  $(0, 2)$  tem valor 1.

29. Determine todos os pontos nos quais a direção de maior variação da função  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$  é  $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ .

30. Próximo a uma boia, a profundidade de um lago com coordenadas  $(x, y)$  é  $z = 200 + 0,02x^2 - 0,001y^3$ , onde  $x, y,$  e  $z$  são medidos em metros. Um pescador que está em um pequeno barco parte do ponto  $(80, 60)$  em direção à boia, que está localizada no ponto  $(0, 0)$ . A água sob o barco está ficando mais profunda ou mais rasa quando ele começa a se mover? Explique.

31. A temperatura  $T$  em uma bola de metal é inversamente proporcional à distância do centro da bola, que tomamos como a origem. A temperatura no ponto  $(1, 2, 2)$  é de  $120^\circ$ .

(a) Determine a taxa de variação de  $T$  em  $(1, 2, 2)$  em direção ao ponto  $(2, 1, 3)$ .

(b) Mostre que em qualquer ponto da bola a direção de maior crescimento na temperatura é dada por um vetor que aponta para a origem.

32. A temperatura em um ponto  $(x, y, z)$  é dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2 - 3y^2 - 9z^2}$$

onde  $T$  é medido em  $^\circ\text{C}$  e  $x, y, z$  em metros.

(a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto  $P(2, -1, 2)$  em direção ao ponto  $(3, -3, 3)$ .

(b) Qual é a direção de maior crescimento da temperatura em  $P$ ?

(c) Encontre a taxa máxima de crescimento em  $P$ .

33. Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico  $V$  seja dado por  $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$ .

(a) Determine a taxa de variação do potencial em  $P(3, 4, 5)$  na direção do vetor  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ .

(b) Em que direção  $V$  varia mais rapidamente em  $P$ ?

(c) Qual a taxa máxima de variação em  $P$ ?

34. Suponha que você esteja subindo uma montanha cuja forma é dada pela equação  $z = 1\,000 - 0,005x^2 - 0,01y^2$ , onde  $x, y$  e  $z$  são medidos em metros e você está em um ponto com coordenadas  $(60, 40, 966)$ . O eixo  $x$  positivo aponta para o leste e o eixo  $y$  positivo aponta para o norte.

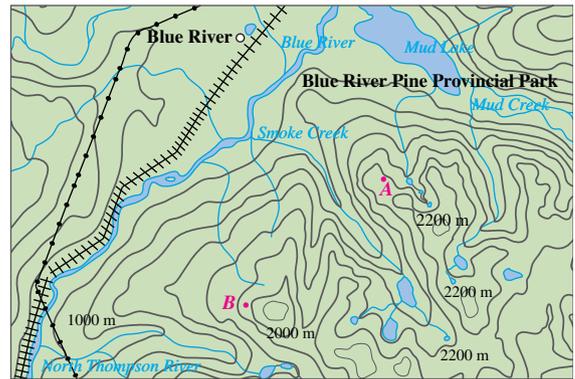
(a) Se você andar exatamente para o Sul, começará a subir ou a descer? A que taxa?

(b) Se você caminhar em direção ao Noroeste, começará a subir ou a descer? A que taxa?

(c) Em que direção a inclinação é maior? Qual é a taxa de elevação nessa direção? Qual é o ângulo que o início desse caminho faz em relação à horizontal?

35. Seja  $f$  uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos  $A(1, 3), B(3, 3), C(1, 7)$  e  $D(6, 15)$ . A derivada direcional de  $f$  em  $A$  na direção do vetor  $\overrightarrow{AB}$  é 3, e a derivada direcional em  $A$  na direção  $\overrightarrow{AC}$  é 26. Determine a derivada direcional de  $f$  em  $A$  na direção do vetor  $\overrightarrow{AD}$ .

36. Um mapa topográfico de Blue River Pine Provincial Park em British Columbia é mostrado. Desenhe as curvas da descida mais íngreme do ponto  $A$  (descendo até o Mud Lake) e do ponto  $B$ .



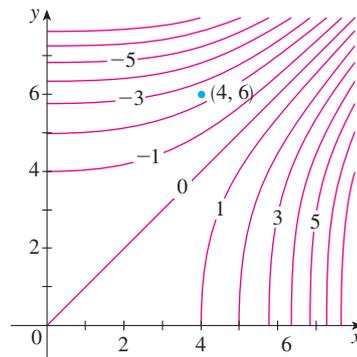
© Department of Natural Resources Canada. Todos os direitos reservados.

37. Mostre que a operação de calcular o gradiente de uma função tem a propriedade fornecida. Suponha que  $u$  e  $v$  sejam funções diferenciáveis de  $x$  e  $y$  e que  $a, b$  sejam constantes.

(a)  $\nabla(au + bv) = a \nabla u + b \nabla v$  (b)  $\nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u$

(c)  $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2}$  (d)  $\nabla u^n = nu^{n-1} \nabla u$

38. Esboce o vetor gradiente  $\nabla f(4, 6)$  para a função  $f$  cujas curvas de nível são mostradas. Explique como você escolheu a direção e sentido e o comprimento desse vetor.



39. A **segunda derivada direcional** de  $f(x, y)$  é  
 $D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) = D_{\mathbf{u}}[D_{\mathbf{u}}f(x, y)]$   
 Se  $f(x, y) = x^3 + 5x^2y + y^3$  e  $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$ , calcule  $D_{\mathbf{u}}^2 f(2, 1)$ .

40. (a) Se  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$  é uma unidade vetorial e  $f$  tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, mostre que

$$D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx}a^2 + 2f_{xy}ab + f_{yy}b^2$$

(b) Determine a derivada direcional de  $f(x, y) = xe^{2y}$  na direção de  $\mathbf{v} = \langle 4, 6 \rangle$ .

41–46 Encontre uma equação (a) do plano tangente e (b) da reta normal à superfície dada no ponto especificado.

41.  $[2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 10, \quad (3, 3, 5)]$

42.  $y = x^2 - z^2, \quad (4, 7, 3)$

43.  $xyz^2 = 6, \quad (3, 2, 1)$

44.  $xy + yz + zx = 5, \quad (1, 2, 1)$

45.  $x + y + z = e^{xyz}, \quad (0, 0, 1)$

46.  $x^4 + y^4 + z^4 = 2x^2y^2z^2, \quad (1, 1, 1)$

 47–48 Utilize um computador para traçar o gráfico da superfície, do plano tangente e da reta normal na mesma tela. Escolha o domínio com cuidado para evitar planos verticais estranhos. Escolha o ponto de vista de modo que você possa ver bem os três objetos.

47.  $xy + yz + zx = 3, \quad (1, 1, 1)$

48.  $xyz = 6, \quad (1, 2, 3)$

49. Se  $f(x, y) = xy$ , encontre o vetor gradiente  $\nabla f(3, 2)$  e use-o para encontrar a reta tangente à curva de nível  $f(x, y) = 6$  no ponto  $(3, 2)$ . Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente. 

50. Se  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$ , encontre o vetor gradiente  $\nabla g(1, 2)$  e use-o para encontrar a reta tangente à curva de nível  $g(x, y) = 1$  no ponto  $(1, 2)$ . Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

51. Mostre que a equação do plano tangente ao elipsoide  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$  no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  pode ser escrita como

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

52. Determine a equação do plano tangente ao hiperboloide  $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$  em  $(x_0, y_0, z_0)$  e expresse-a de forma semelhante à do Exercício 51. 

53. Mostre que a equação do plano tangente ao parabolóide elíptico  $z/c = x^2/a^2 + y^2/b^2$  no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  pode ser escrita como

$$\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} = \frac{z + z_0}{c}$$

54. Em qual ponto do parabolóide  $y = x^2 + z^2$  o plano tangente é paralelo ao plano  $x + 2y + 3z = 1$ ?

55. Existem pontos no hiperboloide  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$  nos quais o plano tangente é paralelo ao plano  $z = x + y$ ?

56. Mostre que o elipsoide  $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$  e a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$  se tangenciam no ponto  $(1, 1, 2)$ . (Isso significa que eles têm um plano tangente comum nesse ponto.)

57. Mostre que todo plano que é tangente ao cone  $x^2 + y^2 = z^2$  passa pela origem.

58. Mostre que toda reta normal à esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  passa pelo centro da esfera.

59. Onde a reta normal à parábola  $z = x^2 + y^2$  no ponto  $(1, 1, 2)$  intercepta o parabolóide uma segunda vez?

60. Em quais pontos a reta normal que passa pelo ponto  $(1, 2, 1)$  no elipsoide  $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$  intercepta a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 102$ ?

61. Mostre que a soma das intersecções  $x$ ,  $y$  e  $z$  de qualquer plano tangente à superfície  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$  é uma constante.

62. Mostre que as pirâmides cortadas do primeiro octante por qualquer plano tangente à superfície  $xyz = 1$  em pontos do primeiro octante têm o mesmo volume.

63. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva formada pela intersecção do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  com o elipsoide  $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$  no ponto  $(-1, 1, 2)$ .

64. (a) O plano  $y + z = 3$  intercepta o cilindro  $x^2 + y^2 = 5$  em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente a essa elipse no ponto  $(1, 2, 1)$ .

(b) Desenhe o cilindro, o plano e a reta tangente na mesma tela.

65. (a) Duas superfícies são ditas **ortogonais** em um ponto de intersecção se suas normais são perpendiculares nesse ponto. Mostre que superfícies com equações  $F(x, y, z) = 0$  e  $G(x, y, z) = 0$  são ortogonais no ponto  $P$  onde  $\nabla F \neq \mathbf{0}$  e  $\nabla G \neq \mathbf{0}$  se e somente se

$$F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0 \text{ em } P$$

(b) Use o item (a) para mostrar que as superfícies  $z^2 = x^2 + y^2$  e  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  são ortogonais em todo ponto de intersecção. Você pode ver isso sem fazer os cálculos?

66. (a) Mostre que a função  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2y}$  é contínua e suas derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  existem na origem, mas as derivadas direcionais em todas as outras direções não existem.

(b) Trace o gráfico de  $f$  perto da origem e comente como ele confirma o item (a).

67. Suponha que as derivadas direcionais de  $f(x, y)$  sejam conhecidas em um determinado ponto em duas direções não paralelas dadas por vetores unitários  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . É possível determinar  $\nabla f$  nesse ponto? Em caso afirmativo, como fazê-lo?

68. Mostre que, se  $z = f(x, y)$  for diferenciável em  $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ , então

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$

[Dica: Use a Definição 14.4.7 diretamente.]

## 14.7 Valores Máximo e Mínimo

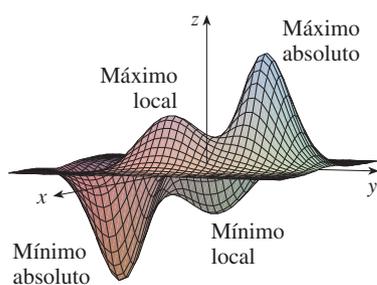


FIGURA 1

Observe que a conclusão do Teorema 2 pode ser enunciada na notação de vetores gradientes como  $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$ .

Como vimos no Capítulo 4, no Volume I, um dos principais usos da derivada ordinária é na determinação dos valores máximo e mínimo (valores extremos). Nesta seção veremos como usar as derivadas parciais para localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis. Em particular, no Exemplo 6 veremos como maximizar o volume de uma caixa sem tampa se tivermos uma quantidade limitada de cartolina para trabalhar.

Olhe os picos e vales no gráfico de  $f$  mostrado na Figura 1. Existem dois pontos  $(a, b)$  nos quais  $f$  tem um *máximo local*, ou seja, onde  $f(a, b)$  é maior que os valores próximos de  $f(x, y)$ . O maior destes dois valores é o *máximo absoluto*. Do mesmo modo,  $f$  tem dois *mínimos locais* onde  $f(a, b)$  é menor que os valores próximos. O maior destes dois valores é o *mínimo absoluto*.

**1 Definição** Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em  $(a, b)$  se  $f(x, y) \leq f(a, b)$  quando  $(x, y)$  está próximo de  $(a, b)$ . [Isso significa que  $f(x, y) \leq f(a, b)$  para todos os pontos  $(x, y)$  em alguma bola aberta com centro  $(a, b)$ .] O número  $f(a, b)$  é chamado **valor máximo local**. Se  $f(x, y) \geq f(a, b)$  quando  $(x, y)$  está próximo  $(a, b)$ , então  $f$  tem um **mínimo local** em  $(a, b)$  e  $f(a, b)$  é um **valor mínimo local**.

Se as inequações da Definição 1 valerem para *todos* os pontos  $(x, y)$  do domínio de  $f$ , então  $f$  tem um **máximo absoluto** (ou **mínimo absoluto**) em  $(a, b)$ .

**2 Teorema** Se  $f$  tem um máximo ou mínimo local em  $(a, b)$  e as derivadas parciais de primeira ordem de  $f$  existem nesses pontos, então  $f_x(a, b) = 0$  e  $f_y(a, b) = 0$ .

**DEMONSTRAÇÃO** Seja  $g(x) = f(x, b)$ . Se  $f$  tem um máximo (ou mínimo) local em  $(a, b)$ , então  $g$  tem um máximo (ou mínimo) local em  $a$ , portanto  $g'(a) = 0$  pelo Teorema de Fermat (veja o Teorema 4.1.4). Mas  $g'(a) = f_x(a, b)$  (veja a Equação 14.3.1) e, portanto,  $f_x(a, b) = 0$ . Da mesma forma, pela aplicação do Teorema de Fermat à função  $G(y) = f(a, y)$ , obtemos  $f_y(a, b) = 0$ .

Se impusermos  $f_x(a, b) = 0$  e  $f_y(a, b) = 0$  na equação do plano tangente (Equação 14.4.2), obteremos  $z = z_0$ . Assim, a interpretação geométrica do Teorema 2 é que o gráfico de  $f$  tem um plano tangente em um máximo ou mínimo local, portanto, o plano tangente deve ser horizontal.

Um ponto  $(a, b)$  é chamado **ponto crítico** (ou *ponto estacionário*) de  $f$  se  $f_x(a, b) = 0$  e  $f_y(a, b) = 0$ , ou se uma das derivadas parciais não existir. O Teorema 2 diz que se  $f$  tem um máximo ou mínimo local em  $(a, b)$ , então  $(a, b)$  é um ponto crítico de  $f$ . No entanto, como no cálculo variável único, nem todos os pontos críticos originam máximos ou mínimos. Em um ponto crítico, a função pode ter um máximo local ou um mínimo local, ou ainda nenhum dos dois.

**EXEMPLO 1** Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$ . Então

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \quad f_y(x, y) = 2y - 6$$

Essas derivadas parciais são nulas quando  $x = 1$  e  $y = 3$ , portanto, o único ponto crítico é  $(1, 3)$ . Completando os quadrados, achamos

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

Já que  $(x - 1)^2 \geq 0$  e  $(y - 3)^2 \geq 0$ , temos  $f(x, y) \geq 4$  para todos os valores de  $x$  e  $y$ . Logo,  $f(1, 3) = 4$  é um mínimo local e, de fato, é o mínimo absoluto de  $f$ . Isso pode ser confirmado geometricamente a partir do gráfico de  $f$ , que é o parabolóide elíptico com vértice  $(1, 3, 4)$  mostrado na Figura 2.

**EXEMPLO 2** Determine os valores extremos de  $f(x, y) = y^2 - x^2$ .

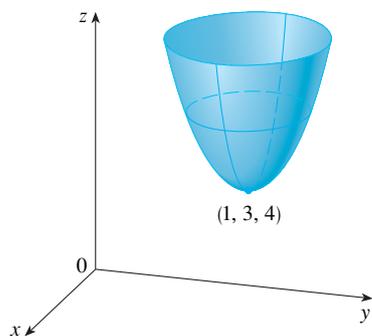


FIGURA 2

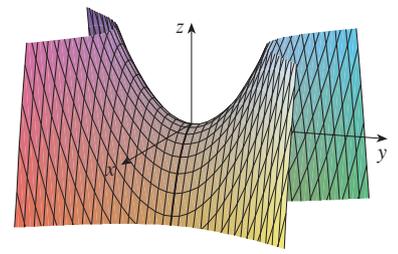
$$z = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$$

**SOLUÇÃO** Como  $f_x = -2x$  e  $f_y = 2y$ , o único ponto crítico é  $(0, 0)$ . Observe que, para os pontos sobre o eixo  $x$ , temos  $y = 0$ , portanto  $f(x, y) = -x^2 < 0$  (se  $x \neq 0$ ). Entretanto, para os pontos sobre o eixo  $y$ , temos  $x = 0$ , portanto  $f(x, y) = y^2 > 0$  (se  $y \neq 0$ ). Logo, todo disco com centro  $(0, 0)$  contém pontos onde a função tem valores positivos, assim como pontos onde  $f$  tem valores negativos. Então,  $f(0, 0) = 0$  não pode ser um valor extremo de  $f$ , portanto  $f$  não tem valor extremo.

O Exemplo 2 ilustra o fato de que uma função pode não ter nem máximo nem mínimo em um ponto crítico. A Figura 3 mostra como isso é possível. O gráfico de  $f$  é o parabolóide hiperbólico  $z = y^2 - x^2$ , que tem plano horizontal tangente ( $z = 0$ ) na origem. É possível observar que  $f(0, 0) = 0$  é um máximo na direção do eixo  $x$ , mas um mínimo na direção do eixo  $y$ . Próximo à origem do gráfico existe o formato de uma sela e, portanto,  $(0, 0)$  é chamado *ponto de sela* de  $f$ .

Uma montanha tem um formato de sela. Conforme a fotografia da formação geológica ilustra, para as pessoas que escalam em uma direção, o ponto de sela é o ponto mais baixo na rota, enquanto para aqueles que viajam em uma direção diferente, o ponto de sela é o ponto mais alto.

Precisamos ser capazes de determinar se uma função tem um valor extremo em um ponto crítico. O teste a seguir, que será demonstrado no fim desta seção, é análogo ao Teste da Segunda Derivada para as funções de uma única variável.



**FIGURA 3**  
 $z = y^2 - x^2$



Stan Wagon, Macalester College

**3 Teste da Segunda Derivada** Suponha que as segundas derivadas parciais de  $f$  sejam contínuas em uma bola aberta com centro em  $(a, b)$ , e suponha que  $f_x(a, b) = 0$  e  $f_y(a, b) = 0$  [ou seja,  $(a, b)$  é um ponto crítico de  $f$ ]. Seja

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

- (a) Se  $D > 0$  e  $f_{xx}(a, b) > 0$ , então  $f(a, b)$  é um mínimo local.
- (b) Se  $D > 0$  e  $f_{xx}(a, b) < 0$ , então  $f(a, b)$  é um máximo local.
- (c) Se  $D < 0$ , então  $f(a, b)$  não é mínimo local nem máximo local.

**OBSERVAÇÃO 1** No caso (c) o ponto  $(a, b)$  é chamado **ponto de sela** de  $f$  e o gráfico de  $f$  cruza seu plano tangente em  $(a, b)$ .

**OBSERVAÇÃO 2** Se  $D = 0$ , não dá nenhuma informação:  $f$  pode ter um máximo local ou mínimo local em  $(a, b)$ , ou  $(a, b)$  pode ser um ponto de sela de  $f$ .

**OBSERVAÇÃO 3** Para lembrar a fórmula de  $D$ , é útil escrevê-la como um determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

**EXEMPLO 3** Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela de  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ .

**SOLUÇÃO** Primeiro localizamos os pontos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \quad f_y = 4y^3 - 4x$$

Igualando essas derivadas parciais a zero, obtemos as equações

$$x^3 - y = 0 \quad \text{e} \quad y^3 - x = 0$$

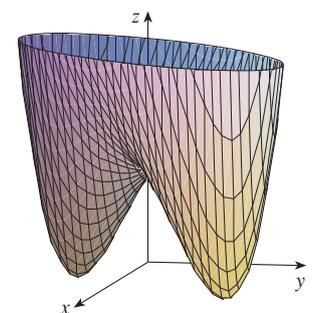
Para resolvê-las, substituímos  $y = x^3$  da primeira equação na segunda. Isso dá

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

e existem três raízes reais:  $x = 0, 1, -1$ . Os três pontos críticos são  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(-1, -1)$ . Agora vamos calcular as segundas derivadas parciais e  $D(x, y)$ :

$$f_{xx} = 12x^2 \quad f_{xy} = -4 \quad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$



**FIGURA 4**  
 $z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Um mapa de contorno da função  $f$  do Exemplo 3 é mostrado na Figura 5. As curvas de nível perto de  $(1, 1)$  e  $(-1, -1)$  têm forma oval e indicam que, quando nos movemos para longe de  $(1, 1)$  ou  $(-1, -1)$  em qualquer direção, os valores de  $f$  crescem. As curvas de nível perto de  $(0, 0)$ , por outro lado, parecem hipérbolas. Elas revelam que, quando nos movemos para longe da origem (onde o valor de  $f$  é 1), os valores de  $f$  decrescem em algumas direções, mas crescem em outras. Portanto, o mapa de contornos sugere a presença dos mínimos e do ponto de sela que encontramos no Exemplo 3.

**TEC** Em *Module 14.7*, é possível utilizar os mapas de contorno para estimar as localizações dos pontos críticos

Como  $D(0, 0) = -16 < 0$ , segue do caso (c) do Teste da Segunda Derivada que a origem é um ponto de sela; ou seja,  $f$  não tem nem máximo local nem mínimo local em  $(0, 0)$ . Como  $D(1, 1) = 128 > 0$  e  $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$ , vemos do caso (a) do teste que  $f(1, 1) = -1$  é um mínimo local. Da mesma forma, temos  $D(-1, -1) = 128 > 0$  e  $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$ , portanto  $f(-1, -1) = -1$  é também um mínimo local.

O gráfico de  $f$  é mostrado na Figura 4.

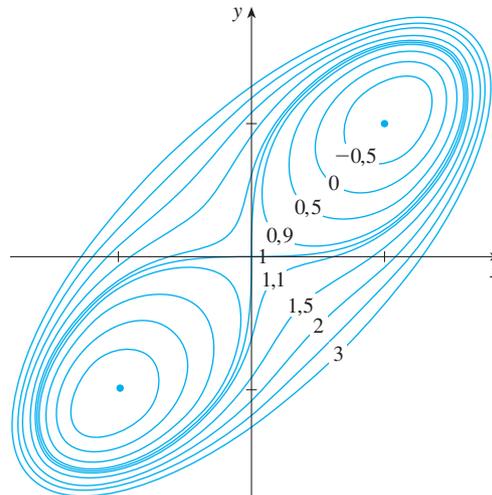


FIGURA 5

**EXEMPLO 4** Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

Determine também o ponto mais alto do gráfico de  $f$ .

**SOLUÇÃO** As derivadas parciais de primeira ordem são

$$f_x = 20xy - 10x - 4x^3 \quad f_y = 10x^2 - 8y - 8y^3$$

Para acharmos os pontos críticos precisamos resolver as equações

$$\text{4} \quad 2x(10y - 5 - 2x^2) = 0$$

$$\text{5} \quad 5x^2 - 4y - 4y^3 = 0$$

Da Equação 4, vemos que

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 10y - 5 - 2x^2 = 0$$

No primeiro caso ( $x = 0$ ), a Equação 5 fica  $-4y(1 + y^2) = 0$ , assim,  $y = 0$  e temos um ponto crítico  $(0, 0)$ .

No segundo caso ( $10y - 5 - 2x^2 = 0$ ), temos

$$\text{6} \quad x^2 = 5y - 2,5$$

e, substituindo na Equação 5, temos  $25y - 12,5 - 4y - 4y^3 = 0$ . Logo, temos de resolver a equação cúbica

$$\text{7} \quad 4y^3 - 21y + 12,5 = 0$$

Utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o gráfico da função

$$g(y) = 4y^3 - 21y + 12,5$$

como na Figura 6, vemos que a Equação 7 tem três raízes reais. Dando *zoom* podemos achar as raízes com quatro casas decimais:

$$y \approx -2,5452 \quad y \approx 0,6468 \quad y \approx 1,8984$$

(Como alternativa, podemos usar o método de Newton ou um programa para localizar raízes para determiná-las.) Da Equação 6, os valores  $x$  correspondentes são dados por

$$x = \pm\sqrt{5y - 2,5}$$

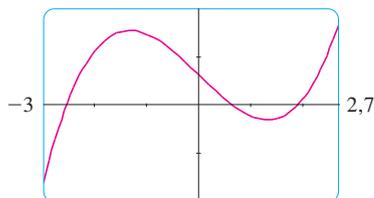


FIGURA 6

Se  $y \approx -2,5452$ , então  $x$  não tem valor real correspondente. Se  $y \approx 0,6468$ , então  $x \approx \pm 0,8567$ . Se  $y \approx 1,8984$ , então  $x \approx \pm 2,6442$ . Assim, temos o total de cinco pontos críticos, que são analisados na tabela a seguir. Todos os valores estão arredondados para duas casas decimais.

Ponto crítico	Valor de $f$	$f_{xx}$	$D$	Conclusões
(0, 0)	0,00	-10,00	80,00	máximo local
( $\pm 2,64$ , 1,90)	8,50	-55,93	2.488,72	máximo local
( $\pm 0,86$ , 0,65)	-1,48	-5,87	-187,64	ponto de sela

As Figuras 7 e 8 mostram o gráfico de  $f$  sob dois pontos de vista diferentes, e vemos que a superfície se abre para baixo. [Isso pode ser visto da expressão de  $f(x, y)$ : os termos dominantes são  $-x^4 - 2y^4$  quando  $|x|$  e  $|y|$  são grandes.] Comparando os valores de  $f$  nos máximos locais, vemos que o máximo absoluto de  $f$  é  $f(\pm 2,64, 1,90) \approx 8,50$ . Em outras palavras, os pontos mais altos do gráfico de  $f$  são  $(\pm 2,64, 1,90, 8,50)$ .

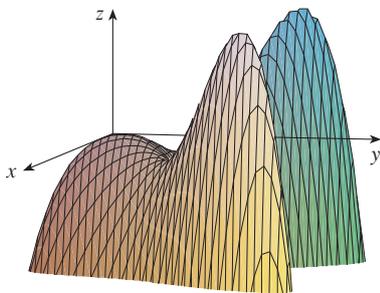


FIGURA 7

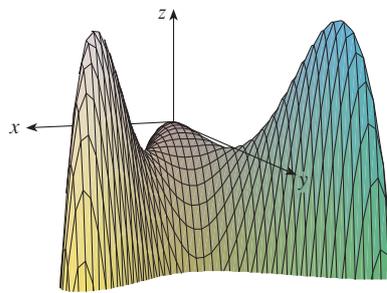
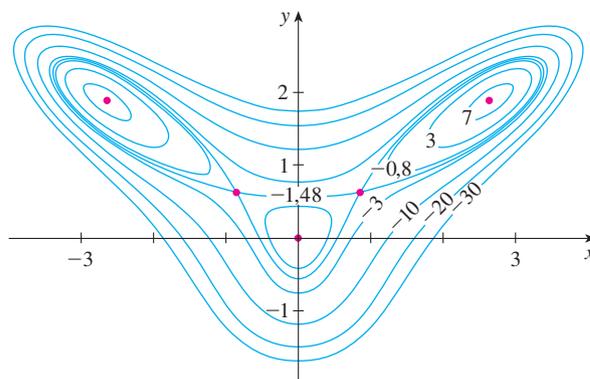


FIGURA 8

**TEC** Visual 14.7 mostra diversas famílias de superfícies. A superfície nas Figuras 7 e 8 é um membro de uma dessas famílias.



Os cinco pontos críticos da função  $f$  do Exemplo 4 estão destacados em azul no mapa de contorno de  $f$  na Figura 9.

FIGURA 9

**EXEMPLO 5** Determine a menor distância entre o ponto  $(1, 0, -2)$  e o plano  $x + 2y + z = 4$ .

**SOLUÇÃO** A distância entre um ponto qualquer  $(x, y, z)$  e o ponto  $(1, 0, -2)$  é

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2}$$

Mas, se  $(x, y, z)$  pertence ao plano  $x + 2y + z = 4$ , então  $z = 4 - x - 2y$  e assim temos  $d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$ . Podemos minimizar  $d$  minimizando a expressão mais simples

$$d^2 = f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

Resolvendo as equações

$$f_x = 2(x - 1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

O Exemplo 5 poderia ser resolvido utilizando-se vetores. Compare com os métodos da Seção 12.5.

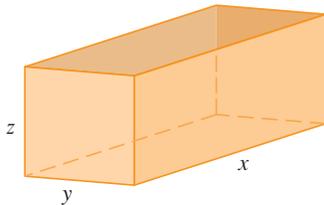


FIGURA 10

achamos que o único ponto crítico é  $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$ . Como  $f_{xx} = 4$ ,  $f_{yy} = 4$  e  $f_{xy} = 10$ , temos  $D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 24 > 0$  e  $f_{xx} > 0$ , portanto, pelo Teste da Segunda Derivada,  $f$  tem um mínimo local em  $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$ . Intuitivamente podemos ver que esse mínimo local é, na verdade, um mínimo absoluto, porque precisa haver um ponto no plano dado que esteja mais próximo de  $(1, 0, -2)$ . Se  $x = \frac{11}{6}$  e  $y = \frac{5}{3}$ , então

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2} = \sqrt{(\frac{5}{6})^2 + (\frac{5}{3})^2 + (\frac{5}{6})^2} = \frac{5}{6}\sqrt{6}$$

A menor distância de  $(1, 0, -2)$  ao plano  $x + 2y + z = 4$  é  $\frac{5}{6}\sqrt{6}$ .

**EXEMPLO 6** Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m<sup>2</sup> de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

**SOLUÇÃO** Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  o comprimento, a largura e a altura da caixa (em metros) como mostrado na Figura 10. Então, o volume da caixa é

$$V = xyz$$

Podemos expressar  $V$  como função só de  $x$  e  $y$  usando o fato de que a área dos quatro lados e do fundo da caixa é

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

Isolando  $z$  nessa equação, obtemos  $z = (12 - xy)/[2(x + y)]$ , e  $V$  fica

$$V = xy \frac{12 - xy}{2(x + y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

Calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2}$$

Se  $V$  é um máximo, então  $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$ , mas  $x = 0$  ou  $y = 0$  dá  $V = 0$ , de modo que precisamos resolver as equações

$$12 - 2xy - x^2 = 0 \quad 12 - 2xy - y^2 = 0$$

Isso implica que  $x^2 = y^2$  e, portanto,  $x = y$ . (Observe que ambos devem ser positivos neste problema.) Se colocarmos  $x = y$  em qualquer uma das equações obtemos  $12 - 3x^2 = 0$ , o que dá  $x = 2$ ,  $y = 2$  e  $z = (12 - 2 \cdot 2)/[2(2 + 2)] = 1$ .

Podemos usar o Teste da Segunda Derivada para mostrar que o ponto obtido é um máximo local de  $V$ , ou podemos argumentar que a natureza física do problema exige a existência de um máximo absoluto, que deve ocorrer em um ponto crítico de  $V$ , portanto, esse máximo pode ocorrer quando  $x = 2$ ,  $y = 2$ ,  $z = 1$ . Assim,  $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ , e o volume máximo da caixa é 4 m<sup>3</sup>.

### Valores Máximo e Mínimo Absolutos

Para uma função  $f$  de uma variável, o Teorema do Valor Extremo diz que, se  $f$  é contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$ , então  $f$  tem um valor mínimo absoluto e um valor máximo absoluto. De acordo com o Método dos Intervalos Fechados da Seção 4.1, no Volume I, achamos esses valores calculando  $f$  não somente nos pontos críticos, mas também nas extremidades  $a$  e  $b$ .

Para as funções de duas variáveis, a situação é semelhante. Do mesmo modo que os intervalos fechados contêm suas extremidades, um **conjunto fechado** de  $\mathbb{R}^2$  contém todos os seus pontos da fronteira. [Um ponto da fronteira de  $D$  é um ponto  $(a, b)$  tal que qualquer bola aberta com centro em  $(a, b)$  contém pontos de  $D$  e pontos não pertencentes a  $D$ .] Por exemplo, o disco

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

constituído de todos os pontos sobre e dentro da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  é um conjunto fechado porque contém todos os seus pontos da fronteira (que são os pontos sobre a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ ). Mas se um único ponto da fronteira for omitido, o conjunto deixa de ser fechado (veja a Figura 11.)

Um **conjunto limitado** em  $\mathbb{R}^2$  é aquele que está contido em alguma bola aberta. Em outras palavras, ele é finito em extensão. Então, em termos de conjuntos fechados e limitados, podemos enunciar o correspondente ao Teorema do Valor Extremo para duas dimensões.

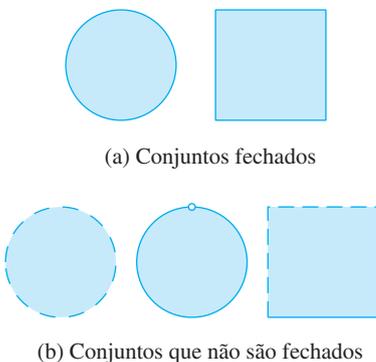


FIGURA 11

**8 Teorema do Valor Extremo para as Funções de Duas Variáveis** Se  $f$  é contínua em um conjunto fechado e limitado  $D$  em  $\mathbb{R}^2$ , então  $f$  assume um valor máximo absoluto  $f(x_1, y_1)$  e um valor mínimo absoluto  $f(x_2, y_2)$  em alguns pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  de  $D$ .

Para acharmos os pontos extremos, cuja existência é garantida pelo Teorema 8, observamos que, pelo Teorema 2, se  $f$  tem um valor extremo em  $(x_1, y_1)$ , então  $(x_1, y_1)$  ou é um ponto crítico de  $f$ , ou um ponto da fronteira de  $D$ . Portanto, temos a seguinte extensão do Método dos Intervalos Fechados.

**9** Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua  $f$  em um conjunto fechado e limitado  $D$ :

1. Determine os valores de  $f$  nos pontos críticos de  $f$  em  $D$ .
2. Determine os valores extremos de  $f$  na fronteira de  $D$ .
3. O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto; o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

**EXEMPLO 7** Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$  no retângulo  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$ .

**SOLUÇÃO** Como  $f$  é um polinômio, é contínua no retângulo fechado e limitado  $D$ , portanto o Teorema 8 nos diz que existem tanto o máximo absoluto quanto o mínimo absoluto. De acordo com o passo 1 de [9], inicialmente devemos calcular os pontos críticos. Eles ocorrem quando

$$f_x = 2x - 2y = 0 \quad f_y = -2x + 2 = 0$$

e, assim, o único ponto crítico existente é  $(1, 1)$ , e o valor de  $f$  aí é  $f(1, 1) = 1$ .

No passo 2 olhamos para os valores de  $f$  na fronteira de  $D$ , que é constituído por quatro segmentos de reta  $L_1, L_2, L_3$  e  $L_4$  mostrados na Figura 12. Em  $L_1$ , temos  $y = 0$  e

$$f(x, 0) = x^2 \quad 0 \leq x \leq 3$$

Isso corresponde a uma função crescente de  $x$ , que tem valor mínimo  $f(0, 0) = 0$  e máximo  $f(3, 0) = 9$ . Em  $L_2$ , temos  $x = 3$  e

$$f(3, y) = 9 - 4y \quad 0 \leq y \leq 2$$

Essa é uma função decrescente de  $y$ , portanto seu máximo é  $f(3, 0) = 9$  e seu mínimo é  $f(3, 2) = 1$ . Em  $L_3$ , temos  $y = 2$  e

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \quad 0 \leq x \leq 3$$

Pelos métodos do Capítulo 4, no Volume I, ou simplesmente observando que  $f(x, 2) = (x - 2)^2$ , vemos que o mínimo valor dessa função é  $f(2, 2) = 0$ , e seu valor máximo é  $f(0, 2) = 4$ . Finalmente, em  $L_4$ , temos  $x = 0$  e

$$f(0, y) = 2y \quad 0 \leq y \leq 2$$

com valor máximo  $f(0, 2) = 4$  e valor mínimo  $f(0, 0) = 0$ . Portanto, na fronteira, o valor mínimo de  $f$  é 0 e o máximo, 9.

No passo 3 comparamos esses valores com o valor  $f(1, 1) = 1$  no ponto crítico e concluímos que o valor máximo absoluto de  $f$  em  $D$  é  $f(3, 0) = 9$ , e o valor mínimo absoluto é  $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$ . A Figura 13 mostra o gráfico de  $f$ .

Concluimos esta seção com a demonstração da primeira parte do Teste da Segunda Derivada. As partes (b) e (c) têm demonstrações semelhantes.

**DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3, PARTE (a)** Vamos calcular a derivada direcional de segunda ordem de  $f$  na direção de  $\mathbf{u} = \langle h, k \rangle$ . A derivada de primeira ordem é dada pelo Teorema 14.6.3:

$$D_{\mathbf{u}}f = f_x h + f_y k$$

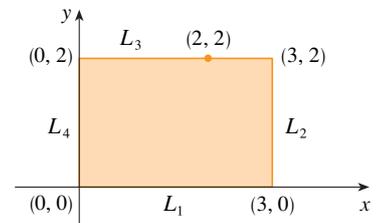


FIGURA 12

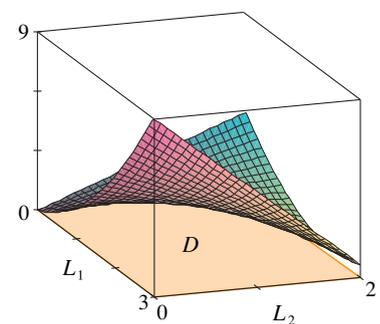


FIGURA 13

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$$

Aplicando esse teorema uma segunda vez, temos

$$\begin{aligned} D_u^2 f &= D_u(D_u f) = \frac{\partial}{\partial x} (D_u f)h + \frac{\partial}{\partial y} (D_u f)k \\ &= (f_{xx}h + f_{yx}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k \\ &= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 \end{aligned}$$

(pelo Teorema de Clairaut)

Se completarmos os quadrados na expressão, obteremos

**10** 
$$D_u^2 f = f_{xx} \left( h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}} k \right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}} (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)$$

Foi-nos dado que  $f_{xx}(a, b) > 0$  e  $D(a, b) > 0$ . Mas  $f_{xx}$  e  $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$  são funções contínuas, portanto há uma bola aberta  $B$  com centro  $(a, b)$  e raio  $\delta > 0$  tal que  $f_{xx}(x, y) > 0$  e  $D(x, y) > 0$  sempre que  $(x, y)$  está em  $B$ . Logo, ao olhar na Equação 10, vemos que  $D_u^2 f(x, y) > 0$  sempre que  $(x, y)$  pertencer a  $B$ . Isso significa que se  $C$  é a curva obtida pela intersecção do gráfico de  $f$  com o plano vertical que passa por  $P(a, b, f(a, b))$  na direção de  $\mathbf{u}$ , então  $C$  é côncava para cima no intervalo do comprimento  $2\delta$ . Isso é verdadeiro na direção de cada vetor  $\mathbf{u}$ , portanto se restringirmos  $(x, y)$  para ficar em  $B$ , o gráfico de  $f$  fica acima de seu plano horizontal tangente em  $P$ . Assim,  $f(x, y) \geq f(a, b)$  sempre que  $(x, y)$  estiver em  $B$ . Isso mostra que  $f(a, b)$  é um mínimo local.

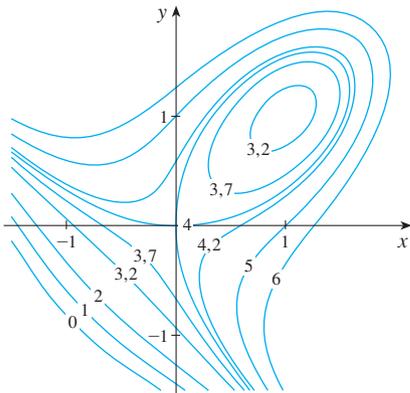
## 14.7 Exercícios

- Suponha que  $(1, 1)$  seja um ponto crítico de uma função  $f$  com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre  $f$ ?
  - $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{yy}(1, 1) = 1, \quad f_{xy}(1, 1) = 2$
  - $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{yy}(1, 1) = 3, \quad f_{xy}(1, 1) = 2$

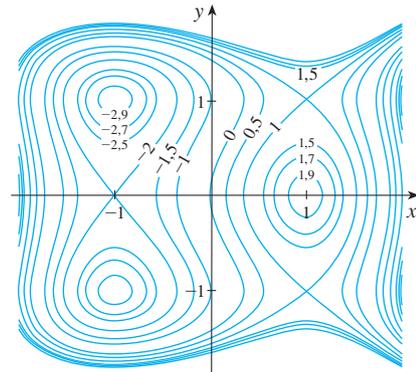
- Suponha que  $(0, 2)$  seja um ponto crítico de uma função  $g$  com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre  $g$ ?
  - $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{yy}(0, 2) = 6, \quad g_{xy}(0, 2) = 1$
  - $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{yy}(0, 2) = 2, \quad g_{xy}(0, 2) = -8$
  - $g_{xx}(0, 2) = 4, \quad g_{yy}(0, 2) = 6, \quad g_{xy}(0, 2) = 9$

**3-4** Utilize as curvas de nível da figura para prever a localização dos pontos críticos de  $f$  e se  $f$  tem um ponto de sela ou um máximo ou mínimo local em cada um desses pontos. Explique seu raciocínio. Em seguida, empregue o Teste da Segunda Derivada para confirmar suas previsões.

- $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



- $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



**5-18** Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Se você tiver um programa de computador para desenhar em três dimensões, trace o gráfico da função usando um ponto de vista e domínio convenientes para mostrar os aspectos importantes da função.

- $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$
- $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$
- $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$
- $f(x, y) = xe^{-2x^2-2y^2}$
- $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$
- $f(x, y) = xy(1 - x - y)$
- $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

12.  $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

13.  $f(x, y) = e^x \cos y$

14.  $f(x, y) = y \cos x$

15.  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}$

16.  $f(x, y) = e^y(y^2 - x^2)$

17.  $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x, \quad -1 \leq x \leq 7$

18.  $f(x, y) = \sin x \sin y, \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi$

19. Mostre que  $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$  em um número infinito de pontos críticos e que  $D = 0$  em cada um. A seguir, mostre que  $f$  tem um mínimo local (e absoluto) em cada ponto crítico.

20. Mostre que  $f(x, y) = x^2ye^{-x^2-y^2}$  tem valores máximos em  $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$  e valores mínimos em  $(\pm 1, -1/\sqrt{2})$ . Mostre também que  $f$  tem infinitos outros pontos críticos e que  $D = 0$  em cada um deles. Quais deles dão origem a valores máximos? E a valores mínimos? E a pontos de sela?

 21–24 Utilize um gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Em seguida, use o cálculo para determinar esses valores de modo preciso.

21.  $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2}$

22.  $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

23.  $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y),$   
 $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$

24.  $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y),$   
 $0 \leq x \leq \pi/4, 0 \leq y \leq \pi/4$

 25–28 Utilize uma ferramenta gráfica como no Exemplo 4 (ou o Método de Newton ou um determinante de raízes) para encontrar os pontos críticos de  $f$  com precisão de três casas decimais. Em seguida, classifique o ponto crítico e determine o valor mais alto e o mais baixo do gráfico, se houver.

25.  $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4x^2y + 2y$

26.  $f(x, y) = y^6 - 2y^4 + x^2 - y^2 + y$

27.  $f(x, y) = x^4 + y^3 - 3x^2 + y^2 + x - 2y + 1$

28.  $f(x, y) = 20e^{-x^2-y^2} \sin 3x \cos 3y, \quad |x| \leq 1, |y| \leq 1$

29–36 Determine os valores máximo e mínimo absolutos de  $f$  no conjunto  $D$ .

29.  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x, \quad D$  é a região triangular fechada com vértices  $(2, 0), (0, 2)$  e  $(0, -2)$

30.  $f(x, y) = x + y - xy, \quad D$  é a região triangular fechada com vértices  $(0, 0), (0, 2)$  e  $(4, 0)$

31.  $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4,$   
 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

32.  $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2,$   
 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 5\}$

33.  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2,$   
 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$

34.  $f(x, y) = xy^2, \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$

35.  $f(x, y) = 2x^3 + y^4, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

36.  $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y, \quad D$  é o quadrilátero cujos vértices são  $(-2, 3), (2, 3), (2, 2)$  e  $(-2, -2)$ .

 37. Para as funções de uma variável, é impossível uma função contínua ter dois pontos de máximo local e nenhum de mínimo local. Para as funções de duas variáveis, esse caso existe. Mostre que a função

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

só tem dois pontos críticos, ambos de máximo local. Em seguida, utilize um computador com uma escolha conveniente de domínio e ponto de vista para ver como isso é possível.

 38. Se uma função de uma variável é contínua em um intervalo e tem um único ponto crítico, então um máximo local tem de ser um máximo absoluto. Mas isso não é verdadeiro para as funções de duas variáveis. Mostre que a função

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

tem exatamente um ponto crítico, onde  $f$  tem um máximo local, porém este não é um máximo absoluto. Em seguida, utilize um computador com uma escolha conveniente de domínio e ponto de vista para ver como isso é possível.

39. Determine a menor distância entre o ponto  $(2, 0, -3)$  e o plano  $x + y + z = 1$ .

40. Determine o ponto do plano  $x - 2y + 3z = 6$  que está mais próximo do ponto  $(0, 1, 1)$ .

41. Determine os pontos do cone  $z^2 = x^2 + y^2$  que estão mais próximos do ponto  $(4, 2, 0)$ .

42. Determine os pontos da superfície  $y^2 = 9 + xz$  que estão mais próximos da origem.

43. Determine três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

44. Encontre três números positivos cuja soma é 12 e cuja soma dos quadrados é a menor possível.

45. Encontre o volume máximo de uma caixa retangular que está inscrita em uma esfera de raio  $r$ .

46. Encontre as dimensões de uma caixa com volume de  $1.000 \text{ cm}^3$  que tenha a área de sua superfície mínima.

47. Determine o volume da maior caixa retangular no primeiro octante com três faces nos planos coordenados e com um vértice no plano  $x + 2y + 3z = 6$ .

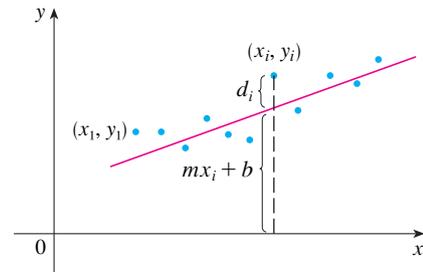
48. Determine as dimensões da caixa retangular de maior volume se a área total de sua superfície é dada por  $64 \text{ cm}^2$ .

49. Determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas 12 arestas seja uma constante  $c$ .

50. A base de um aquário com volume  $V$  é feita de ardósia e os lados são de vidro. Se o preço da ardósia (por unidade de área) equivale a cinco vezes o preço do vidro, determine as dimensões do aquário para minimizar o custo do material.

51. Uma caixa de papelão sem tampa deve ter um volume de 32.000 cm<sup>3</sup>. Determine as dimensões que minimizem a quantidade de papelão utilizado.
52. Um prédio retangular está sendo projetado para minimizar a perda de calor. As paredes leste e oeste perdem calor a uma taxa de 10 unidades/m<sup>2</sup> por dia; as paredes norte e sul, a uma taxa de 8 unidades/m<sup>2</sup> por dia; o piso, a uma taxa de 1 unidade/m<sup>2</sup> por dia e o teto, a uma taxa de 5 unidades/m<sup>2</sup> por dia. Cada parede deve ter pelo menos 30 m de comprimento, a altura deve ser no mínimo 4 m, e o volume, exatamente 4 000 m<sup>3</sup>.
- (a) Determine e esboce o domínio da perda de calor como uma função dos comprimentos dos lados.
- (b) Encontre as dimensões que minimizam a perda de calor. (Analisar tanto os pontos críticos como os pontos sobre a fronteira do domínio.)
- (c) Você poderia projetar um prédio com precisamente menos perda de calor ainda se as restrições sobre os comprimentos das paredes fossem removidas?
53. Se o comprimento da diagonal de uma caixa retangular deve ser  $L$ , qual é o maior volume possível?
54. Três alelos (versões alternativas de um gene) A, B e O determinam os quatro tipos de sangue: A (AA ou AO), B (BB ou BO), O (OO) e AB. A Lei de Hardy-Weinberg afirma que a proporção de indivíduos em uma população que carregam dois alelos diferentes é
- $$P = 2pq + 2pr + 2rq$$
- onde  $p$ ,  $q$  e  $r$  são as proporções de A, B e O na população. Use o fato de que  $p + q + r = 1$  para mostrar que  $P$  é no máximo  $\frac{2}{3}$ .
55. Suponha que um cientista tenha razões para acreditar que duas quantidades  $x$  e  $y$  estejam relacionadas linearmente, ou seja,  $y = mx + b$ , pelo menos aproximadamente, para algum valor de

$m$  e de  $b$ . O cientista realiza uma experiência e coleta os dados na forma de pontos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , e então coloca-os em um gráfico. Os pontos não estão todos alinhados, de modo que o cientista quer determinar as constantes  $m$  e  $b$  para que a reta  $y = mx + b$  “ajuste” os pontos tanto quanto possível (veja a figura).



Seja  $d_i = y_i - (mx_i + b)$  o desvio vertical do ponto  $(x_i, y_i)$  da reta. O **método dos mínimos quadrados** determina  $m$  e  $b$  de modo a minimizar  $\sum_{i=1}^n d_i^2$ , a soma dos quadrados dos desvios. Mostre que, de acordo com esse método, a reta de melhor ajuste é obtida quando

$$m \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$m \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Dessa forma, a reta é determinada ao resolver essas duas equações nas incógnitas  $m$  e  $b$ . (Veja a Seção 1.2, no Volume I, para mais discussões e aplicações do método dos quadrados mínimos.)

56. Determine uma equação do plano que passa pelo ponto  $(1, 2, 3)$  e que corta o menor volume do primeiro octante.

## PROJETO APLICADO

## PROJETO DE UMA CAÇAMBA

Para esse projeto, inicialmente localizamos uma caçamba de entulho retangular para estudar sua forma e construção. Tentaremos então determinar as dimensões de um recipiente de forma similar e que minimize o custo de construção.

- Primeiro localize uma caçamba de entulho. Estude e descreva cuidadosamente todos os detalhes de sua construção e determine seu volume. Inclua um esboço do recipiente.
- Mantendo a mesma forma geral e o método de construção, determine as dimensões que tal recipiente deveria ter para minimizar o custo de construção. Utilize as seguintes hipóteses para sua análise:
  - Os lados, a parte de trás e a da frente devem ser feitos com folhas de aço de tipo 12 (2,657 mm de espessura), que custam \$ 8,00 por metro quadrado (incluindo quaisquer cortes ou dobras necessários).
  - A base deve ser feita de uma folha de aço de tipo 10 (3,416 mm de espessura), que custa \$ 10,00 por metro quadrado.
  - As tampas custam aproximadamente \$ 50,00 cada, independentemente das dimensões.
  - A soldagem custa aproximadamente \$ 0,60 por metro para material e serviço combinados.
 Dê sua justificativa para qualquer hipótese adicional ou simplificação feita dos detalhes de construção.
- Descreva como qualquer hipótese ou simplificação feita pode afetar o resultado.
- Se você fosse contratado como consultor nessa pesquisa, quais seriam suas conclusões? Você recomendaria a alteração do projeto da caçamba? Se sim, descreva a economia resultante.

## PROJETO DE DESCOBERTA

## APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA E PONTOS CRÍTICOS

A aproximação por polinômio de Taylor de uma função de uma variável discutida no Capítulo 11 pode ser estendida para as funções de duas ou mais variáveis. Estudaremos aqui a aproximação quadrática para as funções de duas variáveis e usaremos esse estudo para melhor entender o Teste da Segunda Derivada para classificar pontos críticos.

Na Seção 14.4 discutimos a linearização de uma função  $f$  de duas variáveis em um ponto  $(a, b)$ :

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Lembre-se de que o gráfico de  $L$  é o plano tangente à superfície  $z = f(x, y)$  em  $(a, b, f(a, b))$ , e a aproximação linear correspondente é  $f(x, y) \approx L(x, y)$ . A linearização  $L$  também é chamada **polinômio de Taylor de primeiro grau** de  $f$  em  $(a, b)$ .

1. Se  $f$  tiver derivadas parciais de segunda ordem contínuas em  $(a, b)$ , então o **polinômio de Taylor de segundo grau** de  $f$  em  $(a, b)$  é

$$Q(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \frac{1}{2}f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2}f_{yy}(a, b)(y - b)^2$$

e a aproximação  $f(x, y) \approx Q(x, y)$  é denominada **aproximação quadrática** de  $f$  em  $(a, b)$ . Verifique que  $Q$  tem as mesmas derivadas parciais de primeira e segunda ordens que  $f$  em  $(a, b)$ .

2. (a) Determine os polinômios de Taylor de primeiro e segundo graus  $L$  e  $Q$  de  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$  em  $(0, 0)$ .

 (b) Esboce o gráfico de  $f$ ,  $L$  e  $Q$ . Comente o quanto  $L$  e  $Q$  se aproximam de  $f$ .

3. (a) Determine os polinômios de Taylor de primeiro e segundo graus  $L$  e  $Q$  para  $f(x, y) = xe^y$  em  $(1, 0)$ .

(b) Compare os valores de  $L$ ,  $Q$  e  $f$  em  $(0,9, 0,1)$ .

 (c) Esboce o gráfico de  $f$ ,  $L$  e  $Q$ . Comente o quanto  $L$  e  $Q$  se aproximam de  $f$ .

4. Nesse problema analisaremos o comportamento do polinômio  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$  (sem utilizar o Teste da Segunda Derivada) identificando o gráfico como um parabolóide.

(a) Completando os quadrados, mostre que, se  $a \neq 0$ , então

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a}y \right)^2 + \left( \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) y^2 \right]$$

(b) Seja  $D = 4ac - b^2$ . Mostre que se  $D > 0$  e  $a > 0$ , então  $f$  tem um mínimo local em  $(0, 0)$ .

(c) Demonstre que se  $D > 0$  e  $a < 0$ , então  $f$  tem um máximo local em  $(0, 0)$ .

(d) Demonstre que se  $D < 0$ , então  $(0, 0)$  é um ponto de sela.

5. (a) Suponha que  $f$  seja uma função qualquer com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, tal que  $f(0, 0) = 0$  e que  $(0, 0)$  seja um ponto crítico de  $f$ . Escreva uma expressão para o polinômio de Taylor de segundo grau  $Q$  de  $f$  em  $(0, 0)$ .

(b) O que você conclui sobre  $Q$  usando os resultados do Problema 4?

(c) Em vista da aproximação quadrática  $f(x, y) \approx Q(x, y)$ , o que a parte (b) sugere sobre  $f$ ?

 É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

## 14.8 Multiplicadores de Lagrange

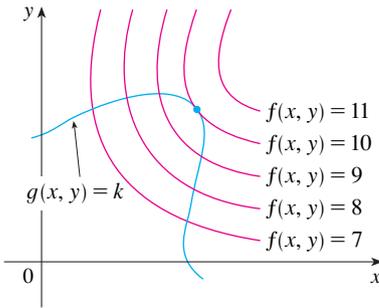


FIGURA 1

**TEC** Visual 14.8 mostra uma animação da Figura 1 para as curvas de nível e superfícies de nível.

No Exemplo 6 da Seção 14.7 maximizamos a função volume  $V = xyz$  sujeita à restrição  $2xz + 2yz + xy = 12$ , que expressa a condição de a área da superfície ser de  $12 \text{ m}^2$ . Nesta seção apresentaremos o método de Lagrange para maximizar uma função genérica  $f(x, y, z)$  sujeita a uma restrição (ou vínculo) da forma  $g(x, y, z) = k$ .

É fácil explicar a base geométrica do método de Lagrange para as funções de duas variáveis. Então, vamos começar tentando determinar os valores extremos de  $f(x, y)$  sujeita a uma restrição da forma  $g(x, y) = k$ . Em outras palavras, queremos achar os valores extremos de  $f(x, y)$  quando o ponto  $(x, y)$  pertencer à curva de nível  $g(x, y) = k$ . A Figura 1 mostra essa curva junto de diversas curvas de nível de  $f$ . Estas têm as equações  $f(x, y) = c$  onde  $c = 7, 8, 9, 10, 11$ . Para maximizar  $f(x, y)$  sujeita a  $g(x, y) = k$  é preciso determinar o maior valor de  $c$ , tal que a curva de nível  $f(x, y) = c$  intercepte  $g(x, y) = k$ . Parece, da Figura 1, que isso acontece quando essas curvas se tocam, ou seja, quando essas curvas têm uma reta tangente comum. (Caso contrário, poderíamos aumentar o valor de  $c$ .) Isso significa que as retas normais ao ponto  $(x_0, y_0)$  onde as duas curvas se tocam devem ser as mesmas. Logo, os vetores gradientes são paralelos, ou seja,  $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$  para algum escalar  $\lambda$ .

Esse tipo de argumento também se aplica ao problema de achar os valores extremos de  $f(x, y, z)$  sujeita à restrição  $g(x, y, z) = k$ . Assim, o ponto  $(x, y, z)$  está restrito a pertencer à superfície  $S$  com equação  $g(x, y, z) = k$ . Em vez das curvas de nível na Figura 1, devemos considerar as superfícies de nível  $f(x, y, z) = c$  e argumentar que, se o valor máximo de  $f$  é  $f(x_0, y_0, z_0) = c$ , então a superfície de nível  $f(x, y, z) = c$  é tangente à superfície de nível  $g(x, y, z) = k$ , e então os correspondentes gradientes são paralelos.

Esse argumento intuitivo pode se tornar preciso da seguinte forma. Suponha que uma função  $f$  tenha um valor extremo no ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$  sobre a superfície  $S$  e seja  $C$  uma curva com equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$  que pertença a  $S$  e passe pelo ponto  $P$ . Se  $t_0$  é o valor do parâmetro correspondente ao ponto  $P$ , então  $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ . A função composta  $h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$  representa os valores que  $f$  assume sobre a curva  $C$ . Como  $f$  tem um valor extremo em  $(x_0, y_0, z_0)$ , segue que  $h$  tem um valor extremo em  $t_0$ , portanto,  $h'(t_0) = 0$ . Porém, se  $f$  for diferenciável, usando a Regra da Cadeia, podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 &= h'(t_0) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) \\ &= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \end{aligned}$$

Isso mostra que o vetor gradiente  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  é ortogonal ao vetor da tangente  $\mathbf{r}'(t_0)$  para todas as curvas  $C$ . Mas já sabemos da Seção 14.6 que o vetor gradiente de  $g$ ,  $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ , também é ortogonal a  $\mathbf{r}'(t_0)$  para todas as curvas. (Veja a Equação 14.6.18.) Isso significa que os vetores  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  e  $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$  precisam ser paralelos. Logo, se  $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ , existe um número  $\lambda$  tal que

$$\boxed{1} \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

O número  $\lambda$  na Equação 1 é chamado **multiplicador de Lagrange**. O procedimento baseado na Equação 1 é o seguinte:

**Método dos Multiplicadores de Lagrange** Para determinar os valores máximo e mínimo de  $f(x, y, z)$  sujeitos à restrição  $g(x, y, z) = k$  [supondo que esses valores extremos existam e que  $\nabla g \neq \mathbf{0}$  sobre a superfície  $g(x, y, z) = k$ ]:

(a) Determine todos os valores de  $x, y, z$  e  $\lambda$  tais que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

e

$$g(x, y, z) = k$$

(b) Calcule  $f$  em todos os pontos  $(x, y, z)$  que resultaram do passo (a). O maior desses valores será o valor máximo de  $f$ , e o menor será o valor mínimo de  $f$ .

Multiplicadores de Lagrange têm esse nome em homenagem ao matemático franco-italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Ao deduzirmos o Método de Lagrange, supusemos que  $\nabla g \neq \mathbf{0}$ . Em cada um de nossos exemplos, você pode verificar que  $\nabla g \neq \mathbf{0}$  em todos os pontos onde  $g(x, y, z) = k$ . Veja o Exercício 23 para descobrir o que pode sair errado se  $\nabla g = \mathbf{0}$ .

Se escrevermos a equação vetorial  $\nabla f = \lambda \nabla g$  em termos de suas componentes, as equações do passo (a) ficarão

$$f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad f_z = \lambda g_z \quad g(x, y, z) = k$$

Isso é um sistema de quatro equações a quatro incógnitas,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $\lambda$ . Mas não é necessário calcular de modo explícito valores para  $\lambda$ .

Para as funções de duas variáveis, o método dos multiplicadores de Lagrange é análogo àquele que acabamos de descrever. Para acharmos os valores extremos de  $f(x, y)$  sujeitos à restrição  $g(x, y) = k$ , olhamos para todos os valores de  $x$ ,  $y$  e  $\lambda$ , tais que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad \text{e} \quad g(x, y) = k$$

Isso leva à solução de um sistema de três equações a três incógnitas:

$$f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad g(x, y) = k$$

Nosso primeiro exemplo de método de Lagrange é reconsiderar o problema dado no Exemplo 6 da Seção 14.7.

**EXEMPLO 1** Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m<sup>2</sup> de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

**SOLUÇÃO** Como no Exemplo 6 na Seção 14.7, sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  o comprimento, a largura e a altura, respectivamente, da caixa em metros. Queremos maximizar

$$V = xyz$$

sujeita à restrição

$$g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$$

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, olhamos para os valores de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $\lambda$ , tais que  $\nabla V = \lambda \nabla g$  e  $g(x, y, z) = 12$ . Isso gera as equações

$$V_x = \lambda g_x, \quad V_y = \lambda g_y, \quad V_z = \lambda g_z, \quad 2xz + 2yz + xy = 12$$

ou seja:

$$\boxed{2} \quad yz = \lambda(2z + y)$$

$$\boxed{3} \quad xz = \lambda(2z + x)$$

$$\boxed{4} \quad xy = \lambda(2x + 2y)$$

$$\boxed{5} \quad 2xz + 2yz + xy = 12$$

Não há regras gerais de como resolver esse sistema de equações. Algumas vezes precisamos de certa engenhosidade. No presente caso, você pode observar que, se multiplicarmos  $\boxed{2}$  por  $x$ ,  $\boxed{3}$  por  $y$ , e  $\boxed{4}$  por  $z$ , os lados esquerdos dessas equações ficam idênticos. Fazendo isso, temos

$$\boxed{6} \quad xyz = \lambda(2xz + xy)$$

$$\boxed{7} \quad xyz = \lambda(2yz + xy)$$

$$\boxed{8} \quad xyz = \lambda(2xz + 2yz)$$

Observamos que  $\lambda \neq 0$  porque  $\lambda = 0$  implicaria  $yz = xz = xy = 0$  de  $\boxed{2}$ ,  $\boxed{3}$  e  $\boxed{4}$ , e isso contradiz  $\boxed{5}$ . Logo, de  $\boxed{6}$  e  $\boxed{7}$ , temos

$$2xz + xy = 2yz + xy$$

que nos fornece  $xz = yz$ . Mas  $z \neq 0$  (uma vez que  $z = 0$  daria  $V = 0$ ), portanto  $x = y$ . De  $\boxed{7}$  e  $\boxed{8}$  temos

$$2yz + xy = 2xz + 2yz$$

que dá  $2xz = xy$  e assim (como  $x \neq 0$ ),  $y = 2z$ . Se colocarmos  $x = y = 2z$  em  $\boxed{5}$ , obtemos

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$$

Outro método de resolver o sistema de Equações (2–5) é isolar  $\lambda$  em cada uma das Equações 2, 3 e 4 para  $\lambda$  e depois igualar as expressões resultantes.

Em termos geométricos, o Exemplo 2 pede os pontos mais altos e os pontos mais baixos da curva  $C$  da Figura 2 que pertence ao parabolóide  $z = x^2 + 2y^2$  e que está diretamente acima do círculo de restrição  $x^2 + y^2 = 1$ .

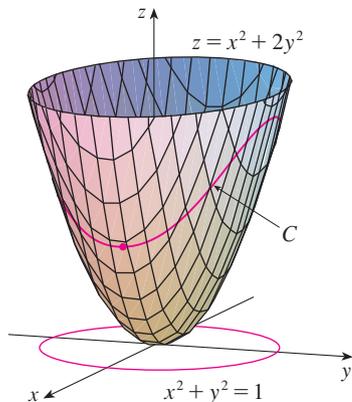


FIGURA 2

A geometria por trás do uso de multiplicadores de Lagrange no Exemplo 2 é mostrada na Figura 3. Os valores extremos de  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  correspondem às curvas de nível que tocam a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ .

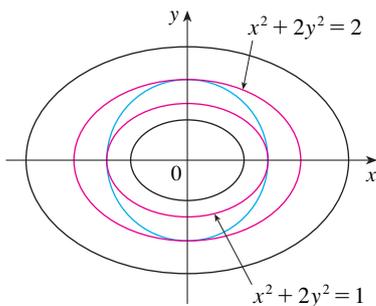


FIGURA 3

Como  $x, y$  e  $z$  todos são positivos, teremos  $z = 1$  e, portanto,  $x = 2$  e  $y = 2$ . Isso concorda com nossa resposta na Seção 14.7.

**EXEMPLO 2** Determine os valores extremos da função  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  no círculo  $x^2 + y^2 = 1$ .

**SOLUÇÃO** Foi-nos pedido para determinar os valores extremos de  $f$  sujeita à restrição  $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ . Usando os multiplicadores de Lagrange, resolvemos as equações  $\nabla f = \lambda \nabla g$  e  $g(x, y) = 1$ , que podem ser escritas como

$$f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad g(x, y) = 1$$

ou

**9**  $2x = 2x\lambda$

**10**  $4y = 2y\lambda$

**11**  $x^2 + y^2 = 1$

De **9** temos  $x = 0$  ou  $\lambda = 1$ . Se  $x = 0$ , então **11** leva a  $y = \pm 1$ . Se  $\lambda = 1$ , então  $y = 0$  de **10**, e assim **11** dá  $x = \pm 1$ . Dessa forma, os valores extremos possíveis de  $f$  são os pontos  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$ . Calculando  $f$  nesses quatro pontos, achamos

$$f(0, 1) = 2 \quad f(0, -1) = 2 \quad f(1, 0) = 1 \quad f(-1, 0) = 1$$

Portanto, o valor máximo de  $f$  no círculo  $x^2 + y^2 = 1$  é  $f(0, \pm 1) = 2$ , e o valor mínimo é  $f(\pm 1, 0) = 1$ . Verificando na Figura 2, vemos que esses valores são razoáveis.

**EXEMPLO 3** Determine os valores extremos de  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  no disco  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**SOLUÇÃO** De acordo com o procedimento em (14.7.9), comparamos os valores de  $f$  nos pontos críticos com os pontos na fronteira. Uma vez que  $f_x = 2x$  e  $f_y = 4y$ , o único ponto crítico é  $(0, 0)$ . Comparamos o valor de  $f$  no ponto com os valores extremos no limite do Exemplo 2:

$$f(0, 0) = 0 \quad f(\pm 1, 0) = 1 \quad f(0, \pm 1) = 2$$

Assim, o valor máximo de  $f$  no disco  $x^2 + y^2 \leq 1$  é  $f(0, \pm 1) = 2$ , e o valor mínimo é  $f(0, 0) = 0$ .

**EXEMPLO 4** Determine os pontos da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  que estão mais próximos e mais distantes do ponto  $(3, 1, -1)$ .

**SOLUÇÃO** A distância de um ponto  $(x, y, z)$  ao ponto  $(3, 1, -1)$  é

$$d = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2}$$

mas a álgebra fica mais simples se maximizarmos e minimizarmos o quadrado dessa distância:

$$d^2 = f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2$$

A restrição é que o ponto  $(x, y, z)$  pertença à esfera, ou seja,

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

De acordo com o método dos multiplicadores de Lagrange, resolvemos  $\nabla f = \lambda \nabla g$ ,  $g = 4$ . Isso dá

**12**  $2(x - 3) = 2x\lambda$

**13**  $2(y - 1) = 2y\lambda$

**14**  $2(z + 1) = 2z\lambda$

**15**  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

O modo mais simples de resolver essas equações é determinar  $x, y$  e  $z$  em termos de  $\lambda$  de **12**, **13** e **14**, e substituir esses valores em **15**. De **12** temos

$$x - 3 = x\lambda \quad \text{ou} \quad x(1 - \lambda) = 3 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{1 - \lambda}$$

[Observe  $1 - \lambda \neq 0$  porque  $\lambda = 1$  é impossível a partir de [12].] Da mesma forma, [13] e [14] dão

$$y = \frac{1}{1 - \lambda} \quad z = -\frac{1}{1 - \lambda}$$

Portanto, de [15] temos

$$\frac{3^2}{(1 - \lambda)^2} + \frac{1^2}{(1 - \lambda)^2} + \frac{(-1)^2}{(1 - \lambda)^2} = 4$$

que nos dá  $(1 - \lambda)^2 = \frac{11}{4}$ ,  $1 - \lambda = \pm\sqrt{11}/2$ , logo

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Esses valores de  $\lambda$  então fornecem os pontos correspondentes  $(x, y, z)$

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

É fácil ver que  $f$  tem valor menor no primeiro desses pontos; dessa forma, o ponto mais próximo é  $(6/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11})$  e o mais distante é  $(-6/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11})$ . ■

### ■ Duas Restrições

Suponha agora que queiramos determinar os valores máximo e mínimo de  $f(x, y, z)$  sujeita a duas restrições (vínculos) da forma  $g(x, y, z) = k$  e  $h(x, y, z) = c$ . Geometricamente, isso significa que estamos procurando pelos valores extremos de  $f$  quando  $(x, y, z)$  está restrito a pertencer à curva  $C$ , obtida pela intersecção das superfícies de nível  $g(x, y, z) = k$  e  $h(x, y, z) = c$ . (Veja a Figura 5.) Suponha que  $f$  tenha um tal valor extremo no ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$ . Sabemos que do início dessa seção que  $\nabla f$  é ortogonal a  $C$  em  $P$ . Mas também sabemos que  $\nabla g$  é ortogonal a  $g(x, y, z) = k$  e  $\nabla h$  é ortogonal a  $h(x, y, z) = c$ , portanto  $\nabla g$  e  $\nabla h$  são ortogonais a  $C$ . Isso significa que o vetor gradiente  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  está no plano determinado por  $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$  e  $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$ . (Presumimos que esses vetores gradientes não são nulos nem paralelos.) Portanto, existem números  $\lambda$  e  $\mu$  (chamados multiplicadores de Lagrange) tais que

$$\boxed{16} \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)$$

Nesse caso o método de Lagrange nos leva a procurar por valores extremos ao resolver cinco equações nas cinco incógnitas  $x, y, z, \lambda$  e  $\mu$ . Essas equações são obtidas ao escrever a Equação 16 em termos de seus componentes e ao utilizar as equações de restrição :

$$f_x = \lambda g_x + \mu h_x$$

$$f_y = \lambda g_y + \mu h_y$$

$$f_z = \lambda g_z + \mu h_z$$

$$g(x, y, z) = k$$

$$h(x, y, z) = c$$

**EXEMPLO 5** Determine o valor máximo da função  $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$  na curva da intersecção do plano  $x - y + z = 1$  com o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .

A Figura 4 mostra a esfera e o ponto mais próximo  $P$  do Exemplo 4. Você pode pensar em um modo de calcular as coordenadas de  $P$  sem usar o cálculo?

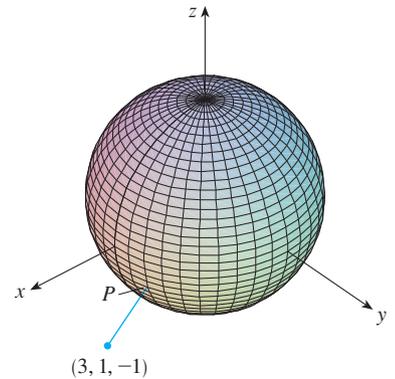


FIGURA 4

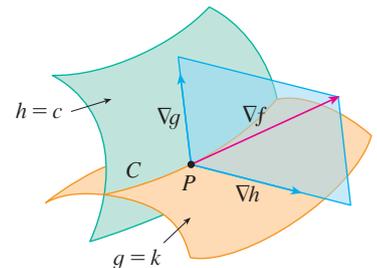


FIGURA 5

O cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  intercepta o plano  $x - y + z = 1$  em uma elipse (Figura 6). O Exemplo 5 questiona o valor máximo de  $f$  quando  $(x, y, z)$  pertence a essa elipse.

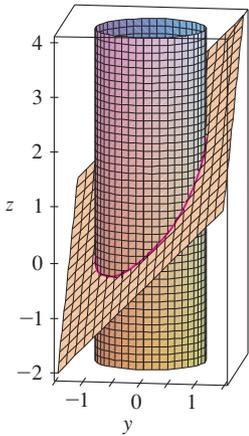


FIGURA 6

**SOLUÇÃO** Maximizamos a função  $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$  sujeita às restrições  $g(x, y, z) = x - y + z = 1$  e  $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$ . A condição de Lagrange é  $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$ , de modo que devemos resolver as equações

$$\begin{aligned} \text{[17]} \quad & 1 = \lambda + 2x\mu \\ \text{[18]} \quad & 2 = -\lambda + 2y\mu \\ \text{[19]} \quad & 3 = \lambda \\ \text{[20]} \quad & x - y + z = 1 \\ \text{[21]} \quad & x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

Substituindo  $\lambda = 3$  [de [19] em [17]], obtemos  $2x\mu = -2$ , e então  $x = -1/\mu$ . Analogamente, [18] dá  $y = 5/(2\mu)$ . Substituindo em [21], temos

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

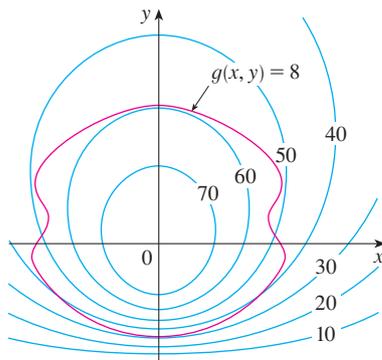
e  $\mu^2 = \frac{29}{4}$ ,  $\mu = \pm\sqrt{29}/2$ . Então  $x = \mp 2/\sqrt{29}$ ,  $y = \pm 5/\sqrt{29}$ , e, de [20],  $z = 1 - x + y = 1 \pm 7/\sqrt{29}$ . Os valores correspondentes de  $f$  são

$$\mp \frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm \frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

Portanto, o valor máximo de  $f$  na curva dada é  $3 + \sqrt{29}$ .

## 14.8 Exercícios

1. Na figura estão um mapa de contorno de  $f$  e a curva de equação  $g(x, y) = 8$ . Estime os valores máximo e mínimo de  $f$  sujeita à restrição  $g(x, y) = 8$ . Explique suas razões.



2. (a) Use uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o círculo  $x^2 + y^2 = 1$ . Na mesma tela, trace diversas curvas da forma  $x^2 + y = c$  até que você encontre duas que apenas toquem o círculo. Qual o significado dos valores de  $c$  dessas duas curvas?  
 (b) Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores extremos de  $f(x, y) = x^2 + y$  sujeita à restrição  $x^2 + y^2 = 1$ . Compare sua resposta com a da parte (a).

3–14 Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

3.  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ;  $xy = 1$
4.  $f(x, y) = 3x + y$ ;  $x^2 + y^2 = 10$
5.  $f(x, y) = y^2 - x^2$ ;  $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$
6.  $f(x, y) = e^{xy}$ ;  $x^3 + y^3 = 16$
7.  $f(x, y, z) = 2x + 2y + z$ ;  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
8.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ;  $x + y + z = 12$
9.  $f(x, y, z) = xyz$ ;  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
10.  $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$ ;  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
11.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ;  $x^4 + y^4 + z^4 = 1$
12.  $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$ ;  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
13.  $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$ ;  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$
14.  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ;  
 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$

15–18 Determine os valores extremos de  $f$  sujeita a ambas as restrições.

15.  $f(x, y, z) = x + 2y$ ;  $x + y + z = 1$ ,  $y^2 + z^2 = 4$
16.  $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$ ;  $x + y - z = 0$ ,  $x^2 + 2z^2 = 1$
17.  $f(x, y, z) = yz + xy$ ;  $xy = 1$ ,  $y^2 + z^2 = 1$
18.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ;  $x - y = 1$ ,  $y^2 - z^2 = 1$

**19–21** Determine os valores extremos de  $f$  na região descrita pela desigualdade.

**19.**  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 4y, \quad x^2 + y^2 \leq 9$

**20.**  $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5, \quad x^2 + y^2 \leq 16$

**21.**  $f(x, y) = e^{-xy}, \quad x^2 + 4y^2 \leq 1$

**22.** Considere o problema de maximizar a função  $f(x, y) = 2x + 3y$  sujeita à restrição  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ .

- (a) Tente usar multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.
- (b)  $f(25, 0)$  dá um valor maior que o obtido na parte (a)?
- (c) Resolva o problema traçando a equação da restrição e diversas curvas de nível de  $f$ .
- (d) Explique por que o método dos multiplicadores de Lagrange falha em resolver o problema.
- (e) Qual é o significado de  $f(9, 4)$ ?

**23.** Considere o problema de minimizar a função  $f(x, y) = x$  na curva  $y^2 + x^4 - x^3 = 0$  (uma piriforme).

- (a) Tente usar multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.
- (b) Mostre que o valor mínimo é  $f(0, 0) = 0$  mas que a condição  $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$  não é satisfeita para nenhum valor de  $\lambda$ .
- (c) Explique por que os multiplicadores de Lagrange falham em encontrar o mínimo neste caso.

**SCA 24.** (a) Se seu sistema de computação algébrica traça o gráfico de curvas definidas implicitamente, use-o para estimar os valores mínimo e máximo de  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$  sujeita à restrição  $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$  por métodos gráficos.

(b) Resolva o problema da parte (a) com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange. Use um SCA para resolver as equações numericamente. Compare sua resposta com a da parte (a).

**25.** A produção total  $P$  de certo produto depende da quantidade  $L$  de trabalho empregado e da quantidade  $K$  de capital investido. Nas Seções 14.1 e 14.3 discutimos como o modelo Cobb-Douglas  $P = bL^\alpha K^{1-\alpha}$  segue a partir de determinadas suposições econômicas, onde  $b$  e  $\alpha$  são constantes positivas e  $\alpha < 1$ . Se o custo por unidade de trabalho for  $m$  e o custo por unidade de capital for  $n$ , e uma companhia puder gastar somente uma quantidade  $p$  de dinheiro como despesa total, então a maximização da produção  $P$  estará sujeita à restrição  $mL + nK = p$ . Mostre que a produção máxima ocorre quando

$$L = \frac{\alpha p}{m} \quad \text{e} \quad K = \frac{(1 - \alpha)p}{n}$$

**26.** Em relação ao Problema 25, suponha agora que a produção seja fixada em  $bL^\alpha K^{1-\alpha} = Q$ , onde  $Q$  é uma constante. Quais valores de  $L$  e  $K$  minimizam a função custo  $C(L, K) = mL + nK$ ?

**27.** Utilize os multiplicadores de Lagrange para demonstrar que o retângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante  $p$ , é um quadrado.

**28.** Use multiplicadores de Lagrange para demonstrar que o triângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante  $p$ , é equilátero.

*Dica:* Utilize a fórmula de Heron para a área:

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

onde  $s = p/2$  e  $x, y, z$  são os comprimentos dos lados.

**29–41** Utilize os multiplicadores de Lagrange para dar uma solução alternativa aos exercícios da Seção 14.7 indicados.

**29.** Exercício 39

**30.** Exercício 40

**31.** Exercício 41

**32.** Exercício 42

**33.** Exercício 43

**34.** Exercício 44

**35.** Exercício 45

**36.** Exercício 46

**37.** Exercício 47

**38.** Exercício 48

**39.** Exercício 49

**40.** Exercício 50

**41.** Exercício 53

**42.** Determine os volumes máximo e mínimo da caixa retangular cuja superfície tem  $1\,500 \text{ cm}^2$  e cuja soma dos comprimentos das arestas é  $200 \text{ cm}$ .

**43.** O plano  $x + y + 2z = 2$  intercepta o parabolóide  $z = x^2 + y^2$  em uma elipse. Determine os pontos dessa elipse que estão mais próximo e mais longe da origem.

**44.** O plano  $4x - 3y + 8z = 5$  intercepta o cone  $z^2 = x^2 + y^2$  em uma elipse.

- (a) Faça os gráficos do cone, do plano e da elipse.
- (b) Use os multiplicadores de Lagrange para achar os pontos mais alto e mais baixo da elipse.

**SCA 45–46** Ache os valores de máximo e mínimo da função  $f$  sujeita às restrições dadas. Utilize um sistema de computação algébrica para resolver o sistema de equações proveniente do uso dos multiplicadores de Lagrange. (Se seu SCA achar somente uma solução, você pode precisar do uso de comandos adicionais.)

**45.**  $f(x, y, z) = ye^{x-z}; \quad 9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36, \quad xy + yz = 1$

**46.**  $f(x, y, z) = x + y + z; \quad x^2 - y^2 = z, \quad x^2 + z^2 = 4$

**47.** (a) Determine o valor máximo de

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

sendo que  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são números positivos e  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = c$ , onde  $c$  é uma constante.

(b) Deduza do item (a) que se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são números positivos, então

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Essa desigualdade diz que a média geométrica de  $n$  números não pode ser maior que a média aritmética deles. Sob que circunstâncias as duas médias são iguais?

**48.** (a) Maximize  $\sum_{i=1}^n x_i y_i$  sujeita às restrições  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$  e  $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$ .

(b) Tome

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum a_j^2}} \quad \text{e} \quad y_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum b_j^2}}$$

para mostrar que

$$\sum a_i b_i \leq \sqrt{\sum a_j^2} \sqrt{\sum b_j^2}$$

para todos os números  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ . Essa desigualdade é conhecida como a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

## PROJETO APLICADO



Cortesia da Orbital Sciences Corporation

## CIÊNCIA DOS FOGUETES

Muitos foguetes, tais como o *Pegasus XL*, usado atualmente para o lançamento de satélites, e o *Saturno V*, que colocou o primeiro homem na Lua, são projetados para usar três estágios em sua subida para o espaço. O primeiro e maior estágio impulsiona o foguete até que seu combustível seja consumido, quando esse estágio é ejetado para decrescer a massa do foguete. O segundo e terceiro estágios, que são menores, funcionam da mesma forma, colocando a carga do foguete em órbita em torno da Terra. (Com esse projeto são necessários pelo menos dois estágios para que o foguete atinja a velocidade necessária, e o uso de três estágios provou oferecer boa relação entre custo e desempenho.) Nosso objetivo aqui é determinar as massas individuais dos três estágios, que foram projetados de forma a minimizar a massa total do foguete e ao mesmo tempo permitir que ele atinja a velocidade desejada.

Para um foguete com um único estágio consumindo combustível a uma taxa constante, a variação na velocidade resultante da aceleração do foguete foi modelada por

$$\Delta V = -c \ln \left( 1 - \frac{(1-S)M_r}{P + M_r} \right)$$

onde  $M_r$  é a massa do propulsor do foguete, incluindo o combustível inicial,  $P$  é a massa da carga,  $S$  é o fator estrutural determinado pelo projeto do foguete (especificamente, é a razão entre a massa do foguete sem combustível e sem carga e a massa do foguete com carga e combustível) e  $c$  é a velocidade (constante) de exaustão relativa do foguete.

Considere agora um foguete de três estágios e carga de massa  $A$ . Vamos supor que as forças externas sejam desprezíveis e que  $c$  e  $S$  permaneçam constantes em cada estágio. Se  $M_i$  é a massa do  $i$ -ésimo estágio, podemos inicialmente considerar que o propulsor do foguete tenha massa  $M_1$  e sua carga tenha massa  $M_2 + M_3 + A$ ; o segundo e terceiro estágios podem ser tratados da mesma forma.

1. Mostre que a velocidade atingida depois que os três estágios são ejetados é dada por

$$v_f = c \left[ \ln \left( \frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{SM_1 + M_2 + M_3 + A} \right) + \ln \left( \frac{M_2 + M_3 + A}{SM_2 + M_3 + A} \right) + \ln \left( \frac{M_3 + A}{SM_3 + A} \right) \right]$$

2. Desejamos minimizar a massa total  $M = M_1 + M_2 + M_3$  do propulsor do foguete sujeita à restrição que a velocidade desejada  $v_f$  do Problema 1 seja atingida. O método dos multiplicadores de Lagrange é apropriado, mas é difícil implementá-lo usando as expressões de que dispomos até aqui. Para simplificarmos, definimos variáveis  $N_i$  de modo que a restrição possa ser expressa como  $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$ . Como é difícil exprimir  $M$  em termos dos  $N_i$ , é desejável usar uma função mais simples, que ao ser minimizada leve também à minimização de  $M$ . Mostre que

$$\begin{aligned} \frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{M_2 + M_3 + A} &= \frac{(1-S)N_1}{1-SN_1} \\ \frac{M_2 + M_3 + A}{M_3 + A} &= \frac{(1-S)N_2}{1-SN_2} \\ \frac{M_3 + A}{A} &= \frac{(1-S)N_3}{1-SN_3} \end{aligned}$$

e conclua que

$$\frac{M + A}{A} = \frac{(1-S)^3 N_1 N_2 N_3}{(1-SN_1)(1-SN_2)(1-SN_3)}$$

3. Verifique se  $\ln((M + A)/A)$  tem os mesmos pontos de mínimo que  $M$ ; utilize os multiplicadores de Lagrange e o resultado do Problema 2 para determinar as expressões para os valores de  $N_i$  onde o mínimo ocorre sujeito à restrição  $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$ . [Dica: Utilize as propriedades dos logaritmos para ajudar na simplificação das expressões.]

4. Determine uma expressão para o valor mínimo de  $M$  como função de  $v_j$ .
5. Se desejarmos colocar um foguete de três estágios em uma órbita 160 km acima da superfície terrestre, a velocidade final necessária é de aproximadamente 28 000 km/h. Suponha que cada estágio seja construído com um fator estrutural  $S = 0,2$  e que a velocidade de exaustão seja  $c = 9\,600$  km/h.
  - (a) Determine a massa total mínima  $M$  do propulsor do foguete como função de  $A$ .
  - (b) Determine a massa de cada estágio como função de  $A$ . (Eles não precisam ter tamanhos iguais!)
6. O mesmo foguete precisaria de uma velocidade final de 39.700 km/h, aproximadamente, para escapar da gravidade terrestre. Determine a massa de cada estágio que minimizaria a massa total do propulsor do foguete e lhe permitiria carregar uma sonda de 200 kg para o espaço.

## PROJETO APLICADO

## OTIMIZAÇÃO DE UMA TURBINA HIDRÁULICA

A Katahdin Paper Company, de Millinocket, no estado de Maine, opera uma usina hidroelétrica no rio Penobscot. A água é bombeada de uma represa para a usina geradora de potência. A taxa pela qual a água flui nas tubulações varia, dependendo de condições externas.

A usina geradora de potência tem três turbinas hidroelétricas diferentes; para cada uma delas, é conhecida a quantidade da potência elétrica gerada em função do fluxo de água que chega à turbina (função de potência da turbina). A água que chega pode ser distribuída em quantidades diferentes entre as turbinas, e nosso objetivo é determinar como programar essa distribuição de água para obter máxima produção de energia total para qualquer vazão.

Usando dados experimentais e a *equação de Bernoulli*, chegou-se ao modelo quadrático mostrado para a saída de potência de cada turbina, com as seguintes vazões de operação permitidas:

$$KW_1 = (-18,89 + 0,1277Q_1 - 4,08 \cdot 10^{-5}Q_1^2)(170 - 1,6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$KW_2 = (-24,51 + 0,1358Q_2 - 4,69 \cdot 10^{-5}Q_2^2)(170 - 1,6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$KW_3 = (-27,02 + 0,1380Q_3 - 3,84 \cdot 10^{-5}Q_3^2)(170 - 1,6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$250 \leq Q_1 \leq 1.110, \quad 250 \leq Q_2 \leq 1.110, \quad 250 \leq Q_3 \leq 1.225$$

onde

$Q_i$  = fluxo pela turbina  $i$  em pés cúbicos por segundo

$KW_i$  = potência gerada pela turbina  $i$  em quilowatts

$Q_T$  = fluxo total pela turbina em pés cúbicos por segundo

1. Se todas as três turbinas estiverem sendo usadas, queremos determinar o fluxo  $Q_i$  em cada turbina que resultará na produção total máxima de energia. Nossas limitações são que o fluxo total precisa ser igual ao fluxo que chega à usina e que para cada turbina o fluxo esteja na faixa permitida. Consequentemente, utilize os multiplicadores de Lagrange para achar os valores de cada fluxo individual (como função de  $Q_T$ ) que maximizem a produção total de energia  $KW_1 + KW_2 + KW_3$  sujeita às restrições  $Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_T$  e restrições de domínio de cada  $Q_i$ .
2. Para que valores de  $Q_T$  seu resultado é válido?
3. Para uma vazão de entrada de 2 500 pés<sup>3</sup>/s, determine a distribuição para as turbinas e verifique (tentando algumas distribuições semelhantes) se seu resultado corresponde realmente a um máximo.
4. Até agora supusemos que as três turbinas estavam em operação. É possível que mais potência possa ser obtida usando somente uma turbina em algumas situações? Faça um gráfico das funções potência e utilize-o para decidir se uma vazão de entrada de 1 000 pés<sup>3</sup>/s deveria ser distribuída para as três turbinas ou concentrada em uma só. (Se você concluir que só uma turbina deverá ser utilizada, responda: qual é ela?) E se a vazão for de somente 600 pés<sup>3</sup>/s?
5. Talvez para alguns níveis de vazão seja vantajoso usar duas turbinas. Se a vazão de chegada for de 1 500 pés<sup>3</sup>/s, quais duas turbinas devem ser utilizadas? Use os multiplicadores de Lagrange para determinar como a vazão deveria ser distribuída entre as duas turbinas para maximizar a energia produzida. Para essa vazão, o uso de duas turbinas é mais eficiente que o emprego das três?
6. Se a vazão de entrada for de 3 400 pés<sup>3</sup>/s, o que você recomendaria para a empresa?

## 14 Revisão

## Verificação de Conceitos

- (a) O que é uma função de duas variáveis?  
(b) Descreva três métodos para visualizar uma função de duas variáveis.
- O que é uma função de três variáveis? Como você pode visualizar tal função?
- O que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$  significa? Como mostrar que esse limite não existe?
- (a) O que significa dizer que  $f$  é contínua em  $(a,b)$ ?  
(b) Se  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ , o que você pode dizer de seu gráfico?
- (a) Escreva as expressões para as derivadas parciais  $f_x(a,b)$  e  $f_y(a,b)$  como limites.  
(b) Como você interpreta  $f_x(a,b)$  e  $f_y(a,b)$  geometricamente? Como as interpreta como taxas de variação?  
(c) Se  $f(x,y)$  é dada por uma fórmula, como calcular  $f_x$  e  $f_y$ ?
- O que o Teorema de Clairaut diz?
- Como achar o plano tangente a cada um dos seguintes tipos de superfície?  
(a) Um gráfico de uma função de duas variáveis,  $z = f(x,y)$   
(b) Uma superfície de nível de uma função de três variáveis,  $F(x,y,z) = k$
- Defina a linearização de  $f$  em  $(a,b)$ . Qual é a correspondente aproximação linear? Qual é a interpretação geométrica da aproximação linear?
- (a) O que significa dizer que  $f$  é diferenciável em  $(a,b)$ ?  
(b) Como usualmente verificamos que  $f$  é diferenciável?
- Se  $z = f(x,y)$ , o que são as diferenciais  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ ?
- Enuncie a Regra da Cadeia para o caso em que  $z = f(x,y)$  e  $x$  e  $y$  são funções de uma variável. E se  $x$  e  $y$  forem funções de duas variáveis?
- Se  $z$  é definido implicitamente como uma função de  $x$  e  $y$  por uma equação da forma  $F(x,y,z) = 0$ , como determinar  $\partial z/\partial x$  e  $\partial z/\partial y$ ?
- (a) Escreva uma expressão limitando a derivada direcional de  $f$  em  $(x_0, y_0)$  na direção do vetor unitário  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ . Como interpretá-la como taxa de variação? Como interpretá-la geometricamente?  
(b) Se  $f$  é diferenciável, escreva uma expressão para  $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$  em termos de  $f_x$  e  $f_y$ .
- (a) Defina o vetor gradiente  $\nabla f$  de uma função  $f$  e duas ou três variáveis.  
(b) Expresse  $D_{\mathbf{u}}f$  em termos de  $\nabla f$ .  
(c) Explique o significado geométrico do gradiente.
- O que as seguintes sentenças significam?  
(a)  $f$  tem um máximo local em  $(a,b)$ .  
(b)  $f$  tem um máximo absoluto em  $(a,b)$ .  
(c)  $f$  tem um mínimo local em  $(a,b)$ .  
(d)  $f$  tem um mínimo absoluto em  $(a,b)$ .  
(e)  $f$  tem um ponto de sela em  $(a,b)$ .
- (a) Se  $f$  tem um máximo local em  $(a,b)$ , o que você pode dizer de suas derivadas parciais em  $(a,b)$ ?  
(b) O que é um ponto crítico de  $f$ ?
- Qual é o Teste da Segunda Derivada?
- (a) O que é um conjunto fechado em  $\mathbb{R}^2$ ? O que é um conjunto limitado?  
(b) Dê o enunciado do Teorema dos Valores Extremos para as funções de duas variáveis.  
(c) Como achar os valores que o Teorema dos Valores Extremos garante existirem?
- Explique como o método dos multiplicadores de Lagrange funciona para determinar os valores extremos de  $f(x,y,z)$  sujeita à restrição  $g(x,y,z) = k$ . E se tivermos uma segunda restrição  $h(x,y,z) = c$ ?

## Teste – Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

- $f_y(a,b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b}$
- Existe uma função  $f$  com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, tais que  $f_x(x,y) = x + y^2$  e  $f_y(x,y) = x - y^2$ .
- $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
- $D_{\mathbf{k}}f(x,y,z) = f_z(x,y,z)$
- Se  $f(x,y) \rightarrow L$  quando  $(x,y) \rightarrow (a,b)$  ao longo de toda reta que passa por  $(a,b)$ , então  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ .
- Se  $f_x(a,b)$  e  $f_y(a,b)$  existem, então  $f$  é diferenciável em  $(a,b)$ .
- Se  $f$  tem um mínimo local em  $(a,b)$  e  $f$  é diferenciável em  $(a,b)$ , então  $\nabla f(a,b) = \mathbf{0}$ .
- Se  $f$  é uma função, então  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,5)} f(x,y) = f(2,5)$
- Se  $f(x,y) = \ln y$ , então  $\nabla f(x,y) = 1/y$
- Se  $(2,1)$  é um ponto crítico de  $f$ e  $f_{xx}(2,1)f_{yy}(2,1) < [f_{xy}(2,1)]^2$  então  $f$  tem um ponto de sela em  $(2,1)$ .
- Se  $f(x,y) = \sin x + \sin y$ , então  $-\sqrt{2} \leq D_{\mathbf{u}}f(x,y) \leq \sqrt{2}$ .
- Se  $f(x,y)$  tem dois máximos locais, então  $f$  tem um mínimo local.

**Exercícios**

**1-2** Determine e esboce o domínio da função.

1.  $f(x, y) = \ln(x + y + 1)$
2.  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x^2}$

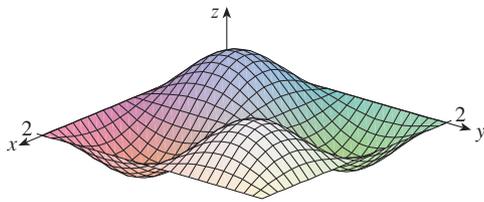
**3-4** Esboce o gráfico da função.

3.  $f(x, y) = 1 - y^2$
4.  $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$

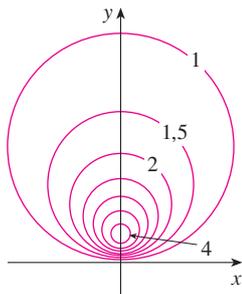
**5-6** Esboce várias curvas de nível da função.

5.  $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$
6.  $f(x, y) = e^x + y$

7. Faça um esboço de um mapa de contorno da função cujo gráfico está mostrado.



8. Um mapa de contorno de uma função  $f$  é apresentado. Use-o para fazer um esboço do gráfico de  $f$ .



**9-10** Calcule o limite ou mostre que ele não existe.

9.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$
10.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

11. Uma placa de metal está situada no plano  $xy$  e ocupa o retângulo  $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 8$ , onde  $x$  e  $y$  são medidos em metros. A temperatura no ponto  $(x, y)$  do plano é  $T(x, y)$ , onde  $T$  é medido em graus Celsius. Temperaturas em pontos igualmente espaçados foram medidas e registradas na tabela.

$x \backslash y$	0	2	4	6	8
0	30	38	45	51	55
2	52	56	60	62	61
4	78	74	72	68	66
6	98	87	80	75	71
8	96	90	86	80	75
10	92	92	91	87	78

- (a) Estime o valor das derivadas parciais  $T_x(6, 4)$  e  $T_y(6, 4)$ . Quais são as unidades?
- (b) Estime o valor de  $D_u T(6, 4)$ , onde  $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$ . Interprete o resultado.
- (c) Estime o valor de  $T_{xy}(6, 4)$ .

12. Determine uma aproximação linear para a função temperatura  $T(x, y)$  do Exercício 11 perto do ponto  $(6, 4)$ . Em seguida use-a para estimar a temperatura no ponto  $(5, 3, 8)$ .

**13-17** Determine as derivadas parciais de primeira ordem.

13.  $f(x, y) = (5y^3 + 2x^2y)^8$
14.  $g(u, v) = \frac{u + 2v}{u^2 + v^2}$
15.  $F(\alpha, \beta) = a^2 \ln(a^2 + \beta^2)$
16.  $G(x, y, z) = e^{xz} \sin(y/z)$
17.  $S(u, v, w) = u \arctg(v\sqrt{w})$

18. A velocidade da propagação da onda sonora no oceano é uma função da temperatura, da salinidade e da pressão. Foi modelada como

$$C = 1449,2 + 4,6T - 0,055T^2 + 0,00029T^3 + (1,34 - 0,01T)(S - 35) + 0,016D$$

onde  $C$  é a velocidade do som (em metros por segundo),  $T$  é a temperatura (em graus Celsius),  $S$  é a salinidade (concentração de sal em partes por milhar, o que significa o número de gramas de sólidos dissolvidos por 1 000 g de água) e  $D$  é a profundidade abaixo da superfície do oceano (em metros). Calcule  $\partial C/\partial T, \partial C/\partial S, \partial C/\partial D$ , quando  $T = 10$  °C,  $S = 35$  partes por milhar e  $D = 100$  m. Explique o significado físico dessas derivadas parciais.

**19-22** Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem de  $f$ .

19.  $f(x, y) = 4x^3 - xy^2$
20.  $z = xe^{-2y}$
21.  $f(x, y, z) = x^k y^l z^m$
22.  $v = r \cos(s + 2t)$

23. Se  $z = xy + xe^{y/x}$ , mostre que  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$ .
24. Se  $z = \sen(x + \sen t)$ , mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

**25-29** Encontre uma equação (a) do plano tangente e (b) da reta normal à superfície dada no ponto especificado.

25.  $z = 3x^2 - y^2 + 2x, (1, -2, 1)$
26.  $z = e^x \cos y, (0, 0, 1)$
27.  $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 3, (2, -1, 1)$
28.  $xy + yz + zx = 3, (1, 1, 1)$
29.  $\sen(xyz) = x + 2y + 3z, (2, -1, 0)$

-  30. Use um computador para traçar o gráfico da superfície  $z = x^2 + y^4$  e de seu plano tangente e reta normal em  $(1, 1, 2)$  na mesma tela. Escolha o domínio e ponto de vista para obter uma boa visão dos três objetos.
31. Encontre os pontos no hiperboloide  $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$  onde o plano tangente é paralelo ao plano  $2x + 2y + z = 5$ .
32. Encontre  $du$  se  $u = \ln(1 + se^{2t})$ .
33. Determine a aproximação linear da função  $f(x, y, z) = x^3\sqrt{y^2 + z^2}$  no ponto  $(2, 3, 4)$  e use-a para aproximar o número  $(1,98)^3\sqrt{(3,01)^2 + (3,97)^2}$ .
34. Os dois catetos de um triângulo retângulo medem 5 m e 12 m com um erro possível nas medidas de, no máximo, 0,2 cm em cada. Utilize diferenciais para estimar o erro máximo no cálculo (a) da área do triângulo e (b) do comprimento da hipotenusa.
35. Se  $u = x^2y^3 + z^4$ , onde  $x = p + 3p^2$ ,  $y = pe^p$  e  $z = p \sin p$ , use a Regra da Cadeia para encontrar  $dudp$ .
36. Se  $v = x^2 \sin y + ye^{xy}$ , onde  $x = s + 2t$  e  $y = st$ , use a Regra da Cadeia para encontrar  $\partial v/\partial s$  e  $\partial v/\partial t$  quando  $s = 0$  e  $t = 1$ .
37. Suponha que  $z = f(x, y)$ , onde  $x = g(s, t)$ ,  $y = h(s, t)$ ,  $g(1, 2) = 3$ ,  $g_s(1, 2) = -1$ ,  $g_t(1, 2) = 4$ ,  $h(1, 2) = 6$ ,  $h_s(1, 2) = -5$ ,  $h_t(1, 2) = 10$ ,  $f_x(3, 6) = 7$  e  $f_y(3, 6) = 8$ . Determine  $\partial z/\partial s$  e  $\partial z/\partial t$  quando  $s = 1$  e  $t = 2$ .
38. Utilize o diagrama em árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso onde  $w = f(t, u, v)$ ,  $t = t(p, q, r, s)$ ,  $u = u(p, q, r, s)$  e  $v = v(p, q, r, s)$ , todas diferenciáveis.
39. Se  $z = y + f(x^2 - y^2)$ , onde  $f$  é diferenciável, mostre que

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

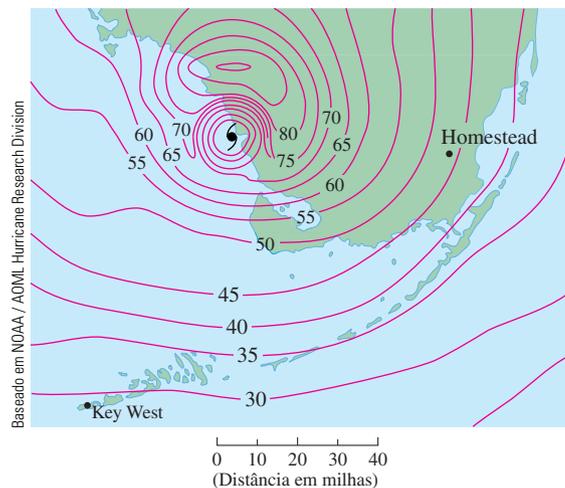
40. O comprimento  $x$  de um lado de um triângulo está aumentando a uma taxa de 6 cm/s, o comprimento  $y$  de um outro lado está diminuindo a uma taxa de 4 cm/s e o ângulo  $\theta$  entre eles está aumentando a uma taxa de 0,05 radiano/s. Quão rapidamente está variando a área do triângulo quando  $x = 80$  cm,  $y = 100$  cm e  $\theta = \pi/6$ ?
41. Se  $z = f(u, v)$ , onde  $u = xy$ ,  $v = y/x$  e  $f$  têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, mostre que

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4uv \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2v \frac{\partial z}{\partial v}$$

42. Se  $\cos(xyz) = 1 + x^2y^2 + z^2$ , determine  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .
43. Determine o gradiente da função  $f(x, y, z) = x^2e^{yz}$ .
44. (a) Quando a derivada direcional de  $f$  é máxima?  
 (b) Quando é mínima?  
 (c) Quando é 0?  
 (d) Quando é a metade de seu valor máximo?

45–46 Determine a derivada direcional de  $f$  no ponto dado na direção indicada.

45.  $f(x, y) = x^2e^{-y}$ ,  $(-2, 0)$ , na direção do ponto  $(2, -3)$
46.  $f(x, y, z) = x^2y + x\sqrt{1+z}$ ,  $(1, 2, 3)$ , na direção de  $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
47. Determine a taxa máxima de variação de  $f(x, y) = x^2y + \sqrt{y}$  no ponto  $(2, 1)$ . Em que direção isso ocorre?
48. Determine a direção na qual  $f(x, y, z) = ze^{xy}$  aumenta mais rápido no ponto  $(0, 1, 2)$ . Qual é a taxa máxima de aumento?
49. O mapa de contorno mostra a velocidade do vento em nós durante o furacão Andrew em 24 de agosto de 1992. Utilize-o para estimar o valor da derivada direcional da velocidade do vento em Homestead, Flórida, na direção do olho do furacão.



50. Determine as equações paramétricas da reta tangente no ponto  $(-2, 2, 4)$  à curva de intersecção da superfície  $z = 2x^2 - y^2$  com o plano  $z = 4$ .
- 51–54 Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela da função. Se você tiver um programa de computador para desenhar em três dimensões, trace o gráfico da função usando um ponto de vista e domínio conveniente para mostrar os aspectos importantes da função.
51.  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$
52.  $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$
53.  $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$
54.  $f(x, y) = (x^2 + y)e^{y^2}$
- 55–56 Determine os valores máximo e mínimo absolutos de  $f$  no conjunto  $D$ .
55.  $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$ ;  $D$  é a região triangular fechada do plano  $xy$  com vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 6)$  e  $(6, 0)$
56.  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$ ;  $D$  é o disco  $x^2 + y^2 \leq 4$
-  57. Utilize o gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximo e mínimo e os pontos de sela de  $f(x, y) = x^3 - 3x + y^4 - 2y^2$ . Em seguida, use o cálculo para determinar esses valores de modo preciso.

58. Use uma calculadora gráfica ou um computador (método de Newton ou sistema de computação algébrica) para determinar os pontos críticos de  $f(x, y) = 12 + 10y - 2x^2 - 8xy - y^4$  com precisão de três casas decimais. Em seguida, classifique os pontos críticos e determine o ponto mais alto do gráfico.

59–62 Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo de  $f$  sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

59.  $f(x, y) = x^2y; \quad x^2 + y^2 = 1$

60.  $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$

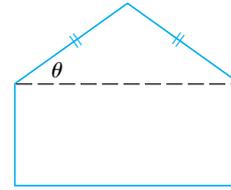
61.  $f(x, y, z) = xyz; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3$

62.  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2;$   
 $x + y + z = 1, x - y + 2z = 2$

63. Determine os pontos da superfície  $xy^2z^3 = 2$  que estão mais próximos da origem.
64. Um pacote com o formato de uma caixa retangular pode ser enviado pelo correio como encomenda postal se a soma de seu comprimento e cintura (perímetro da secção transversal ortogonal ao comprimento) for de, no máximo, 108 pol. Determine as

dimensões do pacote de maior volume que pode ser enviado como encomenda postal.

65. Um pentágono é formado colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo, como mostrado na figura. Se o pentágono tem perímetro  $P$  fixo, determine os comprimentos dos lados do pentágono que maximiza sua área.



66. Uma partícula de massa  $m$  se move sobre uma superfície  $z = f(x, y)$ . Sejam  $x = x(t), y = y(t)$  as coordenadas  $x$  e  $y$  da partícula no instante  $t$ .
- (a) Determine o vetor velocidade  $\mathbf{v}$  e a energia cinética  $K = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2$  da partícula.
- (b) Determine o vetor aceleração  $\mathbf{a}$ .
- (c) Sejam  $z = x^2 + y^2$  e  $x(t) = t \cos t, y(t) = t \sin t$ . Determine o vetor velocidade, a energia cinética e o vetor aceleração.

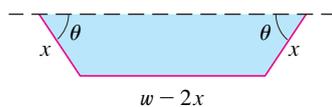
## Problemas Quentes

- Um retângulo com comprimento  $L$  e largura  $W$  é cortado em quatro retângulos menores por duas retas paralelas aos lados. Determine os valores máximo e mínimo da soma dos quadrados das áreas dos retângulos menores.
- Biólogos marinhos determinaram que, quando um tubarão detecta a presença de sangue na água, ele nada na direção em que a concentração de sangue aumenta mais rapidamente. Com base em certos testes na água do mar, sabe-se que a concentração de sangue (em partes por milhão) em um ponto  $P(x, y)$  na superfície é de aproximadamente

$$C(x, y) = e^{-(x^2+2y^2)/10^4}$$

onde  $x$  e  $y$  são medidos em metros em coordenadas cartesianas com a fonte do sangue como origem.

- Identifique as curvas de nível da função concentração e esboce vários membros dessa família, junto com a trajetória que o tubarão deve percorrer para chegar à fonte.
  - Suponha que um tubarão esteja no ponto  $(x_0, y_0)$  quando detecta a presença de sangue na água. Determine a equação da trajetória do tubarão escrevendo e resolvendo uma equação diferencial.
- Uma longa folha de metal galvanizado de espessura  $w$  polegadas deve ser dobrada em uma forma simétrica com três lados planos para fazer uma calha. A secção transversal é mostrada na figura.
    - Determine as dimensões para permitir a máxima vazão, ou seja, determine as dimensões que fornecem a maior área da secção transversal.
    - Você acharia melhor dobrar a folha de metal em uma calha com secção transversal semicircular do que em uma secção transversal de três lados?



- Para que valores do número  $r$  a função

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{(x + y + z)^r}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

é contínua em  $\mathbb{R}^3$ ?

5. Suponha que  $f$  seja uma função diferenciável de uma variável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície  $z = xf(y/x)$  se interceptam em um ponto comum.
6. (a) O método de Newton para aproximar a raiz de uma equação  $f(x) = 0$  (veja a Seção 4.8, no Volume I) pode ser adaptado para aproximar a solução de um sistema de equações  $f(x, y) = 0$  e  $g(x, y) = 0$ . As superfícies  $z = f(x, y)$  e  $z = g(x, y)$  se interceptam em uma curva que intercepta o plano  $xy$  no ponto  $(r, s)$ , que é a solução deste sistema. Se uma aproximação inicial  $(x_1, y_1)$  estiver próxima deste ponto, então os planos tangentes às superfícies em  $(x_1, y_1)$  se interceptam em uma reta que intercepta o plano  $xy$  em um ponto  $(x_2, y_2)$ , que deveria estar mais próximo de  $(r, s)$ . (Compare com a Figura 2 na Seção 4.8.) Mostre que

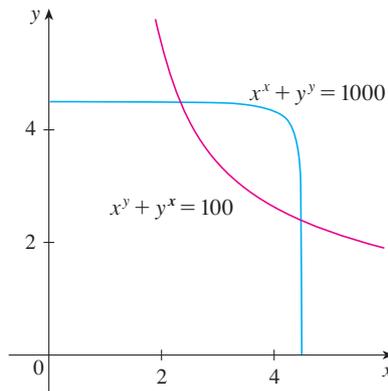
$$x_2 = x_1 - \frac{f g_y - f_y g}{f_x g_y - f_y g_x} \quad \text{e} \quad y_2 = y_1 - \frac{f_x g - f g_x}{f_x g_y - f_y g_x}$$

onde  $f, g$  e suas derivadas parciais são calculadas em  $(x_1, y_1)$ . Se continuarmos esse processo, obteremos uma sequência de aproximações sucessivas  $(x_n, y_n)$ .

- (b) Foi Thomas Simpson (1710-1761) quem formulou o método de Newton como o conhecemos hoje e quem o estendeu para as funções de duas variáveis como no item (a). O exemplo que ele deu para ilustrar o método foi resolver o sistema de equações

$$x^x + y^y = 1000 \quad x^y + y^x = 100$$

Em outras palavras, ele descobriu os pontos de intersecção das curvas da figura. Utilize o método da parte (a) para determinar as coordenadas dos pontos de intersecção com precisão de seis casas decimais.



7. Se a elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  circunda a circunferência  $x^2 + y^2 = 2y$ , quais são os valores de  $a$  e  $b$  que minimizam a área da elipse?
8. Entre todos os planos que são tangentes à superfície  $xy^2z^2 = 1$ , determine os que estão mais longe da origem.