

# Sumário

Prefácio	xi
Testes de Verificação	xxi
Uma Apresentação do Cálculo	xxvii

---

## 9 Equações Diferenciais 525

---

9.1	Modelagem com Equações Diferenciais	526
9.2	Campos de Direções e Método de Euler	531
9.3	Equações Separáveis	538
	Projeto Aplicado ■ Quanto Rapidamente um Tanque Esvazia?	546
	Projeto Aplicado ■ O Que É Mais Rápido, Subir ou Descer?	547
9.4	Modelos para Crescimento Populacional	548
9.5	Equações Lineares	557
9.6	Sistemas Predador-Presa	563
	Revisão	569
	Problemas Quentes	572



## 10 Equações Paramétricas e Coordenadas Polares 575

---

10.1	Curvas Definidas por Equações Paramétricas	576
	Projeto de Laboratório ■ Rolando Círculos ao Redor de Círculos	583
10.2	Cálculo com Curvas Parametrizadas	584
	Projeto de Laboratório ■ Curvas de Bézier	591
10.3	Coordenadas Polares	592
	Projeto de Laboratório ■ Famílias de Curvas Polares	601
10.4	Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares	602
10.5	Seções Cônicas	606
10.6	Seções Cônicas em Coordenadas Polares	613
	Revisão	619
	Problemas Quentes	621



## 11 Sequências e Séries Infinitas 623

---

11.1	Sequências	624
	Projeto de Laboratório ■ Sequências Logísticas	635
11.2	Séries	636
11.3	O Teste da Integral e Estimativas de Somas	645
11.4	Os Testes de Comparação	652
11.5	Séries Alternadas	657
11.6	Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz	661
11.7	Estratégia para Testes de Séries	667



11.8	Séries de Potência	669
11.9	Representações de Funções como Séries de Potências	674
11.10	Séries de Taylor e Maclaurin	679
	Projeto de Laboratório ■ Um Limite Elusivo	691
	Projeto Escrito ■ Como Newton Descobriu a Série Binomial	691
11.11	Aplicações dos Polinômios de Taylor	692
	Projeto Aplicado ■ Radiação Proveniente das Estrelas	700
	Revisão	701
	Problemas Quentes	703

## 12 Vetores e a Geometria do Espaço 707

12.1	Sistemas de Coordenadas Tridimensionais	708
12.2	Vetores	713
12.3	O Produto Escalar	721
12.4	O Produto Vetorial	727
	Projeto de Descoberta ■ A Geometria de um Tetraedro	734
12.5	Equações de Retas e Planos	735
	Projeto de Laboratório ■ Colocando 3D em Perspectiva	743
12.6	Cilindros e Superfícies Quádricas	744
	Revisão	750
	Problemas Quentes	752



## 13 Funções Vetoriais 755

13.1	Funções Vetoriais e Curvas Espaciais	756
13.2	Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais	763
13.3	Comprimento de Arco e Curvatura	768
13.4	Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração	776
	Projeto Aplicado ■ Leis de Kepler	785
	Revisão	786
	Problemas Quentes	789



## 14 Derivadas Parciais 791

14.1	Funções de Várias Variáveis	792
14.2	Limites e Continuidade	804
14.3	Derivadas Parciais	811
14.4	Planos Tangentes e Aproximações Lineares	823
14.5	A Regra da Cadeia	831
14.6	Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente	839
14.7	Valores Máximo e Mínimo	850
	Projeto Aplicado ■ Projeto de uma Caçamba	858
	Projeto de Descoberta ■ Aproximações Quadráticas e Pontos Críticos	859
14.8	Multiplicadores de Lagrange	860
	Projeto Aplicado ■ Ciência dos Foguetes	866
	Projeto Aplicado ■ Otimização de uma Turbina Hidráulica	867
	Revisão	868
	Problemas Quentes	871





## 15 Integrais Múltiplas 873

- 15.1 Integrais Duplas sobre Retângulos 874
  - 15.2 Integrais Iteradas 882
  - 15.3 Integrais Duplas sobre Regiões Gerais 887
  - 15.4 Integrais Duplas em Coordenadas Polares 895
  - 15.5 Aplicações de Integrais Duplas 901
  - 15.6 Área de Superfície 910
  - 15.7 Integrais Triplas 913
    - Projeto de Descoberta ■ Volumes de Hiperesferas 922
  - 15.8 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas 922
    - Projeto de Laboratório ■ A Intersecção de Três Cilindros 926
  - 15.9 Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas 927
    - Projeto Aplicado ■ Corrida na Rampa 933
  - 15.10 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas 933
    - Revisão 941
- Problemas Quentes 944



## 16 Cálculo Vetorial 947

- 16.1 Campos Vetoriais 948
  - 16.2 Integrais de Linha 954
  - 16.3 O Teorema Fundamental das Integrais de Linha 963
  - 16.4 Teorema de Green 971
  - 16.5 Rotacional e Divergente 977
  - 16.6 Superfícies Parametrizadas e suas Áreas 983
  - 16.7 Integrais de Superfície 993
  - 16.8 Teorema de Stokes 1003
    - Projeto Aplicado ■ Três Homens e Dois Teoremas 1007
  - 16.9 O Teorema do Divergente 1008
  - 16.10 Resumo 1013
    - Revisão 1014
- Problemas Quentes 1016



## 17 Equações Diferenciais de Segunda Ordem 1019

- 17.1 Equações Lineares de Segunda Ordem 1020
- 17.2 Equações Lineares Não Homogêneas 1026
- 17.3 Aplicações de Equações Diferenciais de Segunda Ordem 1032
- 17.4 Soluções em Séries 1039
  - Revisão 1043

## Apêndices A1

- A Números, Desigualdades e Valores Absolutos A2
- B Geometria Analítica e Retas A9
- C Gráficos de Equações de Segundo Grau A14
- D Trigonometria A21
- E Notação de Somatória (Ou Notação Sigma) A30
- F Demonstrações dos Teoremas A35

<b>G</b>	O Logaritmo Definido como uma Integral	A44
<b>H</b>	Números Complexos	A51
<b>I</b>	Respostas para os Exercícios Ímpares	A58

## Índice Remissivo I1

---

### Volume I

---

<b>Capítulo 1</b>	Funções e Modelos
<b>Capítulo 2</b>	Limites e Derivadas
<b>Capítulo 3</b>	Regras de Derivação
<b>Capítulo 4</b>	Aplicações de Derivação
<b>Capítulo 5</b>	Integrais
<b>Capítulo 6</b>	Aplicações de Integração
<b>Capítulo 7</b>	Técnicas de Integração
<b>Capítulo 8</b>	Mais Aplicações de Integração

## H Números Complexos

Um **número complexo** pode ser representado por uma expressão da forma  $a + bi$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais e  $i$  é um símbolo com a propriedade de que  $i^2 = -1$ . O número complexo  $a + bi$  também pode ser representado pelo par ordenado  $(a, b)$  e desenhado como um ponto em um plano (chamado de plano de Argand) como na Figura 1. Assim, o número complexo  $i = 0 + 1 \cdot i$  é identificado com o ponto  $(0, 1)$ .

A **parte real** do número complexo  $a + bi$  é o número real  $a$  e a **parte imaginária** é o número real  $b$ . Desse modo, a parte real de  $4 - 3i$  é 4 e a parte imaginária é  $-3$ . Dois números complexos  $a + bi$  e  $c + di$  são **iguais** se  $a = c$  e  $b = d$ , isto é, se suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são iguais. No plano de Argand, o eixo horizontal é denominado eixo real, ao passo que o eixo vertical é chamado de eixo imaginário.

A soma e a diferença de dois números complexos são definidas pela soma ou subtração de suas partes reais e imaginárias:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Por exemplo,

$$(1 - i) + (4 + 7i) = (1 + 4) + (-1 + 7)i = 5 + 6i$$

O produto de dois números complexos é definido de forma que as propriedades comutativa e distributiva usuais sejam válidas:

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= a(c + di) + (bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \end{aligned}$$

Uma vez que  $i^2 = -1$ , isso se torna

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

### EXEMPLO 1

$$\begin{aligned} (-1 + 3i)(2 - 5i) &= (-1)(2 - 5i) + 3i(2 - 5i) \\ &= -2 + 5i + 6i - 15(-1) = 13 + 11i \end{aligned}$$

A divisão entre números complexos se parece muito com a racionalização do denominador de uma expressão racional. Para um número complexo  $z = a + bi$ , definimos seu **complexo conjugado** como  $\bar{z} = a - bi$ . Para encontrarmos o quociente de dois números complexos, multiplicamos o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador.

**EXEMPLO 2** Expresse o número  $\frac{-1 + 3i}{2 + 5i}$  na forma  $a + bi$ .

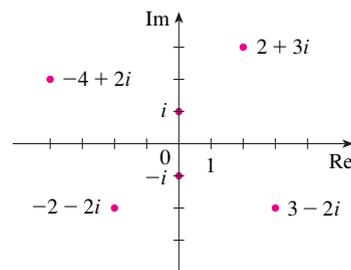
**SOLUÇÃO** Multiplicamos o numerador e o denominador pelo complexo conjugado de  $2 + 5i$ , isto é,  $2 - 5i$ , e levamos em conta o resultado do Exemplo 1:

$$\frac{-1 + 3i}{2 + 5i} = \frac{-1 + 3i}{2 + 5i} \cdot \frac{2 - 5i}{2 - 5i} = \frac{13 + 11i}{2^2 + 5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i$$

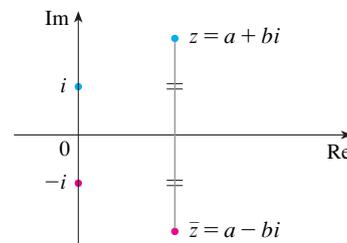
A interpretação geométrica do complexo conjugado encontra-se na Figura 2:  $\bar{z}$  é a reflexão de  $z$  no eixo real. Uma lista das propriedades do complexo conjugado é apresentada a seguir. As demonstrações seguem da definição e serão pedidas no Exercício 18.

#### Propriedades dos Conjugados

$$\overline{\bar{z}} = z \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w} \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$



**FIGURA 1**  
Números complexos como pontos no plano Argand



**FIGURA 2**

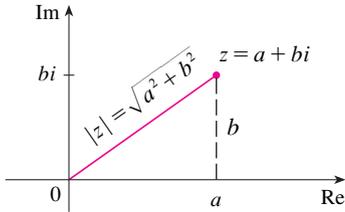


FIGURA 3

O **módulo**, ou **valor absoluto**,  $|z|$  de um número complexo  $z = a + bi$  é sua distância até a origem. Da Figura 3 vemos que se  $z = a + bi$ , então

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observe que

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

e assim

$$z\bar{z} = |z|^2$$

Isso explica por que o processo de divisão no Exemplo 2 funciona em geral:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

Como  $i^2 = -1$ , podemos pensar em  $i$  como raiz quadrada de  $-1$ . Mas observe que nós também temos  $(-i)^2 = i^2 = -1$  e, portanto,  $-i$  também é uma raiz quadrada de  $-1$ . Dizemos que  $i$  é a **raiz quadrada principal** de  $-1$  e escrevemos  $\sqrt{-1} = i$ . Em geral, se  $c$  é um número positivo, escrevemos

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}i$$

Com essa convenção, a dedução usual e a fórmula para as raízes de uma equação quadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  são válidas mesmo que  $b^2 - 4ac < 0$ :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**EXEMPLO 3** Encontre as raízes da equação  $x^2 + x + 1 = 0$ .

**SOLUÇÃO** Usando a fórmula quadrática temos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Observamos que as soluções da equação no Exemplo 3 são complexas conjugadas uma da outra. Em geral, as soluções de qualquer equação quadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  com coeficientes reais  $a, b$  e  $c$  são sempre complexas conjugadas. (Se  $z$  é real,  $\bar{z} = z$ ,  $z$  é sua própria conjugada.)

Vimos que se permitirmos números complexos como soluções, então toda equação quadrática tem solução. Mais geralmente, é verdade que toda equação polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

de grau no mínimo 1 tem solução entre os números complexos. Esse fato é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra e foi demonstrado por Gauss.

### Forma Polar

Sabemos que qualquer número complexo  $z = a + bi$  pode ser considerado como um ponto  $(a, b)$  e que esse ponto pode ser representado em coordenadas polares  $(r, \theta)$  com  $r \geq 0$ . De fato,

$$a = r \cos \theta \quad b = r \sin \theta$$

como na Figura 4. Portanto, temos

$$z = a + bi = (r \cos \theta) + (r \sin \theta)i$$

Assim, podemos escrever qualquer número complexo  $z$  na forma

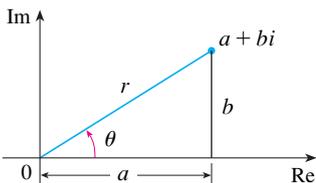


FIGURA 4



**EXEMPLO 5** Encontre o produto dos números complexos  $1 + i$  e  $\sqrt{3} - i$  na forma polar.

**SOLUÇÃO** Do Exemplo 4, temos

$$1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$$

e

$$\sqrt{3} - i = 2 \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right]$$

Portanto, pela Equação 1,

$$\begin{aligned} (1 + i)(\sqrt{3} - i) &= 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

Isso está ilustrado na Figura 8.

O uso repetido da Fórmula 1 mostra como calcular as potências de um número complexo. Se

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

então

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$

e

$$z^3 = z z^2 = r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)$$

Em geral, obtemos o seguinte resultado, cujo nome é uma homenagem ao matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754).

**2 Teorema de De Moivre** Se  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  e  $n$  for um inteiro positivo, então

$$z^n = [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Isso nos diz que *para obtermos a  $n$ -ésima potência de um número complexo, elevamos à  $n$ -ésima potência o módulo e multiplicamos o argumento por  $n$ .*

**EXEMPLO 6** Encontre  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$ .

**SOLUÇÃO** Como  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i)$ , segue do Exemplo 4(a) que  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  tem a forma polar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$$

Portanto, pelo Teorema de De Moivre,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right)^{10} &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{10} \left( \cos \frac{10\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{10\pi}{4} \right) \\ &= \frac{2^5}{2^{10}} \left( \cos \frac{5\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2} \right) = \frac{1}{32} i \end{aligned}$$

O Teorema de De Moivre também pode ser usado para achar as  $n$ -ésimas raízes dos números complexos. Uma  $n$ -ésima raiz de um número complexo  $z$  é um número complexo  $w$  tal que

$$w^n = z$$

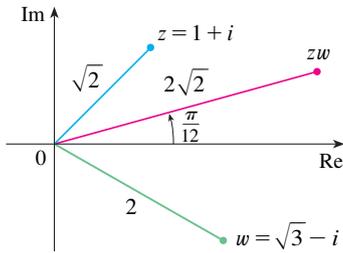


FIGURA 8

Escrevendo esses dois números na forma polar com

$$w = s(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) \quad \text{e} \quad z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

e usando o Teorema de De Moivre, obtemos

$$s^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

A igualdade desses dois números complexos mostra que

$$s^n = r \quad \text{ou} \quad s = r^{1/n}$$

e  $\cos n\phi = \cos \theta \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} n\phi = \operatorname{sen} \theta$

Do fato de que seno e cosseno têm período  $2\pi$  segue que

$$n\phi = \theta + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Logo, 
$$w = r^{1/n} \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

Uma vez que essa expressão resulta em valores diferentes de  $w$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ , temos o seguinte.

**3 Raízes de um Número Complexo** Seja  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  e seja  $n$  um inteiro positivo. Então  $z$  tem as  $n$  raízes  $n$ -ésimas distintas

$$w_k = r^{1/n} \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

onde  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

Observe que cada uma das raízes  $n$ -ésimas de  $z$  tem módulo  $|w_k| = r^{1/n}$ . Assim, todas as raízes  $n$ -ésimas de  $z$  estão sobre a circunferência de raio  $r^{1/n}$  no plano complexo. Também, uma vez que o argumento de cada uma das raízes  $n$ -ésimas excede o argumento da raiz anterior por  $2\pi/n$ , vemos que as raízes  $n$ -ésimas de  $z$  são igualmente espaçadas sobre essa circunferência.

**EXEMPLO 7** Encontre as seis raízes sextas de  $z = -8$  e represente-as no plano complexo.

**SOLUÇÃO** Na forma trigonométrica,  $z = 8(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$ . Aplicando a Equação 3 com  $n = 6$ , obtemos

$$w_k = 8^{1/6} \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k\pi}{6} \right)$$

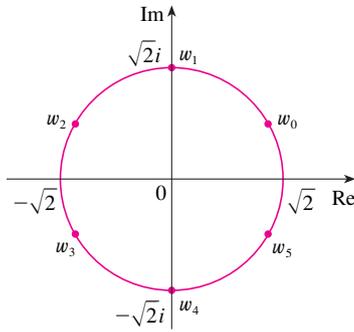
Obtemos as seis raízes sextas de  $-8$  fazendo  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  nesta fórmula:

$$w_0 = 8^{1/6} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right)$$

$$w_1 = 8^{1/6} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2} i$$

$$w_2 = 8^{1/6} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right)$$

$$w_3 = 8^{1/6} \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right)$$



**FIGURA 9**  
As seis raízes sextas de  $z = -8$

$$w_4 = 8^{1/6} \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right) = -\sqrt{2} i$$

$$w_5 = 8^{1/6} \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right)$$

Todos esses pontos estão sobre a circunferência de raio  $\sqrt{2}$ , como mostrado na Figura 9. ■

### Exponenciais Complexas

Precisamos também dar um significado para a expressão  $e^z$  quando  $z = x + iy$  for um número complexo. A teoria das séries infinitas desenvolvida no Capítulo 11, no Volume II, pode ser estendida para o caso onde os termos são números complexos. Usando a série de Taylor para  $e^x$  (11.10.11) como guia, definimos

$$4 \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

e resulta que essa função exponencial complexa tem as mesmas propriedades que a função exponencial real. Em particular, é verdade que

$$5 \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

Se fizermos  $z = iy$ , onde  $y$  é um número real, na Equação 4, e usarmos o fato de que

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \dots$$

obtemos

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i \frac{y^5}{5!} + \dots \\ &= \left( 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots \right) + i \left( y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \cos y + i \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

Usamos aqui as séries de Taylor para  $\cos y$  e  $\operatorname{sen} y$  (Equações 11.10.16 e 11.10.15). O resultado é a famosa fórmula denominada **fórmula de Euler**:

$$6 \quad e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Combinando a fórmula de Euler com a Equação 5, obtemos

$$7 \quad e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Poderíamos ter escrito o resultado do Exemplo 8(a) como

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Essa equação relaciona os números mais famosos de toda a matemática: 0, 1,  $e$ ,  $i$  e  $\pi$ .

**EXEMPLO 8** Calcule: (a)  $e^{i\pi}$  (b)  $e^{-1+i\pi/2}$

### SOLUÇÃO

(a) Da Equação de Euler [6], temos

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + i(0) = -1$$

(b) Usando a Equação 7, obtemos

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{e} [0 + i(1)] = \frac{i}{e}$$

Finalmente, observamos que a equação de Euler nos fornece um meio mais fácil de demonstrar o Teorema de De Moivre:

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

## H Exercícios

**1–14** Calcule a expressão e escreva sua resposta na forma  $a + bi$ .

- |                            |  |
|----------------------------|--|
| 1. $(5 - 6i) + (3 + 2i)$   | 2. $(4 - \frac{1}{2}i) - (9 + \frac{5}{2}i)$ |
| 3. $(2 + 5i)(4 - i)$       | 4. $(1 - 2i)(8 - 3i)$                        |
| 5. $\overline{12 + 7i}$    | 6. $\overline{2i(\frac{1}{2} - i)}$          |
| 7. $\frac{1 + 4i}{3 + 2i}$ | 8. $\frac{3 + 2i}{1 - 4i}$                   |
| 9. $\frac{1}{1 + i}$       | 10. $\frac{3}{4 - 3i}$                       |
| 11. $i^3$                  | 12. $i^{100}$                                |
| 13. $\sqrt{-25}$           | 14. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$                    |

**15–17** Determine o complexo conjugado e o módulo do número dado.

- |               |                       |
|---------------|-----------------------|
| 15. $12 - 5i$ | 16. $-1 + 2\sqrt{2}i$ |
| 17. $-4i$     |                       |

**18.** Demonstre as seguintes propriedades dos números complexos:

- (a)  $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$       (b)  $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$   
 (c)  $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ , onde  $n$  é um inteiro positivo  
 [Dica: Escreva  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$ .]

**19–24** Determine todas as soluções da equação.

- |                        |  |
|------------------------|--|
| 19. $4x^2 + 9 = 0$     | 20. $x^4 = 1$                              |
| 21. $x^2 + 2x + 5 = 0$ | 22. $2x^2 - 2x + 1 = 0$                    |
| 23. $z^2 + z + 2 = 0$  | 24. $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$ |

**25–28** Escreva o número na forma polar com o argumento entre  $0$  e  $2\pi$ .

- |               |                     |
|---------------|---------------------|
| 25. $-3 + 3i$ | 26. $1 - \sqrt{3}i$ |
| 27. $3 + 4i$  | 28. $8i$            |

**29–32** Determine a forma polar para  $zw$ ,  $z/w$  e  $1/z$  colocando primeiro  $z$  e  $w$  na forma polar.

29.  $z = \sqrt{3} + i$ ,  $w = 1 + \sqrt{3}i$   
 30.  $z = 4\sqrt{3} - 4i$ ,  $w = 8i$   
 31.  $z = 2\sqrt{3} - 2i$ ,  $w = -1 + i$   
 32.  $z = 4(\sqrt{3} + i)$ ,  $w = -3 - 3i$

**33–36** Determine as potências indicadas usando o Teorema de De Moivre.

- |                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| 33. $(1 + i)^{20}$       | 34. $(1 - \sqrt{3}i)^5$ |
| 35. $(2\sqrt{3} + 2i)^5$ | 36. $(1 - i)^8$         |

**37–40** Determine as raízes indicadas. Represente as raízes no plano complexo.

37. As raízes oitavas de  $1$ .  
 38. As quintas raízes de  $32$ .  
 39. As raízes cúbicas de  $i$ .  
 40. As raízes cúbicas de  $1 + i$ .

**41–46** Escreva o número na forma  $a + bi$ .

- |                  |                  |
|------------------|------------------|
| 41. $e^{i\pi/2}$ | 42. $e^{2\pi i}$ |
| 43. $e^{i\pi/3}$ | 44. $e^{-i\pi}$  |
| 45. $e^{2+i\pi}$ | 46. $e^{\pi+i}$  |

**47.** Use o Teorema de De Moivre com  $n = 3$  para expressar  $\cos 3\theta$  e  $\operatorname{sen} 3\theta$  em termos de  $\cos \theta$  e  $\operatorname{sen} \theta$ .

**48.** Use a fórmula de Euler para demonstrar as seguintes fórmulas para  $\cos x$  e  $\operatorname{sen} x$ :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

**49.** Se  $u(x) = f(x) + ig(x)$  for uma função com valores complexos de uma variável real  $x$  e as partes real e imaginária  $f(x)$  e  $g(x)$  forem funções deriváveis de  $x$ , então a derivada de  $u$  está definida como  $u'(x) = f'(x) + ig'(x)$ . Associe isso à Equação 7 para demonstrar que  $F(x) = e^{rx}$ , então  $F'(x) = re^{rx}$  quando  $r = a + bi$  for um número complexo.

**50.** (a) Se  $u$  for uma função a valores complexos de uma variável real, sua integral indefinida  $\int u(x) dx$  é uma primitiva de  $u$ . Calcule

$$\int e^{(1+i)x} dx$$

(b) Considerando a parte real e a imaginária da integral da parte (a), calcule as integrais reais

$$\int e^x \cos x dx \quad \text{e} \quad \int e^x \operatorname{sen} x dx$$

(c) Compare com o método usado no Exemplo 4 da Seção 7.1.