# Sumário

## 7 Técnicas de Integração 419



## 8 Mais Aplicações de Integração 487



## Apêndices A1



## Índice Remissivo I1

## Volume II

# 7

# Técnicas de Integração

A fotografia ao lado é de Ômega Centauro, que contém diversos milhões de estrelas e é o maior aglomerado globular em nossa galáxia. Os astrônomos usam a estereografia estelar para determinar a densidade real das estrelas em um aglomerado estelar a partir da densidade (bidimensional) que pode ser analisada a partir de uma fotografia. Na Seção 7.8 é solicitado que você avalie uma integral para calcular a densidade percebida a partir da densidade real.

Nathan Jaskowiak/Shutterstock

Por causa do Teorema Fundamental do Cálculo, podemos integrar uma função se conhecermos uma primitiva, isto é, uma integral indefinida. Aqui, resumimos as integrais mais importantes aprendidas até agora.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C \qquad \int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cossec} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \ln|\sec x| + C \qquad \int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C,\ a > 0$$

Neste capítulo desenvolveremos técnicas para usar essas fórmulas básicas de integração para obter integrais indefinidas de funções mais complicadas. Aprendemos o método mais importante de integração, o Método da Substituição, na Seção 5.5. A outra técnica geral, integração por partes, é apresentada na Seção 7.1. Então, aprenderemos métodos que são especiais para classes particulares de funções, tais como funções trigonométricas e racionais.

A integração não é tão simples quanto a derivação; não existem regras que nos garantam a obtenção de uma integral indefinida de uma função. Portanto, na Seção 7.5, discutiremos uma estratégia para integração.

## 7.1 Integração por Partes

Cada regra de derivação tem outra correspondente de integração. Por exemplo, a Regra de Substituição para a integração corresponde à Regra da Cadeia para a derivação. Aquela que corresponde à Regra do Produto para a derivação é chamada *integração por partes*.

A Regra do Produto afirma que se $f$ e $g$ forem funções deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Na notação para integrais indefinidas, essa equação se torna

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x)$$

ou

$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

Podemos rearranjar essa equação como

**1** $$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx}$$

A Fórmula 1 é chamada **fórmula para integração por partes**. Talvez seja mais fácil lembrar com a seguinte notação. Sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$. Então as diferenciais são $du = f'(x)\,dx$ e $dv = g'(x)\,dx$ e, assim, pela Regra da Substituição, a fórmula para a integração por partes torna-se

**2** $$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

**EXEMPLO 1** Encontre $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUÇÃO USANDO A FÓRMULA 1 Suponha que escolhamos $f(x) = x$ e $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Então $f'(x) = 1$ e $g(x) = -\cos x$. (Para $g$, podemos escolher qualquer antiderivada de $g'$.) Assim, utilizando a Fórmula 1, temos

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x\,dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \\ &= x(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

É aconselhável verificar a resposta derivando-a. Se fizermos assim, obteremos $x \operatorname{sen} x$, como esperado.

SOLUÇÃO USANDO A FÓRMULA 2 Sejam

$$u = x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$

Então,

$$du = dx \qquad v = -\cos x$$

de modo que

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x\,dx &= \int \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{\operatorname{sen} x\,dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{v}\ \underbrace{dx}_{du} \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

É útil usar o padrão:

$u = \square \qquad dv = \square$

$du = \square \qquad v = \square$

**OBSERVAÇÃO** Nosso objetivo ao usarmos a integração por partes é obter uma integral mais simples que aquela de partida. Assim, no Exemplo 1, iniciamos com $\int x \operatorname{sen} x\,dx$ e a expressamos em termos da integral mais simples $\int \cos x\,dx$. Se tivéssemos escolhido $u = \operatorname{sen} x$ e $dv = x\,dx$, então $du = \cos x\,dx$ e $v = x^2/2$ e, assim, a integração por partes daria

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = (\operatorname{sen} x) \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x \, dx$$

Embora isso seja verdadeiro, $\int x^2 \cos x \, dx$ é uma integral mais difícil que aquela com a qual começamos. Em geral, ao decidirmos sobre uma escolha para $u$ e $dv$, geralmente tentamos escolher $u = f(x)$ como uma função que se torna mais simples quando derivada (ou ao menos não mais complicada), contanto que $dv = g'(x)\,dx$ possa ser prontamente integrada para fornecer $v$.

**EXEMPLO 2** Avalie $\int \ln x \, dx$.

SOLUÇÃO Aqui não temos muita escolha para $u$ e $dv$. Considere

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

Então, $$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \frac{dx}{x} \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C \end{aligned}$$

É comum escrevermos $\int 1 \, dx$ como $\int dx$. Verifique a resposta derivando-a.

A integração por partes é eficaz neste exemplo porque a derivada da função $f(x) = \ln x$ é mais simples que $f$.

**EXEMPLO 3** Encontre $\int t^2 e^t \, dt$.

SOLUÇÃO Observe que $t^2$ se torna mais simples quando derivada (enquanto $e^t$ permanece inalterada quando a derivamos ou a integramos). Assim, escolhemos

$$u = t^2 \qquad dv = e^t \, dt$$

Então, $$du = 2t \, dt \qquad v = e^t$$

A integração por partes resulta em

$$\boxed{3} \qquad \int t^2 e^t \, dt = t^2 e^t - 2 \int t e^t \, dt$$

A integral que obtivemos, $\int t e^t \, dt$, é mais simples que a integral original, mas ainda não é óbvia. Portanto, usamos a integração por partes mais uma vez, mas agora com $u = t$ e $dv = e^t \, dt$. Então, $du = dt$, $v = e^t$ e

$$\begin{aligned} \int t e^t \, dt &= t e^t - \int e^t \, dt \\ &= t e^t - e^t + C \end{aligned}$$

Colocando isso na Equação 3, obtemos

$$\begin{aligned} \int t^2 e^t \, dt &= t^2 e^t - 2 \int t e^t \, dt \\ &= t^2 e^t - 2(t e^t - e^t + C) \\ &= t^2 e^t - 2t e^t + 2e^t + C_1 \qquad \text{onde } C_1 = -2C \end{aligned}$$

**EXEMPLO 4** Calcule $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$.

Um método mais fácil, usando números complexos, é dado no Exercício 50 do Apêndice H.

SOLUÇÃO Nem $e^x$ nem sen $x$ tornam-se mais simples quando derivadas, mas tentamos escolher $u = e^x$ e $dv = \operatorname{sen} x \, dx$ de qualquer maneira. Então, $du = e^x \, dx$ e $v = -\cos x$. Assim, a integração por partes resulta em

$$\boxed{4} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

A integral que obtivemos, $\int e^x \cos x\, dx$, não é mais simples que a integral original, mas pelo menos não é mais complicada. Como tivemos sucesso no exemplo anterior integrando por partes duas vezes, insistiremos e integraremos por partes novamente. Dessa vez usaremos $u = e^x$ e $dv = \cos x\, dx$. Então $du = e^x\, dx$, $v = \operatorname{sen} x$, e

$$\boxed{5} \qquad \int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

A Figura 1 ilustra o Exemplo 4, mostrando os gráficos de $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ e $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$. Como uma verificação visual de nosso trabalho, observe que $f(x) = 0$ quando $F$ tem um máximo ou um mínimo.

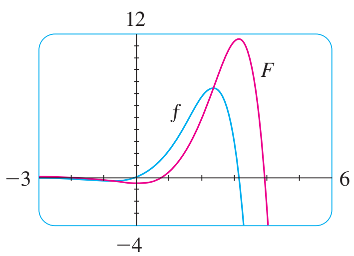



**FIGURA 1**

A princípio, parece que não fizemos nada, já que chegamos a $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$,, isto é, onde começamos. No entanto, se substituirmos a expressão por $\int e^x \cos x\, dx$ da Equação 5 na Equação 4, obtemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

Isso pode ser considerado uma equação para integral desconhecida. Adicionando $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ em ambos os lados, obtemos

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

Dividindo por 2 e adicionando a constante de integração, temos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

Se combinarmos a fórmula de integração por partes com a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, poderemos calcular integrais definidas por partes. Calculando ambos os lados da Fórmula 1 entre $a$ e $b$, supondo $f'$ e $g'$ contínuas, e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\boxed{6} \qquad \boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\, dx}$$

**EXEMPLO 5** Calcule $\int_0^1 \operatorname{tg}^{-1}x\, dx$.

SOLUÇÃO Seja

$$u = \operatorname{tg}^{-1}x \qquad dv = dx$$

Então,

$$du = \frac{dx}{1 + x^2} \qquad v = x$$

Assim, a Fórmula 6 resulta em

$$\begin{aligned}\int_0^1 \operatorname{tg}^{-1}x\, dx &= x\operatorname{tg}^{-1}x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &= 1 \cdot \operatorname{tg}^{-1}1 - 0 \cdot \operatorname{tg}^{-1}0 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx\end{aligned}$$

Como $\operatorname{tg}^{-1}x \geqslant 0$ para $x \geqslant 0$, a integral no Exemplo 5 pode ser interpretada como a área da região mostrada na Figura 2.

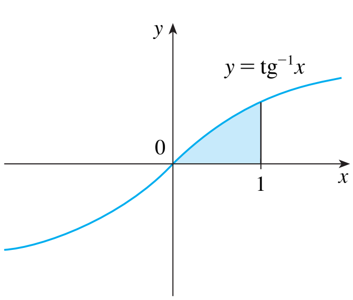



**FIGURA 2**

Para calcularmos essa integral, usamos a substituição $t = 1 + x^2$ (já que $u$ tem outro significado neste exemplo). Então $dt = 2x\, dx$ e, assim, $x\, dx = \frac{1}{2}\, dt$. Quando $x = 0$, $t = 1$; quando $x = 1$, $t = 2$; portanto

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx &= \tfrac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \tfrac{1}{2}\ln|t|\Big]_1^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \tfrac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^1 \operatorname{tg}^{-1}x\, dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

**EXEMPLO 6** Demonstre a fórmula de redução

$$\boxed{7} \qquad \int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

A Equação 7 é chamada de *fórmula de redução* porque o exponente foi reduzido para $n - 1$ e $n - 2$.

onde $n \geqslant 2$ é um inteiro.

SOLUÇÃO Seja

$$u = \operatorname{sen}^{n-1} x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$

Então, $$du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cos x\,dx \qquad v = -\cos x$$

de modo que a integração por partes resulta em

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\,dx$$

Uma vez que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, temos

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx$$

Como no Exemplo 4, nessa equação isolamos a integral desejada, levando o último termo do lado direito para o lado esquerdo. Então, temos

$$n\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

ou $$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

A fórmula de redução $\boxed{7}$ é útil porque usando-a repetidas vezes podemos eventualmente expressar $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ em termos de $\int \operatorname{sen} x\,dx$ (se $n$ for ímpar) ou $\int (\operatorname{sen} x)^0\,dx = \int dx$ (se $n$ for par).

## 7.1 Exercícios

**1–2** Calcule a integral usando a integração por partes com as escolhas de $u$ e $dv$ indicadas.

**1.** $\int x^2 \ln x\,dx$; $\quad u = \ln x,\ dv = x^2\,dx$

**2.** $\int \theta \cos\theta\,d\theta$; $\quad u = \theta,\ dv = \cos\theta\,d\theta$

**3–36** Calcule a integral.

**3.** $\int x \cos 5x\,dx$

**4.** $\int xe^{-x}\,dx$

**5.** $\int re^{r/2}\,dr$

**6.** $\int t \operatorname{sen} 2t\,dt$

**7.** $\int (x^2 + 2x)\cos x\,dx$

**8.** $\int t^2 \operatorname{sen} \beta t\,dt$

**9.** $\int \ln \sqrt[3]{x}\,dx$

**10.** $\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$

**11.** $\int \operatorname{arctg} 4t\,dt$

**12.** $\int p^5 \ln p\,dp$

**13.** $\int t \sec^2 2t\,dt$

**14.** $\int s\,2^s\,ds$

**15.** $\int (\ln x)^2\,dx$

**16.** $\int t \operatorname{senh} mt\,dt$

**17.** $\int e^{2\theta} \operatorname{sen} 3\theta\,d\theta$

**18.** $\int e^{-\theta} \cos 2\theta\,d\theta$

**19.** $\int z^3 e^z\,dz$

**20.** $\int x \operatorname{tg}^2 x\,dx$

**21.** $\int \dfrac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx$

**22.** $\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$

**23.** $\int_0^{1/2} x \cos \pi x\,dx$

**24.** $\int_0^1 (x^2 + 1)\,e^{-x}\,dx$

**25.** $\int_0^1 t \cosh t\,dt$

**26.** $\int_4^9 \dfrac{\ln y}{\sqrt{y}}\,dy$

**27.** $\int_1^3 r^3 \ln r\,dr$

**28.** $\int_0^{2\pi} t^2 \operatorname{sen} 2t\,dt$

**29.** $\int_0^1 \dfrac{y}{e^{2y}}\,dy$

**30.** $\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(1/x)\,dr$

**31.** $\int_0^{1/2} \cos^{-1} x\,dx$

**32.** $\int_1^2 \dfrac{(\ln x)^2}{x^3}\,dx$

**33.** $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

**34.** $\int_0^1 \dfrac{r^3}{\sqrt{4 + r^2}}\,dr$

**35.** $\int_1^2 x^4 (\ln x)^2\,dx$

**36.** $\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t - s)\,ds$

É necessário uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

**37–42** Primeiro faça uma substituição e então use integração por partes para calcular a integral.

**37.** $\int \cos \sqrt{x}\, dx$

**38.** $\int t^3 e^{-t^2}\, dt$

**39.** $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\, d\theta$

**40.** $\int_0^{\pi} e^{\cos t} \operatorname{sen} 2t\, dt$

**41.** $\int x \ln(1 + x)\, dx$

**42.** $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

**43–46** Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável, usando o gráfico da função e de sua primitiva (tome $C = 0$).

**43.** $\int xe^{-2x}\, dx$

**44.** $\int x^{3/2} \ln x\, dx$

**45.** $\int x^3 \sqrt{1 + x^2}\, dx$

**46.** $\int x^2 \operatorname{sen} 2x\, dx$

**47.** (a) Use a fórmula de redução no Exemplo 6 para mostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) Use a parte (a) e a fórmula de redução para calcular $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

**48.** (a) Demonstre a fórmula de redução

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$$

(b) Use a parte (a) para calcular $\int \cos^2 x\, dx$.

(c) Use as partes (a) e (b) para calcular $\int \cos^4 x\, dx$.

**49.** (a) Use a fórmula de redução no Exemplo 6 para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

onde $n \geqslant 2$ é um inteiro.

(b) Use a parte (a) para calcular $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\, dx$ e $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\, dx$.

(c) Use a parte (a) para mostrar que, para as potências ímpares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}$$

**50.** Demonstre que, para as potências pares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} \frac{\pi}{2}$$

**51–54** Use integração por partes para demonstrar a fórmula de redução.

**51.** $\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx$

**52.** $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$

**53.** $\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \dfrac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx \qquad (n \neq 1)$

**54.** $\int \sec^n x\, dx = \dfrac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \dfrac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\, dx \qquad (n \neq 1)$

**55.** Use o Exercício 51 para encontrar $\int (\ln x)^3\, dx$.

**56.** Use o Exercício 52 para encontrar $\int x^4 e^x dx$.

**57–58** Encontre a área da região delimitada pelas curvas dadas.

**57.** $y = x^2 \ln x, \quad y = 4 \ln x$

**58.** $y = x^2 e^{-x}, \quad y = xe^{-x}$

**59–60** Use um gráfico para encontrar as coordenadas aproximadas $x$ dos pontos de intersecção das curvas dadas. A seguir, ache (aproximadamente) a área da região delimitada pelas curvas.

**59.** $y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2} x\right), \qquad y = 2 - x^2$

**60.** $y = x \ln(x + 1), \qquad y = 3x - x^2$

**61–63** Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno do eixo especificado.

**61.** $y = \cos(\pi x/2), \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1;$ em torno do eixo $y$

**62.** $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1;$ em torno do eixo $y$

**63.** $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 0;$ em torno de $x = 1$

**64.** Calcule o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas $y = \ln x$, $y = 0$ e $x = 2$ em torno de cada eixo.

(a) o eixo $y$ (b) o eixo $x$

**65.** Calcule o valor médio de $f(x) = x \sec^2$ no intervalo $[0, \pi/4]$.

**66.** Um foguete acelera pela queima do combustível a bordo; assim, sua massa diminui com o tempo. Suponha que a massa inicial do foguete no lançamento (incluindo seu combustível) seja $m$, o combustível seja consumido a uma taxa $r$, e os gases de exaustão sejam ejetados a uma velocidade constante $v_e$ (relativa ao foguete). Um modelo para a velocidade do foguete no instante $t$ é dado pela seguinte equação

$$v(t) = -gt - v_e \ln \frac{m - rt}{m},$$

onde $g$ é a aceleração da gravidade e $t$ não é muito grande. Se $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, $m = 30.000$ kg, $r = 160$ kg/s e $v_e = 3.000$ m/s, encontre a altitude do foguete 1 minuto após o lançamento.

**67.** Uma partícula que se move ao longo de uma reta tem velocidade igual a $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo após $t$ segundos. Qual a distância que essa partícula percorrerá durante os primeiros $t$ segundos?

**68.** Se $f(0) = g(0) = 0$ e $f''$ e $g''$ forem contínuas, mostre que

$$\int_0^a f(x) g''(x)\, dx = f(a) g'(a) - f'(a) g(a) + \int_0^a f''(x) g(x)\, dx.$$

**69.** Suponha que $f(1) = 2, f(4) = 7, f'(1) = 5, f'(4) = 3$ e $f''$ seja contínua. Encontre o valor de $\int_1^4 x f''(x)\, dx$.

**70.** (a) Use integração por partes para mostrar que

$$\int f(x)\, dx = x f(x) - \int x f'(x)\, dx$$

(b) Se $f$ e $g$ forem funções inversas e $f'$ for contínua, demonstre que

$$\int_a^b f(x)\, dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\, dy$$

[*Dica*: Use a parte (a) e faça a substituição de $y = f(x)$.]

(c) No caso em que $f$ e $g$ forem funções positivas e $b > a > 0$, desenhe um diagrama para dar uma interpretação geométrica à parte (b).

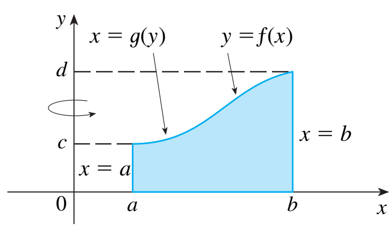
(d) Use a parte (b) para calcular $\int_1^e \ln x\, dx$.

**71.** Chegamos à Fórmula 6.3.2, $V = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$, utilizando cascas cilíndricas, mas agora podemos usar integração por partes para demonstrá-la usando o método das fatias da Seção 6.2, ao menos para o caso em que $f$ for injetora e, portanto, tiver uma função inversa $g$. Use a figura para mostrar que

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi [g(y)]^2\, dy$$

Faça a substituição $y = f(x)$ e então use integração por partes na integral resultante para demostrar que

$$V = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$$




**72.** Seja $I_n = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^n x\, dx$.

(a) Mostre que $I_{2n+2} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$.

(b) Use o Exercício 50 para mostrar que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

(c) Use as partes (a) e (b) para mostrar que

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1$$

e deduzir que $\lim_{n \to \infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$.

(d) Use a parte (c) e os Exercícios 49 e 50 para mostrar que

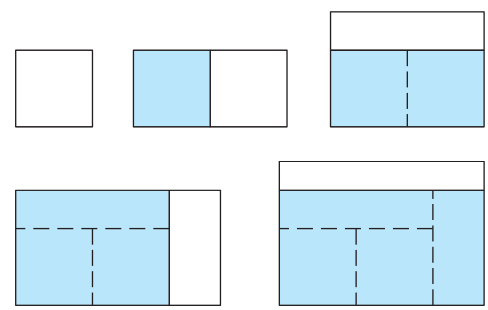
$$\lim_{n \to \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Essa fórmula geralmente é escrita como um produto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots$$

que é chamado produto de *Wallis*.

(e) Construímos retângulos como a seguir. Comece com um quadrado de área 1 e coloque retângulos de área 1 alternadamente ao lado ou no topo do retângulo anterior (veja a figura). Encontre o limite da relação largura/altura desses retângulos.



## 7.2 Integrais Trigonométricas

Nesta seção usaremos as identidades trigonométricas para integrar certas combinações de funções trigonométricas. Começaremos com as potências de seno e cosseno.

**EXEMPLO 1** Calcule $\int \cos^3 x\, dx$.

SOLUÇÃO A simples substituição de $u = \cos x$ não ajuda, porque assim $du = -\text{sen}\, x\, dx$. Para integramos potências de cosseno, necessitaríamos de um fator extra sen $x$. De forma semelhante, uma potência de seno pediria um fator extra cos $x$. Portanto, aqui podemos separar um fator cosseno e converter o fator $\cos^2 x$ restante em uma expressão envolvendo o seno, usando a identidade $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \text{sen}^2 x) \cos x$$

Podemos então calcular a integral, substituindo $u = \text{sen}\, x$, de modo que $du = \cos x\, dx$ e

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int (1 - \text{sen}^2 x) \cos x\, dx \\ &= \int (1 - u^2)\, du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C \\ &= \text{sen}\, x - \tfrac{1}{3}\text{sen}^3 x + C\end{aligned}$$

Em geral, tentamos escrever um integrando envolvendo as potências de seno e cosseno em uma forma onde tenhamos somente um fator seno (e o restante da expressão em termos de cosseno) ou apenas um fator cosseno (e o restante da expressão em termos de seno). A identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ nos permite a interconversão de potências pares de seno e cosseno.

**EXEMPLO 2** Encontre $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx$.

SOLUÇÃO Poderíamos converter $\cos^2 x$ para $1 - \operatorname{sen}^2 x$, mas obteríamos uma expressão em termos de sen $x$ sem nenhum fator extra cos $x$. Em vez disso, separamos um único fator de seno e reescrevemos o fator $\operatorname{sen}^4 x$ restante em termos de cos $x$:

$$\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x$$

A Figura 1 mostra os gráficos do integrando $\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x$ no Exemplo 2 e sua integral indefinida (com $C = 0$). Qual é qual?

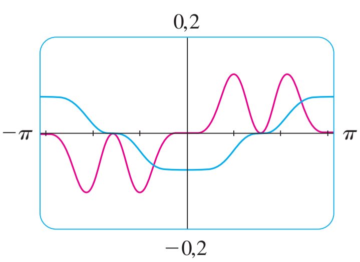



**FIGURA 1**

Substituindo $u = \cos x$, temos $du = -\operatorname{sen} x\, dx$ e, assim,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)\, du \\
&= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C \\
&= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C
\end{aligned}$$

Nos exemplos anteriores, uma potência ímpar de seno ou cosseno nos permitiu separar um único fator e converter a potência par remanescente. Se um integrando contém potências pares tanto para seno como para cosseno, essa estratégia falha. Nesse caso, podemos aproveitar as identidades dos ângulos-metade (veja as Equações 17b e 17a no Apêndice D):

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \text{e} \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

O Exemplo 3 mostra que a área da região exposta na Figura 2 é $\pi/2$.

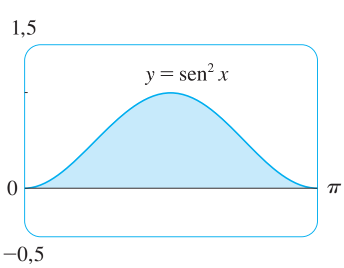



**FIGURA 2**

**EXEMPLO 3** Calcule $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

SOLUÇÃO Se escrevermos $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, a integral não é mais simples de calcular. Usando a fórmula do ângulo-metade para $\operatorname{sen}^2 x$, contudo, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx \\
&= \left[\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi\right) - \tfrac{1}{2}\left(0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 0\right) = \tfrac{1}{2}\pi
\end{aligned}$$

Observe que mentalmente fizemos a substituição $u = 2x$ quando integramos $\cos 2x$. Outro método para se calcular essa integral foi dado no Exercício 47 na Seção 7.1.

**EXEMPLO 4** Encontre $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

SOLUÇÃO Nós poderíamos calcular essa integral usando a fórmula de redução para $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ (Equação 7.1.7) junto com o Exemplo 3 (como no Exercício 47 na Seção 7.1), entretanto, outro método é escrever $\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2$ e usar uma fórmula do ângulo-metade:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\, dx \\
&= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \tfrac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx
\end{aligned}$$

Como $\cos^2 2x$ ocorre, precisamos usar outra fórmula do ângulo-metade

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

Isso fornece

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x\right) + C$$

Para resumirmos, listamos as regras que devem ser seguidas ao calcular integrais da forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, em que $m \geqslant 0$ e $n \geqslant 0$ são inteiros.

**ESTRATÉGIA PARA CALCULAR $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$**

(a) Se a potência do cosseno é ímpar ($n = 2k + 1$), guarde um fator cosseno e use $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para expressar os fatores restantes em termos de seno:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x\, dx = \int \operatorname{sen}^m x\,(\cos^2 x)^k \cos x\, dx$$

$$= \int \operatorname{sen}^m x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\, dx$$

A seguir, substitua $u = \operatorname{sen} x$.

(b) Se a potência do seno é ímpar ($m = 2k + 1$), guarde um fator seno e use $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para expressar os fatores restantes em termos de cosseno:

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx$$

A seguir, substitua $u = \cos x$. [Observe que se ambas as potências de seno e cosseno forem ímpares, podemos usar (a) ou (b).]

(c) Se as potências de seno e cosseno forem pares, utilizamos as identidades dos ângulos-metade

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Algumas vezes é útil usar a identidade

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$

Podemos empregar uma estratégia semelhante para calcular integrais da forma $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x\, dx$. Como $(d/dx)\operatorname{tg} x = \sec^2 x$, podemos separar um fator $\sec^2 x$ e converter a potência (par) da secante restante em uma expressão envolvendo a tangente, utilizando a identidade $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Ou, como $(d/dx)\sec x = \sec x \operatorname{tg} x$, podemos separar um fator $\sec x \operatorname{tg} x$ e converter a potência (par) da tangente restante para a secante.

**EXEMPLO 5** Calcule $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x\, dx$.

SOLUÇÃO Se separarmos um fator $\sec^2 x$, poderemos expressar o fator $\sec^2 x$ em termos de tangente, usando a identidade $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Podemos então calcular a integral, substituindo $u = \operatorname{tg} x$, de modo que $du = \sec^2 x\, dx$:

$$\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x\, dx = \int \operatorname{tg}^6 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \operatorname{tg}^6 x\,(1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x\, dx$$

$$= \int u^6(1 + u^2)\, du = \int (u^6 + u^8)\, du$$

$$= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x + \frac{1}{9}\operatorname{tg}^9 x + C$$

**EXEMPLO 6** Encontre $\int \operatorname{tg}^5\theta \sec^7\theta \, d\theta$.

SOLUÇÃO Se separarmos um fator $\sec^2\theta$ como no exemplo anterior, ficaremos com um fator $\sec^5\theta$, que não é facilmente convertido para tangente. Contudo, se separarmos um fator $\sec\theta \operatorname{tg}\theta$, poderemos converter a potência restante de tangente em uma expressão envolvendo apenas a secante, usando a identidade $\operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta - 1$. Poderemos então calcular a integral substituindo $u = \sec\theta$, de modo que $du = \sec\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta$:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg}^5\theta \sec^7\theta \, d\theta &= \int \operatorname{tg}^4\theta \sec^6\theta \sec\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta \\
&= \int (\sec^2\theta - 1)^2 \sec^6\theta \sec\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta \\
&= \int (u^2 - 1)^2 u^6 \, du \\
&= \int (u^{10} - 2u^8 + u^6) \, du \\
&= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\
&= \tfrac{1}{11}\sec^{11}\theta - \tfrac{2}{9}\sec^9\theta + \tfrac{1}{7}\sec^7\theta + C
\end{aligned}$$

Os exemplos anteriores mostram as estratégias para calcular integrais da forma $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$ para dois casos, resumidos aqui.

**ESTRATÉGIA PARA CALCULAR $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$**

(a) Se a potência da secante é par ($n = 2k$, $k \geqslant 2$), guarde um fator de $\sec^2 x$ e use $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ para expressar os fatores restantes em termos de $\operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg}^m x \sec^{2k} x \, dx &= \int \operatorname{tg}^m x (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx \\
&= \int \operatorname{tg}^m x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx
\end{aligned}$$

A seguir, substitua $u = \operatorname{tg} x$.

(b) Se a potência da tangente for ímpar ($m = 2k + 1$), guarde um fator de $\sec x \operatorname{tg} x$ e use $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ para expressar os fatores restantes em termos de $\sec x$:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg}^{2k+1} x \sec^n x \, dx &= \int (\operatorname{tg}^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x \, dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x \, dx
\end{aligned}$$

A seguir, substitua $u = \sec x$.

Para outros casos as regras não são tão simples. Talvez seja necessário usar identidades, integração por partes e, ocasionalmente, um pouco de engenhosidade. Algumas vezes precisaremos conseguir integrar $\operatorname{tg} x$ usando a fórmula estabelecida em (5.5.5):

$$\boxed{\int \operatorname{tg} x \, dx = \ln|\sec x| + C}$$

Também precisaremos da integral indefinida de secante:

A Fórmula 1 foi descoberta por James Gregory em 1668. Gregory usava essa fórmula para resolver um problema na construção de tabelas náuticas.

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C}$$

Poderíamos verificar a Fórmula 1 derivando o lado direito, ou como a seguir. Primeiro multiplicamos o numerador e o denominador por $\sec x + \operatorname{tg} x$:

$$\int \sec x \, dx = \int \sec x \, \frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \, dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\, dx$$

Se substituirmos $u = \sec x + \operatorname{tg} x$, então $du = (\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x)\, dx$, assim a integral torna-se $\int (1/u)\, du = \ln |u| + C$. Então, temos

$$\int \sec x\, dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

**EXEMPLO 7** Encontre $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$.

SOLUÇÃO Aqui apenas tg $x$ ocorre, então usamos $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ para reescrever um fator $\operatorname{tg}^2 x$ em termos de $\sec^2 x$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^3 x\, dx &= \int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \tan x\, (\sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \int \operatorname{tg} x \sec^2 x\, dx - \int \operatorname{tg} x\, dx \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln |\sec x| + C\end{aligned}$$

Na primeira integral substituímos mentalmente $u = \operatorname{tg} x$, de modo que $du = \sec^2 x\, dx$.

Se uma potência par de tangente aparecer com uma potência ímpar de secante, é útil expressar o integrando completamente em termos de sec $x$. As potências de sec $x$ podem exigir integração por partes, conforme mostrado no seguinte exemplo:

**EXEMPLO 8** Encontre $\int \sec^3 x\, dx$.

SOLUÇÃO Aqui integramos por partes com

$$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x\, dx$$
$$du = \sec x \operatorname{tg} x\, dx \qquad v = \operatorname{tg} x$$

Então,

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\, dx &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x\, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x\, (\sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx\end{aligned}$$

Usando a Fórmula 1 e isolando a integral pedida, temos

$$\int \sec^3 x\, dx = \tfrac{1}{2}\big(\sec x \operatorname{tg} x + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x|\big) + C$$

As integrais como as do exemplo anterior podem parecer muito especiais, mas elas ocorrem frequentemente nas aplicações de integração, como veremos no Capítulo 8. As integrais da forma $\int \operatorname{cotg}^m x \operatorname{cossec}^n x\, dx$ podem ser encontradas por métodos semelhantes devido à identidade $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$.

Finalmente, podemos usar outras identidades trigonométricas:

**2** Para calcular as integrais (a) $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx$, (b) $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx$ ou (c) $\int \cos mx \cos nx\, dx$, use a identidade correspondente:

(a) $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)]$

(b) $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

(c) $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$

Estas identidades envolvendo produtos são discutidas no Apêndice D.

**EXEMPLO 9** Calcule $\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\, dx$.

SOLUÇÃO Essa integral poderia ser calculada utilizando integração por partes, mas é mais fácil usar a identidade na Equação 2(a) como a seguir:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\, dx &= \int \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen} 9x]\, dx\\ &= \tfrac{1}{2}\int (-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\, dx\\ &= \tfrac{1}{2}(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 9x) + C\end{aligned}$$

## 7.2 Exercícios

**1–49** Calcule a integral.

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx$
2. $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^3 x\, dx$
3. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7\theta \cos^5\theta\, d\theta$
4. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\, dx$
5. $\int \operatorname{sen}^2(\pi x)\cos^5(\pi x)\, dx$
6. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$
8. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(\tfrac{1}{3}\theta)\, d\theta$
9. $\int_0^{\pi} \cos^4(2t)\, dt$
10. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t\, dt$
11. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$
12. $\int_0^{\pi/2} (2 - \operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta$
13. $\int t \operatorname{sen}^2 t\, dt$
14. $\int \cos\theta \cos^5(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta$
15. $\int \dfrac{\cos^5\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}\alpha}}\, d\alpha$
16. $\int x \operatorname{sen}^3 x\, dx$
17. $\int \cos^2 x\, \operatorname{tg}^3 x\, dx$
18. $\int \operatorname{cotg}^5\theta \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta$
19. $\int \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\, dx$
20. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} 2x\, dx$
21. $\int \operatorname{tg} x \sec^3 x\, dx$
22. $\int \operatorname{tg}^2\theta \sec^4\theta\, d\theta$
23. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$
24. $\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)\, dx$
25. $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x\, dx$
26. $\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta\, \operatorname{tg}^4\theta\, d\theta$
27. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x\, dx$
28. $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^3 x\, dx$
29. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec x\, dx$
30. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^4 t\, dt$
31. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$
32. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec x\, dx$
33. $\int x \sec x \operatorname{tg} x\, dx$
34. $\int \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^3\phi}\, d\phi$
35. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^2 x\, dx$
36. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^3 x\, dx$
37. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^5\phi \operatorname{cossec}^3\phi\, d\phi$
38. $\int \operatorname{cossec}^4 x \operatorname{cotg}^6 x\, dx$
39. $\int \operatorname{cossec} x\, dx$
40. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{cossec}^3 x\, dx$
41. $\int \operatorname{sen} 8x \cos 5x\, dx$
42. $\int \cos \pi x \cos 4\pi x\, dx$
43. $\int \operatorname{sen} 5\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta$
44. $\int \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x}\, dx$
45. $\int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx$
46. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - \cos 4\theta}\, d\theta$
47. $\int \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sec^2 x}\, dx$
48. $\int \dfrac{dx}{\cos x - 1}$
49. $\int x \operatorname{tg}^2 x\, dx$

50. Se $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^6 x \sec x\, dx = I$, expresse o valor de $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^8 x \sec x\, dx$ em termos de $I$.

**51–54** Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável colocando em um gráfico o integrando e sua primitiva (tome $C = 0$).

51. $\int x \operatorname{sen}^2(x^2)\, dx$
52. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x\, dx$
53. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 6x\, dx$
54. $\int \sec^4 \dfrac{x}{2}\, dx$

55. Encontre o valor médio da função $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

56. Calcule $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$ por quatro métodos:
(a) a substituição $u = \cos x$,
(b) a substituição $u = \operatorname{sen} x$,
(c) a identidade $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
(d) integração por partes
Explique os aspectos diferentes de suas respostas.

**57–58** Encontre a área da região delimitada pelas curvas dadas.

57. $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = \cos^2 x$, $-\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/4$
58. $y = \operatorname{sen}^3 x$, $y = \cos^3 x$, $\pi/4 \leqslant x \leqslant 5\pi/4$

É necessário uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

**59–60** Use um gráfico do integrando para conjecturar o valor da integral. Então, utilize os métodos desta seção para demonstrar que sua conjectura está correta.

**59.** $\int_0^{2\pi} \cos^3 x \, dx$

**60.** $\int_0^2 \operatorname{sen} 2\pi x \cos 5\pi x \, dx$

**61–64** Encontre o volume obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno dos eixos especificados.

**61.** $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$; em torno do eixo $x$

**62.** $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; em torno do eixo $x$

**63.** $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$; em torno do $y = 1$

**64.** $y = \sec x$, $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/3$; em torno do $y = -1$

**65.** Uma partícula se move em linha reta com função velocidade $v(t) = \operatorname{sen} \omega t \cos^2 \omega t$. Encontre sua função posição $s = f(t)$ se $f(0) = 0$.

**66.** A eletricidade doméstica é fornecida na forma de corrente alternada que varia de 155 V a $-155$ V com uma frequência de 60 ciclos por segundo (Hz). A voltagem então é dada pela seguinte equação:

$$E(t) = 155 \operatorname{sen}(120\pi t)$$

onde $t$ é o tempo em segundos. Os voltímetros leem a voltagem RMS (raiz da média quadrática), que é a raiz quadrada do valor médio de $[E(t)]^2$ em um ciclo.

(a) Calcule a voltagem RMS da corrente doméstica.

(b) Muitos fornos elétricos requerem a voltagem RMS de 220 V. Encontre a amplitude $A$ correspondente necessária para a voltagem $E(t) = A \operatorname{sen}(120\pi t)$.

**67–69** Demonstre a fórmula, onde $m$ e $n$ são inteiros positivos.

**67.** $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx = 0$

**68.** $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$

**69.** $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$

**70.** Uma *série de Fourier finita* é dada pela soma

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen} nx \\ &= a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_N \operatorname{sen} Nx \end{aligned}$$

Mostre que o $m$-ésimo coeficiente $a_m$ é dado pela fórmula

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx \, dx$$

## 7.3 Substituição Trigonométrica

Para encontrar a área de um círculo ou uma elipse, uma integral da forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ aparece, onde $a > 0$. Se ela fosse $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, a substituição $u = a^2 - x^2$ poderia ser eficaz, mas, como está, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ $dx$ é mais difícil. Se mudarmos a variável de $x$ para $\theta$ pela substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$, então a identidade $1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ permitirá que nos livremos da raiz, porque

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a\,|\cos\theta\,|$$

Observe a diferença entre a substituição $u = a^2 - x^2$ (na qual a nova variável é uma função da antiga) e a substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$ (a variável antiga é uma função da nova).

Em geral, podemos fazer uma substituição da forma $x = g(t)$, usando a Regra da Substituição ao contrário. Para simplificarmos nossos cálculos, presumimos que $g$ tenha uma função inversa, isto é, $g$ é injetora. Nesse caso, se substituirmos $u$ por $x$ e $x$ por $t$ na Regra de Substituição (Equação 5.5.4), obteremos

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))g'(t)\, dt$$

Esse tipo de substituição é chamado de *substituição inversa*.

Podemos fazer a substituição inversa $x = a \operatorname{sen}\theta$ desde que esta defina uma função injetora. Isso pode ser conseguido pela restrição de $\theta$ no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Na tabela a seguir listamos as substituições trigonométricas que são eficazes para as expressões radicais dadas em razão de certas identidades trigonométricas. Em cada caso, a restrição de $\theta$ é imposta para assegurar que a função que define a substituição seja injetora. (Estes são os mesmos intervalos usados na Seção 1.6 na definição de funções inversas.)

**Tabela de Substituições Trigonométricas**

| Expressão | Substituição | Identidade |
|---|---|---|
| $\sqrt{a^2 - x^2}$ | $x = a \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ | $1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ |
| $\sqrt{a^2 - x^2}$ | $x = a \operatorname{tg} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ | $1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta$ |
| $\sqrt{x^2 - a^2}$ | $x = a \sec \theta, \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leqslant \theta < \frac{3\pi}{2}$ | $\sec^2\theta - 1 = \operatorname{tg}^2\theta$ |

**EXEMPLO 1** Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx$.

SOLUÇÃO Seja $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, onde $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Então $dx = 3 \cos \theta \, d\theta$ e

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{9 \cos^2\theta} = 3\,|\cos \theta| = 3 \cos \theta$$

(Observe que $\cos \theta \geqslant 0$ porque $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.) Assim, a Regra da Substituição Inversa fornece

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx &= \int \frac{3 \cos \theta}{9 \operatorname{sen}^2\theta}\, 3 \cos \theta \, d\theta \\ &= \int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \int \operatorname{cotg}^2\theta \, d\theta \\ &= \int (\operatorname{cossec}^2\theta - 1)\, d\theta \\ &= -\operatorname{cotg} \theta - \theta + C \end{aligned}$$

Como esta é uma integral indefinida, devemos retornar a variável original $x$. Isso pode ser feito usando identidades trigonométricas para expressar $\operatorname{cotg} \theta$ em termos de $\operatorname{sen} \theta = x/3$ ou desenhando um diagrama, como mostrado na Figura 1, onde $\theta$ é interpretado como um ângulo de um triângulo retângulo. Como sen $\operatorname{sen} \theta = x/3$, escolhemos o lado oposto e a hipotenusa como tendo comprimentos $x$ e 3. Pelo Teorema de Pitágoras, o comprimento do lado adjacente é $\sqrt{9 - x^2}$, assim podemos ler simplesmente o valor de $\operatorname{cotg} \theta$ da figura:

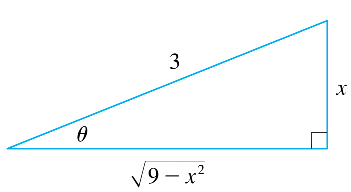



**FIGURA 1**

$\operatorname{sen} \theta = \dfrac{x}{3}$

$$\operatorname{cotg} \theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$$

(Embora $\theta > 0$ no diagrama, essa expressão para $\operatorname{cotg} \theta$ é válida quando $\theta < 0$.) Como $\operatorname{sen} \theta = x/3$, obtemos $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(x/3)$ , logo

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

**EXEMPLO 2** Encontre a área delimitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

SOLUÇÃO Isolando $y$ na equação da elipse, temos

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \qquad \text{ou} \qquad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Como a elipse é simétrica em relação a ambos os eixos, a área total $A$ é quatro vezes a área do primeiro quadrante (veja a Figura 2). A parte da elipse no primeiro quadrante é dada pela função

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$

e, assim,

$$\tfrac{1}{4}A = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

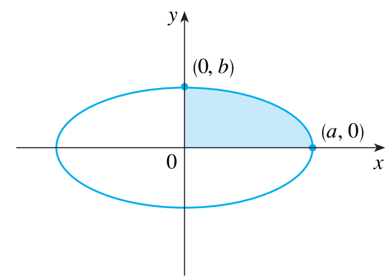



**FIGURA 2**

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Para calcularmos essa integral, substituímos $x = a \operatorname{sen} \theta$. Então, $dx = a \cos \theta \, d\theta$. Para mudarmos os limites de integração, notamos que quando $x = 0$, $\operatorname{sen} \theta = 0$; logo, $\theta = 0$; quando $x = a$, $\operatorname{sen} \theta = 1$, assim, $\theta = \pi/2$. Além disso,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a\,|\cos \theta\,| = a \cos \theta$$

já que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Portanto,

$$\begin{aligned}
A &= 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\,d\theta \\
&= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta \\
&= 2ab\big[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\big]_0^{\pi/2} = 2ab\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right) = \pi ab
\end{aligned}$$

Mostramos que a área de uma elipse com semieixos $a$ e $b$ é $\pi ab$. Em particular, considerando $a = b = r$, demonstramos a famosa fórmula que diz que a área de um círculo de raio $r$ é $\pi r^2$.

**OBSERVAÇÃO** Como a integral no Exemplo 2 era uma integral definida, mudamos os limites da integração e não tivemos que converter de volta à variável $x$ original.

**EXEMPLO 3** Encontre $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}\,dx$.

**SOLUÇÃO** Se $x = 2 \operatorname{tg} \theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Então $dx = 2 \sec^2\theta \, d\theta$ e

$$\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4(\operatorname{tg}^2\theta + 1)} = \sqrt{4 \sec^2\theta} = 2\,|\sec \theta\,| = 2 \sec \theta$$

Assim, temos

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{4\operatorname{tg}^2\theta \cdot 2\sec\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\operatorname{tg}^2\theta}\,d\theta$$

Para calcularmos essa integral trigonométrica, colocamos tudo em termos de $\operatorname{sen} \theta$ e $\cos \theta$:

$$\frac{\sec\theta}{\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Portanto, fazendo a substituição $u = \operatorname{sen} \theta$, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} &= \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} \\
&= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = -\frac{1}{4\operatorname{sen}\theta} + C \\
&= -\frac{\operatorname{cossec}\theta}{4} + C
\end{aligned}$$

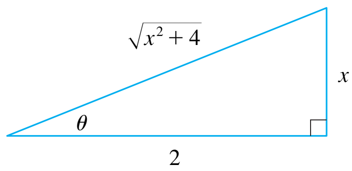



**FIGURA 3**

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{x}{2}$

Usamos a Figura 3 para determinar que cossec cossec $\theta = \sqrt{x^2+4}/x$ e, assim,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$$

**EXEMPLO 4** Encontre $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$.

SOLUÇÃO Seria possível usar a substituição trigonométrica $x = 2\operatorname{tg}\theta$ aqui (como no Exemplo 3). Mas a substituição direta $u = x^2 + 4$ é mais simples, porque $du = 2x\,dx$ e

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+4} + C$$

**OBSERVAÇÃO** O Exemplo 4 ilustra o fato de que, mesmo quando as substituições trigonométricas são possíveis, elas nem sempre dão a solução mais fácil. Você deve primeiro procurar um método mais simples.

**EXEMPLO 5** Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, onde $a > 0$.

SOLUÇÃO 1 Seja $x = a\sec\theta$, onde $0 < \theta < \pi/2$ ou $\pi < \theta < 3\pi/2$. Então $dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ e

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\theta} = a\,|\operatorname{tg}\theta| = a\operatorname{tg}\theta$$

Portanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\ \operatorname{tg}\theta}{a\operatorname{tg}\theta}\,d\theta = \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C$$

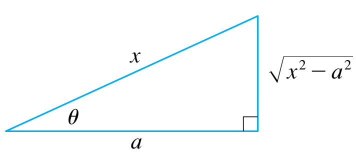



**FIGURA 4**

$\sec\theta = \dfrac{x}{a}$

O triângulo da Figura 4 mostra que $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{x^2-a^2}/a$, de modo que, temos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C$$
$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln a + C$$

Escrevendo $C_1 = C - \ln a$, temos

$$\boxed{1} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C_1$$

SOLUÇÃO 2 Para $x > 0$, a substituição hiperbólica $x = a\cosh t$ também pode ser usada. Usando a identidade $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$, temos

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} = \sqrt{a^2\operatorname{senh}^2 t} = a\operatorname{senh} t$$

Como $dx = a\operatorname{senh} t\,dt$, obtemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\operatorname{senh} t\,dt}{a\operatorname{senh} t} = \int dt = t + C$$

Como $\cosh t = x/a$, temos $t = \cosh^{-1}(x/a)$ e

$$\boxed{2} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Embora as Fórmulas 1 e 2 pareçam muito diferentes, elas são realmente equivalentes pela Fórmula 3.11.4.

**OBSERVAÇÃO** Como o Exemplo 5 ilustra, as substituições hiperbólicas podem ser utilizadas no lugar das substituições trigonométricas e elas, às vezes, nos levam a respostas mais simples. Mas geralmente usamos substituições trigonométricas, porque as identidades trigonométricas são mais familiares que as identidades hiperbólicas.

Como o Exemplo 6 mostra, a substituição trigonométrica é, algumas vezes, uma boa ideia quando $(x^2 + a^2)^{n/2}$ ocorre em uma integral, onde $n$ é um inteiro arbitrário. O mesmo é verdade quando $(a^2 - x^2)^{n/2}$ ou $(x^2 - a^2)^{n/2}$ ocorrem.

**EXEMPLO 6** Encontre $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}}\, dx$.

SOLUÇÃO Primeiro observamos que $(4x^2 + 9)^{3/2} = (\sqrt{4x^2 + 9})^3$, portanto a substituição trigonométrica é apropriada. Embora $\sqrt{4x^2 + 9}$ não seja exatamente uma expressão da tabela de substituições trigonométricas, ela se torna parte delas quando fazemos a substituição preliminar $u = 2x$. Quando combinamos esta com a substituição da tangente, temos $x = \frac{3}{2}\,\text{tg}\,\theta$, que resulta em $dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta$ e

$$\sqrt{4x^2 + 9} = \sqrt{9\,\text{tg}^2\theta + 9} = 3\sec\theta$$

Quando $x = 0$, $\text{tg}\,\theta = 0$, assim $\theta = 0$; quando $x = 3\sqrt{3}/2$, $\text{tg}\,\theta = \sqrt{3}$, logo $\theta = \pi/3$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}}\, dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{27}{8}\,\text{tg}^3\theta}{27\sec^3\theta}\, \tfrac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta \\ &= \tfrac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\text{tg}^3\theta}{\sec\theta}\, d\theta = \tfrac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\text{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta \\ &= \tfrac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\, \text{sen}\,\theta\, d\theta\end{aligned}$$

Agora substituímos $u = \cos\theta$, de modo que $du = -\text{sen}\,\theta\, d\theta$. Quando $\theta = 0$, $u = 1$; quando $\theta = \pi/3$, $u = \frac{1}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}}\, dx &= -\tfrac{3}{16}\int_1^{1/2} \frac{1 - u^2}{u^2}\, du \\ &= \tfrac{3}{16}\int_1^{1/2} (1 - u^{-2})\, du = \tfrac{3}{16}\left[u + \frac{1}{u}\right]_1^{1/2} \\ &= \tfrac{3}{16}\left[\left(\tfrac{1}{2} + 2\right) - (1 + 1)\right] = \tfrac{3}{32}\end{aligned}$$

**EXEMPLO 7** Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx$.

SOLUÇÃO Podemos transformar o integrando em uma função para a qual a substituição trigonométrica é apropriada completando primeiramente o quadrado sob o sinal da raiz:

$$\begin{aligned}3 - 2x - x^2 &= 3 - (x^2 + 2x) = 3 + 1 - (x^2 + 2x + 1) \\ &= 4 - (x + 1)^2.\end{aligned}$$

A Figura 5 mostra os gráficos do integrando no Exemplo 7 e de sua integral indefinida (com $C = 0$). Qual é qual?

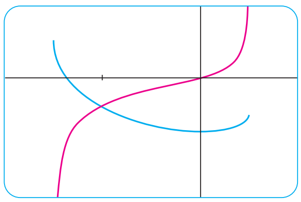



**FIGURA 5**

Isso sugere que façamos a substituição $u = x + 1$. Então $du = dx$ e $x = u - 1$, de modo que

$$\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\,dx = \int \frac{u - 1}{\sqrt{4 - u^2}}\,du$$

Agora substituímos $u = 2\,\text{sen}\,\theta$, obtendo $du = 2\cos\theta\,d\theta$ e $\sqrt{4 - u^2} = 2\cos\theta$, de forma que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\,dx &= \int \frac{2\,\text{sen}\,\theta - 1}{2\cos\theta}\,2\cos\theta\,d\theta \\
&= \int (2\,\text{sen}\,\theta - 1)\,d\theta \\
&= -2\cos\theta - \theta + C \\
&= -\sqrt{4 - u^2} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\
&= -\sqrt{3 - 2x - x^2} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

## 7.3 Exercícios

**1–3** Calcule a integral usando a substituição trigonométrica indicada. Esboce e coloque legendas no triângulo retângulo associado.

**1.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}\,dx;\quad x = 3\sec\theta$

**2.** $\displaystyle\int x^3\sqrt{9 - x^2}\,dx;\quad x = 3\,\text{sen}\,\theta$

**3.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}}\,dx;\quad x = 3\,\text{tg}\,\theta$

**4–30** Calcule a integral.

**4.** $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1 - x^2}\,dx$

**5.** $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t^3\sqrt{t^2 - 1}}\,dt$

**6.** $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}\,dx$

**7.** $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}};\quad a > 0$

**8.** $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2 - 16}}$

**9.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$

**10.** $\displaystyle\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2 + 2}}\,dt$

**11.** $\displaystyle\int \sqrt{1 - 4x^2}\,dx$

**12.** $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{5 - u^2}}$

**13.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3}\,dx$

**14.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

**15.** $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

**16.** $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dx}{x^5\sqrt{9x^2 - 1}}$

**17.** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 7}}\,dx$

**18.** $\displaystyle\int \frac{dx}{[(ax)^2 - b^2]^{3/2}}$

**19.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\,dx$

**20.** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$

**21.** $\displaystyle\int_0^{0,6} \frac{x^2}{\sqrt{9 - 25x^2}}\,dx$

**22.** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1}\,dx$

**23.** $\displaystyle\int \sqrt{5 + 4x - x^2}\,dx$

**24.** $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$

**25.** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx$

**26.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{(3 + 4x - 4x^2)^{3/2}}\,dx$

**27.** $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + 2x}\,dx$

**28.** $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 2x + 2)^2}\,dx$

**29.** $\displaystyle\int x\sqrt{1 - x^4}\,dx$

**30.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \text{sen}^2 t}}\,dt$

**31.** (a) Use substituição trigonométrica para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C.$$

(b) Use a substituição hiperbólica $x = a\,\text{senh}\,t$ para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \text{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Essas fórmulas estão interligadas pela Fórmula 3.11.3.

**32.** Calcule

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\,dx$$

É necessário uma calculadora gráfica ou computador

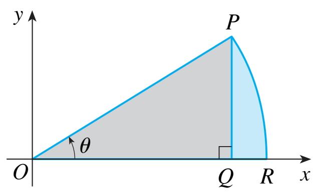
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

(a) por substituição trigonométrica.
(b) por substituição hiperbólica $x = a$ senh $t$.

**33.** Encontre o valor médio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}/x$, $1 \leqslant x \leqslant 7$.

**34.** Encontre a área da região delimitada pela hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$ e a reta $x = 3$.

**35.** Demonstre a fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ para a área de um setor circular com raio $r$ e ângulo central $\theta$. [*Dica*: Suponha que $0 < \theta < \pi/2$ e coloque o centro do círculo na origem, assim ele terá a equação $x^2 + y^2 = r^2$. Então $A$ é a soma da área do triângulo $POQ$ e a área da região $PQR$ na figura.]




**36.** Calcule a integral

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - 2}}$$

Coloque em um gráfico o integrando e a integral indefinida e verifique se sua resposta é razoável.

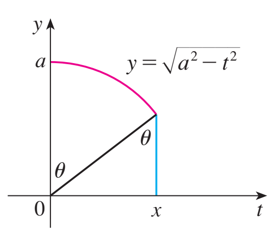
**37.** Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo $x$ da região delimitada pelas curvas $y = 9/(x^2 + 9)$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 3$.

**38.** Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $x = 1$ da região sob a curva $y = x\sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

**39.** (a) Use substituição trigonométrica para verificar que

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}^{-1}(x/a) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

(b) Use a figura para dar interpretações geométricas de ambos os termos no lado direito da equação na parte (a).



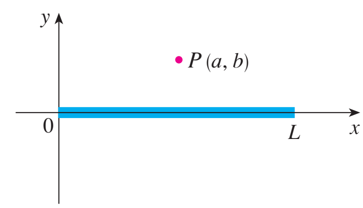

**40.** A parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide o disco $x^2 + y^2 \leqslant 8$ em duas partes. Encontre as áreas de ambas as partes.

**41.** Um toro é gerado pela rotação do círculo $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ ao redor do eixo $x$. Ache o volume delimitado pelo toro.

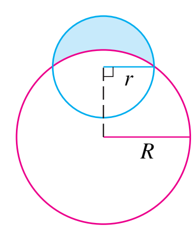
**42.** Uma barra carregada de comprimento $L$ produz um campo elétrico no ponto $P(a, b)$ dado por

$$E(P) = \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + b^2)^{3/2}}\,dx$$

em que $\lambda$ é a densidade de carga por unidade de comprimento da barra e $\varepsilon_0$, a permissividade do vácuo (veja a figura). Calcule a integral para determinar uma expressão para o campo elétrico $E(P)$.




**43.** Encontre a área da região em forma de *lua crescente* delimitada pelos arcos dos círculos de raios $r$ e $R$. (Veja a figura.)




**44.** Um tanque de armazenamento de água tem a forma de um cilindro com diâmetro de 10 m. Ele está montado de forma que as secções transversais circulares são verticais. Se a profundidade da água é 7 m, qual a porcentagem da capacidade total usada?

# 7.4 Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Nesta seção mostraremos como integrar qualquer função racional (um quociente de polinômios) expressando-a como uma soma de frações mais simples, chamadas *frações parciais*, que já sabemos como integrar. Para ilustrarmos o método, observe que, levando as frações $2/(x - 1)$ e $1/(x + 2)$ a um denominador comum, obtemos

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2) - (x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Se agora revertermos o procedimento, veremos como integrar a função no lado direito desta equação:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$

$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

Para vermos como o método de frações parciais funciona em geral, consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde $P$ e $Q$ são polinômios. É possível expressar $f$ como uma soma de frações mais simples, desde que o grau de $P$ seja menor que o grau de $Q$. Essa função racional é denominada *própria*. Lembre-se de que se

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde $a_n \neq 0$, então o grau de $P$ é $n$ e escrevemos $\operatorname{gr}(P) = n$.

Se $f$ for *imprópria*, isto é, $\operatorname{gr}(P) \geqslant \operatorname{gr}(Q)$, então devemos fazer uma etapa preliminar, dividindo $Q$ por $P$ (por divisão de polinômios) até o resto $R(x)$ ser obtido com $\operatorname{gr}(R) < \operatorname{gr}(Q)$. O resultado da divisão é

$$\boxed{1} \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

onde $S$ e $R$ também são polinômios.

Como o exemplo a seguir mostra, algumas vezes essa etapa preliminar é tudo de que precisamos.

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + x + 2 \\ \hline x - 1 & x^3 \qquad + x \\ & x^3 - x^2 \\ \hline & \quad x^2 + x \\ & \quad x^2 - x \\ \hline & \qquad 2x \\ & \qquad 2x - 2 \\ \hline & \qquad\quad 2 \end{array}$$

**EXEMPLO 1** Encontre $\displaystyle\int \frac{x^3 + x}{x - 1}\,dx$.

**SOLUÇÃO** Como o grau do numerador é maior que o grau do denominador, primeiro devemos realizar a divisão. Isso nos permite escrever

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + C$$

A próxima etapa é fatorar o denominador $Q(x)$ o máximo possível. É possível demonstrar que qualquer polinômio $Q$ pode ser fatorado como um produto de fatores lineares (da forma $ax + b$) e fatores quadráticos irredutíveis (da forma $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$). Por exemplo, se $Q(x) = x^4 - 16$, poderíamos fatorá-lo como

$$Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

A terceira etapa é expressar a função racional própria $R(x)/Q(x)$ (da Equação 1) como uma soma das **frações parciais** da forma

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$$

Um teorema na álgebra garante que é sempre possível fazer isso. Explicamos os detalhes para os quatro casos que ocorrem.

### CASO I O denominador $Q(x)$ é um produto de fatores lineares distintos.

Isso significa que podemos escrever

$$Q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_kx+b_k)$$

onde nenhum fator é repetido (e nenhum fator é múltiplo constante do outro). Nesse caso, o teorema das frações parciais afirma que existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tais que

$$\boxed{2} \qquad \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

Essas constantes podem ser determinadas como no exemplo seguinte.

**EXEMPLO 2** Calcule $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx.$

SOLUÇÃO Como o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não precisamos dividir. Fatoramos o denominador como

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2) = x(2x-1)(x+2)$$

Como o denominador tem três fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais do integrando $\boxed{2}$ tem a forma

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Um outro método para encontrar $A$, $B$ e $C$ é dado na observação após este exemplo.

Para determinarmos os valores de $A$, $B$ e $C$, multiplicamos os lados dessa equação pelo produto dos denominadores, $x(2x-1)(x+2)$, obtendo

$$\boxed{4} \qquad x^2+2x-1 = A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1)$$

Expandindo o lado direito da Equação 4 e escrevendo-a na forma padrão para os polinômios, temos

$$\boxed{5} \qquad x^2+2x-1 = (2A+B+2C)x^2 + (3A+2B-C)x - 2A$$

Os polinômios na Equação 5 são idênticos, então seus coeficientes devem ser iguais. O coeficiente $x^2$ do lado direito, $2A+B+2C$, deve ser igual ao coeficiente de $x^2$ do lado esquerdo, ou seja, 1. Do mesmo modo, os coeficientes de $x$ são iguais e os termos constantes também. Isso resulta no seguinte sistema de equações para $A$, $B$ e $C$:

$$\begin{aligned} 2A + \phantom{2}B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - \phantom{2}C &= 2 \\ -2A \phantom{+ 2B - C} &= -1 \end{aligned}$$

Poderíamos conferir nosso resultado calculando o denominador comum dos termos e depois somando-os.

A Figura 1 mostra os gráficos do integrando no Exemplo 2 e de sua integral indefinida (com $K = 0$). Qual é qual?

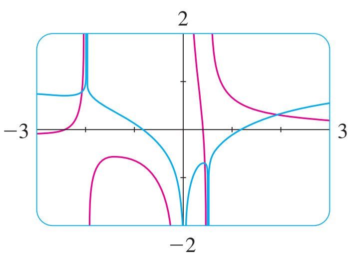



**FIGURA 1**

Resolvendo, obtemos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$ e $C = -\frac{1}{10}$, e assim

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx = \int \left( \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x + 2} \right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x - 1| - \tfrac{1}{10}\ln|x + 2| + K$$

Ao integrarmos o termo do meio, fizemos mentalmente a substituição $u = 2x - 1$, que resulta em $du = 2\,dx$ e $dx = du/2$.

**OBSERVAÇÃO** Podemos usar um método alternativo para encontrar os coeficientes $A$, $B$ e $C$ no Exemplo 2. A Equação 4 é uma identidade; é verdadeira para cada valor de $x$. Vamos escolher valores de $x$ que simplificam a equação. Se colocarmos $x = 0$ na Equação 4, então o segundo e terceiro termos do lado direito desaparecerão, e a equação será $-2A = -1$, ou $A = \frac{1}{2}$. Da mesma forma, $x = \frac{1}{2}$ dá $5B/4 = \frac{1}{4}$ e $x = -2$ resulta em $10C = 1$, assim, $B = \frac{1}{5}$ e $C = -\frac{1}{10}$. (Você pode argumentar que a Equação 3 não é válida para $x = 0, \frac{1}{2}$ ou $-2$, então, por que a Equação 4 deveria ser válida para aqueles valores? Na verdade, a Equação 4 é válida para todos os valores de $x$, até para $x = 0, \frac{1}{2}$ e $-2$. Veja o Exercício 71 para obter uma explicação.)

**EXEMPLO 3** Encontre $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, onde $a \neq 0$.

SOLUÇÃO O método das frações parciais fornece

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$$

e, portanto,

$$A(x + a) + B(x - a) = 1$$

Usando o método da observação anterior, colocamos $x = a$ nessa equação e obtemos $A(2a) = 1$, assim, $A = 1/(2a)$. Se colocarmos $x = -a$, obteremos $B(-2a) = 1$, assim, $B = -1/(2a)$. Logo,

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int \left( \frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x - a| - \ln|x + a|\right) + C$$

Como $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$, podemos escrever a integral como

**6** $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$$

Veja os Exercícios 57–58 para obter formas de usar a Fórmula 6.

**CASO II $Q(x)$ é um produto de fatores lineares, e alguns dos fatores são repetidos.**

Suponha que o primeiro fator linear $(a_1x + b_1)$ seja repetido $r$ vezes; isto é, $(a_1x + b_1)^r$ ocorre na fatoração de $Q(x)$. Então, em vez de um único termo $A_1/(a_1x + b_1)$ na Equação 2, usaríamos

**7** $$\frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

Para ilustrarmos, poderíamos escrever

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x - 1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{(x - 1)^2} + \frac{E}{(x - 1)^3}$$

mas é preferível detalhar um exemplo mais simples.

**EXEMPLO 4** Encontre $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx.$

SOLUÇÃO A primeira etapa é dividir. O resultado da divisão de polinômios é

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

A segunda etapa é fatorar o denominador $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Como $Q(1) = 0$, sabemos que $x - 1$ é um fator e obtemos

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)(x - 1)(x + 1) \\ &= (x - 1)^2(x + 1) \end{aligned}$$

Como o fator linear $x - 1$ ocorre duas vezes, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{4x}{(x - 1)^2(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1}$$

Multiplicando pelo mínimo denominador comum, $(x - 1)^2(x + 1)$, temos

$$\boxed{8} \qquad \begin{aligned} 4x &= A(x - 1)(x + 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2 \\ &= (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C) \end{aligned}$$

Agora igualamos os coeficientes:

$$\begin{cases} A \qquad\quad + \ C = 0 \\ \qquad B - 2C = 4 \\ -A + B + \ C = 0 \end{cases}$$

Outro método para encontrar os coeficientes:
Faça $x = 1$ em $\boxed{8}$: $B = 2$.
Faça $x = -1$: $C = -1$.
Faça $x = 0$: $A = B + C = 1$.

Resolvendo, obtemos $A = 1$, $B = 2$ e $C = -1$; assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx &= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2} - \frac{1}{x + 1}\right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x - 1| - \frac{2}{x - 1} - \ln|x + 1| + K \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x - 1} + \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + K \end{aligned}$$

**CASO III $Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis, nenhum dos quais se repete.**

Se $Q(x)$ tiver o fator $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então, além das frações parciais nas Equações 2 e 7, a expressão para $R(x)/Q(x)$ terá um termo da forma

$$\boxed{9} \qquad \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

onde $A$ e $B$ são constantes a serem determinadas. Por exemplo, a função dada por $f(x) = x/[(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)]$ tem uma decomposição em frações parciais da forma

$$\frac{x}{(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{x^2 + 4}$$

O termo dado em $\boxed{9}$ pode ser integrado completando o quadrado (se necessário) e usando a fórmula

**10** $$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C}$$

**EXEMPLO 5** Calcule $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$.

SOLUÇÃO Como $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ não pode ser mais fatorado, escrevemos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 4)$, temos

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes, obtemos

$$A + B = 2 \qquad C = -1 \qquad 4A = 4$$

Então $A = 1$, $B = 1$ e $C = -1$ e, assim,

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right) dx$$

Para integrarmos o segundo termo, o dividimos em duas partes:

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + 4}\,dx = \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx - \int \frac{1}{x^2 + 4}\,dx$$

Fazemos a substituição $u = x^2 + 4$ na primeira das integrais de modo que $du = 2x\,dx$. Calculamos a segunda integral usando a Fórmula 10 com $a = 2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx - \int \frac{1}{x^2 + 4}\,dx \\ &= \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 4) - \tfrac{1}{2}\tan^{-1}(x/2) + K \end{aligned}$$

**EXEMPLO 6** Calcule $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx$.

SOLUÇÃO Como o grau do numerador *não é menor que* o grau do denominador, primeiro dividimos e obtemos

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}$$

Observe que o termo quadrático $4x^2 - 4x + 3$ é irredutível, porque seu discriminante é $b^2 - 4ac = -32 < 0$. Isso significa que este não pode ser fatorado, então não precisamos usar a técnica da frações parciais.

Para integrarmos a função dada completamos o quadrado no denominador:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2$$

Isso sugere que façamos a substituição $u = 2x - 1$. Então $du = 2\,dx$ e $x = \frac{1}{2}(u + 1)$, assim

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx = \int \left(1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}\right) dx$$

$$= x + \tfrac{1}{2}\int \frac{\tfrac{1}{2}(u+1) - 1}{u^2 + 2}\,du = x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u-1}{u^2+2}\,du$$

$$= x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u}{u^2+2}\,du - \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+2}\,du$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\ln(u^2+2) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

**OBSERVAÇÃO** O Exemplo 6 ilustra o procedimento geral para se integrar uma fração parcial da forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \qquad \text{onde } b^2 - 4ac < 0$$

Completamos o quadrado no denominador e então fazemos uma substituição que traz a integral para a forma

$$\int \frac{Cu + D}{u^2 + a^2}\,du = C\int \frac{u}{u^2 + a^2}\,du + D\int \frac{1}{u^2 + a^2}\,du$$

Então, a primeira integral é um logaritmo, e a segunda é expressa em termos de $\mathrm{tg}^{-1}$.

### CASO IV $Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos.

Se $Q(x)$ tiver um fator $(ax^2 + bx + c)^r$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então, em vez de uma única fração parcial $\boxed{9}$, a soma

$$\boxed{11} \qquad \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

ocorre na decomposição em frações parciais de $R(x)/Q(x)$. Cada um dos termos de $\boxed{11}$ pode ser integrado usando uma substituição ou completando primeiramente o quadrado, se necessário.

**EXEMPLO 7** Escreva a forma da decomposição em frações parciais da função

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^3}$$

SOLUÇÃO

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^3}$$
$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1} + \frac{Gx + H}{(x^2+1)^2} + \frac{Ix + J}{(x^2+1)^3}$$

Seria extremamente entediante o cálculo manual dos valores numéricos dos coeficientes no Exemplo 7. A maioria dos sistemas de computação algébrica, no entanto, consegue encontrar os valores numéricos muito rapidamente. Por exemplo, o comando do Maple

```
Convert(f, parfrac, x)
```

ou o comando do Mathematica

```
Apart [f]
```

fornecem os seguintes valores:

$$A = -1 \quad B = \tfrac{1}{8} \quad C = D = -1$$

$$E = \tfrac{15}{8} \quad F = -\tfrac{1}{8} \quad G = H = \tfrac{3}{4}$$

$$I = -\tfrac{1}{2} \quad J = \tfrac{1}{2}$$

**EXEMPLO 8** Calcule $\displaystyle\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$.

SOLUÇÃO A forma da decomposição em frações parciais é

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$, temos

$$\begin{aligned} -x^3 + 2x^2 - x + 1 &= A(x^2+1)^2 + (Bx + C)x(x^2+1) + (Dx+E)x \\ &= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex \\ &= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A. \end{aligned}$$

Se igualarmos os coeficientes, obteremos o sistema

$$A + B = 0, \qquad C = -1, \qquad 2A + B + D = 2, \qquad C + E = -1, \qquad A = 1,$$

que tem a solução $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, $D = 1$ e $E = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}\right) dx \\ &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} \\ &= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{tg}^{-1}x - \frac{1}{2(x^2+1)} + K \end{aligned}$$

No segundo e no quarto termos, fizemos mentalmente a substituição $u = x^2 + 1$.

Observamos que algumas vezes as frações parciais podem ser evitadas na integração de funções racionais. Por exemplo, embora a integral

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}\,dx$$

possa ser calculada pelo método do Caso III, é muito mais fácil observar que se $u = x(x^2 + 3) = x^3 + 3x$, então $du = (3x^2 + 3)\,dx$ e, assim,

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln|x^3 + 3x| + C$$

## Substituições Racionalizantes

Algumas funções não racionais podem ser transformadas em funções racionais por meio de substituições apropriadas. Em particular, quando um integrando contém uma expressão da forma $\sqrt[n]{g(x)}$, então a substituição $u = \sqrt[n]{g(x)}$ pode ser eficaz. Outros exemplos aparecem nos exercícios.

**EXEMPLO 9** Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$.

SOLUÇÃO Seja $u = \sqrt{x+4}$. Então $u^2 = x + 4$, de modo que, $x = u^2 - 4$ e $dx = 2u\,du$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx &= \int \frac{u}{u^2-4}\,2u\,du = 2\int \frac{u^2}{u^2-4}\,du \\ &= 2\int \left(1 + \frac{4}{u^2-4}\right) du \end{aligned}$$

Podemos calcular essa integral fatorando $u^2 - 4$ em $(u - 2)(u + 2)$ e usando as frações parciais ou usando a Fórmula 6 com $a = 2$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx &= 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2-4}\\ &= 2u + 8\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C\\ &= 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C\end{aligned}$$

## 7.4 Exercícios

**1–6** Escreva as formas de decomposição em frações parciais da função (como no Exemplo 7). Não determine os valores numéricos dos coeficientes.

**1.** (a) $\dfrac{1+6x}{(4x-3)(2x+5)}$ (b) $\dfrac{10}{5x^2-2x^3}$

**2.** (a) $\dfrac{x}{x^2+x-2}$ (b) $\dfrac{x^2}{x^2+x+2}$

**3.** (a) $\dfrac{x^4+1}{x^5+4x^3}$ (b) $\dfrac{1}{(x^2+9)^2}$

**4.** (a) $\dfrac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2+2x+1}$ (b) $\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2+x}$

**5.** (a) $\dfrac{x^6}{x^2-4}$ (b) $\dfrac{x^4}{(x^2-x+1)(x^2+2)^2}$

**6.** (a) $\dfrac{t^6+1}{t^6+t^3}$ (b) $\dfrac{x^5+1}{(x^2-x)(x^4+2x^2+1)}$

**7–38** Calcule a integral.

**7.** $\displaystyle\int \frac{x}{x-6}\,dx$

**8.** $\displaystyle\int \frac{r^2}{r+4}\,dr$

**9.** $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}\,dx$

**10.** $\displaystyle\int \frac{1}{(t+4)(t-1)}\,dt$

**11.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1}\,dx$

**12.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-4}{x^2+5x+6}\,dx$

**13.** $\displaystyle\int \frac{ax}{x^2-bx}\,dx$

**14.** $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$

**15.** $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3+2x^2}\,dx$

**16.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}\,dx$

**17.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}\,dy$

**18.** $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$

**19.** $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2}\,dx$

**20.** $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+16}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx$

**21.** $\displaystyle\int \frac{x^3+4}{x^2+4}\,dx$

**22.** $\displaystyle\int \frac{ds}{s^2(s-1)^2}$

**23.** $\displaystyle\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}\,dx$

**24.** $\displaystyle\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x}\,dx$

**25.** $\displaystyle\int \frac{4x}{x^3+x^2+x+1}\,dx$

**26.** $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

**27.** $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

**28.** $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

**29.** $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$

**30.** $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+4}{x^4+3x^2+2}\,dx$

**31.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$

**32.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+13}\,dx$

**33.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+3}\,dx$

**34.** $\displaystyle\int \frac{x^5+x-1}{x^3+1}\,dx$

**35.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$

**36.** $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^5+5x^3+5x}\,dx$

**37.** $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2}\,dx$

**38.** $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+3x-2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

**1.** As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

**39–52** Faça uma substituição para expressar o integrando como uma função racional e então calcule a integral.

**39.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$  **40.** $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x}$

**41.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{x}}$  **42.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

**43.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$  **44.** $\displaystyle\int_{1/3}^{3} \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx$

**45.** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$  [*Dica:* Substitua $u=\sqrt[6]{x}$.]

**46.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

**47.** $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$  **48.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x-3\cos x}\,dx$

**49.** $\displaystyle\int \frac{\sec^2 t}{\operatorname{tg}^2 t+3\operatorname{tg} t+2}\,dt$  **50.** $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+1)}\,dx$

**51.** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$  **52.** $\displaystyle\int \frac{\cosh t}{\operatorname{sen}^2 t+\operatorname{senh}^4 t}\,dt$

**53–54** Use integração por partes, juntamente com as técnicas desta seção, para calcular a integral.

**53.** $\displaystyle\int \ln(x^2-x+2)dx$  **54.** $\displaystyle\int x\operatorname{tg}^{-1}x\,dx$

**55.** Use um gráfico de $f(x)=1/(x^2-2x-3)$ para decidir se $\int_0^2 f(x)\,dx$ é positiva ou negativa. Utilize o gráfico para dar uma estimativa aproximada do valor da integral e então use frações parciais para encontrar o valor exato.

**56.** Calcule

$$\int \frac{1}{x^2+k}\,dx$$

considerando diversos casos para a constante $k$.

**57–58** Calcule a integral completando o quadrado e usando a Fórmula 6.

**57.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}$  **58.** $\displaystyle\int \frac{2x+1}{4x^2+12x-7}\,dx$

**59.** O matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897) observou que a substituição $t=\operatorname{tg}(x/2)$ converte qualquer função racional de sen $x$ e cos $x$ em uma função racional ordinária de $t$.

(a) Se $t=\operatorname{tg}(x/2)$, $-\pi<x<\pi$, esboce um triângulo retângulo ou use as identidades trigonométricas para mostrar que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

(b) Mostre que

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$$

(c) Mostre que

$$dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

**60–63** Use a substituição do Exercício 59 para transformar o integrando em uma função racional de $t$ e então calcule a integral.

**60.** $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos x}$  **61.** $\displaystyle\int \frac{1}{3\operatorname{sen} x-4\cos x}\,dx$

**62.** $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}\,dx$  **63.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2+\cos x}\,dx$

**64–65** Encontre a área da região sob a curva dada de 1 até 2.

**64.** $y=\dfrac{1}{x^3+x}$  **65.** $y=\dfrac{x^2+1}{3x-x^2}$

**66.** Encontre o volume do sólido resultante se a região sob a curva $y=1/(x^2+3x+2)$ de $x=0$ a $x=1$ for girada em torno do: (a) eixo $x$ e (b) eixo $y$.

**67.** Um método de retardar o crescimento de uma população de insetos sem usar pesticidas é introduzir na população um número de machos estéreis que cruzam com fêmeas férteis, mas não produzem filhotes. Se $P$ representar o número de fêmeas na população de insetos, $S$, o número de machos estéreis introduzidos a cada geração e $r$, a taxa de crescimento populacional natural, então a população de fêmeas está relacionada com o instante $t$ através de

$$t=\int \frac{P+S}{P[(r-1)P-S]}\,dP$$

Suponha que uma população de insetos com 10 000 fêmeas cresça a uma taxa de $r=0{,}10$ e que 900 machos estéreis sejam adicionados. Calcule a integral para dar uma equação relacionando a população de fêmeas com o tempo. (Observe que a equação resultante não pode ser resolvida explicitamente para $P$.)

**68.** Fatore $x^4+1$ como uma diferença de quadrados adicionando e subtraindo a mesma quantidade. Use essa fatoração para calcular $\int 1\,(x^4+1)dx$.

SCA **69.** (a) Use um sistema de computação algébrica para encontrar a decomposição em frações parciais da função

$$f(x)=\frac{4x^3+27x^2+5x-32}{30x^5-13x^4+50x^3-286x^2-299x-70}$$

(b) Use parte (a) para encontrar $\int f(x)\,dx$ (manualmente) e compare com o resultado se for usado um SCA para integrar $f$ diretamente. Comente qualquer discrepância.

SCA **70.** (a) Encontre a decomposição em frações parciais da função

$$f(x)=\frac{12x^5-7x^3-13x^2+8}{100x^6-80x^5+116x^4-80x^3+41x^2-20x+4}$$

(b) Use a parte (a) para encontrar $\int f(x)\,dx$ e trace os gráficos de $f$ e de sua integral indefinida na mesma tela.

(c) Use o gráfico de $f$ para descobrir as principais características do gráfico de $\int f(x)\,dx$.

**71.** Suponha que $F$, $G$ e $Q$ sejam polinômios e

$$\frac{F(x)}{Q(x)}=\frac{G(x)}{Q(x)}$$

para todo $x$ exceto quando $Q(x) = 0$. Demonstre que $F(x) = G(x)$ para todo $x$. [*Dica*: Use a continuidade.]

**72.** Se $f$ for uma função quadrática tal que $f(0) = 1$ e

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x+1)^3}\,dx$$

for uma função racional, encontre o valor de $f'(0)$.

**73.** Se $a \neq 0$ e $n$ for um inteiro positivo, encontre a decomposição em frações parciais de

$$f(x) = \frac{1}{x^n(x-a)}$$

*Dica*: Primeiro encontre o coeficiente de $1/(x-a)$. Então subtraia o termo resultante e simplifique o que restou.

## 7.5 Estratégias de Integração

Como vimos, a integração é mais desafiadora que a derivação. Para acharmos a derivada de uma função é óbvio qual fórmula de derivação devemos aplicar. Porém, não é necessariamente óbvio qual técnica devemos aplicar para integrar uma dada função.

Até agora, técnicas individuais têm sido aplicadas em cada seção. Por exemplo, usamos geralmente a substituição nos Exercícios 5.5, a integração por partes nos Exercícios 7.1 e as frações parciais nos Exercícios 7.4. Nesta seção, contudo, apresentaremos uma coleção de integrais misturadas aleatoriamente, e o principal desafio será reconhecer quais técnicas ou fórmulas deverão ser usadas. Regras fáceis e rápidas para a aplicação de um dado método em uma determinada situação não podem ser dadas, todavia, damos alguns conselhos sobre estratégias que você pode achar útil.

Um pré-requisito para aplicar uma estratégia é o conhecimento das fórmulas básicas de integração. Na tabela seguinte juntamos as integrais de nossas listas anteriores com várias fórmulas adicionais que aprendemos neste capítulo. A maioria delas deveria ser memorizada. É útil conhecê-las todas, mas aquelas marcadas com asterisco não precisam ser memorizadas, porque podem ser facilmente deduzidas. A Fórmula 19 pode ser evitada pelo uso de frações parciais e as substituições trigonométricas podem ser utilizadas no lugar da Fórmula 20.

**Tabela de Fórmulas de Integração** As constantes de integração foram omitidas.

**1.** $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$

**2.** $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

**3.** $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$

**4.** $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$

**5.** $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$

**6.** $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$

**7.** $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x$

**8.** $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x$

**9.** $\displaystyle\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x$

**10.** $\displaystyle\int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cossec} x$

**11.** $\displaystyle\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$

**12.** $\displaystyle\int \operatorname{cossec} x\,dx = \ln|\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x|$

**13.** $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = \ln|\sec x|$

**14.** $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x|$

**15.** $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$

**16.** $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$

**17.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

**18.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

***19.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

***20.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

Uma vez armado dessas fórmulas básicas de integração, se não enxergar imediatamente como atacar uma dada integral, você poderá tentar a seguinte estratégia de quatro etapas.

**1. Simplifique o integrando, se possível** Algumas vezes o uso de manipulação algébrica ou trigonométrica simplifica o integrando e torna o método de integração óbvio. Aqui estão alguns exemplos:

$$\int \sqrt{x}\,(1 + \sqrt{x})\,dx = \int (\sqrt{x} + x)\,dx$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta &= \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta\,d\theta \\ &= \int \operatorname{sen}\theta\,\cos\theta\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2\,dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x\cos x + \cos^2 x)\,dx \\ &= \int (1 + 2\operatorname{sen} x \cos x)\,dx\end{aligned}$$

**2. Procure por uma substituição óbvia** Tente encontrar alguma função $u = g(x)$ no integrando, cujo diferencial $du = g'(x)\,dx$ também ocorra, a menos de um fator constante. Por exemplo, na integral

$$\int \frac{x}{x^2 - 1}\,dx$$

observamos que, se $u = x^2 - 1$, então $du = 2x\,dx$. Portanto, usamos a substituição $u = x^2 - 1$ em vez do método de frações parciais.

**3. Classifique o integrando de acordo com sua forma** Se as Etapas 1 e 2 não levaram à solução, então olhamos para a forma do integrando $f(x)$.

(a) *Funções trigonométricas.* Se $f(x)$ for um produto de potências de sen $x$ e cos $x$, de tg $x$ e sec $x$ ou de cotg $x$ e cossec $x$, então utilizamos as substituições recomendadas na Seção 7.2.

(b) *Funções racionais.* Se $f$ for uma função racional, usamos o procedimento da Seção 7.4 envolvendo as frações parciais.

(c) *Integração por partes.* Se $f(x)$ for um produto de uma potência de $x$ (ou um polinômio) e uma função transcendental (como uma função trigonométrica, exponencial ou logarítmica), então tentamos a integração por partes, escolhendo $u$ e $dv$ de acordo com o conselho dado na Seção 7.1. Se você olhar as funções nos Exercícios 7.1, verá que a maioria é do tipo descrito.

(d) *Radicais*. Tipos particulares de substituição são recomendados quando certos radicais aparecem.

(i) Se $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$ ocorrer, utilizamos uma substituição trigonométrica de acordo com a tabela da Seção 7.3.

(ii) Se $\sqrt[n]{ax + b}$ ocorrer, usamos a substituição racionalizante $u = \sqrt[n]{ax + b}$. De modo mais geral, isso às vezes funciona para $\sqrt[n]{g(x)}$.

**4. Tente novamente** Se as três primeiras etapas não derem resultado, lembre-se de que existem basicamente apenas dois métodos de integração: substituição e por partes.

(a) *Tente a substituição.* Mesmo que nenhuma substituição seja óbvia (Etapa 2), alguma inspiração ou engenhosidade (ou até mesmo desespero) pode sugerir uma substituição apropriada.

(b) *Tente por partes.* Embora a integração por partes seja usada na maioria das vezes nos produtos da forma descrita na Etapa 3(c), algumas vezes é eficaz em funções mais simples. Olhando na Seção 7.1, vemos que ela funciona em $\operatorname{tg}^{-1}x$, $\operatorname{sen}^{-1}x$ e $\ln x$ e todas estas são funções inversas.

(c) *Manipule o integrando.* As manipulações algébricas (talvez racionalizando o denominador ou aplicando identidades trigonométricas) podem ser úteis na transformação da integral em uma forma mais fácil. Essas manipulações podem ser mais substanciais que na Etapa 1 e podem envolver alguma engenhosidade. Aqui está um exemplo:

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \frac{1}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}\, dx = \int \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = \int \left( \operatorname{cossec}^2 x + \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \right) dx$$

(d) *Relacione o problema a problemas anteriores.* Quando tiver adquirido alguma experiência em integração, você poderá usar um método em uma dada integral similar ao método anteriormente usado em outra integral. Ou até será capaz de expressar a integral dada em termos de uma integral anterior. Por exemplo, $\int \operatorname{tg}^2 x \sec x\, dx$ é uma integral desafiadora, mas se utilizarmos a identidade $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$, podemos escrever

$$\int \operatorname{tg}^2 x \sec x\, dx = \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx$$

e se $\int \sec^3 x\, dx$ tiver sido previamente calculada (veja o Exemplo 8 na Seção 7.2), então esse cálculo poderá ser usado no problema presente.

(e) *Use vários métodos.* Algumas vezes dois ou três métodos são necessários para calcular uma integral. O cálculo pode envolver várias substituições sucessivas de diferentes tipos ou até combinar a integração por partes com uma ou mais substituições.

Nos exemplos a seguir indicamos o método de ataque, mas não resolvemos totalmente as integrais.

**EXEMPLO 1** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^3 x}\, dx$

Na Etapa 1 reescrevemos a integral:

$$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x\, dx$$

A integral é agora da forma $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x\, dx$ com $m$ ímpar, então podemos usar o conselho dado na Seção 7.2.

Alternativamente, se na Etapa 1 tivéssemos escrito

$$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x} \frac{1}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^6 x}\, dx$$

então poderíamos ter continuado como segue, com a substituição $u = \cos x$:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^6 x}\, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^6 x} \operatorname{sen} x\, dx = \int \frac{1 - u^2}{u^6} (-du)$$

$$= \int \frac{u^2 - 1}{u^6}\, du = \int (u^{-4} - u^{-6})\, du$$

**EXEMPLO 2** $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\, dx$

De acordo com a Etapa 3(d)(ii), substituímos $u = \sqrt{x}$. Então $x = u^2$, assim, $dx = 2u\, du$ e

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx = 2 \int u e^u\, du$$

O integrando é agora um produto de $u$ e da função transcendental e, desse modo, pode ser integrado por partes.

**EXEMPLO 3** $\displaystyle\int \frac{x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 - 10x}\,dx.$

Nenhuma simplificação algébrica ou substituição é óbvia, por isso as Etapas 1 e 2 não se aplicam aqui. O integrando é uma função racional, então aplicamos o procedimento da Seção 7.4, lembrando que a primeira etapa é dividir.

**EXEMPLO 4** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

Aqui a Etapa 2 é tudo o que é necessário. Substituímos $u = \ln x$ porque sua diferencial é $du = dx/x$, que ocorre na integral.

**EXEMPLO 5** $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx.$

Embora a substituição racionalizante

$$u = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

funcione aqui [(ii) Etapa 3(d)], isso leva a uma função racional muito complicada. Um método mais fácil é fazer alguma manipulação algébrica [como na Etapa 1 ou na Etapa 4(c)]. Multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{1 - x}$, temos

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx &= \int \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \\ &= \operatorname{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2} + C\end{aligned}$$

## Podemos Integrar Todas as Funções Contínuas?

Surge uma questão: nossa estratégia de integração nos permite encontrar a integral de toda função contínua? Por exemplo, podemos usá-la para calcular $\int e^{x^2}\,dx$? A resposta é não, ao menos não em termos das funções que nos são familiares.

As funções com as quais temos lidado neste livro são chamadas **funções elementares**. Essas são as funções polinomiais, racionais, potências ($x^a$), exponenciais ($a^x$), logarítmicas, trigonométricas e suas inversas, hiperbólicas e suas inversas, e todas as funções que podem ser obtidas a partir destas pelas operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e composição. Por exemplo, a função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x - 1}} + \ln(\cosh x) - xe^{\operatorname{sen} 2x}$$

é uma função elementar.

Se $f$ for uma função elementar, então $f'$ é uma função elementar, mas $\int f(x)\,dx$ não precisa ser uma função elementar. Considere $f(x) = e^{x^2}$. Como $f$ é contínua, sua integral existe, e se definimos a função $F$ por

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

então sabemos pela Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$F'(x) = e^{x^2}$$

Logo, $f(x) = e^{x^2}$ tem uma primitiva $F$, mas pode-se demonstrar que $F$ não é uma função elementar. Isso significa que não importa o quanto tentemos, nunca teremos sucesso em calcular

$\int e^{x^2} dx$ nos termos das funções que conhecemos. (No Capítulo 11, no entanto, veremos como expressar $\int e^{x^2}\, dx$ como uma série infinita.) O mesmo pode ser dito das seguintes integrais:

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx \qquad \int \operatorname{sen}(x^2)\, dx \qquad \int \cos(e^x)\, dx$$

$$\int \sqrt{x^3+1}\, dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\, dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

De fato, a maioria das funções elementares não tem primitivas elementares. Você pode ter a certeza, entretanto, de que todas as integrais nos exercícios a seguir são funções elementares.

## 7.5 Exercícios

**1–82** Calcule a integral.

1. $\int \cos x\,(1+\operatorname{sen}^2 x)\, dx$
2. $\int_0^1 (3x+1)^{\sqrt{2}}\, dx$
3. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x + \sec x}{\operatorname{tg} x} dx$
4. $\int \operatorname{tg}^3\theta\, d\theta$
5. $\int_0^2 \dfrac{2t}{(t-3)^2} dt$
6. $\int \dfrac{x}{\sqrt{3-x^4}} dx$
7. $\int_{-1}^1 \dfrac{e^{\operatorname{arctg} y}}{1+y^2} dy$
8. $\int t \operatorname{sen} t \cos t\, dt$
9. $\int_1^3 r^4 \ln r\, dr$
10. $\int_0^4 \dfrac{x-1}{x^2-4x-5} dx$
11. $\int \dfrac{x-1}{x^2-4x+5} dx$
12. $\int \dfrac{x}{x^4+x^2+1} dx$
13. $\int \operatorname{sen}^5 t \cos^4 t\, dt$
14. $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$
15. $\int \dfrac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$
16. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$
17. $\int_0^{\pi} t \cos^2 t\, dt$
18. $\int_1^4 \dfrac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$
19. $\int e^{x+e^x}\, dx$
20. $\int e^2\, dx$
21. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx$
22. $\int \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}} dx$
23. $\int_0^1 (1+\sqrt{x})^8\, dx$
24. $\int_0^4 \dfrac{6z+5}{2z+1} dz$
25. $\int \dfrac{3x^2-2}{x^2-2x-8} dx$
26. $\int \dfrac{3x^2-2}{x^3-2x-8} dx$
27. $\int \dfrac{dx}{1+e^x}$
28. $\int \operatorname{sen} \sqrt{at}\, dt$
29. $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) dx$
30. $\int_{-1}^2 |e^x - 1|\, dx$
31. $\int \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\, dx$
32. $\int \dfrac{\sqrt{2x-1}}{2x+3} dx$
33. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx$
34. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \dfrac{1+4\operatorname{cotg} x}{4-\operatorname{cotg} x} dx$
35. $\int \cos 2x \cos 6x\, dx$
36. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \dfrac{x^2 \operatorname{tg} x}{1+\cos^4 x}\, dx$
37. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3\theta\, \mathrm{sc}^2\theta\, d\theta$
38. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \dfrac{\operatorname{sen}\theta \operatorname{cotg}\theta}{\sec\theta} d\theta$
39. $\int \dfrac{\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{\sec^2\theta - \sec\theta} d\theta$
40. $\int \dfrac{1}{\sqrt{4y^2-4y-3}} dy$
41. $\int \theta \operatorname{tg}^z\theta\, d\theta$
42. $\int \dfrac{\operatorname{tg}^{-1} x}{x^2} dx$
43. $\int \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^3}\, dx$
44. $\int \sqrt{1+e^x}\, dx$

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

**45.** $\int x^5 e^{-x^3}\,dx$

**46.** $\int \frac{(x-1)\,e^x}{x^2}\,dx$

**47.** $\int x^3(x-1)^{-4}\,dx$

**48.** $\int_0^1 x\sqrt{2-\sqrt{1-x^2}}\,dx$

**49.** $\int \frac{1}{x\sqrt{4x+1}}\,dx$

**50.** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x+1}}\,dx$

**51.** $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+1}}\,dx$

**52.** $\int \frac{dx}{x(x^4+1)}$

**53.** $\int x^2 \operatorname{senh} mx\,dx$

**54.** $\int (x+\operatorname{sen} x)^2\,dx$

**55.** $\int \frac{dx}{x+x\sqrt{x}}$

**56.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$

**57.** $\int x\sqrt[3]{x+c}\,dx$

**58.** $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

**59.** $\int \cos x\cos^3 x(\operatorname{sen} x)\,dx$

**60.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-1}}$

**61.** $\int \frac{d\theta}{1+\cos\theta}$

**62.** $\int \frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}$

**63.** $\int \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx$

**64.** $\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\,dx$

**65.** $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^4 x}\,dx$

**66.** $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{sen} x\cos x}\,dx$

**67.** $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx$

**68.** $\int \frac{x^2}{x^6+3x^3+2}\,dx$

**69.** $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$

**70.** $\int \frac{1}{1+2e^x-e^{-x}}\,dx$

**71.** $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

**72.** $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx$

**73.** $\int \frac{x+\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

**74.** $\int \frac{4^x+10^x}{2^x}\,dx$

**75.** $\int \frac{1}{(x-2)(x^2+4)}\,dx$

**76.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^4}$

**77.** $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

**78.** $\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$

**79.** $\int x\operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$

**80.** $\int \frac{\sec x\cos 2x}{\operatorname{sen} x+\sec x}\,dx$

**81.** $\int \sqrt{1-\operatorname{sen} x}\,dx$

**82.** $\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x}\,dx$

**83.** As funções $y = e^{x^2}$ e $y = x^2e^{x^2}$ não têm primitivas expressas por meio de funções elementares, mas $y = (2x^2+1)\,e^{x^2}$ tem. Calcule $\int (2x^2+1)\,e^{x^2}\,dx$.

**84.** Sabemos que $F(x) = \int_0^x e^{e^t}\,dt$ é uma função contínua pelo TFC1, embora não seja uma função elementar. As funções

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx$$

também não são elementares, mas podem ser expressas em termos de $F$. Calcule as seguintes integrais em termos de $F$.

(a) $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$  (b) $\int_2^3 \frac{1}{\ln x}\,dx$

## 7.6 Integração Usando Tabelas e Sistemas de Computação Álgébrica

Nesta seção descreveremos como usar as tabelas e os sistemas de computação algébrica para integrar as funções que têm primitivas elementares. Você deve ter em mente, contudo, que até mesmo os mais poderosos sistemas de computação algébrica não podem encontrar fórmulas explícitas para as primitivas de funções como $e^{x^2}$ ou outras funções descritas no final da Seção 7.5.

### Tabelas de Integrais

As tabelas de integrais indefinidas são muito úteis quando nos deparamos com uma integral que é difícil de calcular manualmente e não temos acesso a um sistema de computação algébrica. Uma tabela relativamente curta de 120 integrais é dada no fim do livro. Tabelas mais abrangentes estão disponíveis nas *Tabelas e Fórmulas Matemáticas Padrão*, 31ª ed. de Daniel Zwillinger (Boca Raton, FL, 2002) (709 entradas) ou na *Tabela de Integrais, Séries e Produtos* de Gradshteyn e Ryzhik, 7e (San Diego, 2007), que contém centenas de páginas de integrais. Devemos nos lembrar, contudo, que as integrais frequentemente não ocorrem da maneira exata como foram listadas nas tabelas. Geralmente temos que usar a regra de substituição ou manipulação algébrica para transformar uma dada integral em uma das formas da tabela.

**EXEMPLO 1** A região delimitada pelas curvas $y = \text{arctg}\, x$, $y = 0$ e $x = 1$ é girada em torno do eixo $y$. Encontre o volume do sólido obtido.

SOLUÇÃO Usando o método das cascas cilíndricas, vemos que o volume é

$$V = \int_0^1 2\pi x \,\text{arctg}\, x \, dx$$

A Tabela de Integrais aparece nas Páginas de Referência 6-11 no final do livro.

Na seção da Tabela de Integrais intitulada *Formas Trigonométricas Inversas* localizamos a Fórmula 92:

$$\int u \,\text{tg}^{-1} u \, du = \frac{u^2 + 1}{2} \text{tg}^{-1} u - \frac{u}{2} + C$$

Então, o volume é

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x \,\text{tg}^{-1} x \, dx = 2\pi \left[ \frac{x^2 + 1}{2} \text{tg}^{-1} x - \frac{x}{2} \right]_0^1 \\ &= \pi \left[ (x^2 + 1) \,\text{tg}^{-1} x - x \right]_0^1 = \pi \,(2 \,\text{tg}^{-1} 1 - 1) \\ &= \pi [2(\pi/4) - 1] = \tfrac{1}{2}\pi^2 - \pi \end{aligned}$$

**EXEMPLO 2** Use a Tabela de Integrais para encontrar $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{5 - 4x^2}} \, dx$.

SOLUÇÃO Se olharmos na seção da tabela intitulada *Formas envolvendo* $\sqrt{a^2 - u^2}$, veremos que a entrada mais próxima é a de número 34:

$$\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}} \, du = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \text{sen}^{-1} \left( \frac{u}{a} \right) + C$$

Isso não é exatamente o que temos, mas poderemos usá-la se fizermos primeiro a substituição $u = 2x$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5 - 4x^2}} \, dx = \int \frac{(u/2)^2}{\sqrt{5 - u^2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{8} \int \frac{u^2}{\sqrt{5 - u^2}} \, du$$

Nesse caso, usaremos a Fórmula 34 com $a^2 = 5$ (assim $a = \sqrt{5}$):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{5 - 4x^2}} \, dx &= \frac{1}{8} \int \frac{u^2}{\sqrt{5 - u^2}} \, du = \frac{1}{8} \left( -\frac{u}{2} \sqrt{5 - u^2} + \frac{5}{2} \text{sen}^{-1} \frac{u}{\sqrt{5}} \right) + C \\ &= -\frac{x}{8} \sqrt{5 - 4x^2} + \frac{5}{16} \text{sen}^{-1} \left( \frac{2x}{\sqrt{5}} \right) + C \end{aligned}$$

**EXEMPLO 3** Use a Tabela de Integrais para calcular $\int x^3 \,\text{sen}\, x \, dx$.

SOLUÇÃO Se olharmos na seção intitulada *Formas Trigonométricas*, veremos que nenhuma das entradas inclui explicitamente um fator $u^3$. Contudo, podemos usar a fórmula de redução na entrada 84 com $n = 3$:

$$\int x^3 \,\text{sen}\, x \, dx = -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x \, dx$$

Precisamos agora calcular $\int x^2 \cos x \, dx$. Podemos usar a fórmula de redução na entrada 85 com $n = 2$, seguida pela entrada 82:

85. $\displaystyle\int u^n \cos u \, du = u^n \,\text{sen}\, u - n \int u^{n-1} \,\text{sen}\, u \, du$

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \,\text{sen}\, x - 2 \int x \,\text{sen}\, x \, dx \\ &= x^2 \,\text{sen}\, x - 2(\text{sen}\, x - x \cos x) + K \end{aligned}$$

Combinando esses cálculos, temos

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - 6 \operatorname{sen} x + C$$

onde $C = 3K$.

**EXEMPLO 4** Use a Tabela de Integrais para encontrar $\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\, dx$.

SOLUÇÃO Como a tabela fornece formas envolvendo $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ e $\sqrt{x^2 - a^2}$, mas não $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, primeiro completamos o quadrado:

$$x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3$$

Se fizermos a substituição $u = x + 1$ (assim $x = u - 1$), o integrando envolverá o padrão $\sqrt{a^2 + u^2}$:

$$\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\, dx = \int (u - 1)\sqrt{u^2 + 3}\, du$$

$$= \int u\sqrt{u^2 + 3}\, du - \int \sqrt{u^2 + 3}\, du$$

A primeira integral é calculada utilizando-se a substituição $t = u^2 + 3$:

$$\int u\sqrt{u^2 + 3}\, du = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} t^{3/2} = \tfrac{1}{3}(u^2 + 3)^{3/2}$$

**21.** $\displaystyle\int \sqrt{a^2 + u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

Para a segunda integral, usamos a Fórmula 21 com $a = \sqrt{3}$:

$$\int \sqrt{u^2 + 3}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + 3} + \tfrac{3}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2 + 3}\right)$$

Logo,

$$\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\, dx$$

$$= \tfrac{1}{3}(x^2 + 2x + 4)^{3/2} - \frac{x + 1}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \tfrac{3}{2}\ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 4}\right) + C$$

## Sistemas de Computação Algébrica

Vimos que o uso de tabelas envolve combinar a forma de um dado integrando com as formas dos integrandos das tabelas. Os computadores são particularmente bons para reconhecer padrões. E, do mesmo jeito que usamos as substituições com as tabelas, um SCA pode fazer substituições que transformam uma integral dada em uma daquelas que ocorrem em suas fórmulas armazenadas. Então, não é surpresa que um sistema de computação algébrica seja muito bom para fazer integração. Isso não significa que a integração manual seja uma habilidade obsoleta. Veremos que os cálculos manuais algumas vezes produzem uma integral indefinida em uma forma que é mais conveniente que a resposta do computador.

Para começarmos, vamos ver o que acontece quando pedimos que uma máquina integre a função relativamente simples $y = 1/(3x - 2)$. Usando a substituição $u = 3x - 2$, um cálculo manual fácil nos fornece

$$\int \frac{1}{3x - 2}\, dx = \tfrac{1}{3}\ln|3x - 2| + C$$

enquanto Derive, Mathematica e Maple retornam a resposta

$$\tfrac{1}{3}\ln(3x - 2)$$

A primeira coisa a observar é que os sistemas de computação algébrica omitem a constante de integração. Em outras palavras, eles produzem uma primitiva *particular*, não a mais geral. Portanto, quando usarmos uma integração feita por máquina, teremos de adicionar uma constante. Segundo, os símbolos do valor absoluto são omitidos na resposta da máquina. Isso é bom se nosso problema abranger apenas os valores $x$ maiores que $\frac{2}{3}$. Mas se estivermos interessados em outros valores de x, então precisaremos inserir o símbolo de valor absoluto.

No próximo exemplo reconsideramos a integral do Exemplo 4, mas, dessa vez, perguntamos a resposta a uma máquina.

**EXEMPLO 5** Use um sistema de computação algébrica para encontrar $\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,dx$.

SOLUÇÃO O Maple responde com

$$\tfrac{1}{3}(x^2 + 2x + 4)^{3/2} - \tfrac{1}{4}(2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \frac{3}{2}\operatorname{arcsenh}\frac{\sqrt{3}}{3}(1 + x)$$

Isso parece diferente da resposta que encontramos no Exemplo 4, mas é equivalente porque o terceiro termo pode ser reescrito, utilizando-se a identidade

$$\operatorname{arcsenh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Isso é a Equação 3.11.3.

Logo,

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsenh}\frac{\sqrt{3}}{3}(1 + x) &= \ln\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(1 + x) + \sqrt{\tfrac{1}{3}(1 + x)^2 + 1}\right]\\ &= \ln\frac{1}{\sqrt{3}}\left[1 + x + \sqrt{(1 + x)^2 + 3}\right]\\ &= \ln\frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 4}\right)\end{aligned}$$

O termo extra resultante $-\frac{3}{2}\ln\left(1/\sqrt{3}\right)$ pode ser absorvido na constante de integração.

O Mathematica fornece a resposta

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{3}\right)\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \frac{3}{2}\operatorname{arcsenh}\left(\frac{1 + x}{\sqrt{3}}\right)$$

O Mathematica combinou os dois primeiros termos do Exemplo 4 (e do resultado do Maple) em um único termo por fatoração.

O Derive responde

$$\tfrac{1}{6}\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,(2x^2 + x + 5) - \tfrac{3}{2}\ln\left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x + 1\right)$$

O primeiro termo é igual ao primeiro termo da resposta do Mathematica e o segundo termo é idêntico ao último termo no Exemplo 4.

**EXEMPLO 6** Use um SCA para calcular $\int x(x^2 + 5)^8\,dx$.

SOLUÇÃO O Maple e o Mathematica fornecem a mesma resposta:

$$\tfrac{1}{18}x^{18} + \tfrac{5}{2}x^{16} + 50x^{14} + \tfrac{1750}{3}x^{12} + 4375x^{10} + 21875x^8 + \tfrac{218750}{3}x^6 + 156250x^4 + \tfrac{390625}{2}x^2$$

Está claro que ambos os sistemas devem ter expandido $(x^2 + 5)^8$ pelo Teorema Binomial e depois integrado cada termo.

Se, em vez disso, integrarmos manualmente, usando a substituição $u = x^2 + 5$, obteremos

$$\int x(x^2 + 5)^8\,dx = \tfrac{1}{18}(x^2 + 5)^9 + C$$

Para a maioria dos propósitos, essa é uma forma mais conveniente de resposta.

O Derive e o TI-89 e TI-92 também fornecem essa resposta.

**EXEMPLO 7** Use um SCA para encontrar $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx$.

SOLUÇÃO No Exemplo 2 na Seção 7.2, encontramos que

$$\boxed{1}\qquad \int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx = -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C$$

O Derive e o Maple fornecem a resposta

$$-\tfrac{1}{7}\,\text{sen}^4x\cos^3x - \tfrac{4}{35}\,\text{sen}^2x\cos^3x - \tfrac{8}{105}\cos^3x$$

ao passo que o Mathematica responde

$$-\tfrac{5}{64}\cos x - \tfrac{1}{192}\cos 3x + \tfrac{3}{320}\cos 5x - \tfrac{1}{448}\cos 7x.$$

Suspeitamos que existem identidades trigonométricas que mostrem que essas três respostas são equivalentes. De fato, se pedirmos para o Derive, o Maple e o Mathematica simplificarem suas expressões usando as identidades trigonométricas, eles finalmente produzirão a mesma forma da resposta que na Equação 1.

## 7.6 Exercícios

**1–4** Use a entrada indicada da Tabela de Integrais nas Páginas de Referência para calcular a integral.

**1.** $\int_0^{\pi/2} \cos 5x \cos 2x\, dx$; entrada 80

**2.** $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$; entrada 113

**3.** $\int_1^2 \sqrt{4x^2 - 3}\, dx$; entrada 39

**4.** $\int_0^1 \text{tg}^3\,(\pi x/6)\, dx$; entrada 69

**5–32** Use a Tabela de Integrais nas Páginas de Referência 6–10 para calcular a integral.

**5.** $\int_0^1 2x \cos^{-1}x\, dx$

**6.** $\int_2^3 \dfrac{1}{x^2\sqrt{4x^2 - 7}}\, dx$

**7.** $\int \dfrac{\cos x}{\text{sen}^2\, x - 9}\, dx$

**8.** $\int \dfrac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$

**9.** $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{4x^2 + 9}}$

**10.** $\int \dfrac{\sqrt{2y^2 - 3}}{y^2}\, dy$

**11.** $\int_{-1}^0 t^2 e^{-t}\, dt$

**12.** $\int x^2 \,\text{cossech}(x^3 + 1)\, dx$

**13.** $\int \dfrac{\text{tg}^3(1/z)}{z^2}\, dz$

**14.** $\int \text{sen}^{-1}\sqrt{x}\, dx$

**15.** $\int e^{2x} \,\text{arctg}(e^x)\, dx$

**16.** $\int x\, \text{sen}(x^2)\cos(3x^2)\, dx$

**17.** $\int y\sqrt{6 + 4y - 4y^2}\, dy$

**18.** $\int \dfrac{dx}{2x^3 - 3x^2}$

**19.** $\int \text{sen}^2x \cos x \ln(\text{sen}\, x)\, dx$

**20.** $\int \dfrac{\text{sen}\, 2\theta}{\sqrt{5 - \text{sen}\,\theta}}\, d\theta$

**21.** $\int \dfrac{e^x}{3 - e^{2x}}\, dx$

**22.** $\int_0^2 x^3\sqrt{4x^2 - x^4}\, dx$

**23.** $\int \sec^5 x\, dx$

**24.** $\int \text{sen}^6\, 2x\, dx$

**25.** $\int \dfrac{\sqrt{4 + (\ln x)^2}}{x}\, dx$

**26.** $\int_0^1 x^4 e^{-x}\, dx$

**27.** $\int \dfrac{\cos^{-1}(x^{-2})}{x^3}\, dx$

**28.** $\int (t + 1)\sqrt{t^2 - 2t - 1}\, dt$

**29.** $\int \sqrt{e^{2x} - 1}\, dx$

**30.** $\int e^t \,\text{sen}(\alpha t - 3)\, dt$

**31.** $\int \dfrac{x^4\, dx}{\sqrt{x^{10} - 2}}$

**32.** $\int \dfrac{\sec^2\theta\, \text{tg}^2\theta}{\sqrt{9 - \text{tg}^2\,\theta}}\, d\theta$

**33.** A região sob a curva $y = \text{sen}^2x$ de 0 a $\pi$ é girada em torno do eixo $x$. Encontre o volume do sólido obtido.

**34.** Encontre o volume do sólido obtido quando a região sob a curva $y = \text{arcsen}\, x$, $x \geqslant 0$, é girada em torno do eixo $y$.

**35.** Verifique a Fórmula 53 na Tabela de Integrais (a) por derivação e (b) empregando a substituição $t = a + bu$.

**36.** Verifique a Fórmula 31 (a) por derivação e (b) fazendo a substituição $u = a\,\text{sen}\,\theta$.

SCA **37–44** Use um sistema de computação algébrica para calcular a integral. Compare a resposta com o resultado usando as tabelas. Se as respostas forem diferentes, mostre que elas são equivalentes.

**37.** $\int \sec^4 x\, dx$

**38.** $\int \text{cossec}^5 x\, dx$

**39.** $\int x^2\sqrt{x^2 + 4}\, dx$

**40.** $\int \dfrac{dx}{e^x(3e^x + 2)}$

**41.** $\int \cos^4 x\, dx$

**42.** $\int x^2\sqrt{1 + x^2}\, dx$

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

**1.** As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

**43.** $\int \operatorname{tg}^5 x \, dx$

**44.** $\int \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}} \, dx$

SCA **45.** (a) Use a tabela de integrais para calcular $F(x) = \int f(x) \, dx$, onde

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

Qual é o domínio de $f$ e $F$?

(b) Use um SCA para calcular $F(x)$. Qual o domínio da função $F$ produzida pelo SCA? Existe uma discrepância entre este domínio e o domínio da função $F$ que você encontrou na parte (a)?

SCA **46.** Os sistemas de computação algébrica precisam, algumas vezes, de ajuda dos seres humanos. Tente calcular

$$\int (1 + \ln x) \sqrt{1 + (x \ln x)^2} \, dx$$

com um sistema de computação algébrica. Se ele não retornar uma resposta, faça uma substituição que mude a integral para uma daquelas que o SCA *pode* calcular.

## PROJETO DE DESCOBERTA SCA PADRÕES EM INTEGRAIS

Neste projeto, um sistema de computação algébrica é usado para investigar as integrais indefinidas de famílias de funções. Observando os padrões que ocorrem nas integrais de vários membros da família, primeiro você vai sugerir e, então, demonstrar uma fórmula geral para qualquer membro da família.

**1.** (a) Use um sistema de computação algébrica para calcular as seguintes integrais.

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)(x+3)} \, dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x+5)} \, dx$

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)(x-5)} \, dx$ (iv) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)^2} \, dx$

(b) Baseado no padrão de suas respostas na parte (a), sugira o valor da integral

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} \, dx$$

se $a \neq b$. E se $a = b$?

(c) Verifique sua conjectura pedindo para seu SCA calcular a integral na parte (b). Então demonstre-a usando frações parciais.

**2.** (a) Use um sistema de computação algébrica para calcular as seguintes integrais.

(i) $\int \operatorname{sen} x \cos 2x \, dx$ (ii) $\int \operatorname{sen} 3x \cos 7x \, dx$ (iii) $\int \operatorname{sen} 8x \cos 3x \, dx$

(b) Baseado no padrão de suas respostas na parte (a), sugira o valor da integral

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx \, dx$$

(c) Verifique sua conjectura com um SCA. Então demonstre-a usando as técnicas da Seção 7.2. Para quais valores de $a$ e $b$ isso é válido?

**3.** (a) Use um sistema de computação algébrica para calcular as seguintes integrais.

(i) $\int \ln x \, dx$ (ii) $\int x \ln x \, dx$ (iii) $\int x^2 \ln x \, dx$

(iv) $\int x^3 \ln x \, dx$ (v) $\int x^7 \ln x \, dx$

(b) Baseado no padrão de suas respostas na parte (a), sugira o valor de

$$\int x^n \ln x \, dx$$

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

(c) Utilize integração por partes para demonstrar a conjectura que você fez na parte (b). Para quais valores de $n$ isso é válido?

**4.** (a) Use um sistema de computação algébrica para calcular as seguintes integrais.

(i) $\int xe^x\,dx$ (ii) $\int x^2e^x\,dx$ (iii) $\int x^3e^x\,dx$

(iv) $\int x^4e^x\,dx$ (v) $\int x^5e^x\,dx$

(b) Baseado no padrão de suas respostas na parte (a), sugira o valor de $\int x^6e^x\,dx$. Então, use seu SCA para verificar sua sugestão.

(c) Baseado nos padrões das partes (a) e (b), faça uma conjectura sobre o valor da integral

$$\int x^ne^x\,dx$$

quando $n$ é um inteiro positivo.

(d) Use a indução matemática para demonstrar a conjectura que você fez na parte (c).

## 7.7 Integração Aproximada

Existem duas situações nas quais é impossível encontrar o valor exato de uma integral definida.

A primeira situação surge do fato de que, para calcularmos $\int_a^b f(x)\,dx$ usando o Teorema Fundamental do Cálculo, precisamos conhecer uma primitiva de $f$. Algumas vezes, no entanto, é difícil, ou mesmo impossível, encontrar uma primitiva (veja a Seção 7.5). Por exemplo, é impossível calcular as seguintes integrais exatamente:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$$

A segunda situação surge quando a função é determinada por um experimento científico, por meio de leituras de instrumentos ou dados coletados. Pode não haver uma fórmula para a função (veja o Exemplo 5).

Em ambos os casos precisamos encontrar valores aproximados para as integrais definidas. Já conhecemos um método desse tipo. Lembre-se de que a integral definida é obtida como um limite das somas de Riemann; assim, qualquer soma de Riemann pode ser usada como uma aproximação à integral: se dividirmos $[a, b]$ por $n$ subintervalos de comprimento igual $\Delta x = (b - a)/n$, então teremos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\,\Delta x$$

onde $x_i^*$ é um ponto qualquer no $i$-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Se $x_i^*$ for escolhido como a extremidade esquerda do intervalo, então $x_i^* = x_{i-1}$ e teremos

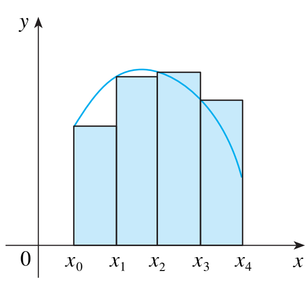
$$\boxed{1} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx L_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\,\Delta x$$

Se $f(x) \geqslant 0$, então a integral representa uma área e $\boxed{1}$ representa uma aproximação dessa área pelos retângulos mostrados na Figura 1(a). Se escolhermos $x_i^*$ como a extremidade direita, então $x_i^* = x_i$ e teremos

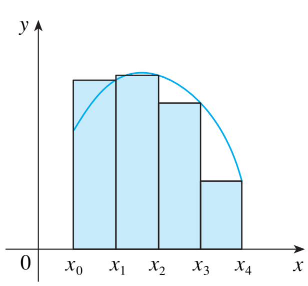
$$\boxed{2} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx R_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\,\Delta x$$

[Veja a Figura 1(b).] As aproximações $L_n$ e $R_n$ definidas pelas Equações 1 e 2 são chamadas de **aproximação pela extremidade esquerda** e **aproximação pela extremidade direita**, respectivamente.

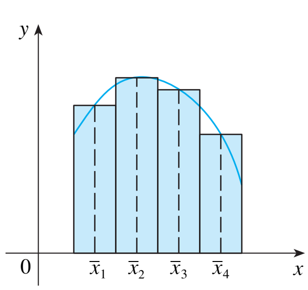
Na Seção 5.2 também consideramos o caso onde $x_i^*$ é escolhido como o ponto médio $\bar{x}_i$ do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A Figura 1(c) mostra a aproximação pelo ponto médio $M_n$, que parece ser melhor que $L_n$ ou $R_n$.




(a) Aproximação pela extremidade esquerda




(b) Aproximação pela extremidade direita




(c) Aproximação pelo ponto médio

**FIGURA 1**

**Regra do Ponto Médio**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

onde $$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

e $$\bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{ponto médio de } [x_{i-1}, x_i].$$

Outra aproximação, denominada Regra do Trapézio, resulta da média das aproximações nas Equações 1 e 2:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)\right]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left[\big(f(x_0) + f(x_1)\big) + \big(f(x_1) + f(x_2)\big) + \cdots + \big(f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)\right]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\,[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

**Regra do Trapézio**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}\,[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde $\Delta x = (b-a)/n$ e $x_i = a + i\,\Delta x$.

A razão para o nome Regra do Trapézio pode ser vista na Figura 2, que ilustra o caso com $f(x) \geqslant 0$ e $n = 4$. A área do trapézio que está acima do $i$-ésimo subintervalo é

$$\Delta x\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}\,[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

e, se adicionarmos as áreas de todos os trapézios, teremos o lado direito da Regra do Trapézio.

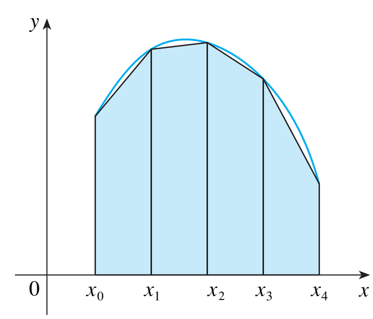



**FIGURA 2**
Aproximação por trapézios

**EXEMPLO 1** Use (a) a Regra do Trapézio e (b) a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para aproximar a integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUÇÃO
(a) Com $n = 5$, $a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2-1)/5 = 0{,}2$, e então a Regra do Trapézio resulta em

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx T_5 = \frac{0{,}2}{2}\,[f(1) + 2f(1{,}2) + 2f(1{,}4) + 2f(1{,}6) + 2f(1{,}8) + f(2)]$$

$$= 0{,}1\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{2}{1{,}6} + \frac{2}{1{,}8} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0{,}695635$$

Essa aproximação é ilustrada na Figura 3.

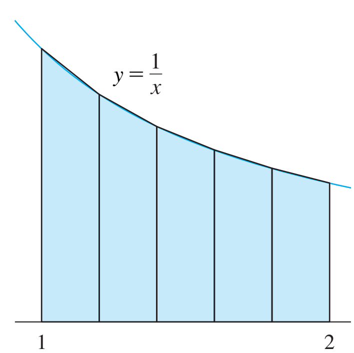



**FIGURA 3**

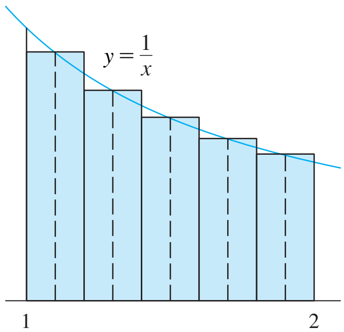



**FIGURA 4**

(b) Os pontos médios dos cinco subintervalos são 1,1, 1,3, 1,5, 1,7 e 1,9; assim, a Regra do Ponto Médio resulta em

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\,[f(1{,}1) + f(1{,}3) + f(1{,}5) + f(1{,}7) + f(1{,}9)]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{1{,}7} + \frac{1}{1{,}9}\right)$$

$$\approx 0{,}691908$$

Essa aproximação é ilustrada na Figura 4.

No Exemplo 1 escolhemos deliberadamente uma integral cujo valor pode ser calculado explicitamente de maneira que possamos ver quão precisas são as Regras do Trapézio e do Ponto Médio. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^2 = \ln 2 = 0{,}693147\ldots$$

$\int_a^b f(x)\,dx = \text{aproximação} + \text{erro}$

O **erro** no uso de uma aproximação é definido como a quantidade que precisa ser adicionada à aproximação para torná-la exata. A partir dos valores no Exemplo 1, vemos que os erros nas aproximações das Regras do Trapézio e do Ponto Médio para $n = 5$ são

$$E_T \approx -0{,}002488 \qquad \text{e} \qquad E_M \approx 0{,}001239$$

Em geral, temos

$$E_T = \int_a^b f(x)\,dx - T_n \qquad \text{e} \qquad E_M = \int_a^b f(x)\,dx - M_n$$

**TEC** *Module 5.2/7.7* permite que você compare métodos de aproximação.

As tabelas a seguir mostram os resultados de cálculos semelhantes àqueles no Exemplo 1, mas para n = 5, 10 e 20 e para as aproximações pelas extremidades esquerda e direita, assim como para as Regras do Trapézio e do Ponto Médio.

Aproximação para $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

| $n$ | $L_n$ | $R_n$ | $T_n$ | $M_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 0,745635 | 0,645635 | 0,695635 | 0,691908 |
| 10 | 0,718771 | 0,668771 | 0,693771 | 0,692835 |
| 20 | 0,705803 | 0,680803 | 0,693303 | 0,693069 |

Erros correspondentes

| $n$ | $E_L$ | $E_R$ | $E_T$ | $E_M$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | −0,052488 | 0,047512 | −0,002488 | 0,001239 |
| 10 | −0,025624 | 0,024376 | −0,000624 | 0,000312 |
| 20 | −0,012656 | 0,012344 | −0,000156 | 0,000078 |

Podemos fazer várias observações a partir dessas tabelas:

Essas observações são verdadeiras na maioria dos casos.

1. Em todos os métodos obtemos aproximações mais precisas ao aumentarmos o valor de $n$. (Mas valores muito grandes de $n$ resultam em tantas operações aritméticas que temos que tomar cuidado com os erros de arredondamento acumulados.)
2. Os erros nas aproximações pelas extremidades esquerda e direita têm sinais opostos e parecem diminuir por um fator de cerca de 2 quando dobramos o valor de $n$.
3. As Regras do Trapézio e do Ponto Médio são muito mais precisas que as aproximações pelas extremidades.
4. Os erros nas Regras do Trapézio e do Ponto Médio têm sinais opostos e parecem diminuir por um fator de cerca de 4 quando dobramos o valor de $n$.
5. O tamanho do erro na Regra do Ponto Médio é cerca de metade do tamanho do erro na Regra do Trapézio.

A Figura 5 mostra por que geralmente podemos esperar maior precisão na Regra do Ponto Médio do que na Regra do Trapézio. A área de um retângulo típico na Regra do Ponto Médio é a mesma que a do trapézio *ABCD*, cujo lado superior é tangente ao gráfico em *P*. A área desse trapézio está mais próxima da área sob o gráfico do que da área do trapézio *AQRD* usado na Regra do Trapézio. (O erro do ponto médio, área sombreada em cinza, é menor que o erro do trapézio, área sombreada em azul.)

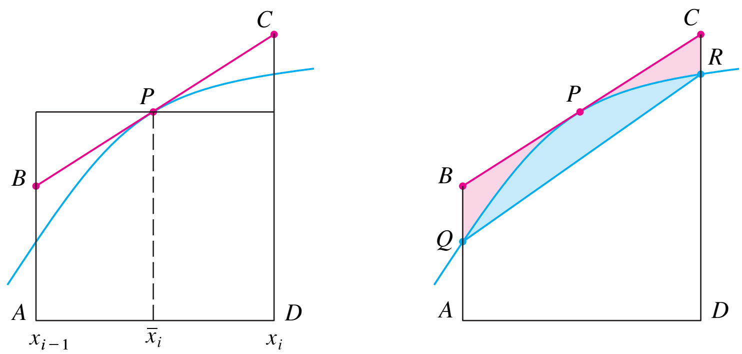



**FIGURA 5**

Essas observações são corroboradas nas seguintes estimativas de erros, que são demonstradas em livros de análise numérica. Perceba que a Observação 4 corresponde a $n^2$ em cada denominador, porque $(2n)^2 = 4n^2$. O fato de que as estimativas dependem do tamanho da segunda derivada não surpreende se você olhar a Figura 5, pois $f''(x)$ mede quanto o gráfico está curvado. [Lembre-se de que $f''(x)$ mede quão rápido a inclinação de $y = f(x)$ muda.]

$\boxed{3}$ **Limitantes de Erro** Suponha que $|f''(x)| \leqslant K$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Se $E_T$ e $E_M$ são os erros nas Regras do Trapézio e do Ponto Médio, então

$$|E_T| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \qquad \text{e} \qquad |E_M| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

Vamos aplicar essa estimativa de erro à aproximação pela Regra do Trapézio no Exemplo 1. Se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$ e $f''(x) = 2/x^3$. Uma vez que $1 \leqslant x \leqslant 2$, temos $1/x \leqslant 1$, logo

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leqslant \frac{2}{1^3} = 2$$

Portanto, tomando $K = 2$, $a = 1$, $b = 2$ e $n = 5$ na estimativa de erro $\boxed{3}$, vemos que

$$|E_T| \leqslant \frac{2(2-1)^3}{12(5)^2} = \frac{1}{150} \approx 0{,}006667$$

*K* pode ser qualquer número maior que todos os valores de $|f''(x)|$, mas valores menores para *K* dão melhores limitantes para o erro.

Comparando essa estimativa de erro de 0,006667 com o erro real de 0,002488, vemos que pode acontecer de o erro real ser substancialmente menor que o limitante superior do erro dado por $\boxed{3}$.

**EXEMPLO 2** Quão grande devemos tomar $n$ a fim de garantir que as aproximações das Regras do Trapézio e do Ponto Médio para $\int_1^2 (1/x)\,dx$ tenham precisão de 0,0001?

SOLUÇÃO Vimos no cálculo anterior que $|f''(x)| \leqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$; assim, podemos tomar $K = 2$, $a = 1$ e $b = 2$ em $\boxed{3}$. A precisão de 0,0001 significa que o tamanho do erro deve ser menor que 0,0001. Portanto, escolhemos $n$ para que

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0{,}0001$$

Isolando $n$ na desigualdade, obtemos

$$n^2 > \frac{2}{12(0{,}0001)}$$

ou $$n > \frac{1}{\sqrt{0{,}0006}} \approx 40{,}8$$

É bem possível que um valor mais baixo para $n$ seja suficiente, mas 41 é o menor valor para o qual a fórmula de estimativa de erro pode nos garantir a precisão de 0,0001.

Então $n = 41$ irá garantir a precisão desejada.

Para a mesma precisão com a Regra do Ponto Médio escolhemos $n$ de modo que

$$\frac{2(1)^3}{24n^2} < 0{,}0001 \qquad \text{e assim} \qquad n > \frac{1}{\sqrt{0{,}0012}} \approx 29$$

**EXEMPLO 3**

(a) Use a Regra do Ponto Médio com $n = 10$ para aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.
(b) Dê um limitante superior para o erro envolvido nessa aproximação.

SOLUÇÃO

(a) Como $a = 0$, $b = 1$ e $n = 10$, a Regra do Ponto Médio resulta em

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \approx \Delta x\,[f(0{,}05) + f(0{,}15) + \cdots + f(0{,}85) + f(0{,}95)]$$
$$= 0{,}1[e^{0{,}0025} + e^{0{,}0225} + e^{0{,}0625} + e^{0{,}1225} + e^{0{,}2025} + e^{0{,}3025}$$
$$+ e^{0{,}4225} + e^{0{,}5625} + e^{0{,}7225} + e^{0{,}9025}]$$
$$\approx 1{,}460393$$

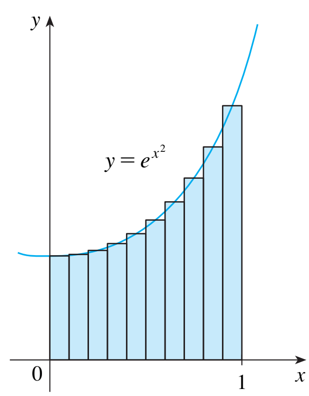


FIGURA 6

A Figura 6 ilustra essa aproximação.

(b) Como $f(x) = e^{x^2}$, temos $f'(x) = 2xe^{x^2}$ e $f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}$. Além disso, como $0 \leqslant x \leqslant 1$, temos $x^2 \leqslant 1$ e assim

$$0 \leqslant f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2} \leqslant 6e$$

Tomando $K = 6e$, $a = 0$, $b = 1$ e $n = 10$ na estimativa de erro $\boxed{3}$, vemos que um limitante superior para o erro é

$$\frac{6e(1)^3}{24(10)^2} = \frac{e}{400} \approx 0{,}007$$

Estimativas de erro são limitantes superiores para o erro. Estas dão, teoricamente, os piores cenários. O erro real, nesse caso, é de cerca de 0,0023.

## Regra de Simpson

Uma outra regra para resultados de integração aproximados consiste no uso de parábolas ao invés de segmentos de reta para aproximar uma curva. Como antes, dividimos $[a, b]$ em $n$ subintervalos de igual comprimento $h = \Delta x = (b - a)/n$, mas dessa vez assumimos que $n$ seja um número *par*. Então, em cada par consecutivo de intervalos, aproximamos a curva $y = f(x) \geqslant 0$ por uma parábola conforme mostrado na Figura 7. Se $y_i = f(x_i)$, então $P_i(x_i, y_i)$ é o ponto na curva acima de $x_i$. Uma parábola típica passa por três pontos consecutivos $P_i$, $P_{i+1}$ e $P_{i+2}$.

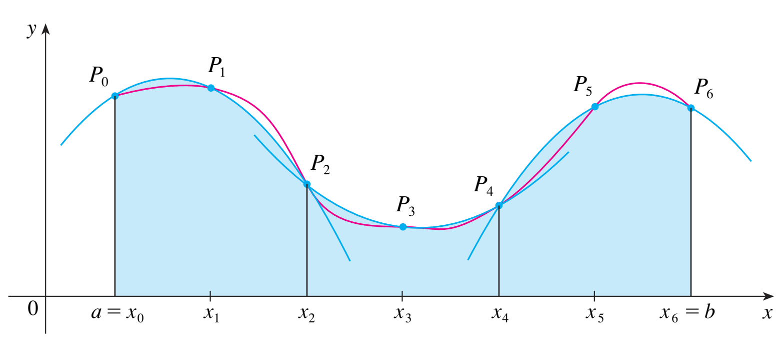


FIGURA 7

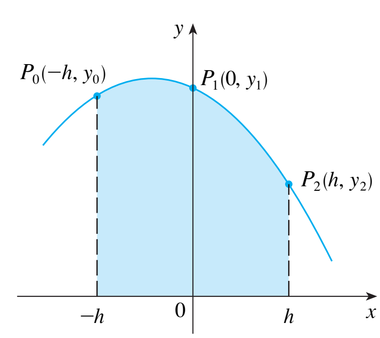


FIGURA 8

Para simplificarmos nossos cálculos, primeiro consideramos o caso onde $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ e $x_2 = h$. (Veja a Figura 8.) Sabemos que a equação da parábola que passa por $P_0$, $P_1$ e $P_2$ é da forma $y = Ax^2 + Bx + C$, e assim a área sob a parábola de $x = -h$ até $x = h$ é

$$\int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\, dx = 2\int_0^h (Ax^2 + C)\, dx$$

$$= 2\left[A\frac{x^3}{3} + Cx\right]_0^h$$

$$= 2\left(A\frac{h^3}{3} + Ch\right) = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)$$

Aqui, usamos o Teorema 5.5.7. Observe que $Ax^2 + C$ é par e $Bx$ é ímpar.

Mas, como a parábola passa por $P_0(-h, y_0)$, $P_1(0, y_1)$ e $P_2(h, y_2)$, temos

$$y_0 = A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C$$

$$y_1 = C$$

$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

e, portanto,

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$

Por isso podemos reescrever a área sob a parábola como

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Agora, movendo essa parábola horizontalmente, não mudamos a área sob ela. Isso significa que a área sob a parábola por $P_0$, $P_1$ e $P_2$ de $x = x_0$ a $x = x_2$ na Figura 7 ainda é

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Analogamente, a área sob a parábola por $P_2$, $P_3$ e $P_4$ de $x = x_2$ para $x = x_4$ é

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Se calcularmos as áreas sob todas as parábolas dessa forma e adicionarmos os resultados, obteremos

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Embora tenhamos deduzido essa aproximação para o caso no qual $f(x) \geqslant 0$, essa é uma aproximação razoável para qualquer função contínua $f$ e é chamada Regra de Simpson, em homenagem ao matemático inglês Thomas Simpson (1710–1761). Observe o padrão dos coeficientes: 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, . . . , 4, 2, 4, 1.

**Simpson**

Thomas Simpson era um tapeceiro que aprendeu sozinho matemática e tornou-se um dos maiores matemáticos ingleses do século XVIII. O que chamamos Regra de Simpson já era conhecido por Cavalieri e Gregory no século XVII, mas Simpson popularizou-a em seu livro de cálculo, muito vendido, chamado *A New Treatise of Fluxions*.

**Regra de Simpson**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots$$
$$+ 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde $n$ é par e $\Delta x = (b - a)/n$.

**EXEMPLO 4** Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para aproximar $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUÇÃO Colocando $f(x) = 1/x$, $n = 10$, e $\Delta x = 0.1$ na Regra de Simpson, teremos

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx S_{10}$$
$$= \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1{,}1) + 2f(1{,}2) + 4f(1{,}3) + \cdots + 2f(1{,}8) + 4f(1{,}9) + f(2)]$$
$$= \frac{0{,}1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{4}{1{,}1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{4}{1{,}3} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{4}{1{,}5} + \frac{2}{1{,}6} + \frac{4}{1{,}7} + \frac{2}{1{,}8} + \frac{4}{1{,}9} + \frac{1}{2}\right)$$
$$\approx 0{,}693150$$

Observe que, no Exemplo 4, a Regra de Simpson nos dá uma aproximação *muito* melhor ($S_{10} \approx 0{,}693150$) para o valor real da integral ($\ln 2 \approx 0{,}693147\ldots$) do que a aproximação pela Regra do Trapézio ($T_{10} \approx 0{,}693771$) ou pela Regra do Ponto Médio ($M_{10} \approx 0{,}692835$). As aproximações pela Regra de Simpson são médias ponderadas das aproximações pelas Regras do Trapézio e do Ponto Médio (veja o Exercício 50):

$$S_{2n} = \tfrac{1}{3}T_n + \tfrac{2}{3}M_n$$

(Lembre-se de que $E_T$ e $E_M$ geralmente têm sinais opostos, e $|E_M|$ é cerca de metade de $|E_T|$.)

Em muitas aplicações de cálculo precisamos calcular uma integral mesmo, se nenhuma fórmula explícita for conhecida para $y$ como uma função de $x$. Uma função pode ser dada graficamente ou como uma tabela de valores de dados coletados. Se existe evidência de que os valores não estão mudando rapidamente, então a Regra do Trapézio ou a Regra de Simpson pode ainda ser usada para calcular um valor aproximado para $\int_a^b y\,dx$, a integral de $y$ em relação a $x$.

**EXEMPLO 5** A Figura 9 mostra o tráfego de dados através de uma linha direta conectando os Estados Unidos à SWITCH, a rede acadêmica e de pesquisa da Suíça, no dia 10 de fevereiro de 1998. *D(t)* denota o processamento dos dados, medida em megabits por segundo (Mb/s). Use a Regra de Simpson para dar uma estimativa da quantidade total de dados transmitidos através dessa linha da meia-noite até meio-dia daquele dia.

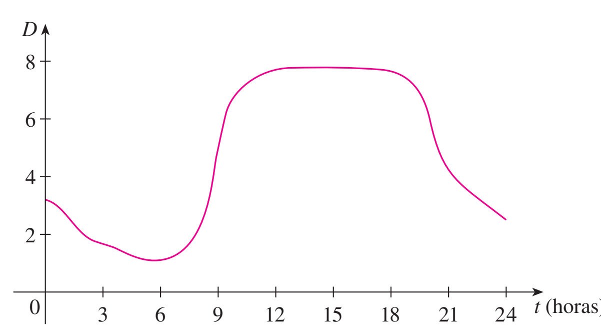



**FIGURA 9**

SOLUÇÃO Como queremos que as unidades sejam consistentes e $D(t)$ é medido em megabits por segundo, as unidades serão transformadas de horas para segundos. Seja $A(t)$ a quantidade de dados (em megabits) transmitida no instante $t$, em que $t$ é medido em segundos, então $A'(t) = D(t)$. Logo, pelo Teorema da Variação Total (veja a Seção 5.4), a quantidade total de dados transmitidos até o meio-dia (quando $t = 12 \times 60^2 = 43\,200$) é

$$A(43\,200) = \int_0^{43\,200} D(t)\,dt$$

Fizemos as estimativas para os valores de $D(t)$ com intervalos de hora em hora e os compilamos na tabela a seguir.

| $t$ (horas) | $t$ (segundos) | $D(t)$ | $t$ (horas) | $t$ (segundos) | $D(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 3,2 | 7 | 25 200 | 1,3 |
| 1 | 3 600 | 2,7 | 8 | 28 800 | 2,8 |
| 2 | 7 200 | 1,9 | 9 | 32 400 | 5,7 |
| 3 | 10 800 | 1,7 | 10 | 36 000 | 7,1 |
| 4 | 14 400 | 1,3 | 11 | 39 600 | 7,7 |
| 5 | 18 000 | 1,0 | 12 | 43 200 | 7,9 |
| 6 | 21 600 | 1,1 | | | |

Então, usamos a Regra de Simpson com $n = 12$ e $\Delta t = 3\,600$ para estimar a integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{43\,200} A(t)\,dt &\approx \frac{\Delta t}{3}[D(0) + 4D(3\,600) + 2D(7\,200) + \cdots + 4D(39\,600) + D(43\,200)]\\ &\approx \frac{3\,600}{3}[3{,}2 + 4(2{,}7) + 2(1{,}9) + 4(1{,}7) + 2(1{,}3) + 4(1{,}0)\\ &\qquad + 2(1{,}1) + 4(1{,}3) + 2(2{,}8) + 4(5{,}7) + 2(7{,}1) + 4(7{,}7) + 7{,}9]\\ &= 143\,880\end{aligned}$$

Assim, a quantidade total de dados transmitidos até o meio-dia é de aproximadamente 144 000 megabits, ou 144 gigabites.

A tabela na margem mostra como a Regra de Simpson se compara à Regra do Ponto Médio para a integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$, cujo valor é de aproximadamente 0,69314718. A segunda tabela mostra como o erro $E_S$ na Regra de Simpson diminui por um fator de aproximadamente 16 quando $n$ é duplicado. (Nos Exercícios 27 e 28 será solicitado para verificar isso para duas integrais adicionais.) Isso é consistente com a aparência de $n^4$ no denominador da seguinte estimativa de erro para a Regra de Simpson. Ela é semelhante às estimativas dadas em $\boxed{3}$ para as Regras do Trapézio e do Ponto Médio, mas usa a quarta derivada de $f$.

| $n$ | $M_n$ | $S_n$ |
|---|---|---|
| 4 | 0,69121989 | 0,69315453 |
| 8 | 0,69266055 | 0,69314765 |
| 16 | 0,69302521 | 0,69314721 |

| $n$ | $E_M$ | $E_S$ |
|---|---|---|
| 4 | 0,00192729 | −0,00000735 |
| 8 | 0,00048663 | −0,00000047 |
| 16 | 0,00012197 | −0,00000003 |

**4 Limitante de Erro para a Regra de Simpson** Suponha que $|f^{(4)}(x)| \leqslant K$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Se $E_S$ é o erro envolvido no uso da Regra de Simpson, então

$$|E_S| \leqslant \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

**EXEMPLO 6** Quão grande devemos tomar $n$ para garantir que a aproximação pela Regra de Simpson para $\int_1^2 (1/x)\,dx$ tenha uma precisão de 0,0001?

SOLUÇÃO Se $f(x) = 1/x$, então $f^{(4)}(x) = 24/x^5$. Como $x \geqslant 1$, obtemos $1/x \leqslant 1$, logo

$$|f^{(4)}(x)| = \left|\frac{24}{x^5}\right| \leqslant 24$$

Muitas calculadoras e sistemas de computação algébrica têm um algoritmo embutido que calcula uma aproximação de uma integral definida. Algumas dessas máquinas usam a Regra de Simpson; outras utilizam as técnicas mais sofisticadas, como a integração numérica *adaptativa*. Isso significa que, se uma função flutua muito mais em uma certa parte do intervalo do que em outro lugar, então essa parte é dividida em mais subintervalos. Essa estratégia reduz o número de cálculos necessários para atingir uma dada precisão.

Portanto, podemos tomar $K = 24$ em $\boxed{4}$. Por isso, para um erro menor que 0,0001, devemos escolher $n$ de modo que

$$\frac{24(1)^5}{180n^4} < 0{,}0001$$

Isso resulta em
$$n^4 > \frac{24}{180(0{,}0001)}$$

ou
$$n > \frac{1}{\sqrt[4]{0{,}00075}} \approx 6{,}04$$

Portanto, $n = 8$ ($n$ deve ser par) fornece a precisão desejada. (Compare esse resultado com o Exemplo 2, onde obtivemos $n = 41$ para a Regra do Trapézio e $n = 29$ para a Regra do Ponto Médio.)

**EXEMPLO 7**

(a) Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.
(b) Estime o erro envolvido nessa aproximação.

SOLUÇÃO

(a) Se $n = 10$, então $\Delta x = 0{,}1$ e a Regra de Simpson resulta em

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}\,dx &\approx \frac{\Delta x}{3}[f(0) + 4f(0{,}1) + 2f(0{,}2) + \cdots + 2f(0{,}8) + 4f(0{,}9) + f(1)]\\ &= \frac{0{,}1}{3}[e^0 + 4e^{0{,}01} + 2e^{0{,}04} + 4e^{0{,}09} + 2e^{0{,}16} + 4e^{0{,}25} + 2e^{0{,}36}\\ &\qquad + 4e^{0{,}49} + 2e^{0{,}64} + 4e^{0{,}81} + e^1]\\ &\approx 1{,}462681\end{aligned}$$

A Figura 10 ilustra os cálculos no Exemplo 7. Observe que os arcos de parábola estão tão próximos ao gráfico de $y = e^{x^2}$ que eles são praticamente indistinguíveis do gráfico.

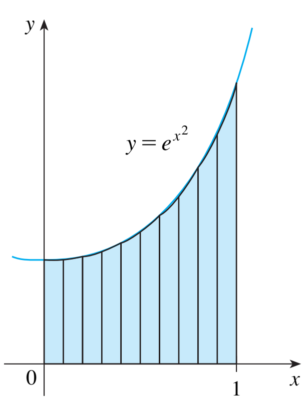



**FIGURA 10**

(b) A quarta derivada de $f(x) = e^{x^2}$ é

$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$$

e assim, como $0 \leqslant x \leqslant 1$, temos

$$0 \leqslant f^{(4)}(x) \leqslant (12 + 48 + 16)e^1 = 76e$$

Portanto, colocando $K = 76e$, $a = 0$, $b = 1$ e $n = 10$ em $\boxed{4}$, vemos que o erro é no máximo

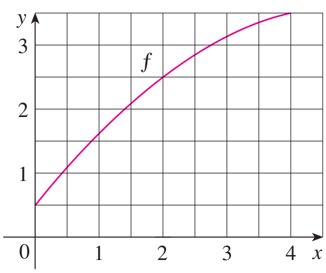
$$\frac{76e(1)^5}{180(10)^4} \approx 0{,}000115$$

(Compare esse resultado com o Exemplo 3.) Logo, com precisão de três posições decimais, temos

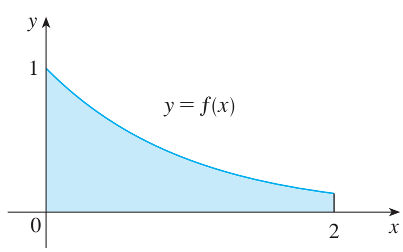
$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx 1{,}463$$

# 7.7 Exercícios

**1.** Seja $I = \int_0^4 f(x)\,dx$, em que $f$ é a função cujo gráfico é mostrado.
(a) Use o gráfico para encontrar $L_2$, $R_2$ e $M_2$.
(b) Estas são estimativas por baixo ou por cima de $I$?
(c) Use o gráfico para encontrar $T_2$. Como isso se compara com $I$?
(d) Para qualquer valor de $n$, relacione os números $L_n$, $R_n$, $M_n$, $T_n$ e $I$ na ordem crescente.




**2.** As aproximações pela extremidade esquerda, extremidade direita, Trapézio e Ponto Médio foram usadas para estimar $\int_0^2 f(x)\,dx$, onde $f$ é a função cujo gráfico é mostrado. As estimativas foram 0,7811, 0,8675, 0,8632 e 0,9540 e o mesmo número de subintervalos foi usado em cada caso.
(a) Qual regra produz qual estimativa?
(b) Entre quais aproximações está o valor verdadeiro de $\int_0^2 f(x)\,dx$?




**3.** Estime $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$ usando (a) a Regra do Trapézio e (b) a Regra do Ponto Médio, cada uma com $n = 4$. A partir de um gráfico do integrando, decida se suas estimativas são subestimadas ou superestimadas. O que você pode concluir sobre o valor verdadeiro da integral?

**4.** Trace o gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{1}{2}x^2)$ na janela retangular [0,1] por [0; 0,5] e seja $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.
(a) Use o gráfico para decidir se $L_2$, $R_2$, $M_2$ e $T_2$ subestimam ou superestimam $I$.
(b) Para qualquer valor de $n$, relacione os números $L_n$, $R_n$, $M_n$, $T_n$ e $I$ em ordem crescente.
(c) Calcule $L_5$, $R_5$, $M_5$ e $T_5$. A partir do gráfico, qual você acha que oferece a melhor estimativa de $I$?

**5–6** Use (a) a Regra do Ponto Médio e (b) a Regra de Simpson para aproximar a integral dada com o valor de $n$ especificado. (Arredonde suas respostas para seis casas decimais.) Compare seu resultado com o valor real para determinar o erro em cada aproximação.

**5.** $\int_0^\pi x^2 \operatorname{sen} x\,dx, \quad n = 8$

**6.** $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,dx, \quad n = 6$

**7–18** Use (a) a Regra do Trapézio, (b) a Regra do Ponto Médio e (c) de a Regra de Simpson para aproximar a integral dada com o valor $n$ especificado. (Arredonde seu resultado para seis casas decimais.)

**7.** $\int_1^2 \sqrt{x^3 - 1}\,dx, \quad n = 10$

**8.** $\int_0^2 \dfrac{1}{1 + x^6}\,dx, \quad n = 8$

**9.** $\int_0^2 \dfrac{e^x}{1 + x^2}\,dx, \quad n = 10$

**10.** $\int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{1 + \cos x}, \quad n = 4$

**11.** $\int_1^4 \sqrt{\ln x}\,dx, \quad n = 6$

**12.** $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^3)\,dx, \quad n = 10$

**13.** $\int_0^4 e^{\sqrt{t}} \operatorname{sen} t\,dt, \quad n = 8$

**14.** $\int_0^1 \sqrt{z}\,e^{-z}\,dz, \quad n = 10$

**15.** $\int_1^5 \dfrac{\cos x}{x}\,dx, \quad n = 8$

**16.** $\int_4^6 \ln(x^3 + 2)\,dx, \quad n = 10$

**17.** $\int_{-1}^1 e^{e^x}\,dx, \quad n = 10$

**18.** $\int_0^4 \cos \sqrt{x}\,dx, \quad n = 10$

**19.** (a) Encontre as aproximações $T_8$ e $M_8$ para a integral $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$.
(b) Estime os erros envolvidos nas aproximações da parte (a).
(c) Quão grande devemos escolher $n$ para que as aproximações $T_n$ e $M_n$ para a integral na parte (a) tenham uma precisão de 0,0001?

**20.** (a) Encontre as aproximações $T_{10}$ e $M_{10}$ para $\int_1^2 e^{1/x}\,dx$.
(b) Estime os erros envolvidos nas aproximações da parte (a).
(c) Quão grande temos que escolher $n$ para que as aproximações $T_n$ e $M_n$ para a integral na parte (a) tenham a precisão de 0,0001?

**21.** (a) Encontre as aproximações $T_{10}$, $M_{10}$ e $S_{10}$ para $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ e os erros correspondentes $E_T$, $E_m$ e $E_S$.
(b) Compare os erros reais na parte (a) com as estimativas de erros dadas por $\boxed{3}$ e $\boxed{4}$.
(c) Quão grande devemos escolher $n$ para que as aproximações $T_n$, $M_n$ e $S_n$ para a integral na parte (a) tenham a precisão de 0,00001?

**22.** Quão grande deve ser $n$ para garantir que a aproximação pela Regra de Simpson $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ tenha uma precisão de 0,00001?

SCA **23.** O problema com as estimativas de erro é que, frequentemente, é muito difícil calcular as quatro derivadas e obter um bom limitante superior $K$ para $|f^{(4)}(x)|$ manualmente. Mas os sistemas de computação algébrica não têm problemas para calcular $f^{(4)}$ e traçá-la; assim podemos facilmente encontrar um valor de $K$ a partir do gráfico realizado por uma máquina. Este exercício trabalha com aproximações para a integral $I = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, em que $f(x) = e^{\cos x}$.
(a) Use um gráfico para obter um bom limitante superior para $|f''(x)|$.
(b) Use $M_{10}$ para aproximar $I$.
(c) Use a parte (a) para estimar o erro na parte (b).
(d) Use a capacidade de integração numérica em seu SCA para aproximar $I$.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

**1.** As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

(e) Como o erro real se compara com o erro estimado na parte (c)?

(f) Use um gráfico para obter um bom limitante superior para $|f^{(4)}(x)|$.

(g) Use $S_{10}$ para aproximar $I$.

(h) Use a parte (*f*) para estimar o erro na parte (g).

(i) Como o erro real se compara com o erro estimado na parte (h)?

(j) Quão grande deve ser $n$ para garantir que o tamanho do erro usando $S_n$ seja menor que 0,0001?

SCA **24.** Repita o Exercício 23 para a integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^3}\, dx$.

**25–26** Encontre as aproximações $L_n$, $R_n$, $T_n$ e $M_n$ para $n = 5$, 10 e 20. Então calcule os erros correspondentes $E_L$, $E_R$, $E_T$ e $E_M$. (Arredonde seus resultados para seis casas decimais. Você pode usar o comando soma em um sistema de computação algébrica.) Quais observações você pode fazer? Em particular, o que acontece aos erros quando $n$ é duplicado?

**25.** $\int_0^1 xe^x\, dx$

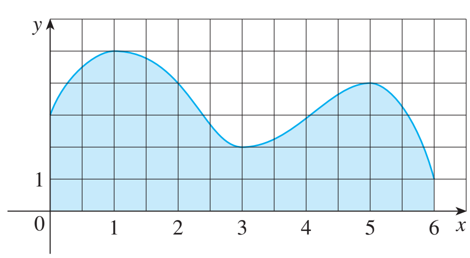
**26.** $\int_1^2 \dfrac{1}{x^2}\, dx$

**27–28** Encontre as aproximações $T_n$, $M_n$ e $S_n$ para $n = 6$ e 12. Então calcule os erros correspondentes $E_T$, $E_M$ e $E_S$. (Arredonde seus resultados para seis casas decimais. Você pode usar o comando soma em um sistema de computação algébrica.) Quais observações você pode fazer? Em particular, o que acontece aos erros quando $n$ é duplicado?

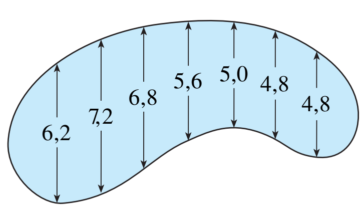
**27.** $\int_0^2 x^4\, dx$

**28.** $\int_1^4 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

**29.** Estime a área sob o gráfico na figura usando (a) a Regra do Trapézio, (b) a Regra do Ponto Médio e (c) a Regra de Simpson, cada uma com $n = 6$.




**30.** Os comprimentos (em metros) de uma piscina com o formato de um rim são medidos a intervalos de 2 metros, como indicado na figura. Use a Regra de Simpson para estimar a área da piscina.




**31.** (a) Use a Regra do Trapézio e os dados a seguir para estimar o valor da integral $\int_1^5 f(x)\, dx$.

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1,0 | 2,4 | 3,5 | 4,0 |
| 1,5 | 2,9 | 4,0 | 4,1 |
| 2,0 | 3,3 | 4,5 | 3,9 |
| 2,5 | 3,6 | 5,0 | 3,5 |
| 3,0 | 3,8 | | |

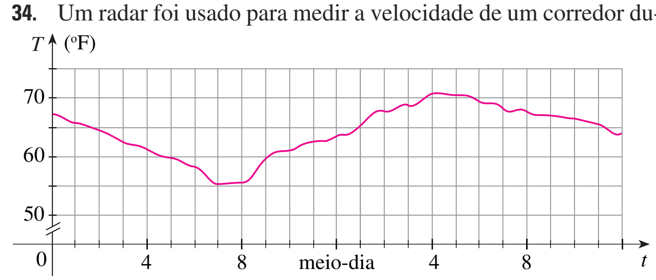
(b) Se soubermos que $-2 \leqslant f''(x) \leqslant 3$ para todo $x$, estime o erro envolvido na aproximação na parte (a).

**32.** (a) Uma tabela de valores de uma função $g$ é dada. Use a Regra de Simpson para estimar $\int_0^{1,6} g(x)\, dx$.

| $x$ | $g(x)$ | $x$ | $g(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0,0 | 12,1 | 1,0 | 12,2 |
| 0,2 | 11,6 | 1,2 | 12,6 |
| 0,4 | 11,3 | 1,4 | 13,0 |
| 0,6 | 11,1 | 1,6 | 13,2 |
| 0,8 | 11,7 | | |

(b) Se $-5 \leqslant g^{(4)}(x) \leqslant 2$ para $0 \leqslant x \leqslant 1,6$, estime o erro envolvido na aproximação na parte (a).

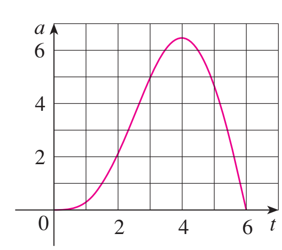
**33.** Um gráfico da temperatura em Nova York em 19 de setembro de 2009 é mostrado. Use a Regra de Simpson com $n = 12$ para estimar a temperatura média naquele dia.



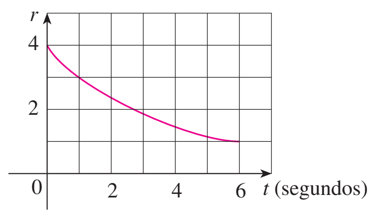

**34.** Um radar foi usado para medir a velocidade de um corredor durante os primeiros 5 segundos de uma corrida (veja a tabela). Use a Regra de Simpson para estimar a distância que o corredor cobriu durante aqueles 5 segundos.

| $t$ (s) | $v$ (m/s) | $t$ (s) | $v$ (m/s) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 3,0 | 10,51 |
| 0,5 | 4,67 | 3,5 | 10,67 |
| 1,0 | 7,34 | 4,0 | 10,76 |
| 1,5 | 8,86 | 4,5 | 10,81 |
| 2,0 | 9,73 | 5,0 | 10,81 |
| 2,5 | 10,22 | | |

**35.** O gráfico da aceleração $a(t)$ de um carro, medida em m/s², é mostrado. Use a Regra de Simpson para estimar o aumento da velocidade do carro durante o intervalo de 6 segundos.



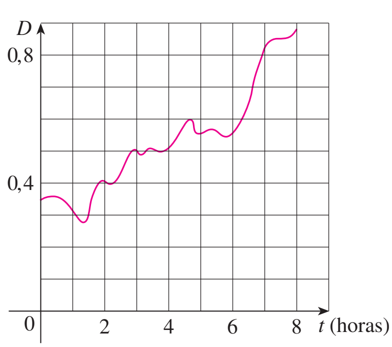

**36.** A água vaza de um tanque a uma taxa de $r(t)$ litros por hora, sendo o gráfico de $r$ mostrado a seguir. Use a Regra de Simpson para estimar a quantidade total de água que vazou durante as primeiras seis horas.



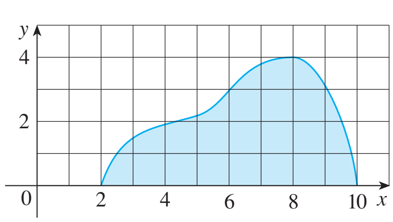

**37.** A tabela fornece o consumo de potência em megawatts, em Ontário, da meia-noite às 6 horas da manhã em 10 de dezembro de 2004. Use a Regra de Simpson para estimar a energia usada durante esse período de tempo. (Utilize o fato de que a potência é a derivada da energia.)

| $t$ | $P$ | $t$ | $P$ |
|---|---|---|---|
| 0:00 | 17.888 | 3:30 | 16.835 |
| 0:30 | 17.398 | 4:00 | 17.065 |
| 1:00 | 17.110 | 4:30 | 17.264 |
| 1:30 | 16.881 | 5:00 | 17.577 |
| 2:00 | 16.832 | 5:30 | 17.992 |
| 2:30 | 16.950 | 6:00 | 18.216 |
| 3:00 | 16.833 | | |

**38.** O gráfico a seguir mostra o tráfego de dados em um provedor de serviços na Internet entre meia-noite e as 8 horas da manhã. $D$ denota os dados em processamento, medidos em megabits por segundo. Use a Regra de Simpson para estimar a quantidade total de dados transmitidos durante esse período de tempo.




**39.** Use a Regra de Simpson com $n = 8$ para estimar o volume do sólido obtido ao girar a região mostrada na figura em torno do (a) eixo $x$ e (b) eixo $y$.




**40.** A tabela a seguir mostra valores de uma função força $f(x)$, onde $x$ é medido em metros e $f(x)$, em newtons. Use a Regra de Simpson para estimar o trabalho realizado por essa força para mover um objeto por uma distância de 18 m.

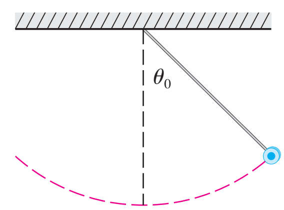
| $x$ | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 9,8 | 9,1 | 8,5 | 8,0 | 7,7 | 7,5 | 7,4 |

**41.** A região delimitada pelas curvas $y = e^{-1/x}$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = 5$ é girada em torno do eixo $x$. Use a Regra de Simpson com $n = 8$ para estimar o volume do sólido resultante.

SCA **42.** A figura mostra um pêndulo com comprimento $L$ que forma um ângulo máximo de $\theta_0$ com a vertical. Usando a Segunda Lei de Newton, pode ser mostrado que o período $T$ (o tempo para um ciclo completo) é dado por

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

onde $k = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ e $g$ é a aceleração da gravidade. Se $L = 1$ m e $\theta_0 = 42°$, use a Regra de Simpson com $n = 10$ para encontrar o período.




**43.** A intensidade de luz com comprimento de onda $\lambda$ viajando através de uma grade de difração com $N$ fendas a um ângulo de $\theta$ é dada por $I(\theta) = N^2 \operatorname{sen}^2 k/k^2$, onde $k = (\pi N d \operatorname{sen}\theta)/\lambda$ e $d$ é a distância entre cada fenda. Um laser de hélio-neônio com comprimento de onda $\lambda = 632{,}8 \times 10^{-9}$ m está emitindo uma faixa estreita de luz, dada por $-10^{-6} < \theta < 10^{-6}$, através de uma grade com 10 000 fendas separadas por $10^{-4}$ m. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 10$ para estimar a intensidade de luz total $\int_{-10^{-6}}^{10^{-6}} I(\theta)\, d\theta$ emergindo da grade.

**44.** Use a Regra do Trapézio com $n = 10$ para aproximar $\int_0^{20} \cos(\pi x)\, dx$. Compare seu resultado com o valor real. Você pode explicar a discrepância?

**45.** Esboce o gráfico de uma função contínua no intervalo $[0, 2]$ para a qual a Regra do Trapézio, com $n = 2$, seja mais precisa do que a Regra do Ponto Médio.

**46.** Esboce o gráfico de uma função contínua no intervalo $[0, 2]$ para a qual a aproximação pela extremidade direita com $n = 2$ seja mais precisa do que a Regra de Simpson.

**47.** Se $f$ é uma função positiva e $f''(x) < 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, mostre que

$$T_n < \int_a^b f(x)\, dx < M_n$$

**48.** Mostre que se $f$ for um polinômio de grau menor ou igual a 3, então a Regra de Simpson fornece o valor exato de $\int_a^b f(x)\, dx$.

**49.** Mostre que $\frac{1}{2}(T_n + M_n) = T_{2n}$.

**50.** Mostre que $\frac{1}{3} T_n + \frac{2}{3} M_n = S_{2n}$.

# 7.8 Integrais Impróprias

Na definição de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, trabalhamos com uma função $f$ definida em um intervalo limitado $[a, b]$ e presumimos que $f$ não tenha uma descontinuidade infinita (veja a Seção 5.2). Nessa seção, estenderemos o conceito de integral definida para o caso em que o intervalo é infinito e também para o caso onde $f$ tem uma descontinuidade infinita em $[a, b]$. Em ambos os casos, a integral é chamada integral *imprópria*. Uma das aplicações mais importantes dessa ideia, distribuições de probabilidades, será estudada na Seção 8.5.

## Tipo 1: Intervalos Infinitos

Considere a região infinita $S$ que está sob a curva $y = 1/x^2$, acima do eixo $x$ e à direita da reta $x = 1$. Você poderia pensar que, como $S$ tem extensão infinita, sua área deve ser infinita, mas vamos olhar mais de perto. A área da parte de $S$ que está à esquerda da reta $x = t$ (sombreada na Figura 1) é

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

Observe que $A(t) < 1$ independentemente de quão grande $t$ seja escolhido.

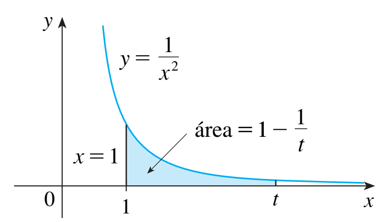



**FIGURA 1**

Também observamos que

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

A área da região sombreada se aproxima de 1 quando $t \to \infty$ (veja a Figura 2), assim, dizemos que a área da região infinita $S$ é igual a 1 e escrevemos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

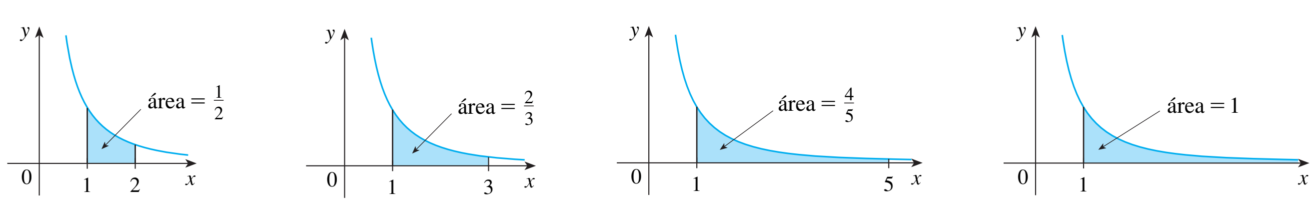



**FIGURA 2**

Usando esse exemplo como um guia, definimos a integral de $f$ (não necessariamente uma função positiva) sobre um intervalo infinito como o limite das integrais sobre os intervalos finitos.

**1 Definição de uma Integral Imprópria do Tipo 1**

(a) Se $\int_a^t f(x)\,dx\,dx$ existe para cada número $t \geqslant a$, então

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

desde que o limite exista (como um número).

(b) Se $\int_t^b f(x)\,dx\,dx$ existe para cada número $t \leqslant b$, então

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

desde que o limite exista (como um número).

As integrais impróprias $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ são chamadas **convergentes** se os limites correspondentes existem e **divergentes** se os limites não existem.

(c) Se ambas $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ são convergentes, então definimos

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Na parte (c), qualquer número real $a$ pode ser usado (veja o Exercício 74).

Qualquer uma das integrais impróprias na Definição 1 pode ser interpretada como uma área, desde que $f$ seja uma função positiva. Por exemplo, no caso (a), se $f(x) \geqslant 0$ e a integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ for convergente, então definimos a área da região $S = \{(x, y) \mid x \geqslant a, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ na Figura 3 como

$$A(S) = \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Isso é apropriado porque $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é o limite quando $t \to \infty$ da área sob o gráfico de $f$ de $a$ a $t$.

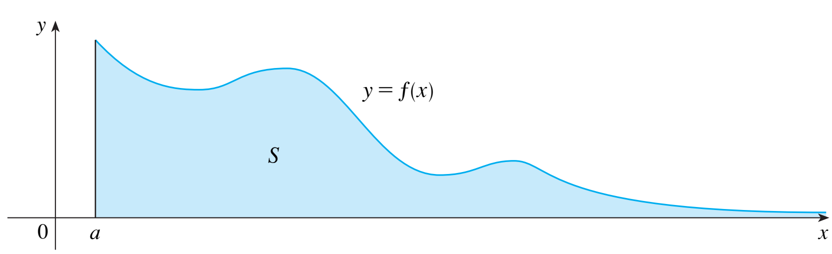



**FIGURA 3**

**EXEMPLO 1** Determine se a integral $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ é convergente ou divergente.

SOLUÇÃO De acordo com a parte (a) da Definição 1, temos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big]_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

O limite não existe como um número finito e, assim, a integral imprópria $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ é divergente.

Vamos comparar o resultado do Exemplo 1 com o exemplo dado no início desta seção:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \text{ diverge}$$

Geometricamente, isso quer dizer que, embora as curvas $y = 1/x^2$ e $y = 1/x$ pareçam muito semelhantes para $x > 0$, a região sob $y = 1/x^2$ à direita de $x = 1$ (a região sombreada na Figura 4) tem uma área finita, enquanto a região correspondente sob $y = 1/x$ (na Figura 5) tem uma área infinita. Observe que $1/x^2$ e $1/x$ se aproximam de 0 quando $x \to \infty$, mas $1/x^2$ se aproxima mais rápido de 0 que $1/x$. Os valores de $1/x$ não diminuem rápido o suficiente para que sua integral tenha um valor finito.

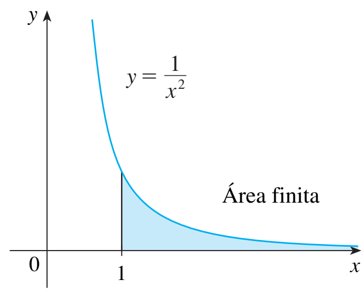



**FIGURA 4** $\int_1^\infty (1/x^2)\, dx$ converge

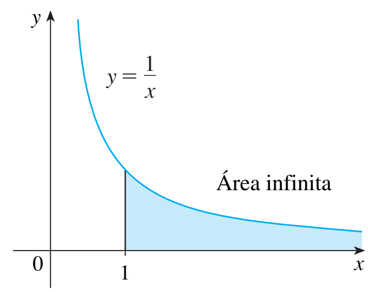



**FIGURA 5** $\int_1^\infty (1/x)\, dx$ diverge

**EXEMPLO 2** Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x\, dx$.

SOLUÇÃO Usando a parte (b) da Definição 1, temos

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\, dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 xe^x\, dx$$

Integramos por partes com $u = x$, $dv = e^x\, dx$, de modo que $du = dx$, $v = e^x$:

$$\int_t^0 xe^x\, dx = xe^x\Big]_t^0 - \int_t^0 e^x\, dx$$

$$= -te^t - 1 + e^t$$

**TEC** Em *Module 7.8* você pode investigar visualmente e numericamente se diversas integrais impróprias são convergentes ou divergentes.

Sabemos que $e^t \to 0$ quando $t \to -\infty$ e, pela Regra de L'Hôspital, temos

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{-e^{-t}}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (-e^t) = 0$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\, dx = \lim_{t\to-\infty} (-te^t - 1 + e^t)$$

$$= -0 - 1 + 0 = -1$$

**EXEMPLO 3** Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

SOLUÇÃO É conveniente escolher $a = 0$ na Definição 1(c):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

Precisamos calcular as integrais no lado direito separadamente:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \operatorname{tg}^{-1}x\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\operatorname{tg}^{-1}t - \operatorname{tg}^{-1}0) = \lim_{t\to\infty} \operatorname{tg}^{-1}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \operatorname{tg}^{-1}x\Big]_t^0$$

$$= \lim_{t \to -\infty} (\mathrm{tg}^{-1} 0 - \mathrm{tg}^{-1} t)$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Como ambas as integrais são convergentes, a integral dada é convergente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

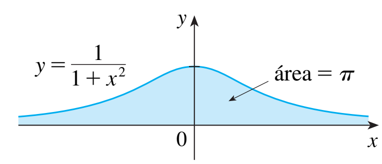



**FIGURA 6**

Como $1/(1 + x^2) > 0$, a integral imprópria dada pode ser interpretada como a área da região infinita sob a curva $y = 1/(1 + x^2)$ e acima do eixo x (veja a Figura 6).

**EXEMPLO 4** Para quais valores de $p$ a integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$

é convergente?

SOLUÇÃO Sabemos do Exemplo 1 que se $p = 1$, então a integral é divergente; assim, vamos supor que $p \neq 1$. Logo,

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{t \to \infty} \int_{1}^{t} x^{-p}\, dx$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p + 1} \right]_{x=1}^{x=t}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{1 - p} \left[ \frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right]$$

Se $p > 1$, então $p - 1 > 0$; assim, quando $t \to \infty$, $t^{p-1} \to \infty$ e $1/t^{p-1} \to 0$. Portanto,

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{1}{p - 1} \qquad \text{se } p > 1$$

e, nesse caso, a integral converge. Mas se $p < 1$, então $p - 1 < 0$, de modo que

$$\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty \qquad \text{quando } t \to \infty$$

e a integral diverge.

Resumimos o resultado do Exemplo 4 para referência futura:

**2** $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

## Tipo 2: Integrandos Descontínuos

Suponha que $f$ seja uma função contínua positiva em um intervalo finito $[a, b)$, mas tenha uma assíntota vertical em $b$. Seja $S$ a região delimitada sob o gráfico de $f$ e acima do eixo $x$ entre $a$ e $b$. (Para as integrais Tipo 1, as regiões se estendem indefinidamente em uma direção horizontal. Aqui a região é infinita em uma direção vertical.) A área da parte de $S$ entre $a$ e $t$ (a região sombreada na Figura 7) é

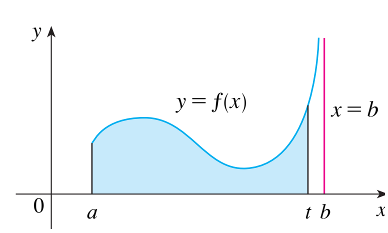



**FIGURA 7**

$$A(t) = \int_{a}^{t} f(x)\, dx$$

As partes (b) e (c) da Definição 3 são mostradas nas Figuras 8 e 9 para o caso onde $f(x) \geqslant 0$ e $f$ tiver uma assíntota vertical em $a$ e $c$, respectivamente.

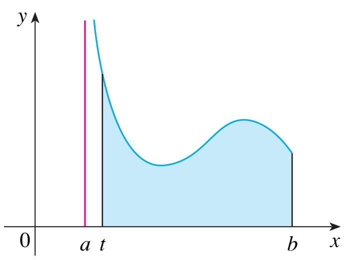



**FIGURA 8**

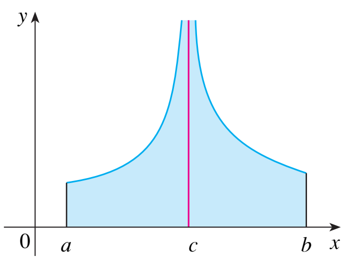



**FIGURA 9**

Se acontecer de $A(t)$ se aproximar de um número $A$ quando $t \to b^-$, então dizemos que a área da região $S$ é $A$ e escrevemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Usamos essa equação para definir uma integral imprópria do Tipo 2, mesmo quando $f$ não for uma função positiva, não importando o tipo de descontinuidade que $f$ tenha em $b$.

**3 Definição de uma Integral Imprópria do Tipo 2**

(a) Se $f$ é contínua em $[a, b)$ e descontínua em $b$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

se esse limite existir (como um número).

(b) Se $f$ é contínua em $(a, b]$ e descontínua em $a$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

se esse limite existir (como um número).

A integral imprópria $\int_a^b f(x)\,dx$ é chamada **convergente** se o limite correspondente existir e **divergente** se o limite não existir.

(c) Se $f$ tiver uma descontinuidade em $c$, onde $a < c < b$, e ambas as integrais impróprias $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ forem convergentes, então definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

**EXEMPLO 5** Encontre $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$.

SOLUÇÃO Observamos primeiro que a integral dada é imprópria, porque $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ tem a assíntota vertical $x = 2$. Como a descontinuidade infinita ocorre no extremo esquerdo de $[2,5]$, usamos a parte (b) da Definição 3:

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\,\Big]_t^5 \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

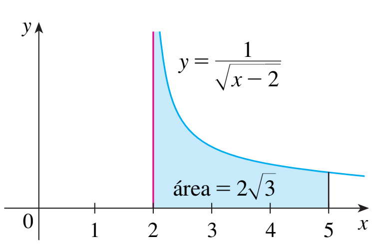



**FIGURA 10**

Então, a integral imprópria dada é convergente e, como o integrando é positivo, podemos interpretar o valor da integral como a área da região sombreada na Figura 10.

**EXEMPLO 6** Determine se $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO Observe que a integral dada é imprópria, porque $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \sec x = \infty$. Usando a parte (a) da Definição 3 e a Fórmula 14 da Tabela de Integrais, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx &= \lim_{t\to(\pi/2)^-} \int_0^t \sec x\,dx = \lim_{t\to(\pi/2)^-} \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\Big]_0^t \\ &= \lim_{t\to(\pi/2)^-} [\ln(\sec t + \operatorname{tg} t) - \ln 1] = \infty\end{aligned}$$

pois $\sec t \to \infty$ e $\operatorname{tg} t \to \infty$ quando $t \to (\pi/2)^-$. Então, a integral imprópria dada é divergente.

**EXEMPLO 7** Calcule $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ se for possível.

SOLUÇÃO Observe que a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical do integrando. Como ela ocorre no meio do intervalo $[0, 3]$, devemos usar a parte (c) da Definição 3 com $c = 1$:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

onde
$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1|\Big]_0^t$$
$$= \lim_{t\to 1^-} \big(\ln|t-1| - \ln|-1|\big)$$
$$= \lim_{t\to 1^-} \ln(1-t) = -\infty$$

porque $1 - t \to 0^+$ quando $t \to 1^-$. Então $\int_0^1 dx/(x-1)$ é divergente. Isso implica que $\int_0^3 dx/(x-1)$ é divergente. [Não precisamos calcular $\int_1^3 dx/(x-1)$.]

**ATENÇÃO** Se não tivéssemos observado a assíntota $x = 1$ no Exemplo 7 e, em vez disso, tivéssemos confundido essa integral com uma integral ordinária, então poderíamos ter feito erroneamente o seguinte cálculo:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big]_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Isso é errado, porque a integral é imprópria e deve ser calculada em termos de limite.

De agora em diante, toda vez que você se deparar com o símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$, você deverá decidir, olhando a função $f$ no intervalo $[a, b]$, se ela é uma integral definida ordinária ou uma integral imprópria.

**EXEMPLO 8** Calcule $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$.

SOLUÇÃO Sabemos que a função $f(x) = \ln x$ tem uma assíntota vertical em 0 como $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Assim, a integral dada é imprópria e temos

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x\,dx$$

Agora usamos a integral por partes, com $u = \ln x$, $dv = dx$, $du = dx/x$ e $v = x$:

$$\int_t^1 \ln x\,dx = x\ln x\Big]_t^1 - \int_t^1 dx$$
$$= 1\ln 1 - t\ln t - (1-t)$$
$$= -t\ln t - 1 + t$$

Para calcularmos o limite do primeiro termo usamos a Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t\to 0^+} (-t) = 0$$

Logo,
$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+} (-t\ln t - 1 + t) = -0 - 1 + 0 = -1$$

A Figura 11 mostra a interpretação geométrica desse resultado. A área da região sombreada acima de $y = \ln x$ e abaixo do eixo $x$ é 1.

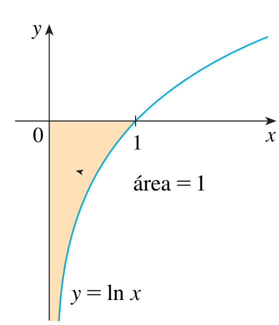



**FIGURA 11**

## Um Teste de Comparação para Integrais Impróprias

Algumas vezes é impossível encontrar o valor exato de uma integral imprópria, mas ainda assim é importante saber se ela é convergente ou divergente. Nesses casos, o teorema seguinte é útil. Apesar de afirmarmos isso para as integrais do Tipo 1, um teorema análogo é verdadeiro para as integrais do Tipo 2.

**TEOREMA DE COMPARAÇÃO** Suponha que $f$ e $g$ sejam funções contínuas com $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant a$.

(a) Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é convergente, então $\int_a^\infty g(x)\,dx$ é convergente.

(b) Se $\int_a^\infty g(x)\,dx$ é divergente, então $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é divergente.

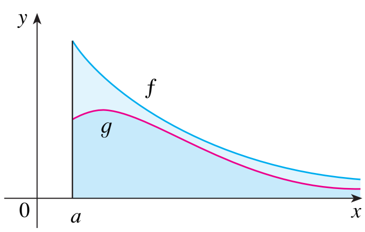



**FIGURA 12**

Omitiremos a demonstração do Teorema da Comparação, mas a Figura 12 o faz parecer plausível. Se a área sob a curva superior $y = f(x)$ for finita, então a área sob a curva inferior $y = g(x)$ também o é. E se a área sob $y = g(x)$ for infinita, então a área sob $y = f(x)$ também o é. [Observe que a recíproca não é necessariamente verdadeira: se $\int_a^\infty g(x)\,dx$ for convergente, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ pode ou não ser convergente, e se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ for divergente, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ pode ou não ser divergente.]

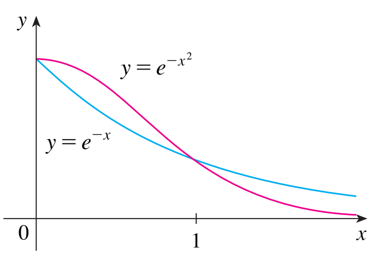



**FIGURA 13**

**EXEMPLO 9** Mostre que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ é convergente.

SOLUÇÃO Nao podemos calcular a integral diretamente porque a primitiva de $e^{-x^2}$ não é uma função elementar (como explicado na Seção 7.5). Escrevemos

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx$$

e observamos que a primeira integral do lado direito é apenas uma integral definida ordinária. Na segunda integral, usamos o fato de que para $x \geqslant 1$ temos $x^2 \geqslant x$, assim $-x^2 \leqslant -x$ e, portanto, $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$. (Veja a Figura 13.) A integral de $e^{-x}$ é calculada facilmente:

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}(e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}$$

Então, tomando $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = e^{-x^2}$ no Teorema da Comparação, vemos que $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ é convergente. Segue que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ é convergente.

**TABELA 1**

| $t$ | $\int_0^t e^{-x^2}dx$ |
|---|---|
| 1 | 0,7468241328 |
| 2 | 0,8820813908 |
| 3 | 0,8862073483 |
| 4 | 0,8862269118 |
| 5 | 0,8862269255 |
| 6 | 0,8862269255 |

No Exemplo 9 mostramos que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ é convergente sem calcular seu valor. No Exercício 70 nós indicamos como mostrar que seu valor é de aproximadamente 0,8862. Na teoria da probabilidade, é importante saber o valor exato dessa integral imprópria, como veremos na Seção 8.5; usando os métodos do cálculo de várias variáveis, pode ser mostrado que o valor exato é $\sqrt{\pi}/2$. A Tabela 1 ilustra a definição de integral imprópria revelando como os valores (gerados por computador) de $\int_0^t e^{-x^2}dx$ se aproximam de $\sqrt{\pi}/2$ à medida que $t$ se torna grande. Na verdade, esses valores convergem bem depressa, porque $e^{-x^2} \to 0$ muito rapidamente à medida que $x \to \infty$.

**TABELA 2**

| $t$ | $\int_1^t [(1 + e^{-x})/x]dx$ |
|---|---|
| 2 | 0,8636306042 |
| 5 | 1,8276735512 |
| 10 | 2,5219648704 |
| 100 | 4,8245541204 |
| 1.000 | 7,1271392134 |
| 10.000 | 9.4297243064 |

**EXEMPLO 10** A integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1 + e^{-x}}{x}\,dx$ é divergente pelo Teorema da Comparação porque

$$\frac{1 + e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$$

e $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ é divergente pelo Exemplo 1 [ou por $\boxed{2}$ com $p = 1$].

A Tabela 2 ilustra a divergência da integral no Exemplo 10. Parece que os valores não se aproximam de qualquer número fixo.

## 7.8 Exercícios

1. Explique por que cada uma das seguintes integrais é imprópria.
(a) $\int_1^2 \frac{x}{x-1}\,dx$ (b) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$
(c) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$ (d) $\int_{-\infty}^{\pi/4} \cot x\,dx$

2. Quais das seguintes integrais são impróprias? Por quê?
(a) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$ (b) $\int_0^{\pi} \operatorname{tg} x\,dx$
(c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-x-2}\,dx$ (d) $\int_0^\infty e^{-x^3}\,dx$

3. Encontre a área sob a curva $y = 1/x^3$ de $x = 1$ a $x = t$ e calcule-a para $t = 10$, 100 e 1 000. Então encontre a área total dessa curva para $x \geqslant 1$.

4. (a) Trace as funções $f(x) = 1/x^{1,1}$ e $g(x) = 1/x^{0,9}$ nas janelas retangulares [0,10] por [0,1] e [0,100] por [0,1].
(b) Encontre as áreas sob os gráficos de $f$ e $g$ de $x = 1$ a $x = t$ e calcule para $t = 10, 100, 10^4, 10^6, 10^{10}$ e $10^{20}$.
(c) Encontre a área total sob cada curva para $x \geqslant 1$, se ela existir.

**5–40** Determine se cada integral é convergente ou divergente. Calcule aquelas que são convergentes.

5. $\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^{3/2}}\,dx$
6. $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}\,dx$
7. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{3-4x}\,dx$
8. $\int_1^\infty \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$
9. $\int_2^\infty e^{-5p}\,dp$
10. $\int_{-\infty}^0 2^r\,dr$
11. $\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$
12. $\int_{-\infty}^\infty (y^3-3y^2)\,dy$
13. $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx$
14. $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
15. $\int_0^\infty \operatorname{sen}^2 \alpha\,d\alpha$
16. $\int_{-\infty}^\infty \cos \pi t\,dt$
17. $\int_1^\infty \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx$
18. $\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+3z+2}$
19. $\int_{-\infty}^0 ze^{2z}\,dz$
20. $\int_2^\infty ye^{-3y}dy$
21. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$
22. $\int_{-\infty}^\infty x^3e^{-x^4}dx$
23. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{9+x^6}\,dx$
24. $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+3}\,dx$
25. $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$
26. $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx$
27. $\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx$
28. $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$
29. $\int_{-2}^{14} \frac{1}{\sqrt[4]{x+2}}\,dx$
30. $\int_6^8 \frac{4}{(x-6)^3}\,dx$
31. $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4}\,dx$
32. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
33. $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$
34. $\int_0^5 \frac{w}{w-2}\,dw$
35. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}$
36. $\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{cossec} x\,dx$
37. $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$
38. $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$
39. $\int_0^2 z^2 \ln z\,dz$
40. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

**41–46** Esboce a região e encontre sua área (se a área for finita).

41. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant e^{-x}\}$
42. $S = \{(x, y) \mid x \leqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant e^{x}\}$
43. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1/(x^3+x)\}$
44. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant xe^{-x}\}$
45. $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x < \pi/2, 0 \leqslant y \leqslant \sec^2 x\}$
46. $S = \left\{(x, y) \mid -2 < x \leqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant 1/\sqrt{x+2}\right\}$

47. (a) Se $g(x) = (\operatorname{sen}^2 x)/x^2$, use sua calculadora ou computador para fazer uma tabela de valores aproximados de $\int_1^t g(x)\,dx$ para $t = 2, 5, 10, 100, 1\,000$ e $10\,000$. Parece que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente?
(b) Use o Teorema da Comparação com $f(x) = 1/x^2$ para mostrar que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente.
(c) Ilustre a parte (b) colocando os gráficos de $f$ e $g$ na mesma tela para $1 \leqslant x \leqslant 10$. Use sua ilustração para explicar intuitivamente por que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente.

48. (a) Se $g(x) = 1/(\sqrt{x} - 1)$, use sua calculadora ou computador para fazer uma tabela de valores aproximados de $\int_2^t g(x)\,dx$ para $t = 5, 10, 100, 1\,000$ e $10\,000$. Parece que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é convergente ou divergente?
(b) Use o Teorema da Comparação com $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para mostrar que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é divergente.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

(c) Ilustre a parte (b) colocando os gráficos de $f$ e $g$ na mesma tela para $2 \leqslant x \leqslant 20$. Use sua ilustração para explicar intuitivamente porque $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é divergente.

**49–54** Use o Teorema da Comparação para determinar se a integral é convergente ou divergente.

**49.** $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$

**50.** $\int_1^\infty \frac{2+e^{-x}}{x}\,dx$

**51.** $\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}}\,dx$

**52.** $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{2+e^x}\,dx$

**53.** $\int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}\,dx$

**54.** $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$

**55.** A integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$$

é imprópria por duas razões: o intervalo $[0, \infty)$ é infinito e o integrando tem uma descontinuidade infinita em 0. Calcule escrevendo-a como uma soma de integrais impróprias do Tipo 2 e do Tipo 1, como abaixo indiado.

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$$

**56.** Calcule

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

pelo mesmo método do Exercício 55.

**57–59** Encontre os valores de $p$ para os quais a integral converge e calcule a integral para esses valores de $p$.

**57.** $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$

**58.** $\int_e^\infty \frac{1}{x\,(\ln x)^p}\,dx$

**59.** $\int_0^1 x^p \ln x\,dx$

**60.** (a) Calcule a integral $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ para $n = 0, 1, 2$ e 3.

(b) Conjecture o valor de $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ quando $n$ é um inteiro positivo arbitrário.

(c) Demonstre sua conjectura usando a indução matemática.

**61.** (a) Mostre que $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ é divergente.

(b) Mostre que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t x\,dx = 0$$

Isso mostra que não podemos definir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t f(x)\,dx$$

**62.** A *velocidade média* das moléculas em um gás ideal é

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\,dv$$

onde $M$ é o peso molecular do gás; $R$, a constante do gás; $T$, a temperatura do gás; e $v$, a velocidade molecular. Mostre que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

**63.** Sabemos do Exemplo 1 que a região $\mathscr{R} = \{(x, y) \mid x \geqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$ tem área infinita. Mostre que pela rotação de $\mathscr{R}$ em torno do eixo $x$ obtemos um sólido com volume finito.

**64.** Use a informação e os dados do Exercício 29 da Seção 6.4 para calcular o trabalho necessário para lançar um veículo espacial de 1.000 kg para fora do campo gravitacional da Terra.

**65.** Encontre a *velocidade de escape* $v_0$ que é necessária para lançar um foguete de massa $m$ para fora do campo gravitacional de um planeta com massa $M$ e raio $R$. Use a Lei da Gravitação de Newton (veja o Exercício 29 na Seção 6.4) e o fato de que a energia cinética inicial de $\frac{1}{2}mv_0^2$ supre o trabalho necessário.

**66.** Os astrônomos usam uma técnica chamada *estereografia estelar* para determinar a densidade das estrelas em um aglomerado estelar a partir da densidade (bidimensional) observada, que pode ser analisada a partir de uma fotografia. Suponha que em um aglomerado esférico de raio $R$ a densidade das estrelas dependa somente da distância $r$ do centro do aglomerado. Se a densidade estelar aparente for dada por $y(s)$, onde $s$ é a distância planar observada do centro do aglomerado e $x(r)$ é a densidade real, pode ser mostrado que

$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2-s^2}}\,x(r)\,dr$$

Se a densidade real das estrelas em um aglomerado for $x(r) = \frac{1}{2}(R-r)^2$, encontre a densidade aparente $y(s)$.

**67.** Um fabricante de lâmpadas quer produzir lâmpadas que durem cerca de 700 horas, mas naturalmente algumas lâmpadas queimam mais rapidamente que outras. Seja $F(t)$ a fração das lâmpadas da empresa que queimam antes de $t$ horas, assim $F(t)$ sempre está entre 0 e 1.

(a) Faça um esboço de como você acha que o gráfico de $F$ deva parecer.

(b) Qual o significado da derivada $r(t) = F'(t)$?

(c) Qual é o valor de $\int_0^\infty r(t)\,dt$? Por quê?

**68.** Como vimos na Seção 3.8, uma substância radioativa se deteriora exponencialmente: a massa no tempo $t$ é $m(t) = m(0)e^{kt}$, onde $m(0)$ é a massa inicial e $k$ é uma constante negativa. A *vida média* $M$ de um átomo na substância é

$$M = -k \int_0^\infty t e^{kt}\,dt$$

Para o isótopo radioativo de carbono, $^{14}C$, usado na datação de radiocarbono, o valor de $k$ é $-0{,}000121$. Encontre a vida média de um átomo $^{14}C$.

**69.** Determine quão grande tem de ser o número $a$ de modo que

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx < 0{,}001$$

**70.** Estime o valor numérico de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ escrevendo-a como a soma de $\int_0^4 e^{-x^2}\,dx$ e $\int_4^\infty e^{-x^2}\,dx$. Aproxime a primeira integral, usando a Regra de Simpson com $n = 8$, e mostre que a segunda integral é menor que $\int_4^\infty e^{-4x}\,dx$, que é menor que 0,0000001.

**71.** Se $f(t)$ é contínua para $t \geqslant 0$, a *Transformada de Laplace* de $f$ é a função $F$ definida por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

e o domínio de $F$ é o conjunto de todos os números para os quais a integral converge. Calcule a Transformada de Laplace das seguintes funções.

(a) $f(t) = 1$ (b) $f(t) = e^t$ (c) $f(t) = t$

**72.** Mostre que se $0 \leqslant f(t) \leqslant Me^{at}$ para $t \geqslant 0$, onde $M$ e $a$ são constantes, então a transformada de Laplace $F(s)$ existe para $s > a$.

**73.** Suponha que $0 \leqslant f(t) \leqslant Me^{at}$ e $0 \leqslant f'(t) \leqslant Ke^{at}$ para $t \geqslant 0$, onde $f'$ é contínua. Se a transformada de Laplace de $f(t)$ é $F(s)$ e a transformada de Laplace de $f'(t)$ é $G(s)$, mostre que

$$G(s) = sF(s) - f(0) \qquad s > a$$

**74.** Se $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ é convergente e $a$ e $b$ são números reais, mostre que

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + \int_b^\infty f(x)\,dx$$

**75.** Mostre que $\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

**76.** Mostre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y}\,dy$ interpretando as integrais como áreas.

**77.** Encontre o valor da constante $C$ para a qual a integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2}\right)dx$$

converge. Calcule a integral para esse valor de $C$.

**78.** Encontre o valor da constante $C$ para a qual a integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\right)dx$$

converge. Calcule a integral para esse valor de $C$.

**79.** Suponha que $f$ seja contínua em $[0, \infty)$ e que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. É possível que $\int_0^\infty f(x)\,dx$ seja convergente?

**80.** Mostre que se $a > -1$ e $b > a + 1$, então a integral a seguir é convergente.

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b}\,dx$$

# 7 Revisão

## Verificação de Conceitos

**1.** Escreva a regra de integração por partes. Na prática, como você a usa?

**2.** Como você calcula $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ se $m$ for ímpar? O que acontece se $n$ for ímpar? O que acontece se $m$ e $n$ forem ambos pares?

**3.** Se a expressão $\sqrt{a^2 - x^2}$ ocorrer em uma integral, que substituição você pode tentar? O que acontece se $\sqrt{a^2 + x^2}$ ocorrer? O que acontece se $\sqrt{x^2 - a^2}$ ocorrer?

**4.** Qual é a forma da decomposição em frações parciais de uma função racional $P(x)/Q(x)$ se o grau de $P$ for menor que o grau de $Q$ e $Q(x)$ tiver apenas fatores lineares distintos? O que acontece se um fator linear é repetido? O que acontece se $Q(x)$ tiver um fator quadrático irredutível (não repetido)? O que acontece se o fator quadrático é repetido?

**5.** Escreva as regras para a aproximação da integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ com a Regra do Ponto Médio, a Regra do Trapézio e a Regra de Simpson. De qual você espera a melhor estimativa? Como você aproxima o erro para cada regra?

**6.** Defina as seguintes integrais impróprias.

(a) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ (b) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ (c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

**7.** Defina a integral imprópria $\int_a^b f(x)\,dx$ para cada um dos seguintes casos.

(a) $f$ tem uma descontinuidade infinita em $a$.

(b) $f$ tem uma descontinuidade infinita em $b$.

(c) $f$ tem uma descontinuidade infinita em $c$, onde $a < c < b$.

**8.** Enuncie o Teorema da Comparação para as integrais impróprias.

## Teste – Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. $\dfrac{x(x^2+4)}{x^2-4}$ pode ser colocado na forma $\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-2}$.

2. $\dfrac{x^2+4}{x(x^2-4)}$ pode ser colocado na forma $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x-2}$.

3. $\dfrac{x^2+4}{x(x^2-4)}$ pode ser colocado na forma $\dfrac{A}{x^2}+\dfrac{B}{x-4}$.

4. $\dfrac{x^2-4}{x(x^2+4)}$ pode ser colocado na forma $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2+4}$.

5. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{x^2-1}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln 15$

6. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{\sqrt{2}}}\,dx$ é convergente.

7. Se $f$ for contínua, então $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$.

8. A Regra do Ponto Médio é sempre mais precisa que a Regra do Trapézio.

9. (a) Toda função elementar tem uma derivada elementar.

   (b) Toda função elementar tem uma primitiva elementar.

10. Se $f$ é contínua $[0, \infty)$ e $\int_1^\infty f(x)\,dx$ é convergente, então $\int_0^\infty f(x)\,dx$ é convergente.

11. Se $f$ é uma função contínua, decrescente em $[1, \infty)$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, então $\int_1^\infty f(x)\,dx$ é convergente.

12. Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_a^\infty g(x)\,dx$ são ambas convergentes, então $\int_a^\infty [f(x)+g(x)]\,dx$ é convergente.

13. Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_a^\infty g(x)\,dx$ são ambas divergentes, então $\int_a^\infty [f(x)+g(x)]\,dx$ é divergente.

14. Se $f(x) \leqslant g(x)$ e $\int_0^\infty g(x)\,dx$ diverge, então $\int_0^\infty f(x)\,dx$ também diverge.

## Exercícios

1. *Observação*: prática adicional nas técnicas de integração é fornecida no Exercício 7.5.

**1–40** Calcule a integral.

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x}\,dx$

2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\, e^{\cos\theta}\,d\theta$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} t\operatorname{sen} 2t\,dt$

5. $\displaystyle\int \frac{dt}{2t^2+3t+1}$

6. $\displaystyle\int_1^2 x^5 \ln x\,dx$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta\,d\theta$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

9. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln t)}{t}\,dt$

10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$

11. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1-e^{4x}}\,dx$

13. $\displaystyle\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x+2}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{\sec^6\theta}{\operatorname{tg}^2\theta}\,d\theta$

17. $\displaystyle\int x\sec x\operatorname{tg} x\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2+8x-3}{x^3+3x^2}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{x+1}{9x^2+6x+5}\,dx$

20. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5\theta\sec^3\theta\,d\theta$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}$

22. $\displaystyle\int te^{\sqrt{t}}\,dt$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

24. $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{3x^3-x^2+6x-4}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

26. $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\cos x\,dx$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

**27.** $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \operatorname{sen} 2x \, dx$

**28.** $\int \dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1} \, dx$

**29.** $\int_{-3}^{3} \dfrac{x}{1+|x|} \, dx$

**30.** $\int \dfrac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

**31.** $\int_0^{\ln 10} \dfrac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+8} \, dx$

**32.** $\int_0^{\pi/4} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{\cos^3 x} dx$

**33.** $\int \dfrac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}} \, dx$

**34.** $\int (\operatorname{arcsen} x)^2 \, dx$

**35.** $\int \dfrac{1}{\sqrt{x+x^{3/2}}} \, dx$

**36.** $\int \dfrac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta} \, d\theta$

**37.** $\int (\cos x + \operatorname{sen} x)^2 \cos 2x \, dx$

**38.** $\int \dfrac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

**39.** $\int_0^{1/2} \dfrac{xe^{2x}}{(1+2x)^2} \, dx$

**40.** $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\theta}}{\operatorname{sen} 2\theta} \, d\theta$

**41–50** Calcule a integral ou mostre que ela é divergente.

**41.** $\int_1^{\infty} \dfrac{1}{(2x+1)^3} \, dx$

**42.** $\int_1^{\infty} \dfrac{\ln x}{x^4} \, dx$

**43.** $\int_2^{\infty} \dfrac{dx}{x \ln x} \, dx$

**44.** $\int_2^{6} \dfrac{y}{\sqrt{y-2}} \, dy$

**45.** $\int_0^{4} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$

**46.** $\int_0^{1} \dfrac{1}{2-3x} \, dx$

**47.** $\int_0^{1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}} \, dx$

**48.** $\int_{-1}^{1} \dfrac{dx}{x^2-2x}$

**49.** $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{4x^2+4x+5}$

**50.** $\int_1^{\infty} \dfrac{\operatorname{tg}^{-1} x}{x^2} \, dx$

**51–52** Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável, fazendo o gráfico da função e de sua primitiva (tome $C = 0$).

**51.** $\int \ln(x^2+2x+2) \, dx$

**52.** $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$

**53.** Trace a função $f(x) = \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x$ e use o gráfico para conjecturar o valor da integral $\int_0^{2\pi} f(x) \, dx$. Então, calcule a integral para confirmar sua conjectura.

SCA **54.** (a) Como você calcularia $\int x^5 e^{-2x} \, dx$ manualmente? (Não faça a integração.)

(b) Como você calcularia $\int x^5 e^{-2x} \, dx$ usando tabelas? (Não faça isso de fato.)

(c) Use um SCA para calcular $\int x^5 e^{-2x} \, dx$.

(d) Trace o integrando e a integral indefinida na mesma tela.

**55–58** Use a Tabela de Integrais nas Páginas de Referência para calcular a integral.

**55.** $\int \sqrt{4x^2-4x-3} \, dx$

**56.** $\int \operatorname{cossec}^5 t \, dt$

**57.** $\int \cos x \sqrt{4+\operatorname{sen}^2 x} \, dx$

**58.** $\int \dfrac{\operatorname{cotg} x}{\sqrt{1+2\operatorname{sen} x}} \, dx$

**59.** Verifique a Fórmula 33 na Tabela de Integrais (a) por derivação e (b) usando uma substituição trigonométrica.

**60.** Verifique a Fórmula 62 da Tabela de Integrais.

**61.** É possível encontrar um número $n$ tal que $\int_0^{\infty} x^n \, dx$ *seja convergente?*

**62.** Para quais valores de $a$ a integral $\int_0^{\infty} e^{ax} \cos x \, dx$ é convergente? Calcule a integral para esses valores de $a$.

**63–64** Use (a) a Regra do Trapézio, (b) a Regra do Ponto Médio e (c) a Regra de Simpson com $n = 10$ para aproximar a integral dada. Arredonde seus resultados para seis casas decimais.

**63.** $\int_2^4 \dfrac{1}{\ln x} \, dx$

**64.** $\int_1^4 \sqrt{x} \cos x \, dx$

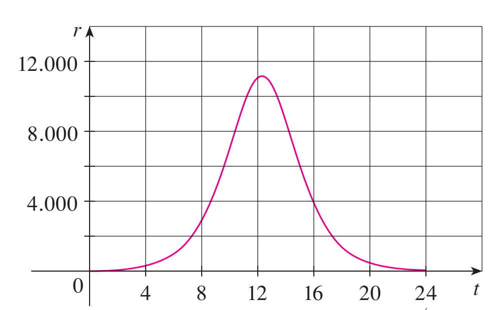
**65.** Estime os erros envolvidos no Exercício 63, partes (a) e (b). Quão grande deve ser $n$ em cada caso para garantir um erro menor que 0,00001?

**66.** Use a Regra de Simpson com $n = 6$ para estimar a área sob a curva $y = e^x/x$ de $x = 1$ a $x = 4$.

**67.** A leitura do velocímetro ($v$) em um carro foi observada em intervalos de 1 minuto e registrada na tabela a seguir. Use a Regra de Simpson para estimar a distância percorrida pelo carro.

| $t$ (min) | $v$ (km/h) | $t$ (min) | $v$ (km/h) |
|---|---|---|---|
| 0 | 64 | 6 | 90 |
| 1 | 67 | 7 | 91 |
| 2 | 72 | 8 | 91 |
| 3 | 78 | 9 | 88 |
| 4 | 83 | 10 | 90 |
| 5 | 86 | | |

**68.** Uma população de abelhas cresce a uma taxa de $r(t)$ abelhas por semana, sendo o gráfico de $r$ mostrado a seguir. Use a Regra de Simpson com 6 subintervalos para estimar o aumento da população de abelhas durante as primeiras 24 semanas.

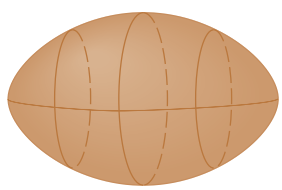


SCA **69.** (a) Se $f(x) = \text{sen}(\text{sen}\, x)$, use um gráfico para encontrar um limitante superior para $|f^{(4)}(x)|$.

(b) Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para aproximar $\int_0^{\pi} f(x)\, dx$ e use a parte (a) para estimar o erro.

(c) Quão grande deve ser $n$ para garantir que o tamanho do erro ao usar $S_n$ seja menor que 0,00001?

**70.** Suponha que lhe peçam para estimar o volume de uma bola de futebol americano. Você mede e descobre que a bola tem 28 cm de comprimento. Você usa um pedaço de barbante e mede a circunferência de 53 cm em seu ponto mais largo. A circunferência a 7 cm a partir de cada extremidade tem 45 cm. Use a Regra de Simpson para fazer sua estimativa.




**71.** Use o Teorema da Comparação para determinar se a integral é convergente ou divergente.

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2 + \text{sen}\, x}{\sqrt{x}}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx$

**72.** Encontre a área da região delimitada pela hipérbole $y^2 - x^2 = 1$ e pela reta $y = 3$.

**73.** Encontre a área da região delimitada pelas curvas $y = \cos x$ e $y = \cos^2 x$ entre $x = 0$ e $x = \pi$.

**74.** Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = 1/(2 + \sqrt{x})$, $y = 1/(2 - \sqrt{x})$ e $x = 1$.

**75.** A região sob a curva $y = \cos^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, é girada em torno do eixo $x$. Encontre o volume do sólido obtido.

**76.** A região do Exercício 75 é girada em torno do eixo $y$. Encontre o volume do sólido obtido.

**77.** Se $f'$ é contínua em $[0, \infty)$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, mostre que

$$\int_0^{\infty} f'(x)\, dx = -f(0)$$

**78.** Podemos estender nossa definição de valor médio de uma função contínua a um intervalo infinito definindo o valor médio de $f$ no intervalo $[a, \infty)$ como

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t - a} \int_a^t f(x)\, dx$$

(a) Calcule o valor médio de $y = \text{tg}^{-1} x$ no intervalo $[0, \infty)$.

(b) Se $f(x) \geqslant 0$ e $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ for divergente, mostre que o valor médio de $f$ no intervalo $[a, \infty)$ será $\lim_{x\to\infty} f(x)$, se esse limite existir.

(c) Se $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ for convergente, qual o valor médio de $f$ no intervalo $[a, \infty)$?

(d) Calcule o valor médio de $y = \text{sen}\, x$ no intervalo $[0, \infty)$.

**79.** Use a substituição $u = 1/x$ para mostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x^2}\, dx = 0$$

**80.** A intensidade da força de repulsão entre duas cargas pontuais com o mesmo sinal, uma com carga 1 e outra com carga $q$, é

$$F = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

onde $r$ é a distância entre as cargas e $\varepsilon_0$ é uma constante. O *potencial* $V$ no ponto $P$ devido à carga $q$ é definido como o trabalho realizado para trazer uma carga unitária para $P$ ao longo da reta que liga $q$ e $P$. Ache uma fórmula para $V$.

# Problemas Quentes

**EXEMPLO 1**

Cubra a solução do exemplo e tente resolvê-lo sozinho.

(a) Demonstre que se $f$ é uma função contínua, então

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

(b) Use a parte (a) para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

para todos os números $n$ positivos.

SOLUÇÃO

(a) À primeira vista, a equação fornecida parece um tanto difícil de entender. Como é possível ligar o lado esquerdo ao lado direito? As associações, com frequência, podem ser feitas por meio de um dos princípios de resolução de problemas: *introduzir algo extra*. Aqui o ingrediente extra é uma nova variável. Frequentemente pensamos na introdução de uma nova variável quando usamos a Regra de Substituição para integrar uma função específica. Mas aquela regra ainda é útil na presente circunstância, em que temos uma função geral $f$.

SP Os princípios para a solução do problema são discutidos no Capítulo 1.

Uma vez que pensamos em fazer uma substituição, a forma do lado direito sugere que esta deverá ser $u = a - x$. Então, $du = -dx$. Quando $x = 0$, $u = a$; quando $x = a$, $u = 0$. Logo

$$\int_0^a f(a-x)\,dx = -\int_a^0 f(u)\,du = \int_0^a f(u)\,du$$

No entanto, essa integral do lado direito é apenas outra maneira de escrever $\int_0^a f(x)\,dx$. Assim, a equação dada está demonstrada.

(b) Se considerarmos a integral dada como $I$ e aplicarmos a parte (a) com $a = \pi/2$, obteremos

Os gráficos gerados por computador na Figura 1 tornam plausível que todas as integrais do exemplo tenham o mesmo valor. O gráfico de cada integrando está rotulado com o respectivo valor de $n$.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n(\pi/2 - x)}{\operatorname{sen}^n(\pi/2 - x) + \cos^n(\pi/2 - x)}\,dx$$

Uma identidade trigonométrica bem conhecida nos diz que $\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$ e $\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x$, assim, obtemos

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \operatorname{sen}^n x}\,dx$$

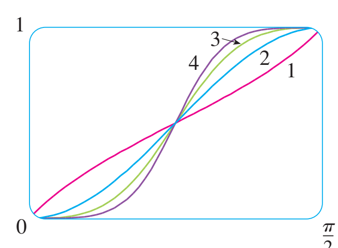



FIGURA 1

Observe que as duas expressões para $I$ são muito parecidas. De fato, os integrandos têm o mesmo denominador. Isso sugere que devemos adicionar as duas expressões. Se fizermos isso, obteremos

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Portanto, $I = \pi/4$.

## Problemas

1. Três estudantes de matemática pediram uma pizza de 36 centímetros. Em vez de fatiá-la da maneira tradicional, eles decidiram fatiá-la com cortes paralelos, como mostrado na figura. Sendo estudantes de Matemática, eles foram capazes de determinar onde fatiar de maneira que a cada um coubesse a mesma quantidade de pizza. Onde foram feitos os cortes?

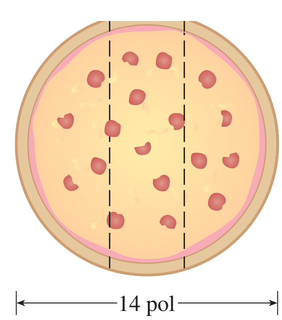



FIGURA PARA O PROBLEMA 1

2. Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{x^7 - x}\,dx$.
O ataque direto seria começar com frações parciais, mas isso seria brutal. Tente uma substituição.

3. Calcule $\int_0^1 \left(\sqrt[3]{1 - x^7} - \sqrt[7]{1 - x^3}\right) dx$

4. Os centros de dois discos de raio 1 estão separados de uma unidade. Encontre a área da união dos círculos.

5. Uma elipse é recortada de um círculo com raio $a$. O maior eixo da elipse coincide com um diâmetro do círculo e o menor eixo tem comprimento $2b$. Demonstre que a área da parte restante do círculo é a mesma que a de uma elipse com semieixos $a$ e $a - b$.

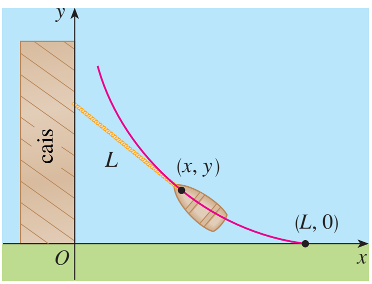



FIGURA PARA O PROBLEMA 6

6. Um homem inicialmente parado em um ponto $O$ anda ao longo de um cais puxando uma canoa por uma corda de comprimento $L$. O homem mantém a corda reta e esticada. O caminho percorrido pela canoa é uma curva chamada *tractriz* e tem a propriedade de que a corda é sempre tangente à curva (veja a figura).

   (a) Mostre que se o caminho percorrido pela canoa é o gráfico da função $y = f(x)$, então

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{L^2 - x^2}}{x}$$

   (b) Determine a função $y = f(x)$.

7. Uma função $f$ é definida por

$$f(x) = \int_0^{\pi} \cos t \cos(x - t)\, dt \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

   Encontre o valor mínimo de $f$.

8. Se $n$ é um inteiro positivo, demonstre que

$$\int_0^1 (\ln x)^n\, dx = (-1)^n n!$$

9. Mostre que

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n\, dx = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n + 1)!}$$

   *Dica*: Comece mostrando que se $I_n$ denotar a integral, então

$$I_{k+1} = \frac{2k + 2}{2k + 3} I_k$$

10. Suponha que $f$ seja uma função positiva tal que $f'$ seja contínua.

   (a) Como o gráfico de $y = f(x)$ sen $nx$ está relacionado ao gráfico de $y = f(x)$? O que acontece se $n \to \infty$?

   (b) Faça uma conjectura para o valor do limite

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} nx\, dx$$

   baseada em gráficos do integrando.

   (c) Usando integração por partes, confirme a conjectura que você fez na parte (b). [Use o fato de que, como $f'$ é contínua, existe uma constante $M$ tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.]

11. Se $0 < a < b$, encontre $\displaystyle\lim_{t \to 0} \left\{ \int_0^1 [bx + a(1 - x)]^t\, dx \right\}^{1/t}$.

12. Trace $f(x) = \operatorname{sen}(e^x)$ e use o gráfico para estimar o valor de $t$ tal que $\int_t^{t+1} f(x)\, dx$ seja máximo. Então, calcule o valor exato de $t$ que maximiza essa integral.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

**13.** Calcule $\int_{-1}^{\infty} \left( \dfrac{x^4}{1 + x^6} \right)^2 dx$.

**14.** Calcule $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$.

**15.** A circunferência de raio 1 mostrada na figura toca a curva $y = |2x|$ duas vezes. Determine a área da região que se encontra entre as duas curvas.

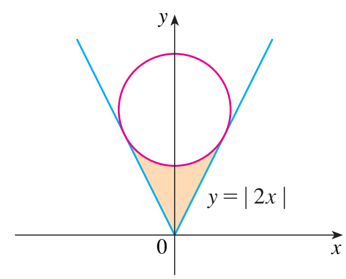



FIGURA PARA O PROBLEMA 13

**16.** Um foguete é lançado verticalmente, consumindo combustível a uma taxa constante de $b$ quilogramas por segundo. Seja $v = v(t)$ a velocidade do foguete no instante $t$ e suponha que a velocidade da emissão de gases $u$ seja constante. Considere $M = M(t)$ como a massa do foguete no tempo $t$ e observe que $M$ decresce à medida que o combustível queima. Se desprezarmos a resistência do ar, segue da Segunda Lei de Newton que

$$F = M\frac{dv}{dt} - ub$$

em que a força $F = -Mg$. Logo,

$$\boxed{1} \qquad M\frac{dv}{dt} - ub = -Mg$$

Sejam $M_1$ a massa do foguete sem combustível, $M_2$ a massa inicial do combustível, e $M_0 = M_1 + M_2$. Então, até ele ficar sem combustível no tempo $t = M_2b$, a massa será $M = M_0 - bt$.

(a) Substitua $M = M_0 - bt$ na Equação 1 e isole $v$ na equação resultante. Use a condição inicial $v(0) = 0$ para calcular a constante.
(b) Determine a velocidade do foguete no instante $t = M_2/b$. Esta é chamada *velocidade terminal*.
(c) Determine a altura do foguete $y = y(t)$ no tempo terminal.
(d) Encontre a altura do foguete em um instante $t$ qualquer.