

# Sumário

Prefácio	xi
Testes de Verificação	xxi
Uma Apresentação do Cálculo	xxvii

---

## 9 Equações Diferenciais 525

---

9.1	Modelagem com Equações Diferenciais	526
9.2	Campos de Direções e Método de Euler	531
9.3	Equações Separáveis	538
	Projeto Aplicado ■ Quanto Rapidamente um Tanque Esvazia?	546
	Projeto Aplicado ■ O Que É Mais Rápido, Subir ou Descer?	547
9.4	Modelos para Crescimento Populacional	548
9.5	Equações Lineares	557
9.6	Sistemas Predador-Presa	563
	Revisão	569
	Problemas Quentes	572



## 10 Equações Paramétricas e Coordenadas Polares 575

---

10.1	Curvas Definidas por Equações Paramétricas	576
	Projeto de Laboratório ■ Rolando Círculos ao Redor de Círculos	583
10.2	Cálculo com Curvas Parametrizadas	584
	Projeto de Laboratório ■ Curvas de Bézier	591
10.3	Coordenadas Polares	592
	Projeto de Laboratório ■ Famílias de Curvas Polares	601
10.4	Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares	602
10.5	Seções Cônicas	606
10.6	Seções Cônicas em Coordenadas Polares	613
	Revisão	619
	Problemas Quentes	621



## 11 Sequências e Séries Infinitas 623

---

11.1	Sequências	624
	Projeto de Laboratório ■ Sequências Logísticas	635
11.2	Séries	636
11.3	O Teste da Integral e Estimativas de Somas	645
11.4	Os Testes de Comparação	652
11.5	Séries Alternadas	657
11.6	Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz	661
11.7	Estratégia para Testes de Séries	667



11.8	Séries de Potência	669
11.9	Representações de Funções como Séries de Potências	674
11.10	Séries de Taylor e Maclaurin	679
	Projeto de Laboratório ■ Um Limite Elusivo	691
	Projeto Escrito ■ Como Newton Descobriu a Série Binomial	691
11.11	Aplicações dos Polinômios de Taylor	692
	Projeto Aplicado ■ Radiação Proveniente das Estrelas	700
	Revisão	701
	Problemas Quentes	703

## 12 Vetores e a Geometria do Espaço 707

12.1	Sistemas de Coordenadas Tridimensionais	708
12.2	Vetores	713
12.3	O Produto Escalar	721
12.4	O Produto Vetorial	727
	Projeto de Descoberta ■ A Geometria de um Tetraedro	734
12.5	Equações de Retas e Planos	735
	Projeto de Laboratório ■ Colocando 3D em Perspectiva	743
12.6	Cilindros e Superfícies Quádricas	744
	Revisão	750
	Problemas Quentes	752



## 13 Funções Vetoriais 755

13.1	Funções Vetoriais e Curvas Espaciais	756
13.2	Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais	763
13.3	Comprimento de Arco e Curvatura	768
13.4	Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração	776
	Projeto Aplicado ■ Leis de Kepler	785
	Revisão	786
	Problemas Quentes	789



## 14 Derivadas Parciais 791

14.1	Funções de Várias Variáveis	792
14.2	Limites e Continuidade	804
14.3	Derivadas Parciais	811
14.4	Planos Tangentes e Aproximações Lineares	823
14.5	A Regra da Cadeia	831
14.6	Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente	839
14.7	Valores Máximo e Mínimo	850
	Projeto Aplicado ■ Projeto de uma Caçamba	858
	Projeto de Descoberta ■ Aproximações Quadráticas e Pontos Críticos	859
14.8	Multiplicadores de Lagrange	860
	Projeto Aplicado ■ Ciência dos Foguetes	866
	Projeto Aplicado ■ Otimização de uma Turbina Hidráulica	867
	Revisão	868
	Problemas Quentes	871





## 15 Integrais Múltiplas 873

- 15.1 Integrais Duplas sobre Retângulos 874
  - 15.2 Integrais Iteradas 882
  - 15.3 Integrais Duplas sobre Regiões Gerais 887
  - 15.4 Integrais Duplas em Coordenadas Polares 895
  - 15.5 Aplicações de Integrais Duplas 901
  - 15.6 Área de Superfície 910
  - 15.7 Integrais Triplas 913
    - Projeto de Descoberta ■ Volumes de Hiperesferas 922
  - 15.8 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas 922
    - Projeto de Laboratório ■ A Intersecção de Três Cilindros 926
  - 15.9 Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas 927
    - Projeto Aplicado ■ Corrida na Rampa 933
  - 15.10 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas 933
    - Revisão 941
- Problemas Quentes 944



## 16 Cálculo Vetorial 947

- 16.1 Campos Vetoriais 948
  - 16.2 Integrais de Linha 954
  - 16.3 O Teorema Fundamental das Integrais de Linha 963
  - 16.4 Teorema de Green 971
  - 16.5 Rotacional e Divergente 977
  - 16.6 Superfícies Parametrizadas e suas Áreas 983
  - 16.7 Integrais de Superfície 993
  - 16.8 Teorema de Stokes 1003
    - Projeto Aplicado ■ Três Homens e Dois Teoremas 1007
  - 16.9 O Teorema do Divergente 1008
  - 16.10 Resumo 1013
    - Revisão 1014
- Problemas Quentes 1016



## 17 Equações Diferenciais de Segunda Ordem 1019

- 17.1 Equações Lineares de Segunda Ordem 1020
- 17.2 Equações Lineares Não Homogêneas 1026
- 17.3 Aplicações de Equações Diferenciais de Segunda Ordem 1032
- 17.4 Soluções em Séries 1039
  - Revisão 1043

## Apêndices A1

- A Números, Desigualdades e Valores Absolutos A2
- B Geometria Analítica e Retas A9
- C Gráficos de Equações de Segundo Grau A14
- D Trigonometria A21
- E Notação de Somatória (Ou Notação Sigma) A30
- F Demonstrações dos Teoremas A35

<b>G</b>	O Logaritmo Definido como uma Integral	A44
<b>H</b>	Números Complexos	A51
<b>I</b>	Respostas para os Exercícios Ímpares	A58

## Índice Remissivo I1

---

### Volume I

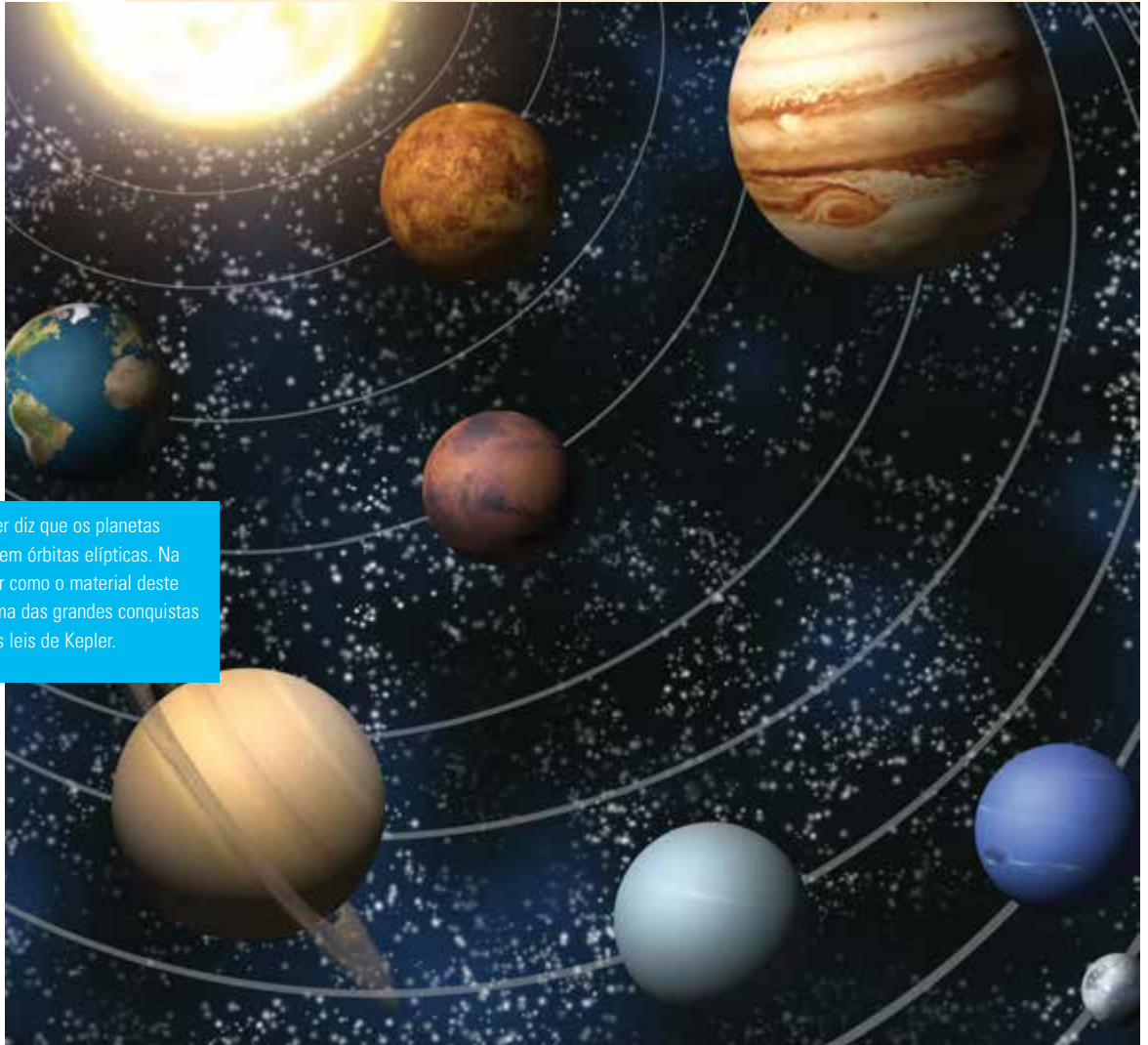
---

<b>Capítulo 1</b>	Funções e Modelos
<b>Capítulo 2</b>	Limites e Derivadas
<b>Capítulo 3</b>	Regras de Derivação
<b>Capítulo 4</b>	Aplicações de Derivação
<b>Capítulo 5</b>	Integrais
<b>Capítulo 6</b>	Aplicações de Integração
<b>Capítulo 7</b>	Técnicas de Integração
<b>Capítulo 8</b>	Mais Aplicações de Integração

# 13

## Funções Vetoriais

A Primeira Lei de Kepler diz que os planetas giram em torno do Sol em órbitas elípticas. Na Seção 13.4 você vai ver como o material deste capítulo é usado em uma das grandes conquistas do cálculo: provando as leis de Kepler.



Christos Georgiou/Shutterstock

As funções que usamos até agora foram funções a valores reais. Agora estudaremos funções cujos valores são vetores, pois estas são necessárias para descrever curvas e superfícies no espaço. Usaremos funções a valores vetoriais também para descrever o movimento de objetos no espaço. Em particular, as usaremos para deduzir as leis de Kepler para o movimento planetário.

## 13.1 Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

Em geral, uma função é uma regra que associa a cada elemento de seu domínio um elemento de sua imagem. Uma **função vetorial**, ou **função a valores vetoriais**, é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. Estamos particularmente interessados em funções vetoriais  $\mathbf{r}$  cujos valores são vetores tridimensionais. Isso significa que, para todo número  $t$  no domínio de  $\mathbf{r}$  existe um único vetor de  $V_3$  denotado por  $\mathbf{r}(t)$ . Se  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $h(t)$  são as componentes do vetor  $\mathbf{r}(t)$ , então  $f$ ,  $g$  e  $h$  são funções a valores reais chamadas **funções componentes** de  $\mathbf{r}$  e podemos escrever

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Usamos a letra  $t$  para denotar a variável independente porque ela representa o tempo na maioria das aplicações de funções vetoriais.

**EXEMPLO 1** Se

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^3, \ln(3 - t), \sqrt{t} \rangle$$

então, as funções componentes são

$$f(t) = t^3 \quad g(t) = \ln(3 - t) \quad h(t) = \sqrt{t}$$

Pela convenção usual, o domínio de  $\mathbf{r}$  é constituído por todos os valores de  $t$  para os quais a expressão  $\mathbf{r}(t)$  está definida. As expressões  $t^3$ ,  $\ln(3 - t)$  e  $\sqrt{t}$  são definidas quando  $3 - t > 0$  e  $t \geq 0$ . Portanto, o domínio de  $\mathbf{r}$  é o intervalo  $[0, 3)$ .

O **limite** de uma função vetorial  $\mathbf{r}$  é definido tomando-se os limites de suas funções componentes como a seguir.

Se  $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ , essa definição equivale a dizer que o comprimento, a direção e o sentido do vetor  $\mathbf{r}(t)$  se aproximam do comprimento, da direção e do sentido do vetor  $\mathbf{L}$ .

**1** Se  $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ , então

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right\rangle$$

desde que os limites das funções componentes existam.

Da mesma forma, poderíamos ter usado uma definição usando o  $\varepsilon$ - $\delta$  (veja o Exercício 51). Os limites de funções vetoriais obedecem às mesmas regras que os limites de funções reais (veja o Exercício 49).

**EXEMPLO 2** Determine  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t)$ , onde  $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\mathbf{i} + te^{-t}\mathbf{j} + \frac{\sin t}{t}\mathbf{k}$ .

**SOLUÇÃO** De acordo com a Definição 1, o limite de  $\mathbf{r}$  é o vetor cujas componentes são os limites das funções componentes de  $\mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t) &= \left[ \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t^3) \right] \mathbf{i} + \left[ \lim_{t \rightarrow 0} te^{-t} \right] \mathbf{j} + \left[ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \right] \mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} + \mathbf{k} \quad (\text{Pela Equação 3.3.2}) \end{aligned}$$

Uma função vetorial  $\mathbf{r}$  é **contínua em  $a$**  se

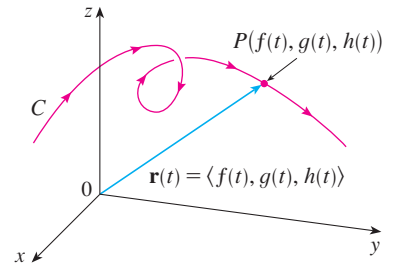
$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

Em vista da Definição 1, vemos que  $\mathbf{r}$  é contínua em  $a$  se e somente se suas funções componentes  $f$ ,  $g$  e  $h$  forem contínuas em  $a$ .

As curvas espaciais e as funções vetoriais contínuas estão intimamente relacionadas. Suponha que  $f$ ,  $g$  e  $h$  sejam funções reais contínuas em um intervalo  $I$ . Em seguida, o conjunto  $C$  de todos os pontos  $(x, y, z)$  no espaço, onde

**2**  $x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t)$

e  $t$  varia no intervalo  $I$ , é chamado **curva espacial**. As equações em **2** são denominadas **equações paramétricas de  $C$**  e  $t$  é conhecido como **parâmetro**. Podemos pensar em  $C$  como tendo sido traçada pelo movimento de uma partícula cuja posição no instante  $t$  é  $(f(t), g(t), h(t))$ . Se considerarmos agora a função vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ , então  $\mathbf{r}(t)$  é o vetor posição do ponto de  $P(f(t), g(t), h(t))$  em  $C$ . Assim, qualquer função vetorial contínua  $\mathbf{r}$  define uma curva espacial  $C$  que é traçada pela ponta do vetor em movimento  $\mathbf{r}(t)$ , como se mostra na Figura 1.



**FIGURA 1**  
 $C$  é traçada pelo movimento da ponta do vetor de posição  $\mathbf{r}(t)$ .

**TEC** Visual 13.1A mostra diversas curvas serem traçadas por vetores posição, incluindo aquelas nas Figuras 1 e 2.

**EXEMPLO 3** Descreva a curva definida pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t \rangle$$

**SOLUÇÃO** As equações paramétricas correspondentes são

$$x = 1 + t \quad y = 2 + 5t \quad z = -1 + 6t$$

que reconhecemos, a partir da Equação 12.5.2, como as equações paramétricas de uma reta passando pelo ponto  $(1, 2, -1)$  e paralela ao vetor  $\langle 1, 5, 6 \rangle$ . Como alternativa, podemos observar que a função pode ser escrita como  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ , quando  $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 2, -1 \rangle$  e  $\mathbf{v} = \langle 1, 5, 6 \rangle$ , e esta é a equação vetorial da reta dada pela Equação 12.5.1.

Curvas planas também podem ser representadas utilizando-se notação vetorial. Por exemplo, a curva determinada pelas equações paramétricas  $x = t^2 - 2t$  e  $y = t + 1$  (veja o Exemplo 1, na Seção 10.1) poderia também ser descrita pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 2t, t + 1 \rangle = (t^2 - 2t)\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j}$$

onde  $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$  e  $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ .

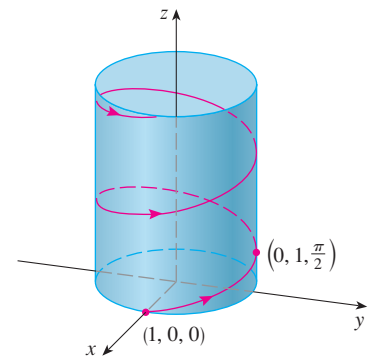
**EXEMPLO 4** Esboce a curva cuja equação vetorial é dada por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

**SOLUÇÃO** As equações paramétricas para essa curva são

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = t$$

Uma vez que  $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ , a curva deve situar-se no cilindro circular  $x^2 + y^2 = 1$ . O ponto  $(x, y, z)$  está diretamente acima do ponto  $(x, y, 0)$ , que se move para a esquerda em torno do círculo  $x^2 + y^2 = 1$  no plano  $xy$ . (A projeção da curva para o plano  $xy$  tem equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, 0 \rangle$ . Veja o Exemplo 2 na Seção 10.1.) Como  $z = t$  a curva gira para cima ao redor do cilindro quando  $t$  aumenta. A curva, mostrada na Figura 2, é chamada **hélice**.



**FIGURA 2**

A forma de saca-rolha da hélice circular do Exemplo 4 é a mesma das molas. Elas também aparecem no modelo do DNA (ácido desoxirribonucleico, material genético de células vivas). Em 1953, James Watson e Francis Crick mostraram que a estrutura da molécula de DNA é de duas hélices circulares paralelas interligadas, como na Figura 3.

Nos Exemplos 3 e 4 demos as equações vetoriais das curvas e pedimos uma descrição geométrica ou esboço delas. Nos dois exemplos a seguir, daremos uma descrição geométrica da curva e pediremos para encontrar equações paramétricas para ela.



**FIGURA 3**  
Uma hélice dupla

**EXEMPLO 5** Determine uma equação vetorial e as equações paramétricas para o segmento de reta ligando o ponto  $P(1, 3, -2)$  ao ponto  $Q(2, -1, 3)$ .

**SOLUÇÃO** Na Seção 12.5 encontramos uma equação vetorial para o segmento de reta que une a extremidade do vetor  $\mathbf{r}_0$  à extremidade do vetor  $\mathbf{r}_1$ :

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

A Figura 4 mostra o segmento de linha  $PQ$  no Exemplo 5

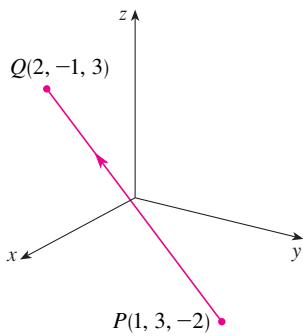


FIGURA 4

(Veja a Equação 12.5.4.) Aqui tomamos  $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 3, -2 \rangle$  e  $\mathbf{r}_1 = \langle 2, -1, 3 \rangle$  para obter uma equação vetorial do segmento de linha de  $P$  para  $Q$ :

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 1, 3, -2 \rangle + t\langle 2, -1, 3 \rangle \quad 0 \leq t \leq 1$$

ou

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 3 - 4t, -2 + 5t \rangle \quad 0 \leq t \leq 1$$

As equações paramétricas correspondentes são

$$x = 1 + t \quad y = 3 - 4t \quad z = -2 + 5t \quad 0 \leq t \leq 1$$

**EXEMPLO 6** Determine uma equação vetorial que represente a curva obtida pela interseção do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  com o plano  $y + z = 2$ .

**SOLUÇÃO** A Figura 5 mostra como o plano intercepta o cilindro, e a Figura 6 mostra a curva de interseção  $C$ , que é uma elipse.

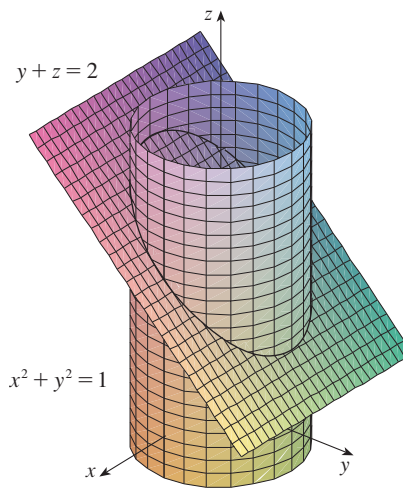


FIGURA 5

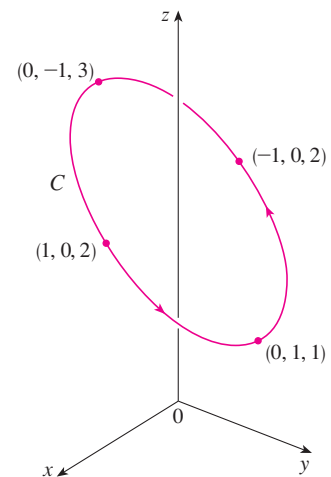


FIGURA 6

A projeção de  $C$  para o plano  $xy$  é o círculo  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ . Então, sabemos do Exemplo 2 na Seção 10.1 que podemos escrever

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Da equação do plano, temos

$$z = 2 - y = 2 - \sin t$$

Deste modo, podemos escrever as equações paramétricas para  $C$  como

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = 2 - \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

A equação vetorial correspondente é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + (2 - \sin t) \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Essa equação é chamada de *parametrização* da curva  $C$ . As setas na Figura 6 indicam o sentido em que a curva  $C$  é percorrida quando o valor do parâmetro  $t$  aumenta.

### Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

As curvas espaciais são inerentemente mais difíceis de desenhar que as curvas planas. Para uma representação mais precisa precisamos utilizar a tecnologia. Por exemplo, a Figura 7 mostra o gráfico gerado por computador da curva com equações paramétricas



$$x = (4 + \text{sen } 20t) \cos t \quad y = (4 + \text{sen } 20t) \text{sen } t \quad z = \cos 20t$$

Essa curva é denominada **espiral toroidal**, pois está sobre um toro. Outra curva interessante, o **nó de trevo ou trifólio**, com equações

$$x = (2 + \cos 1,5t) \cos t \quad y = (2 + \cos 1,5t) \text{sen } t \quad z = \text{sen } 1,5t$$

está ilustrada na Figura 8. Seria muito difícil traçar qualquer uma dessas curvas à mão.

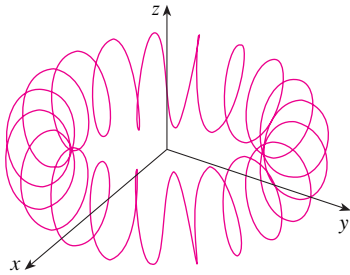


FIGURA 7 Espiral toroidal

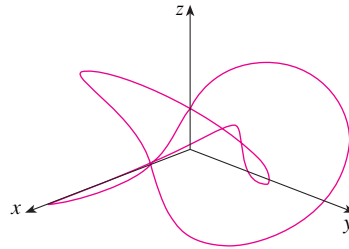


FIGURA 8 Nó de trevo

Mesmo com o auxílio de computador no desenho de curvas espaciais, as ilusões ópticas tornam difícil entender a forma real da curva. (Isso é especialmente verdadeiro na Figura 8. Veja o Exercício 50.) O exemplo seguinte mostra como lidar com este problema.

**EXEMPLO 7** Utilize um computador para traçar a curva com equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ . Essa curva é chamada **cúbica retorcida**.

**SOLUÇÃO** Começaremos traçando, com o auxílio do computador, a curva com equações paramétricas  $x = t, y = t^2, z = t^3$  para  $-2 \leq t \leq 2$ . O resultado é mostrado na Figura 9(a), mas é difícil ver a verdadeira natureza da curva através desse único gráfico. A maioria dos programas de computador para desenhar em três dimensões permite, em vez de utilizar os eixos coordenados, colocar uma caixa envolvendo a curva ou superfície. Quando olhamos a mesma curva na caixa na Figura 9(b), conseguimos visualizar melhor sua forma. Podemos ver que a curva se eleva do canto inferior da caixa para o canto superior mais próximo de nós, torcendo-se à medida que sobe.

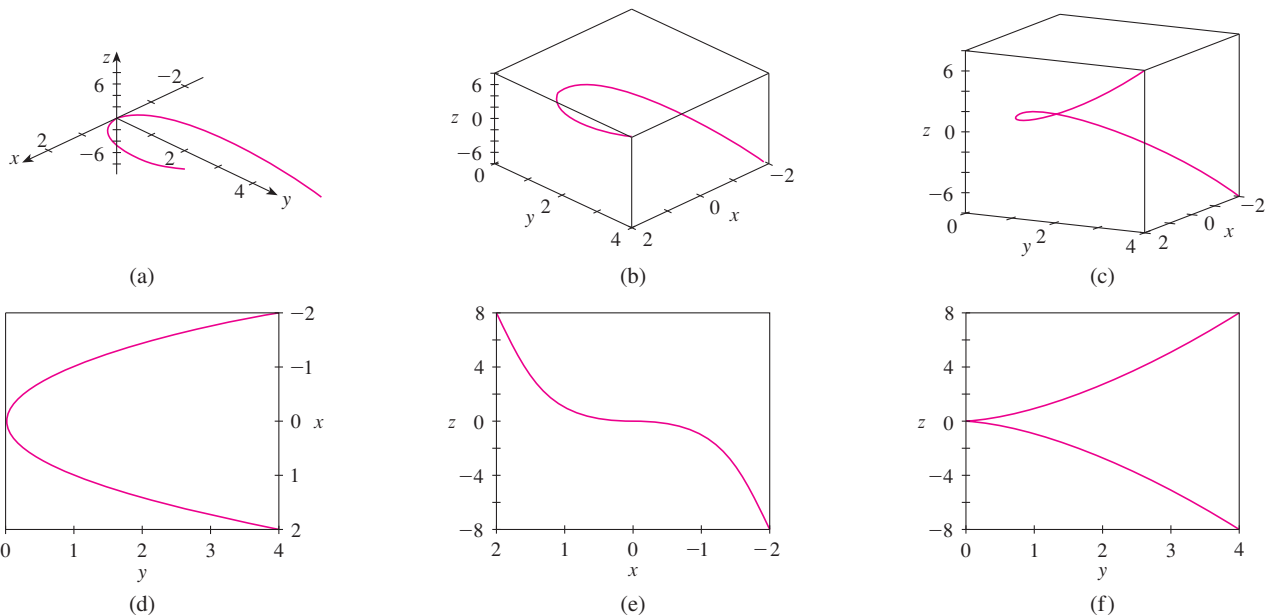


FIGURA 9 Vistas da cúbica torcida

**TEC** Em *Visual 13.1b* você pode girar a caixa na Figura 9 para ver a curva a partir de qualquer ponto de vista.

Temos uma ideia melhor da curva quando a observamos de diversos ângulos. A parte (c) apresenta o resultado da rotação da caixa para fornecer outro ponto de vista. As partes (d), (e) e (f) mostram o que vemos quando olhamos diretamente através de uma face da caixa. Em particular, a parte (d) mostra a vista de cima da caixa. A curva obtida é a projeção da curva no plano  $xy$ , a parábola  $y = x^2$ . A parte (e) exibe a projeção no plano  $xz$  a curva cúbica  $z = x^3$ . Fica claro o porquê de essa curva ser chamada cúbica retorcida.

Outra maneira de visualizar uma curva espacial é desenhá-la em uma superfície. Por exemplo, a cúbica retorcida do Exemplo 7 está no cilindro parabólico  $y = x^2$ . (Elimine o parâmetro das duas primeiras equações paramétricas,  $x = t$  e  $y = t^2$ .) A Figura 10 mostra o cilindro e a cúbica retorcida sobrepostos, tornando mais fácil enxergar que a curva caminha da origem para cima, sobre o cilindro. Usamos essa mesma técnica no Exemplo 4 para visualizar a hélice circular (veja a Figura 2).

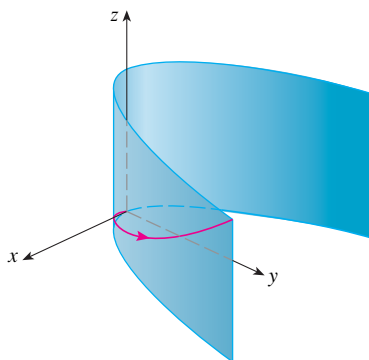


FIGURA 10

Um terceiro processo de visualização para a cúbica retorcida é constatar que a curva também está contida na superfície cilíndrica  $z = x^3$ . Então podemos ver a curva como a interseção das duas superfícies cilíndricas  $y = x^2$  e  $z = x^3$ . (Veja a Figura 11.)

**TEC** *Visual 13.1C* mostra como as curvas surgem como interseções de superfícies.

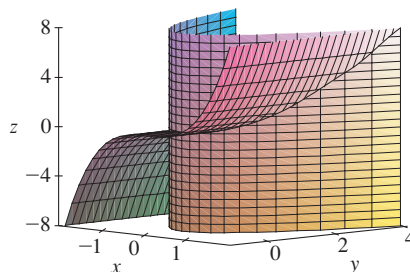
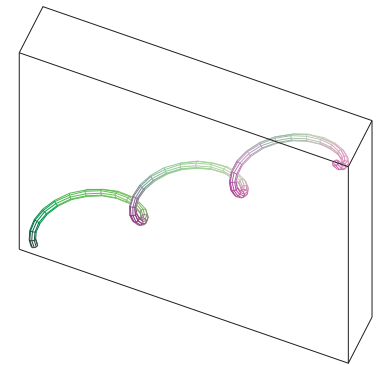
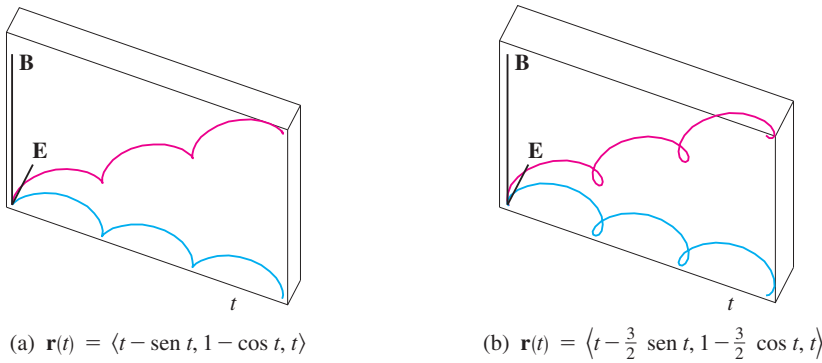


FIGURA 11

Alguns sistemas de computação algébrica nos proporcionam uma figura bem mais clara de uma curva espacial envolvendo-a em um tubo. Esse recurso nos permite ver se uma parte de uma curva passa pela frente ou por trás de outra parte dessa curva. Por exemplo, a Figura 13 mostra a curva da Figura 12(b), obtida como resultado do comando `tubeplot` no Maple.

Vimos que uma curva espacial interessante, a hélice, aparece no modelo do DNA. Outro exemplo notável de uma curva espacial na ciência é a trajetória de uma partícula de carga positiva em campos elétricos e magnéticos ortogonalmente orientados  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Dependendo da velocidade inicial dada à partícula na origem, a trajetória da partícula ou é uma curva espacial, cuja projeção sobre o plano horizontal é a cicloide estudada na Seção 10.1 [Figura 12(a)], ou é uma curva cuja projeção é a trocoide investigada no Exercício 40 da Seção 10.1 [Figura 12 (b).]



**FIGURA 12**  
Movimento de partícula carregada em campos elétrico e magnético orientados ortogonalmente

**FIGURA 13**

Para mais detalhes sobre a física envolvida e animações das trajetórias das partículas, consulte os seguintes sites:

- [www.phy.ntnu.edu.tw/java/emField/emField.html](http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/emField/emField.html)
- [www.physics.ucla.edu/plasma-exp/Beam/](http://www.physics.ucla.edu/plasma-exp/Beam/)

### 13.1 Exercícios

**1–2** Determine o domínio das funções vetoriais.

1.  $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{4 - t^2}, e^{-3t}, \ln(t + 1) \rangle$
2.  $\mathbf{r}(t) = \frac{t - 2}{t + 2} \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \ln(9 - t^2) \mathbf{k}$

**3–6** Calcule os limites.

3.  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( e^{-3t} \mathbf{i} + \frac{t^2}{\sin^2 t} \mathbf{j} + \cos 2t \mathbf{k} \right)$
4.  $\lim_{t \rightarrow 1} \left( \frac{t^2 - t}{t - 1} \mathbf{i} + \sqrt{t + 8} \mathbf{j} + \frac{\sin \pi t}{\ln t} \mathbf{k} \right)$
5.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1 + t^2}{1 - t^2}, \operatorname{tg}^{-1} t, \frac{1 - e^{-2t}}{t} \right\rangle$
6.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle te^{-t}, \frac{t^3 + t}{2t^3 - 1}, t \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right\rangle$

**7–14** Esboce o gráfico da curva cuja equação vetorial é dada. Indique com setas a direção na qual o parâmetro  $t$  cresce.

7.  $\mathbf{r}(t) = \langle \sin t, t \rangle$
8.  $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2 \rangle$
9.  $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2 - t, 2t \rangle$
10.  $\mathbf{r}(t) = \langle \sin \pi t, t, \cos \pi t \rangle$
11.  $\mathbf{r}(t) = \langle 1, \cos t, 2 \sin t \rangle$
12.  $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$
13.  $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^4 \mathbf{j} + t^6 \mathbf{k}$
14.  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + \sin t \mathbf{k}$

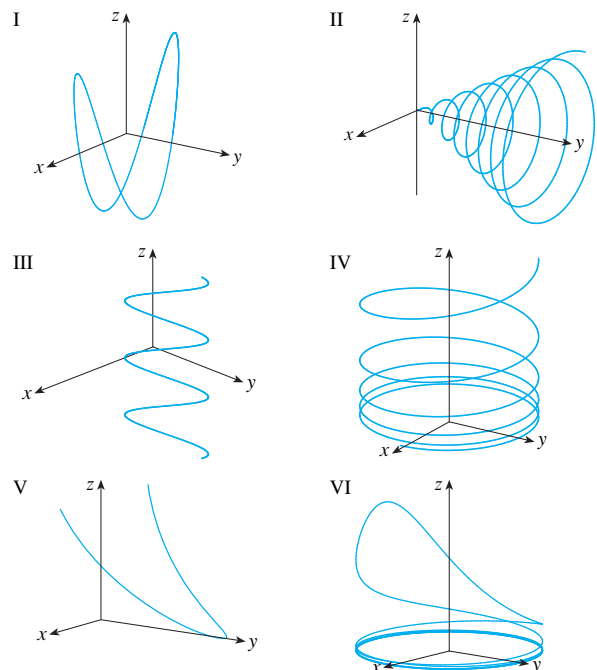
**15–16** Desenhe as projeções da curva nos três planos coordenados. Use essas projeções para ajudá-lo a esboçar a curva.

15.  $\mathbf{r}(t) = \langle t, \sin t, 2 \cos t \rangle$
16.  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t, t^2 \rangle$

**17–20** Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga  $P$  e  $Q$ .


17.  $P(0, 0, 0), Q(1, 2, 3)$
18.  $P(1, 0, 1), Q(2, 3, 1)$
19.  $P(0, -1, 1), Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$
20.  $P(a, b, c), Q(u, v, w)$

**21–26** Faça uma correspondência entre as equações paramétricas e os gráficos (identificados com números de I–VI). Justifique sua escolha.





21.  $x = t \cos t$ ,  $y = t$ ,  $z = t \sin t$ ,  $t \geq 0$   
 22.  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 1/(1 + t^2)$   
 23.  $x = t$ ,  $y = 1/(1 + t^2)$ ,  $z = t^2$   
 24.  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = \cos 2t$   
 25.  $x = \cos 8t$ ,  $y = \sin 8t$ ,  $z = e^{0,8t}$ ,  $t \geq 0$   
 26.  $x = \cos^2 t$ ,  $y = \sin^2 t$ ,  $z = t$

27. Mostre que a curva com equações paramétricas  $x = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$ ,  $z = t$  está no cone  $z^2 = x^2 + y^2$ , e use esse fato para esboçar a curva.  
 28. Mostre que a curva com equações paramétricas  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$ ,  $z = \sin^2 t$  é a curva de intersecção das superfícies  $z = x^2$  e  $x^2 + y^2 = 1$ . Use esse fato para esboçar a curva.  
 29. Em quais pontos a curva  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + (2t - t^2) \mathbf{k}$  intercepta o parabolóide  $z = x^2 + y^2$ ?  
 30. Em quais pontos a hélice  $\mathbf{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, t \rangle$  intercepta a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ ?

 31–35 Utilize um computador para traçar a curva da equação vetorial dada. Escolha o domínio do parâmetro e ponto de vista de forma a revelar a verdadeira natureza da curva.

31.  $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t \sin 2t, \sin t \sin 2t, \cos 2t \rangle$   
 32.  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \ln t, t \rangle$   
 33.  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t \sin t, t \cos t \rangle$   
 34.  $\mathbf{r}(t) = \langle t, e^t, \cos t \rangle$   
 35.  $\mathbf{r}(t) = \langle \cos 2t, \cos 3t, \cos 4t \rangle$

 36. Trace a curva com equações paramétricas  $x = \sin t$ ,  $y = \sin 2t$ ,  $z = \cos 4t$ . Explique sua forma representando por gráficos suas projeções para os três planos coordenados.


 37. Trace a curva com equações paramétricas

$$x = (1 + \cos 16t) \cos t$$

$$y = (1 + \cos 16t) \sin t$$

$$z = 1 + \cos 16t.$$

Explique a aparência da curva, mostrando que ela está em um cone.

 38. Trace a curva com equações paramétricas

$$x = \sqrt{1 - 0,25 \cos^2 10t} \cos t$$

$$y = \sqrt{1 - 0,25 \cos^2 10t} \sin t$$

$$z = 0,5 \cos 10t$$


Explique a aparência da curva, mostrando que ela está em uma esfera.


39. Mostre que a curva com equações paramétricas  $x = t^2$ ,  $y = 1 - 3t$ ,  $z = 1 + t^3$  passa pelos pontos  $(1, 4, 0)$  e  $(9, -8, 28)$ , mas não passa pelo ponto  $(4, 7, -6)$ .

40–44 Determine a função vetorial que representa a curva obtida pela intersecção das duas superfícies.

40. O cilindro de  $x^2 + y^2 = 4$  e a superfície  $z = xy$   
 41. O cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  e o plano  $z = 1 + y$   
 42. O parabolóide  $z = 4x^2 + y^2$  e o cilindro parabólico  $y = x^2$   
 43. A hipérbole  $z = x^2 - y^2$  e o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$

44. O semi-elipsoide  $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ ,  $y \geq 0$ , e o cilindro  $x^2 + z^2 = 1$

 45. Tente esboçar à mão a curva obtida pela intersecção do cilindro circular  $x^2 + y^2 = 4$  com o cilindro parabólico  $z = x^2$ . Determine então as equações paramétricas dessa curva e utilize um computador para desenhá-la.

 46. Tente esboçar à mão a curva obtida pela intersecção do cilindro circular  $y = x^2$  e a metade superior do elipsoide  $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$ . Determine então as equações paramétricas dessa curva e utilize um computador para desenhá-la.

47. Se dois objetos viajam pelo espaço ao longo de duas curvas diferentes, é sempre importante saber se eles vão colidir. (Será que um míssil atingiu seu alvo em movimento? Vão se colidir duas aeronaves?) As curvas podem se interceptar, mas precisamos saber se os objetos estarão na mesma posição *no mesmo instante*. Suponha que as trajetórias de duas partículas sejam dadas pelas seguintes funções vetoriais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t^2, 7t - 12, t^2 \rangle \quad \mathbf{r}_2(t) = \langle 4t - 3, t^2, 5t - 6 \rangle$$

para  $t \geq 0$ . As partículas colidem?

48. Duas partículas se movem ao longo das curvas espaciais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \quad \mathbf{r}_2(t) = \langle 1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t \rangle$$

As partículas colidem? Suas trajetórias se interceptam?

49. Suponha que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sejam funções vetoriais que possuem limites quando  $t \rightarrow a$  e seja  $c$  uma constante. Demonstre as seguintes propriedades de limites.

(a)  $\lim_{t \rightarrow a} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{u}(t) + \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{v}(t)$

(b)  $\lim_{t \rightarrow a} c\mathbf{u}(t) = c \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{u}(t)$

(c)  $\lim_{t \rightarrow a} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{u}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{v}(t)$

(d)  $\lim_{t \rightarrow a} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{u}(t) \times \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{v}(t)$


50. A visão do nó de trevo apresentada na Figura 8 é correta, mas não muito reveladora. Use as equações paramétricas

$$x = (2 + \cos 1,5t) \cos t$$

$$y = (2 + \cos 1,5t) \sin t$$

$$z = \sin 1,5t$$

para esboçar à mão a curva vista de cima, deixando pequenas falhas para indicar os pontos onde a curva se sobrepõe. Comece mostrando que sua projeção sobre o plano  $xy$  tem coordenadas polares  $r = 2 + \cos 1,5t$  e  $\theta = t$ , de forma que  $r$  varia entre 1 e 3. Mostre então que  $z$  tem um valor máximo e um mínimo quando a projeção está entre  $r = 1$  e  $r = 3$ .

 Quando você terminar o esboço à mão livre, utilize um computador para traçar a curva com o observador vendo de cima e compare-a ao seu desenho. Trace a curva sob outros pontos de vista. Você alcançará melhor resultado se traçar um tubo de raio 0,2 em torno da curva. (Utilize o comando `tubeplot` do Maple ou o `curvetube` ou comando `Tube` no Mathematica.)

51. Mostre que  $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$  se e somente se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um número  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } 0 < |t - a| < \delta \quad \text{então } |\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}| < \varepsilon$$

## 13.2 Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais

Mais adiante neste capítulo, utilizaremos as funções vetoriais para descrever o movimento dos planetas e outros objetos no espaço. Vamos nos preparar aqui para desenvolver o cálculo com funções vetoriais.

### Derivadas

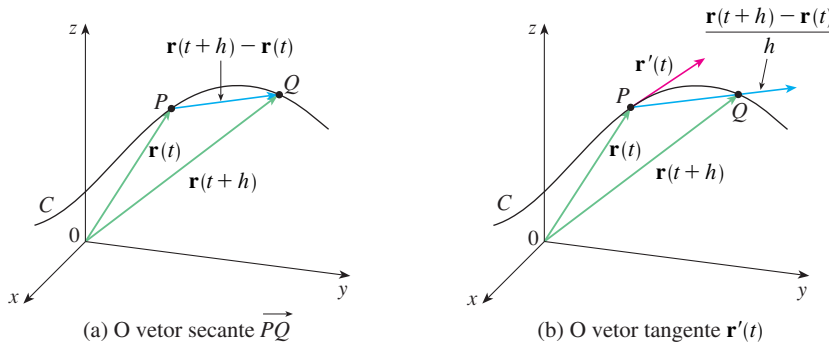
A **derivada**  $\mathbf{r}'$  de uma função vetorial  $\mathbf{r}$  é definida do mesmo modo como foi feito para as funções a valores reais:

1

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

se este limite existir. O significado geométrico dessa definição está representado na Figura 1. Se os pontos  $P$  e  $Q$  têm vetores posição  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{r}(t+h)$ , então  $\overrightarrow{PQ}$  representa o vetor  $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ , que pode ser visto como um vetor secante. Se  $h > 0$ , o múltiplo escalar  $(1/h)(\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t))$  tem o mesmo sentido que  $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ . Quando  $h \rightarrow 0$ , parece que esse vetor se aproxima de um vetor que está sobre a reta tangente. Por essa razão, o vetor  $\mathbf{r}'(t)$  é chamado o **vetor tangente** à curva definida por  $\mathbf{r}$  no ponto  $P$ , desde que  $\mathbf{r}'(t)$  exista e  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ . A **reta tangente** a  $C$  em  $P$  é definida como a reta que passa por  $P$  e é paralela ao vetor  $\mathbf{r}'(t)$ . Teremos ocasião de considerar o **vetor tangente unitário**, dado por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$



**TEC** Visual 13.2 mostra uma animação da Figura 1.

FIGURA 1

O teorema seguinte fornece um método conveniente para calcular a derivada de uma função vetorial  $\mathbf{r}$  por derivação de cada componente de  $\mathbf{r}$ .

**2 Teorema** Se  $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ , onde  $f, g$  e  $h$  são funções diferenciáveis, então

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

### DEMONSTRAÇÃO

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\langle f(t + \Delta t), g(t + \Delta t), h(t + \Delta t) \rangle - \langle f(t), g(t), h(t) \rangle] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle \\
&= \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle
\end{aligned}$$

**EXEMPLO 1**

- (a) Determine a derivada de  $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\mathbf{i} + te^{-t}\mathbf{j} + \sin 2t\mathbf{k}$ .  
 (b) Encontre o vetor tangente unitário no ponto onde  $t = 0$ .

**SOLUÇÃO**

- (a) De acordo com o Teorema 2, derivando cada componente de  $\mathbf{r}$ , obtemos:

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{i} + (1 - t)e^{-t}\mathbf{j} + 2\cos 2t\mathbf{k}$$

- (b) Uma vez que  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$  e  $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ , o vetor unitário da tangente no ponto  $(1, 0, 0)$  é

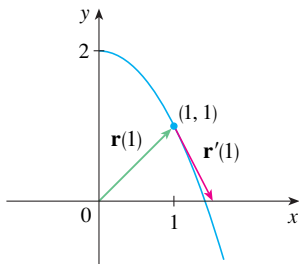
$$\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$$

- EXEMPLO 2** Para a curva  $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j}$ , determine  $\mathbf{r}'(t)$  e desenhe o vetor posição  $\mathbf{r}(1)$  e o vetor tangente  $\mathbf{r}'(1)$ .

**SOLUÇÃO** Temos

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{i} - \mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}'(1) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

A curva é plana, e a eliminação do parâmetro das equações  $x = \sqrt{t}$ ,  $y = 2 - t$  nos dá  $y = 2 - x^2$ ,  $x \geq 0$ . Na Figura 2, desenhamos o vetor posição  $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$  começando na origem e o vetor tangente  $\mathbf{r}'(1)$  começando no ponto correspondente  $(1, 1)$ .

**FIGURA 2**

Observe na Figura 2 os pontos de vetor tangente na direção de aumentar. (Veja o Exercício 56.)

- EXEMPLO 3** Determine as equações paramétricas para a reta tangente à hélice com equações paramétricas

$$x = 2 \cos t \quad y = \sin t \quad z = t$$

no ponto  $(0, 1, \pi/2)$ .

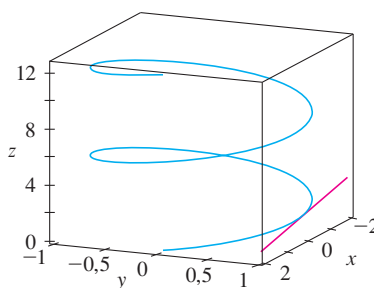
**SOLUÇÃO** A equação vetorial da hélice é  $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, \sin t, t \rangle$ , de modo que

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -2 \sin t, \cos t, 1 \rangle$$

O valor do parâmetro correspondente ao ponto  $(0, 1, \pi/2)$  é  $t = \pi/2$ , e o vetor tangente é  $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -2, 0, 1 \rangle$ . A reta tangente passa por  $(0, 1, \pi/2)$  e é paralela ao vetor  $\langle -2, 0, 1 \rangle$ , então, pela equação 12.5.2, suas equações paramétricas são

$$x = -2t \quad y = 1 \quad z = \frac{\pi}{2} + t$$

A hélice e a reta tangente do Exemplo 3 estão na Figura 3.

**FIGURA 3**

Do mesmo modo que para as funções reais, a **segunda derivada** da função vetorial  $\mathbf{r}$  é a derivada de  $\mathbf{r}'$ , ou seja,  $\mathbf{r}'' = (\mathbf{r}')'$ . Por exemplo, a segunda derivada da função do Exemplo 3 é

$$\mathbf{r}''(t) = \langle -2 \cos t, -\sin t, 0 \rangle$$

Na Seção 13.4 veremos como  $\mathbf{r}'(t)$  e  $\mathbf{r}''(t)$  podem ser interpretados como os vetores velocidade e aceleração de uma partícula se movendo pelo espaço com vetor posição  $\mathbf{r}(t)$  no instante  $t$ .

## Regras de Derivação

O próximo teorema mostra que as fórmulas de derivação para funções reais têm suas equivalentes para as funções vetoriais.

**3 Teorema** Suponha que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sejam funções vetoriais diferenciáveis,  $c$  um escalar e  $f$  uma função real. Então,

1.  $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$
2.  $\frac{d}{dt} [c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$
3.  $\frac{d}{dt} [f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$
4.  $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$
5.  $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$
6.  $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$  (Regra da Cadeia)

Esse teorema pode ser demonstrado usando-se diretamente a Definição 1 ou empregando-se o Teorema 2 e as fórmulas de derivação correspondentes para as funções a valores reais. A demonstração da Fórmula 4 está a seguir; as fórmulas restantes são deixadas como exercícios.

**DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA 4** Sejam

$$\mathbf{u}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle \quad \mathbf{v}(t) = \langle g_1(t), g_2(t), g_3(t) \rangle$$

Então 
$$\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t) = \sum_{i=1}^3 f_i(t)g_i(t)$$

e as regras usuais de derivação do produto fornecem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 f_i(t)g_i(t) = \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} [f_i(t)g_i(t)] \\ &= \sum_{i=1}^3 [f_i'(t)g_i(t) + f_i(t)g_i'(t)] \\ &= \sum_{i=1}^3 f_i'(t)g_i(t) + \sum_{i=1}^3 f_i(t)g_i'(t) \\ &= \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) \end{aligned}$$

**EXEMPLO 4** Mostre que, se  $|\mathbf{r}(t)| = c$  (uma constante), então  $\mathbf{r}'(t)$  é ortogonal a  $\mathbf{r}(t)$  para todo  $t$ .

**SOLUÇÃO** Uma vez que

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$$

e  $c^2$  é uma constante, da Fórmula 4 do Teorema 3 vem

$$0 = \frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t)$$

Assim,  $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$ , que diz que  $\mathbf{r}'(t)$  é ortogonal a  $\mathbf{r}(t)$ .

Geometricamente, esse resultado indica que, se a curva está em uma esfera com o centro na origem, então o vetor tangente  $\mathbf{r}'(t)$  é sempre perpendicular ao vetor posição  $\mathbf{r}(t)$ . ■

### Integrais

A **integral definida** de uma função vetorial contínua  $\mathbf{r}(t)$  pode ser definida da mesma forma que para a função real, exceto que a integral resulta em um vetor. Mas podemos expressar a integral de  $\mathbf{r}$  como a integral de suas funções componentes  $f$ ,  $g$  e  $h$  como segue. (Utilizamos a notação do Capítulo 5, no Volume I.)

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{r}(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}(t_i^*) \Delta t \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \sum_{i=1}^n f(t_i^*) \Delta t \right) \mathbf{i} + \left( \sum_{i=1}^n g(t_i^*) \Delta t \right) \mathbf{j} + \left( \sum_{i=1}^n h(t_i^*) \Delta t \right) \mathbf{k} \right] \end{aligned}$$

e também

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left( \int_a^b f(t) dt \right) \mathbf{i} + \left( \int_a^b g(t) dt \right) \mathbf{j} + \left( \int_a^b h(t) dt \right) \mathbf{k}$$

Isso mostra que podemos calcular a integral da função vetorial integrando cada componente dela.

Podemos estender o Teorema Fundamental do Cálculo para as funções vetoriais contínuas como segue:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{R}(t) \Big|_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

onde  $\mathbf{R}$  é uma primitiva de  $\mathbf{r}$ , ou seja,  $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$ . Usaremos a notação  $\int \mathbf{r}(t) dt$  para as integrais indefinidas (primitivas).

**EXEMPLO 5** Se  $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$ , então

$$\begin{aligned} \int \mathbf{r}(t) dt &= \left( \int 2 \cos t dt \right) \mathbf{i} + \left( \int \sin t dt \right) \mathbf{j} + \left( \int 2t dt \right) \mathbf{k} \\ &= 2 \sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k} + \mathbf{C} \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{C}$  é um vetor constante de integração, e

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t) dt = [2 \sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}]_0^{\pi/2} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{\pi^2}{4} \mathbf{k} \quad \blacksquare$$

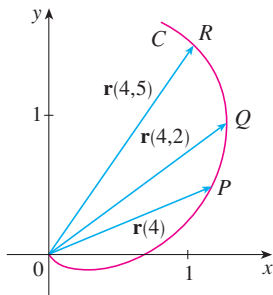


## 13.2 Exercícios

1. A figura mostra uma curva  $C$  dada pela função vetorial  $\mathbf{r}(t)$ .  
 (a) Desenhe os vetores  $\mathbf{r}(4,5) - \mathbf{r}(4)$  e  $\mathbf{r}(4,2) - \mathbf{r}(4)$ .  
 (b) Esboce os vetores

$$\frac{\mathbf{r}(4,5) - \mathbf{r}(4)}{0,5} \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{r}(4,2) - \mathbf{r}(4)}{0,2}$$

- (c) Escreva a expressão para  $\mathbf{r}'(4)$  e para seu vetor tangente unitário  $\mathbf{T}(4)$ .  
 (d) Desenhe o vetor  $\mathbf{T}(4)$ .



2. (a) Faça um esboço grande da curva descrita pela função vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t \rangle$ ,  $0 \leq t \leq 2$ , e desenhe os vetores  $\mathbf{r}(1)$ ,  $\mathbf{r}(1,1)$  e  $\mathbf{r}(1,1) - \mathbf{r}(1)$ .  
 (b) Desenhe o vetor  $\mathbf{r}'(1)$  começando em  $(1, 1)$  e o compare com o vetor

$$\frac{\mathbf{r}(1,1) - \mathbf{r}(1)}{0,1}$$

Explique por que esses vetores estão tão próximos um do outro tanto em módulo quanto em direção e sentido.

### 3-8

- (a) Esboce o gráfico da curva plana com a equação vetorial dada.  
 (b) Encontre  $\mathbf{r}'(t)$ .  
 (c) Esboce o vetor posição  $\mathbf{r}(t)$  e o vetor tangente  $\mathbf{r}'(t)$  para o valor dado de  $t$ .
- $\mathbf{r}(t) = \langle t - 2, t^2 + 1 \rangle$ ,  $t = -1$
  - $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3 \rangle$ ,  $t = 1$
  - $\mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j}$ ,  $t = \pi/4$
  - $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j}$ ,  $t = 0$
  - $\mathbf{r}(t) = e^{2t} \mathbf{i} + e^t \mathbf{j}$ ,  $t = 0$
  - $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t) \mathbf{i} + (2 + \sin t) \mathbf{j}$ ,  $t = \pi/6$

### 9-16 Determine a derivada da função vetorial.

- $\mathbf{r}(t) = \langle t \sin t, t^2, t \cos 2t \rangle$
- $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{tg} t, \sec t, 1/t^2 \rangle$
- $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + e^{4t} \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{1+t} \mathbf{i} + \frac{t}{1+t} \mathbf{j} + \frac{t^2}{1+t} \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = e^{t^2} \mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln(1+3t) \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = at \cos 3t \mathbf{i} + b \sin^3 t \mathbf{j} + c \cos^3 t \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t \mathbf{b} + t^2 \mathbf{c}$

16.  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + t \mathbf{c})$

17-20 Determine o vetor tangente unitário  $\mathbf{T}(t)$  no ponto com valor de parâmetro dado  $t$ .

- $\mathbf{r}(t) = \langle te^{-t}, 2 \arctg t, 2e^t \rangle$ ,  $t = 0$
- $\mathbf{r}(t) = \langle t^3 + 3t, t^2 + 1, 3t + 4 \rangle$ ,  $t = 1$
- $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + 3t \mathbf{j} + 2 \sin 2t \mathbf{k}$ ,  $t = 0$
- $\mathbf{r}(t) = \sin^2 t \mathbf{i} + \cos^2 t \mathbf{j} + \operatorname{tg}^2 t \mathbf{k}$ ,  $t = \pi/4$

21. Se  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ , encontre  $\mathbf{r}'(t)$ ,  $\mathbf{T}(1)$ ,  $\mathbf{r}''(t)$  e  $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$ .

22. Se  $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t} \rangle$ , encontre  $\mathbf{T}(0)$ ,  $\mathbf{r}''(0)$  e  $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$ .

23-26 Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.

- $x = 1 + 2\sqrt{t}$ ,  $y = t^3 - t$ ,  $z = t^3 + t$ ;  $(3, 0, 2)$
- $x = e^t$ ,  $y = te^t$ ,  $z = te^{t^2}$ ;  $(1, 0, 0)$
- $x = e^{-t} \cos t$ ,  $y = e^{-t} \sin t$ ,  $z = e^{-t}$ ;  $(1, 0, 1)$
- $x = \sqrt{t^2 + 3}$ ;  $y = \ln(t^2 + 3)$ ;  $z = t$ ;  $(2, \ln 4, 1)$

27. Encontre uma equação para a reta tangente à curva de intersecção dos cilindros  $x^2 + y^2 = 25$  e  $y^2 + z^2 = 20$  no ponto  $(3, 4, 2)$ .

28. Encontre o ponto na curva de  $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 2 \sin t, e^t \rangle$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , em que a reta tangente é paralela ao plano  $\sqrt{3}x + y = 1$ .

SCA 29-31 Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado. Ilustre traçando o gráfico da curva e da reta tangente em uma mesma tela.

- $x = t$ ,  $y = e^{-t}$ ,  $z = 2t - t^2$ ;  $(0, 1, 0)$
- $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $z = 4 \cos 2t$ ;  $(\sqrt{3}, 1, 2)$
- $x = t \cos t$ ,  $y = t$ ,  $z = t \sin t$ ;  $(-\pi, \pi, 0)$

32. (a) Determine o ponto de intersecção das retas tangentes à curva  $\mathbf{r}(t) = \langle \sin \pi t, 2 \sin \pi t, \cos \pi t \rangle$  nos pontos  $t = 0$  e  $t = 0,5$ .



(b) Ilustre traçando o gráfico da curva e ambas as tangentes.

33. As curvas de  $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$  e  $\mathbf{r}_2(t) = \langle \sin t, \sin 2t, t \rangle$  se interceptam na origem. Determine o ângulo de intersecção destas com precisão de um grau.

34. Em que ponto as curvas  $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 1 - t, 3 + t^2 \rangle$  e  $\mathbf{r}_2(s) = \langle 3 - s, s - 2, s^2 \rangle$  se cruzam? Determine o ângulo de intersecção destas com precisão de um grau.

35-40 Calcule a integral.

35.  $\int_0^2 (t \mathbf{i} - t^3 \mathbf{j} + 3t^5 \mathbf{k}) dt$

36.  $\int_0^1 \left( \frac{4}{1+t^2} \mathbf{j} + \frac{2t}{1+t^2} \mathbf{k} \right) dt$

37.  $\int_0^{\pi/2} (3 \sin^2 t \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \cos^2 t \mathbf{j} + 2 \sin t \cos t \mathbf{k}) dt$

38.  $\int_1^2 (t^2 \mathbf{i} + t\sqrt{t-1} \mathbf{j} + t \sin \pi t \mathbf{k}) dt$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em [www.stewartcalculus.com](http://www.stewartcalculus.com)

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

39.  $\int (e^t \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + \ln t \mathbf{k}) dt$

40.  $\int (\cos \pi t \mathbf{i} + \sin \pi t \mathbf{j} + t \mathbf{k}) dt$

41. Encontre  $\mathbf{r}(t)$  se  $\mathbf{r}'(t) = 2t \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + \sqrt{t} \mathbf{k}$  e  $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ .42. Encontre  $\mathbf{r}(t)$  se  $\mathbf{r}'(t) = t \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + te^t \mathbf{k}$  e  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

43. Demonstre a Fórmula 1 do Teorema 3.

44. Demonstre a Fórmula 3 do Teorema 3.

45. Demonstre a Fórmula 5 do Teorema 3.

46. Demonstre a Fórmula 6 do Teorema 3.

47. Se  $\mathbf{u}(t) = \langle \sin t, \cos t, t \rangle$  e  $\mathbf{v}(t) = \langle t, \cos t, \sin t \rangle$ , utilize a Fórmula 4 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$$

48. Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são as funções de vetor no Exercício 47, utilize a Fórmula 5 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]$$

49. Determine  $f'(2)$ , onde  $f(t) = \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ ,  $\mathbf{u}(2) = \langle 1, 2, -1 \rangle$ ,  $\mathbf{u}'(2) = \langle 3, 0, 4 \rangle$  e  $\mathbf{v}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ .50. Se  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$ , onde  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são as funções de vetor no Exercício 49, encontre  $\mathbf{r}'(2)$ .51. Mostre que se  $\mathbf{r}$  é uma função vetorial tal que exista  $\mathbf{r}''$ , então

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

52. Determine uma expressão para  $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}(t))]$ .53. Se  $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$ , mostre que  $\frac{d}{dt} |\mathbf{r}(t)| = \frac{1}{|\mathbf{r}(t)|} \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$ .

$$[Dica: |\mathbf{r}(t)|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)]$$

54. Se uma curva tem a propriedade de o vetor posição  $\mathbf{r}(t)$  estar sempre perpendicular ao vetor tangente  $\mathbf{r}'(t)$ , mostre que essa curva está em uma esfera com o centro na origem.55. Se  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$ , mostre que

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$$

56. Mostre que o vetor tangente a uma curva definida por uma função vetorial  $\mathbf{r}(t)$  aponta no mesmo sentido da curva com  $t$  aumentando. [Dica: Consulte a Figura 1 e considere os casos  $h > 0$  e  $h < 0$  separadamente.]

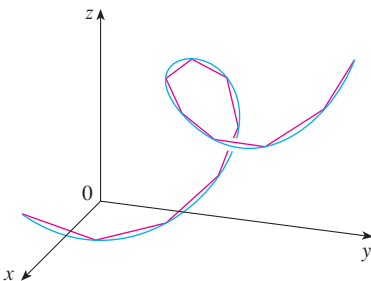
### 13.3 Comprimento de Arco e Curvatura

Na Seção 10.2 definimos o comprimento de uma curva plana com equações paramétricas  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , como o limite do comprimento das poligonais inscritas e, para o caso no qual  $f'$  e  $g'$  são contínuas, chegamos à seguinte fórmula

$$\boxed{1} \quad L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

O comprimento de uma curva espacial é definido exatamente da mesma forma (veja a Figura 1). Suponha que a curva tenha equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ ,  $a \leq t \leq b$ , ou, o que é equivalente, equações paramétricas  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ ,  $z = h(t)$ , onde  $f'$ ,  $g'$  e  $h'$  são funções contínuas. Se a curva é percorrida exatamente uma vez à medida que  $t$  cresce, a partir de  $a$  para  $b$ , é possível mostrar que

$$\boxed{2} \quad \begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \end{aligned}$$

**FIGURA 1**

O comprimento de uma curva espacial é o limite dos comprimentos das poligonais inscritas.

Observe que os comprimentos dos arcos de curva dados pelas Fórmulas  $\boxed{1}$  e  $\boxed{2}$  podem ser escritos de forma mais compacta

$$\boxed{3} \quad L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt$$

porque, para curvas planas  $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ ,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

e para as curvas espaciais  $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ ,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$$

**EXEMPLO 1** Calcule o comprimento do arco da hélice circular de equação  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$  do ponto  $(1, 0, 0)$  até o ponto  $(1, 0, 2\pi)$ .

**SOLUÇÃO** Uma vez que  $\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}$ , temos

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

O arco de  $(1, 0, 0)$  até  $(1, 0, 2\pi)$  é descrito quando o parâmetro percorre o intervalo  $0 \leq t \leq 2\pi$  e, assim, da Fórmula 3, temos

$$L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi$$

Uma única curva  $C$  pode ser representada por mais de uma função vetorial. Por exemplo, a cúbica retorcida

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \quad 1 \leq t \leq 2$$

poderia ser representada também pela função

$$\mathbf{r}_2(u) = \langle e^u, e^{2u}, e^{3u} \rangle \quad 0 \leq u \leq \ln 2$$

onde a relação entre os parâmetros  $t$  e  $u$  é dada por  $t = e^u$ . Dizemos que as Equações 4 e 5 são **parametrizações** da curva  $C$ . Se fôssemos usar a Equação 3 para calcular o comprimento de  $C$  usando Equações 4 e 5, gostaríamos de obter a mesma resposta. Em geral, pode ser mostrado que, quando a Equação 3 é usada para calcular o comprimento do arco, a resposta é independente da parametrização que é usada.

Suponhamos agora que  $C$  seja uma curva dada pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad a \leq t \leq b$$

onde  $\mathbf{r}'$  é contínua e  $C$  é percorrida exatamente uma vez à medida que  $t$  aumenta de  $a$  para  $b$ . Definimos sua **função de comprimento de arco**  $s$  por

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)| du = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} du$$

Então  $s(t)$  é o comprimento da parte de  $C$  entre  $\mathbf{r}(a)$  e  $\mathbf{r}(t)$ . (Veja a Figura 3.) Se derivarmos os dois lados da Equação 6 usando a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo, obteremos

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$$

É frequentemente útil **parametrizar uma curva em relação ao comprimento do arco**, pois o comprimento de arco aparece naturalmente a partir da forma da curva e não depende do sistema de coordenadas utilizado. Se uma curva  $\mathbf{r}(t)$  já está dada em termos de um parâmetro  $t$  e  $s(t)$  é a função comprimento de arco dada pela Equação 6, podemos ser capazes de escrever  $t$  como uma função de  $s$ :  $t = t(s)$ . Em seguida, a curva pode ser reparametrizada em termos de  $s$  substituindo por  $t$ :  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$ . Assim, se  $s = 3$ , por exemplo,  $\mathbf{r}(t(3))$  é a posição do ponto que está a três unidades de comprimento do início da curva.

**EXEMPLO 2** Reparametrize a hélice circular  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$  utilizando o comprimento de arco medido a partir de  $(1, 0, 0)$  na direção de crescimento de  $t$ .

A Figura 2 mostra o arco de hélice cujo comprimento é calculado no Exemplo 1.

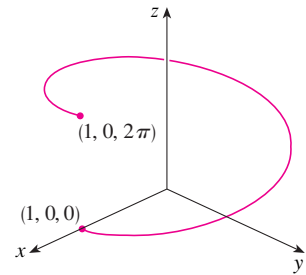


FIGURA 2

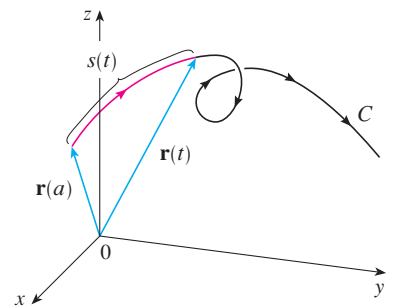


FIGURA 3

**SOLUÇÃO** O ponto inicial  $(1, 0, 0)$  corresponde ao valor do parâmetro  $t = 0$ . A partir do Exemplo 1, temos

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

e assim 
$$s = s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)| du = \int_0^t \sqrt{2} du = \sqrt{2}t$$

Portanto  $t = s/\sqrt{2}$  e a reparametrização pedida é obtida substituindo-se o valor de  $t$ :

$$\mathbf{r}(t(s)) = \cos(s/\sqrt{2}) \mathbf{i} + \sin(s/\sqrt{2}) \mathbf{j} + (s/\sqrt{2}) \mathbf{k}$$

## Curvatura

Uma parametrização  $\mathbf{r}(t)$  é chamada **suave** em um intervalo  $I$  se  $\mathbf{r}'$  for contínua e  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$  em  $I$ . Uma curva é chamada de **suave** se tiver uma parametrização suave. Uma curva suave não tem quebras abruptas ou cúspides; quando seu vetor tangente gira, ele o faz continuamente.

Se  $C$  for uma curva suave definida por uma função vetorial  $\mathbf{r}$ , lembre-se de que o vetor tangente unitário  $\mathbf{T}(t)$  será dado por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

e indica a direção da curva. Da Figura 4, podemos ver que  $\mathbf{T}(t)$  muda de direção muito devagar quando a curva  $C$  é razoavelmente reta, mas muda de direção mais rapidamente quando a curva  $C$  se dobra ou retorce mais acentuadamente.

A curvatura de  $C$  em um dado ponto é a medida de quão rapidamente a curva muda de direção no ponto. Especificamente, definimos a curvatura como o módulo da taxa de variação do vetor tangente unitário com relação ao comprimento do arco. (Utilizamos o comprimento de arco, pois assim a curvatura independe da parametrização.)

**8 Definição** A **curvatura** de uma curva é

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|$$

onde  $\mathbf{T}$  é o vetor tangente unitário.

A curvatura é mais simples de calcular se expressa em termos do parâmetro  $t$  em vez de  $s$ . Assim, usamos a Regra da Cadeia (Teorema 13.2.3, Fórmula 6) para escrever

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad \text{e} \quad \kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} \right|$$

Mas, da Equação 7,  $ds/dt = |\mathbf{r}'(t)|$ , e então

**9**

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

**EXEMPLO 3** Mostre que a curvatura de um círculo de raio  $a$  é  $1/a$ .

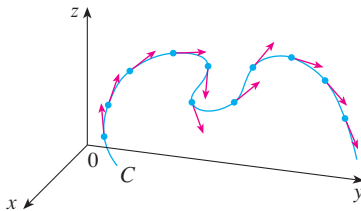
**SOLUÇÃO** Podemos tomar o círculo com centro na origem e parametrizado por

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$$

Portanto 
$$\mathbf{r}'(t) = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} \quad \text{e} \quad |\mathbf{r}'(t)| = a$$

Logo, 
$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

**TEC** Visual 13.3A mostra vetores tangentes unitários animados, como os da Figura 4, para uma variedade de curvas planas e curvas espaciais.



**FIGURA 4**  
Vetor tangente unitário em pontos igualmente espaçados de  $C$

e 
$$\mathbf{T}'(t) = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}$$

Isso nos dá  $|\mathbf{T}'(t)| = 1$ , então, usando a Equação 9, temos

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{a}$$

O resultado do Exemplo 3 mostra que pequenos círculos têm uma grande curvatura, enquanto grandes círculos têm uma pequena curvatura, como nossa intuição indica. Podemos ver diretamente da definição que a curvatura de uma reta é sempre 0, pois o vetor tangente é constante.

Embora a Fórmula 9 possa ser utilizada em qualquer caso para calcular a curvatura, em geral é mais conveniente aplicar a fórmula dada pelo teorema a seguir:

**10 Teorema** A curvatura de uma curva dada pela função vetorial  $\mathbf{r}$  é

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

**DEMONSTRAÇÃO** Como  $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$  e  $|\mathbf{r}'| = ds/dt$ , temos

$$\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'|\mathbf{T} = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}$$

e, pela Regra do Produto (Teorema 13.2.3, Fórmula 3), temos

$$\mathbf{r}'' = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} \mathbf{T}'$$

Usando o fato de que  $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$  (veja o Exemplo 2 da Seção 12.4), temos

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 (\mathbf{T} \times \mathbf{T}')$$

Agora  $|\mathbf{T}(t)| = 1$  para todo  $t$ , então  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}'$  são ortogonais pelo Exemplo 4 na Seção 13.2. Portanto, pelo Teorema 12.4.9,

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T} \times \mathbf{T}'| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T}| |\mathbf{T}'| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T}'|$$

Logo, 
$$|\mathbf{T}'| = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{(ds/dt)^2} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^2}$$

e 
$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

**EXEMPLO 4** Determine a curvatura da cúbica retorcida  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$  em um ponto genérico e em  $(0, 0, 0)$ .

**SOLUÇÃO** Calculemos inicialmente os ingredientes necessários:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle \quad \mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2 \mathbf{i} - 6t \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

Então, aplicando o Teorema 10, temos

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}$$

Na origem, onde  $t = 0$ , a curvatura é  $\kappa(0) = 2$ . ■

Para o caso especial de uma curva plana com a equação  $y = f(x)$ , escolhamos  $x$  como parâmetro e escrevemos  $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$ . Então  $\mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j}$  e  $\mathbf{r}''(x) = f''(x)\mathbf{j}$ . Como  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$  e  $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$ , segue que  $\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x)\mathbf{k}$ . Nós também temos  $|\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$  e, assim, pelo Teorema 10,

11

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

**EXEMPLO 5** Encontre a curvatura da parábola  $y = x^2$  nos pontos  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(2, 4)$ .

**SOLUÇÃO** Como  $y' = 2x$  e  $y'' = 2$ , a Fórmula 11 nos dá

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

A curvatura em  $(0, 0)$  é  $\kappa(0) = 2$ . Em  $(1, 1)$  isso é  $\kappa(1) = 2/5^{3/2} \approx 0,18$ . Em  $(2, 4)$  isso é  $\kappa(2) = 2/17^{3/2} \approx 0,03$ . Observe a partir da expressão de  $\kappa(x)$  ou o gráfico de  $\kappa$  na Figura 5 que  $\kappa(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Isso corresponde ao fato de que a parábola parece tornar-se mais plana quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . ■

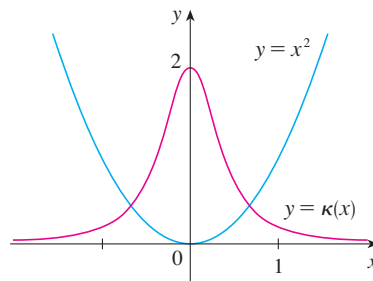


FIGURA 5

A parábola  $y = x^2$  e sua função curvatura

Podemos pensar no vetor normal como indicador da direção para a qual a curva está se virando em cada ponto.

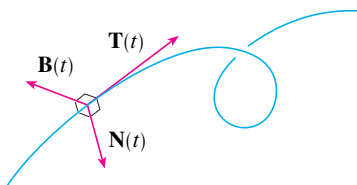


FIGURA 6

### Vetores Normal e Binormal

Em um ponto dado de uma curva suave  $\mathbf{r}(t)$ , existem muitos vetores que são ortogonais ao vetor tangente unitário  $\mathbf{T}(t)$ . Escolhemos um observando que, como  $|\mathbf{T}(t)| = 1$  para todo  $t$ , temos  $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0$  pelo Exemplo 4 da Seção 13.2, de modo que  $\mathbf{T}'(t)$  é ortogonal a  $\mathbf{T}(t)$ . Observe, no entanto, que  $\mathbf{T}'(t)$  pode não ser um vetor unitário. Mas se  $\mathbf{r}'$  também for suave,  $\kappa \neq 0$  podemos definir o **vetor normal unitário principal**  $\mathbf{N}(t)$  (ou simplesmente **normal unitário**) como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$

O vetor  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$  é chamado **vetor binormal**. Ele é perpendicular a ambos  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{N}$  e também é unitário (veja a Figura 6).

**EXEMPLO 6** Determine os vetores normal e binormal da hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

**SOLUÇÃO** Vamos, inicialmente, calcular os ingredientes necessários para o cálculo do vetor normal unitário:

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}) \quad |\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} = \langle -\cos t, -\sin t, 0 \rangle$$

Isso mostra que o vetor normal em um ponto da hélice circular é horizontal e aponta em direção ao eixo  $z$ . O vetor binormal é

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \sin t, -\cos t, 1 \rangle$$

O plano determinado pelos vetores normal e binormal  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{B}$  num ponto  $P$  sobre uma curva  $C$  é chamado **plano normal** de  $C$  em  $P$ . E constituída por todas as linhas que são ortogonais ao vetor tangente  $\mathbf{T}$ . O plano determinado pelos vetores  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{N}$  é chamado **plano osculador** de  $C$  a  $P$ . O nome vem do latim *osculum*, que significa “beijo”. É o plano que se aproxima mais do que contém a parte da curva próxima  $P$ . (Para uma curva plana, o plano osculador é simplesmente o plano que contém a curva.)

O círculo que está no plano osculador de  $C$  em  $P$ , tem a mesma tangente que  $C$  em  $P$ , fica do lado côncavo de  $C$  (na direção em que  $\mathbf{N}$  aponta) e tem raio  $\rho = 1/\kappa$  (o recíproco da curvatura) é conhecido como **círculo osculador** (ou **círculo da curvatura**) de  $C$  em  $P$ . É o círculo que melhor descreve como  $C$  se comporta perto de  $P$ ; que compartilha a mesma tangente, normal e curvatura  $P$ .

**EXEMPLO 7** Determine as equações do plano normal e do plano osculador da hélice circular do Exemplo 6 no ponto  $P(0, 1, \pi/2)$ .

**SOLUÇÃO** O plano normal em  $P$  tem vetor normal  $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -1, 0, 1 \rangle$ , portanto sua equação é

$$-1(x - 0) + 0(y - 1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad z = x + \frac{\pi}{2}$$

O plano osculador em  $P$  contém os vetores  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{N}$ , e assim seu vetor normal é  $\mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{B}$ . A partir do Exemplo 6, temos

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \sin t, -\cos t, 1 \rangle \quad \mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

Um vetor normal mais simples é  $\langle 1, 0, 1 \rangle$ , então uma equação do plano osculador é

$$1(x - 0) + 0(y - 1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad z = -x + \frac{\pi}{2}$$

**EXEMPLO 8** Determine e desenhe o círculo osculador da parábola  $y = x^2$  na origem.

**SOLUÇÃO** Do Exemplo 5, a curvatura da parábola na origem é  $\kappa(0) = 2$ . Dessa forma, o raio do círculo osculador é  $1/\kappa = \frac{1}{2}$  e seu centro é  $(0, \frac{1}{2})$ . Sua equação é, portanto,

A Figura 7 ilustra o Exemplo 6 mostrando os vetores  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{B}$  em dois pontos da hélice circular. Em geral, os vetores  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{B}$ , começando nos vários pontos da curva, formam um conjunto de vetores ortogonais, denominados referencial **TNB**, que se move ao longo da curva quando  $t$  varia. Esse referencial **TNB** tem um papel importante em um ramo da matemática chamado geometria diferencial e em suas aplicações em movimento de naves espaciais.

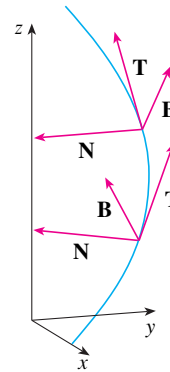


FIGURA 7

**TEC** Visual 13.3B mostra como a estrutura TNB move ao longo de diversas curvas.

A Figura 8 mostra a hélice e o plano osculador do Exemplo 7.

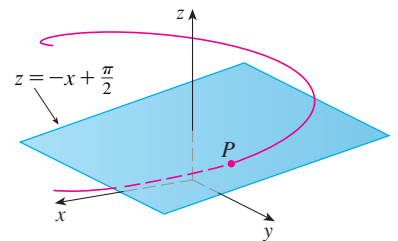


FIGURA 8

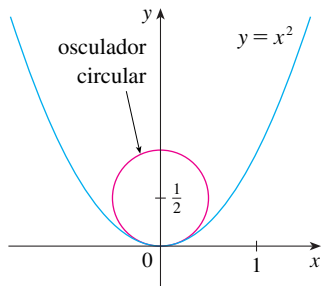


FIGURA 9

**TEC** Visual 13.3C mostra como o círculo osculador muda conforme um ponto se move ao longo de uma curva.

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Para o gráfico da Figura 9 usamos as equações paramétricas do círculo:

$$x = \frac{1}{2} \cos t \quad y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t$$

Resumimos aqui as fórmulas para os vetores tangente unitário, normal unitário e binormal e para a curvatura.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

## 13.3 Exercícios

1–6 Determine o comprimento da curva dada.

- $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos t, 3 \sin t \rangle$ ,  $-5 \leq t \leq 5$
- $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, t^2, \frac{1}{3}t^3 \rangle$ ,  $0 \leq t \leq 1$
- $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$ ,  $0 \leq t \leq 1$
- $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \ln \cos t \mathbf{k}$ ,  $0 \leq t \leq \pi/4$
- $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$ ,  $0 \leq t \leq 1$
- $\mathbf{r}(t) = 12t \mathbf{i} + 8t^{3/2} \mathbf{j} + 3t^2 \mathbf{k}$ ,  $0 \leq t \leq 1$

7–9 Encontre o comprimento da curva com precisão de quatro casas decimais. (Use sua calculadora para aproximar a integral.)

- $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{t}, t, t^2 \rangle$ ,  $1 \leq t \leq 4$
- $\mathbf{r}(t) = \langle t, e^{-t}, te^{-t} \rangle$ ,  $1 \leq t \leq 3$
- $\mathbf{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, \tan t \rangle$ ,  $0 \leq t \leq \pi/4$

10. Trace a curva com equações paramétricas  $x = \sin t$ ,  $y = \sin 2t$ ,  $z = \sin 3t$ . Encontre o comprimento total desta curva com precisão de quatro casas decimais.

- Seja  $C$  a curva de intersecção do cilindro parabólico  $x^2 = 2y$  e da superfície  $3z = xy$ . Encontre o comprimento exato de  $C$  da origem até o ponto  $(6, 18, 36)$ .
- Encontre, com precisão de quatro casas decimais, o comprimento da curva de intersecção do cilindro  $4x^2 + y^2 = 4$  com o plano  $x + y + z = 2$ .

13–14 Reparametrize a curva com relação ao comprimento de arco medido a partir do ponto onde  $t = 0$  na direção crescente de  $t$ .

- $\mathbf{r}(t) = 2t \mathbf{i} + (1 - 3t) \mathbf{j} + (5 + 4t) \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = e^{2t} \cos 2t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + e^{2t} \sin 2t \mathbf{k}$

15. Suponha que você comece no ponto  $(0, 0, 3)$  e se mova 5 unidades ao longo da curva  $x = 3 \sin t$ ,  $y = 4t$ ,  $z = 3 \cos t$  na direção positiva. Onde você está agora?

16. Reparametrize a curva

$$\mathbf{r}(t) = \left( \frac{2}{t^2 + 1} - 1 \right) \mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1} \mathbf{j}$$

em relação ao comprimento do arco medido a partir do ponto  $(1, 0)$  na direção crescente de  $t$ . Expresse a reparametrização em sua forma mais simples. O que você pode concluir sobre a curva?

17–20

- Determine os vetores tangente e normal unitários  $\mathbf{T}(t)$  e  $\mathbf{N}(t)$ .
- Utilize a Fórmula 9 para encontrar a curvatura.

- $\mathbf{r}(t) = \langle t, 3 \cos t, 3 \sin t \rangle$
- $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sin t - t \cos t, \cos t + t \sin t \rangle$ ,  $t > 0$
- $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{2}t, e^t, e^{-t} \rangle$
- $\mathbf{r}(t) = \langle t, \frac{1}{2}t^2, t^2 \rangle$

21–23 Utilize o Teorema 10 para encontrar a curvatura.

- $\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + (1 + t^2) \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = 3t \mathbf{i} + 4 \sin t \mathbf{j} + 4 \cos t \mathbf{k}$

24. Encontre a curvatura da curva  $\mathbf{r}(t) = \langle e^t \cos t, e^t \sin t, t \rangle$  no ponto  $(1, 0, 0)$ .

25. Encontre a curvatura de  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$  no ponto  $(1, 1, 1)$ .

26. Trace o gráfico da curva com equações paramétricas  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = \sin 5t$  e calcule a curvatura no ponto  $(1, 0, 0)$ .

27–29 Use a Fórmula 11 para encontrar a curvatura.

- $y = x^4$
- $y = \tan x$
- $y = xe^x$

30–31 Em que ponto a curva tem curvatura máxima? O que acontece com a curvatura quando  $x \rightarrow \infty$ ?

- $y = \ln x$
- $y = e^x$

32. Determine a equação de uma parábola que tenha curvatura 4 na origem.

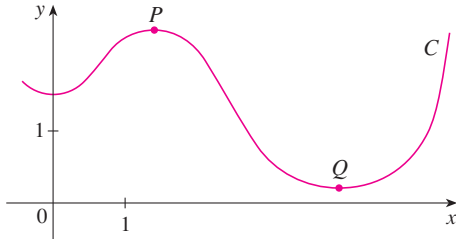
É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em [www.stewartcalculus.com](http://www.stewartcalculus.com)

É necessário usar um sistema de computação algébrica



33. (a) A curvatura da curva  $C$  mostrada na figura é maior em  $P$  ou em  $Q$ ? Explique.  
 (b) Estime a curvatura em  $P$  e  $Q$  desenhando o círculo osculador nesses pontos.



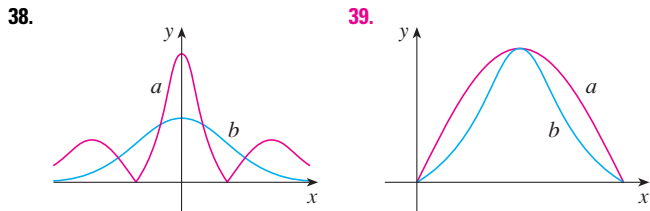
34–35 Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para traçar na mesma tela a curva e sua função curvatura  $\kappa(x)$ . Esse é o gráfico que você esperava?

34.  $y = x^4 - 2x^2$                       35.  $y = x^{-2}$

36–37 Trace a curva espacial e sua função curvatura  $\kappa(t)$ . Comente como a curvatura reflete a forma da curva.

36.  $\mathbf{r}(t) = \langle t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \cos(t/2) \rangle, \quad 0 \leq t \leq 8\pi$   
 37.  $\mathbf{r}(t) = \langle te^t, e^{-t}, \sqrt{2}t \rangle, \quad -5 \leq t \leq 5$

38–39 Dois gráficos,  $a$  e  $b$ , são mostrados. Um é a curva  $y = f(x)$  e o outro é o gráfico da sua função curvatura  $y = \kappa(x)$ . Identifique cada uma e justifique suas escolhas.



40. (a) Desenhe a curva  $\mathbf{r}(t) = \langle \sin 3t, \sin 2t, \sin 3t \rangle$ . Em quantos pontos da curva tem-se a impressão de que a curvatura possui um máximo local ou absoluto?  
 (b) Use um SCA para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Esse gráfico confirma sua conclusão na parte (a)?

41. O gráfico de  $\mathbf{r}(t) = \langle t - \frac{3}{2} \sin t, 1 - \frac{3}{2} \cos t, t \rangle$  é mostrado na Figura 12(b) da Seção 13.1. Onde você acha que a curvatura é maior? Use um SCA para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Para quais valores de  $t$  a curvatura é maior?

42. Use o Teorema 10 para mostrar que a curvatura da curva plana parametrizada  $x = f(t), y = g(t)$  é

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

onde os pontos indicam as derivadas em relação a  $t$ .

43–45 Use a fórmula do Exercício 42 para calcular a curvatura.

43.  $x = t^2, \quad y = t^3$   
 44.  $x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t$   
 45.  $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t$

46. Considere a curvatura em  $x = 0$  para cada membro da família de funções  $f(x) = e^{cx}$ . Para quais membros  $\kappa(0)$  é maior?

47–48 Encontre os vetores  $\mathbf{T}, \mathbf{N}$  e  $\mathbf{B}$  no ponto indicado.

47.  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \frac{2}{3}t^3, t \rangle, \quad (1, \frac{2}{3}, 1)$

48.  $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, \ln \cos t \rangle, \quad (1, 0, 0)$

49–50 Determine as equações dos planos normal e osculador da curva no ponto indicado.

49.  $x = 2 \sin 3t, \quad y = t, \quad z = 2 \cos 3t; \quad (0, \pi, -2)$

50.  $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3; \quad (1, 1, 1)$

51. Encontre as equações para o círculo osculador da elipse  $9x^2 + 4y^2 = 36$  nos pontos  $(2, 0)$  e  $(0, 3)$ . Utilize uma calculadora gráfica ou computador para traçar a elipse e ambos os círculos osculadores na mesma tela.

52. Encontre as equações para o círculo osculador da parábola  $y = \frac{1}{2}x^2$  nos pontos  $(0, 0)$  e  $(1, \frac{1}{2})$ . Trace os dois círculos osculadores e a parábola na mesma tela.

53. Em qual ponto da curva  $x = t^3, y = 3t, z = t^4$  o plano normal é paralelo ao plano  $6x + 6y - 8z = 1$ ?

54. Existe um ponto da curva do Exercício 53 onde o plano osculador é paralelo ao plano  $x + y + z = 1$ ?

[Observação: Você precisará de um SCA para derivar, simplificar e calcular um produto vetorial.]

55. Determine as equações dos planos normais e osculador da curva de interseção dos cilindros parabólicos  $x = y^2$  e  $z = x^2$  no ponto  $(1, 1, 1)$ .

56. Mostre que o plano osculador em cada ponto da curva  $\mathbf{r}(t) = \langle t + 2, 1 - t, \frac{1}{2}t^2 \rangle$  é o mesmo plano. O que você pode concluir sobre a curva?

57. Mostre que a curvatura  $\kappa$  está relacionada com os vetores tangente e normal pela equação

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$

58. Mostre que a curvatura de uma curva plana é  $\kappa = |d\phi/ds|$ , onde  $\phi$  é o ângulo entre  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{i}$ , isto é,  $\phi$  é o ângulo de inclinação da reta tangente. (Isso mostra que a definição de curvatura é consistente com a definição dada para curvas planas no Exercício 69 da Seção 10.2.)

59. (a) Mostre que  $d\mathbf{B}/ds$  é perpendicular a  $\mathbf{B}$ .  
 (b) Mostre que  $d\mathbf{B}/ds$  é perpendicular a  $\mathbf{T}$ .  
 (c) Deduza das partes (a) e (b) que  $d\mathbf{B}/ds = -\tau(s)\mathbf{N}$  para algum número  $\tau(s)$  chamado **torção** da curva. (A torção mede quanto a curva é retorcida.)  
 (d) Mostre que para uma curva plana a torção é  $\tau(s) = 0$ .

60. As fórmulas seguintes, chamadas **fórmulas de Frenet-Serret**, são de fundamental importância em geometria diferencial:

1.  $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$
2.  $d\mathbf{N}/ds = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$
3.  $d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$

(A Fórmula 1 é fornecida a partir do Exercício 57 e da Fórmula 3 vem de Exercício 59.) Use o fato de que  $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$  para deduzir Fórmula 2 a partir das Fórmulas 1 e 3.

61. Utilize as fórmulas de Frenet-Serret para demonstrar cada um dos seguintes itens. (Apóstrofo denota derivadas com relação a  $t$ . Comece como na demonstração do Teorema 10.)

- (a)  $\mathbf{r}'' = s''\mathbf{T} + \kappa(s')^2\mathbf{N}$
- (b)  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \kappa(s')^3\mathbf{B}$
- (c)  $\mathbf{r}''' = [s''' - \kappa^2(s')^3]\mathbf{T} + [3\kappa s's'' + \kappa'(s')^2]\mathbf{N} + \kappa\tau(s')^3\mathbf{B}$
- (d)  $\tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}$

62. Mostre que a hélice circular  $\mathbf{r}(t) = \langle a \cos t, a \sin t, bt \rangle$ , onde  $a$  e  $b$  são as constantes positivas, tem curvatura e torção constantes. [Use o resultado do Exercício 61(d).]
63. Utilize a fórmula do Exercício 61(d) para calcular a torção da curva  $\mathbf{r}(t) = \langle t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3 \rangle$ .
64. Encontre a curvatura e torção da curva  $x = \sinh t$ ,  $y = \cosh t$ ,  $z = t$  no ponto  $(0, 1, 0)$ .
65. A molécula de DNA tem a forma de duas hélices circulares. O raio de cada uma das hélices é de cerca de 10 ângströms ( $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$ ). Cada hélice, em uma volta completa, sobe 34 Å, e existem cerca de  $2,9 \times 10^8$  voltas completas. Estime o comprimento de cada hélice circular.

66. Consideremos o problema de projetar uma linha férrea de modo a fazer transições lisas entre as seções de trilhos retos. Um trilho existente ao longo da parte negativa do eixo  $x$  precisa ser ligado a um trilho que corre ao longo da reta  $y = 1$  para  $x \geq 1$ .
- (a) Determine um polinômio  $P = P(x)$  de grau 5 tal que a função  $F$  definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ P(x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

seja contínua e tenha derivada e curvatura contínuas.



- (b) Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o gráfico de  $F$ .

## 13.4 Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração

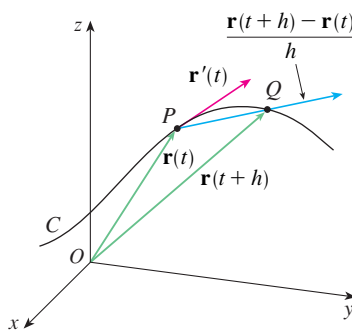


FIGURA 1

Nesta seção, mostraremos como as ideias dos vetores tangente e normal, assim como as de curvatura, podem ser usadas na física para estudar o movimento de objetos, sua velocidade e sua aceleração, quando estão se movendo ao longo de uma curva espacial. Em particular, seguiremos os passos de Newton, usando seu método para deduzir a Primeira Lei de Kepler para o movimento planetário.

Suponha que uma partícula se mova no espaço de forma que seu vetor posição no instante  $t$  é  $\mathbf{r}(t)$ . Observe da Figura 1 que, para pequenos valores de  $h$ , o vetor

1

$$\frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

se aproxima da direção de movimento da partícula que se move ao longo da curva  $\mathbf{r}(t)$ . Seu módulo mede o tamanho do vetor deslocamento por unidade de tempo. O vetor 1 fornece a velocidade média no intervalo de tempo de comprimento  $h$  e seu limite é o **vetor velocidade**  $\mathbf{v}(t)$  no instante  $t$ :

2

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \mathbf{r}'(t)$$

Portanto, o vetor velocidade é também o vetor tangente e tem a direção da reta tangente à curva.

A **velocidade escalar** da partícula no instante  $t$  é a magnitude do vetor velocidade, ou seja,  $|\mathbf{v}(t)|$ . Isso é apropriado, pois, de 2 e da Equação 13.3.7, temos

$$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \frac{ds}{dt} = \text{a taxa de variação da distância com relação ao tempo}$$

Como no caso de movimento unidimensional, a **aceleração** da partícula é definida como a derivada da velocidade:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$$

**EXEMPLO 1** O vetor posição de um objeto em movimento em um plano é dado por  $\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}$ . Determine a sua velocidade, a velocidade escalar e a aceleração quando  $t = 1$  e ilustre geometricamente.

**SOLUÇÃO** A velocidade e a aceleração no instante  $t$  são

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 3t^2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 6t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j}$$

e a velocidade escalar é

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$$

Quando  $t = 1$ , temos

$$\mathbf{v}(1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \mathbf{a}(1) = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad |\mathbf{v}(1)| = \sqrt{13}$$

Os vetores velocidade e aceleração estão mostrados na Figura 2.

**EXEMPLO 2** Determine a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar de uma partícula com vetor posição  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, e^t, te^t \rangle$ .

**SOLUÇÃO**

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle 2t, e^t, (1+t)e^t \rangle$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \langle 2, e^t, (2+t)e^t \rangle$$

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 + e^{2t} + (1+t)^2 e^{2t}}$$

A integração de vetores introduzida na Seção 13.2 pode ser usada para achar o vetor posição quando os vetores velocidade ou aceleração são conhecidos, como no seguinte exemplo.

**EXEMPLO 3** Uma partícula movendo-se começa numa posição inicial  $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$  com uma velocidade inicial  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Sua aceleração é  $\mathbf{a}(t) = 4t \mathbf{i} + 6t \mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Determine a sua velocidade e posição no momento  $t$ .

**SOLUÇÃO** Uma vez que  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \int \mathbf{a}(t) dt = \int (4t \mathbf{i} + 6t \mathbf{j} + \mathbf{k}) dt \\ &= 2t^2 \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + t \mathbf{k} + \mathbf{C} \end{aligned}$$

Para determinarmos o valor da constante do vetor  $\mathbf{C}$ , usamos o fato de que  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ . A equação anterior permite  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{C}$ , de modo que  $\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$  e

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= 2t^2 \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + t \mathbf{k} + \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ &= (2t^2 + 1) \mathbf{i} + (3t^2 - 1) \mathbf{j} + (t + 1) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Uma vez que  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$  temos

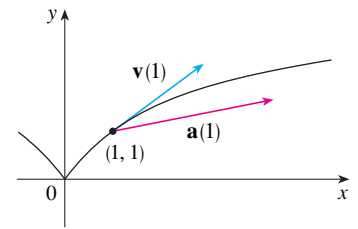
$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{v}(t) dt \\ &= \int [(2t^2 + 1) \mathbf{i} + (3t^2 - 1) \mathbf{j} + (t + 1) \mathbf{k}] dt \\ &= \left(\frac{2}{3}t^3 + t\right) \mathbf{i} + (t^3 - t) \mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right) \mathbf{k} + \mathbf{D} \end{aligned}$$

Tomando  $t = 0$ , achamos que  $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$ , então a posição no tempo  $t$  é dada por

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 + t + 1\right) \mathbf{i} + (t^3 - t) \mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right) \mathbf{k}$$

Em geral, por integração vetorial podemos recuperar a velocidade quando a aceleração for conhecida e a posição quando a velocidade for conhecida:

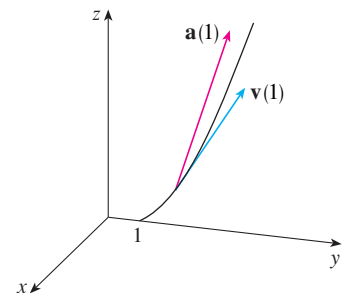
$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(u) du \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(u) du$$



**FIGURA 2**

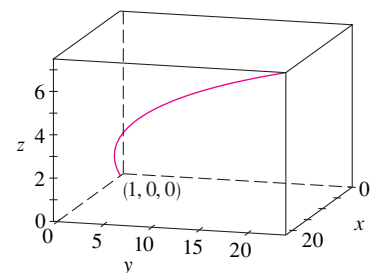
**TEC** Visual 13.4 mostra vetores animados de velocidade e aceleração para objetos que se movem ao longo de várias curvas.

A Figura 3 mostra a trajetória da partícula do Exemplo 2 com vetores velocidade e aceleração quando  $t = 1$ .



**FIGURA 3**

A expressão para  $\mathbf{r}(t)$  que obtivemos no Exemplo 3 foi usada para traçar a trajetória da partícula na Figura 4 para  $0 \leq t \leq 3$ .



**FIGURA 4**

Se a força que age sobre a partícula é conhecida, então a aceleração pode ser determinada a partir da **Segunda Lei de Newton para o Movimento**. A versão vetorial dessa lei nos diz que, se em qualquer instante de tempo  $t$ , uma força  $\mathbf{F}(t)$  age sobre um objeto  $m$  produzindo uma aceleração  $\mathbf{a}(t)$ , então

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

A velocidade angular do objeto em movimento com posição  $P$  é  $\omega = d\theta/dt$ , onde  $\theta$  é o ângulo mostrado na Figura 5.

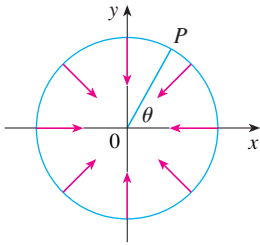


FIGURA 5

**EXEMPLO 4** Um objeto de massa  $m$  que se move em uma trajetória circular com velocidade angular constante  $\omega$  tem vetor posição dado por  $\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j}$ . Determine a força que age sobre o objeto e mostre que sua direção e sentido são dados pela reta que passa pela origem, apontando em direção à origem.

**SOLUÇÃO** Para encontrarmos a força, precisamos primeiro saber a aceleração:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -a\omega \sin \omega t \mathbf{i} + a\omega \cos \omega t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = -a\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - a\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j}$$

Portanto, pela Segunda Lei de Newton, temos a força

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t) = -m\omega^2(a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j})$$

Observe que  $\mathbf{F}(t) = -m\omega^2\mathbf{r}(t)$ . Isso mostra que a força age na direção oposta ao vetor radial  $\mathbf{r}(t)$  e, portanto, aponta para a origem (veja a Figura 5). Essa força é chamada *força centrípeta*.

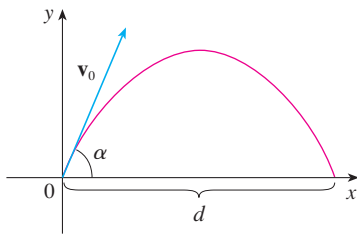


FIGURA 6

**EXEMPLO 5** Um projétil é disparado com ângulo de elevação  $\alpha$  e velocidade inicial  $\mathbf{v}_0$ . (Veja a Figura 6.) Assumindo que a resistência do ar seja desprezível e que a única força externa seja devida à gravidade, determine a função posição  $\mathbf{r}(t)$  do projétil. Para qual valor de  $\alpha$  obtemos maior alcance (distância horizontal percorrida)?

**SOLUÇÃO** Fixamos os eixos coordenados de forma que a origem coincida com o ponto inicial da trajetória do projétil. Como a força devida à gravidade age para baixo, temos

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -mg\mathbf{j}$$

onde  $g = |\mathbf{a}| \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ . Assim,

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{j}$$

Uma vez que  $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}$ , temos

$$\mathbf{v}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{C}$$

onde  $\mathbf{C} = \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ . Portanto

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{v}_0$$

Integrando novamente, obtemos

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{D}$$

Mas  $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ , e então o vetor posição do projétil é dado por

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0$$

Se escrevermos  $|\mathbf{v}_0| = v_0$  (a velocidade escalar inicial do projétil), então

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + v_0 \sin \alpha \mathbf{j}$$

e a Equação 3 se torna

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \alpha)t \mathbf{i} + \left[ (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \right] \mathbf{j}$$

As equações paramétricas da trajetória são

4

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \quad y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

A distância horizontal  $d$  é dada pelo valor de  $x$  quando  $y = 0$ . Ajustando  $y = 0$ , obtemos  $t = 0$  ou  $t = (2v_0 \sin \alpha)/g$ . O último valor de  $t$  fornece

$$d = x = (v_0 \cos \alpha) \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 (2 \sin \alpha \cos \alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Claramente,  $d$  tem valor máximo quando  $\sin 2\alpha = 1$ , ou seja, quando  $\alpha = \pi/4$ .

**EXEMPLO 6** Um projétil é lançado com velocidade de disparo de 150 m/s e ângulo de elevação de  $45^\circ$  de um ponto 10 m acima do nível do solo. Onde o projétil vai atingir o solo e com que velocidade escalar?

**SOLUÇÃO** Se tomarmos a origem no nível do solo, então a posição inicial do projétil é  $(0, 10)$  e, portanto, precisamos adequar a Equação 4 adicionando 10 na expressão para  $y$ . Com  $v_0 = 150$  m/s,  $\alpha = 45^\circ$  e  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>, temos

$$x = 150 \cos(\pi/4)t = 75\sqrt{2}t$$

$$y = 10 + 150 \sin(\pi/4)t - \frac{1}{2}(9,8)t^2 = 10 + 75\sqrt{2}t - 4,9t^2$$

O impacto ocorrerá quando  $y = 0$ , isto é,  $4,9t^2 - 75\sqrt{2}t - 10 = 0$ . Resolvendo essa equação quadrática (e usando somente o valor positivo de  $t$ ), temos

$$t = \frac{75\sqrt{2} + \sqrt{11\,250 + 196}}{9,8} \approx 21,74$$

Então  $x \approx 75\sqrt{2}(21,74) \approx 2.306$ , assim o projétil atinge o solo a uma distância de cerca de 2.306 m.

A velocidade do projétil é

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 75\sqrt{2} \mathbf{i} + (75\sqrt{2} - 9,8t) \mathbf{j}$$

Portanto, sua velocidade escalar no impacto é

$$|\mathbf{v}(21,74)| = \sqrt{(75\sqrt{2})^2 + (75\sqrt{2} - 9,8 \cdot 21,74)^2} \approx 151 \text{ m/s}$$

### Componentes Tangencial e Normal da Aceleração

Quando estudamos o movimento de uma partícula, é frequentemente útil decompor a aceleração em duas componentes, uma na direção da tangente e outra na direção da normal. Se escrevemos  $v = |\mathbf{v}|$  para a velocidade escalar da partícula, então

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

e, assim,

$$\mathbf{v} = v\mathbf{T}$$

Se derivarmos ambos os lados em relação a  $t$ , obteremos

5

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}'$$

Se usarmos a expressão da curvatura dada pela Equação 13.3.9, temos

Se você eliminar  $t$  das Equações 4, verá que  $y$  é uma função quadrática de  $x$ . Assim, o caminho do projétil faz parte de uma parábola.

$$\boxed{6} \quad \kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{T}'|}{v} \quad \text{logo} \quad |\mathbf{T}'| = \kappa v$$

O vetor normal unitário foi definido na seção anterior como  $\mathbf{N} = \mathbf{T}'/|\mathbf{T}'|$ , então  $\boxed{6}$  fornece

$$\mathbf{T}' = |\mathbf{T}'|\mathbf{N} = \kappa v \mathbf{N}$$

e a Equação 5 se torna

$$\boxed{7} \quad \mathbf{a} = v' \mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N}$$

Escrevendo  $a_T$  e  $a_N$  para as componentes tangencial e normal da aceleração, temos

$$\mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}$$

onde

$$\boxed{8} \quad a_T = v' \quad \text{e} \quad a_N = \kappa v^2$$

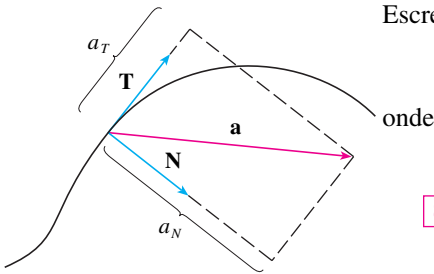


FIGURA 7

Essa conclusão está ilustrada na Figura 7.

Vamos olhar agora o que a Fórmula 7 nos diz. A primeira coisa a observar é que o vetor binormal  $\mathbf{B}$  não aparece. Independentemente de como o objeto se move no espaço, sua aceleração sempre está nos planos de  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{N}$  (o plano osculador). (Lembre-se de que  $\mathbf{T}$  fornece a direção e sentido do movimento e  $\mathbf{N}$  aponta a direção na qual a curva está se entortando.) Em seguida, observamos que a componente tangencial da aceleração é  $v'$ , a taxa de variação da velocidade escalar, e a componente normal da aceleração é  $\kappa v^2$ , a curvatura vezes o quadrado da velocidade escalar. Isso explica o que acontece com um passageiro em um carro — uma virada brusca em uma rua pode ser vista como um valor grande de curvatura  $\kappa$ , de forma que a componente da aceleração perpendicular ao movimento é grande e o passageiro é jogado contra a porta do carro. A alta velocidade em uma curva tem o mesmo efeito: de fato, se dobrarmos nossa velocidade escalar,  $a_N$  será aumentada por um fator de 4.

Apesar de termos uma expressão para as componentes tangencial e normal da aceleração na Equação 8, é desejável obter expressões que dependam somente de  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  e  $\mathbf{r}''$ . Com essa finalidade, tomamos o produto escalar de  $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$  com  $\mathbf{a}$  como dada na Equação 7:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} &= v\mathbf{T} \cdot (v'\mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N}) \\ &= vv'\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + \kappa v^3 \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} \\ &= vv' \end{aligned} \quad (\text{uma vez que } \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1 \text{ e } \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0)$$

Portanto

$$\boxed{9} \quad a_T = v' = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{v} = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Usando a fórmula da curvatura dada pelo Teorema 13.3.10, temos

$$\boxed{10} \quad a_N = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} |\mathbf{r}'(t)|^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

**EXEMPLO 7** Uma partícula se move com função posição  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^2, t^3 \rangle$ . Determine as componentes tangencial e normal da aceleração.

## SOLUÇÃO

$$\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = 2t \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + 3t^2 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(t) = 2 \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + 6t \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{8t^2 + 9t^4}$$

Portanto, da Equação 9 vem que a componente tangencial é

$$a_T = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{8t + 18t^3}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$

Uma vez que 
$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t & 2t & 3t^2 \\ 2 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2 \mathbf{i} - 6t^2 \mathbf{j}$$

da Equação 10 obtemos a componente normal

$$a_N = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{6\sqrt{2}t^2}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$

### Leis de Kepler para o Movimento Planetário

Descreveremos agora um dos principais feitos do cálculo mostrando como o material deste capítulo pode ser usado para demonstrar as leis de Kepler para o movimento planetário. Depois de 20 anos estudando as observações do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe, o astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630) formulou as seguintes três leis:

#### Leis de Kepler

1. Um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica, com o Sol em um dos focos.
2. O segmento de reta que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
3. O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do eixo maior de sua órbita.

Em seu livro *Principia Mathematica*, de 1687, sir Isaac Newton mostrou que as três leis de Kepler podem ser obtidas como consequências de outras duas leis de sua autoria, a Segunda Lei do Movimento e a Lei da Gravitação Universal. A seguir, demonstraremos a Primeira Lei de Kepler. As leis restantes são deixadas como exercícios (com sugestões).

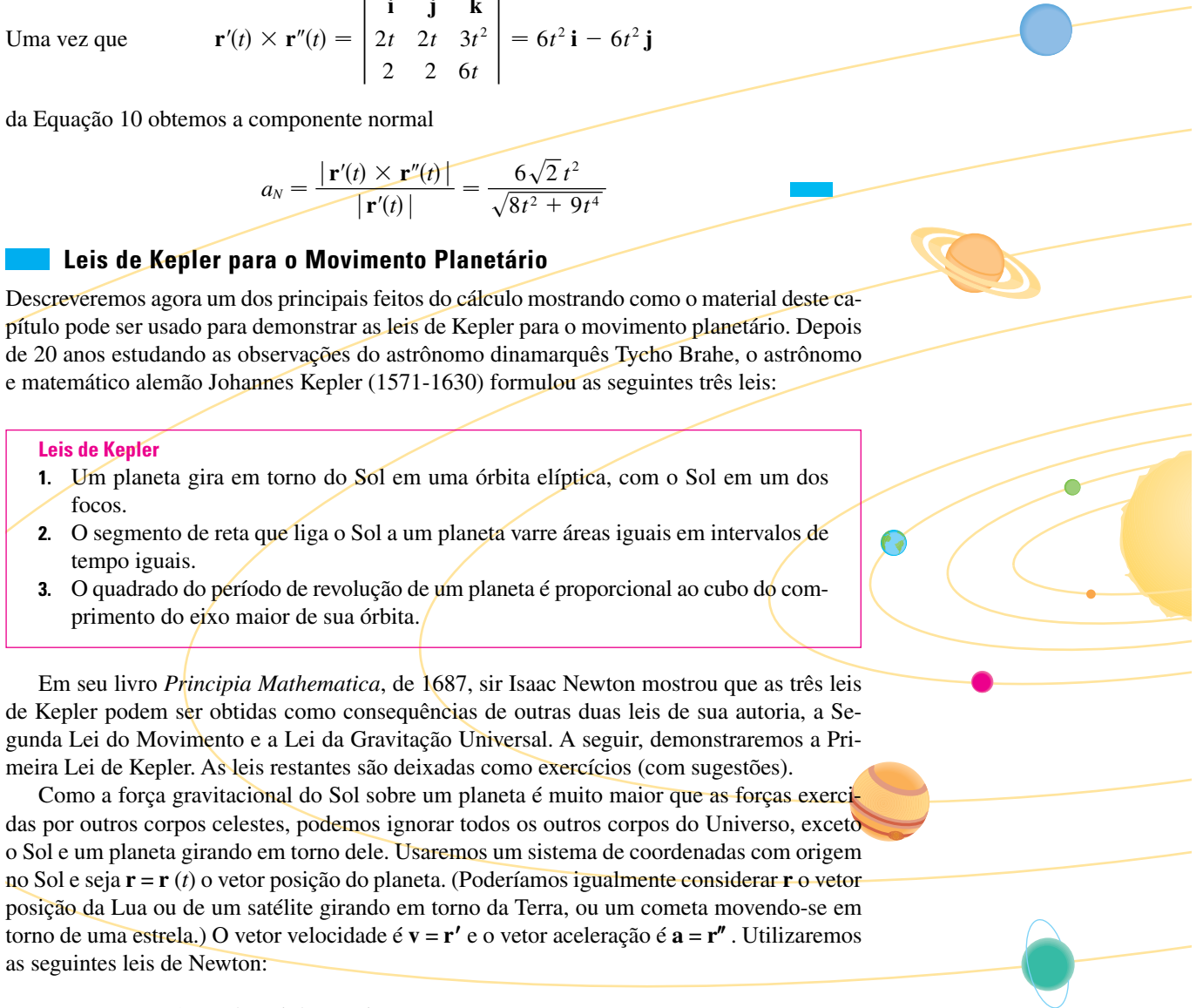
Como a força gravitacional do Sol sobre um planeta é muito maior que as forças exercidas por outros corpos celestes, podemos ignorar todos os outros corpos do Universo, exceto o Sol e um planeta girando em torno dele. Usaremos um sistema de coordenadas com origem no Sol e seja  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  o vetor posição do planeta. (Poderíamos igualmente considerar  $\mathbf{r}$  o vetor posição da Lua ou de um satélite girando em torno da Terra, ou um cometa movendo-se em torno de uma estrela.) O vetor velocidade é  $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$  e o vetor aceleração é  $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$ . Utilizaremos as seguintes leis de Newton:

Segunda Lei do Movimento:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Lei de Gravitação:  $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r} = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{u}$

onde  $\mathbf{F}$  é a força da gravidade sobre o planeta,  $m$  e  $M$  são as massas do planeta e do Sol,  $G$  é a constante gravitacional,  $r = |\mathbf{r}|$ , e  $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$  é o vetor unitário na direção de  $\mathbf{r}$ .

Mostraremos inicialmente que o planeta se move em um plano. Igualando a expressão para  $\mathbf{F}$  nas duas leis de Newton, chegamos a



$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}$$

e, assim,  $\mathbf{a}$  é paralelo a  $\mathbf{r}$ . Segue que  $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Usamos a Fórmula 5 no Teorema 13.2.3 para escrever

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{r}' \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}' \\ &= \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$$

onde  $\mathbf{h}$  é um vetor constante. (Podemos assumir que  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ ; isto é,  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$  não são paralelos.) Isto significa que o vetor  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  é perpendicular a  $\mathbf{h}$  para todos os valores de  $t$ , de modo que o planeta sempre se situa no plano através da origem perpendicular de  $\mathbf{h}$ . Assim, a órbita do planeta é uma curva plana.

Para demonstrarmos a Primeira Lei de Kepler, vamos reescrever o vetor  $\mathbf{h}$  como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}' = r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u})' \\ &= r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u}' + r'\mathbf{u}) = r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}') + rr'(\mathbf{u} \times \mathbf{u}) \\ &= r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}') \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{h} &= \frac{-GM}{r^2} \mathbf{u} \times (r^2 \mathbf{u} \times \mathbf{u}') = -GM \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}') \\ &= -GM[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}'] \quad (\text{pelo Teorema 12.4.11, Propriedade 6}) \end{aligned}$$

Mas  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = 1$  e, uma vez que  $|\mathbf{u}(t)| = 1$ , segue-se a partir do Exemplo 4, na Seção 13.2, que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$ . Portanto

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM \mathbf{u}'$$

$$\text{e} \quad (\mathbf{v} \times \mathbf{h})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM \mathbf{u}'$$

Integrando ambos os lados da equação, obtemos

$$\boxed{11} \quad \mathbf{v} \times \mathbf{h} = GM \mathbf{u} + \mathbf{c}$$

onde  $\mathbf{c}$  é um vetor constante.

Neste ponto é conveniente escolher os eixos coordenados de forma que o vetor da base canônica  $\mathbf{k}$  aponte na direção do vetor  $\mathbf{h}$ . Em seguida, o planeta se move no plano  $xy$ . Como ambos  $\mathbf{v} \times \mathbf{h}$  e  $\mathbf{u}$  são perpendiculares a  $\mathbf{h}$ , a Equação 11 mostra que  $\mathbf{c}$  pertence ao plano  $xy$ . Isso significa que podemos escolher os eixos  $x$  e  $y$  de forma que o vetor  $\mathbf{i}$  esteja na direção de  $\mathbf{c}$ , como mostrado na Figura 8.

Se  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{r}$ , então  $(r, \theta)$  são as coordenadas polares do planeta. Da Equação 11, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) &= \mathbf{r} \cdot (GM \mathbf{u} + \mathbf{c}) = GM \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c} \\ &= GMr \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + |\mathbf{r}||\mathbf{c}| \cos \theta = GMr + rc \cos \theta \end{aligned}$$

onde  $c = |\mathbf{c}|$ . Então,

$$r = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{GM + c \cos \theta} = \frac{1}{GM} \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{1 + e \cos \theta}$$

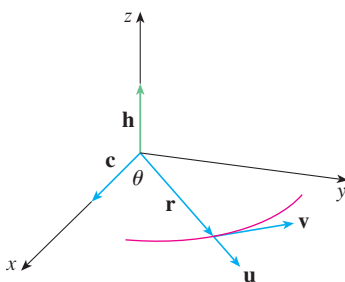


FIGURA 8



onde  $e = c/(GM)$ . Mas

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = |\mathbf{h}|^2 = h^2$$

onde  $h = |\mathbf{h}|$ . Logo,

$$r = \frac{h^2/(GM)}{1 + e \cos \theta} = \frac{eh^2/c}{1 + e \cos \theta}$$

Escrevendo  $d = h^2/c$ , obtemos a equação

12

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

Comparando com o Teorema 10.6.6, vemos que a Equação 12 é aquela da forma polar da seção cônica com foco na origem e excentricidade  $e$ . Sabemos que a órbita de um planeta é uma curva fechada e assim a cônica deve ser uma elipse.

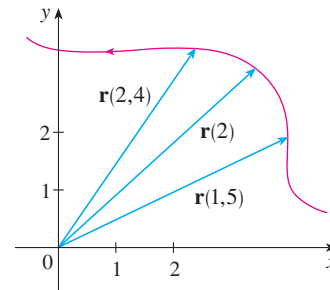
Isso completa a dedução da Primeira Lei de Kepler. Vamos orientá-lo através da derivação das Segunda e Terceira Leis do Projeto Aplicado. As demonstrações dessas três leis mostram que o método deste capítulo fornece uma ferramenta poderosa na descrição de leis da natureza.

### 13.4 Exercícios

- A tabela fornece coordenadas de uma partícula movendo-se no espaço ao longo de uma curva suave.
  - Determine a velocidade média nos intervalos de tempo  $[0, 1]$ ,  $[0,5; 1]$ ,  $[1, 2]$  e  $[1; 1,5]$ .
  - Estime a velocidade e a velocidade escalar da partícula no instante  $t = 1$ .

$t$	$x$	$y$	$z$
0	2,7	9,8	3,7
0,5	3,5	7,2	3,3
1,0	4,5	6,0	3,0
1,5	5,9	6,4	2,8
2,0	7,3	7,8	2,7

- A figura mostra a trajetória de uma partícula que se move com vetor posição  $\mathbf{r}(t)$  no instante  $t$ .
  - Desenhe um vetor que represente a velocidade média da partícula no intervalo de tempo  $2 \leq t \leq 2,4$ .
  - Desenhe um vetor que represente a velocidade média da partícula no intervalo de tempo  $1,5 \leq t \leq 2$ .
  - Escreva uma expressão para o vetor velocidade  $\mathbf{v}(2)$ .
  - Desenhe uma aproximação do vetor  $\mathbf{v}(2)$  e estime a velocidade escalar da partícula em  $t = 2$ .



**3–8** Determine a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar da partícula cuja função posição é dada. Esboce a trajetória da partícula e desenhe os vetores velocidade e aceleração para os valores de  $t$  especificados.

- $\mathbf{r}(t) = \langle -\frac{1}{2}t^2, t \rangle, \quad t = 2$
- $\mathbf{r}(t) = \langle 2 - t, 4\sqrt{t} \rangle, \quad t = 1$
- $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j}, \quad t = \pi/3$
- $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{2t} \mathbf{j}, \quad t = 0$
- $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}, \quad t = 1$
- $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + \sin t \mathbf{k}, \quad t = 0$

**9–14** Determine a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar da partícula cuja função posição é dada.

- $\mathbf{r}(t) = \langle t^2 + 1, t^3, t^2 - 1 \rangle$

10.  $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 3t, 2 \sin t \rangle$

11.  $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$

12.  $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + \ln t \mathbf{k}$

13.  $\mathbf{r}(t) = e^t(\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k})$

14.  $\mathbf{r}(t) = t \sin t \mathbf{i} + t \cos t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$

15–16 Determine os vetores velocidade e posição de uma partícula, dadas a sua aceleração, velocidade e posição iniciais.

15.  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$

16.  $\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 12t^2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

## 17–18

(a) Determine o vetor posição de uma partícula, dada a sua aceleração e suas velocidade e posição iniciais.

(b) Utilize o computador para traçar a trajetória percorrida pela partícula.

17.  $\mathbf{a}(t) = 2t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \cos 2t \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$

18.  $\mathbf{a}(t) = t \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. A função posição de uma partícula é dada por  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 5t, t^2 - 16t \rangle$ . Quando sua velocidade escalar é mínima?

20. Qual a força necessária para que uma partícula de massa  $m$  tenha a função posição  $\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$ ?

21. Uma força com magnitude 20 N atua diretamente para cima do plano  $xy$  em um objeto com massa de 4 kg. O objeto começa na origem com velocidade inicial  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ . Encontre a sua função posição e a sua velocidade no instante  $t$ .

22. Mostre que, se uma partícula se move com velocidade escalar constante, então os vetores velocidade e aceleração são ortogonais.

23. Um projétil é disparado com uma velocidade escalar inicial de 200 m/s e ângulo de elevação de  $60^\circ$ . Determine (a) o alcance do projétil, (b) a altura máxima atingida e (c) a velocidade escalar no impacto.

24. Repita o Exercício 23, considerando agora o projétil disparado de uma posição 100 m acima do solo.

25. Uma bola é atirada em um ângulo de elevação de  $45^\circ$  em relação ao solo. Se a bola cai no solo a uma distância de 90 m, qual a velocidade escalar inicial da bola?

26. Uma arma é disparada com ângulo de elevação de  $30^\circ$ . Qual a velocidade de disparo se o máximo de altura que a bala atinge é de 500 m?

27. A velocidade de disparo de uma arma é 150 m/s. Determine dois ângulos de elevação que podem ser utilizados para atingir um alvo que está a 800 m de distância.

28. No beisebol, um bateador rebate uma bola, que está 3 pés acima do chão, em direção à parte central da cerca do campo, que tem 10 pés de altura e dista 400 pés da base do lançamento. A bola deixa o bastão com uma velocidade escalar de 115 pés/s e com ângulo de  $50^\circ$  acima da horizontal. Foi *home run*? (Em outras palavras, a bola passou por cima da cerca?)

29. Uma cidade medieval tem a forma de um quadrado e está protegida pelas muralhas com comprimento de 500 m de altura de 15 m.

Você é o comandante de um exército de ataque e o mais próximo que você pode chegar da muralha é 100 m. Seu plano é incendiar à cidade catapultando rochas aquecidas sobre a parede (com uma velocidade inicial de 80 m/s). Em que intervalo de ângulos você deve dizer a seus homens para armar a catapulta? (Suponha que a trajetória das rochas seja perpendicular à muralha.)

30. Mostre que um projétil atinge três quartos da sua altura máxima em metade do tempo necessário para atingir a sua altura máxima.

31. Uma bola é lançada para o ar para leste a partir da origem (na direção do eixo  $x$  positivo). A velocidade inicial é  $50\mathbf{i} + 80\mathbf{k}$ , com a velocidade medida em pés por segundo. A rotação da bola resulta em uma aceleração em direção ao sul de  $4$  pés/s<sup>2</sup>, de modo que o vetor aceleração é  $\mathbf{a} = -4\mathbf{j} - 32\mathbf{k}$ . Onde a bola cai e com que velocidade escalar?

32. Uma bola com massa 0,8 kg é arremessada ao ar em direção ao sul com velocidade escalar de 30 m/s e ângulo de  $30^\circ$  com o solo. Um vento do oeste aplica uma força constante de 4 N à bola na direção leste. Onde a bola cai e com que velocidade escalar?

33. A água, descendo por um trecho reto de um rio, em geral escoia mais rapidamente no meio e a velocidade escalar diminui para quase zero nas margens. Considere um trecho longo de rio escoando para o norte com as margens paralelas distando 40 m uma da outra. Se a velocidade máxima da água é de 3 m/s, pode-se utilizar uma função quadrática como um modelo básico para a taxa de fluxo de água  $x$  unidades de distância da margem oeste:  $f(x) = \frac{3}{400}x(40 - x)$ .

(a) Um barco se move com uma velocidade escalar constante de 5 m/s a partir de um ponto de  $A$  na margem oeste enquanto se mantém direcionado perpendicularmente à margem. A que distância rio abaixo, na margem oposta, o barco vai atingir a terra firme? Faça um gráfico da trajetória do barco.

(b) Suponha que quiséssemos pilotar o barco para terra no ponto  $B$  na margem leste em frente  $A$ . Se mantivermos uma velocidade constante de 5 m/s, e uma direção constante, encontre o ângulo em que o barco deve dirigir. Depois, faça o gráfico do caminho real que o barco segue. Essa trajetória parece realista?

34. Outro modelo razoável para a velocidade escalar da água do rio no Exercício 33 é uma função senoidal:  $f(x) = 3 \sin(\pi x/40)$ . Se o piloto do barco quiser atravessar o rio de  $A$  até  $B$  com direção constante e velocidade escalar constante de 5 m/s, determine o ângulo no qual o barco deve seguir.

35. Uma partícula tem função posição  $\mathbf{r}(t)$ . Se  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{c} \times \mathbf{r}(t)$ , onde  $\mathbf{c}$  é um vetor constante, descrevem o caminho da partícula.

36. (a) Se uma partícula se move ao longo de uma linha reta, o que você pode dizer sobre seu vetor aceleração?

(b) Se uma partícula se move com velocidade constante ao longo de uma curva, o que você pode dizer sobre seu vetor aceleração?

37–42 Determine as componentes tangencial e normal do vetor aceleração.

37.  $\mathbf{r}(t) = (3t - t^3) \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j}$

38.  $\mathbf{r}(t) = (1 + t) \mathbf{i} + (t^2 - 2t) \mathbf{j}$

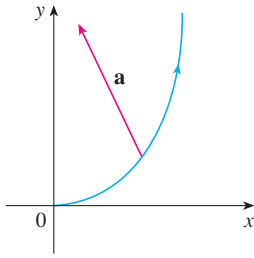
39.  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$

40.  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}$

41.  $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + \sqrt{2}t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$

42.  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \cos^2 t \mathbf{j} + \sin^2 t \mathbf{k}$

43. O módulo do vetor aceleração  $\mathbf{a}$  é  $10 \text{ cm/s}^2$ . Use a figura para estimar as componentes tangencial e normal de  $\mathbf{a}$ .



44. Se uma partícula com massa  $m$  se move com vetor posição  $\mathbf{r}(t)$ , então seu **momento angular** é definido como  $\mathbf{L}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$  e seu **torque** é definido como  $\boldsymbol{\tau}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t)$ . Mostre que  $\mathbf{L}'(t) = \boldsymbol{\tau}(t)$ . Deduza que, se  $\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{0}$  para todo  $t$ , então  $\mathbf{L}(t)$  é constante. (Essa é a *lei de conservação do momento angular*.)
45. A função posição de uma nave espacial é

$$\mathbf{r}(t) = (3 + t)\mathbf{i} + (2 + \ln t)\mathbf{j} + \left(7 - \frac{4}{t^2 + 1}\right)\mathbf{k}$$

e as coordenadas de uma estação espacial são  $(6, 4, 9)$ . O capitão quer que a nave atraque na estação espacial. Quando os motores da nave devem ser desligados?

46. Um foguete queimando seu combustível a bordo enquanto se move através do espaço tem velocidade  $\mathbf{v}(t)$  e massa  $m(t)$  no momento  $t$ . Se os gases de exaustão escapam com velocidade de  $\mathbf{v}_e$  em relação ao foguete, pode deduzir-se a partir da Segunda Lei de Newton do Movimento que

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \mathbf{v}_e$$

- (a) Mostre que  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) - \ln \frac{m(0)}{m(t)} \mathbf{v}_e$ .
- (b) Para que, em linha reta, o foguete acelere do repouso para o dobro da velocidade escalar de escape de seus gases de combustão, que fração de sua massa inicial o foguete deverá queimar como combustível?

## PROJETO APLICADO

## LEIS DE KEPLER

Johannes Kepler enunciou três leis sobre o movimento planetário, baseando-se em uma grande quantidade de dados relativos à posição dos planetas em diferentes instantes de tempo.

### LEIS DE KEPLER

1. Um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica, com o Sol em um dos focos.
2. O segmento de reta que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
3. O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do eixo maior de sua órbita.

Kepler formulou essas leis, pois elas se ajustavam aos dados astronômicos. Ele não foi capaz de perceber por que elas eram válidas nem como se relacionavam umas com as outras. Mas sir Isaac Newton, em seu *Principia Mathematica*, de 1687, mostrou como deduzir as três leis de Kepler de duas leis de sua autoria, a Segunda Lei do Movimento e a Lei da Gravitação Universal. Na Seção 13.4 demonstramos a Primeira Lei de Kepler usando o cálculo de funções vetoriais. Neste projeto, guiaremos você pela demonstração da Segunda e da Terceira Leis de Kepler e exploraremos suas consequências.

1. Utilize os seguintes passos para demonstrar a Segunda Lei de Kepler. A notação será a mesma que foi empregada na demonstração da Primeira Lei na Seção 13.4. Em particular, use coordenadas polares  $\mathbf{r} = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j}$ .

(a) Mostre que  $\mathbf{h} = r^2 \frac{d\theta}{dt} \mathbf{k}$ .

(b) Deduza que  $r^2 \frac{d\theta}{dt} = h$ .

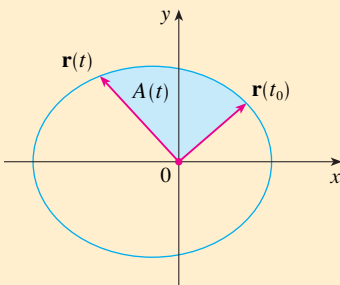
- (c) Se  $A = A(t)$  é a área varrida pelo vetor radical  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  no intervalo de tempo  $[t_0, t]$  como na figura, mostre que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

- (d) Deduza que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} h = \text{constante}$$

Essa equação mostra que a taxa na qual  $A$  é percorrida é constante e demonstra a Segunda Lei de Kepler.



2. Seja  $T$  o período de um planeta em torno do Sol; ou seja,  $T$  é o tempo necessário para o planeta dar uma volta completa em torno do Sol, em sua órbita elíptica. Suponha que os comprimentos dos eixos maior e menor da elipse sejam  $2a$  e  $2b$ .
- (a) Use a parte (d) do Problema 1 para mostrar que  $T = 2\pi ab/h$ .
- (b) Mostre que  $\frac{h^2}{GM} = ed = \frac{b^2}{a}$ .
- (c) Use as partes (a) e (b) para mostrar que  $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$ .  
Isso demonstra a Terceira Lei de Kepler.  
[Observe que a constante de proporcionalidade  $4\pi^2/(GM)$  independe do planeta.]
3. O período da Terra girando em torno do Sol é de aproximadamente 365,25 dias. Utilize esse fato e a Terceira Lei de Kepler para determinar o eixo maior da órbita terrestre. Você precisará do valor da massa do Sol,  $M = 1,99 \times 10^{30}$  kg, e da constante gravitacional,  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  N·m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.
4. É possível colocar um satélite em órbita em torno da Terra de modo que ele permaneça fixo em uma posição localizada sobre o equador. Calcule a altitude necessária para esse satélite. A massa da Terra é  $5,98 \times 10^{24}$  kg; seu raio é  $6,37 \times 10^6$  m. (Esta órbita é chamada Órbita Geoestacionária Clarke, em homenagem a Arthur C. Clarke, quem primeiro propôs a idéia, em 1945. O primeiro satélite, *Syncom II*, foi lançado em julho de 1963.)

## 13 Revisão

### Verificação de Conceitos

- O que é uma função vetorial? Como calcular sua derivada e sua integral?
- Qual a relação entre funções vetoriais e curvas espaciais?
- Como achar o vetor tangente a uma curva suave em um ponto? Como achar a reta tangente? Como determinar o vetor tangente unitário?
- Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são funções vetoriais diferenciáveis,  $c$  é um escalar e  $f$  é uma função real, escreva as regras para derivar as seguintes funções vetoriais:
 

(a) $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$	(b) $c\mathbf{u}(t)$	(c) $f(t)\mathbf{u}(t)$
(d) $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$	(e) $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$	(f) $\mathbf{u}(f(t))$
- Como achar o comprimento de uma curva espacial dada pela função vetorial  $\mathbf{r}(t)$ ?
- (a) Qual a definição de curvatura?
 

(b) Escreva a fórmula para curvatura em função de $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{T}'(t)$ .
(c) Escreva a fórmula para curvatura em função de $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$ .
(d) Escreva a fórmula para curvatura de uma curva plana com equação $y = f(x)$ .
- (a) Escreva as fórmulas para os vetores normal e binormal de uma curva suave espacial  $\mathbf{r}(t)$ .
 

(b) O que é o plano normal de uma curva em um ponto? E o plano osculador? O que é o círculo osculador?
- (a) Como determinar a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração de uma partícula que se move ao longo de uma curva espacial?
 

(b) Escreva a aceleração em termos de suas componentes tangencial e normal.
- Quais são as leis de Kepler?

### Quiz Verdadeiro-Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

- A curva com equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j} + 3t^3\mathbf{k}$  é uma reta.
- A curva  $\mathbf{r}(t) = \langle 0, t^2, 4t \rangle$  é uma parábola.
- A curva  $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, 3 - t, 0 \rangle$  é uma linha que passa através da origem.
- A derivada da função vetorial é obtida derivando cada componente da função.
- Se  $\mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{v}(t)$  são funções vetoriais diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

- Se  $\mathbf{r}(t)$  é uma função vetorial diferenciável, então

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$$

- Se  $\mathbf{T}(t)$  é o vetor tangente unitário de uma curva suave, então a curvatura é  $\kappa = |d\mathbf{T}/dt|$ .
- O vetor binormal é  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{T}(t)$ .
- Suponha que  $f$  seja duas vezes continuamente diferenciável. Em um ponto de inflexão da curva  $y = f(x)$ , a curvatura é 0.
- Se  $\kappa(t) = 0$  para todo  $t$ , a curva é uma reta.
- Se  $|\mathbf{r}(t)| = 1$  para todo  $t$ , então  $|\mathbf{r}'(t)|$  é constante.
- Se  $|\mathbf{r}(t)| = 1$  para todo  $t$ , então  $\mathbf{r}'(t)$  é ortogonal a  $\mathbf{r}(t)$  para todo  $t$ .
- O círculo osculador de uma curva  $C$  em um ponto tem o mesmo vetor tangente, vetor normal e curvatura que  $C$  naquele ponto.
- As parametrizações diferentes de uma mesma curva resultam em vetores tangentes idênticos em um mesmo ponto da curva.

**Exercícios**

1. (a) Esboce a curva com função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \cos \pi t \mathbf{j} + \sin \pi t \mathbf{k} \quad t \geq 0$$

(b) Encontre  $\mathbf{r}'(t)$  e  $\mathbf{r}''(t)$ .

2. Seja  $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{2-t}, (e^t - 1)/t, \ln(t+1) \rangle$ .

(a) Determine o domínio de  $\mathbf{r}$ .

(b) Encontre  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t)$ .

(c) Encontre  $\mathbf{r}'(t)$ .

3. Determine uma equação vetorial que represente a curva obtida pela interseção do cilindro  $x^2 + y^2 = 16$  com o plano  $x + z = 5$ .

4. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva  $x = 2 \sin t, y = 2 \sin 2t, z = 2 \sin 3t$  no ponto  $(1, \sqrt{3}, 2)$ . Desenhe a curva e a tangente em uma mesma tela.

5. Se  $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t \cos \pi t \mathbf{j} + \sin \pi t \mathbf{k}$ , calcule  $\int_0^1 \mathbf{r}(t) dt$ .

6. Seja  $C$  a curva com equação  $x = 2 - t^3, y = 2t - 1, z = \ln t$ . Encontre (a) o ponto em que  $C$  intersecta o plano  $xz$ ,

(b) as equações paramétricas da reta tangente em  $(1, 1, 0)$ , e

(c) uma equação do plano normal ao  $C$  em  $(1, 1, 0)$ .

7. Use a Regra de Simpson com  $n = 6$  para estimar o comprimento do arco da curva com as equações  $x = t^2, y = t^3, z = t^4, 0 \leq t \leq 3$ .

8. Determine o comprimento da curva  $\mathbf{r}(t) = \langle 2t^{3/2}, \cos 2t, \sin 2t \rangle, 0 \leq t \leq 1$ .

9. A hélice  $\mathbf{r}_1(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$  intercepta a curva  $\mathbf{r}_2(t) = (1+t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$  no ponto  $(1, 0, 0)$ . Determine o ângulo de intersecção dessas curvas.

10. Reparametrize a curva  $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \cos t \mathbf{k}$  com relação ao comprimento de arco medido a partir do ponto  $(1, 0, 1)$  na direção crescente de  $t$ .

11. Para a curva dada por  $\mathbf{r}(t) = \langle \frac{1}{3}t^3, \frac{1}{2}t^2, t \rangle$ , determine

(a) o vetor tangente unitário

(b) o vetor normal unitário e

(c) a curvatura.

12. Encontre a curvatura da elipse  $x = 3 \cos t, y = 4 \sin t$  no ponto  $(3, 0)$  e  $(0, 4)$ .

13. Encontre a curvatura da curva  $y = x^4$  no ponto  $(1, 1)$ .

14. Determine uma equação do círculo osculador da curva  $y = x^4 - x^2$  na origem. Faça o gráfico da curva e do círculo osculador.

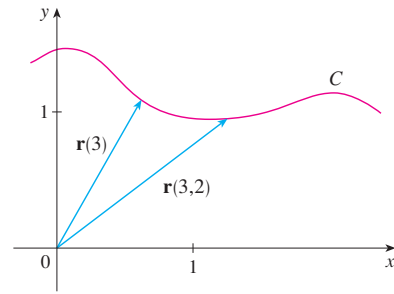
15. Determine uma equação do plano osculador da curva  $x = \sin 2t, y = t, z = \cos 2t$  no ponto  $(0, \pi, 1)$ .

16. A figura mostra a curva  $C$  traçada por uma partícula com vetor posição  $\mathbf{r}(t)$  no instante  $t$ .

(a) Desenhe um vetor que represente a velocidade média da partícula no intervalo de tempo  $3 \leq t \leq 3,2$ .

(b) Escreva a expressão para a velocidade  $\mathbf{v}(3)$ .

(c) Escreva uma expressão para o vetor tangente unitário  $\mathbf{T}(3)$  e desenhe-o.



17. Uma partícula se move com função posição  $\mathbf{r}(t) = t \ln t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$ . Determine a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração da partícula.

18. Uma partícula começa na origem com velocidade inicial  $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ . Sua aceleração é  $\mathbf{a}(t) = 6t \mathbf{i} + 12t^2 \mathbf{j} - 6t \mathbf{k}$ . Determine sua função posição.

19. Um atleta arremessa um disco em um ângulo de  $45^\circ$  em relação à horizontal com velocidade escalar inicial de 13 m/s. Ele deixa sua mão 2 m acima do solo.

(a) Onde está o disco 2 segundos depois?

(b) Qual a altura máxima que o disco atinge?

(c) Onde o disco atinge o chão?

20. Determine as componentes tangencial e normal do vetor aceleração de uma partícula que se move com vetor posição

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$$

21. Um disco de raio está rodando no sentido anti-horário com uma velocidade angular constante  $\omega$ . Uma partícula inicia no centro do disco e se move em direção às bordas em uma direção radial fixa de forma que sua posição no instante  $t, t \geq 0$ , é dada por  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{R}(t)$ , onde

$$\mathbf{R}(t) = \cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}$$

(a) Mostre que a velocidade  $\mathbf{v}$  da partícula é

$$\mathbf{v} = \cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j} + t\mathbf{v}_d$$

onde  $\mathbf{v}_d = \mathbf{R}'(t)$  é a velocidade do ponto na borda do disco.

(b) Mostre que a aceleração  $\mathbf{a}$  da partícula é

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{v}_d + t\mathbf{a}_d$$

onde  $\mathbf{a}_d = \mathbf{R}''(t)$  é a aceleração na borda do disco. O termo extra  $2\mathbf{v}_d$  é chamado *aceleração de Coriolis*; é o resultado da interação entre a rotação do disco e o movimento da partícula. Podemos obter uma demonstração física dessa aceleração andando em direção à borda de um carrossel.

(c) Determine a aceleração de Coriolis de uma partícula que se move em um disco rodando segundo a equação

$$\mathbf{r}(t) = e^{-t} \cos \omega t \mathbf{i} + e^{-t} \sin \omega t \mathbf{j}$$

22. No projeto de *curvas de transferência*, usadas para para ligar trechos de ferrovia em trilhos retos, é importante perceber que a

aceleração do trem deve ser contínua, de modo que a força de reação exercida pelo trem na pista também é contínua. Por causa das fórmulas para os componentes de aceleração na Seção 13.4, este só será o caso se a curvatura variar continuamente.

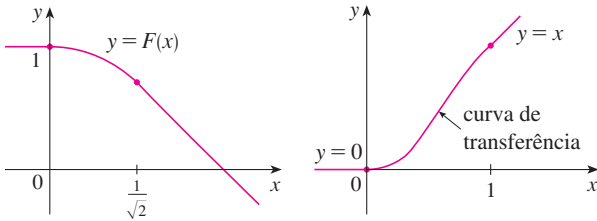
(a) Um candidato lógico à curva de transferência para juntar dois trilhos existentes dados por  $y = 1$  para  $x \leq 0$  e  $y = \sqrt{2} - x$  para  $x \geq 1/\sqrt{2}$  poderia ser a função  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $0 < x < 1/\sqrt{2}$ , cujo gráfico é o arco de círculo mostrado na figura. À primeira vista, parece razoável. Demonstre que a função

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{se } 0 < x < 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - x & \text{se } x \geq 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

é contínua e tem derivada contínua, mas não tem curvatura contínua. Assim  $f$  não é uma curva de transferência adequada.



(b) Determine um polinômio de quinto grau para servir de curva de transferência entre os dois segmentos de reta:  $y = 0$  para  $x \leq 0$  e  $y = x$  para  $x \geq 1$ . Poderíamos utilizar um polinômio de quarto grau? Use uma calculadora gráfica ou computador para esboçar o gráfico da função “conectada” e verifique que ele se assemelha ao da figura.



23. Uma partícula  $P$  move-se com velocidade angular constante  $\omega$  em torno de um círculo com centro na origem e raio  $R$ . A partícula é considerada em *movimento circular uniforme*. Suponha que o movimento seja no sentido anti-horário e que a partícula esteja no ponto  $(R, 0)$  quando  $t = 0$ . O vetor posição no instante  $t \geq 0$  é  $\mathbf{r}(t) = R \cos \omega t \mathbf{i} + R \sin \omega t \mathbf{j}$ .

(a) Encontre o vetor velocidade  $\mathbf{v}$  e mostre que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$ . Conclua que  $\mathbf{v}$  é tangente ao círculo e tem sentido igual ao do movimento.

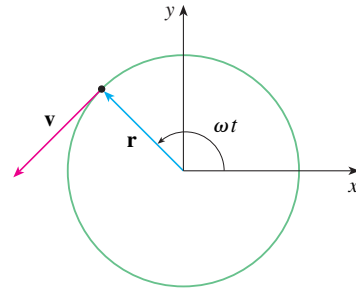
(b) Mostre que a velocidade  $|\mathbf{v}|$  da partícula é a constante  $\omega R$ . O período  $T$  da partícula é o tempo requerido para uma volta completa. Conclua que

$$T = \frac{2\pi R}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\pi}{\omega}$$

(c) Encontre o vetor aceleração  $\mathbf{a}$ . Mostre que ele é proporcional a  $\mathbf{r}$  e que aponta para a origem. Uma aceleração com essa propriedade é chamada *aceleração centrípeta*. Mostre que o módulo do vetor aceleração é  $|\mathbf{a}| = R\omega^2$ .

(d) Suponha que a partícula tenha uma massa  $m$ . Mostre que a magnitude da força  $\mathbf{F}$  que é necessária para produzir esse movimento, denominada *força centrípeta*, é

$$|\mathbf{F}| = \frac{m|\mathbf{v}|^2}{R}$$



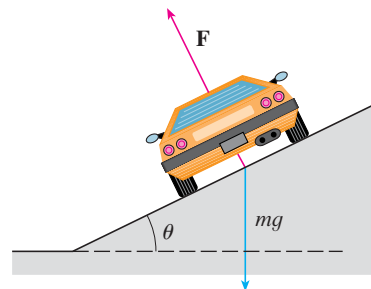
24. Uma curva circular de raio  $R$  em uma autoestrada é inclinada em um ângulo de  $\theta$  de modo que um carro possa passar pela curva sem derrapar quando não existe atrito entre a estrada e os pneus. A perda de atrito ocorre, por exemplo, se a estrada está coberta com uma fina camada de água ou de gelo. A velocidade escalar nominal  $v_R$  associada a uma curva é a velocidade escalar máxima que o carro pode atingir sem derrapar. Suponha que um carro de massa  $m$  esteja transpondo a curva com a velocidade escalar nominal  $v_R$ . Duas forças que atuam sobre o carro: a força vertical,  $mg$ , devido ao peso do carro, e uma força  $\mathbf{F}$  exercida pela estrada, perpendicular a ela (veja a figura).

A componente vertical de  $\mathbf{F}$  equilibra o peso do carro, de forma que  $|\mathbf{F}| \cos \theta = mg$ . A componente horizontal de  $\mathbf{F}$  produz uma força centrípeta no carro de forma que, pela Segunda Lei de Newton e pela parte (d) do Problema 23,

$$|\mathbf{F}| \sin \theta = \frac{mv_R^2}{R}$$

(a) Mostre que  $v_R^2 = Rg \tan \theta$ .  
 (b) Determine a velocidade escalar nominal associada a uma curva circular de raio 120 m que é inclinada em um ângulo de  $12^\circ$ .

(c) Suponha que os engenheiros projetistas queiram manter a inclinação em  $12^\circ$ , mas desejem aumentar a velocidade escalar nominal em 50%. Nesse caso, qual deve ser o raio da curva?



## Problemas Quentes

1. Um projétil é disparado da origem com um ângulo de elevação  $\alpha$  e velocidade inicial  $v_0$ . Supondo que a resistência do ar seja desprezível e que a única força que age sobre o projétil seja a gravidade,  $g$ , foi mostrado no Exemplo 5 da Seção 13.4 que o vetor posição do projétil é  $\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \alpha)t \mathbf{i} + [(v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2] \mathbf{j}$ . Também foi mostrado que o alcance máximo do projétil ocorre quando  $\alpha = 45^\circ$  e, nesse caso, o alcance é  $R = v_0^2/g$ .

- (a) Qual é o ângulo no qual o projétil deve ser disparado para atingir a altura máxima e qual é essa altura?  
 (b) Fixe uma velocidade inicial  $v_0$  e considere a parábola  $x^2 + 2Ry - R^2 = 0$ , cujo gráfico é exposto na figura. Mostre que o projétil pode atingir qualquer alvo dentro ou na fronteira da região limitada pela parábola e pelo eixo  $x$ , e que o projétil não pode atingir nenhum alvo fora dessa região.  
 (c) Suponha que o lançador do projétil tenha um ângulo de inclinação  $\alpha$  quando mirando um alvo que esteja suspenso a uma altura  $h$  diretamente acima de um ponto  $D$  unidades à frente. O alvo é solto no instante em que o projétil é lançado. Mostre que o projétil sempre atinge o alvo, independentemente da velocidade  $v_0$ , desde que o projétil não atinja o solo “antes” de  $D$ .

2. (a) Um projétil é disparado a partir da origem em direção a um plano inclinado para baixo em um ângulo  $\theta$  com a horizontal. O ângulo de elevação do lançador e a velocidade escalar inicial do projétil são  $\alpha$  e  $v_0$ , respectivamente. Encontre o vetor posição do projétil e as equações paramétricas da trajetória do projétil como funções do tempo  $t$ . (Ignore a resistência do ar.)  
 (b) Mostre que o ângulo  $\alpha$  de elevação que vai maximizar o alcance do projétil no plano inclinado é a metade do ângulo entre o plano e a vertical.  
 (c) Suponha que o projétil seja lançado sobre um plano inclinado para cima cujo ângulo de inclinação é  $\theta$ . Mostre que, a fim de maximizar o alcance (ladeira acima), o projétil deverá ser disparado em direção à metade do ângulo entre o plano e a vertical.  
 (d) Em um artigo apresentado em 1686, Edmond Halley resumiu as leis da gravitação e do movimento de projéteis e as aplicou à artilharia. Um dos problemas propostos por ele envolvia disparar um projétil para atingir um alvo a uma distância  $R$  em um plano inclinado para cima. Mostre que o ângulo no qual o projétil deve ser disparado para atingir o alvo, mas usando a menor quantidade de energia, é o mesmo que o ângulo da parte (c). (Use o fato de que a energia necessária para disparar o projétil é proporcional ao quadrado da velocidade inicial; assim, minimizar a energia equivale a minimizar a velocidade inicial.)

3. Uma bola rola de uma mesa com velocidade escalar de 0,5 m/s. A mesa tem 1,2 m de altura.

- (a) Determine o ponto no qual a bola atinge o solo e encontre sua velocidade escalar no instante do impacto.  
 (b) Encontre o ângulo  $\theta$  entre a trajetória da bola e a reta vertical que passa pelo ponto de impacto (veja a figura).  
 (c) Suponha que a bola repique no solo no mesmo ângulo com o qual ela o atinge, mas que perca 20% de sua velocidade escalar em virtude da energia absorvida no impacto. Onde a bola atinge o chão no segundo repique?

4. Determine a curvatura da curva com equações paramétricas

$$x = \int_0^t \sin(\frac{1}{2}\pi\theta^2) d\theta \quad y = \int_0^t \cos(\frac{1}{2}\pi\theta^2) d\theta$$

5. Se um projétil é disparado com ângulo de elevação  $\alpha$  e velocidade escalar inicial  $v$ , as equações paramétricas de sua trajetória são  $x = (v \cos \alpha)t$ ,  $y = (v \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$ . (Veja o Exemplo 5, na Seção 13.4.) Sabemos que o alcance (distância horizontal percorrida) é maximizado quando  $\alpha = 45^\circ$ . Qual valor de  $\alpha$  maximiza a distância total percorrida pelo projétil? (Dê sua resposta com precisão de um grau.)

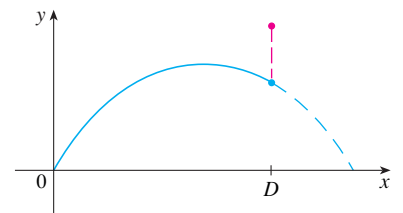
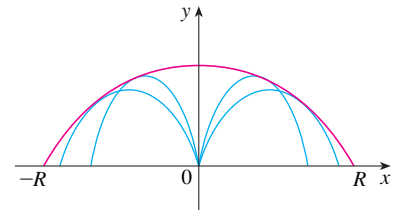


FIGURA PARA O PROBLEMA 1

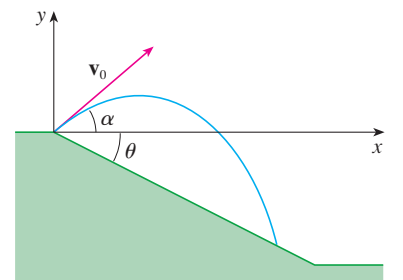


FIGURA PARA O PROBLEMA 2

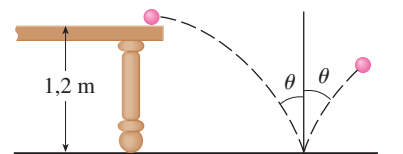


FIGURA PARA O PROBLEMA 3

6. Um cabo tem raio  $r$  e comprimento  $L$  e é enrolado em torno de um carretel com raio  $R$  sem excesso de lapidação. Qual é o comprimento mais curto ao longo da bobina, que é coberta pelo cabo?
7. Mostre que a curva com equação vetorial
- $$\mathbf{r}(t) = \langle a_1 t^2 + b_1 t + c_1, a_2 t^2 + b_2 t + c_2, a_3 t^2 + b_3 t + c_3 \rangle$$
- encontra-se em um plano e encontre uma equação do plano.