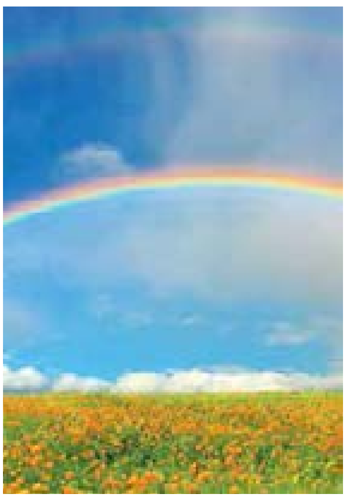
Sumário



5 Integrais

No Exemplo 7 na Seção 5.4, você verá como usar as informações de consumo de energia e uma integral para calcular a energia usada em um dia em São Francisco.

Nathan Jaskowiak/Shutterstock

No Capítulo 2 usamos os problemas de tangente e de velocidade para introduzir a derivada, que é a ideia central do cálculo diferencial. Neste capítulo, começaremos com os problemas de área e de distância e os utilizaremos para formular a ideia de integral definida, que é o conceito básico do cálculo integral. Veremos nos Capítulos 6 e 8 como usar a integral para resolver os problemas relativos a volumes, comprimentos de curvas, predições populacionais, saída de sangue do coração, força sobre um dique, trabalho, excedente de consumo e beisebol, entre muitos outros.

Há uma conexão entre o cálculo integral e o diferencial. O Teorema Fundamental do Cálculo relaciona a integral com a derivada e veremos, neste capítulo, que isso simplifica bastante a solução de muitos problemas.

5.1 Áreas e Distâncias

Agora é um bom momento para ler (ou reler) *Uma Apresentação do Cálculo*. Lá, são discutidas as ideias unificadoras do cálculo, e a seção ajuda a colocar em perspectiva de onde saímos e para onde iremos.

Nesta seção vamos descobrir que, na tentativa de encontrar a área sob uma curva ou a distância percorrida por um carro, encontramos o mesmo tipo especial de limite.

O Problema da Área

Nós começamos tentando resolver o *problema da área*: encontre a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$ de a até b. Isso significa que S, ilustrada na Figura 1, está limitada pelo gráfico de uma função contínua f [onde $f(x) \geqslant 0$], pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x.

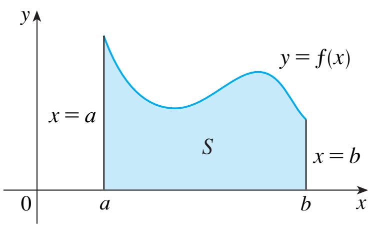


FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

Ao tentarmos resolver o problema da área, devemos nos perguntar: qual é o significado da palavra *área*? Essa questão é fácil de ser respondida para regiões com lados retos. Para um retângulo, a área é definida como o produto do comprimento e da largura. A área de um triângulo é a metade da base vezes a altura. A área de um polígono pode ser encontrada dividindo-o em triângulos (como na Figura 2) e a seguir somando-se as áreas dos triângulos.

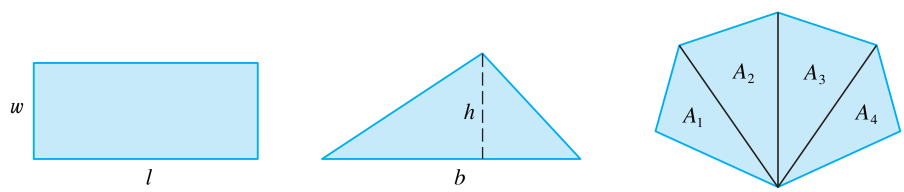


FIGURA 2
$A = lw$ $\quad$ $A = \frac{1}{2}bh$ $\quad$ $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Não é tão fácil, no entanto, encontrar a área de uma região com lados curvos. Temos uma ideia intuitiva de qual é a área de uma região. Mas parte do problema da área é tornar precisa essa ideia intuitiva, dando uma definição exata de área.

Lembre-se de que, ao definir uma tangente, primeiro aproximamos a inclinação da reta tangente por inclinações de retas secantes e, então, tomamos o limite dessas aproximações. Uma ideia similar será usada aqui para as áreas. Em primeiro lugar, aproximamos a região S utilizando retângulos e depois tomamos o limite das áreas desses retângulos à medida que aumentamos o número de retângulos. Os exemplos a seguir ilustram esse procedimento.

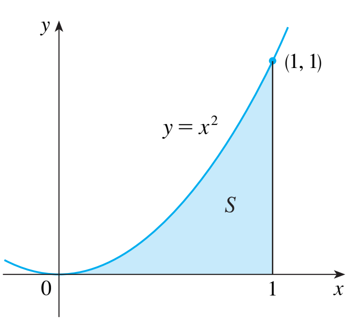


FIGURA 3

EXEMPLO 1 Use retângulos para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 (a região parabólica S ilustrada na Figura 3).

SOLUÇÃO Observamos primeiro que a área de S deve estar em algum lugar entre 0 e 1, pois S está contida em um quadrado com lados de comprimento 1, mas certamente podemos fazer melhor que isso. Suponha que S seja dividida em quatro faixas S_1, S_2, S_3 e S_4, traçando as retas verticais $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{3}{4}$, como na Figura 4(a).

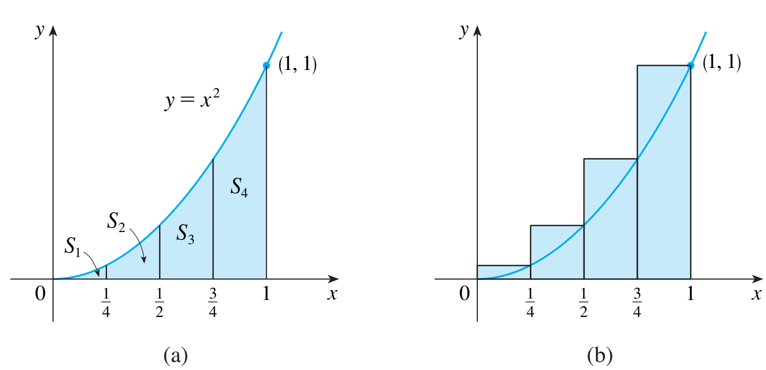


FIGURA 4

Podemos aproximar cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa [veja a Figura 4(b)]. Em outras palavras, as alturas desses retângulos são os valores da função $f(x) = x^2$ nas extremidades *direitas* dos subintervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ e $[\frac{3}{4}, 1]$.

Cada retângulo tem largura de $\frac{1}{4}$ e altura de $(\frac{1}{4})^2$, $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{3}{4})^2$ e 1^2. Se R_4 for a soma das áreas dos retângulos aproximantes, teremos

$$R_4 = \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot 1^2 = \tfrac{15}{32} = 0{,}46875$$

Da Figura 4(b) vemos que a área A de S é menor que R_4, logo

$$A < 0{,}46875$$

Em vez de usarmos os retângulos na Figura 4(b), poderíamos usar os retângulos menores na Figura 5, cujas alturas seguem os valores de f nas extremidades *esquerdas* dos subintervalos. (O retângulo mais à esquerda desapareceu, pois sua altura é 0.) A soma das áreas desses retângulos aproximantes é

$$L_4 = \tfrac{1}{4} \cdot 0^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{7}{32} = 0{,}21875$$

Vemos que a área de S é maior que L_4 e, então, temos estimativas inferior e superior para A:

$$0{,}21875 < A < 0{,}46875$$

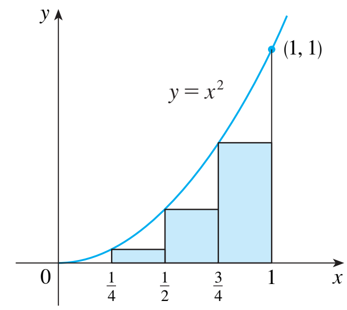


FIGURA 5

Podemos repetir esse procedimento com um número maior de faixas. A Figura 6 mostra o que acontece quando dividimos a região S em oito faixas com a mesma largura.

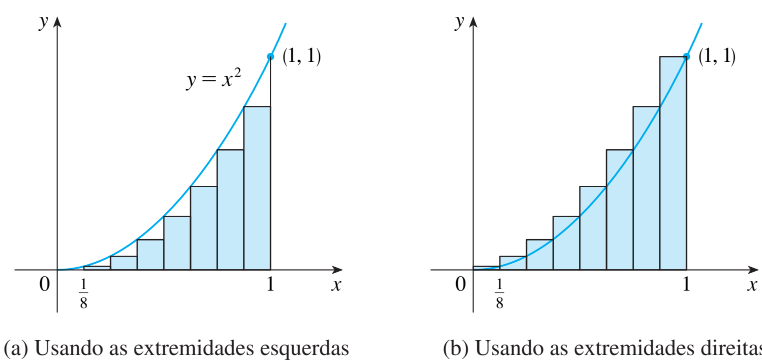


FIGURA 6
Aproximando S por 8 retângulos

Calculando a soma das áreas dos retângulos menores (L_8) e a soma das áreas dos retângulos maiores (R_8), obtemos estimativas inferior e superior melhores para A:

$$0{,}2734375 < A < 0{,}3984375.$$

Assim, uma resposta possível para a questão é dizer que a verdadeira área de S está em algum lugar entre 0,2734375 e 0,3984375.

Podemos obter melhores estimativas aumentando o número de faixas. A tabela na lateral mostra os resultados de cálculos similares (com um computador) usando n retângulos cujas alturas são encontradas com as extremidades esquerdas (L_n) ou com as extremidades direitas (R_n). Em particular, vemos que usando 50 faixas a área está entre 0,3234 e 0,3434. Com 1000 faixas conseguimos estreitar a desigualdade ainda mais: A está entre 0,3328335 e 0,3338335. Uma boa estimativa é obtida fazendo-se a média aritmética desses números: $A \approx 0{,}3333335$.

n	L_n	R_n
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,3383500
1000	0,3328335	0,3338335

Dos valores na tabela, parece que R_n aproxima-se de $\frac{1}{3}$ à medida que aumentamos n. Confirmamos isso no próximo exemplo.

EXEMPLO 2 Para a região S do Exemplo 1, mostre que a soma das áreas dos retângulos aproximantes superiores tende a $\frac{1}{3}$, isto é,

$$\lim_{n \to \infty} R_n = \tfrac{1}{3}$$

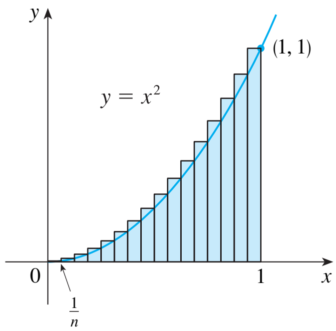


FIGURA 7

SOLUÇÃO R_n é a soma das áreas dos n retângulos na Figura 7. Cada retângulo tem uma largura $1/n$, e as alturas são os valores da função $f(x) = x^2$ nos pontos $1/n, 2/n, 3/n, \ldots, n/n$; isto é, as alturas são $(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \ldots, (n/n)^2$. Logo,

$$R_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

Utilizamos aqui a fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos:

1 $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Talvez você já tenha visto essa fórmula antes. Ela está demonstrada no Exemplo 5 no Apêndice E.

Colocando a Fórmula 1 na nossa expressão para R_n, temos

$$R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Estamos calculando aqui o limite da sequência $\{R_n\}$. Sequências e seus limites são discutidos em *Uma Apresentação do Cálculo* e serão estudados em detalhes na Seção 11.1. A ideia é bastante similar ao limite no infinito (Seção 2.6), exceto que ao escrever $\lim_{n\to\infty}$ nós restringimos a n número inteiro positivo. Em particular, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Quando escrevemos $\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$, queremos dizer que podemos fazer que R_n seja o mais próximo de $\frac{1}{3}$ que desejamos ao tornar n suficientemente grande.

Então, temos

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

Pode ser mostrado que as somas aproximantes inferiores também tendem a $\frac{1}{3}$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \tfrac{1}{3}$$

TEC Em *Visual 5.1*, você pode criar figuras como as Figuras 8 e 9 para outros valores de n.

Das Figuras 8 e 9, parece que conforme n aumenta, ambos L_n e R_n se tornam aproximações cada vez melhores da área de S. Portanto, *definimos* a área A como o limite das somas das áreas desses retângulos aproximantes, isto é,

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

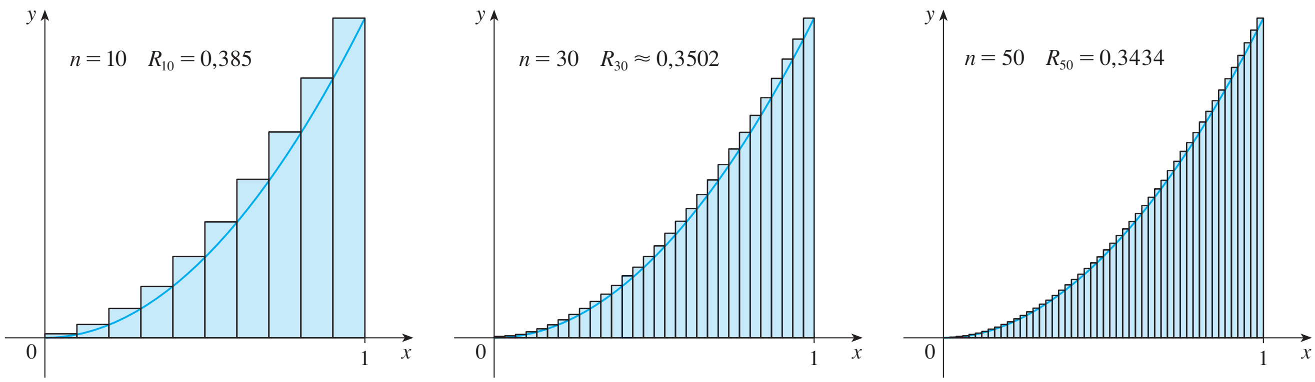


FIGURA 8 As extremidades da direita produzem somas superiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

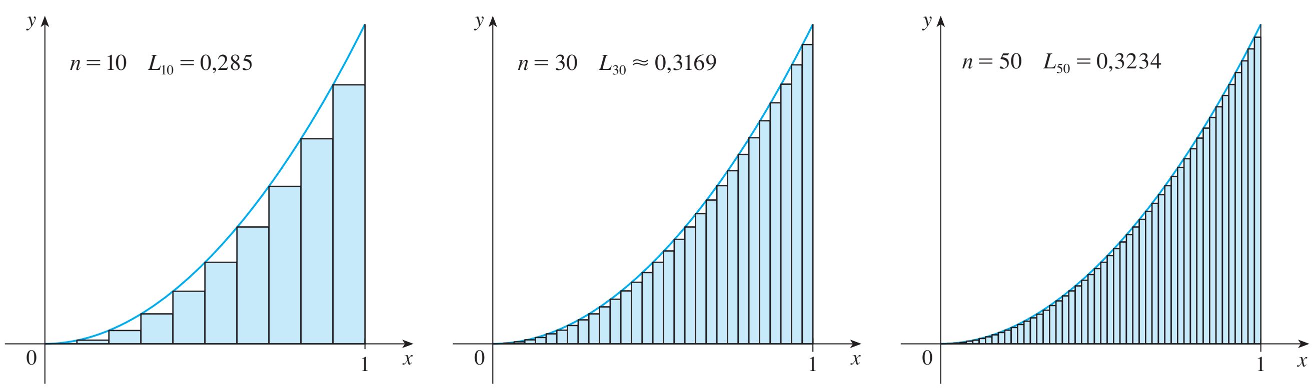


FIGURA 9 As extremidades da direita produzem somas inferiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

Vamos aplicar a ideia dos Exemplos 1 e 2 para as regiões S mais gerais da Figura 1. Começamos por subdividir S em n faixas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de igual largura, como na Figura 10.

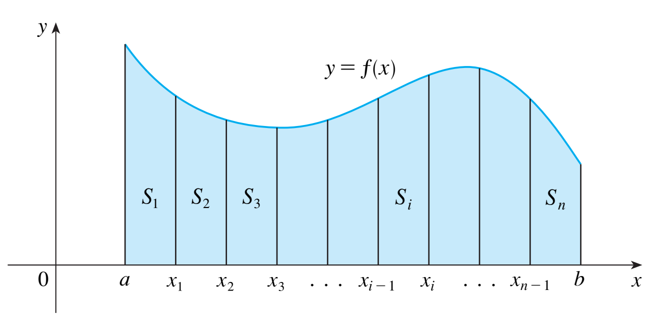


FIGURA 10

A largura do intervalo $[a, b]$ é $b - a$; assim, a largura de cada uma das n faixas é

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Essas faixas dividem o intervalo [a, b] em n subintervalos

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. As extremidades direitas dos subintervalos são

$$x_1 = a + \Delta x,$$
$$x_2 = a + 2\,\Delta x,$$
$$x_3 = a + 3\,\Delta x,$$
$$\vdots$$

Vamos aproximar a i-ésima faixa S_i por um retângulo com largura Δx e altura $f(x_i)$, que é o valor de f na extremidade direita (veja a Figura 11). Então, a área do i-ésimo retângulo é $f(x_i)\,\Delta x$. O que consideramos intuitivamente como a área de S é aproximado pela soma das áreas desses retângulos, que é

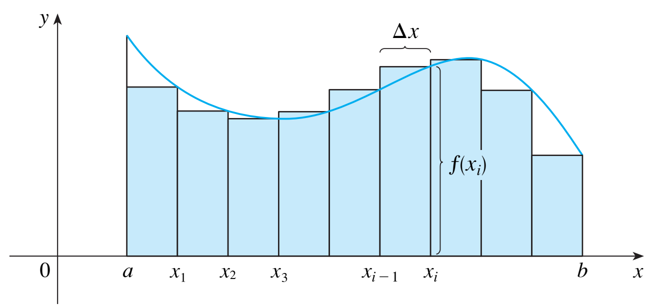
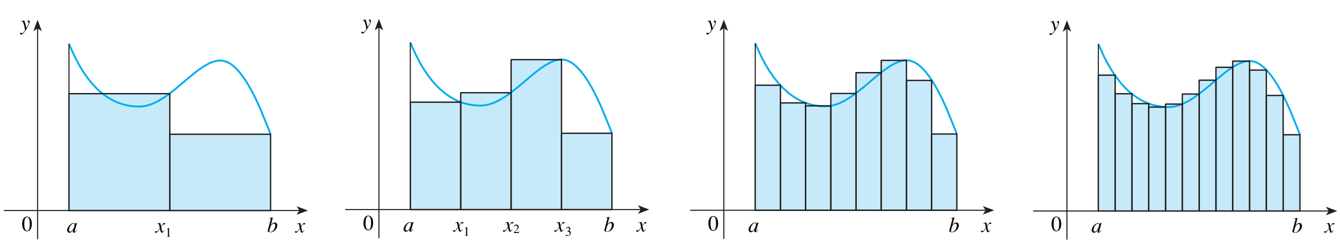


FIGURA 11

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

A Figura 12 mostra a aproximação para $n = 2, 4, 8$ e 12. Observe que essa aproximação



(a) $n = 2$ (b) $n = 4$ (c) $n = 8$ (d) $n = 12$

FIGURA 12

parece tornar-se cada vez melhor à medida que aumentamos o número de faixas, isto é, quando $n \to \infty$. Portanto, vamos definir a área A da região S da seguinte forma.

2 Definição A **área** A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

Pode ser demonstrado que o limite na Definição 2 sempre existe, uma vez que estamos supondo que f seja contínua. Pode também ser demonstrado que obteremos o mesmo valor se usarmos as extremidades esquerdas aproximantes:

3 $$A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x]$$

De fato, em vez de usarmos as extremidades esquerda ou direita, podemos tomar a altura do i-ésimo retângulo como o valor de f em *qualquer* número x_i^* no i-ésimo subintervalo

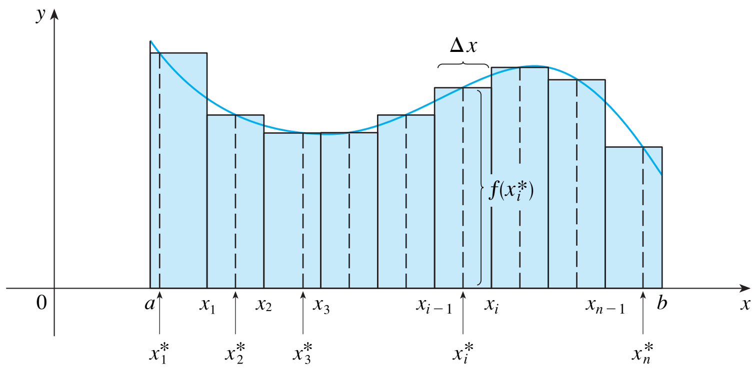


FIGURA 13

$[x_{i-1}, x_i]$. Chamamos os números $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ de **pontos amostrais**. A Figura 13 mostra os retângulos aproximantes quando os pontos amostrais não foram escolhidos como as extremidades. Logo, uma expressão mais geral para a área S é

$$\boxed{4} \qquad A = \lim_{n \to \infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

OBSERVAÇÃO Pode ser mostrado que uma definição equivalente de área é a seguinte: *A é o único número que é menor que todas as somas superiores e maior que todas as somas inferiores*. Vimos nos Exemplos 1 e 2, por exemplo, que a área $\left(A = \frac{1}{3}\right)$ está presa entre todas as somas esquerdas aproximantes L_n e todas as somas direitas aproximantes R_n. A função,

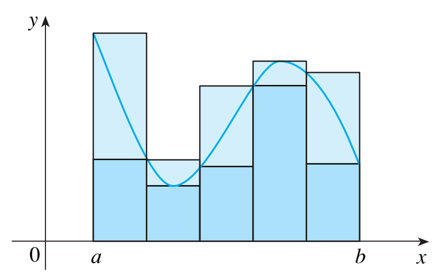


FIGURA 14
Somas inferiores (retângulos pequenos) e somas superiores (retângulos grandes)

nesses exemplos, $f(x) = x^2$, é crescente em $[0, 1]$ e, portanto, suas somas inferiores decorrem das extremidades esquerdas e as somas superiores, das extremidades direitas. (Veja as Figuras 8 e 9.) Em geral, formamos as **somas inferiores** (e **superiores**) escolhendo os pontos amostrais x_i^*, de modo que $f(x_i^*)$ é o mínimo (e máximo) valor de f no subintervalo i-ésimo. (Veja a Figura 14 e o Exercício 7–8.)

Frequentemente usamos a **notação de somatório** (notação sigma) para escrever somas de muitos termos de maneira mais compacta. Por exemplo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

Isso nos diz para parar quando i = n.
Isso nos diz para somar.
$$\sum_{i=m}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$
Isso nos diz para começar com i = m.

Se você precisar de prática com a notação sigma, olhe os exemplos e tente alguns dos exercícios do Apêndice E.

Assim, as expressões para a área nas Equações 2, 3 e 4 podem ser escritas da seguinte forma:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Também podemos reescrever a Fórmula 1 da seguinte maneira:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EXEMPLO 3 Seja A a área da região que está sob o gráfico de $f(x) = e^{-x}$ entre $x = 0$ e $x = 2$.
(a) Usando as extremidades direitas, encontre uma expressão para A como um limite. Não calcule o limite.
(b) Estime a área tomando como pontos amostrais os pontos médios e usando quatro e depois dez subintervalos.

SOLUÇÃO
(a) Uma vez que $a = 0$ e $b = 2$, a largura de um subintervalo é

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

Portanto, $x_1 = 2/n$, $x_2 = 4/n$, $x_3 = 6/n$, $x_i = 2i/n$ e $x_n = 2n/n$. A soma das áreas dos retângulos aproximantes é

$$\begin{aligned} R_n &= f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x \\ &= e^{-x_1}\,\Delta x + e^{-x_2}\,\Delta x + \cdots + e^{-x_n}\,\Delta x \\ &= e^{-2/n}\left(\frac{2}{n}\right) + e^{-4/n}\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + e^{-2n/n}\left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

De acordo com a Definição 2, a área é

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(e^{-2/n} + e^{-4/n} + e^{-6/n} + \cdots + e^{-2n/n}\right)$$

Usando a notação de somatória podemos escrever

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-2i/n}$$

É difícil calcular esse limite diretamente à mão, mas com a ajuda de um SCA isso não é tão complicado (veja o Exercício 28). Na Seção 5.3 seremos capazes de encontrar A mais facilmente usando um método diferente.

(b) Com $n = 4$, os subintervalos com mesma largura $\Delta x = 0{,}5$ são $[0; 0{,}5]$, $[0{,}5; 1]$, $[1; 1{,}5]$ e $[1{,}5; 2]$. Os pontos médios desses intervalos são $x_1^* = 0{,}25$, $x_2^* = 0{,}75$, $x_3^* = 1{,}25$ e $x_4^* = 1{,}75$, e a soma das áreas dos quatro retângulos aproximantes (veja a Figura 15) é

$$\begin{aligned} M_4 &= \sum_{i=1}^{4} f(x_i^*)\,\Delta x \\ &= f(0{,}25)\,\Delta x + f(0{,}75)\,\Delta x + f(1{,}25)\,\Delta x + f(1{,}75)\,\Delta x \\ &= e^{-0{,}25}(0{,}5) + e^{-0{,}.75}(0{,}5) + e^{-1{,}.25}(0{,}5) + e^{-1{,}75}(0{,}5) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(e^{-0{,}25} + e^{-0{,}75} + e^{-1{,}25} + e^{-1{,}75}\right) \approx 0{,}8557 \end{aligned}$$

Logo, uma estimativa para a área é

$$A \approx 0{,}8557.$$

Com $n = 10$, os subintervalos são $[0; 0{,}2]$, $[0{,}2; 0{,}4]$, $\ldots$, $[1{,}8; 2]$ e os pontos médios são $x_1^* = 0{,}1$, $x_2^* = 0{,}3$, $x_3^* = 0{,}5$, $\ldots$, $x_{10}^* = 1{,}9$. Assim,

$$\begin{aligned} A \approx M_{10} &= f(0{,}1)\,\Delta x + f(0{,}3)\,\Delta x + f(0{,}5)\,\Delta x + \cdots + f(1{,}9)\,\Delta x \\ &= 0{,}2\left(e^{-0{,}1} + e^{-0{,}3} + e^{-0{,}5} + \cdots + e^{-1{,}9}\right) \approx 0{,}8632 \end{aligned}$$

Da Figura 16 parece que essa estimativa é melhor que a estimativa com $n = 4$.

O Problema da Distância

Vamos considerar agora o *problema da distância*: encontre a distância percorrida por um objeto durante um certo período de tempo, sendo que a velocidade do objeto é conhecida em todos os instantes. (De certa forma esse é o problema inverso do problema da velocidade que discutimos na Seção 2.1.) Se a velocidade permanece constante, então o problema de distância é fácil de resolver por meio da fórmula

$$\text{distância} = \text{velocidade} \times \text{tempo}.$$

Mas se a velocidade variar, não é tão fácil determinar a distância percorrida. Vamos investigar o problema no exemplo a seguir.

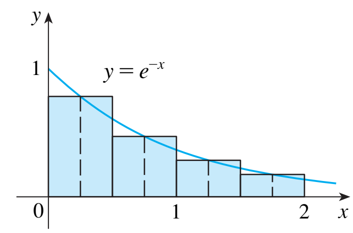


FIGURA 15

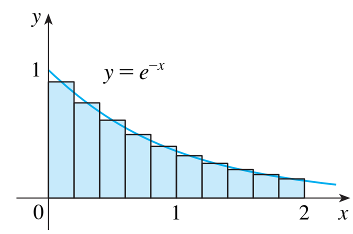


FIGURA 16

EXEMPLO 4 Suponha que queiramos estimar a distância percorrida por um carro durante um intervalo de tempo de 30 segundos. A cada 5 segundos registramos a leitura do velocímetro na seguinte tabela:

Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (km/h)	27	34	38	46	51	50	45

Para termos o tempo e a velocidade em unidades consistentes, vamos converter a velocidade para metros por segundo (1 km/h = 1 000/3 600 m/s):

Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (m/s)	7,5	9,4	10,6	12,8	14,2	13,9	12,5

Durante os cinco primeiros segundos a velocidade não varia muito, logo, podemos estimar a distância percorrida durante esse tempo supondo que a velocidade seja constante. Se tomarmos a velocidade durante aquele intervalo de tempo como a velocidade inicial (7,5 m/s), então obteremos aproximadamente a distância percorrida durante os cinco primeiros segundos:

$$7{,}5 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 37{,}5 \text{ m}.$$

Analogamente, durante o segundo intervalo de tempo a velocidade é aproximadamente constante, e vamos considerá-la quando $t = 5$s. Assim, nossa estimativa para a distância percorrida de $t = 5$ s até $t = 10$ s é

$$9{,}4 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 47 \text{ m}.$$

Adicionando estimativas similares para os outros intervalos de tempo, obtemos uma estimativa para a distância total percorrida:

$$(7{,}5 \times 5) + (9{,}4 \times 5) + (10{,}6 \times 5) + (12{,}8 \times 5) + (14{,}2 \times 5) + (13{,}9 \times 5) = 342 \text{ m}.$$

Podemos, da mesma forma, usar a velocidade no *fim* de cada intervalo de tempo em vez de no começo como a velocidade constante. Então, nossa estimativa se torna

$$(9{,}4 \times 5) + (10{,}6 \times 5) + (12{,}8 \times 5) + (14{,}2 \times 5) + (13{,}9 \times 5) + (12{,}5 \times 5) = 367 \text{ m}.$$

Se quisermos uma estimativa mais precisa, podemos tomar as leituras de velocidade a cada 2 segundos ou até mesmo a cada segundo.

Talvez os cálculos no Exemplo 4 o façam lembrar-se das somas usadas anteriormente para estimar as áreas. A similaridade tem explicação quando esboçamos um gráfico da função velocidade do carro na Figura 17 e traçamos os retângulos cujas alturas são as velocidades iniciais para cada intervalo de tempo. A área do primeiro retângulo é $7{,}5 \times 5 = 37{,}5$, que é também a nossa estimativa para a distância percorrida nos primeiros cinco segundos. De fato, a área de cada retângulo pode ser interpretada como uma distância, pois a altura representa a velocidade, a largura e o tempo. A soma das áreas dos retângulos na Figura 17

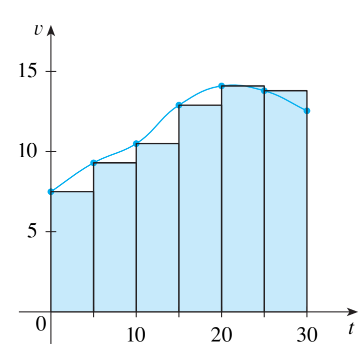


FIGURA 17

é $L_6 = 342$, que é nossa estimativa inicial para a distância total percorrida.

Em geral, suponha que o objeto se mova com velocidade $v = f(t)$, em que $a \leqslant t \leqslant b$ e $f(t) \geqslant 0$ (logo, o objeto move-se sempre no sentido positivo). Vamos registrar as velocidades nos instantes $t_0 (= a), t_1, t_2, \ldots, t_n (= b)$, de forma que a velocidade seja aproximadamente constante em cada subintervalo. Se esses tempos forem igualmente espaçados, então entre duas leituras consecutivas temos o período de tempo $\Delta t = (b - a)/n$. Durante o primeiro intervalo de tempo a velocidade é aproximadamente $f(t_0)$ e, portanto, a distância percorrida é de aproximadamente $f(t_0)\,\Delta t$. Analogamente, a distância percorrida durante o segundo intervalo de tempo é de cerca de $f(t_1)\,\Delta t$ e a distância total percorrida durante o intervalo de tempo $[a, b]$ é de aproximadamente

$$f(t_0)\,\Delta t + f(t_1)\,\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t.$$

Se usarmos as velocidades nas extremidades direitas em vez de nas extremidades esquerdas, nossa estimativa para a distância total ficará

$$f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t.$$

Quanto mais frequentemente medirmos a velocidade, mais precisa será nossa estimativa, então parece plausível que a distância *exata* d percorrida é o *limite* de tais expressões:

$$\boxed{5} \qquad d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t.$$

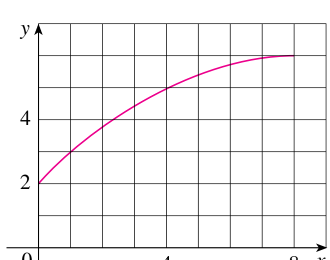
Veremos na Seção 5.4 que isso é realmente verdadeiro.

Como a Equação 5 tem a mesma forma que nossas expressões para a área nas Equações 2 e 3, segue que a distância percorrida é igual à área sob o gráfico da função velocidade. No Capítulo 6 veremos que outras quantidades de interesse nas ciências naturais e sociais — tais como o trabalho realizado por uma força variável ou a saída de sangue do coração — podem também ser interpretadas como a área sob uma curva. Logo, ao calcular áreas neste capítulo, tenha em mente que elas podem ser interpretadas de várias formas práticas.

5.1 Exercícios

1. (a) Lendo os valores do gráfico dado de f, utilize quatro retângulos para encontrar as estimativas inferior e superior para a área sob o gráfico dado de f de $x = 0$ até $x = 8$. Em cada caso, esboce os retângulos que você usar.

(b) Encontre novas estimativas, usando oito retângulos em cada caso.



2. (a) Use seis retângulos para achar estimativas de cada tipo para a área sob o gráfico dado de f de $x = 0$ até $x = 12$.

(i) L_6 (pontos amostrais são extremidades esquerdas)

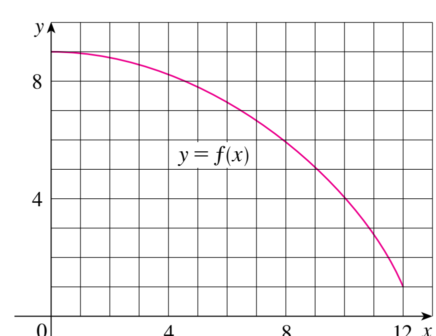
(ii) R_6 (pontos amostrais são extremidades direitas)

(iii) M_6 (pontos amostrais são pontos médios)

(b) L_6 é uma subestimativa ou superestimativa em relação à área verdadeira?

(c) R_6 é uma subestimativa ou superestimativa em relação à área verdadeira?

(d) Entre os números L_6, R_6 ou M_6, qual fornece a melhor estimativa? Explique.



É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

3. (a) Estime a área sob o gráfico $f(x) = \cos x$ de $x = 0$ até $x = \pi/2$ usando quatro retângulos aproximantes e extremidades direitas. Esboce o gráfico e os retângulos. Sua estimativa é uma subestimativa ou uma superestimativa?
(b) Repita a parte (a) usando extremidades esquerdas.

4. (a) Estime a área sob o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ de $x = 0$ até $x = 4$ usando quatro retângulos aproximantes e extremidades direitas. Esboce o gráfico e os retângulos. Sua estimativa é uma subestimativa ou uma superestimativa?
(b) Repita a parte (a) usando extremidades esquerdas.

5. (a) Estime a área sob o gráfico $f(x) = 1 + x^2$ de $x = -1$ até $x = 2$ usando três retângulos aproximantes e extremidades direitas. Então, aperfeiçoe sua estimativa utilizando seis retângulos aproximantes. Esboce a curva e os retângulos aproximantes.
(b) Repita a parte (a) usando extremidades esquerdas.
(c) Repita a parte (a) empregando os pontos médios.
(d) A partir de seus esboços das partes (a), (b) e (c), qual parece ser a melhor estimativa?

6. (a) Faça o gráfico da função

$$f(x) = x - 2 \ln x, \ 1 \leqslant x \leqslant 5$$

(b) Estime a área sob o gráfico de f usando quatro retângulos aproximantes e tomando como pontos amostrais (i) as extremidades direitas e (ii) os pontos médios. Em cada caso, esboce a curva e os retângulos.
(c) Aperfeiçoe suas estimativas da parte (b) usando oito retângulos.

7. Avalie as somas superiores e inferiores para $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, com $n = 2, 4$, e 8. Ilustre com diagramas como na Figura 14.

8. Avalie as somas superiores e inferiores para $f(x) = 1 + x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, com $n = 3$ e 4. Ilustre com diagramas como na Figura 14.

9–10 Com uma calculadora programável (ou um computador), é possível calcular as expressões para a soma das áreas de retângulos aproximantes, mesmo para valores grandes de n, usando *laços*. (Numa TI use o comando Is > ou um laço For-EndFor, numa Casio use Isz, numa HP ou no BASIC use um laço FOR-NEXT.) Calcule a soma das áreas dos retângulos aproximantes usando subintervalos iguais e extremidades direitas para $n = 10, 30, 50$ e 100. Então, conjecture o valor exato da área.

9. A região sob $y = x^4$ de 0 até 1.

10. A região sob $y = \cos x$ de 0 até $\pi/2$.

SCA **11.** Alguns sistemas de computação algébrica têm comandos que traçam retângulos aproximantes e calculam as somas de suas áreas, pelo menos se x_i^* for uma extremidade esquerda ou direita. (Por exemplo, no Maple use `leftbox`, `rightbox`, `leftsum` e `rightsum`.)
(a) Se $f(x) = 1/(x^2 + 1)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, encontre as somas esquerda e direita para $n = 10, 30$ e 50.
(b) Ilustre fazendo o gráfico dos retângulos da parte (a).
(c) Mostre que a área exata sob f está entre 0,780 e 0,791.

SCA **12.** (a) Se $f(x) = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, use os comandos discutidos no Exercício 11 para encontrar as somas esquerda e direita para $n = 10, 30$ e 50.
(b) Ilustre fazendo o gráfico dos retângulos da parte (a).
(c) Mostre que a área exata sob f está entre 2,50 e 2,59.

13. A velocidade de um corredor aumenta regularmente durante os três primeiros segundos de uma corrida. Sua velocidade em intervalos de meio segundo é dada em uma tabela. Encontre as estimativas superior e inferior para a distância que ele percorreu durante esses três segundos.

t (s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
v (m/s)	0	1,9	3,3	4,5	5,5	5,9	6,2

14. A leitura do velocímetro de uma motocicleta em intervalos de 12 segundos é mostrada na tabela a seguir.
(a) Estime a distância percorrida pela motocicleta durante esse período, usando a velocidade no começo dos intervalos de tempo.
(b) Dê outra estimativa utilizando a velocidade no fim dos intervalos de tempo.
(c) As estimativas feitas nas partes (a) e (b) são estimativas superior e inferior? Explique.

t (s)	0	12	24	36	48	60
v (m/s)	9,1	8,5	7,6	6,7	7,3	8,2

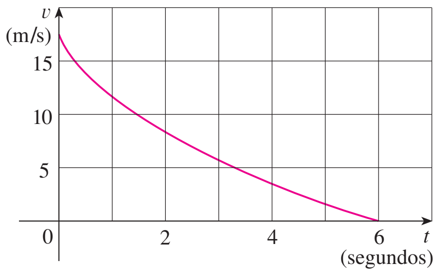
15. Óleo vaza de um tanque a uma taxa de $r(t)$ litros por hora. A taxa decresce à medida que o tempo passa e os valores da taxa em intervalos de duas horas são mostrados na tabela a seguir. Encontre estimativas superior e inferior para a quantidade total de óleo que vazou.

t (h)	0	2	4	6	8	10
$r(t)$ (L/h)	8,7	7,6	6,8	6,2	5,7	5,3

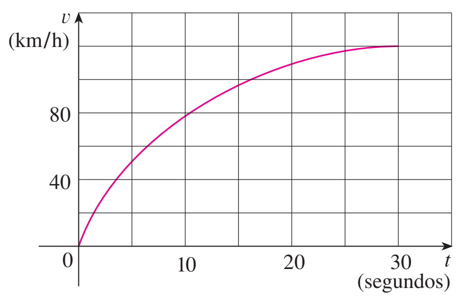
16. Quando estimamos distâncias a partir dos dados da velocidade, algumas vezes é necessário usar tempos $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$ que não estão igualmente espaçados. Podemos ainda estimar as distâncias usando os períodos de tempo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Por exemplo, em 7 de maio de 1992, o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49, cujo propósito era instalar o satélite de comunicação Intelsat. A tabela, fornecida pela Nasa, mostra os dados da velocidade do ônibus entre o lançamento e a entrada em funcionamento dos foguetes auxiliares. Use estes dados para estimar a altura acima da superfície da Terra do *Endeavour* 62 segundos depois do lançamento.

Evento	Tempo (s)	Velocidade (m/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	56
Fim da manobra de inclinação	15	97
Regulador de combustível a 89%	20	136
Regulador de combustível a 67%	32	226
Regulador de pressão a 104%	59	404
Pressão dinâmica máxima	62	440
Separação dos foguetes auxiliares	125	1.265

17. O gráfico da velocidade de um carro freando é mostrado. Use-o para estimar a distância percorrida pelo carro enquanto os freios estão sendo aplicados.



18. O gráfico da velocidade de um carro em aceleração a partir do repouso até uma velocidade de 120 km/h em um período de 30 segundos é mostrado. Estime a distância percorrida durante esse período.



19–21 Use a Definição 2 para achar uma expressão para a área sob o gráfico de f como um limite. Não calcule o limite.

19. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3$

20. $f(x) = x^2 + \sqrt{1 + 2x}, \quad 4 \leqslant x \leqslant 7$

21. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

22–23 Determine uma região cuja área seja igual ao limite dado. Não calcule o limite.

22. $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{2}{n}\left(5 + \dfrac{2i}{n}\right)^{10}$

23. $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\pi}{4n} \operatorname{tg} \dfrac{i\pi}{4n}$

24. (a) Utilize a Definição 2 para encontrar uma expressão para a área sob a curva $y = x^3$ de 0 a 1 como um limite.

(b) A fórmula a seguir para a soma dos cubos dos primeiros n inteiros está demonstrada no Apêndice E. Use-a para calcular o limite da parte (a).

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

25. Seja A a área sob o gráfico de uma função contínua crescente f de a até b, e sejam L_n e R_n as aproximações para A com n subintervalos usando extremidades esquerdas e direitas, respectivamente.

(a) Como A, L_n e R_n estão relacionados?

(b) Mostre que

$$R_n - L_n = \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$$

Então, desenhe um diagrama para ilustrar essa equação, mostrando que n retângulos representando $R_n - L_n$ podem ser reunidos num único retângulo cuja área é o lado direito da equação.

(c) Deduza que

$$R_n - A < \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$$

26. Se A é a área sob a curva $y = e^x$ de 1 a 3, use o Exercício 25 para encontrar um valor de n tal que $R_n - A < 0{,}0001$.

SCA **27.** (a) Expresse a área sob a curva $y = x^5$ de 0 até 2 como um limite.

(b) Use um sistema de computação algébrica para encontrar a soma em sua expressão da parte (a).

(c) Calcule o limite da parte (a).

SCA **28.** Encontre a área exata da região sob o gráfico de $y = e^{-x}$ de 0 até 2 usando um sistema de computação algébrica para calcular a soma e então o limite no Exemplo 3(a). Compare sua resposta com a estimativa obtida no Exemplo 3(b).

SCA **29.** Encontre a área exata sob a curva cosseno $y = \cos x$ de $x = 0$ até $x = b$, onde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$. (Use um sistema de computação algébrica para calcular a soma e o limite.) Em particular, qual é a área, se $b = \pi/2$?

30. (a) Seja A_n a área de um polígono com n lados iguais inscrito num círculo com raio r. Dividindo o polígono em n triângulos congruentes com ângulo central de $2\pi/n$, mostre que

$$A_n = \tfrac{1}{2} n r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

(b) Mostre que $\lim_{n \to \infty} A_n = \pi r^2$. [*Dica:* Use a Equação 3.3.2.]

5.2 A Integral Definida

Vimos na Seção 5.1 que um limite da forma

$$\boxed{1} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

aparece quando calculamos uma área. Vimos também que ele aparece quando tentamos encontrar a distância percorrida por um objeto. Resulta que esse mesmo tipo de limite ocorre em uma grande variedade de situações, mesmo quando f não é necessariamente uma função positiva. Nos Capítulos 6 e 8 veremos que os limites da forma $\boxed{1}$ também surgem no processo de encontrar o comprimento de curvas, volumes de sólidos, centros de massas, forças por causa da pressão da água e trabalho, assim como outras quantidades. Daremos, portanto, a esse tipo de limite um nome e notação especiais.

$\boxed{2}$ **Definição de Integral Definida** Se f é uma função contínua definida em $a \leqslant x \leqslant b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $x_0\,(= a), x_1, x_2, \ldots, x_n\,(= b)$ as extremidades desses subintervalos, e sejam $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ **pontos amostrais arbitrários** nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a **integral definida de f de a a b** é

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é **integrável** em $[a, b]$.

O significado exato do limite que define a integral é o seguinte:

Para todo número $\varepsilon > 0$ existe um inteiro N tal que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x \right| < \varepsilon$$

para todo inteiro $n > N$ e toda escolha de x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$.

OBSERVAÇÃO 1 O símbolo $\int$ foi introduzido por Leibniz e é denominado **sinal de integral**. Ele é um S alongado e foi assim escolhido porque uma integral é um limite de somas. Na notação $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ é chamado **integrando**, a e b são ditos **limites de integração**, a é o **limite inferior**, b, o **limite superior**. Por enquanto, o símbolo dx não tem significado sozinho; $\int_a^b f(x)\,dx$ é apenas um símbolo. O dx simplesmente indica que a variável dependente é x. O procedimento de calcular a integral é chamado **integração**.

OBSERVAÇÃO 2 A integral definitiva $\int_a^b f(x)\,dx$ é um número; ela não depende de x. Na verdade, podemos usar qualquer letra para substituir x sem alterar o valor da integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(r)\,dr$$

OBSERVAÇÃO 3 A soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Riemann

Bernhard Riemann realizou seu doutorado sob orientação do legendário Gauss na Universidade de Göttingen e lá permaneceu para ensinar. Gauss, que não tinha o hábito de elogiar outros matemáticos, referiu-se a Riemann como "uma mente criativa ativa, e verdadeiramente matemática, e de uma originalidade gloriosamente fértil". A Definição $\boxed{2}$ de integral que usamos se deve a Riemann. Ele também fez grandes contribuições para a teoria de funções de variáveis complexas, física-matemática, teoria dos números e fundamentos da geometria. Os conceitos mais amplos de espaço e geometria de Riemann favoreceriam, 50 anos mais tarde, o desenvolvimento da teoria geral da relatividade de Einstein. Riemann, que nunca teve boa saúde, morreu de tuberculose aos 39 anos.

que ocorre na Definição 2 é chamada **soma de Riemann**, em homenagem ao matemático Bernhard Riemann (1826-1866). Assim, a Definição 2 diz que a integral definida de uma função integrável pode ser aproximada com qualquer grau de precisão desejado por uma soma de Riemann.

Sabemos que se f for positiva, então a soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de áreas de retângulos aproximantes (veja a Figura 1). Comparando a Definição 2 com a definição de área da Seção 5.1, vemos que a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser interpretada como a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b (veja a Figura 2).

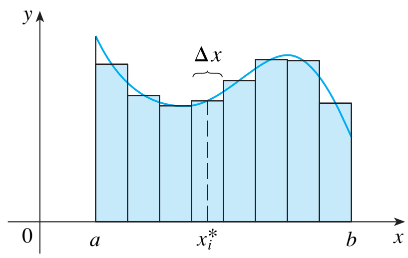


FIGURA 1
Se $f(x) \geqslant 0$, a soma de Riemann $\Sigma\, f(x_i^*)\,\Delta x$ é a soma das áreas de retângulos.

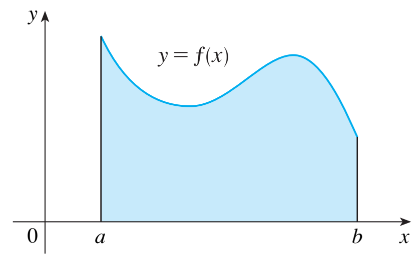


FIGURA 2
Se $f(x) \geqslant 0$, a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ é a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b.

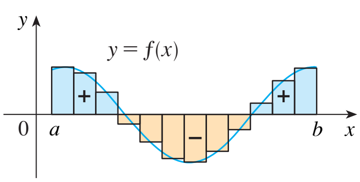


FIGURA 3
$\Sigma\, f(x_i^*)\,\Delta x$ é uma aproximação para a área resultante.

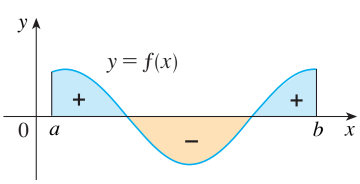


FIGURA 4
$\int_a^b f(x)\,dx$ é a área resultante.

Se f assumir valores positivos e negativos, como na Figura 3, então a soma de Riemann é a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x e do *oposto* das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x (as áreas dos retângulos azuis *menos* as áreas dos retângulos amarelos). Quando tomamos o limite dessas somas de Riemann, obtemos a situação ilustrada na Figura 4. Uma integral definida pode ser interpretada como **área resultante**, isto é, a diferença das áreas:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

onde A_1 é a área da região acima do eixo x e abaixo do gráfico de f, e A_2 é a área da região abaixo do eixo x e acima do gráfico de f.

OBSERVAÇÃO 4 Embora tenhamos definido $\int_a^b f(x)\,dx$ dividindo $[a, b]$ em subintervalos de igual comprimento, há situações nas quais é vantajoso trabalhar com intervalos de comprimentos diferentes. Por exemplo, no Exercício 16 da Seção 5.1, a Nasa forneceu dados de velocidade em instantes que não são igualmente espaçados, mas mesmo assim fomos capazes de estimar a distância percorrida. E existem métodos para a integração numérica que aproveitam os subintervalos desiguais.

Se os comprimentos dos subintervalos forem $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, teremos de garantir que todos esses comprimentos tendem a 0 no processo de limite. Isso acontece se o maior comprimento, max Δx_i, tender a 0. Portanto, nesse caso a definição de integral definida fica

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

OBSERVAÇÃO 5 Estabelecemos a integral definida para uma função integrável, mas nem todas as funções são integráveis (veja os Exercícios 69–70). O teorema seguinte mostra que a maioria das funções que ocorrem comumente são de fato integráveis. Esse teorema é demonstrado em cursos mais avançados.

3 Teorema Se f for contínua em $[a, b]$, ou f tiver apenas um número finito de descontinuidades de saltos, então f é integrável em $[a, b]$; ou seja, a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Se f for integrável em $[a, b]$, então o limite na Definição 2 existe e dá o mesmo valor, não importa como escolhamos os pontos amostrais x_i^*. Para simplificarmos o cálculo da integral, com frequência tomamos como pontos amostrais as extremidades direitas. Então, $x_i^* = x_i$ e a definição de integral se simplifica como a seguir.

4 Teorema Se f for integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

onde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e $x_i = a + i\,\Delta x$

EXEMPLO 1 Expresse

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x$$

como uma integral no intervalo $[0, \pi]$.

SOLUÇÃO Comparando o limite dado com o limite do Teorema 4, vemos que eles são idênticos se escolhermos $f(x) = x^3 + x \operatorname{sen} x$. São dados $a = 0$ e $b = \pi$. Temos, portanto, pelo Teorema 4,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x = \int_0^\pi (x^3 + x \operatorname{sen} x)\,dx.$$

Mais tarde, quando aplicarmos a integral definida a situações físicas, será importante reconhecer os limites de somas como integrais, como fizemos no Exemplo 1. Quando Leibniz escolheu a notação para a integral, ele optou por ingredientes que lembrassem o processo de limite. Em geral, quando escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

substituímos $\lim \Sigma$ por $\int$, x_i^* por x e Δx por dx.

Cálculo de Integrais

Quando usamos a definição para calcular uma integral definida, precisamos saber como trabalhar com somas. As três equações a seguir dão fórmulas para as somas de potências de inteiros positivos. A Equação 5 talvez lhe seja familiar de um curso de álgebra. As Equações 6 e 7 foram discutidas na Seção 5.1 e estão demonstradas no Apêndice E.

5 $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

6 $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7 $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

As fórmulas remanescentes são regras simples para trabalhar com a notação de somatória:

8 $$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

9 $$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

As Fórmulas 8–11 são demonstradas escrevendo cada lado na forma expandida. O lado esquerdo da Equação 9 é

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n.$$

O lado direito é

$$c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Eles são iguais pela propriedade distributiva. As outras fórmulas estão discutidas no Apêndice E.

$$\boxed{10} \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\boxed{11} \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

EXEMPLO 2

(a) Calcule a soma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$ tomando como pontos amostrais as extremidades direitas e $a = 0$, $b = 3$ e $n = 6$.

(b) Calcule $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUÇÃO

(a) Com $n = 6$, o comprimento dos intervalos é

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

e as extremidades direitas são $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1{,}0$, $x_3 = 1{,}5$, $x_4 = 2{,}0$, $x_5 = 2{,}5$ e $x_6 = 3{,}0$. Logo, a soma de Riemann é

$$\begin{aligned} R_6 &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x \\ &= f(0{,}5)\,\Delta x + f(1{,}0)\,\Delta x + f(1{,}5)\,\Delta x + f(2{,}0)\,\Delta x + f(2{,}5)\,\Delta x + f(3{,}0)\,\Delta x \\ &= \tfrac{1}{2}(-2{,}875 - 5 - 5{,}625 - 4 + 0{,}625 + 9) \\ &= -3{,}9375 \end{aligned}$$

Observe que f não é uma função positiva e, portanto, a soma de Riemann não representa uma soma de áreas de retângulos. Mas ela representa a soma das áreas dos retângulos azuis (acima do eixo x) menos a soma das áreas dos retângulos amarelos (abaixo do eixo x) na Figura 5.

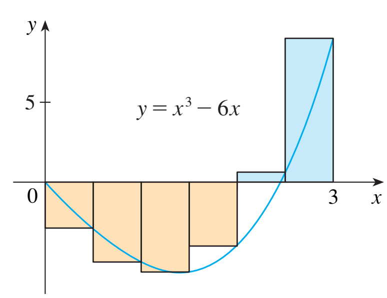


FIGURA 5

(b) Com n subintervalos, temos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

Assim, $x_0 = 0$, $x_1 = 3/n$, $x_2 = 6/n$, $x_3 = 9/n$ e, em geral, $x_i = 3i/n$. Uma vez que estamos utilizando as extremidades direitas, podemos usar a Equação 3:

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right] \qquad \text{(Equação 9 com } c = 3/n\text{)}$$

Na soma, n é uma constante (ao contrário de i), de modo que podemos mover $3/n$ para a frente do sinal de Σ.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \right] \qquad \text{(Equações 11 e 9)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{81}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \frac{54}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \right\} \qquad \text{(Equações 7 e 5)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6{,}75$$

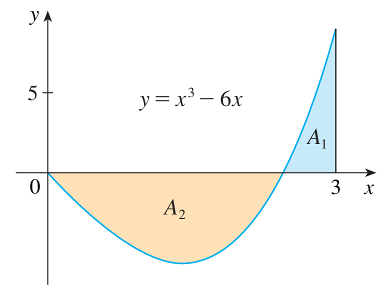


FIGURA 6
$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = A_1 - A_2 = -6{,}75$

Essa integral não pode ser interpretada como uma área, pois f assume valores positivos e negativos. Porém, ela pode ser interpretada como a diferença de áreas $A_1 - A_2$, em que A_1 e A_2 estão na Figura 6.

A Figura 7 ilustra o cálculo mostrando os termos positivos e negativos na soma de Riemann direita R_n para $n = 40$. Os valores na tabela mostram as somas de Riemann tendendo ao valor exato da integral, $-6{,}75$, quando $n \to \infty$.

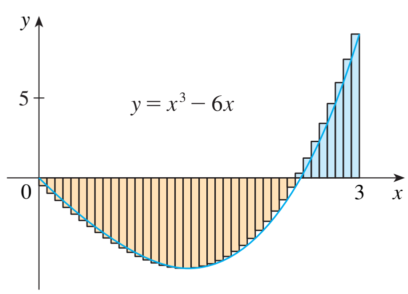


FIGURA 7
$R_{40} \approx -6{,}3998$

n	R_n
40	$-6{,}3998$
100	$-6{,}6130$
500	$-6{,}7229$
1000	$-6{,}7365$
5000	$-6{,}7473$

Um método muito mais simples para o cálculo da integral do Exemplo 2 será dado na Seção 5.4.

EXEMPLO 3
(a) Escreva uma expressão para $\int_1^3 e^x\,dx$ como um limite de somas.
(b) Use um SCA para calcular a expressão.

Como $f(x) = e^x$ é positiva, a integral no Exemplo 3 representa a área mostrada na Figura 8.

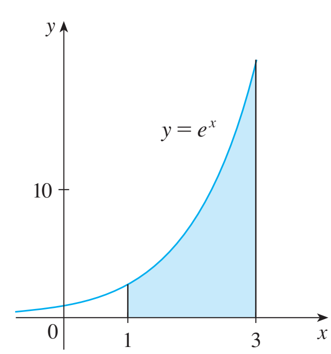


FIGURA 8

SOLUÇÃO
(a) Temos aqui $f(x) = e^x$, $a = 1$, $b = 3$ e

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

Logo, $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + 2/n$, $x_2 = 1 + 4/n$, $x_3 = 1 + 6/n$ e

$$x_i = 1 + \frac{2i}{n}$$

Do Teorema 4, obtemos

$$\int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{2i}{n}\right) \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n}$$

(b) Se utilizarmos um SCA para calcular a soma e simplificar, obteremos

Um SCA é capaz de encontrar uma expressão explícita para essa soma, pois ela é uma série geométrica. O limite pode ser encontrado usando a Regra de l'Hôspital

$$\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n} = \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1}$$

Agora usamos o SCA para calcular o limite:

$$\int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1} = e^3 - e$$

Na próxima seção, aprenderemos um método muito mais fácil para calcular integrais.

EXEMPLO 4 Calcule as integrais a seguir interpretando cada uma em termos de áreas.

(a) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$ (b) $\int_0^3 (x - 1)\,dx$

SOLUÇÃO

(a) Uma vez que $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \geqslant 0$, podemos interpretar essa integral como a área sob a curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ de 0 até 1. Mas, uma vez que $y^2 = 1 - x^2$, temos $x^2 + y^2 = 1$, o que mostra que o gráfico de f é o quarto de círculo de raio 1 na Figura 9. Portanto

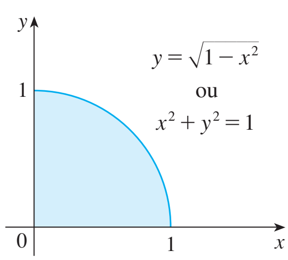


FIGURA 9

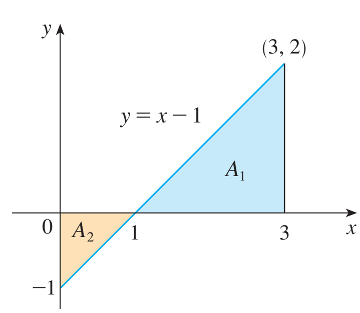
$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}$$

(Na Seção 7.3 seremos capazes de *demonstrar* que a área de um círculo de raio r é πr^2.)

(b) O gráfico de $y = x - 1$ é uma linha com inclinação 1 mostrada na Figura 10. Calculamos a integral como a diferença entre as áreas de dois triângulos:

$$\int_0^3 (x - 1)\,dx = A_1 - A_2 = \tfrac{1}{2}(2 \cdot 2) - \tfrac{1}{2}(1 \cdot 1) = 1{,}5.$$

FIGURA 10



A Regra do Ponto Médio

Frequentemente escolhemos o ponto amostral x_i^* como a extremidade direita do i-ésimo intervalo, pois isso é conveniente para o cálculo do limite. Porém, se o propósito for encontrar uma *aproximação* para uma integral, é geralmente melhor escolher x_i^* como o ponto médio do intervalo, o qual denotamos por $\overline{x}_i$. Qualquer soma de Riemann é uma aproximação para uma integral, mas se usarmos os pontos médios obteremos a seguinte aproximação.

Regra do Ponto Médio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

onde $$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

e $$\bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{ponto médio de } [x_{i-1}, x_i]$$

TEC *Module 5.2/7.7* mostra como as estimativas da Regra do Ponto Médio melhoram quando n aumenta.

EXEMPLO 5 Use a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para aproximar $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

SOLUÇÃO As extremidades dos cinco subintervalos são 1, 1,2, 1,4, 1,6, 1,8 e 2,0, portanto, os pontos médios são 1,1, 1,3, 1,5, 1,7 e 1,9. O comprimento dos subintervalos é $\Delta x = (2-1)/5 = \frac{1}{5}$, de modo que a Regra do Ponto Médio fornece

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\,[f(1{,}1) + f(1{,}3) + f(1{,}5) + f(1{,}7) + f(1{,}9)]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{1{,}7} + \frac{1}{1{,}9}\right)$$

$$\approx 0{,}691908.$$

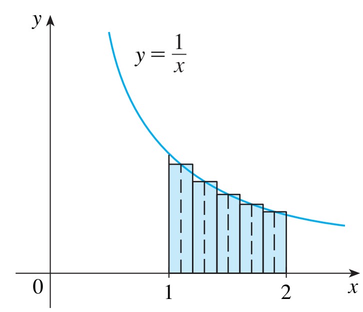


FIGURA 11

Uma vez que $f(x) = 1/x > 0$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$, a integral representa uma área, e a aproximação dada pela Regra do Ponto Médio é a soma das áreas dos retângulos mostrados na Figura 11.

Por ora, não sabemos quão precisa é a aproximação do Exemplo 5, mas na Seção 7.7 vamos aprender um método para estimar o erro envolvido no uso da Regra do Ponto Médio. Nesta parte, discutiremos outros métodos de aproximação de integrais definidas.

Se aplicarmos a Regra do Ponto Médio para a integral no Exemplo 2, teremos a imagem na Figura 12. A aproximação $M_{40} \approx -6{,}7563$ é bem mais próxima ao valor real de $-6{,}75$ que a aproximação da extremidade direita $R_{40} \approx -6{,}3998$, mostrada na Figura 7.

TEC Em *Visual 5.2*, você pode comparar aproximações de extremidade esquerda, extremidade direita e ponto médio para a integral no Exemplo 2 para diferentes valores de n.

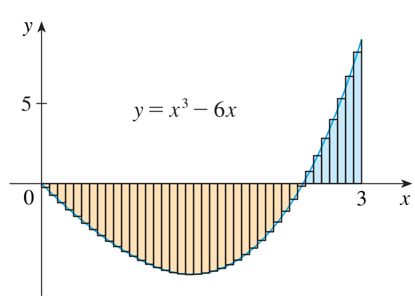


FIGURA 12
$M_{40} \approx -6{,}7563$

Propriedades da Integral Definida

Quando definimos a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, implicitamente assumimos que $a < b$. Mas a definição como o limite de somas de Riemann faz sentido mesmo que $a > b$. Observe que se invertermos a e b, então Δx mudará de $(b-a)/n$ para $(a-b)/n$. Portanto,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Se $a = b$, então $\Delta x = 0$, de modo que

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Vamos desenvolver agora algumas propriedades básicas das integrais que nos ajudarão a calcular as integrais de forma mais simples. Vamos supor que f e g sejam funções contínuas.

Propriedades da Integral

1. $\int_a^b c\,dx = c(b - a)$, onde c é qualquer constante

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, onde c é qualquer constante

4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

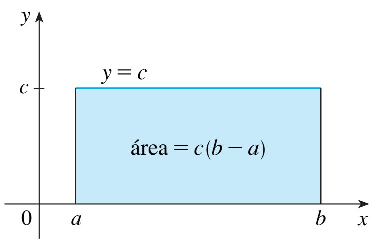


FIGURA 13
$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

A Propriedade 1 diz que a integral de uma função constante, $f(x) = c$, é a constante vezes o comprimento do intervalo. Se $c > 0$ e $a < b$, isto é esperado, pois $c(b - a)$ é a área do retângulo sombreado na Figura 13.

A Propriedade 2 diz que a integral de uma soma é a soma das integrais. Para as funções positivas, isso diz que a área sob $f + g$ é a área sob f mais a área sob g. A Figura 14 nos ajuda a entender por que isto é verdadeiro: em vista de como funciona a adição gráfica, os segmentos de reta vertical correspondentes têm a mesma altura.

Em geral, a Propriedade 2 decorre do Teorema 4 e do fato de que o limite de uma soma é a soma dos limites:

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) + g(x_i)]\,\Delta x\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x\\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

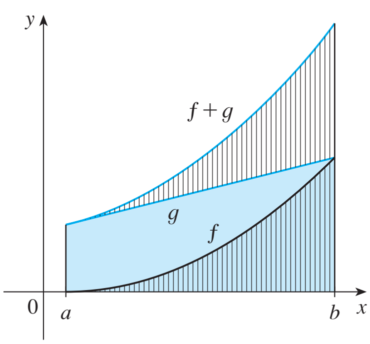


FIGURA 14
$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

A Propriedade 3 parece intuitivamente razoável porque sabemos que, multiplicando uma função por um número positivo c, o gráfico expande ou comprime verticalmente por um fator de c. Logo, expande ou comprime cada retângulo aproximante por um fator c e, portanto, tem efeito de multiplicar a área por c.

A Propriedade 3 pode ser demonstrada de forma análoga e diz que a integral de uma constante vezes uma função é a constante vezes a integral da função. Em outras palavras, uma constante (mas *somente* uma constante) pode ser movida para a frente do sinal de integração. A Propriedade 4 é demonstrada escrevendo $f - g = f + (-g)$ e usando as Propriedades 2 e 3 com $c = -1$.

EXEMPLO 6 Use as propriedades das integrais para calcular $\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx$.

SOLUÇÃO Usando as Propriedades 2 e 3 das integrais, temos

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx$$

Sabemos da Propriedade 1 que

$$\int_0^1 4\,dx = 4(1 - 0) = 4$$

e encontramos no Exemplo 2 da Seção 5.1 que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Logo,

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx$$

$$= 4 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 5.$$

A propriedade a seguir nos diz como combinar integrais da mesma função em intervalos adjacentes:

5. $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

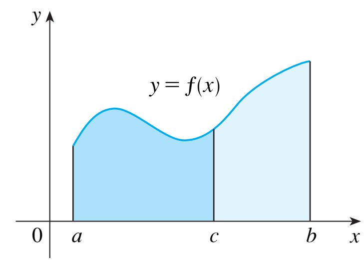


FIGURA 15

Isso não é fácil de ser demonstrado em geral, mas para o caso onde $f(x) \geqslant 0$ e $a < c < b$, a Propriedade 5 pode ser vista a partir da interpretação geométrica na Figura 15: a área sob $y = f(x)$ de a até c mais a área de c até b é igual à área total de a até b.

EXEMPLO 7 Se é sabido que $\int_0^{10} f(x)\,dx = 17$ e $\int_0^8 f(x)\,dx = 12$, encontre $\int_8^{10} f(x)\,dx$

SOLUÇÃO Pela Propriedade 5 temos

$$\int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx$$

logo,
$$\int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^8 f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

Observe que as Propriedades 1–5 são verdadeiras se $a < b$, $a = b$ ou $a > b$. As propriedades a seguir, nas quais comparamos os tamanhos de funções e os de integrais, são verdadeiras somente se $a \leqslant b$.

Propriedades Comparativas da Integral

6. Se $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

7. Se $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Se $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$

Se $f(x) \geqslant 0$, então $\int_a^b f(x)\,dx$ representa a área sob o gráfico de f, logo, a interpretação geométrica da Propriedade 6 é simplesmente que as áreas são positivas. (Isso também segue diretamente da definição porque todas as quantidades envolvidas são positivas.) A Propriedade 7 diz que uma função maior tem uma integral maior. Ela segue das Propriedades 6 e 4, pois $f - g \geqslant 0$.

A Propriedade 8 está ilustrada na Figura 16 para o caso onde $f(x) \geqslant 0$. Se f for contínua, poderemos tomar m e M como o máximo e o mínimo absolutos de f no intervalo $[a, b]$. Nesse caso, a Propriedade 8 diz que a área sob o gráfico de f é maior que a área do retângulo com altura m e menor que a área do retângulo com altura M.

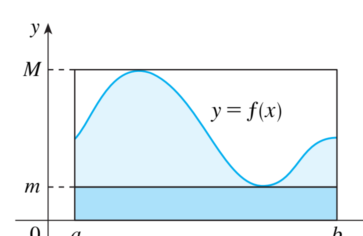


FIGURA 16

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 8 Uma vez que $m \leqslant f(x) \leqslant M$, a Propriedade 7 nos dá

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

Usando a Propriedade 1 para calcular a integral do lado esquerdo e do lado direito, obtemos

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$

A Propriedade 8 é útil quando tudo o que queremos é uma estimativa grosseira do tamanho de uma integral sem nos preocupar com o uso da Regra do Ponto Médio.

EXEMPLO 8 Use a Propriedade 8 para estimar o valor de $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

SOLUÇÃO Uma vez que $f(x) = e^{-x^2}$ é uma função decrescente no intervalo $[0, 1]$, seu máximo absoluto é $M = f(0) = 1$ e seu mínimo absoluto é $m = f(1) = e^{-1}$. Assim, utilizando a Propriedade 8,

$$e^{-1}(1 - 0) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1(1 - 0)$$

ou

$$e^{-1} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

Como $e^{-1} \approx 0{,}3679$, podemos escrever

$$0{,}367 \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

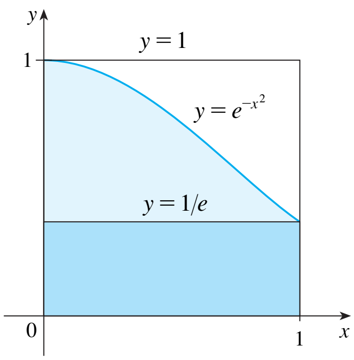


FIGURA 17

O resultado do Exemplo 8 está ilustrado na Figura 17. A integral é maior que a área do retângulo inferior e menor que a área do quadrado.

5.2 Exercícios

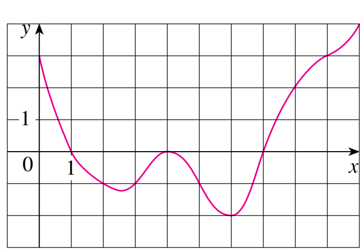
1. Calcule a soma de Riemann para $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$, $2 \leqslant x \leqslant 14$, com seis subintervalos, tomando os pontos amostrais como as extremidades esquerdas. Explique, com a ajuda de um diagrama, o que representa a soma de Riemann.

2. Se $f(x) = x^2 - 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, calcule a soma de Riemann com $n = 6$, tomando como pontos amostrais as extremidades direitas. O que representa a soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

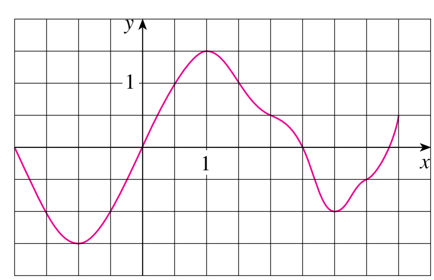
3. Se $f(x) = e^x - 2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, calcule a soma de Riemann com $n = 4$ correta até a sexta casa decimal, tomando como pontos amostrais os pontos médios. O que representa a soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

4. (a) Calcule a soma de Riemann para $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$ e com seis termos, tomando os pontos amostrais como as extremidades direitas. (Dê a resposta correta até a sexta casa decimal). Explique o que a soma de Riemann representa com a ajuda de um esboço.
   (b) Repita a parte (a) tomando como pontos amostrais os pontos médios.

5. É dado o gráfico de uma função f. Estime $\int_0^{10} f(x)\,dx$ usando cinco subintervalos com (a) extremidades direitas, (b) extremidades esquerdas e (c) pontos médios.



6. O gráfico de g é apresentado. Estime $\int_{-2}^{4} g(x)\,dx$ com seis subintervalos usando (a) extremidades direitas, (b) extremidades esquerdas e (c) pontos médios.



7. Uma tabela de valores de uma função crescente f é dada. Use a tabela para encontrar uma estimativa inferior e superior para $\int_0^{25} f(x)\,dx$.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	-42	-37	-25	-6	15	36

8. A tabela fornece os valores de uma função obtidos experimentalmente. Use-os para estimar $\int_3^9 f(x)\,dx$ utilizando três subintervalos iguais com (a) extremidades direitas, (b) extremidades esquerdas e (c) pontos médios. Se for sabido que a função é decrescente, você pode dizer se suas estimativas são menores ou maiores que o valor exato da integral?

x	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	$-3{,}4$	$-2{,}1$	$-0{,}6$	0,3	0,9	1,4	1,8

9–12 Use a Regra do Ponto Médio com o valor dado n para aproximar a integral. Arredonde cada resposta para quatro casas decimais.

9. $\int_0^8 \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx, \quad n = 4$

10. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx, \quad n = 4$

11. $\int_0^2 \frac{x}{x+1}\,dx, \quad n = 5$

12. $\int_1^5 x^2 e^{-x}\,dx, \quad n = 4$

SCA **13.** Se você tiver um SCA que possa calcular aproximações usando pontos médios e esboçar os retângulos correspondentes (use os comandos `RiemannSum` ou `middlesum` e `middlebox` no Maple), verifique a resposta do Exercício 11 e ilustre com um gráfico. Repita então com $n = 10$ e $n = 20$.

14. Com uma calculadora programável ou computador (veja as instruções para o Exercício 9 da Seção 5.1), calcule as somas de Riemann esquerda e direita para a função $f(x) = x/(x+1)$ no intervalo $[0, 2]$ com $n = 100$. Explique por que essas estimativas mostram que

$$0{,}8946 < \int_0^2 \frac{x}{x+1}\,dx < 0{,}9081.$$

15. Use uma calculadora ou um computador para fazer uma tabela dos valores das somas R_n de Riemann à direita para a integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ com $n = 5$, 10, 50 e 100. De qual valor esses números parecem estar se aproximando?

16. Use uma calculadora ou um computador para fazer uma tabela dos valores das somas L_n e R_n de Riemann à esquerda e à direita para a integral $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$ com $n = 5$, 10, 50 e 100. Entre quais dois números o valor da integral deve ficar? Você pode fazer uma afirmação análoga para a integral $\int_{-1}^2 e^{-x^2}\,dx$? Explique.

17–20 Expresse o limite como uma integral definida no intervalo dado.

17. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1 + x_i^2)\,\Delta x, \quad [2, 6]$

18. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos x_i}{x_i}\,\Delta x, \quad [\pi, 2\pi]$

19. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [5(x_i^*)^3 - 4x_i^*]\,\Delta x, \quad [2, 7]$

20. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{(x_i^*)^2 + 4}\,\Delta x, \quad [1, 3]$

21–25 Use a forma da definição de integral dada no Teorema 4 para calcular a integral.

21. $\int_{-1}^5 (1 + 3x)\,dx$

22. $\int_1^4 (x^2 + 2x - 5)\,dx$

23. $\int_{-2}^0 (x^2 + x)\,dx$

24. $\int_0^2 (2x - x^3)\,dx$

25. $\int_0^1 (x^3 - 3x^2)\,dx$

26. (a) Encontre uma aproximação para a integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)\,dx$ usando uma soma de Riemann com as extremidades direitas e $n = 8$.

(b) Faça um diagrama como a Figura 3 para ilustrar a aproximação da parte (a).

(c) Use o Teorema 4 para calcular $\int_0^4 (x^2 - 3x)\,dx$.

(d) Interprete a integral da parte (c) como uma diferença de áreas e ilustre com diagramas como o da Figura 4.

27. Demonstre que $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

28. Demonstre que $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$.

29–30 Expresse a integral como um limite de somas. Não calcule o limite.

29. $\int_2^6 \frac{x}{1 + x^5}\,dx$

30. $\int_1^{10} (x - 4\ln x)\,dx$

SCA **31–32** Expresse a integral como um limite de somas. Depois, calcule, usando um sistema de computação algébrica para encontrar a soma e o limite.

31. $\int_0^\pi \operatorname{sen} 5x\,dx$

32. $\int_2^{10} x^6\,dx$

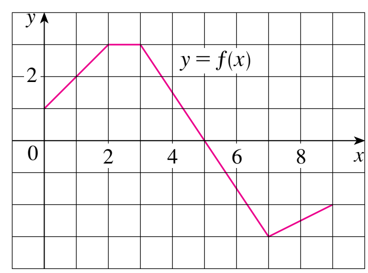
33. É dado o gráfico de f. Calcule cada integral interpretando-a em termos das áreas.

(a) $\int_0^2 f(x)\,dx$

(b) $\int_0^5 f(x)\,dx$

(c) $\int_5^7 f(x)\,dx$

(d) $\int_0^9 f(x)\,dx$

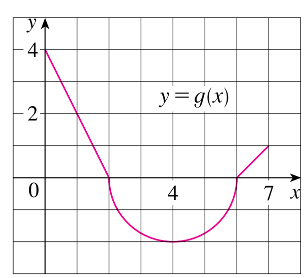


34. O gráfico de g consiste em duas retas e um semicírculo. Use-o para calcular cada integral.

(a) $\int_0^2 g(x)\,dx$

(b) $\int_2^6 g(x)\,dx$

(c) $\int_0^7 g(x)\,dx$



35–40 Calcule a integral, interpretando-a em termos das áreas.

35. $\int_{-1}^2 (1 - x)\,dx$

36. $\int_0^9 \left(\tfrac{1}{3}x - 2\right)dx$

37. $\int_{-3}^0 \left(1 + \sqrt{9 - x^2}\right)dx$

38. $\int_{-5}^5 \left(x - \sqrt{25 - x^2}\right)dx$

39. $\int_{-1}^2 |x|\,dx$

40. $\int_0^{10} |x - 5|\,dx$

41. Calcule $\int_\pi^\pi \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx$.

42. Dado que $\int_0^1 3x\sqrt{x^2 + 4}\,dx = 5\sqrt{5} - 8$, o que é $\int_1^0 3u\sqrt{u^2 + 4}\,du$?

43. No Exemplo 2 da Seção 5.1 mostramos que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Use esse fato e as propriedades das integrais para calcular $\int_0^1 (5 - 6x^2)\,dx$.

44. Use as propriedades das integrais e o resultado do Exemplo 3 para calcular $\int_1^3 (2e^x - 1)\, dx$.

45. Use o resultado do Exemplo 3 para calcular $\int_1^3 e^{x+2}\, dx$.

46. Use o resultado do Exercício 27 e o fato de que $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 1$ (do Exercício 29 na Seção 5.1), com as propriedades das integrais, para calcular $\int_0^{\pi/2} (2 \cos x - 5x)\, dx$.

47. Escreva como uma integral única na forma $\int_a^b f(x)\, dx$:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx + \int_{2}^{5} f(x)\, dx - \int_{-2}^{-1} f(x)\, dx$$

48. Se $\int_1^5 f(x)\, dx = 12$ e $\int_4^5 f(x)\, dx = 3{,}6$, encontre $\int_1^4 f(x)\, dx$.

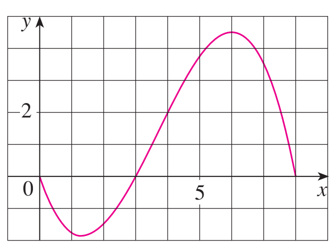
49. Se $\int_0^9 f(x)\, dx = 37$ e $\int_0^9 g(x)\, dx = 16$, encontre $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\, dx$.

50. Encontre $\int_0^5 f(x)\, dx$ se

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{para } x < 3 \\ x & \text{para } x \geqslant 3 \end{cases}$$

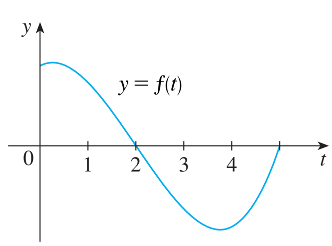
51. Para a função f cujo gráfico é mostrado, liste as seguintes quantidades em ordem crescente, do menor ao maior, e explique seu raciocínio.

(a) $\int_0^8 f(x)\, dx$ (b) $\int_0^3 f(x)\, dx$
(c) $\int_3^8 f(x)\, dx$ (d) $\int_4^8 f(x)\, dx$
(e) $f'(1)$



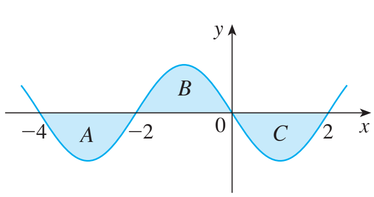
52. Se $F(x) = \int_2^x f(t)\, dt$, em que f é a função cujo gráfico é dado, qual dos valores seguintes é o maior?

(a) $F(0)$ (b) $F(1)$
(c) $F(2)$ (d) $F(3)$
(e) $F(4)$



53. Cada uma das regiões A, B e C delimitadas pelo gráfico de f e o eixo x tem área 3. Encontre o valor de

$$\int_{-4}^{2} [f(x) + 2x + 5]\, dx$$



54. Suponha que f tenha um valor mínimo absoluto m e um valor máximo absoluto M. Entre quais dois valores $\int_0^2 f(x)\, dx$ deve ficar? Que propriedade das integrais lhe permitem tirar esta conclusão?

55–58 Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade sem calcular as integrais.

55. $\displaystyle\int_0^4 (x^2 - 4x + 4)\, dx \geqslant 0$

56. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x}\, dx$

57. $\displaystyle 2 \leqslant \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leqslant 2\sqrt{2}$

58. $\displaystyle \frac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leqslant \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\, dx \leqslant \frac{\sqrt{3}\,\pi}{24}$

59–64 Use a Propriedade 8 para estimar o valor da integral.

59. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$

60. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$

61. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg} x\, dx$

62. $\displaystyle\int_0^2 (x^3 - 3x + 3)\, dx$

63. $\displaystyle\int_0^2 xe^{-x}\, dx$

64. $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} (x - 2 \operatorname{sen} x)\, dx$

65–66 Use as propriedades das integrais, junto com os Exercícios 27 e 28, para demonstrar a desigualdade.

65. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x^4 + 1}\, dx \geqslant \frac{26}{3}$

66. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx \leqslant \frac{\pi^2}{8}$

67. Demonstre a Propriedade 3 das integrais.

68. (a) Se f for contínua em $[a, b]$, mostre que

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$$

[*Dica*: $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.]

(b) Use o resultado da parte (a) para mostrar que

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} 2x\, dx \right| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx$$

69. Seja $f(x) = 0$ se x for um número racional qualquer e $f(x) = 1$ se x for um número irracional qualquer. Mostre que f não é integrável em $[0, 1]$.

70. Sejam $f(0) = 0$ e $f(x) = 1/x$ se $0 < x \leqslant 1$. Mostre que f não é integrável em $[0, 1]$. [*Dica*: mostre que o primeiro termo na soma de Riemann, $f(x_i^*)\, \Delta x$, pode ser tornado arbitrariamente grande.]

71–72 Expresse o limite como uma integral definida.

71. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^4}{n^5}$ [*Dica*: Considere $f(x) = x^4$.]

72. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + (i/n)^2}$

73 Encontre $\int_1^2 x^{-2}\, dx$. *Dica:* Escolha x_i^* como a média geométrica de x_{i-1} e x_i (isto é, $x_i^* = \sqrt{x_{i-1}x_i}$) e use a identidade

$$\frac{1}{m(m + 1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m + 1}$$

PROJETO DE DESCOBERTA FUNÇÕES ÁREA

1. (a) Trace a reta $y = 2t + 1$ e use a geometria para achar a área sob essa reta, acima do eixo t e entre as linhas verticais $t = 1$ e $t = 3$.
(b) Se $x > 1$, seja $A(x)$ a área da região que está sob a reta $y = 2t + 1$ entre $t = 1$ e $t = x$. Esboce essa região e use a geometria para achar uma expressão para $A(x)$.
(c) Derive a função área $A(x)$. O que você observa?

2. (a) Se $x \geqslant -1$, seja

$$A(x) = \int_{-1}^{x} (1 + t^2)\, dt$$

$A(x)$ representa a área de uma região. Esboce essa região.
(b) Use o resultado do Exercício 28 da Seção 5.2 para encontrar uma expressão para $A(x)$

(c) Encontre $A'(x)$. O que você observa?
(d) Se $x \geqslant -1$ e h é um número positivo pequeno, então $A(x + h) - A(x)$ representa a área de uma região. Descreva e esboce a região.
(e) Trace um retângulo que aproxime a região da parte (d). Comparando as áreas dessas duas regiões, mostre que

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} \approx 1 + x^2$$

(f) Use a parte (e) para dar uma explicação intuitiva para o resultado da parte (c).

3. (a) Trace o gráfico da função $f(x) = \cos(x^2)$ na janela retangular $[0, 2]$ por $[-1{,}25; 1{,}25]$.
(b) Se definirmos uma nova função g por

$$g(x) = \int_{0}^{x} \cos(t^2)\, dt$$

então $g(x)$ é a área sob o gráfico de f de 0 até x [até $f(x)$ torna-se negativa, onde $g(x)$ torna-se uma diferença de áreas]. Use a parte (a) para determinar o valor de x no qual $g(x)$ começa a decrescer. [Diferente da integral do Problema 2, é impossível calcular a integral que define g para obter uma expressão explícita para $g(x)$.]
(c) Use o comando de integração em sua calculadora ou computador para estimar $g(0{,}2)$, $g(0{,}4)$, $g(0{,}6)$, . . . , $g(1{,}8)$, $g(2)$. A seguir, use esses valores para esboçar um gráfico de g.
(d) Use seu gráfico de g da parte (c) para esboçar o gráfico de g' usando a interpretação de $g'(x)$ como a inclinação de uma reta tangente. Como se comparam os gráficos de g' e de f?

4. Suponha que f seja uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e definimos uma nova função g pela equação

$$g(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt$$

Com base nos seus resultados dos Problemas 1–3, conjecture uma expressão para $g'(x)$.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

5.3 O Teorema Fundamental do Cálculo

O nome Teorema Fundamental do Cálculo é apropriado, pois ele estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral. O cálculo diferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o problema da área. O mentor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descobriu que esses dois problemas estão, na verdade, estreitamente relacionados. Ele percebeu que a derivação e a integração são processos inversos. O Teorema Fundamental do Cálculo dá a relação inversa precisa entre a derivada e a integral. Foram Newton e Leibniz que exploraram essa relação e usaram-na para desenvolver o cálculo como um método matemático sistemático. Em particular, eles viram que o Teorema Fundamental os capacitava a calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas, como fizemos nas Seções 5.1 e 5.2.

A primeira parte do Teorema Fundamental lida com funções definidas por uma equação da forma

$$\boxed{1} \qquad g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

onde f é uma função contínua de $[a, b]$ e x varia entre a e b. Observe que g depende somente de x, que aparece como o limite superior variável da integral. Se x for um número fixado, então a integral $\int_a^x f(t)\, dt$ é um número definido. Se variamos x, o número $\int_a^x f(t)\, dt$ também varia e define uma função de x denotada por $g(x)$.

Se f for uma função positiva, então $g(x)$ pode ser interpretada como a área sob o gráfico de f de a até x, onde x pode variar de a até b. (Imagine g como a função "área até aqui"; veja a Figura 1.)

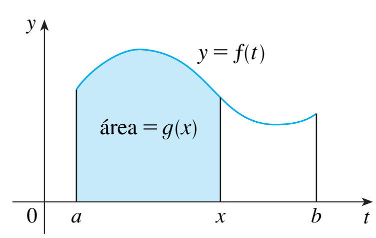


FIGURA 1

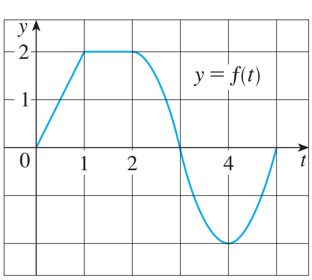


FIGURA 2

EXEMPLO 1 Se f é a função cujo gráfico é mostrado na Figura 2 e $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, encontre os valores de $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ e $g(5)$. A seguir, faça um esboço do gráfico de g.

SOLUÇÃO Primeiro, observe que $g(0) = \int_0^0 f(t)\, dt = 0$. A partir da Figura 3, sabemos que $g(1)$ é a área de um triângulo:

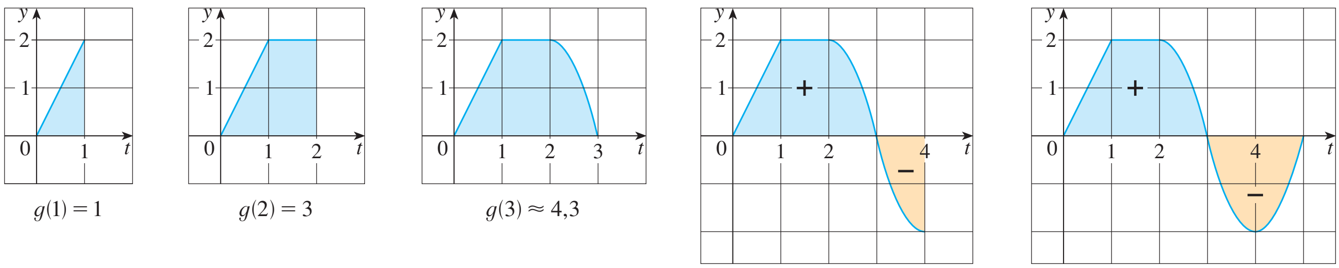
$$g(1) = \int_0^1 f(t)\, dt = \tfrac{1}{2}(1 \cdot 2) = 1$$

Para achar $g(2)$, somamos $g(1)$ à área de um retângulo:

$$g(2) = \int_0^2 f(t)\, dt = \int_0^1 f(t)\, dt + \int_1^2 f(t)\, dt = 1 + (1 \cdot 2) = 3$$

Estimamos que a área abaixo da curva definida por f no intervalo de 2 a 3 é aproximadamente 1,3, assim

$$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)\, dt \approx 3 + 1{,}3 = 4{,}3$$



$g(1) = 1$ $\quad g(2) = 3$ $\quad g(3) \approx 4{,}3$ $\quad g(4) \approx 3$ $\quad g(5) \approx 1{,}7$

FIGURA 3

Para $t > 3$, $f(t)$ é negativa e, dessa forma, começamos a subtrair as áreas:

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)\,dt \approx 4{,}3 + (-1{,}3) = 3{,}0$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)\,dt \approx 3 + (-1{,}3) = 1{,}7$$

Usamos esses valores para fazer o esboço do gráfico de g apresentado na Figura 4. Observe que, pelo fato de $f(t)$ ser positiva para $t < 3$, continuamos adicionando área para $t < 3$ e assim g é crescente até $x = 3$, onde atinge o seu valor máximo. Para $x > 3$, g decresce porque $f(t)$ é negativa.

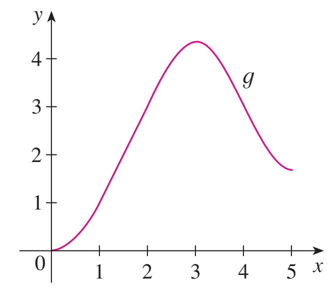


FIGURA 4

$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Se tomarmos $f(t) = t$ e $a = 0$, então, usando o Exercício 27 da Seção 5.2, temos

$$g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

Observe que $g'(x) = x$, isto é, $g' = f$. Em outras palavras, se g for definida como a integral de f pela Equação 1, então g é uma primitiva de f, pelo menos nesse caso. E se esboçarmos a derivada da função g mostrada na Figura 4 pelas inclinações estimadas das tangentes, teremos um gráfico semelhante ao de f na Figura 2. Portanto, suspeitamos que $g' = f$ também, no Exemplo 1.

Para ver por que isso pode ser verdadeiro em geral, consideramos qualquer função contínua f com $f(x) \geqslant 0$. Então, $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pode ser interpretada como a área sob o gráfico de f de a até x, como na Figura 1.

A fim de calcular $g'(x)$ a partir da definição de derivada, primeiro observamos que, para $h > 0$, $g(x+h) - g(x)$ é obtida subtraindo áreas, de forma que reste a área sob o gráfico de f de x até $x + h$ (a área em destaque na Figura 5). Para h pequeno, pode-se ver pela figura que essa área é aproximadamente igual à área do retângulo com altura $f(x)$ e largura h:

$$g(x+h) - g(x) \approx hf(x)$$

logo,

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$

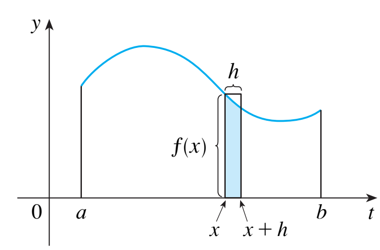


FIGURA 5

Intuitivamente, portanto, esperamos que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

O fato de isso ser verdadeiro, mesmo quando f não é necessariamente positiva, é a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo.

O Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1 Se f for contínua em $[a, b]$, então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Abreviamos o nome deste teorema por TFC1. Em palavras, ele afirma que a derivada de uma integral definida com relação a seu limite superior é seu integrando calculado no limite superior.

DEMONSTRAÇÃO Se x e $x + h$ estão em (a, b), então

$$g(x + h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{(pela Propriedade 5)}$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

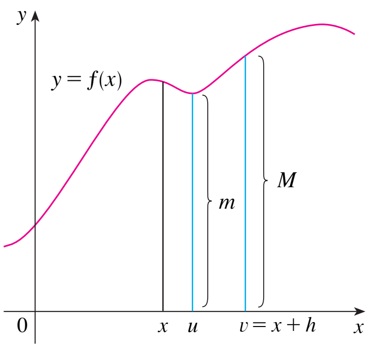


FIGURA 6

logo, para $h \neq 0$,

2 $$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Por ora, vamos assumir que $h > 0$. Uma vez que f é contínua em $[x, x + h]$, o Teorema dos Valores Extremos afirma que há números u e v em $[x, x + h]$ tais que $f(u) = m$ e $f(v) = M$, onde m e M são valores mínimo e máximo absolutos de f em $[x, x + h]$. (Veja a Figura 6.)

Pela Propriedade 8 das integrais, temos

$$mh \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant Mh$$

isto é, $$f(u)h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)h$$

Uma vez que $h > 0$, podemos dividir essa desigualdade por h:

$$f(u) \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)$$

Agora, usamos a Equação 2 para substituir a parte do meio dessa desigualdade:

3 $$f(u) \leqslant \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \leqslant f(v)$$

A desigualdade 3 pode ser demonstrada de maneira similar para o caso $h < 0$. (Veja o Exercício 71.)

TEC *Module 5.3* dá evidências visuais para TFC1.

Agora, tomemos $h \to 0$. Então $u \to x$ e $v \to x$, uma vez que u e v estão entre x e $x + h$. Portanto,

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x)$$

porque f é contínua em x. Concluímos, de $\boxed{3}$ e do Teorema do Confronto, que

4 $$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f(x)$$

Se $x = a$ ou b, então a Equação 4 pode ser interpretada como um limite lateral. Então, o Teorema 2.8.4 (modificado para limites laterais) mostra que g é contínua em $[a, b]$.

Usando a notação de Leibniz para as derivadas, podemos escrever o TFC1 como

5 $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

quando f for contínua. Grosseiramente falando, a Equação 5 nos diz que se primeiro integramos f e então derivamos o resultado, retornamos à função original f.

EXEMPLO 2 Encontre a derivada da função $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

SOLUÇÃO Uma vez que $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ é contínua, a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo fornece

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

EXEMPLO 3 Embora uma fórmula da forma $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ possa parecer uma maneira estranha de definir uma função, livros de física, química e estatística estão repletos dessas funções. Por exemplo, a **função de Fresnel**

$$S(x) = \int_0^x \text{sen}(\pi t^2/2)\, dt$$

é assim chamada em homenagem ao físico francês Augustin Fresnel (1788-1827), famoso por seus estudos em óptica. Essa função apareceu pela primeira vez na teoria de difração das ondas de luz de Fresnel, porém mais recentemente foi aplicada no planejamento de autoestradas.

A parte 1 do Teorema Fundamental nos diz como derivar a função de Fresnel:

$$S'(x) = \text{sen}(\pi x^2/2)$$

Isso significa que podemos aplicar todos os métodos do cálculo diferencial para analisar S (veja o Exercício 65).

A Figura 7 mostra os gráficos de $f(x) = \text{sen}(\pi x^2/2)$ e da função de Fresnel $S(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Um computador foi usado para construir um gráfico de S, calculando o valor dessa integral para vários valores de x. De fato, parece que $S(x)$ é a área sob o gráfico de f de 0 até x [até $x \approx 1{,}4$, quando $S(x)$ torna-se a diferença de áreas]. A Figura 8 mostra uma parte maior do gráfico de S.

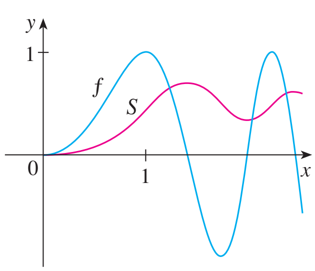


FIGURA 7
$f(x) = \text{sen}(\pi x^2/2)$
$S(x) = \int_0^x \text{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

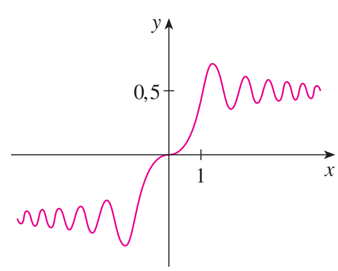


FIGURA 8
A função de Fresnel $S(x) = \int_0^x \text{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

Se começarmos agora com o gráfico de S da Figura 7 e pensarmos sobre como deve ser sua derivada, parece razoável que $S'(x) = f(x)$. [Por exemplo, S é crescente quando $f(x) > 0$ e decrescente quando $f(x) < 0$.] Logo, isso nos dá a confirmação visual da Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo.

EXEMPLO 4 Encontre $\dfrac{d}{dx} \int_1^{x^4} \sec t\, dt$.

SOLUÇÃO Aqui, devemos ser cuidadosos ao usar a Regra da Cadeia com o TFC1. Seja $u = x^4$. Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_1^{x^4} \sec t\, dt &= \frac{d}{dx} \int_1^{u} \sec t\, dt \\ &= \frac{d}{du} \left[\int_1^{u} \sec t\, dt \right] \frac{du}{dx} \qquad \text{(pela Regra da Cadeia)} \end{aligned}$$

$$= \sec u \frac{du}{dx} \qquad \text{(por TFC1)}$$
$$= \sec(x^4) \cdot 4x^3$$

Na Seção 5.2 calculamos as integrais, a partir da definição, como um limite de somas de Riemann e vimos que esse procedimento é às vezes longo e difícil. A segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo, que segue facilmente da primeira parte, nos fornece um método muito mais simples para o cálculo de integrais.

Abreviamos este teorema por TFC2.

Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2 Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Sabemos da Parte 1 que $g'(x) = f(x)$; isto é, g é uma primitiva de f. Se F for qualquer outra primitiva de f em $[a, b]$, então sabemos, do Corolário 4.2.7, que F e g diferem por uma constante:

$$\boxed{6} \qquad F(x) = g(x) + C$$

para $a < x < b$. No entanto, tanto F quanto g são contínuas em $[a, b]$ e, portanto, tomando limites em ambos os lados da Equação 6 (quando $x \to a^+$ e $x \to b^-$), vemos que isso também é válido quando $x = a$ e $x = b$.

Se fizermos $x = a$ na fórmula de $g(x)$, obteremos

$$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

Portanto, usando a Equação 6 com $x = b$ e $x = a$, temos

$$F(b) - F(a) = [g(b) + C] - [g(a) + C]$$
$$= g(b) - g(a) = g(b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

A Parte 2 do Teorema Fundamental afirma que se conhecermos uma primitiva F de f, então poderemos calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ simplesmente subtraindo os valores de F nas extremidades do intervalo $[a, b]$. É surpreendente que $\int_a^b f(x)\,dx$, definida por um procedimento complicado envolvendo todos os valores de $f(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, possa ser encontrada sabendo-se os valores de $F(x)$ em somente dois pontos, a e b.

Embora o Teorema possa ser surpreendente à primeira vista, ele fica plausível se o interpretamos em termos físicos. Se $v(t)$ é a velocidade de um objeto e $s(t)$ é sua posição no tempo t, então $v(t) = s'(t)$, de forma que s é uma primitiva de v. Na Seção 5.1 consideramos um objeto que se move sempre no sentido positivo e fizemos a conjectura de que a área sob a curva da velocidade é igual à distância percorrida. Em símbolos:

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

Isso é exatamente o que o TFC2 diz nesse contexto.

EXEMPLO 5 Calcule a integral $\displaystyle\int_1^3 e^x\,dx$.

SOLUÇÃO A função $f(x) = e^x$ é contínua em toda parte e sabemos que uma primitiva é $F(x) = e^x$, logo, pela Parte 2 do Teorema Fundamental, temos

Compare os cálculos no Exemplo 5 com os muito mais difíceis no Exemplo 3 da Seção 5.2.

$$\int_1^3 e^x\,dx = F(3) - F(1) = e^3 - e$$

Observe que TFC2 diz que podemos usar *qualquer* primitiva F de f. Então, podemos usar a mais simples, isto é, $F(x) = e^x$, no lugar de $e^x + 7$ ou $e^x + C$.

Frequentemente usamos a notação

$$F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Logo, a equação do TFC2 pode ser escrita como

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b \qquad \text{onde} \qquad F' = f$$

Outras notações comuns são $F(x)\big|_a^b$ e $[F(x)]_a^b$.

EXEMPLO 6 Encontre a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1.

SOLUÇÃO Uma primitiva de $f(x) = x^2$ é $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. A área A pedida é encontrada usando-se a Parte 2 do Teorema Fundamental:

$$A = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Ao aplicarmos o Teorema Fundamental, usamos uma primitiva específica F de f. Não é necessário usar a primitiva mais geral.

Se você comparar o cálculo do Exemplo 6 com o do Exemplo 2 na Seção 5.1, verá que o Teorema Fundamental fornece um método *muito* mais curto.

EXEMPLO 7 Calcule $\displaystyle\int_3^6 \frac{dx}{x}$.

SOLUÇÃO A integral dada é uma abreviação para

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx$$

Uma primitiva de $f(x) = 1/x$ é $F(x) = \ln|x|$ e, como $3 \leqslant x \leqslant 6$, podemos escrever $F(x) = \ln x$. Logo,

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_3^6 = \ln 6 - \ln 3$$

$$= \ln\frac{6}{3} = \ln 2$$

EXEMPLO 8 Encontre a área sob a curva cosseno de 0 até b, onde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$.

SOLUÇÃO Uma vez que uma primitiva de $f(x) = \cos x$ é $F(x) = \operatorname{sen} x$, temos

$$A = \int_0^b \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^b = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} b$$

Em particular, tomando $b = \pi/2$, teremos demonstrado que a área sob a curva cosseno de 0 até $\pi/2$ é $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. (Veja a Figura 9.)

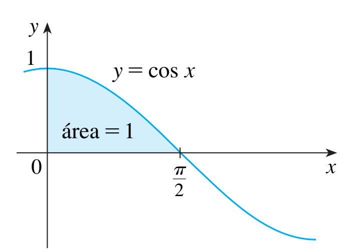


FIGURA 9

Quando o matemático francês Gilles de Roberval encontrou a área sob as curvas seno e cosseno, em 1635, isso era um problema muito desafiador que requeria grande dose de engenhosidade. Se não tivéssemos a vantagem do Teorema Fundamental, teríamos de calcular um limite de somas difícil usando obscuras identidades trigonométricas (ou um SCA, como no Exercício 29 da Seção 5.1). Foi mais difícil para Roberval, porque o aparato dos limites não havia sido inventado em 1635. Mas nas décadas de 1660 e 1670, quando o Teorema Fundamental foi descoberto por Barrow e explorado por Newton e Leibniz, esses problemas ficaram muito fáceis, como você pode ver no Exemplo 8.

EXEMPLO 9 O que está errado no seguinte cálculo?

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\bigg]_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

SOLUÇÃO Para começarmos, observamos que esse cálculo deve estar errado, pois a resposta é negativa, mas $f(x) = 1/x^2 \geqslant 0$ e a Propriedade 6 de integrais afirma que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ quando $f \geqslant 0$. O Teorema Fundamental do Cálculo aplica-se a funções contínuas. Ele não pode ser aplicado aqui, pois $f(x) = 1/x^2$ não é contínua em $[-1, 3]$. De fato, f tem uma descontinuidade infinita em $x = 0$, portanto

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{não existe}$$

Diferenciação e Integração como Processos Inversos

Vamos finalizar esta seção justapondo as duas partes do Teorema Fundamental.

Teorema Fundamental do Cálculo Suponha que f seja contínua em $[a, b]$.

1. Se $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, então $g'(x) = f(x)$.
2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Observamos que a Parte 1 pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

o que quer dizer que se f for integrada e o resultado, derivado, obteremos de volta a função original f. Como $F'(x) = f(x)$, a Parte 2 pode ser reescrita como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

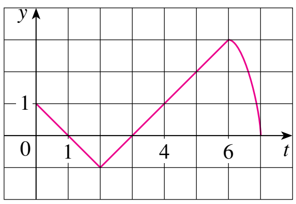
Essa versão afirma que se tomarmos uma função F, a derivarmos e depois integrarmos o resultado, chegaremos de volta à função original F, mas na forma $F(b) - F(a)$. Juntas, as duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo mostram que a derivação e a integração são processos inversos. Cada um desfaz o que o outro fez.

O Teorema Fundamental do Cálculo é inquestionavelmente o mais importante do cálculo e realmente é um dos grandes feitos da mente humana. Antes de sua descoberta, desde os tempos de Eudóxio e Arquimedes até os de Galileu e Fermat, os problemas de encontrar áreas, volumes e comprimentos de curva eram tão difíceis que somente um gênio poderia fazer frente ao desafio. Agora, porém, armados com o método sistemático que Leibniz e Newton configuraram a partir do Teorema Fundamental, veremos nos capítulos a seguir que esses problemas desafiadores são acessíveis para todos nós.

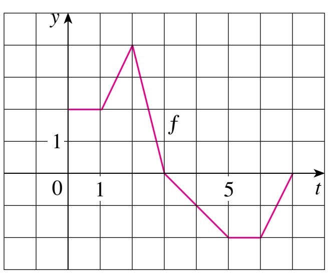
5.3 Exercícios

1. Explique exatamente o significado da afirmação “derivação e integração são processos inversos”.

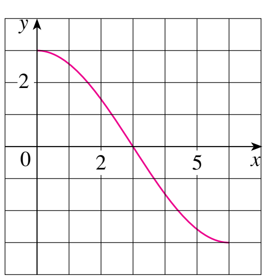
2. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, em que f é a função cujo gráfico é mostrado.
(a) Calcule $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6.
(b) Estime $g(7)$.
(c) Onde g tem um valor máximo? Onde possui um valor mínimo?
(d) Faça um esboço do gráfico de g.



3. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, em que f é a função cujo gráfico é mostrado.
(a) Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ e $g(6)$.
(b) Em que intervalos g está crescendo?
(c) Onde g tem um valor máximo?
(d) Faça um esboço do gráfico de g.



4. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, em que f é a função cujo gráfico é mostrado.
(a) Calcule $g(0)$ e $g(6)$.
(b) Estime $g(x)$ para $x = 1, 2, 3, 4$, e 5.
(c) Em que intervalo g está crescendo?
(d) Onde g tem um valor máximo?
(e) Faça um esboço do gráfico de g.
(f) Use o gráfico da parte (e) para esboçar o gráfico de $g'(x)$. Compare com o gráfico de f.



5–6 Esboce a área representada por $g(x)$. A seguir, encontre $g'(x)$ de duas formas: (a) utilizando a Parte 1 do Teorema Fundamental e (b) calculando a integral usando a Parte 2 e, então, derivando.

5. $g(x) = \int_1^x t^2\,dt$

6. $g(x) = \int_0^x (2 + \operatorname{sen} t)\,dt$

7–18 Use a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar a derivada da função.

7. $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^3 + 1}\,dt$

8. $g(x) = \displaystyle\int_3^x e^{t^2 - t}\,dt$

9. $g(s) = \displaystyle\int_5^s (t - t^2)^8\,dt$

10. $g(r) = \displaystyle\int_0^r \sqrt{x^2 + 4}\,dx$

11. $F(x) = \displaystyle\int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\,dt$

$$\left[\textit{Dica}: \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\,dt = -\int_\pi^x \sqrt{1 + \sec t}\,dt\right]$$

12. $G(x) = \displaystyle\int_x^1 \cos\sqrt{t}\,dt$

13. $h(x) = \displaystyle\int_1^{e^x} \ln t\,dt$

14. $h(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4 + 1}\,dz$

15. $y = \displaystyle\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\,dt$

16. $y = \displaystyle\int_0^{x^4} \cos^2\theta\,d\theta$

17. $y = \displaystyle\int_{1-3x}^1 \frac{u^3}{1 + u^2}\,du$

18. $y = \displaystyle\int_{\operatorname{sen} x}^1 \sqrt{1 + t^2}\,dt$

19–44 Calcule a integral.

19. $\displaystyle\int_{-1}^2 (x^3 - 2x)\,dx$

20. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{100}\,dx$

21. $\displaystyle\int_1^4 (5 - 2t + 3t^2)\,dt$

22. $\displaystyle\int_0^1 \left(1 + \tfrac{1}{2}u^4 - \tfrac{2}{5}u^9\right)du$

23. $\displaystyle\int_0^1 x^{4/5}\,dx$

24. $\displaystyle\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$

25. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{t^4}\,dt$

26. $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \cos\theta\,d\theta$

27. $\displaystyle\int_0^2 x(2 + x^5)\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^1 \left(3 + x\sqrt{x}\right)dx$

29. $\displaystyle\int_1^9 \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^2 (y - 1)(2y + 1)\,dy$

31. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^2 t\,dt$

32. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec\theta\ \operatorname{tg}\theta\,d\theta$

33. $\displaystyle\int_1^2 (1 + 2y)^2\,dy$

34. $\displaystyle\int_0^3 (2\operatorname{sen} x - e^x)\,dx$

35. $\displaystyle\int_1^2 \frac{v^3 + 3v^6}{v^4}\,dv$

36. $\displaystyle\int_1^{18} \sqrt{\frac{3}{z}}\,dz$

37. $\displaystyle\int_0^1 (x^e + e^x)\,dx$

38. $\displaystyle\int_0^1 \cosh t\,dt$

39. $\displaystyle\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{8}{1 + x^2}\,dx$

40. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4 + u^2}{u^3}\,du$

41. $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{u+1}\,du$

42. $\displaystyle\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador   SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

43. $\int_0^{\pi} f(x)\,dx \quad \text{onde } f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } 0 \leqslant x < \pi/2 \\ \cos x & \text{se } \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

44. $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \quad \text{onde } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 4 - x^2 & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$

45–48 O que está errado na equação?

45. $\int_{-2}^{1} x^{-4}\,dx = \left.\frac{x^{-3}}{-3}\right]_{-2}^{1} = -\frac{3}{8}$

46. $\int_{-1}^{2} \frac{4}{x^3}\,dx = -\left.\frac{2}{x^2}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}$

47. $\int_{\pi/3}^{\pi} \sec\theta \operatorname{tg}\theta\,d\theta = \sec\theta\Big]_{\pi/3}^{\pi} = -3$

48. $\int_0^{\pi} \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x\Big]_0^{\pi} = 0$

49–52 Use um gráfico para dar uma estimativa grosseira da área da região que fica abaixo da curva dada. Encontre a seguir a área exata.

49. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 27$

50. $y = x^{-4}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 6$

51. $y = \operatorname{sen} x, \; 0 \leqslant x \leqslant \pi$

52. $y = \sec^2 x, \; 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

53–54 Calcule a integral e interprete-a como uma diferença de áreas. Ilustre com um esboço.

53. $\int_{-1}^{2} x^3\,dx$

54. $\int_{\pi/6}^{2\pi} \cos x\,dx$

55–59 Encontre a derivada da função.

55. $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\,du$

$$\left[\textit{Dica}: \int_{2x}^{3x} f(u)\,du = \int_{2x}^{0} f(u)\,du + \int_0^{3x} f(u)\,du \right]$$

56. $g(x) = \int_{1-2x}^{1+2x} t \operatorname{sen} t\,dt$

57. $F(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2}\,dt$

58. $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2x} \operatorname{arctg} t\,dt$

59. $y = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} \ln(1 + 2v)\,dv$

60. Se $f(x) = \int_0^x (1 - t^2)e^{t^2}\,dt$, em qual intervalo f é crescente?

61. Em qual intervalo a curva

$$y = \int_0^x \frac{t^2}{t^2 + t + 2}\,dt$$

é côncava para baixo?

62. Se $f(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{1 + t^2}\,dt$ e $g(y) = \int_3^y f(x)\,dx$, encontre $g''(\pi/6)$.

63. Se $f(1) = 12$, f' é contínua e $\int_1^4 f'(x)\,dx = 17$, qual é o valor de $f(4)$?

64. A **função erro** dada por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

é muito usada em probabilidade, estatística e engenharia.

(a) Mostre que $\int_a^b e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,[\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a)]$.

(b) Mostre que a função $y = e^{x^2}\operatorname{erf}(x)$ satisfaz a equação diferencial $y' = 2xy + 2/\sqrt{\pi}$.

65. A função de Fresnel S foi definida no Exemplo 3, e seus gráficos estão nas Figuras 7 e 8.

(a) Em que valores de x essa função tem valores máximos locais?

(b) Em que intervalos a função é côncava para cima?

SCA (c) Use um gráfico para resolver a seguinte equação, com precisão de duas casas decimais:

$$\int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt = 0{,}2$$

SCA **66.** A **função seno integral**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

é importante em engenharia elétrica. [O integrando $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ não está definido quando $t = 0$, mas sabemos que seu limite é 1 quando $t \to 0$. Logo, definimos $f(0) = 1$ e isso faz de f uma função contínua em toda parte.]

(a) Trace o gráfico de Si.

(b) Em que valores de x essa função tem valores máximos locais?

(c) Encontre as coordenadas do primeiro ponto de inflexão à direita da origem.

(d) Essa função tem assíntotas horizontais?

(e) Resolva a seguinte equação com precisão de uma casa decimal:

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = 1$$

67–68 Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, em que f é a função cujo gráfico é mostrado.

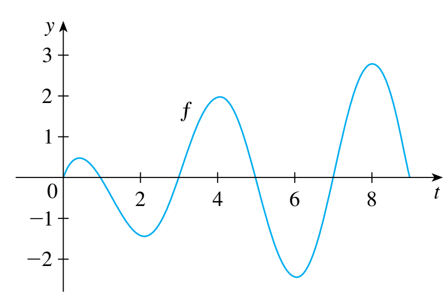
(a) Em que valores de x ocorrem os valores máximos e mínimos locais em g?

(b) Onde g atinge seu valor máximo absoluto?

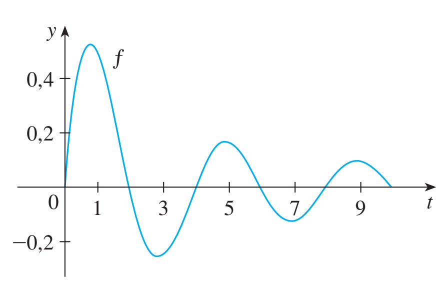
(c) Em que intervalos g é côncavo para baixo?

(d) Esboce o gráfico de g.

67.



68.



69–70 Calcule o limite, reconhecendo primeiro a soma como uma soma de Riemann para uma função definida em [0, 1].

69. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}$

70. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

71. Justifique $\boxed{3}$ para o caso $h < 0$.

72. Se f é contínua e g e h são funções deriváveis, encontre uma fórmula para

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

73. (a) Mostre que $1 \leqslant \sqrt{1 + x^3} \leqslant 1 + x^3$ para $x \geqslant 0$.

(b) Mostre que $1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx \leqslant 1{,}25$.

74. (a) Mostre que $\cos(x^2) \geqslant \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

(b) Deduza que $\int_0^{\pi/6} \cos(x^2)\,dx \geqslant \frac{1}{2}$.

75. Mostre que

$$0 \leqslant \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\,dx \leqslant 0{,}1$$

comparando o integrando a uma função mais simples.

76. Considere

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

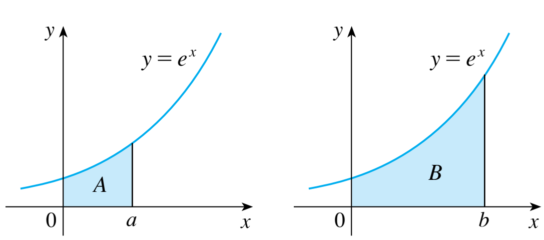
e $$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

(a) Ache uma expressão para $g(x)$ similar àquela para $f(x)$.
(b) Esboce os gráficos de f e g.
(c) Onde f é derivável? Onde g é derivável?

77. Encontre uma função f e um número a tais que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x} \qquad \text{para todo } x > 0$$

78. A área marcada B é três vezes a área marcada A. Expresse b em termos de a.



79. Uma empresa possui uma máquina que se deprecia a uma taxa contínua $f = f(t)$, onde t é o tempo medido em meses desde seu último recondicionamento. Como a cada vez em que a máquina é recondicionada incorre-se em um custo fixo A, a empresa deseja determinar o tempo ideal T (em meses) entre os recondicionamentos.

(a) Explique por que $\int_0^t f(s)\,ds$ representa a perda do valor da máquina sobre o período de tempo t desde o último recondicionamento.

(b) Seja $C = C(t)$ dado por

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)\,ds\right]$$

O que representa C e por que a empresa quer minimizar C?

(c) Mostre que C tem um valor mínimo nos números $t = T$ onde $C(T) = f(T)$.

80. Uma empresa de tecnologia compra um novo sistema de computação cujo valor inicial é V. O sistema depreciará a uma taxa $f = f(t)$ e acumulará custos de manutenção a uma taxa $g = g(t)$, onde t é o tempo medido em meses. A companhia quer determinar o tempo ótimo para substituir o sistema.

(a) Seja

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]\,ds$$

Mostre que os números críticos de C ocorrem nos números t nos quais $C(t) = f(t) + g(t)$.

(b) Suponha que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & \text{se } 0 < t \leqslant 30 \\ 0 & \text{se } t > 30 \end{cases}$$

e $$g(t) = \frac{Vt^2}{12.900} \qquad t > 0$$

Determine o período de tempo T para que a depreciação total $D(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ seja igual ao valor inicial V.

(c) Determine o mínimo absoluto de C em $(0, T]$.

(d) Esboce os gráficos de C e $f + g$ no mesmo sistema de coordenadas e verifique o resultado da parte (a) nesse caso.

5.4 Integrais Indefinidas e o Teorema da Variação Total

Vimos na Seção 5.3 que a segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo fornece um método muito poderoso para calcular a integral definida de uma função, desde que possamos encontrar uma primitiva dessa função. Nesta seção, vamos introduzir uma notação para primitivas, rever as fórmulas para as primitivas e então usá-las para calcular integrais definidas. Também reformularemos o TFC2, para torná-lo mais facilmente aplicável a problemas da ciência e engenharia.

Integrais Indefinidas

Ambas as partes do Teorema Fundamental estabelecem conexões entre as primitivas e as integrais definidas. A Parte 1 diz que se f é contínua, então $\int_a^x f(t)\,dt$ é uma primitiva de f. A Parte 2 diz que $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser encontrado calculando-se $F(b) - F(a)$, onde F é uma primitiva de f.

Precisamos de uma notação conveniente para primitivas que torne fácil trabalhar com elas. Em virtude da relação dada pelo Teorema Fundamental entre primitivas e integrais, a notação $\int f(x)\,dx$ é tradicionalmente usada para a primitiva de f e é chamada **integral indefinida**. Logo,

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{significa} \qquad F'(x) = f(x).}$$

Por exemplo, podemos escrever

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \text{pois} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

Portanto, podemos olhar uma integral indefinida como representando toda uma *família* de funções (uma primitiva para cada valor da constante C).

Você deve fazer uma distinção cuidadosa entre integral definida e indefinida. Uma integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ é um *número*, enquanto uma integral indefinida $\int f(x)\,dx$ é uma *função* (ou uma família de funções). A conexão entre elas é dada pela Parte 2 do Teorema Fundamental: se f é contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big]_a^b$$

A eficiência do Teorema Fundamental depende de termos um suprimento de primitivas de funções. Portanto, vamos apresentar de novo a Tabela de Fórmulas de Primitivação da Seção 4.9, com algumas outras, na notação de integrais indefinidas. Cada fórmula pode ser verificada derivando-se a função do lado direito e obtendo-se o integrando. Por exemplo,

$$\int \sec^2 x\,dx = \text{tg}\,x + C \qquad \text{pois} \qquad \frac{d}{dx}(\text{tg}\,x + C) = \sec^2 x$$

1 Tabelas de Integrais Indefinidas

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C \qquad \int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cossec} x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{tg}^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

Lembre-se de que, pelo Teorema 4.9.1, a primitiva mais geral *sobre um dado intervalo* é obtida adicionando-se uma constante a uma dada primitiva. **Adotamos a convenção de que quando uma fórmula para uma integral indefinida geral é dada, ela é válida somente em um intervalo**. Assim, escrevemos

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

subentendendo que isso é válido no intervalo $(0, \infty)$ ou no intervalo $(-\infty, 0)$. Isso é verdadeiro apesar do fato de que a primitiva geral da função $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$, é

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & \text{se } x < 0 \\[2mm] -\dfrac{1}{x} + C_2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

EXEMPLO 1 Encontre a integral indefinida geral

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx$$

SOLUÇÃO Usando nossa convenção e a Tabela 1, temos

$$\begin{aligned}\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx &= 10\int x^4\,dx - 2\int \sec^2 x\,dx \\ &= 10\,\frac{x^5}{5} - 2\operatorname{tg} x + C \\ &= 2x^5 - 2\operatorname{tg} x + C\end{aligned}$$

Você pode verificar essa resposta derivando-a.

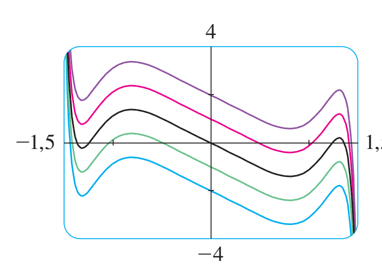


FIGURA 1

A integral indefinida no Exemplo 1 tem seu gráfico traçado na Figura 1 para vários valores de C. Aqui o valor de C é a intersecção com o eixo y.

EXEMPLO 2 Calcule $\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$.

SOLUÇÃO Essa integral indefinida não é imediatamente reconhecível na Tabela 1, logo, usamos identidades trigonométricas para reescrever a função antes de integrá-la:

$$\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)d\theta$$

$$= \int \operatorname{cossec}\theta\ \operatorname{cotg}\theta\,d\theta = -\operatorname{cossec}\theta + C$$

EXEMPLO 3 Calcule $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUÇÃO Usando o TFC2 e a Tabela 1, temos

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 6\,\frac{x^2}{2}\Big]_0^3$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - 3\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right)$$

$$= \tfrac{81}{4} - 27 - 0 + 0 = -6{,}75$$

Compare esse cálculo com o Exemplo 2(b) da Seção 5.2.

EXEMPLO 4 Encontre $\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx$ e interprete o resultado em termos de áreas.

A Figura 2 mostra o gráfico do integrando no Exemplo 4. Sabemos da Seção 5.2 que o valor da integral pode ser interpretado como a área resultante: soma de áreas com o sinal de mais menos a área com sinal de menos.

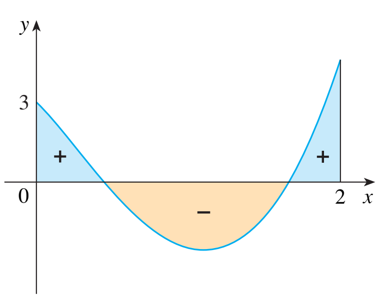


FIGURA 2

SOLUÇÃO O Teorema Fundamental fornece

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx = 2\,\frac{x^4}{4} - 6\,\frac{x^2}{2} + 3\operatorname{tg}^{-1}x\Big]_0^2$$

$$= \tfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\operatorname{tg}^{-1}x\Big]_0^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(2^4) - 3(2^2) + 3\operatorname{tg}^{-1}2 - 0$$

$$= -4 + 3\operatorname{tg}^{-1}2$$

Esse é o valor exato da integral. Se uma aproximação decimal for desejada, poderemos usar uma calculadora para aproximar $\operatorname{tg}^{-1}2$. Fazendo isso, obtemos

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx \approx -0{,}67855$$

EXEMPLO 5 Calcule $\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt$.

SOLUÇÃO Precisamos primeiro escrever o integrando em uma forma mais simples, efetuando a divisão:

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt = \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\,dt$$

$$= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Big]_1^9 = 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Big]_1^9$$

$$= \left(2\cdot 9 + \tfrac{2}{3}\cdot 9^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right) - \left(2\cdot 1 + \tfrac{2}{3}\cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right)$$

$$= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}$$

Aplicações

A Parte 2 do Teorema Fundamental diz que se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f. Isso significa que $F' = f$, de modo que a equação pode ser reescrita como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Sabemos que $F'(x)$ representa a taxa de variação de $y = F(x)$ em relação a x e $F(b) - F(a)$ é a variação em y quando x muda de a para b. [Observe que y pode, por exemplo, crescer, decrescer e, então, crescer novamente. Embora y possa variar nas duas direções, $F(b) - F(a)$ representa a *variação total* em y.] Logo, podemos reformular o TFC2 em palavras da forma a seguir.

Teorema da Variação Total A integral de uma taxa de variação é a variação total:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Esse princípio pode ser aplicado para todas as taxas de variação nas ciências naturais e sociais discutidas na Seção 3.7. Aqui estão alguns exemplos dessa ideia:

- Se $V(t)$ for o volume de água em um reservatório no instante t, então sua derivada $V'(t)$ é a taxa segundo a qual a água flui para dentro do reservatório no instante t. Logo,

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\,dt = V(t_2) - V(t_1)$$

é a variação na quantidade de água no reservatório entre os instantes de tempo t_1 e t_2.

- Se $[\mathrm{C}](t)$ for a concentração do produto de uma reação química no instante t, então a taxa de reação é a derivada $d[\mathrm{C}]/dt$. Logo,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}\,dt = [\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)$$

é a variação na concentração de C entre os instantes t_1 e t_2.

- Se a massa de uma barra medida a partir da extremidade esquerda até um ponto x for $m(x)$, então a densidade linear é $\rho(x) = m'(x)$. Logo,

$$\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b) - m(a)$$

é a massa do segmento da barra que está entre $x = a$ e $x = b$.

- Se a taxa de crescimento populacional for dn/dt, então

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}\,dt = n(t_2) - n(t_1)$$

é a alteração total da população no período de tempo de t_1 a t_2. (A população cresce quando ocorrem nascimentos e decresce quando ocorrem óbitos. A variação total leva em conta tanto nascimentos quanto mortes.)

- Se $C(x)$ é o custo de produzir x unidades de uma mercadoria, então o custo marginal é a derivada de $C'(x)$. Logo,

$$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)\,dx = C(x_2) - C(x_1)$$

é o crescimento do custo quando a produção está aumentando de x_1 a x_2 unidades.

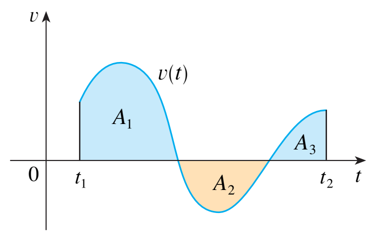
- Se um objeto se move ao longo de uma reta com a função de posição $s(t)$, então sua velocidade é $v(t) = s'(t)$, logo

$$\boxed{2} \qquad \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$$

é a mudança de posição, ou *deslocamento,* da partícula durante o período de tempo de t_1 a t_2. Na Seção 5.1 conjecturamos que isso era verdadeiro para o caso onde o objeto move-se no sentido positivo, mas agora demonstramos que é sempre verdade.

Se quisermos calcular a distância percorrida durante o intervalo de tempo, teremos de considerar os intervalos quando $v(t) \geqslant 0$ (a partícula move-se para a direita) e também os intervalos quando $v(t) \leqslant 0$ (a partícula move-se para a esquerda). Em ambos os casos a distância é calculada integrando-se $|v(t)|$, a velocidade escalar. Portanto,

3 $$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt = \text{distância total percorrida.}$$



$$\text{Deslocamento} = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\text{Distância} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt = A_1 + A_2 + A_3$$

FIGURA 3

A Figura 3 mostra como o deslocamento e a distância percorrida podem ser interpretados em termo de áreas sob uma curva velocidade.

- A aceleração do objeto é $a(t) = v'(t)$, logo

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\, dt = v(t_2) - v(t_1)$$

é a mudança na velocidade do instante t_1 até t_2.

EXEMPLO 6 Uma partícula move-se ao longo de uma reta de tal forma que sua velocidade no instante t é $v(t) = t^2 - t - 6$ (medida em metros por segundo).
(a) Encontre o deslocamento da partícula durante o período de tempo $1 \leqslant t \leqslant 4$.
(b) Encontre a distância percorrida durante esse período de tempo.

SOLUÇÃO
(a) Pela Equação 2, o deslocamento é

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)\, dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)\, dt$$
$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2}$$

Isso significa que a partícula moveu-se 4,5 m para a esquerda.

(b) Observe que $v(t) = t^2 - t - 6 = (t - 3)(t + 2)$, logo, $v(t) \leqslant 0$ no intervalo $[1, 3]$ e $v(t) \geqslant 0$ em $[3, 4]$. Assim, da Equação 3, a distância percorrida é

Para integrarmos o valor absoluto de $v(t)$, usamos a Propriedade 5 das integrais da Seção 5.2 para dividir a integral em duas partes, uma onde $v(t) \leqslant 0$ e outra onde $v(t) \geqslant 0$.

$$\int_1^4 |v(t)|\, dt = \int_1^3 [-v(t)]\, dt + \int_3^4 v(t)\, dt$$
$$= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\, dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\, dt$$
$$= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4$$
$$= \frac{61}{6} \approx 10{,}17 \text{ m}$$

EXEMPLO 7 A Figura 4 mostra o consumo de energia por um dia em setembro em São Francisco (P é medido em megawatts; t é medido em horas a partir da meia-noite). Estime a energia consumida naquele dia.

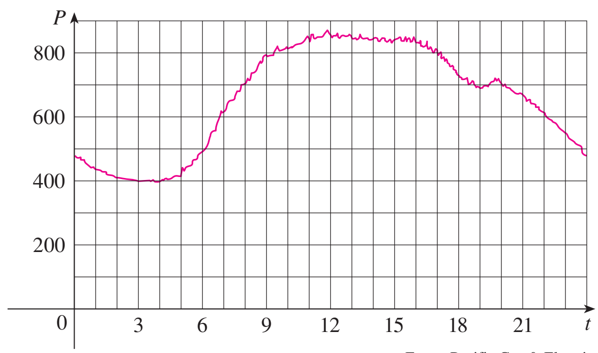


FIGURA 4

Fonte: Pacific Gas & Electric

SOLUÇÃO A potência é a taxa de variação da energia: $P(t) = E'(t)$. Logo, pelo Teorema da Variação Total,

$$\int_0^{24} P(t)\,dt = \int_0^{24} E'(t)\,dt = E(24) - E(0)$$

é a quantidade total de energia consumida naquele dia. Aproximamos o valor da integral utilizando a Regra do Ponto Médio com 12 subintervalos e $\Delta t = 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^{24} P(t)\,dt &\approx [P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)]\,\Delta t\\ &\approx (440 + 400 + 420 + 620 + 790 + 840 + 850\\ &\quad + 840 + 810 + 690 + 670 + 550)(2)\\ &= 15.840.\end{aligned}$$

A energia usada foi aproximadamente 15.840 megawatts-hora.

Uma observação sobre unidades Como saber que unidades usar para a energia no Exemplo 7? A integral $\int_0^{24} P(t)\,dt$ é definida como o limite das somas dos termos da forma $P(t_i^*)\,\Delta t$. Como $P(t_i^*)$ é medida em megawatts e Δt, em horas, seu produto é medido em megawatts-hora. O mesmo é verdadeiro para o limite. Em geral, a unidade de medida $\int_a^b f(x)\,dx$ é o produto da unidade para $f(x)$ com a unidade para x.

5.4 Exercícios

1–4 Verifique, por derivação, que a fórmula está correta.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

2. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\,2x + C$

3. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \text{sen}\,x - \tfrac{1}{3}\,\text{sen}^3 x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{3b^2}(bx - 2a)\sqrt{a+bx} + C$

5–18 Encontre a integral indefinida geral.

5. $\displaystyle\int (x^2 + x^{-2})\,dx$

6. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}\right)dx$

7. $\displaystyle\int \left(x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x - 2\right)dx$

8. $\displaystyle\int (y^3 + 1{,}8y^2 - 2{,}4y)\,dy$

9. $\displaystyle\int (u+4)(2u+1)\,du$

10. $\displaystyle\int v(v^2+2)^2\,dv$

11. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$

13. $\int (\operatorname{sen} x + \operatorname{senh} x)\, dx$ **14.** $\int (\operatorname{cossec}^2 t - 2e^t)\, dt$

15. $\int (\theta - \operatorname{cossec} \theta \operatorname{cotg} \theta)\, d\theta$ **16.** $\int \sec t\,(\sec t + \operatorname{tg} t)\, dt$

17. $\int (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\, d\alpha$ **18.** $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

19–20 Encontre a integral indefinida geral. Ilustre fazendo o gráfico de vários membros da família na mesma tela.

19. $\int (\cos x + \frac{1}{2}x)\, dx$ **20.** $\int (e^x - 2x^2)\, dx$

21–46 Calcule a integral.

21. $\int_0^2 (6x^2 - 4x + 5)\, dx$ **22.** $\int_1^3 (1 + 2x - 4x^3)\, dx$

23. $\int_{-2}^0 (\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{4}t^3 - t)\, dt$ **24.** $\int_0^3 (1 + 6w^2 - 10w^4)\, dw$

25. $\int_0^2 (2x - 3)(4x^2 + 1)\, dx$ **26.** $\int_{-1}^1 t(1 - t)^2\, dt$

27. $\int_0^{\pi} (5e^x + 3 \operatorname{sen} x)\, dx$ **28.** $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) dx$

29. $\int_1^4 \left(\frac{4 + 6u}{\sqrt{u}}\right) du$ **30.** $\int_0^4 (3\sqrt{t} - 2e^t)\, dt$

31. $\int_0^1 x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})\, dx$ **32.** $\int_1^4 \frac{\sqrt{y} - y}{y^2}\, dy$

33. $\int_1^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right) dx$ **34.** $\int_0^1 (5x - 5^x)\, dx$

35. $\int_0^1 (x^{10} + 10^x)\, dx$ **36.** $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{cossec}^2\theta\, d\theta$

37. $\int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$

38. $\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta \operatorname{tg}^2\theta}{\sec^2\theta}\, d\theta$

39. $\int_1^{64} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\, dx$ **40.** $\int_{-10}^{10} \frac{2e^x}{\operatorname{senh} x + \cosh x}\, dx$

41. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}}$ **42.** $\int_1^2 \frac{(x - 1)^3}{x^2}\, dx$

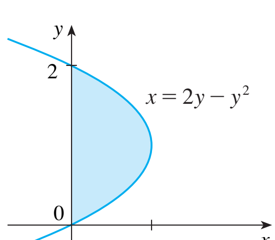
43. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^2 - 1}{t^4 - 1}\, dt$ **44.** $\int_0^2 |2x - 1|\, dx$

45. $\int_{-1}^2 (x - 2|x|)\, dx$ **46.** $\int_0^{3\pi/2} |\operatorname{sen} x|\, dx$

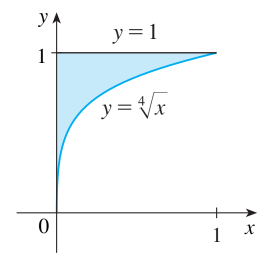
47. Use um gráfico para estimar a intersecção com o eixo x da curva $y = 1 - 2x - 5x^4$. A seguir, use essa informação para estimar a área da região que se situa sob a curva e acima do eixo x.

48. Repita o Exercício 47 para a curva $y = (x^2 + 1)^{-1} - x^4$.

49. A área da região que está à direita do eixo y e à esquerda da parábola $x = 2y - y^2$ (a região sombreada na figura) é dada pela integral $\int_0^2 (2y - y^2)\, dy$. (Gire sua cabeça no sentido horário e imagine a região como estando abaixo da curva $x = 2y - y^2$ de $y = 0$ até $y = 2$.) Encontre a área da região.



50. As fronteiras da região sombreada são o eixo y, a reta $y = 1$ e a curva $y = \sqrt[4]{x}$. Encontre a área dessa região escrevendo x como uma função de y e integrando em relação a y (como no Exercício 49).



51. Se $w'(t)$ for a taxa de crescimento de uma criança em quilogramas por ano, o que $\int_5^{10} w'(t)\, dt$ representa?

52. A corrente em um fio elétrico é definida como a derivada da carga: $I(t) = Q'(t)$. (Veja o Exemplo 3 na Seção 3.7.) O que $\int_a^b I(t)\, dt$ representa?

53. Se vazar óleo de um tanque a uma taxa de $r(t)$ galões por minuto em um instante t, o que $\int_0^{120} r(t)\, dt$ representa?

54. Uma colmeia com uma população inicial de 100 abelhas cresce a uma taxa de $n'(t)$ por semana. O que representa $100 + \int_0^{15} n'(t)\, dt$?

55. Na Seção 4.7 definimos a função rendimento marginal $R'(x)$ como a derivada da função rendimento $R(x)$, onde x é o número de unidades vendidas. O que representa $\int_{1000}^{5000} R'(x)\, dx$?

56. Se $f(x)$ for a inclinação de uma trilha a uma distância de x quilômetros do começo dela, o que $\int_3^5 f(x)\, dx$ representa?

57. Se x é medido em metros e $f(x)$, em newtons, quais são as unidades de $\int_0^{100} f(x)\, dx$?

58. Se as unidades para x são pés e as unidades para $a(x)$ são libras por pé, quais são as unidades para da/dx? Quais são as unidades para $\int_2^8 a(x)\, dx$?

59–60 A função velocidade (em metros por segundo) é dada para uma partícula movendo-se ao longo de uma reta. Encontre (a) o deslocamento e (b) a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo dado.

59. $v(t) = 3t - 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

60. $v(t) = t^2 - 2t - 8, \quad 1 \leqslant t \leqslant 6$

61–62 A função aceleração (em m/s^2) e a velocidade inicial são dadas para uma partícula movendo-se ao longo de uma reta. Encontre (a) a velocidade no instante t e (b) a distância percorrida durante o intervalo de tempo dado.

61. $a(t) = t + 4, \quad v(0) = 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$

62. $a(t) = 2t + 3, \quad v(0) = -4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

63. A densidade linear de uma barra de comprimento 4 m é dada por $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$, medida em quilogramas por metro, em que x é medido em metros a partir de uma extremidade da barra. Encontre a massa total da barra.

64. A água escoa pelo fundo de um tanque de armazenamento a uma taxa de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minuto, onde $0 \leqslant t \leqslant 50$. Encontre a quantidade de água que escoa do tanque durante os primeiros dez minutos.

65. A velocidade de um carro foi lida de seu velocímetro em intervalos de 10 segundos e registrada na tabela. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a distância percorrida pelo carro.

t (s)	v (mi/h)	t (s)	v (mi/h)
0	0	60	56
10	38	70	53
20	52	80	50
30	58	90	47
40	55	100	45
50	51		

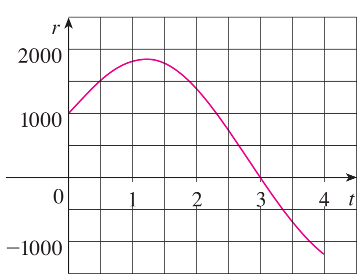
66. Suponha que um vulcão esteja em erupção e que as leituras da taxa $r(t)$, cujos materiais sólidos são lançados na atmosfera, sejam as dadas na tabela. O tempo t é medido em segundos e a unidade para $r(t)$ é toneladas por segundo.

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	2	10	24	36	46	54	60

(a) Dê estimativas superior e inferior para a quantidade $Q(6)$ do material proveniente da erupção após 6 segundos.
(b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar $Q(6)$.

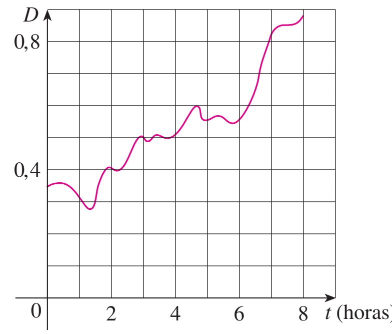
67. O custo marginal de fabricação de x metros de um certo tecido é $C'(x) = 3 - 0{,}01x + 0{,}000006x^2$ (em dólares por metro). Ache o aumento do custo se o nível de produção for elevado de 2 000 para 4 000 metros.

68. Há um fluxo de água para dentro e para fora de um tanque de armazenamento. A seguir, temos um gráfico que mostra a taxa de troca $r(t)$ do volume de água no tanque, em litros por dia. Se a quantidade de água no tanque no instante de tempo $t = 0$ é 25 000 litros, use a Regra do Ponto Médio para estimar a quantidade de água no tanque depois de quatro dias.

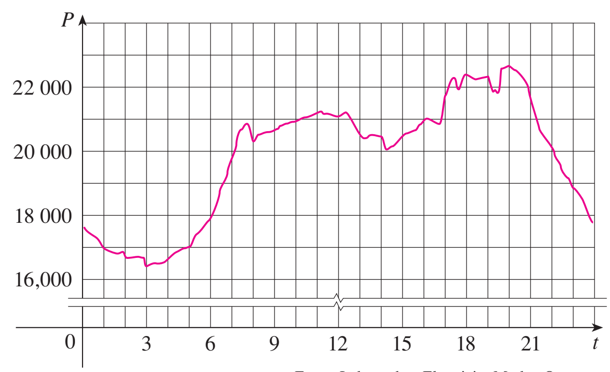


69. Uma população de bactérias é de 4 000 no tempo $t = 0$ e sua taxa de crescimento é de $1000 \cdot 2^t$ bactérias por hora depois de t horas. Qual é a população depois de uma hora?

70. O gráfico a seguir mostra o tráfego de dados em um provedor de serviços na internet entre meia-noite e as 8 horas da manhã. D denota os dados em processamento, medidos em megabits por segundo. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a quantidade total de dados transmitidos durante esse período de tempo.



71. A seguir, está ilustrada a potência consumida na cidade de Ontário, Canadá, em 9 de dezembro de 2004 (P é medida em megawatts; t é medido em horas a partir da meia-noite). Usando o fato de que a potência é a taxa de variação da energia, estime a energia usada naquele dia.



Fonte: Independent Electricity Market Operator

72. Em 7 de maio de 1992, o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49, cujo objetivo era instalar um novo motor de arranque no satélite de comunicação Intelsat. A tabela dá os dados de velocidade para o ônibus espacial entre o lançamento e a entrada em ação dos foguetes auxiliares.

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para modelar esses dados por um polinômio de terceiro grau.
(b) Use o modelo da parte (a) para estimar a altura atingida pela *Endeavour*, 125 segundos depois do lançamento.

Evento	Tempo (s)	Velocidade (m/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	56;4
Fim da manobra de inclinação	15	97;2
Regulador de combustível a 89%	20	136;2
Regulador de combustível a 67%	32	226;2
Regulador de pressão a 104%	59	403;9
Pressão dinâmica máxima	62	440;4
Separação dos foguetes auxiliares	125	1.265;2

PROJETO ESCRITO NEWTON, LEIBNIZ E A INVENÇÃO DO CÁLCULO

Algumas vezes lemos que os inventores do cálculo foram Sir Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Mas sabemos que as ideias básicas por trás da integração foram investigadas há 2.500 anos pelos antigos gregos, tais como Eudóxio e Arquimedes, e que os métodos para encontrar as tangentes foram inventados por Pierre Fermat (1601-1665) e Isaac Barrow (1630-1677), entre outros. Barrow, professor em Cambridge que teve grande influência sobre Newton, foi o primeiro a entender a relação inversa existente entre a derivação e a integração. O que Newton e Leibniz fizeram foi usar essa relação, na forma do Teorema Fundamental do Cálculo, para desenvolver o cálculo em uma disciplina matemática sistemática. É nesse sentido que é atribuída a Newton e a Leibniz a invenção do cálculo.

Leia sobre as contribuições desses homens em uma ou mais das referências sugeridas e escreva sobre um dentre os três tópicos listados a seguir. Você pode incluir detalhes biográficos, mas o propósito principal de seu relatório deve ser a descrição, em detalhes, de seus métodos e notações. Em particular, você deve consultar os livros que trazem trechos das publicações originais de Newton e Leibniz, traduzidas do latim para o inglês.

O Papel de Newton no Desenvolvimento do Cálculo

O Papel de Leibniz no Desenvolvimento do Cálculo

A Controvérsia entre os Seguidores de Newton e de Leibniz sobre a Primazia na Invenção do Cálculo

Referências

1. Boyer, C., Merzbach, U. *A History of Mathematics.* Nova York: Wiley, 1987, Capítulo 19.
2. Boyer, C. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development.* Nova York: Dover, 1959, Capítulo V.
3. Edwards, C. H. *The Historical Development of the Calculus.* Nova York: Springer-Verlag, 1979, Capítulos 8 e 9.
4. Eves, H. *An Introduction to the History of Mathematics,* 6. ed. Nova York: Saunders, 1990, Capítulo 11.
5. Gillispie, C. C. *Dictionary of Scientific Biography.* Nova York: Scribner's, 1974. Veja o artigo sobre Leibniz de Joseph Hofmann no Volume VIII e o artigo sobre Newton de I. B. Cohen in Volume X.
6. Katz, V. *A History of Mathematics:* an introduction. Nova York: HarperCollins, 1993, Capítulo 12.
7. Kline, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Nova York: Oxford University Press, 1972, Capítulo 17.

Livros fontes

1. Fauvel, J.; Gray, J. *The History of Mathematics:* A Reader. Londres: MacMillan Press, 1987, Capítulos 12 e 13.
2. Smith, D. E. *A Sourcebook in Mathematics.* Nova York: Dover, 1959, Capítulo V.
3. Struik, D. J. *A Sourcebook in Mathematics, 1200–1800.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969, Capitulo V.

5.5 A Regra da Substituição

Por causa do Teorema Fundamental, é importante sermos capazes de encontrar primitivas. Porém, nossas fórmulas de primitivação não mostram como calcular as integrais do tipo

$$\boxed{1} \qquad \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

SP Para encontrarmos essa integral usamos a estratégia de resolução de problemas de *introduzir alguma coisa extra*. Aqui o "alguma coisa extra" é uma nova variável; mudamos da variável x para uma nova variável u. Suponha que façamos u igual à quantidade sob o sinal de raiz em $\boxed{1}$, $u = 1 + x^2$. Então a diferencial de u é $du = 2x\,dx$. Observe que se dx na notação de integral for interpretada como uma diferencial, então a diferencial $2x\,dx$ ocorrerá em $\boxed{1}$; portanto, formalmente, sem justificar nossos cálculos, podemos escrever

Diferenciais foram definidas na Seção 3.10. Se $u = f(x)$, então $du = f'(x)\,dx$.

$$\boxed{2} \qquad \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$

$$= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$$

Mas agora podemos verificar que temos a resposta correta usando a Regra da Cadeia para derivar a função final da Equação 2:

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C\right] = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}\cdot 2x = 2x\sqrt{x^2+1}$$

Em geral, esse método funciona sempre que temos uma integral que possa ser escrita na forma $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$. Observe que se $F' = f$, então

$$\boxed{3} \qquad \int F'(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

pois, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))\,g'(x)$$

Se fizermos a "mudança de variável" ou "substituição" $u = g(x)$, então da Equação 3 temos

$$\int F'(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\,du$$

ou, escrevendo $F' = f$, obtemos

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Assim, demonstramos a regra a seguir.

$\boxed{4}$ **Regra da Substituição** Se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I, então

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Observe que a Regra da Substituição para a integração foi demonstrada usando a Regra da Cadeia para a derivação. Note também que se $u = g(x)$, então $du = g'(x)\,dx$, portanto uma forma de recordar a Regra da Substituição é imaginar dx e du em $\boxed{4}$ como diferenciais.

Assim, a Regra de Substituição diz que: **é permitido operar com dx e du após sinais de integração como se fossem diferenciais.**

EXEMPLO 1 Encontre $\int x^3\cos(x^4+2)\,dx$.

SOLUÇÃO Fazemos a substituição $u = x^4 + 2$ porque sua diferencial é $du = 4x^3\,dx$, que, à parte do fator constante 4, ocorre na integral. Assim, usando $x^3\,dx = \frac{1}{4}\,du$ e a Regra da Substituição, temos

$$\begin{aligned}\int x^3\cos(x^4+2)\,dx &= \int \cos u \cdot \tfrac{1}{4}\,du = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du\\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} u + C\\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4+2) + C\end{aligned}$$

Verifique a resposta derivando-a.

Observe que no estágio final retornamos para a variável original x.

A ideia por trás da Regra da Substituição é substituir uma integral relativamente complicada por uma mais simples. Isso é obtido mudando-se da variável original x para uma nova variável u que é uma função de x. Dessa forma, no Exemplo 1 substituímos a integral $\int x^3\cos(x^4+2)\,dx$ pela mais simples $\frac{1}{4}\int \cos u\,du$.

O desafio principal no uso da Regra da Substituição é descobrir uma substituição apropriada. Você deve tentar escolher u como uma função no integrando cuja diferencial também ocorra (exceto por um fator constante). Foi isso que aconteceu no Exemplo 1. Se isso não for possível, tente escolher u como alguma parte complicada do integrando (talvez a função interna em uma função composta). Achar a substituição correta tem algo de artístico. É normal errar na escolha da substituição; se sua primeira tentativa não funcionar, tente outra substituição.

EXEMPLO 2 Calcule $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.

SOLUÇÃO 1 Seja $u = 2x + 1$. Então, $du = 2\,dx$, de modo que $dx = \frac{1}{2}\,du$. Nesse caso, a Regra da Substituição nos dá

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int \sqrt{u}\cdot \tfrac{1}{2}\,du = \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}\,du\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \tfrac{1}{3}u^{3/2} + C\\ &= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

SOLUÇÃO 2 Outra substituição possível é $u = \sqrt{2x+1}$. Então

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}, \qquad \text{logo} \qquad dx = \sqrt{2x+1}\,du = u\,du.$$

(Ou observe que $u^2 = 2x + 1$, de modo que $2u\,du = 2\,dx$.) Portanto,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int u\cdot u\,du = \int u^2\,du\\ &= \frac{u^3}{3} + C = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

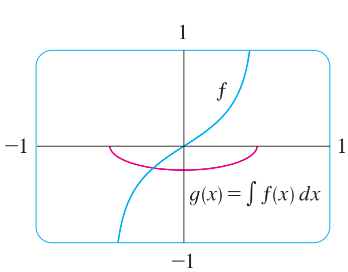


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$g(x) = \int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$

EXEMPLO 3 Encontre $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$.

SOLUÇÃO Seja $u = 1 - 4x^2$. Então $du = -8x\,dx$, de modo que $x\,dx = -\frac{1}{8}\,du$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx &= -\tfrac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\tfrac{1}{8}\int u^{-1/2}\,du\\ &= -\tfrac{1}{8}\left(2\sqrt{u}\right) + C = -\tfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C\end{aligned}$$

A resposta do Exemplo 3 pode ser verificada por derivação, mas em vez disso vamos verificá-la graficamente. Na Figura 1 usamos um computador para fazer o gráfico do integrando $f(x) = x/\sqrt{1-4x^2}$ e de sua integral indefinida $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$ (escolhemos o caso

$C = 0$). Observe que $g(x)$ decresce quando $f(x)$ é negativa, cresce quando $f(x)$ é positiva e tem seu valor mínimo quando $f(x) = 0$. Portanto, parece razoável, pela evidência gráfica, que g seja uma primitiva de f.

EXEMPLO 4 Calcule $\int e^{5x}\,dx$.

SOLUÇÃO Se fizermos $u = 5x$, então $du = 5\,dx$, portanto $dx = \frac{1}{5}\,du$. Assim,

$$\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int e^u\,du = \frac{1}{5}e^u + C = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

OBSERVAÇÃO Com mais experiência, você será capaz de avaliar integrais como aquelas nos Exemplos 1–4 sem precisar fazer uma substituição explícita. Ao reconhecermos o padrão na Equação 3, onde o integrando no lado esquerdo é o produto da derivada de uma função externa pela derivada de uma função interna, podemos trabalhar com o Exemplo 1 como segue:

$$\int x^3\cos(x^4 + 2)\,dx = \int \cos(x^4 + 2)\cdot x^3\,dx = \frac{1}{4}\int \cos(x^4 + 2)\cdot(4x^3)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos(x^4 + 2)\cdot\frac{d}{dx}(x^4 + 2)\,dx = \frac{1}{4}\,\text{sen}(x^4 + 2) + C$$

Similarmente, a solução no Exemplo 4 pode ser escrita como:

$$\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{d}{dx}(e^{5x})\,dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

O exemplo a seguir, entretanto, é mais complicado e, portanto, uma substituição explícita é recomendada.

EXEMPLO 5 Encontre $\int \sqrt{1 + x^2}\,x^5\,dx$.

SOLUÇÃO Uma substituição apropriada fica mais evidente se fatorarmos x^5 como $x^4 \cdot x$. Seja $u = 1 + x^2$. Então $du = 2x\,dx$, de modo que $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$. Também temos $x^2 = u - 1$, portanto $x^4 = (u - 1)^2$:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\,x^5\,dx = \int \sqrt{1 + x^2}\,x^4\cdot x\,dx$$

$$= \int \sqrt{u}\,(u - 1)^2\cdot\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,(u^2 - 2u + 1)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}u^{7/2} - 2\cdot\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{7}(1 + x^2)^{7/2} - \frac{2}{5}(1 + x^2)^{5/2} + \frac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C$$

EXEMPLO 6 Calcule $\int \text{tg}\,x\,dx$.

SOLUÇÃO Vamos escrever primeiro a tangente em termos de seno e cosseno:

$$\int \text{tg}\,x\,dx = \int \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\,dx$$

Isso sugere que devemos substituir $u = \cos x$, visto que $du = -\text{sen}\,x\,dx$, e, portanto, $\text{sen}\,x\,dx = -du$:

$$\int \text{tg}\,x\,dx = \int \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

Uma vez que $-\ln|\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1}) = \ln(1/|\cos x|) = \ln|\sec x|$, o resultado do Exemplo 6 também pode ser escrito como

5 $$\int \operatorname{tg} x\, dx = \ln|\sec x| + C$$

Integrais Definidas

Existem dois métodos para calcular uma integral *definida*, por substituição. Um deles consiste em se calcular primeiro a integral indefinida e então usar o Teorema Fundamental. Por exemplo, usando o resultado do Exemplo 2, temos

$$\begin{aligned}\int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx &= \int \sqrt{2x+1}\, dx\Big]_0^4 \\ &= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2} \\ &= \tfrac{1}{3}(27-1) = \tfrac{26}{3}\end{aligned}$$

Outro método, geralmente preferível, consiste em alterar os limites de integração ao mudar a variável.

Essa regra diz que quando usamos uma substituição em uma integral definida, devemos colocar tudo em termos da nova variável u, não somente x e dx, mas também os limites de integração. Os novos limites da integração são os valores de u que correspondem a $x = a$ e $x = b$.

6 Regra da Substituição para as Integrais Definidas Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na imagem de $u = g(x)$, então

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

DEMONSTRAÇÃO Seja F uma primitiva de f. Então, por $\boxed{3}$, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))\, g'(x)$, logo, pela Parte 2 do Teorema Fundamental, temos

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Mas, aplicando uma segunda vez o TFC2, também temos

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

EXEMPLO 7 Calcule $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx$ usando $\boxed{6}$.

SOLUÇÃO Usando a substituição da Solução 1 do Exemplo 2, temos $u = 2x + 1$ e $dx = \frac{1}{2}\, du$. Para encontrarmos os novos limites de integração, observamos que

quando $x = 0$, $u = 2(0) + 1 = 1$ e quando $x = 4$, $u = 2(4) + 1 = 9$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx &= \int_1^9 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\, du \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9 \\ &= \tfrac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \tfrac{26}{3}\end{aligned}$$

Observe que quando usamos $\boxed{6}$ *não* retornamos à variável x após a integração. Simplesmente calculamos a expressão em u entre os valores apropriados de u.

EXEMPLO 8 Calcule $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$.

A integral no Exemplo 8 é uma abreviação para

$$\int_1^2 \frac{1}{(3-5x)^2}\,dx.$$

SOLUÇÃO Seja $u = 3 - 5x$. Então $du = -5\,dx$, de modo que $dx = -\frac{1}{5}\,du$. Quando $x = 1$, $u = -2$, e quando $x = 2$, $u = -7$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} &= -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2} \\ &= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7} \\ &= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}\end{aligned}$$

EXEMPLO 9 Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

SOLUÇÃO Vamos fazer $u = \ln x$, pois sua diferencial $du = dx/x$ ocorre na integral. Quando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; quando $x = e$, $u = \ln e = 1$. Logo,

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\Bigg]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Uma vez que a função $f(x) = (\ln x)/x$ no Exemplo 9 é positiva para $x > 1$, a integral representa a área da região sombreada na Figura 2.

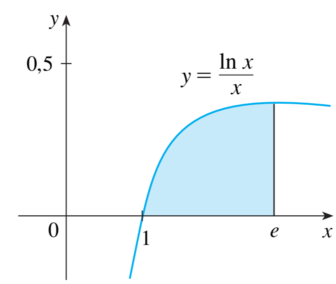


FIGURA 2

Simetria

O próximo teorema usa a Regra da Substituição para Integrais Definidas $\boxed{6}$ para simplificar o cálculo de integrais de funções que possuam propriedades de simetria.

> $\boxed{7}$ **Integrais de Funções Simétricas** Suponha que f seja contínua em $[-a, a]$.
> (a) Se f é par $[f(-x) = f(x)]$, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
> (b) Se f é ímpar $[f(-x) = -f(x)]$, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Dividimos a integral em duas:

$$\boxed{8} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

Na primeira integral da última igualdade fazemos a substituição $u = -x$. Então, $du = -dx$ e quando $x = -a$, $u = a$. Portanto

$$-\int_0^{-a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(-u)\,(-du) = \int_0^a f(-u)\,du$$

e, assim, a Equação 8 fica

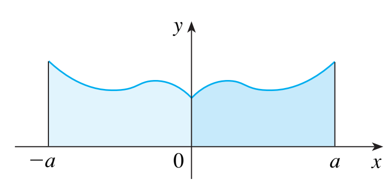
$$\boxed{9} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx$$

(a) Se f for par, então $f(-u) = f(u)$, logo, da Equação 9 segue que

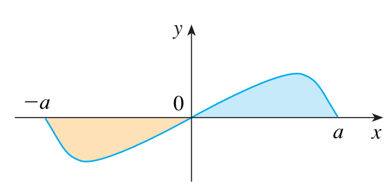
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

(b) Se f for ímpar, então $f(-u) = -f(u)$, e a Equação 9 nos dá

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$



(a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$



(b) f ímpar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

FIGURA 3

O Teorema 7 está ilustrado na Figura 3. Quando f é positiva e par, a parte (a) diz que a área sob $y = f(x)$ de $-a$ até a é o dobro da área de 0 até a em virtude da simetria. Lembre-se de que uma integral $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser expressa como a área acima do eixo x e abaixo de $y = f(x)$ menos a área abaixo do eixo x e acima da curva. Assim, a parte (b) diz que a integral é 0, pois as áreas se cancelam.

EXEMPLO 10 Uma vez que $f(x) = x^6 + 1$ satisfaz $f(-x) = f(x)$, ela é par, e portanto

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx = 2\int_0^2 (x^6 + 1)\,dx$$
$$= 2\left[\tfrac{1}{7}x^7 + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}$$

EXEMPLO 11 Já que $f(x) = (\operatorname{tg} x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisfaz $f(-x) = -f(x)$, ela é ímpar, e por conseguinte

$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0$$

5.5 Exercícios

1–6 Calcule a integral fazendo a substituição dada.

1. $\int \cos 3x\,dx, \quad u = 3x$

2. $\int x(4 + x^2)^{10}\,dx, \quad u = 4 + x^2$

3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$

4. $\int \frac{dt}{(1 - 6t)^4}, \quad u = 1 - 6t$

5. $\int \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta, \quad \theta = \cos\theta$

6. $\int \frac{\sec^2(1/x)}{x^2}\,dx, \quad u = 1/x$

7–48 Calcule a integral indefinida.

7. $\int x \operatorname{sen}(x^2)\,dx$

8. $\int x^2 e^{x^3}\,dx$

9. $\int (3x - 2)^{20}\,dx$

10. $\int (3t + 2)^{2,4}\,dt$

11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2}\,dx$

12. $\int \sec^2 2\theta\,d\theta$

13. $\int \frac{dx}{5 - 3x}$

14. $\int u\sqrt{1 - u^2}\,du$

15. $\int \operatorname{sen}\pi t\,dt$

16. $\int e^x \operatorname{sen}(e^x)\,dx$

17. $\int \frac{e^u}{(1 - e^u)^2}\,du$

18. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

19. $\int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}}\,dx$

20. $\int \frac{z^2}{z^3 + 1}\,dz$

21. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

22. $\int \cos^4\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta$

23. $\int \sec^2\theta \operatorname{tg}^3\theta\,d\theta$

24. $\int \sqrt{x}\operatorname{sen}(1 + x^{3/2})\,dx$

25. $\int e^x\sqrt{1 + e^x}\,dx$

26. $\int \frac{dx}{ax + b} \quad (a \neq 0)$

27. $\int (x^2 + 1)(x^3 + 3x)^4\,dx$

28. $\int e^{\cos t}\operatorname{sen} t\,dt$

29. $\int 5^t \operatorname{sen}(5^t)\,dt$

30. $\int \frac{\operatorname{tg}^{-1}x}{1 + x^2}\,dx$

31. $\int e^{\operatorname{tg} x}\sec^2 x\,dx$

32. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx$

33. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

34. $\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}\,dx$

35. $\int \sqrt{\operatorname{cotg} x}\operatorname{cossec}^2 x\,dx$

36. $\int \frac{2^t}{2^t + 3}\,dt$

37. $\int \operatorname{senh}^2 x \cosh x\,dx$

38. $\int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1 + \operatorname{tg} t}}$

39. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos^2 x}\,dx$

40. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\,dx$

41. $\int \operatorname{cotg} x\,dx$

42. $\int \operatorname{sen} t \sec^2(\cos t)\,dt$

43. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\operatorname{sen}^{-1}x}$

44. $\int \frac{x}{1 + x^4}\,dx$

45. $\int \frac{1 + x}{1 + x^2}\,dx$

46. $\int x^2\sqrt{2 + x}\,dx$

47. $\int x(2x + 5)^8\,dx$

48. $\int x^3\sqrt{x^2 + 1}\,dx$

49–52 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique que sua resposta é razoável fazendo o gráfico da função e de sua primitiva (tome $C = 0$).

49. $\int x(x^2 - 1)^3\,dx$

50. $\int \operatorname{tg}^2\theta \sec^2\theta\,d\theta$

51. $\int e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$

52. $\int \operatorname{sen} x \cos^4 x\,dx$

53–73 Avalie a integral definida.

53. $\int_0^1 \cos(\pi t/2)\, dt$

54. $\int_0^1 (3t - 1)^{50}\, dt$

55. $\int_0^1 \sqrt[3]{1 + 7x}\, dx$

56. $\int_0^3 \frac{dx}{5x + 1}$

57. $\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)\, dt$

58. $\int_{1/6}^{1/2} \operatorname{cossec} \pi t \ \operatorname{cotg} \pi t\, dt$

59. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

60. $\int_0^1 xe^{-x^2}\, dx$

61. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4 \operatorname{tg} x)\, dx$

62. $\int_0^{\pi/2} \cos x \ \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\, dx$

63. $\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1 + 2x)^2}}$

64. $\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

65. $\int_0^a x\sqrt{x^2 + a^2}\, dx \quad (a > 0)$

66. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \operatorname{sen} x\, dx$

67. $\int_1^2 x\sqrt{x - 1}\, dx$

68. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1 + 2x}}\, dx$

69. $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

70. $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

71. $\int_0^1 \frac{e^z + 1}{e^z + z}\, dz$

72. $\int_0^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi t/T - \alpha)\, dt$

73. $\int_0^1 \frac{dx}{(1 + \sqrt{x})^4}$

74. Verifique que $f(x) = \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}$ é uma função ímpar e use este fato para mostrar que

$$0 \leqslant \int_{-2}^{3} \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}\, dx \leqslant 1.$$

75–76 Use um gráfico para dar uma estimativa grosseira da área da região que está sob a curva dada. Encontre a seguir a área exata.

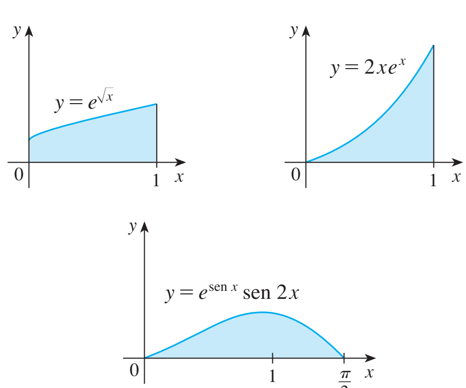
75. $y = \sqrt{2x + 1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

76. $y = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

77. Calcule $\int_{-2}^{2} (x + 3)\sqrt{4 - x^2}\, dx$ escrevendo-a como uma soma de duas integrais e interpretando uma dessas integrais em termos de uma área.

78. Calcule $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^4}\, dx$ fazendo uma substituição e interpretando a integral resultante em termos de uma área.

79. Quais das seguintes áreas são iguais? Por quê?



80. Um modelo para a taxa de metabolismo basal, em kcal/h, de um homem jovem é $R(t) = 85 - 0{,}18 \cos(\pi t/12)$, em que t é o tempo em horas medido a partir de 5 horas da manhã. Qual é o metabolismo basal total deste homem, $\int_0^{24} R(t)\, dt$, em um período de 24 horas?

81. Um tanque de armazenamento de petróleo sofre uma ruptura em $t = 0$ e o petróleo vaza do tanque a uma taxa de $r(t) = 100e^{-0{,}01t}$ litros por minuto. Quanto petróleo vazou na primeira hora?

82. Uma população de bactérias tem inicialmente 400 bactérias e cresce a uma taxa de $r(t) = (450{,}268)e^{1{,}12567t}$ bactérias por hora. Quantas bactérias existirão após 3 horas?

83. A respiração é cíclica e o ciclo completo respiratório desde o início da inalação até o fim da expiração demora cerca de 5 s. A taxa máxima de fluxo de ar nos pulmões é de cerca de 0,5 L/s. Isso explica, em partes, porque a função $f(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\pi t/5)$ tem sido frequentemente utilizada para modelar a taxa de fluxo de ar nos pulmões. Use esse modelo para encontrar o volume de ar inalado nos pulmões no instante t.

84. A Alabama Instruments Company preparou uma linha de montagem para fabricar uma nova calculadora. A taxa de produção dessas calculadoras após t semanas é

$$\frac{dx}{dt} = 5\,000\left(1 - \frac{100}{(t + 10)^2}\right) \text{calculadoras}/\textit{semana}.$$

(Observe que a produção tende a 5 000 por semana à medida que passa o tempo, mas a produção inicial é baixa, pois os trabalhadores não estão familiarizados com as novas técnicas.) Encontre o número de calculadoras produzidas no começo da terceira semana até o fim da quarta semana.

85. Se f for contínua e $\int_0^4 f(x)\, dx = 10$, calcule $\int_0^2 f(2x)\, dx$.

86. Se f for contínua e $\int_0^9 f(x)\, dx = 4$, calcule $\int_0^3 xf(x^2)\, dx$.

87. Se f for contínua em $\mathbb{R}$, demonstre que

$$\int_a^b f(-x)\, dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\, dx.$$

Para o caso onde $f(x) \geqslant 0$ e $0 < a < b$, faça um diagrama para interpretar geometricamente essa equação como uma igualdade de áreas.

88. Se f for contínua em $\mathbb{R}$, demonstre que

$$\int_a^b f(x + c)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\, dx.$$

Para o caso onde $f(x) \geqslant 0$, faça um diagrama para interpretar geometricamente essa equação como uma igualdade de áreas.

89. Se a e b forem números positivos, mostre que

$$\int_0^1 x^a(1 - x)^b\, dx = \int_0^1 x^b(1 - x)^a\, dx.$$

90. Se f é contínua em $[0, \pi]$, use a substituição $u = \pi - x$ para demonstrar que

$$\int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx.$$

91. Use o Exercício 90 para calcular a integral

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

92. (a) Se f é contínua, mostre que

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x)\, dx.$$

(b) Use a parte (a) para calcular $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$ e $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

5 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) Escreva uma expressão para uma soma de Riemann de uma função f. Explique o significado da notação que você usar.
(b) Se $f(x) \geqslant 0$, qual a interpretação geométrica de uma soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.
(c) Se $f(x)$ assumir valores positivos e negativos, qual a interpretação geométrica de uma soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

2. (a) Escreva a definição de integral definida de uma função contínua de a até b.
(b) Qual a interpretação geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ se $f(x) \geqslant 0$?
(c) Qual a interpretação geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ se $f(x)$ assumir valores positivos e negativos? Ilustre com um diagrama.

3. Enuncie ambas as partes do Teorema Fundamental do Cálculo.

4. (a) Enuncie o Teorema da Variação Total.
(b) Se $r(t)$ for a taxa segundo a qual a água escoa para dentro de um reservatório, o que representa $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\,dt$?

5. Suponha que uma partícula mova-se para a frente e para trás ao longo de uma linha reta com velocidade $v(t)$, medida em metros por segundo, com aceleração $a(t)$.
(a) Qual o significado de $\int_{60}^{120} v(t)\,dt$?
(b) Qual o significado de $\int_{60}^{120} |v(t)|\,dt$?
(c) Qual o significado de $\int_{60}^{120} a(t)\,dt$?

6. (a) Explique o significado da integral indefinida $\int f(x)\,dx$.
(b) Qual a conexão entre a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ e a integral indefinida $\int f(x)\,dx$?

7. Explique exatamente o significado da afirmação "derivação e integração são processos inversos".

8. Enuncie a Regra da Substituição. Na prática, como fazer uso dela?

Teste – Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se f e g forem contínuas em $[a, b]$, então
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. Se f e g forem contínuas em $[a, b]$, então
$$\int_a^b [f(x)g(x)]\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

3. Se f for contínua em $[a, b]$, então
$$\int_a^b 5f(x)\,dx = 5\int_a^b f(x)\,dx.$$

4. Se f for contínua em $[a, b]$, então
$$\int_a^b xf(x)\,dx = x\int_a^b f(x)\,dx.$$

5. Se f for contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$, então
$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}$$

6. Se f' for contínua em $[1, 3]$, então
$$\int_1^3 f'(v)\,dv = f(3) - f(1).$$

7. Se f e g forem contínuas em $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então
$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

8. Se f e g forem deriváveis e $f(x) \geqslant g(x)$ para $a < x < b$, então $f'(x) \geqslant g'(x)$ para $a < x < b$.

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^5 - 6x^9 + \frac{\operatorname{sen} x}{(1 + x^4)^2}\right) dx = 0.$

10. $\displaystyle\int_{-5}^{5} (ax^2 + bx + c)\,dx = 2\int_0^5 (ax^2 + c)\,dx.$

11. Todas as funções contínuas têm derivadas.

12. Todas as funções contínuas têm primitivas.

13. $\displaystyle\int_0^3 e^{x^2}\,dx = \int_0^5 e^{x^2}\,dx + \int_5^3 e^{x^2}\,dx.$

14. Se $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, então $f(x) = 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

15. Se f for contínua em $[a, b]$, então
$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = f(x).$$

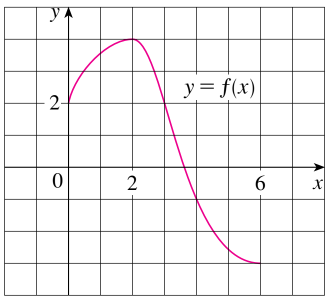
16. $\int_0^2 (x - x^3)\,dx$ representa a área sob a curva $y = x - x^3$ de 0 até 2.

17. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{3}{8}$

18. Se f tem uma descontinuidade em 0, então $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ não existe.

Exercícios

1. Use o gráfico dado de f para encontrar a soma de Riemann com seis subintervalos. Tome como pontos amostrais (a) as extremidades esquerdas e (b) os pontos médios. Em cada caso faça um diagrama e explique o que representa a soma de Riemann.



2. (a) Calcule a soma de Riemann para

$$f(x) = x^2 - x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2,$$

com quatro subintervalos, tomando como pontos amostrais as extremidades direitas. Explique, com a ajuda de um diagrama, o que representa a soma de Riemann.

(b) Use a definição de integral definida (com as extremidades direitas) para calcular o valor da integral

$$\int_0^2 (x^2 - x)\,dx.$$

(c) Use o Teorema Fundamental para verificar sua resposta da parte (b).

(d) Faça um diagrama para explicar o significado geométrico da integral na parte (b).

3. Calcule

$$\int_0^1 \left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$$

interpretando-a em termos de áreas.

4. Expresse

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} x_i \,\Delta x$$

como uma integral definida no intervalo $[0, \pi]$ e então calcule a integral.

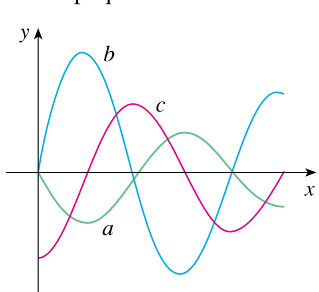
5. Se $\int_0^6 f(x)\,dx = 10$ e $\int_0^4 f(x)\,dx = 7$, encontre $\int_4^6 f(x)\,dx$.

6. (a) Escreva $\int_1^5 (x + 2x^5)\,dx$ como um limite das somas de Riemann, tomando como pontos amostrais as extremidades direitas. Use um SCA para calcular a soma e o limite.

SCA

(b) Use o Teorema Fundamental para verificar sua resposta da parte (a).

7. A figura a seguir mostra os gráficos de f, f' e $\int_0^x f(t)\,dt$. Identifique cada gráfico e explique suas escolhas.



8. Calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right) dx$ (b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\operatorname{arctg} x}\,dx$

(c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\operatorname{arctg} t}\,dt$

9–38 Calcule a integral.

9. $\displaystyle\int_1^2 (8x^3 + 3x^2)\,dx$ **10.** $\displaystyle\int_0^T (x^4 - 8x + 7)\,dx$

10. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^9)\,dx$ **12.** $\displaystyle\int_0^1 (1 - x)^9\,dx$

13. $\displaystyle\int_1^9 \frac{\sqrt{u} - 2u^2}{u}\,du$ **14.** $\displaystyle\int_0^1 (\sqrt[4]{u} + 1)^2\,du$

15. $\displaystyle\int_0^1 y(y^2 + 1)^5\,dy$ **16.** $\displaystyle\int_0^2 y^2\sqrt{1 + y^3}\,dy$

17. $\displaystyle\int_1^5 \frac{dt}{(t - 4)^2}$ **18.** $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi t)\,dt$

19. $\displaystyle\int_0^1 v^2\cos(v^3)\,dv$ **20.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{t^4\operatorname{tg} t}{2 + \cos t}\,dt$ **22.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$

23. $\displaystyle\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$ **24.** $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x}{x^2 - 4}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cossec}^2 x}{1 + \operatorname{cotg} x}\,dx$

27. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\pi t\,\cos\pi t\,dt$ **28.** $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,\cos(\cos x)\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ **30.** $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\ln(\cos x)\,dx$ **32.** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1 + x^4}\,dx$ **34.** $\displaystyle\int \operatorname{senh}(1 + 4x)\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{\sec\theta\,\operatorname{tg}\theta}{1 + \sec\theta}\,d\theta$ **36.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (1 + \operatorname{tg} t)^3\sec^2 t\,dt$

37. $\displaystyle\int_0^3 |x^2 - 4|\,dx$ **38.** $\displaystyle\int_0^4 |\sqrt{x} - 1|\,dx$

39–40 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique que sua resposta é razoável fazendo o gráfico da função e de sua primitiva (tome $C = 0$).

39. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\,dx$ **40.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

41. Use um gráfico para dar uma estimativa da área da região que está sob a curva $y = x\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Encontre a seguir a área exata.

42. Faça o gráfico da $f(x) = \cos^2 x\,\operatorname{sen} x$ e use-o para conjecturar o valor da integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. Calcule então a integral para confirmar sua conjectura.

43–48 Encontre a derivada da função.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

43. $F(x) = \int_0^x \dfrac{t^2}{1 + t^3}\, dt$

44. $F(x) = \int_x^1 \sqrt{t + \operatorname{sen} t}\, dt$

45. $g(x) = \int_0^{x^4} \cos(t^2)\, dt$

46. $g(x) = \int_1^{\operatorname{sen} x} \dfrac{1 - t^2}{1 + t^4}\, dt$

47. $y = \int_{\sqrt{x}}^{x} \dfrac{e^t}{t}\, dt$

48. $y = \int_{2x}^{3x+1} \operatorname{sen}(t^4)\, dt$

49–50 Use a Propriedade 8 das integrais para estimar o valor da integral.

49. $\int_1^3 \sqrt{x^2 + 3}\, dx$

50. $\int_3^5 \dfrac{1}{x + 1}\, dx$

51–54 Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade.

51. $\int_0^1 x^2 \cos x\, dx \leqslant \dfrac{1}{3}$

52. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

53. $\int_0^1 e^x \cos x\, dx \leqslant e - 1$

54. $\int_0^1 x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx \leqslant \pi/4$

55. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 6$ para aproximar $\int_0^3 \operatorname{sen}(x^3)\, dx$.

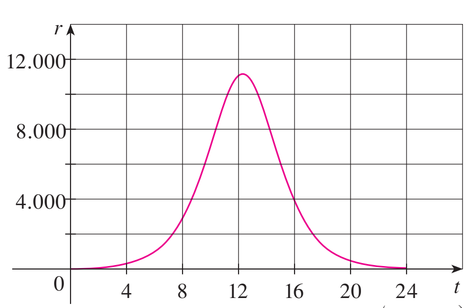
56. Uma partícula move-se ao longo de uma reta com uma função velocidade $v(t) = t^2 - t$, onde v é medida em metros por segundo. Ache (a) o deslocamento e (b) a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo $[0, 5]$.

57. Seja $r(t)$ a taxa do consumo mundial de petróleo, em que t é medido em anos começando em $t = 0$ em 1º de janeiro de 2000 e $r(t)$ é medida em barris por ano. O que representa $\int_0^8 r(t)\, dt$?

58. Um radar foi usado para registrar a velocidade de um corredor nos instantes dados na tabela. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a distância percorrida pelo corredor durante aqueles 5 segundos.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3,0	10,51
0,5	4,67	3,5	10,67
1,0	7,34	4,0	10,76
1,5	8,86	4,5	10,81
2,0	9,73	5,0	10,81
2,5	10,22		

59. Uma população de abelhas cresce a uma taxa de $r(t)$ abelhas por semana e o gráfico de r é mostrado a seguir. Use a Regra do Ponto Médio com seis subintervalos para estimar o crescimento na população de abelhas durante as primeiras 24 semanas.



60. Considere

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}.$$

Calcule $\int_{-3}^1 f(x)\, dx$ interpretando a integral como uma diferença de áreas.

61. Se f for contínua e $\int_0^2 f(x)\, dx = 6$, calcule

$$\int_0^{\pi/2} f(2 \operatorname{sen} \theta) \cos \theta\, d\theta.$$

62. A função de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right) dt$ foi introduzida na Seção 5.3. Fresnel também usou a função

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right) dt$$

em sua teoria da difração das ondas de luz.

(a) Em quais intervalos C é crescente?

(b) Em quais intervalos C é côncava para cima?

SCA (c) Use um gráfico para resolver a seguinte equação, com precisão de duas casas decimais:

$$\int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right) dt = 0{,}7$$

SCA (d) Desenhe os gráficos de C e S na mesma tela. Como estão relacionados esses gráficos?

63. Estime o valor do número c tal que a área sob a curva $y = \operatorname{senh} cx$ entre $x = 0$ e $x = 1$ seja igual a 1.

64. Suponha que a temperatura em uma barra longa e fina colocada sobre o eixo x seja inicialmente $C/(2a)$ se $|x| \leqslant a$ e 0 se $|x| > a$. Pode ser mostrado que se a difusividade do calor da barra for k, então sua temperatura em um ponto x no instante t é

$$T(x, t) = \frac{C}{a\sqrt{4\pi k t}} \int_0^a e^{-(x-u)^2/(4kt)}\, du.$$

Para acharmos a distribuição de temperatura que resulta de uma área quente concentrada inicialmente na origem, precisamos calcular

$$\lim_{a \to 0} T(x, t).$$

Use a Regra de l'Hôspital para encontrar esse limite.

65. Se f for uma função contínua tal que

$$\int_1^x f(t)\, dt = (x - 1)e^{2x} + \int_1^x e^{-t} f(t)\, dt$$

para todo x, ache uma fórmula explícita para $f(x)$.

66. Suponha que h seja uma função tal que $h(1) = -2$, $h'(1) = 2$, $h''(1) = 3$, $h(2) = 6$, $h'(2) = 5$, $h''(2) = 13$ e h'' seja contínua em toda a parte. Calcule $\int_1^2 h''(u)\, du$.

67. Se f' for contínua em $[a, b]$, mostre que

$$2\int_a^b f(x) f'(x)\, dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$$

68. Encontre $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1 + t^3}\, dt$.

69. Se f for contínua em $[0, 1]$, demonstre que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(1 - x)\, dx$$

70. Calcule

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{2}{n}\right)^9 + \left(\frac{3}{n}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^9\right]$$

71. Suponha que f seja contínua, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) > 0$ e $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{3}$. Encontre o valor da integral $\int_0^1 f^{-1}(y)\, dy$.

Problemas Quentes

Antes de olhar a solução do próximo exemplo, cubra-a e tente resolvê-lo você mesmo.

EXEMPLO 1 Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 3}\left(\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\text{sen}\, t}{t}\, dt\right)$.

SOLUÇÃO Vamos começar por uma análise preliminar dos ingredientes da função. O que acontece com o primeiro fator, $x/(x-3)$, quando x tende a 3? O numerador tende a 3 e o denominador a 0, portanto, temos

$$\frac{x}{x-3} \to \infty \quad \text{quando} \quad x \to 3^+ \qquad \text{e} \qquad \frac{x}{x-3} \to -\infty \quad \text{quando} \quad x \to 3^-$$

O segundo fator tende a $\int_3^3 (\text{sen}\, t)/t\, dt$, que é 0. Não está claro o que acontece com a função como um todo. (Um fator torna-se grande enquanto o outro torna-se pequeno.) Então, como procedemos?

Um dos princípios da resolução de problemas é *reconhecer alguma coisa familiar.* Haverá uma parte da função que nos lembre de alguma coisa vista antes? Bem, a integral

SP Os Princípios de Resolução de Problemas foram discutidos no Capítulo 1.

$$\int_3^x \frac{\text{sen}\, t}{t}\, dt$$

tem x como seu limite superior de integração, e esse tipo de integral ocorre na Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

Isso sugere que uma derivação pode estar envolvida.

Uma vez que começamos a pensar sobre a derivação, o denominador $(x - 3)$ lembra-nos de alguma coisa que pode ser familiar: um das formas de definição da derivada no Capítulo 2 é

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

e com $a = 3$ isso fica

$$F'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{F(x) - F(3)}{x - 3}$$

Logo, qual é a função F em nossa situação? Observe que se definirmos

$$F(x) = \int_3^x \frac{\text{sen}\, t}{t}\, dt$$

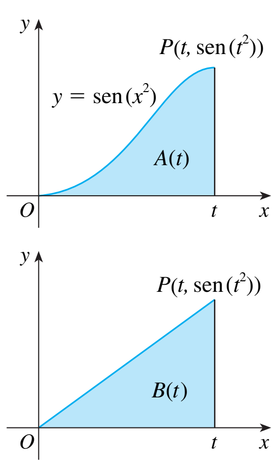
então $F(3) = 0$. O que acontece com o fator x no numerador? Ele é somente uma pista falsa, portanto vamos fatorá-lo e fazer o cálculo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3}\left(\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\text{sen}\, t}{t}\, dt\right) &= \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} \frac{\displaystyle\int_3^x \frac{\text{sen}\, t}{t}\, dt}{x-3} \\
&= 3 \lim_{x \to 3} \frac{F(x) - F(3)}{x - 3} \\
&= 3F'(3) = 3\,\frac{\text{sen}\, 3}{3} \qquad \text{(TFC1)} \\
&= \text{sen}\, 3
\end{aligned}$$

Outra estratégia é usar a Regra de l'Hôspital.

Problemas

1. Se $x \operatorname{sen} \pi x = \int_0^{x^2} f(t)\, dt$, onde f é uma função contínua, encontre $f(4)$.
2. Encontre o valor mínimo da área da região sob a curva $y = x + 1/x$ de $x = a$ a $x = a + 1{,}5$, para todo $a > 0$.
3. Se $\int_0^4 e^{(x-2)^4}\, dx = k$, encontre o valor de $\int_0^4 xe^{(x-2)^4}\, dx$.
4. (a) Faça os gráficos de vários membros da família de funções $f(x) = (2cx - x^2)/c^3$ para $c > 0$ e analise as regiões entre essas curvas e o eixo x. Como estão relacionadas as áreas dessas regiões?
   (b) Demonstre sua conjectura em (a).
   (c) Examine novamente os gráficos da parte (a) e use-os para esboçar a curva traçada pelos vértices (pontos mais altos) da família de funções. Você pode imaginar que tipo de curva ela é?
   (d) Ache a equação da curva que você esboçou na parte (c).
5. Se $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1 + t^3}}\, dt$, em que $g(x) = \int_0^{\cos x} [1 + \operatorname{sen}(t^2)]\, dt$, encontre $f'(\pi/2)$.
6. Se $f(x) = \int_0^x x^2 \operatorname{sen}(t^2)\, dt$, encontre $f'(x)$.
7. Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 - \operatorname{tg} 2t)^{1/t}\, dt$.



8. A figura mostra duas regiões no primeiro quadrante: $A(t)$ é a área sob a curva $y = \operatorname{sen}(x^2)$ de 0 a t, e $B(t)$ é a área do triângulo com vértices O, P e $(t, 0)$. Encontre $\lim_{t \to 0^+} A(t)/B(t)$.
9. Encontre o intervalo $[a, b]$ para o qual o valor da integral $\int_a^b (2 + x - x^2)\, dx$ é um máximo.
10. Use uma integral para estimar a soma $\sum_{i=1}^{10\,000} \sqrt{i}$.
11. (a) Calcule $\int_0^n [\![x]\!]\, dx$, onde n é um inteiro positivo.
    (b) Calcule $\int_a^b [\![x]\!]\, dx$, onde a e b são números reais com $0 \leqslant a < b$.
12. Encontre $\frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \left(\int_1^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1 + u^4}\, du \right) dt$.
13. Suponha que os coeficientes do polinômio cúbico $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ satisfaçam a equação
$$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = 0$$
    Mostre que a equação $P(x) = 0$ tem uma raiz entre 0 e 1. Você consegue generalizar esse resultado para um polinômio de grau n?
14. Um disco circular de raio r é usado em um evaporador e deve girar em um plano vertical. Ele deve ficar parcialmente submerso no líquido de tal forma que maximize a área molhada exposta do disco. Mostre que o centro do disco deve estar posicionado a uma altura $r/\sqrt{1 + \pi^2}$ acima da superfície do líquido.
15. Demonstre que se f for contínua, então $\int_0^x f(u)(x - u)\, du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\, dt \right) du$.
16. A figura mostra uma região formada por todos os pontos dentro de um quadrado que estão mais próximos de seu centro que de seus lados. Ache a área da região.
17. Calcule $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} \right)$.
18. Para um número c qualquer, seja $f_c(x)$ o menor dentre os dois números $(x - c)^2$ e $(x - c - 2)^2$. Definimos então $g(c) = \int_0^1 f_c(x)\, dx$. Encontre os valores máximo e mínimo de $g(c)$ se $-2 \leqslant c \leqslant 2$.

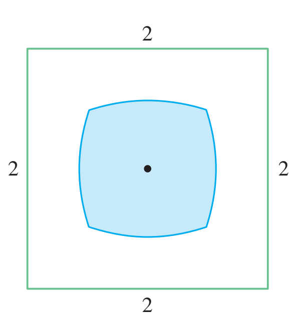


FIGURA PARA O PROBLEMA 16

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador