Sumário

3 Regras de Derivação

Para que uma volta de montanha-russa seja tranquila, as retas do trilho devem estar conectadas aos segmentos da curva de modo que não haja alterações bruscas na direção. Em Projeto Aplicado, você verá como projetar a primeira ascensão e queda de uma nova montanha-russa para uma volta tranquila.

Brett Mulcahy/Shutterstock

Vimos que as derivadas são interpretadas como inclinações e taxas de variação. Vimos também como estimar as derivadas de funções dadas por tabelas de valores. Aprendemos a fazer os gráficos de derivadas de funções definidas graficamente. Usamos a definição de derivada para calcular as derivadas de funções definidas por fórmulas. Mas seria tedioso se sempre usássemos a definição. Neste capítulo desenvolveremos regras para encontrar as derivadas sem usar diretamente a definição. Essas regras de derivação nos permitem calcular com relativa facilidade as derivadas de polinômios, funções racionais, funções algébricas, funções exponenciais e logarítmicas, além de funções trigonométricas e trigonométricas inversas. Em seguida, usaremos essas regras para resolver problemas envolvendo taxas de variação e aproximação de funções.

3.1 Derivadas de Funções Polinomiais e Exponenciais

Nesta seção aprenderemos a derivar as funções constantes, funções potências, funções polinomiais e exponenciais.

Vamos iniciar com a função mais simples, a função constante $f(x) = c$. O gráfico dessa função é a reta horizontal $y = c$, cuja inclinação é 0; logo, devemos ter $f'(x) = 0$ (veja a Figura 1). Uma demonstração formal, a partir da definição de uma derivada, é simples:

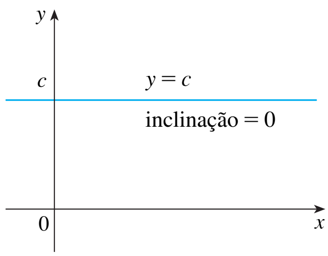


FIGURA 1
O gráfico de $f(x) = c$ é a reta $y = c$, logo $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Essa regra, na notação de Leibniz, é escrita da seguinte forma:

Derivada de uma Função Constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Funções Potências

Vamos olhar as funções $f(x) = x^n$, onde n é um inteiro positivo. Se $n = 1$, o gráfico de $f(x) = x$ é a reta $y = x$, cuja inclinação é 1 (veja a Figura 2). Então

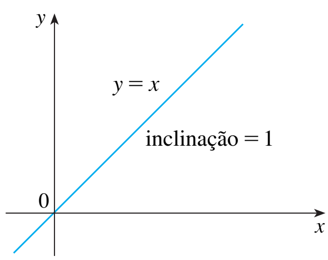


FIGURA 2
O gráfico de $f(x) = x$ é a reta $y = x$, logo $f'(x) = 1$.

1
$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

(Você também pode verificar a Equação 1 a partir da definição de derivada). Já investigamos os casos $n = 2$ e $n = 3$. De fato, na Seção 2.8 (Exercícios 19 e 20) determinamos que

2
$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Para $n = 4$ achamos a derivada de $f(x) = x^4$ a seguir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3 \end{aligned}$$

Logo,

3
$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Comparando as equações em $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ e $\boxed{3}$, vemos um modelo emergir. Parece ser uma conjectura plausível que, quando n é um inteiro positivo, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$. Resulta que isto é, de fato, verdade.

A Regra da Potência Se n for um inteiro positivo, então

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

PRIMEIRA DEMONSTRAÇÃO A fórmula

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

pode ser verificada simplesmente multiplicando-se o lado direito (ou somando-se o segundo fator como uma série geométrica). Se $f(x) = x^n$, podemos usar a Equação 2.7.5 para $f'(a)$ e a equação anterior para escrever

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

SEGUNDA DEMONSTRAÇÃO

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Para acharmos a derivada de x^4, tivemos que desenvolver $(x + h)^4$. Aqui precisamos desenvolver $(x + h)^n$, e usamos o Teorema Binomial para fazê-lo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

O Teorema Binomial é dado na Página de Referência 1.

porque cada termo, exceto o primeiro, tem fator h e, logo, tende a 0.

Ilustramos a Regra da Potência usando várias observações no Exemplo 1.

EXEMPLO 1

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6x^5$.

(b) Se $y = x^{1.000}$, então $y' = 1.000x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$.

O que dizer sobre as funções potências com os expoentes negativos? No Exercício 61 solicitamos que você verifique, a partir da definição de uma derivada, se

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Podemos reescrever essa equação como

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2}$$

de modo que a Regra da Potência é verdadeira quando $n = -1$. Na realidade, mostraremos na próxima seção [Exercício 62(c)] que ela é válida para todos os inteiros negativos.

E se o expoente for uma fração? No Exemplo 3 da Seção 2.8 encontramos que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Isso mostra que a Regra da Potência é verdadeira, mesmo quando $n = \frac{1}{2}$. Na realidade, mostraremos na Seção 3.6 que ela é verdadeira para todos os números reais n.

A Regra da Potência (Versão Geral) Se n for um número real qualquer, então

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

A Figura 3 ilustra a função no Exemplo 2(b) e sua derivada y'. Observe que y não é derivável em 0 (y' não é definida lá). Observe que y' é positiva quando y cresce, e é negativa quando y decresce.

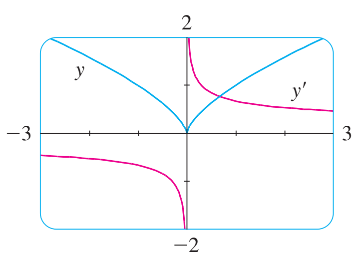


FIGURA 3
$y = \sqrt[3]{x^2}$

EXEMPLO 2 Derive:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

SOLUÇÃO Em cada caso reescrevemos a função como potência de x.
(a) Uma vez que $f(x) = x^{-2}$, usamos a Regra da Potência com $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

(b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \tfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$

A Regra da Potência nos permite encontrar retas tangentes sem ter de recorrer à definição de derivada. Também nos permite encontrar *retas normais*. A **reta normal** a uma curva C em um ponto P é a reta por P que é perpendicular à reta tangente em P. (No estudo de óptica, deve-se considerar o ângulo entre o raio de luz e a reta normal à lente.)

EXEMPLO 3 Encontre as equações da reta tangente e da reta normal à curva $y = x\sqrt{x}$ no ponto (1, 1). Ilustre fazendo o gráfico da curva e destas retas.

SOLUÇÃO A derivada de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{1/2} = x^{3/2}$ é

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

Logo, a inclinação da reta tangente em (1, 1) é $f'(1) = \frac{3}{2}$. Portanto, uma equação da reta tangente é

$$y - 1 = \tfrac{3}{2}(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

A reta normal é perpendicular à reta tangente, de modo que sua inclinação é o inverso negativo de $\frac{3}{2}$, ou seja, $-\frac{2}{3}$. Logo, uma equação de uma reta normal é

$$y - 1 = -\tfrac{2}{3}(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{5}{3}$$

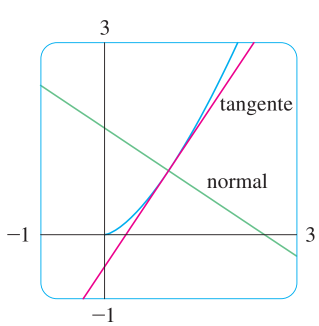


FIGURA 4
$y = x\sqrt{x}$

Traçamos o gráfico da curva, sua reta tangente e sua reta normal na Figura 4.

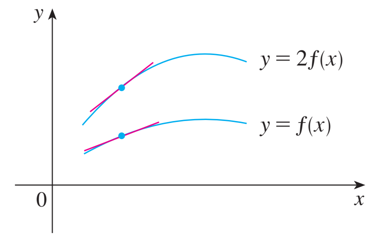
Novas Derivadas a Partir de Conhecidas

Quando novas funções são formadas a partir de outras por adição, subtração, multiplicação ou divisão, suas derivadas podem ser calculadas em termos das derivadas das funções originais. Particularmente, a fórmula a seguir nos diz que *a derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função*.

A Regra da Multiplicação por Constante Se c for uma constante e f, uma função derivável, então

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA REGRA DE MULTIPLICAÇÃO POR CONSTANTE



A multiplicação por $c = 2$ expande o gráfico verticalmente por um fator de 2. Todas as subidas foram dobradas, mas o deslocamento horizontal continua o mesmo. Logo, as inclinações ficam dobradas também.

DEMONSTRAÇÃO Seja $g(x) = cf(x)$. Então

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{(pela Propriedade 3 de limites)} \\ &= cf'(x). \end{aligned}$$

EXEMPLO 4

(a) $\dfrac{d}{dx}(3x^4) = 3\dfrac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$

(b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\dfrac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1.$

A regra a seguir nos diz que *a derivada de uma soma de funções é a soma das derivadas das funções*.

A Regra da Soma Se f e g forem ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

Usando a notação "linha", podemos escrever a Regra da Soma como

$$(f+g)' = f' + g'.$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $F(x) = f(x) + g(x)$. Então

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \qquad \text{(pela Propriedade 1)} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

A Regra da Soma pode ser estendida para a soma de qualquer número de funções. Por exemplo, usando esse teorema duas vezes, obtemos

$$(f+g+h)' = [(f+g)+h]' = (f+g)' + h' = f' + g' + h'$$

Escrevendo $f - g$ como $f + (-1)g$ e aplicando a Regra da Soma e a Regra da Multiplicação por Constante, obtemos a seguinte fórmula.

A Regra da Subtração Se f e g forem ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

As três regras anteriores podem ser combinadas com a Regra da Potência para derivar qualquer polinômio, como ilustram os exemplos a seguir.

EXEMPLO 5

$$\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0$$

$$= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6$$

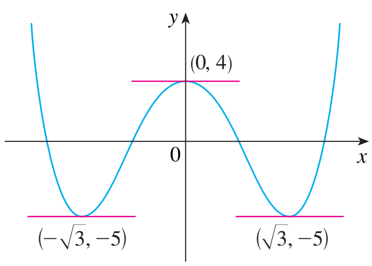


FIGURA 5
A curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ e suas tangentes horizontais

EXEMPLO 6 Encontre os pontos sobre a curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$, onde a reta tangente é horizontal.

SOLUÇÃO As tangentes horizontais ocorrem quando a derivada for zero. Temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4)$$

$$= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3)$$

Assim, $dy/dx = 0$ se $x = 0$ ou $x^2 - 3 = 0$, ou seja, $x = \pm\sqrt{3}$. Logo, a curva dada tem tangentes horizontais quando $x = 0$, $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$. Os pontos correspondentes são (0, 4), $(\sqrt{3}, -5)$ e $(-\sqrt{3}, -5)$. (Veja a Figura 5.)

EXEMPLO 7 A equação de movimento de uma partícula é $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, onde s é medida em centímetros e t, em segundos. Encontre a aceleração como uma função do tempo. Qual é a aceleração depois de 2 segundos?

SOLUÇÃO A velocidade e a aceleração são

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 10t + 3$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 10$$

A aceleração depois de 2 segundos é $a(2) = 14\ \text{cm/s}^2$.

Funções Exponenciais

Vamos tentar calcular a derivada da função exponencial $f(x) = a^x$ usando a definição de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

O fator a^x não depende de h, logo podemos colocá-lo adiante do limite:

$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}$$

Observe que o limite é o valor da derivada de f em 0, isto é,

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h} = f'(0)$$

Portanto, mostramos que se a função exponencial $f(x) = a^x$ for derivável em 0, então é derivável em toda parte e

4 $$f'(x) = f'(0)a^x$$

Essa equação diz que *a taxa de variação de qualquer função exponencial é proporcional à própria função*. (A inclinação é proporcional à altura.)

Uma evidência numérica para a existência de $f'(0)$ é dada na tabela à esquerda para os casos $a = 2$ e $a = 3$. (Os valores são dados com precisão até a quarta casa decimal.) Aparentemente, os limites existem e

$$\text{para } a = 2, \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0{,}69$$

$$\text{para } a = 3, \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1{,}10$$

h	$\dfrac{2^h - 1}{h}$	$\dfrac{3^h - 1}{h}$
0,1	0,7177	1,1612
0,01	0,6956	1,1047
0,001	0,6934	1,0992
0,0001	0,6932	1,0987

Na realidade, pode ser demonstrado que estes limites existem e, com precisão até a sexta casa decimal, seus valores são

$$\left.\frac{d}{dx}(2^x)\right|_{x=0} \approx 0{,}693147 \qquad \left.\frac{d}{dx}(3^x)\right|_{x=0} \approx 1{,}098612$$

Assim, da Equação 4, temos

5 $$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0{,}69)2^x \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1{,}10)3^x$$

De todas as possíveis escolhas para a base a do Exemplo 4, a fórmula de derivação mais simples ocorre quando $f'(0) = 1$. Em vista das estimativas de $f'(0)$ para $a = 2$ e $a = 3$, parece plausível que haja um número a entre 2 e 3 para o qual $f'(0) = 1$. É tradição denotar esse valor pela letra e. (Na realidade, foi assim que introduzimos e na Seção 1.5.) Desse modo, temos a seguinte definição.

No Exercício 1, veremos que e fica entre 2.7 e 2.8. Posteriormente, seremos capazes de mostrar isso, com precisão até cinco casas decimais,

$$e \approx 2{,}71828.$$

Definição do Número e

$$e \text{ é um número tal que} \quad \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Geometricamente, isso significa que, de todas as possíveis funções exponenciais $y = a^x$, a função $f(x) = e^x$ é aquela cuja reta tangente em (0, 1) tem uma inclinação $f'(0)$, que é exatamente 1 (veja as Figuras 6 e 7).

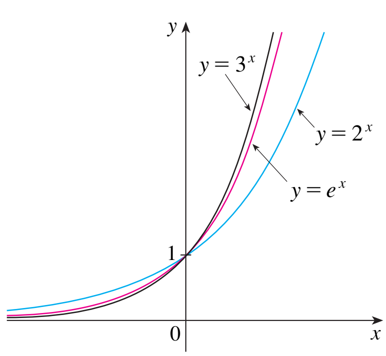


FIGURA 6

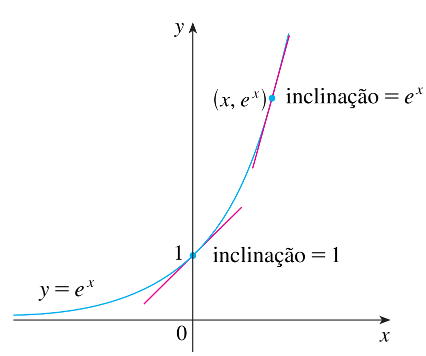


FIGURA 7

Se pusermos $a = e$, e consequentemente, $f'(0) = 1$ na Equação 4, teremos a seguinte importante fórmula de derivação:

TEC *Visual 3.1* usa um escopo de inclinação para ilustrar essa fórmula.

Derivada da Função Exponencial Natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Assim, a função exponencial $f(x) = e^x$ tem a propriedade de ser sua própria derivada. O significado geométrico desse fato é que a inclinação da reta tangente à curva $y = e^x$ é igual à coordenada y do ponto (veja a Figura 7).

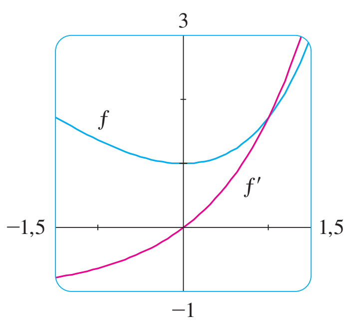


FIGURA 8

EXEMPLO 8 Se $f(x) = e^x - x$, encontre f' e f''. Compare os gráficos de f e f'.

SOLUÇÃO Usando a Regra da Diferença, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

Na Seção 2.8 definimos a segunda derivada como a derivada de f', de modo que

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

A Figura 8 exibe os gráficos da função f e sua derivada f'. Observe que f tem uma tangente horizontal quando $x = 0$, o que corresponde ao fato de que $f'(0) = 0$. Observe também que, para $x > 0$, $f'(x)$ é positivo e f é crescente. Quando $x < 0$, $f'(x)$ é negativo e f é decrescente.

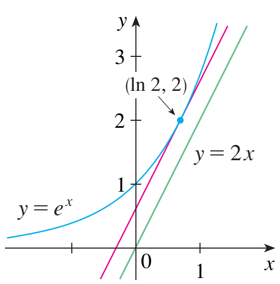


FIGURA 9

EXEMPLO 9 Em que ponto da curva $y = e^x$ sua reta tangente é paralela à reta $y = 2x$?

SOLUÇÃO Uma vez que $y = e^x$, temos $y' = e^x$. Seja a coordenada x do ponto em questão a. Então a inclinação da reta tangente nesse ponto é e^a. Essa reta tangente será paralela à reta $y = 2x$ se ela tiver a mesma inclinação, ou seja, 2. Igualando as inclinações, obtemos

$$e^a = 2 \qquad a = \ln 2$$

Portanto, o ponto pedido é $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$ (veja a Figura 9).

3.1 Exercícios

1. (a) Como é definido o número e?
(b) Use uma calculadora para estimar os valores dos limites

$$\lim_{h\to 0}\frac{2{,}7^h - 1}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0}\frac{2{,}8^h - 1}{h}$$

com precisão até a segunda casa decimal. O que você pode concluir sobre o valor de e?

2. (a) Esboce, à mão, o gráfico da função $f(x) = e^x$, prestando particular atenção em como o gráfico cruza o eixo y. Que fato lhe permite fazer isso?
(b) Que tipos de funções são $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^e$? Compare as fórmulas de derivação para f e g.
(c) Qual das funções da parte (b) cresce mais rapidamente quando x é grande?

3–32 Derive a função.

3. $f(x) = 186{,}5$
4. $f(x) = \sqrt{30}$
5. $f(x) = 5x - 1$
6. $F(x) = -4x^{10}$
7. $f(x) = x^3 - 4x + 6$
8. $f(t) = 1{,}4t^5 - 2{,}5t^2 + 6{,}7$
9. $g(x) = x^2(1 - 2x)$
10. $h(x) = (x - 2)(2x + 3)$
11. $y = x^{-2/5}$
12. $B(y) = cy^{-6}$
13. $A(s) = -\dfrac{12}{s^5}$
14. $y = x^{5/3} - x^{2/3}$
15. $R(a) = (3a + 1)^2$
16. $h(t) = \sqrt[4]{t} - 4e^t$
17. $S(p) = \sqrt{p} - p$
18. $y = \sqrt{x}\,(x - 1)$
19. $y = 3e^x + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$
20. $S(R) = 4\pi R^2$
21. $h(u) = Au^3 + Bu^2 + Cu$
22. $y = \dfrac{\sqrt{x} + x}{x^2}$
23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$
24. $g(u) = \sqrt{2}\,u + \sqrt{3u}$
25. $j(x) = x^{2,4} + e^{2,4}$
26. $k(r) = e^r + r^e$
27. $H(x) = (x + x^{-1})^3$
28. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

É necessário uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

29. $u = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$

30. $v = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$

32. $y = e^{x+1} + 1$

33–34 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

33. $y = \sqrt[4]{x}, \quad (1, 1)$

34. $y = x^4 + 2x^2 - x, \quad (1, 2)$

35–36 Encontre equações para a reta tangente e para a reta normal à curva no ponto dado.

35. $y = x^4 + 2e^x, \quad (0, 2)$

36. $y = x^2 - x^4, \quad (1, 0)$

37–38 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado Ilustre com o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

37. $y = 3x^2 - x^3, \quad (1, 2)$

38. $y = x - \sqrt{x}, \quad (1, 0)$

39–40 Encontre $f'(x)$. Compare os gráficos de f e f' e use-os para explicar por que sua resposta é razoável.

39. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$

40. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x - 1$

41. (a) Use uma calculadora gráfica ou computador para fazer o gráfico da função $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$ na janela retangular $[-3, 5]$ por $[-10, 50]$.
(b) Usando o gráfico da parte (a) para estimar as inclinações, faça um esboço, à mão, do gráfico de f' (veja o Exemplo 7 na Seção 2.8).
(c) Calcule $f'(x)$ e use essa expressão, com uma ferramenta gráfica, para fazer o gráfico de f'. Compare com seu esboço da parte (b).

42. (a) Use uma calculadora gráfica ou computador para fazer o gráfico da função $g(x) = e^x - 3x^2$ na janela retangular $[-1, 4]$ por $[-8, 8]$.
(b) Usando o gráfico da parte (a) para estimar as inclinações, faça um esboço, à mão, do gráfico de g' (veja o Exemplo 7 na Seção 2.8).
(c) Calcule $g'(x)$ e use essa expressão, com uma ferramenta gráfica, para fazer o gráfico de g'. Compare com seu esboço da parte (b).

43–44 Encontre a primeira e a segunda derivadas da função

43. $f(x) = 10x^{10} + 5x^5 - x$

44. $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

45–46 Encontre a primeira e a segunda derivadas da função. Verifique se suas respostas são razoáveis, comparando os gráficos de f, f' e f''.

45. $f(x) = 2x - 5x^{3/4}$

46. $f(x) = e^x - x^3$

47. A equação de movimento de uma partícula é $s = t^3 - 3t$, em que x está em metros e t, em segundos. Encontre
(a) a velocidade e a aceleração como funções de t,
(b) a aceleração depois de 2 s e
(c) a aceleração quando a velocidade for 0.

48. A equação de movimento de uma partícula é $s = t^4 - 2t^3 + t^2 - t$, em que s está em metros e t, em segundos.
(a) Encontre a velocidade e a aceleração como funções de t.
(b) Encontre a aceleração depois de 1 s.
(c) Trace o gráfico das funções de posição, velocidade e aceleração na mesma tela.

49. A Lei de Boyle diz que, quando uma amostra de gás é comprimida em uma pressão contante, a pressão P do gás é inversamente proporcional ao volume V do gás.
(a) Suponha que a pressão de uma amostra de ar que ocupa 0,106 m^3 a 25 ºC seja de 50 kPa. Escreva V como uma função de P.
(b) Calcule dV/dP quando $P = 50$ kPa. Qual o significado da derivada? Quais são suas unidades?

50. Os pneus de automóveis precisam ser inflados corretamente porque uma pressão interna inadequada pode causar um desgaste prematuro. Os dados na tabela mostram a vida útil do pneu L (em milhares de quilômetros) para um certo tipo de pneu em diversas pressões P (em kPa).

P	179	193	214	242	262	290	311
L	80	106	126	130	119	113	95

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para modelar a vida do pneu como uma função quadrática da pressão.
(b) Use o modelo para estimar dL/dP quando $P = 200$ e quando $P = 300$. Qual o significado da derivada? Quais são suas unidades? Qual é o significado dos sinais das derivadas?

51. Ache os pontos sobre a curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ onde a tangente é horizontal.

52. Que valores de x fazem com que o gráfico de $f(x) = e^x - 2x$ tenha uma reta tangente horizontal?

53. Mostre que a curva $y = 2e^x + 3x + 5x^3$ não tem reta tangente com inclinação 2.

54. Encontre uma equação para a reta tangente à curva $y = x\sqrt{x}$ que seja paralela à reta $y = 1 + 3x$.

55. Encontre equações para ambas as retas que são tangentes à curva $y = 1 + x^3$ e que são paralelas à reta $12x - y = 1$.

56. Em qual ponto sobre a curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ a reta tangente é paralela à reta $3x - y = 5$? Ilustre fazendo o gráfico da curva e de ambas as retas.

57. Encontre uma equação para a reta normal à parábola $y = x^2 - 5x + 4$ que seja paralela à reta $x - 3y = 5$.

58. Onde a reta normal à parábola $y = x - x^2$ no ponto $(1, 0)$ intercepta a parábola uma segunda vez? Ilustre com um esboço.

59. Trace um diagrama para mostrar que há duas retas tangentes à parábola $y = x^2$ que passam pelo ponto $(0, -4)$. Encontre as coordenadas dos pontos onde essas retas tangentes interceptam a parábola.

60. (a) Encontre as equações de ambas as retas pelo ponto $(2, -3)$ que são tangentes à parábola $y = x^2 + x$.
(b) Mostre que não existe nenhuma reta que passe pelo ponto $(2, 7)$ e que seja tangente à parábola. A seguir, desenhe um diagrama para ver por quê.

61. Use a definição de derivada para mostrar que, se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$. (Isso demonstra a Regra da Potência para o caso $n = -1$.)

62. Encontre a n-ésima derivada de cada função calculando algumas das primeiras derivadas e observando o padrão que ocorre.
(a) $f(x) = x^n$ (b) $f(x) = 1/x$

63. Encontre um polinômio de segundo grau P tal quer $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ e $P''(2) = 2$.

64. A equação $y'' + y' - 2y = x^2$ é chamada **equação diferencial**, pois envolve uma função desconhecida y e suas derivadas y' e y''. Encontre as constantes A, B e C tais que a função $y = Ax^2 + Bx + C$ satisfaça essa equação. (As equações diferenciais serão estudadas no Capítulo 9, no Volume II.)

65. Encontre uma função cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujo gráfico tenha tangentes horizontais nos pontos $(-2, 6)$ e $(2, 0)$.

66. Encontre uma parábola com a equação $y = ax^2 + bx + c$ que tenha inclinação 4 em $x = 1$, inclinação -8 em $x = -1$, e passe pelo ponto $(2, 15)$.

67. Considere

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ x + 1 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

f é derivável em 1? Esboce gráficos de f e f'.

68. Em quais números a seguinte função g é derivável?

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2x - x^2 & \text{se } 0 < x < 2 \\ 2 - x & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Dê uma fórmula para g' e esboce os gráficos de g e g'.

69. (a) Para quais valores de x a função $f(x) = |x^2 - 9|$ é derivável? Ache uma fórmula para f'.
(b) Esboce gráficos de f e f'.

70. Onde a função $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$ é derivável? Dê uma fórmula para h' e esboce os gráficos de h e h'.

71. Encontre a parábola com equação $y = ax^2 + bx$ cuja reta tangente em $(1, 1)$ tem equação $y = 3x - 2$.

72. Suponha que a curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenha uma reta tangente quando $x = 0$ com equação $y = 2x + 1$, e uma reta tangente quando $x = 1$ com equação $y = 2 - 3x$. Encontre os valores de a, b, c e d.

73. Para quais valores de a e b a reta $2x + y = b$ é tangente à parábola $y = ax^2$ quando $x = 2$?

74. Encontre o valor de c tal que a reta $y = \frac{3}{2}x + 6$ seja tangente à curva $y = c\sqrt{x}$.

75. Considere

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ mx + b & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Encontre os valores de m e b que tornem f derivável em toda parte.

76. Uma reta tangente à hipérbole $xy = c$ é traçada em um ponto P.
(a) Mostre que o ponto médio do segmento de reta cortado dessa reta tangente pelos eixos coordenados é P.
(b) Mostre que o triângulo formado pela reta tangente e pelos eixos coordenados sempre têm a mesma área, não importa onde P esteja localizado sobre a hipérbole.

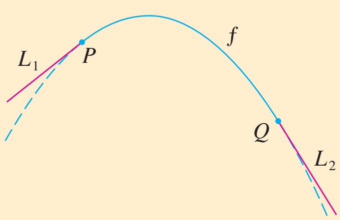
77. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^{1.000} - 1}{x - 1}$

78. Trace um diagrama ilustrando duas retas perpendiculares que se interceptam sobre o eixo y, ambas tangentes à parábola $y = x^2$. Onde essas retas se interceptam?

79. Se $c > \frac{1}{2}$, quantas retas pelo ponto $(0, c)$ são normais à parábola $y = x^2$? E se $c \leqslant \frac{1}{2}$?

80. Esboce as parábolas $y = x^2$ e $y = x^2 - 2x + 2$. Você acha que existe uma reta que seja tangente a ambas as curvas? Em caso afirmativo, encontre sua equação. Em caso negativo, explique por que não.

PROJETO APLICADO — CONSTRUINDO UMA MONTANHA-RUSSA MELHOR



Flashon Studio/Shutterstock

Suponha que lhe peçam para projetar a primeira subida e descida de uma montanha-russa. Estudando fotografias de suas montanhas-russas favoritas, você decide fazer a subida com inclinação 0,8, e a descida com inclinação $-1{,}6$. Você decide ligar esses dois trechos retos $y = L_1(x)$ e $y = L_2(x)$ com parte de uma parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, em que x e $f(x)$ são medidos em metros. Para o percurso ser liso, não pode haver variações bruscas na direção, de modo que você quer que os segmentos L_1 e L_2 sejam tangentes à parábola nos pontos de transição P e Q (veja a figura). Para simplificar as equações, você decide colocar a origem em P.

1. (a) Suponha que a distância horizontal entre P e Q seja 30 m. Escreva equações em a, b e c que garantam que o percurso seja liso nos pontos de transição.
(b) Resolva as equações da parte (a) para a, b e c para encontrar uma fórmula para $f(x)$.
(c) Trace L_1, f e L_2 para verificar graficamente que as transições são lisas.
(d) Encontre a diferença de elevação entre P e Q.

2. A solução do Problema 1 pode *parecer* lisa, mas poderia não ocasionar a sensação de lisa, pois a função definida por partes [que consiste em $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 30$, e $L_2(x)$ para $x > 30$] não tem uma segunda derivada contínua. Assim, você decide melhorar seu projeto, usando uma função quadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ apenas no intervalo $3 \leqslant x \leqslant 27$ e conectando-a às funções lineares por meio de duas funções cúbicas:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \qquad 0 \leqslant x < 3$$
$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \qquad 27 < x \leqslant 30$$

(a) Escreva um sistema de equações em 11 incógnitas que garanta que as funções e suas primeiras duas derivadas coincidam nos pontos de transição.
SCA (b) Resolva as equações da parte (a) com um sistema de computação algébrica para encontrar fórmulas para $q(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.
(c) Trace L_1, g, q, h e L_2, e compare com o gráfico do Problema 1(c).

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

3.2 As Regras de Produto e Quociente

As fórmulas desta seção nos permitem derivar novas funções formadas a partir de funções conhecidas por multiplicação ou divisão.

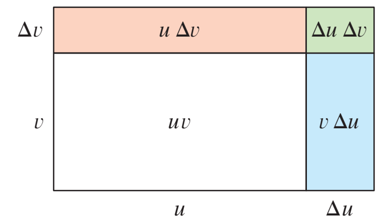


FIGURA 1
Geometria da Regra do Produto

A Regra do Produto

Por analogia com as Regras da Soma e da Diferença, alguém poderia tentar conjecturar, como Leibniz o fez três séculos atrás, que a derivada de um produto é o produto da derivada. Contudo, podemos ver que esta conjectura está errada examinando um exemplo particular. Sejam $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$. Então a Regra da Potência fornece $f'(x) = 1$ e $g'(x) = 2x$. Mas $(fg)(x) = x^3$, logo, $(fg)'(x) = 3x^2$. Assim, $(fg)' \neq f'g'$. A fórmula correta foi descoberta por Leibniz (logo depois de tentar a fórmula falsa) e é chamada Regra do Produto.

Antes de enunciar a Regra do Produto, vamos ver como poderíamos descobri-la. Começamos assumindo que $u = f(x)$ e $v = g(x)$ são ambas funções positivas deriváveis. Então podemos interpretar o produto uv como a área de um retângulo (veja a Figura 1). Se x variar por uma quantidade Δx, as variações correspondentes então em u e v são

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

e o novo valor do produto, $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$, pode ser interpretado como a área do retângulo maior da Figura 1 (desde que Δu e Δv sejam positivos).

A variação na área do retângulo é

$$\boxed{1} \qquad \Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$
$$= \text{a soma das três áreas sombreadas.}$$

Se dividirmos por Δx, obtemos

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Lembre-se de que na notação de Leibniz a definição de derivada pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Se fizermos $\Delta x \to 0$, obtemos a derivada de uv:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$
$$= u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x \to 0}\Delta u\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$
$$= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\boxed{2} \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

(Observe que $\Delta u \to 0$ quando $\Delta x \to 0$, uma vez que f é derivável e, portanto, contínua.)

Embora tenhamos inicialmente suposto (para a interpretação geométrica) que todas as quantidades são positivas, vemos que a Equação 1 é sempre verdadeira. (A álgebra é válida se u, v, Δu e Δv forem positivos ou negativos.) Logo, demonstramos a Equação 2, conhecida como a Regra do Produto, para todas as funções deriváveis u e v.

A Regra do Produto Se f e g são ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Na notação "linha":

$$(fg)' = fg' + gf'$$

Em outras palavras, a Regra do Produto diz que *a derivada de um produto de duas funções é a primeira função vezes a derivada da segunda função mais a segunda função vezes a derivada da primeira função*.

A Figura 2 ilustra os gráficos da função f do Exemplo 1 e sua derivada f'. Observe que $f'(x)$ é positiva quando f for crescente e negativa quando f for decrescente.

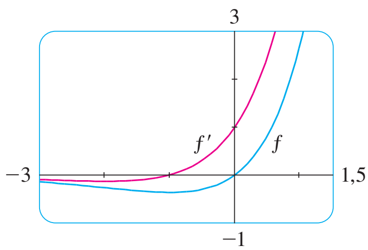


FIGURA 2

EXEMPLO 1

(a) Se $f(x) = xe^x$, encontre $f'(x)$.

(b) Encontre a n-ésima derivada, $f^{(n)}(x)$.

SOLUÇÃO

(a) Pela Regra do Produto, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(xe^x) \\ &= x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x) \\ &= xe^x + e^x \cdot 1 = (x+1)e^x \end{aligned}$$

(b) Usando a Regra do Produto uma segunda vez, obtemos

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}[(x+1)e^x] \\ &= (x+1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x+1) \\ &= (x+1)e^x + e^x \cdot 1 = (x+2)e^x \end{aligned}$$

Aplicações subsequentes da Regra do Produto nos dão

$$f'''(x) = (x+3)e^x \qquad f^{(4)}(x) = (x+4)e^x$$

Na realidade, cada derivação sucessiva adiciona outro termo e^x, logo

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

No Exemplo 2, a e b são constantes. É usual em matemática usar letras perto do início do alfabeto para representar constantes e letras perto do fim do alfabeto para representar variáveis.

EXEMPLO 2 Derive a função $f(t) = \sqrt{t}\,(a + bt)$.

SOLUÇÃO 1 Usando a Regra do Produto, temos

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(a+bt) + (a+bt)\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\right) \\ &= \sqrt{t}\cdot b + (a+bt)\cdot \tfrac{1}{2}t^{-1/2} \\ &= b\sqrt{t} + \frac{a+bt}{2\sqrt{t}} = \frac{a+3bt}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

SOLUÇÃO 2 Se primeiro usarmos as propriedades dos expoentes para reescrever $f(t)$, então poderemos prosseguir diretamente sem usar a Regra do Produto:

$$\begin{aligned} f(t) &= a\sqrt{t} + bt\sqrt{t} = at^{1/2} + bt^{3/2} \\ f'(t) &= \tfrac{1}{2}at^{-1/2} + \tfrac{3}{2}bt^{1/2} \end{aligned}$$

que é igual à resposta dada na Solução 1.

O Exemplo 2 mostra que algumas vezes é mais fácil simplificar um produto de funções antes da derivação do que usar a Regra do Produto. No Exemplo 1, entretanto, a Regra do Produto é o único método possível.

EXEMPLO 3 Se $f(x) = \sqrt{x}\, g(x)$, onde $g(4) = 2$ e $g'(4) = 3$, encontre $f'(4)$.

SOLUÇÃO Aplicando a Regra do Produto, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\, g(x)\right] = \sqrt{x}\,\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\,\frac{d}{dx}[\sqrt{x}\,] \\ &= \sqrt{x}\, g'(x) + g(x) \cdot \tfrac{1}{2}x^{-1/2} \\ &= \sqrt{x}\, g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Logo
$$f'(4) = \sqrt{4}\, g'(4) + \frac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2 \cdot 3 + \frac{2}{2 \cdot 2} = 6{,}5$$

A Regra do Quociente

Vamos determinar uma fórmula para derivar o quociente de duas funções diferenciáveis $u = f(x)$ e $v = g(x)$ do mesmo modo que obtivemos a Regra do Produto. Se x, u, e v variam em quantidades Δx, Δu e Δv, então a correspondente variação no quociente u/v será

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)} \\ &= \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}, \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

Quando $\Delta x \to 0$, $\Delta v \to 0$ também, pois $v = g(x)$ é derivável e, portanto, contínua. Logo, usando as Propriedades dos Limites, obtemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

A Regra do Quociente Se f e g são deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Na notação "linha":

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Em outros termos, a Regra do Quociente diz que *a derivada de um quociente é o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, todos divididos pelo quadrado do denominador.*

A Regra do Quociente e as outras fórmulas de derivação nos permitem calcular a derivada de qualquer função racional, como ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4 Seja $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. Então

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2} \\ &= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2} \end{aligned}$$

Podemos usar uma ferramenta gráfica para verificar que a resposta para o Exemplo 4 é plausível. A Figura 3 ilustra os gráficos da função do Exemplo 4 de sua derivada. Observe que, quando y cresce rapidamente (próximo de -2), y' é grande. E quando y cresce vagarosamente, y' está próximo de 0.

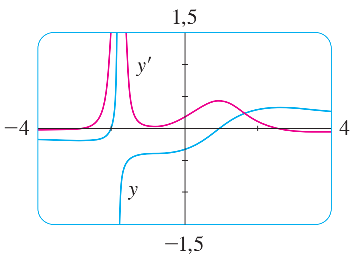


FIGURA 3

$$= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}$$

EXEMPLO 5 Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = e^x/(1 + x^2)$ no ponto $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$.

SOLUÇÃO Segundo a Regra do Quociente, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x^2)\dfrac{d}{dx}(e^x) - e^x\dfrac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2)e^x - e^x(2x)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2}$$

Logo, a inclinação da reta tangente em $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$ é

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

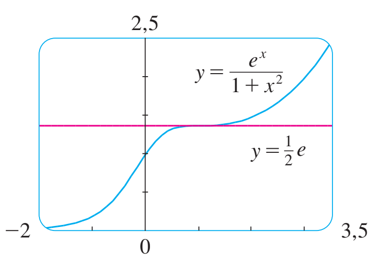


FIGURA 4

Isso significa que a reta tangente em $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$ é horizontal, e sua equação é $y = \frac{1}{2}e$. [Veja a Figura 4. Observe que a função está crescendo e cruza sua reta tangente em $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$.]

OBSERVAÇÃO Não use a Regra do Quociente *toda* vez que você vir um quociente. Algumas vezes é mais fácil reescrever um quociente primeiro, colocando-o em uma forma que seja mais simples para derivar. Por exemplo, embora seja possível derivar a função

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

usando a Regra do Quociente, é muito mais fácil efetuar primeiro a divisão e escrever a função como

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

antes de derivar.

A seguir está um resumo das regras de derivação que aprendemos até agora:

Tabela de Fórmulas de Derivação

$\dfrac{d}{dx}(c) = 0$	$\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$(cf)' = cf'$	$(f + g)' = f' + g'$	$(f - g)' = f' - g'$
$(fg)' = fg' + gf'$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{gf' - fg'}{g^2}$	

3.2 Exercícios

1. Encontre a derivada $f(x) = (1 + 2x^2)(x - x^2)$ de duas formas: usando a Regra do Produto e efetuando primeiro a multiplicação. As respostas são iguais?

2. Encontre a derivada da função

$$F(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + \sqrt{x}}{x^2}$$

de duas formas: usando a Regra do Quociente e simplificando antes. Mostre que suas respostas são equivalentes. Qual método você prefere?

3–26 Derive.

3. $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$

7. $g(x) = \dfrac{3x - 1}{2x + 1}$

8. $f(t) = \dfrac{2t}{4 + t^2}$

9. $H(u) = (u - \sqrt{u})(u + \sqrt{u})$

10. $J(v) = (v^3 - 2v)(v^{-4} + v^{-2})$

11. $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

12. $f(z) = (1 - e^z)(z + e^z)$

13. $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

14. $y = \dfrac{x + 1}{x^3 + x - 2}$

15. $y = \dfrac{t^2 + 2}{t^4 - 3t^2 + 1}$

16. $y = \dfrac{t}{(t - 1)^2}$

17. $y = e^p(p + p\sqrt{p})$

18. $y = \dfrac{1}{s + ke^s}$

19. $y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$

20. $z = w^{3/2}(w + ce^w)$

21. $f(t) = \dfrac{2t}{2 + \sqrt{t}}$

22. $g(t) = \dfrac{t - \sqrt{t}}{t^{1/3}}$

23. $f(x) = \dfrac{A}{B + Ce^x}$

24. $f(x) = \dfrac{1 - xe^x}{x + e^x}$

25. $f(x) = \dfrac{x}{x + \dfrac{c}{x}}$

26. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

27–30 Encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.

27. $f(x) = x^4e^x$

28. $f(x) = x^{5/2}e^x$

29. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2x}$

30. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

31–32 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto especificado.

31. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$, $(1, 0)$

32. $y = \dfrac{e^x}{x}$, $(1, e)$

33–34 Encontre equações para a reta tangente e para a reta normal à curva no ponto especificado.

33. $y = 2xe^x$, $(0, 0)$

34. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$, $(1, 1)$

35. (a) A curva $y = 1/(1 + x^2)$ é chamada **bruxa de Maria Agnesi**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

36. (a) A curva $y = x/(1 + x^2)$ é denominada **serpentina**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto (3; 0,3).
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

37. (a) Se $f(x) = (x^3 - x)e^x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta em (a) é razoável, comparando os gráficos de f e f'.

38. (a) Se $f(x) = e^x/(2x^2 + x + 1)$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta em (a) é razoável, comparando os gráficos de f e f'.

39. (a) Se $f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.
(b) Verifique se suas respostas em (a) são razoáveis, comparando os gráficos de f, f' e f''.

40. (a) Se $f(x) = (x^2 - 1)e^x$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.
(b) Verifique se suas respostas em (a) são razoáveis, comparando os gráficos de f, f' e f''.

41. Se $f(x) = x^2/(1 + x)$, encontre $f''(1)$.

42. Se $g(x) = x/e^x$, encontre $g^{(n)}(x)$.

43. Suponha que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ e $g'(5) = 2$. Encontre os seguintes valores.
(a) $(fg)'(5)$ (b) $(f/g)'(5)$ (c) $(g/f)'(5)$

44. Suponha que $f(2) = -3$, $g(2) = 4$, $f'(2) = -2$ e $g'(2) = 7$. Encontre $h'(2)$.
(a) $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$ (b) $h(x) = f(x)g(x)$
(c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (d) $h(x) = \dfrac{g(x)}{1 + f(x)}$

45. Se $f(x) = e^xg(x)$, onde $g(0) = 2$ e $g'(0) = 5$, encontre $f'(0)$.

46. Se $h(2) = 4$ e $h'(2) = -3$, encontre

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}$$

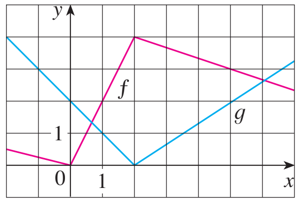
47. Se $g(x) = xf(x)$, onde $f(3) = 4$ e $f'(3) = -2$, encontre uma equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto onde $x = 3$.

48. Se $f(2) = 10$ e $f'(x) = x^2f(x)$ para todo x, encontre $f''(2)$.

49. Se f e g são as funções cujos gráficos estão ilustrados, sejam $u(x) = f(x)g(x)$ e $v(x) = f(x)/g(x)$.
(a) Encontre $u'(1)$. (b) Encontre $v'(5)$.

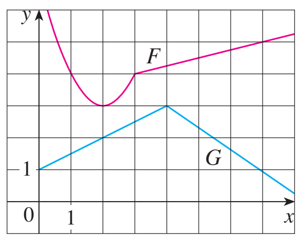
É necessário uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com



50. Sejam $P(x) = F(x)G(x)$ e $Q(x) = F(x)/G(x)$, onde F e G são as funções cujos gráficos estão representados a seguir.

(a) Encontre $P'(2)$. (b) Encontre $Q'(7)$.



51. Se g for uma função derivável, encontre uma expressão para a derivada de cada uma das seguintes funções.

(a) $y = xg(x)$ (b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$ (c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$

52. Se f for uma função derivável, encontre uma expressão para a derivada de cada uma das seguintes funções.

(a) $y = x^2 f(x)$ (b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$

(c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ (d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

53. Quantas retas tangentes à curva $y = x/(x + 1)$ passam pelo ponto $(1, 2)$? Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?

54. Encontre as equações de retas tangentes à curva

$$y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

que sejam paralelas à reta $x - 2y = 2$.

55. Encontre $R'(0)$, onde

$$R(x) = \frac{x - 3x^3 + 5x^5}{1 + 3x^3 + 6x^6 + 9x^9}$$

Dica: em vez de encontrar $R'(x)$ primeiro, deixe $f(x)$ ser o numerador e $g(x)$, o denominador de $R(x)$, e compute $R'(0)$ de $f(0)$, $f'(0)$, $g(0)$ e $g'(0)$.

56. Use o método do Exercício 55 para computar $Q'(0)$, onde

$$Q(x) = \frac{1 + x + x^2 + xe^x}{1 - x + x^2 - xe^x}$$

57. Neste exercício, estimaremos a taxa segundo a qual a renda pessoal total está subindo na área metropolitana da cidade de Richmond-Petersburg, Virgínia. Em julho de 1999, a população dessa área era de 961.400, e estava crescendo aproximadamente em 9.200 pessoas por ano. O rendimento anual médio era de \$ 30.593 *per capita*, e essa média crescia em torno de \$ 1.400 por ano (bem acima da média nacional, de cerca de \$ 1.225 anuais). Use a Regra do Produto e os dados aqui fornecidos para estimar a taxa segundo a qual a renda pessoal total estava crescendo em Richmond-Petersburg em julho de 1999. Explique o significado de cada termo na Regra do Produto.

58. Um fabricante produz peças de tecido com tamanho fixo. A quantidade q de cada peça de tecido (medida em metros) vendida é uma função do preço p (em dólares por metro); logo, podemos escrever $q = f(p)$. Então, a receita total conseguida com o preço de venda p é $R(p) = pf(p)$.

(a) O que significa dizer que $f(20) = 10\,000$ e $f'(20) = -350$?

(b) Tomando os valores da parte (a), encontre $R'(20)$ e interprete sua resposta.

59. (a) Use duas vezes a Regra do Produto para demonstrar que, se f, g e h forem deriváveis, então $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.

(b) Fazendo $f = g = h$ na parte (a), mostre que

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x).$$

(c) Use a parte (b) para derivar $y = e^{3x}$.

60. (a) Se $F(x) = f(x)\,g(x)$, onde f e g têm derivadas de todas as ordens, mostre que $F'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

(b) Encontre fórmulas análogas para F''' e $F^{(4)}$.

(c) Conjecture uma fórmula para $F^{(n)}$.

61. Encontre expressões para as primeiras cinco derivadas de $f(x) = x^2e^x$. Você percebe um padrão nestas expressões? Crie uma fórmula para $f^{(n)}(x)$ e demonstre-a usando a indução matemática.

62. (a) Se g for derivável, a **Regra do Recíproco** diz que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Use a Regra do Quociente para demonstrar a Regra do Recíproco.

(b) Use a Regra do Recíproco para derivar a função do Exercício 18.

(c) Use a Regra do Recíproco para verificar que a Regra da Potência é válida para os inteiros negativos, isto é,

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

para todo inteiro positivo n.

3.3 Derivadas de Funções Trigonométricas

Antes de começar esta seção, talvez você precise revisar as funções trigonométricas. Em particular, é importante lembrar-se de que quando falamos sobre a função f definida para todo número real x por

Uma revisão das funções trigonométricas é dada no Apêndice D.

$$f(x) = \text{sen } x$$

entende-se que sen x significa que o seno do ângulo cuja medida em *radianos* é x. Uma convenção similar é adotada para as outras funções trigonométricas cos, tg, cossec, sec e cotg. Lembre-se, da Seção 2.5, de que todas as funções trigonométricas são contínuas em todo número em seus domínios.

Se esboçarmos o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$ e usarmos a interpretação de $f'(x)$ como a inclinação da tangente à curva do seno a fim de esboçar o gráfico de f' (veja o Exercício 14 da Seção 2.8), isso dará a impressão de que o gráfico de f' pode ser igual à curva do cosseno (veja a Figura 1).

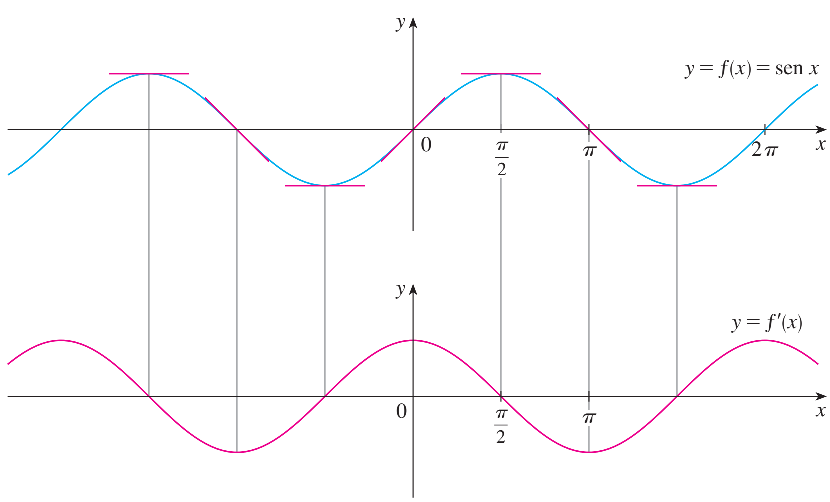


FIGURA 1

TEC *Visual 3.3* mostra uma animação da Figura 1.

Vamos tentar confirmar nossa conjectura de que, se $f(x) = \text{sen } x$, então $f'(x) = \cos x$. Da definição da derivada, temos

Usamos a fórmula da adição para o seno. Veja o Apêndice D.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } x \cos h + \cos x \text{ sen } h - \text{sen } x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\text{sen } x \cos h - \text{sen } x}{h} + \frac{\cos x \text{ sen } h}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\text{sen } x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\text{sen } h}{h} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{1} \qquad = \lim_{h \to 0} \text{sen } x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } h}{h}$$

Dois desses quatro limites são fáceis de calcular. Uma vez que consideramos x uma constante quando calculamos um limite quando $h \to 0$, temos

$$\lim_{h \to 0} \text{sen } x = \text{sen } x \qquad \text{e} \qquad \lim_{h \to 0} \cos x = \cos x$$

O limite de $(\text{sen } h)/h$ não é tão óbvio. No Exemplo 3 da Seção 2.2 fizemos a conjectura, com base nas evidências numéricas e gráficas, de que

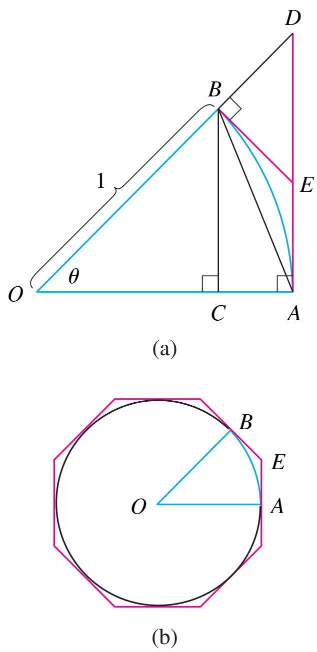


FIGURA 2

2 $$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$$

Usamos agora um argumento geométrico para demonstrar a Equação 2. Suponha primeiro que θ se encontre entre 0 e $\pi/2$. A Figura 2(a) mostra um setor de um círculo com centro O, ângulo central θ e raio 1. BC é traçado perpendicular a OA. Pela definição de medida em radianos, temos arc $AB = \theta$. Além disso, $|BC| = |OB| \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta$. Do diagrama, vemos que

$$|BC| < |AB| < \text{arc } AB$$

Portanto $$\operatorname{sen} \theta < \theta \qquad \text{de modo que} \qquad \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1$$

Assuma que as retas tangentes em A e B se intersectam em E. Você pode ver da Figura 2(b) que o comprimento de um círculo é menor que o comprimento de um polígono circunscrito; de modo que arc $AB < |AE| + |EB|$. Assim,

$$\begin{aligned} \theta = \text{arc } AB &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA| \operatorname{tg} \theta \\ &= \operatorname{tg} \theta \end{aligned}$$

(No Apêndice F, a desigualdade $\theta \leqslant \operatorname{tg} \theta$ é demonstrada diretamente da definição do comprimento de um arco, sem recorrer à intuição geométrica como fizemos aqui.) Portanto, temos

$$\theta < \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

de modo que $$\cos \theta < \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1$$

Sabemos que $\lim_{\theta \to 0} 1 = 1$ e $\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$; portanto, pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$$

Mas a função $(\operatorname{sen} \theta)/\theta$ é uma função par; assim, seus limites à direita e à esquerda devem ser iguais. Logo, temos

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$$

e, demonstramos a Equação 2.

Podemos deduzir o valor do limite que restou em $\boxed{1}$ como segue

Multiplicamos o numerador e o denominador por $\cos \theta + 1$ para colocar a função em uma forma na qual podemos usar os limites que conhecemos.

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} &= \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\cos \theta - 1}{\theta} \cdot \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta + 1} \right) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos^2 \theta - 1}{\theta (\cos \theta + 1)} \\ &= \lim_{\theta \to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 \theta}{\theta (\cos \theta + 1)} = -\lim_{u \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta + 1} \right) \\ &= -\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta + 1} \\ &= -1 \cdot \left(\frac{0}{1 + 1} \right) = 0 \qquad \text{(pela Equação 2)} \end{aligned}$$

3 $$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0$$

Se agora colocarmos os limites $\boxed{2}$ e $\boxed{3}$ em $\boxed{1}$, obtemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= (\operatorname{sen} x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x$$

Logo, demonstramos a fórmula para a derivada da função seno:

4 $$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

A Figura 3 ilustra os gráficos da função do Exemplo 1 e suas derivadas. Observe que $y' = 0$ sempre que y tiver a tangente horizontal.

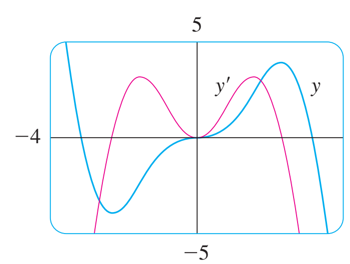


FIGURA 3

EXEMPLO 1 Derive $y = x^2 \operatorname{sen} x$.

SOLUÇÃO Usando a Regra do Produto e a Fórmula 4, temos

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$$

Utilizando o mesmo método que na demonstração da Fórmula 4, você pode demonstrar (veja o Exercício 20) que

5 $$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

A função tangente também pode ser derivada empregando a definição de derivada, mas é mais fácil usar a Regra do Quociente com as Fórmulas 4 e 5:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

6 $$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$$

As derivadas das funções trigonométricas que restaram, cossec, sec e cotg, também podem ser encontradas facilmente usando a Regra do Quociente (veja os Exercícios 17-19). Reunimos todas as fórmulas de derivação para funções trigonométricas na tabela a seguir. Lembre-se de que elas são válidas apenas quando x estiver medido em radianos.

Quando você for memorizar esta tabela, é útil observar que o sinal de menos aparece nas derivadas das funções que têm "co" no nome: cosseno, cossecante e cotangente.

Derivadas de Funções Trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\text{cossec } x) = -\text{cossec } x \text{ cotg } x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen } x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \text{ tg } x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{tg } x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\text{cotg } x) = -\text{cossec}^2 x$$

EXEMPLO 2 Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \text{tg } x}$. Para quais valores de x o gráfico de f tem reta tangente horizontal?

SOLUÇÃO A Regra do Quociente dá

$$f'(x) = \frac{(1 + \text{tg } x)\frac{d}{dx}(\sec x) - \sec x \frac{d}{dx}(1 + \text{tg } x)}{(1 + \text{tg } x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \text{tg } x) \sec x \text{ tg } x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \text{tg } x)^2}$$

$$= \frac{\sec x (\text{tg } x + \text{tg}^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \text{tg } x)^2}$$

$$= \frac{\sec x (\text{tg } x - 1)}{(1 + \text{tg } x)^2}$$

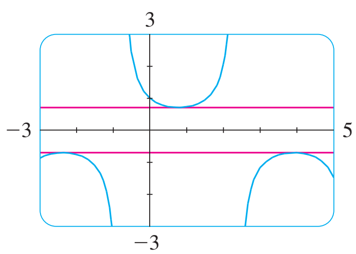


FIGURA 4
As tangentes horizontais no Exemplo 2

Na simplificação da resposta, usamos a identidade $\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Uma vez que $\sec x$ nunca é 0, vemos que $f'(x) = 0$ quando $\text{tg } x = 1$, e isso ocorre quando $x = n\pi + \pi/4$, onde n é um inteiro (veja a Figura 4).

As funções trigonométricas muitas vezes são usadas em modelos de fenômenos do mundo real. Em particular, as vibrações, ondas, movimentos elásticos e outras grandezas que variem de maneira periódica podem ser descritos utilizando-se as funções trigonométricas. A seguir, analisaremos um exemplo de movimento harmônico simples.

EXEMPLO 3 Um objeto na extremidade de uma mola vertical é esticado 4 cm além de sua posição no repouso e solto no tempo $t = 0$. (Veja a Figura 5 e observe que o sentido positivo é para baixo.) Sua posição no tempo t é

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

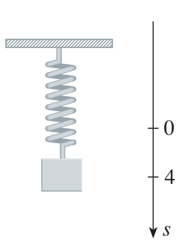


FIGURA 5

Encontre a velocidade e a aceleração no tempo t e use-as para analisar o movimento do objeto.

SOLUÇÃO A velocidade e a aceleração são

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = 4 \frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \text{ sen } t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4 \text{ sen } t) = -4 \frac{d}{dt}(\text{sen } t) = -4 \cos t$$

O objeto oscila desde o ponto mais baixo ($s = 4$ cm) até o mais alto ($s = -4$ cm). O período de oscilação é 2π, o período de $\cos t$.

A velocidade é $|v| = 4|\text{sen } t|$, que é a máxima quando $|\text{sen } t| = 1$, ou seja, quando $\cos t = 0$. Assim, o objeto move-se mais rapidamente quando passa por sua posição de equilíbrio ($s = 0$). Sua velocidade escalar é 0 quando $\text{sen } t = 0$, ou seja, no ponto mais alto e no mais baixo.

A aceleração $a = -4 \cos t = 0$ quando $s = 0$. Ela tem seu maior módulo nos pontos mais altos e mais baixos. Veja os gráficos na Figura 6.

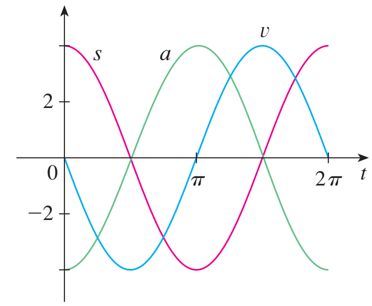


FIGURA 6

EXEMPLO 4 Encontre a 27ª derivada de $\cos x$.

SP Busque um padrão.

SOLUÇÃO Algumas das primeiras derivadas de $f(x) = \cos x$ são as seguintes:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\text{sen } x \\ f''(x) &= -\cos x \\ f'''(x) &= \text{sen } x \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \\ f^{(5)}(x) &= -\text{sen } x \end{aligned}$$

Vemos que as derivadas sucessivas ocorrem em um ciclo de comprimento 4 e, em particular, $f^{(n)}(x) = \cos x$ sempre que n for um múltiplo de 4. Portanto,

$$f^{(24)}(x) = \cos x$$

e, derivando mais três vezes, temos

$$f^{(27)}(x) = \text{sen } x$$

Nosso uso principal para o limite na Equação 2 foi demonstrar a fórmula de derivação para a função seno. Mas esse limite também é útil na determinação de outros limites envolvendo trigonometria, como nos dois exemplos a seguir.

EXEMPLO 5 Encontre $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 7x}{4x}$.

SOLUÇÃO Para aplicarmos a Equação 2, vamos primeiro reescrever a função multiplicando e dividindo por 7:

Observe que $\text{sen } 7x \neq 7 \text{ sen } x$.

$$\frac{\text{sen } 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\text{sen } 7x}{7x}\right)$$

Se fizermos $\theta = 7x$, então $\theta \to 0$ quando $x \to 0$, logo, pela Equação 2 temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 7x}{4x} &= \frac{7}{4} \lim_{x \to 0}\left(\frac{\text{sen } 7x}{7x}\right) \\ &= \frac{7}{4} \lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

EXEMPLO 6 Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \operatorname{cotg} x$.

SOLUÇÃO Aqui, dividimos o numerador e o denominador por x:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} x \operatorname{cotg} x &= \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\text{sen } x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\text{sen } x}{x}} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to 0} \cos x}{\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}} \\ &= \frac{\cos 0}{1} \qquad \text{(pela continuidade do cosseno e pela Equação 2)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

3.3 Exercícios

1–16 Derive.

1. $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$

2. $f(x) = \sqrt{x}\,\text{sen}\,x$

3. $f(x) = \text{sen}\,x + \frac{1}{2}\,\text{cotg}\,x$

4. $y = 2\sec x - \text{cossec}\,x$

5. $g(t) = t^3 \cos t$

6. $g(t) = 4\sec t + \text{tg}\,t$

7. $h(\theta) = \text{cossec}\,\theta + e^{\theta}\,\text{cotg}\,\theta$

8. $y = e^u(\cos u + cu)$

9. $y = \dfrac{x}{2 - \text{tg}\,x}$

10. $y = \text{sen}\,\theta\,\cos\theta$

11. $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1 + \sec\theta}$

12. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \text{sen}\,x}$

13. $y = \dfrac{t\,\text{sen}\,t}{1 + t}$

14. $y = \dfrac{1 - \sec x}{\text{tg}\,x}$

15. $f(x) = xe^x\,\text{cossec}\,x$

16. $y = x^2\,\text{sen}\,x\,\text{tg}\,x$

17. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\text{cossec}\,x) = -\text{cossec}\,x\,\text{cotg}\,x$.

18. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\,\text{tg}\,x$.

19. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\text{cotg}\,x) = -\text{cossec}^2 x$.

20. Demonstre, pela definição de derivada, que se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\text{sen}\,x$.

21–24 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

21. $y = \sec x$, $(\pi/3, 2)$

22. $y = e^x \cos x$, $(0, 1)$

23. $y = \cos x - \text{sen}\,x$, $(\pi, -1)$

24. $y = x + \text{tg}\,x$, (π, π)

25. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 2x\,\text{sen}\,x$ no ponto $(\pi/2, \pi)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

26. **(a)** Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 3x + 6\cos x$ no ponto $(\pi/3, \pi + 3)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

27. (a) Se $f(x) = \sec x - x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta para a parte (a) é razoável fazendo os gráficos de f e f' para $|x| < \pi/2$.

28. (a) Se $f(x) = e^x \cos x$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.
(b) Verifique que suas respostas para a parte (a) são razoáveis fazendo os gráficos de f, f' e f''.

29. Se $H(\theta) = \theta\,\text{sen}\,\theta$, encontre $H'(\theta)$ e $H''(\theta)$.

30. Se $f(t) = \text{cossec}\,t$, encontre $f''(\pi/6)$.

31. (a) Use a Regra do Quociente para derivar a função

$$f(x) = \frac{\text{tg}\,x - 1}{\sec x}$$

(b) Simplifique a expressão para $f(x)$ escrevendo-a em termos de $\text{sen}\,x$ e $\cos x$ e, então, encontre $f'(x)$.
(c) Mostre que suas respostas para as partes (a) e (b) são equivalentes.

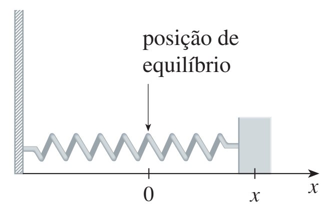
32. Suponha $f(\pi/3) = 4$ e $f'(\pi/3) = -2$, e faça $g(x) = f(x)\,\text{sen}\,x$ e $h(x) = (\cos x)/f(x)$. Encontre
(a) $g'(\pi/3)$ (b) $h'(\pi/3)$

33–34 Para quais valores de x o gráfico de f tem uma reta tangente horizontal?

33. $f(x) = x + 2\,\text{sen}\,x$

34. $f(x) = e^x \cos x$

35. Um corpo em uma mola vibra horizontalmente sobre uma superfície lisa (veja a figura). Sua equação de movimento é $x(t) = 8\,\text{sen}\,t$, onde t está em segundos e x, em centímetros.
(a) Encontre a velocidade e a aceleração no tempo t.
(b) Encontre a posição, velocidade e aceleração do corpo na posição de equilíbrio $t = 2\pi/3$. Em que direção ele está se movendo nesse momento?



36. Uma tira elástica é presa a um gancho e uma massa é presa na ponta inferior da tira. Quando o corpo é puxado para baixo e então solto, ele vibra verticalmente. A equação do movimento é $s = 2\cos t + 3\,\text{sen}\,t$, $t \geqslant 0$, onde s é medido em centímetros e t, em segundos. (Consideremos o sentido positivo como para baixo.)
(a) Encontre a velocidade e a aceleração no tempo t.
(b) Faça os gráficos das funções velocidade e aceleração.
(c) Quando o corpo passa pela posição de equilíbrio pela primeira vez?
(d) A que distância da posição de equilíbrio o corpo chega?
(e) Quando a velocidade é máxima?

37. Uma escada com 6 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Seja θ o ângulo entre o topo da escada e a parede e x, a distância do pé da escada até a parede. Se o pé da escada escorregar para longe da parede, com que velocidade x variará em relação a θ quando $\theta = \pi/3$?

38. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu m g}{\mu\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta}$$

onde μ é uma constante chamada *coeficiente de atrito*.
(a) Encontre a taxa de variação de F em relação a θ.
(b) Quando essa taxa de variação é igual a 0?
(c) Se $m = 20$ kg, $g = 9{,}8$ m/s^2 e $\mu = 0{,}6$, faça o gráfico de F como uma função de θ e use-o para encontrar o valor de θ para o qual $dF/d\theta = 0$. Esse valor é consistente com a resposta dada na parte (b)?

É necessário uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homeworks Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

39–48 Encontre o limite

39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 3x}{x}$

40. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 4x}{\text{sen } 6x}$

41. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\text{tg } 6t}{\text{sen } 2t}$

42. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\cos\theta - 1}{\text{sen}\,\theta}$

43. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 3x}{5x^3 - 4x}$

44. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 3x \text{ sen } 5x}{x^2}$

45. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta + \text{tg}\,\theta}$

46. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x^2)}{x}$

47. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1 - \text{tg } x}{\text{sen } x - \cos x}$

48. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\text{sen}(x - 1)}{x^2 + x - 2}$

49–50 Encontre a derivada dada, encontrando as primeiras derivadas e observando o padrão que ocorre.

49. $\dfrac{d^{99}}{dx^{99}}(\text{sen } x)$

50. $\dfrac{d^{35}}{dx^{35}}(x \text{ sen } x)$

51. Encontre constantes A e B de forma que a função $y = A \text{ sen } x + B \cos x$ satisfaça a equação diferencial $y'' + y' - 2y = \text{sen } x$.

52. (a) Avalie $\lim\limits_{x\to\infty} x \text{ sen } \dfrac{1}{x}$.

(b) Avalie $\lim\limits_{x\to 0} x \text{ sen } \dfrac{1}{x}$.

(c) Ilustre as partes (a) e (b) fazendo o gráfico de $y = x \text{ sen}(1/x)$.

53. Derive cada identidade trigonométrica para obter uma nova identidade (ou uma familiar).

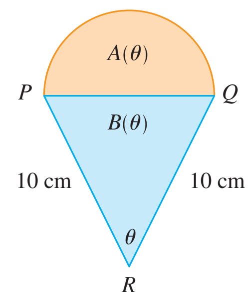
(a) $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$

(b) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

(c) $\text{sen } x + \cos x = \dfrac{1 + \text{cotg } x}{\text{cossec } x}$

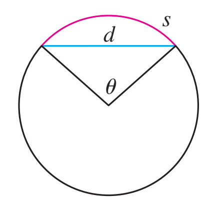
54. Um semicírculo com diâmetro PQ está sobre um triângulo isósceles PQR para formar uma região com um formato de sorvete, conforme mostra a figura. Se $A(\theta)$ é a área do semicírculo e $B(\theta)$ é a área do triângulo, encontre

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



55. A figura mostra um arco de círculo com comprimento s e uma corda com comprimento d, ambos subentendidos por um ângulo central θ. Encontre

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{s}{d}$$



56. Seja $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$.

(a) Faça o gráfico de f. Que tipo de descontinuidade parece ocorrer em 0?

(b) Calcule os limites laterais de f em 0. Esses valores confirmam sua resposta para a parte (a)?

3.4 A Regra da Cadeia

Suponha que você precise derivar a função

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Veja a Seção 1.3 para uma revisão das funções compostas.

As fórmulas de derivação que você aprendeu nas seções precedentes deste capítulo não lhe permitem calcular $F'(x)$.

Observe que F é uma função composta. Na realidade, se assumirmos $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$, então poderemos escrever $y = F(x) = f(g(x))$, ou seja, $F = f \circ g$. Sabemos como derivar ambas, f e g, então seria útil ter uma regra que nos dissesse como achar a derivada de $F = f \circ g$ em termos das derivadas de f e g.

O resultado é que a derivada da função composta $f \circ g$ é o produto das derivadas de f e g. Esse fato é um dos mais importantes das regras de derivação e é chamado *Regra da Cadeia*. Ela parece plausível se interpretarmos as derivadas como taxas de variação. Considere du/dx como a taxa de variação de u com relação a x, dy/du como a taxa de variação de y com relação a u, e dy/dx como a taxa de variação de y com relação a x. Se u variar duas vezes mais rápido que x, e y variar três vezes mais rápido que u, então parece plausível que y varie seis vezes mais rápido que x e, portanto, esperamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

A Regra da Cadeia Se g for derivável em x e f for derivável em $g(x)$, então a função composta $F = f \circ g$ definida por $F(x) = f(g(x))$ é derivável em x e F' é dada pelo produto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções deriváveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

James Gregory

A primeira pessoa a formular a Regra da Cadeia foi o matemático escocês James Gregory (1638–1675), que também projetou o primeiro telescópio refletor para uso prático. Gregory descobriu as ideias básicas de cálculo por volta da mesma época que Newton. Tornou-se o primeiro professor de Matemática na Universidade de St. Andrews e posteriormente ocupou a mesma posição na Universidade de Edimburgo. Mas, um ano após aceitar essa posição, morreu, aos 36 anos de idade.

COMENTÁRIOS SOBRE A DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DA CADEIA Seja Δu a variação em u correspondente à variação de Δx em x, ou seja,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

Então, a variação correspondente em y é

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

É tentador escrever

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{1} \qquad = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$ (Observe que $\Delta u \to 0$ quando $\Delta x \to 0$, uma vez que g é contínua.)

$$= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

A única falha nesse raciocínio é que em $\boxed{1}$ pode acontecer que $\Delta u = 0$ (mesmo quando $\Delta x \neq 0$) e, obviamente, não podemos dividir por 0. Não obstante, esse raciocínio pelo menos *sugere* que a Regra da Cadeia é verdadeira. Uma demonstração completa da Regra da Cadeia será dada no fim desta seção.

A Regra da Cadeia pode ser escrita na notação linha

$$\boxed{2} \qquad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ou, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, na notação de Leibniz:

$$\boxed{3} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

A Equação 3 é fácil de ser lembrada porque, se dy/du e du/dx fossem quocientes, poderíamos cancelar du. Lembre-se, entretanto, de que du não está definida, e du/dx não deve ser interpretado como um quociente de fato.

EXEMPLO 1 Encontre $F'(x)$ se $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUÇÃO 1 (usando a Equação 2): No início desta seção expressamos F como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, onde $f(u) = \sqrt{u}$ e $g(x) = x^2 + 1$. Uma vez que

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = 2x$$

temos
$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

SOLUÇÃO 2 (usando a Equação 3): Se fizermos $u = x^2 + 1$ e $y = \sqrt{u}$, então

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Quando usarmos a Fórmula 3, deveremos ter em mente que dy/dx refere-se à derivada de y quando y for considerada uma função de x (chamada de *derivada de y em relação a x*), enquanto dy/du se refere à derivada de y quando y é considerada função de u (a derivada de y com relação a u). Como ilustração, no Exemplo 1, y pode ser considerada uma função de $x\left(y = \sqrt{x^2+1}\right)$ e também uma função de $u\left(y = \sqrt{u}\right)$. Observe que

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{enquanto} \qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

OBSERVAÇÃO Ao usarmos a Regra da Cadeia, trabalharemos de fora para dentro. A Fórmula 2 diz que *derivamos a função f de fora* [*na função de dentro* $g(x)$] *e, então, que multiplicamos pela derivada da função de dentro*.

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{função}\\\text{de fora}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{avaliada}\\\text{na função}\\\text{de dentro}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada}\\\text{da função}\\\text{de fora}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{avaliada}\\\text{na função}\\\text{de dentro}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada}\\\text{da função}\\\text{de dentro}}}$$

EXEMPLO 2 Derive (a) $y = \operatorname{sen}(x^2)$ e (b) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

SOLUÇÃO

(a) Se $y = \operatorname{sen}(x^2)$, então a função de fora é a função seno e a função de dentro é a função quadrática, logo, a Regra da Cadeia dá

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{\operatorname{sen}}_{\substack{\text{função}\\\text{de fora}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{avaliada}\\\text{na função}\\\text{de dentro}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada}\\\text{da função}\\\text{de fora}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{avaliada}\\\text{na função}\\\text{de dentro}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivada}\\\text{da função}\\\text{de dentro}}}$$
$$= 2x\cos(x^2)$$

(b) Observe que $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$. Aqui, a função de fora é a função quadrática, e a função de dentro é a função seno. Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{\substack{\text{função}\\\text{de dentro}}}{}^2 = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada}\\\text{da função}\\\text{de fora}}} \cdot \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{\substack{\text{avaliada}\\\text{na função}\\\text{de dentro}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivada}\\\text{da função}\\\text{de dentro}}}$$

A resposta pode ser deixada como $2 \operatorname{sen} x \cos x$ ou escrita como $\operatorname{sen} 2x$ (pela identidade trigonométrica conhecida como fórmula do ângulo duplo).

Veja Página de Referências 2 ou Apêndice D.

No Exemplo 2(a) combinamos a Regra da Cadeia com a regra para derivar a função seno. Em geral, se $y = \operatorname{sen} u$, onde u é uma função derivável de x, então, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

Assim
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

De modo análogo, todas as fórmulas para derivar funções trigonométricas podem ser combinadas com a Regra da Cadeia.

Vamos explicitar o caso especial da Regra da Cadeia, onde a função de fora f é uma função potência. Se $y = [g(x)]^n$, então podemos escrever $y = f(u) = u^n$, onde $u = g(x)$. Usando a Regra da Cadeia e, em seguida, a Regra da Potência, obteremos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

$\boxed{4}$ **A Regra da Potência Combinada com a Regra da Cadeia** Se n for qualquer número real e $u = g(x)$ for derivável, então

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Alternativamente, $$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Observe que a derivada no Exemplo 1 poderia ser calculada usando $n = \frac{1}{2}$ na Regra 4.

EXEMPLO 3 Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUÇÃO Fazendo $u = g(x) = x^3 - 1$ e $n = 100$ em $\boxed{4}$, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$
$$= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}$$

EXEMPLO 4 Encontre $f'(x)$ se $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUÇÃO Primeiro reescreva f: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$.

Logo, $$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$$
$$= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)$$

EXEMPLO 5 Encontre a derivada da função

$$g(t) = \left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^9$$

SOLUÇÃO Combinando a Regra da Potência, a Regra da Cadeia e a Regra do Quociente, obtemos

$$g'(t) = 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)$$
$$= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{(2t + 1) \cdot 1 - 2(t - 2)}{(2t + 1)^2} = \frac{45(t - 2)^8}{(2t + 1)^{10}}$$

EXEMPLO 6 Derive $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

SOLUÇÃO Neste exemplo devemos usar a Regra do Produto antes de usar a Regra da Cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 1)^5\frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4\frac{d}{dx}(2x + 1)^5$$

$$= (2x+1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)$$
$$+ (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x+1)^4 \frac{d}{dx}(2x+1)$$
$$= 4(2x+1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x+1)^4 \cdot 2$$

Observando que cada termo tem o fator comum $2(2x+1)^4(x^3 - x + 1)^3$, podemos fatorá-lo e escrever a resposta como

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x+1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3)$$

Os gráficos das funções y e y' do Exemplo 6 são mostrados na Figura 1. Observe que y' é grande quando cresce rapidamente e $y' = 0$, quando y tem uma tangente horizontal. Logo, nossa resposta parece ser razoável.

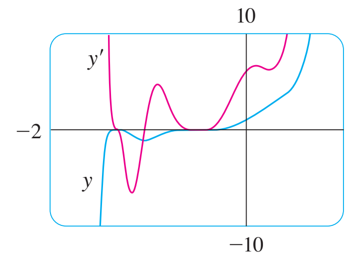


FIGURA 1

EXEMPLO 7 Derive $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

SOLUÇÃO Aqui a função de dentro é $g(x) = \operatorname{sen} x$, e a função de fora é a função exponencial $f(x) = e^x$. Logo, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\operatorname{sen} x}) = e^{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$$

De forma geral, a Regra da Cadeia fornece

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

Podemos usar a Regra da Cadeia para derivar uma função exponencial com qualquer base $a > 0$. Lembre-se, da Seção 1.6, de que $a = e^{\ln a}$. Logo

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

e a Regra da Cadeia dá

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(\ln a)x$$
$$= e^{(\ln a)x} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

porque $\ln a$ é uma constante. Portanto, temos a fórmula

5 $$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

Não confunda a Fórmula 5 (onde x é o *expoente*) com a Regra da Potência (onde x é a *base*):

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Em particular, se $a = 2$, obteremos

6 $$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2$$

Na Seção 3.1 demos a estimativa

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0{,}69)2^x$$

Ela é consistente com a fórmula exata $\boxed{6}$, pois $\ln 2 \approx 0{,}693147$.

A razão para o nome "Regra da Cadeia" fica evidente se fizermos uma cadeia maior adicionando mais um elo. Suponha que $y = f(u)$, $u = g(x)$ e $x = h(t)$, onde f, g e h são funções deriváveis. Então, para calcular a derivada de y em relação a t, usamos duas vezes a Regra da Cadeia

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

EXEMPLO 8 Se $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\operatorname{tg} x))$, então

$$f'(x) = \cos(\cos(\operatorname{tg} x))\frac{d}{dx}\cos(\operatorname{tg} x)$$

$$= \cos(\cos(\text{tg } x))[-\text{sen}(\text{tg } x)] \frac{d}{dx} (\text{tg } x)$$

$$= -\cos(\cos(\text{tg } x)) \text{ sen}(\text{tg } x) \sec^2 x$$

Observe que usamos duas vezes a Regra da Cadeia.

EXEMPLO 9 Derive $y = e^{\sec 3\theta}$.

SOLUÇÃO A função de fora é uma exponencial, a do meio é uma função secante, e a função de dentro é a função de multiplicação por três. Logo, temos

$$\frac{dy}{d\theta} = e^{\sec 3\theta} \frac{d}{d\theta} (\sec 3\theta)$$

$$= e^{\sec 3\theta} \sec 3\theta \text{ tg } 3\theta \frac{d}{d\theta} (3\theta)$$

$$= 3e^{\sec 3\theta} \sec 3\theta \text{ tg } 3\theta$$

Como Demonstrar a Regra da Cadeia

Lembre-se de que, se $y = f(x)$, e x varia de a para $a + \Delta x$, definimos o incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

De acordo com a definição de derivada, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

Dessa forma, se denotarmos por ε a diferença entre o quociente de diferenças e a derivada, obteremos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0.$$

Porém $$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

Se definirmos ε como 0 quando $\Delta x = 0$, então ε se torna uma função contínua de Δx. Assim, para uma função diferenciável f, podemos escrever

$$\boxed{7} \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \qquad \text{onde } \varepsilon \to 0 \text{ quando } \Delta x \to 0$$

e ε é uma função contínua de Δx. Essa propriedade de funções diferenciáveis é que nos possibilita demonstrar a Regra da Cadeia.

DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DA CADEIA Suponha que $u = g(x)$ seja derivável em a e $y = f(u)$ seja derivável em $b = g(a)$. Se Δx for um incremento em x e Δu e Δy forem os incrementos correspondentes em u e y, então podemos usar a Equação 7 para escrever

$$\boxed{8} \qquad \Delta u = g'(a)\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

onde $\varepsilon_1 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. De forma análoga

$$\boxed{9} \qquad \Delta y = f'(b)\,\Delta u + \varepsilon_2\,\Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\,\Delta u$$

onde $\varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta u \to 0$. Se substituirmos agora a expressão para Δu da Equação 8 na Equação 9, obteremos

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

logo, $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

Quando $\Delta x \to 0$, a Equação 8 mostra que $\Delta u \to 0$. Assim, $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Portanto

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

$$= f'(b)\,g'(a) = f'(g(a))\,g'(a)$$

Isso demonstra a Regra da Cadeia.

3.4 Exercícios

1–6 Escreva a função composta na forma $f(g(x))$. [Identifique a função de dentro $u = g(x)$ e a de fora $y = f(u)$.] Então, encontre a derivada dy/dx.

1. $y = \operatorname{sen} 4x$ **2.** $y = \sqrt{4 + 3x}$

3. $y = (1 - x^2)^{10}$ **4.** $y = \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$ **6.** $y = \sqrt{2 - e^x}$

7–46 Encontre a derivada da função.

7. $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$ **8.** $F(x) = (4x - x^2)^{100}$

9. $F(x) = \sqrt[4]{1 + 2x + x^3}$ **10.** $f(x) = (1 + x^4)^{2/3}$

11. $g(t) = \dfrac{1}{(t^4 + 1)^3}$ **12.** $f(t) = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} t}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$ **14.** $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $y = xe^{-kx}$ **16.** $y = e^{-2t}\cos 4t$

17. $f(x) = (2x - 3)^4(x^2 + x + 1)^5$

18. $g(x) = (x^2 + 1)^3(x^2 + 2)^6$

19. $h(t) = (t + 1)^{2/3}(2t^2 - 1)^3$

20. $F(t) = (3t - 1)^4(2t + 1)^{-3}$

21. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$ **22.** $f(s) = \sqrt{\dfrac{s^2 + 1}{s^2 + 4}}$

23. $y = \sqrt{1 + 2e^{3x}}$ **24.** $y = 10^{1 - x^2}$

25. $y = 5^{-1/x}$ **26.** $G(y) = \dfrac{(y - 1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$

27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$ **28.** $y = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$

29. $F(t) = e^{t \operatorname{sen} 2t}$ **30.** $F(v) = \left(\dfrac{v}{v^3 + 1}\right)^6$

31. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{tg} 2x)$ **32.** $y = \sec^2(m\theta)$

33. $y = 2^{\operatorname{sen} \pi x}$ **34.** $y = x^2 e^{-1/x}$

35. $y = \cos\left(\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right)$ **36.** $y = \sqrt{1 + xe^{-2x}}$

37. $y = \cot^2(\operatorname{sen} \theta)$ **38.** $y = e^{k \operatorname{tg} \sqrt{x}}$

39. $f(t) = \operatorname{tg}(e^t) + e^{\operatorname{tg} t}$ **40.** $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

41. $f(t) = \operatorname{sen}^2(e^{\operatorname{sen}^2 t})$ **42.** $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

43. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$ **44.** $y = 2^{3^{x^2}}$

45. $y = \cos\sqrt{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} \pi x)}$ **46.** $y = [x + (x + \operatorname{sen}^2 x)^3]^4$

47–50 Encontre y' e y''.

47. $y = \cos(x^2)$ **48.** $y = \cos^2 x$

49. $y = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ **50.** $y = e^{e^x}$

51–54 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

51. $y = (1 + 2x)^{10}$, $(0, 1)$ **52.** $y = \sqrt{1 + x^3}$, $(2, 3)$

53. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $(\pi, 0)$ **54.** $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$, $(0, 0)$

55. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 2/(1 + e^{-x})$ no ponto $(0, 1)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

56. (a) A curva $y = |x|/\sqrt{2 - x^2}$ é chamada *curva ponta de bala*. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, 1)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

57. (a) Se $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável comparando os gráficos de f e f'.

58. A função $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, aparece em aplicações à síntese de modulação de frequência (FM).
(a) Use um gráfico de f, feito por uma calculadora gráfica, para fazer um esboço rústico do gráfico de f'.
(b) Calcule $f'(x)$ e use essa expressão, com uma ferramenta gráfica, para fazer o gráfico de f'. Compare com o gráfico obtido no item (a).

59. Encontre todos os pontos do gráfico da função $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$ nos quais a reta tangente é horizontal.

60. Encontre as coordenadas x de todos os pontos sobre a curva $y = \operatorname{sen} 2x - 2\operatorname{sen} x$ nos quais a reta tangente é horizontal.

61. Se $F(x) = f(g(x))$, onde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$ e $g'(5) = 6$, encontre $F'(5)$.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador SCA Requer sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

62. Se $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$, onde $f(1) = 7$ e $f'(1) = 4$, encontre $h'(1)$.

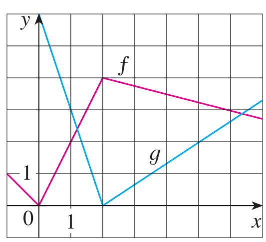
63. Uma tabela de valores para f, g, f' e g' é fornecida.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

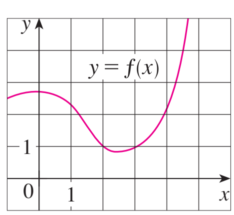
(a) Se $h(x) = f(g(x))$, encontre $h'(1)$.
(b) Se $H(x) = g(f(x))$, encontre $H'(1)$.

64. Sejam f e g as funções no Exercício 63.
(a) Se $F(x) = f(f(x))$, encontre $F'(2)$.
(b) Se $G(x) = g(g(x))$, encontre $G'(3)$.

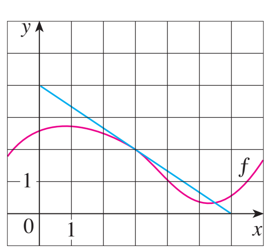
65. Se f e g forem as funções cujos gráficos são mostrados, sejam $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$, e $w(x) = g(g(x))$. Encontre cada derivada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.
(a) $u'(1)$ (b) $v'(1)$ (c) $w'(1)$



66. Se f for a função cujo gráfico é mostrado, sejam $h(x) = f(f(x))$ e $g(x) = f(x^2)$. Use o gráfico de f para estimar o valor de cada uma das derivadas.
(a) $h'(2)$ (b) $g'(2)$



67. Se $g(x) = \sqrt{f(x)}$, onde o gráfico de f é mostrado, avalie $g'(3)$.



68. Suponha que f seja uma derivável em $\mathbb{R}$ e α, um número real. Sejam $F(x) = f(x^\alpha)$ e $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encontre expressões para (a) $F'(x)$ e (b) $G'(x)$.

69. Suponha que f seja derivável em $\mathbb{R}$. Sejam $F(x) = f(e^x)$ e $G(x) = e^{f(x)}$. Encontre expressões para (a) $F'(x)$ e (b) $G'(x)$.

70. Sejam $g(x) = e^{cx} + f(x)$ e $h(x) = e^{kx}f(x)$, onde $f(0) = 3$, $f'(0) = 5$ e $f''(0) = -2$.
(a) Encontre $g'(0)$ e $g''(0)$ em termos de c.
(b) Em termos de k, encontre uma equação da reta tangente para o gráfico de h no ponto onde $x = 0$.

71. Seja $r(x) = f(g(h(x)))$, onde $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ e $f'(3) = 6$. Encontre $r'(1)$.

72. Se g for duas vezes derivável e $f(x) = xg(x^2)$, encontre f'' em termos de g, g' e g''.

73. Se $F(x) = f(3f(4f(x)))$, onde $f(0) = 0$ e $f'(0) = 2$, encontre $F'(0)$.

74. Se $F(x) = f(xf(xf(x)))$, onde $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$ e $f'(3) = 6$, encontre $F'(1)$.

75. Mostre que a função $y = e^{2x}(A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x)$ satisfaz a equação diferencial $y'' - 4y' + 13y = 0$.

76. Para quais valores de r a função $y = e^{rx}$ satisfaz a equação diferencial $y'' - 4y' + y = 0$?

77. Encontre a 50ª derivada de $y = \cos 2x$.

78. Encontre a 1000ª derivada de $f(x) = xe^{-x}$.

79. O deslocamento de uma partícula em uma corda vibrante é dado pela equação $s(t) = 10 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(10\pi t)$ onde s é medido em centímetros e t, em segundos. Encontre a velocidade da partícula após t segundos.

80. Se a equação de movimento de uma partícula for dada por $s = A\cos(\omega t + \delta)$, dizemos que a partícula está em movimento *harmônico simples*.
(a) Encontre a velocidade da partícula no tempo t.
(b) Quando a velocidade é zero?

81. Cefeu é uma constelação cujo brilho é variável. A estrela mais visível dessa constelação é a Delta Cefeu, para a qual o intervalo de tempo entre os brilhos máximos é de 5,4 dias. O brilho médio dessa estrela é de 4,0, com uma variação de $\pm 0{,}35$. Em vista desses dados, o brilho de Delta Cefeu no tempo t, onde t é medido em dias, foi modelada pela função

$$B(t) = 4{,}0 + 0{,}35 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{5{,}4}\right)$$

(a) Encontre a taxa de variação do brilho após t dias.
(b) Encontre, com precisão até duas casas decimais, a taxa de crescimento após 1 dia.

82. No Exemplo 4 da Seção 1.3 chegamos a um modelo para a duração da luz do dia (em horas) em Ancara, Turquia, no t-ésimo dia do ano:

$$L(t) = 12 + 2{,}8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Use esse modelo para comparar como o número de horas de luz do dia aumenta em Ancara em 21 de março e em 21 de maio.

83. O movimento de uma mola sujeita a uma força de atrito ou a uma força de amortecimento (tal como o amortecedor em um carro) é frequentemente modelado pelo produto de uma função exponencial e uma função seno ou cosseno. Suponha que a equação de movimento de um ponto nessa mola seja

$$s(t) = 2e^{-1{,}5t} \operatorname{sen} 2\pi t$$

onde s é medido em centímetros e t, em segundos. Encontre a velocidade após t segundos e faça o gráfico das funções posição e velocidade para $0 \leqslant t \leqslant 2$.

84. Sob certas circunstâncias, um boato se propaga de acordo com a equação

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

onde $p(t)$ é a proporção da população que já ouviu o boato no tempo t e a e k são contantes positivas. [Na Seção 9.4 veremos que esta é uma equação razoável para $p(t)$.]

(a) Encontre $\lim_{t\to\infty} p(t)$.

(b) Encontre a taxa de propagação do boato.

(c) Faça o gráfico de p para o caso $a = 10$, $k = 0{,}5$, onde t é medido em horas. Use o gráfico para estimar quanto tempo será necessário para o boato atingir 80% da população.

85. Uma partícula se move ao longo de uma reta com deslocamento $s(t)$, velocidade $v(t)$ e aceleração $a(t)$. Mostre que

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

Explique a diferença entre os significados das derivadas dv/dt e dv/ds.

86. Ar está sendo bombeado para dentro de um balão climático esférico. Em qualquer tempo t, o volume do balão será $V(t)$ e seu raio será $r(t)$.

(a) O que as derivadas dV/dr e dV/dt representam?

(b) Expresse dV/dt em termos de dr/dt.

87. O *flash* de uma câmera opera armazenando carga em um capacitor e liberando-a instantaneamente ao ser disparado. Os dados na tabela à esquerda descrevem a carga Q armazenada no capacitor (medida em microcoulombs, μC) no tempo t (medido em segundos após o *flash* ter sido disparado).

t	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
Q	100,00	81,87	67,03	54,88	44,93	36,76

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para encontrar um modelo exponencial para a carga (veja a Seção 1.5).

(b) A derivada $Q'(t)$ representa a corrente elétrica (medida em microampères, μA, que flui do capacitor para a lâmpada do *flash*. Use a parte (a) para estimar a corrente quando $t = 0{,}04$ s. Compare com o resultado do Exemplo 2 na Seção 2.1.

88. A tabela fornece a população do México (em milhões) em anos de censo no século XX.

Ano	População	Ano	População
1900	13,6	1960	34,9
1910	15,2	1970	48,2
1920	14,3	1980	66,8
1930	16,6	1990	81,2
1940	19,7	2000	97,5
1950	25,8		

(a) Use uma calculadora gráfica ou um computador para ajustar uma função exponencial com os dados. Faça um gráfico dos pontos dados e do modelo exponencial. Quão bom é o ajuste?

(b) Estime as taxas de crescimento populacional em 1950 e 1960 fazendo a média de inclinações de retas secantes.

(c) Use sua exponencial da parte (a) para encontrar um modelo para as taxas de crescimento da população do México no século XX.

(d) Use seu modelo na parte (c) para estimar as taxas de crescimento em 1950 e 1960. Compare com sua estimativa da parte (b).

SCA **89.** Os SCA têm comandos que derivam funções, mas a forma da resposta pode não ser conveniente e, portanto, comandos posteriores podem ser necessários para simplificar a resposta.

(a) Use um SCA para encontrar a derivada do Exemplo 5 e compare com a resposta dele. A seguir, use o comando simplificar e compare novamente.

(b) Use um SCA para derivar a função do Exemplo 6. O que acontecerá se você usar o comando simplificar? O que acontecerá se você usar o comando fatorar? Qual forma da resposta é melhor para localizar as tangentes horizontais?

SCA **90.** (a) Use um SCA para derivar a função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x + 1}{x^4 + x + 1}}$$

e para simplificar o resultado.

(b) Onde o gráfico de f tem tangentes horizontais?

(c) Faça os gráficos de f e f' na mesma tela. Os gráficos são consistentes com sua resposta da parte (b)?

91. Use a Regra da Cadeia para demonstrar o que segue.

(a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.

(b) A derivada de uma função ímpar é uma função par.

92. Use a Regra da Cadeia e a Regra do Produto para dar uma demonstração alternativa da Regra do Quociente.
[*Sugestão:* Escreva $f(x)/g(x) = f(x)[g(x)]^{-1}$.]

93. (a) Se n for um inteiro positivo, demonstre que

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^n x \cos nx) = n\,\text{sen}^{n-1}x\cos(n+1)x$$

(b) Encontre uma fórmula para a derivada de $y = \cos^n x \cos nx$ que seja similar àquela da parte (a).

94. Suponha que $y = f(x)$ seja uma curva que está sempre acima do eixo x e que não tenha uma tangente horizontal, sendo f derivável em toda a parte. Para quais valores de y a taxa de variação de y^5 em relação a x é 80 vezes a taxa de variação de y em relação a x?

95. Use a Regra da Cadeia para mostrar que, se θ for medido em graus, então

$$\frac{d}{d\theta}(\text{sen}\,\theta) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

(Isso dá uma razão para a convenção de que a medida em radianos é sempre usada quando tratamos o cálculo de funções trigonométricas: as fórmulas de derivação não seriam tão simples se usássemos a medida de graus.)

96. (a) Escreva $|x| = \sqrt{x^2}$ e use a Regra da Cadeia para mostrar que

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

(b) Se $f(x) = |\text{sen}\,x|$, encontre $f'(x)$ e esboce os gráficos de f e f'. Onde f não é derivável?

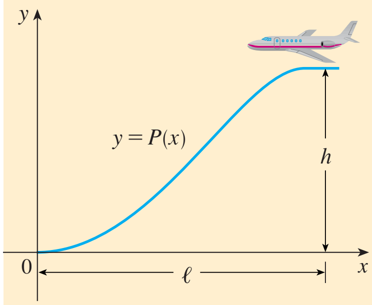
(c) Se $g(x) = \text{sen}\,|x|$, encontre $g'(x)$ e esboce os gráficos de g e g'. Onde g não é derivável?

97. Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, onde f e g são funções duas vezes deriváveis, mostre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

98. Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, onde f e g possuem três derivadas, encontre a fórmula para d^3y/dx^3 análoga à dada no Exercício 97.

PROJETO APLICADO ONDE UM PILOTO DEVE INICIAR A DESCIDA?



Um caminho de aproximação para uma aeronave pousando é mostrado na figura ao lado e satisfaz as seguintes condições:

(i) A altitude do voo é h, quando a descida começa a uma distância horizontal ℓ do ponto de contato na origem.

(ii) O piloto deve manter uma velocidade horizontal constante v em toda a descida.

(iii) O valor absoluto da aceleração vertical não deve exceder uma constante k (que é muito menor que a aceleração da gravidade).

1. Encontre um polinômio cúbico $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que satisfaça a condição (i), impondo condições adequadas a $P(x)$ e $P'(x)$ no início da descida e no ponto de contato.

2. Use as condições (ii) e (iii) para mostrar que

$$\frac{6hv^2}{\ell^2} \leqslant k$$

3. Suponha que uma companhia aérea decida não permitir que a aceleração vertical do avião exceda $k = 1\,385$ km/h². Se a altitude de cruzeiro do avião for 11 000 m e a velocidade for 480 km/h, a que distância do aeroporto o piloto deveria começar a descer?

4. Trace o caminho de aproximação se as condições dadas no Problema 3 forem satisfeitas.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

3.5 Derivação Implícita

As funções encontradas até agora podem ser descritas expressando-se uma variável explicitamente em termos de outra – por exemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{ou} \qquad y = x \operatorname{sen} x$$

ou, em geral, $y = f(x)$. Algumas funções, entretanto, são definidas implicitamente por uma relação entre x e y, tais como

$$x^2 + y^2 = 25 \tag{1}$$

ou

$$x^3 + y^3 = 6xy \tag{2}$$

Em alguns casos é possível resolver tal equação isolando y como uma função explícita (ou diversas funções) de x. Por exemplo, se resolvermos a Equação 1 isolando y, obtemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$; logo, duas das funções determinadas pela Equação implícita 1 são $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ e $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Os gráficos de f e g são os semicírculos superior e inferior do círculo $x^2 + y^2 = 25$ (veja a Figura 1).

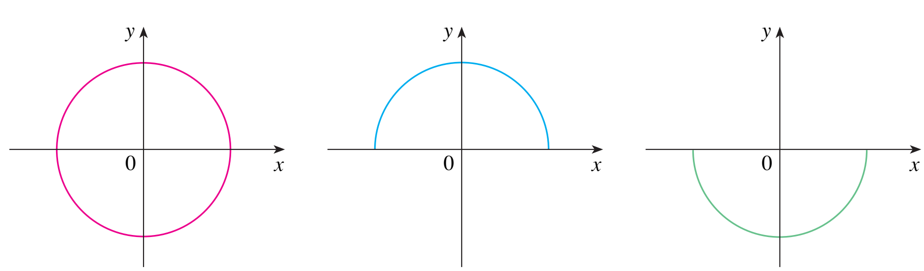


FIGURA 1 (a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

Não é fácil resolver a Equação 2 e escrever y explicitamente como uma função de x à mão. (Um SCA não tem dificuldades, mas as expressões que obtém são muito complicadas). Contudo, $\boxed{2}$ é a equação de uma curva chamada **fólio de Descartes**, mostrada na Figura 2, e implicitamente define y como diversas funções de x. Os gráficos dessas três funções são mostrados na Figura 3. Quando dizemos que f é uma função implicitamente definida pela Equação 2, queremos dizer que a equação

$$x^3 + [f(x)]^3 = 6xf(x)$$

é verdadeira para todos os valores de x no domínio de f.

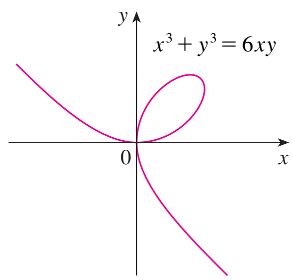


FIGURA 2 O fólio de Descartes

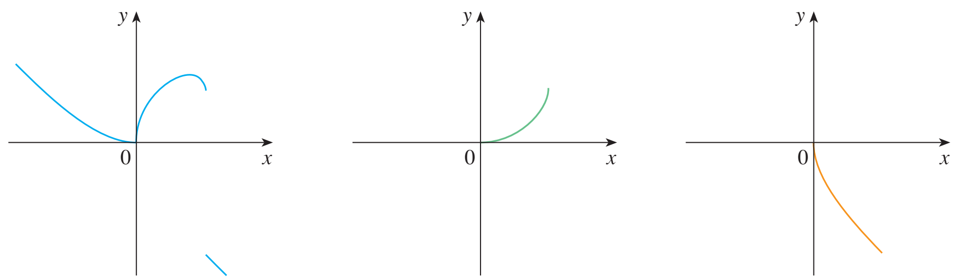


FIGURA 3 Gráficos de três funções definidas pelo fólio de Descartes

Felizmente, não precisamos resolver uma equação para y em termos de x para encontrar a derivada de y. Em vez disso, podemos usar o método de **derivação implícita**. Isso consiste na derivação de ambos os lados da equação em relação a x e, então, na resolução da equação isolando y'. Nos exemplos e exercícios desta seção, suponha sempre que a equação dada determine y implicitamente como uma função derivável de x de forma que o método da derivação implícita possa ser aplicado.

EXEMPLO 1

(a) Se $x^2 + y^2 = 25$, encontre $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Encontre uma equação da tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $(3, 4)$.

SOLUÇÃO 1

(a) Derive ambos os lados da equação $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Lembrando que y é uma função de x e usando a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Logo,
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Agora isole dy/dx nessa equação:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) No ponto $(3, 4)$, temos $x = 3$ e $y = 4$, logo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

Uma equação da reta tangente ao círculo em (3, 4) é, portanto,

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 3) \qquad \text{ou} \qquad 3x + 4y = 25$$

O Exemplo 1 ilustra que, mesmo quando é possível resolver uma equação explicitamente e escrever y em termos de x, pode ser mais fácil usar a derivação implícita.

SOLUÇÃO 2

(b) Resolvendo a equação $x^2 + y^2 = 25$, obtemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. O ponto (3, 4) está sobre o semicírculo superior $y = \sqrt{25 - x^2}$, e assim vamos considerar a função $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Derivando f, usando a Regra da Cadeia, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2} \frac{d}{dx}(25 - x^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \end{aligned}$$

Então $$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

e, como na Solução 1, uma equação da reta tangente é $3x + 4y = 25$.

OBSERVAÇÃO 1 A expressão $dy/dx = -x/y$ na Solução 1 fornece a derivada em termos de x e y. É correta, não importando qual função for determinada pela equação dada. Por exemplo, para $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Enquanto para $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$, temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{-\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

EXEMPLO 2

(a) Encontre y' se $x^3 + y^3 = 6xy$.

(b) Encontre a reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto (3, 3).

(c) Em qual ponto do primeiro quadrante a reta tangente é horizontal?

SOLUÇÃO

(a) Derivando ambos os lados de $x^3 + y^3 = 6xy$ em relação a x, considerando y como uma função de x e usando a Regra da Cadeia no termo y^3 e a Regra do Produto no termo $6xy$, obtemos

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$

ou $$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

Agora isolamos y': $$\begin{aligned} y^2y' - 2xy' &= 2y - x^2 \\ (y^2 - 2x)y' &= 2y - x^2 \\ y' &= \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x} \end{aligned}$$

(b) Quando $x = y = 3$,

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$

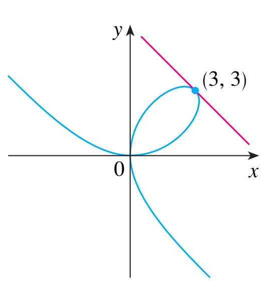


FIGURA 4

e uma olhada na Figura 4 confirma que este é um valor razoável para a inclinação em (3, 3). Logo, uma equação da tangente ao fólio em (3, 3) é

$$y - 3 = -1(x - 3) \qquad \text{ou} \qquad x + y = 6$$

(c) A reta tangente é horizontal se $y' = 0$. Usando a expressão de y' da parte (a) vemos que $y' = 0$ quando $2y - x^2 = 0$ (desde que $y^2 - 2x \neq 0$). Substituindo $y = \frac{1}{2}x^2$ na equação da curva, obtemos

$$x^3 + \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$$

que se simplifica para $x^6 = 16x^3$. Como $x \neq 0$ no primeiro quadrante, temos $x^3 = 16$. Se $x = 16^{1/3} = 2^{4/3}$, então $y = \frac{1}{2}(2^{8/3}) = 2^{5/3}$. Assim, a tangente é horizontal em $(2^{4/3}, 2^{5/3})$, que é aproximadamente (2,5198; 3,1748). Olhando a Figura 5, vemos que nossa resposta é razoável.

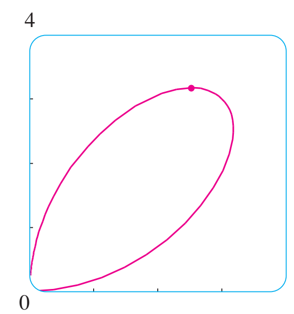


FIGURA 5

OBSERVAÇÃO 2 Há uma fórmula para as três raízes de uma equação cúbica que é semelhante à fórmula quadrática, mas muito mais complicada. Se usarmos essa fórmula (ou um SCA) para resolver a equação $x^3 + y^3 = 6xy$ para escrever y em termos de x, vamos obter as três funções determinadas por:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}$$

e

$$y = \tfrac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}\right)\right]$$

(Essas são as três funções cujos gráficos são mostrados na Figura 3.) Você pode ver que o método da derivação implícita poupa uma enorme quantidade de trabalho em casos como este. Além disso, a derivação implícita funciona de forma igualmente fácil em equações como

$$y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$$

para as quais é *impossível* encontrar uma expressão similar para y em termos de x.

Abel e Galois

O matemático norueguês Niels Abel demonstrou em 1824 que não existe uma fórmula geral para as raízes de uma equação de quinto grau em termos de radicais. Mais tarde, o matemático francês Evariste Galois demonstrou que é impossível encontrar uma fórmula geral para as raízes de uma equação de *n*-ésimo grau (em termos de operações algébricas sobre os coeficientes) se *n* for qualquer inteiro maior que 4.

EXEMPLO 3 Encontre y' se $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

SOLUÇÃO Derivando implicitamente em relação a x e lembrando que y é uma função de x, obtemos

$$\cos(x + y) \cdot (1 + y') = y^2(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2yy')$$

(Observe que usamos a Regra da Cadeia no lado esquerdo e as Regras da Cadeia e do Produto no lado direito). Se reunirmos os termos que envolvem y', obtemos

$$\cos(x + y) + y^2 \operatorname{sen} x = (2y \cos x)y' - \cos(x + y) \cdot y'$$

Logo,
$$y' = \frac{y^2 \operatorname{sen} x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}$$

A Figura 6, feita com o comando de traçagem implícita (*implicit-plotting*) de um SCA, mostra parte da curva $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$. Como uma verificação de nossos cálculos, observe que $y' = -1$ quando $x = y = 0$, e no gráfico parece que a inclinação é de aproximadamente -1 na origem.

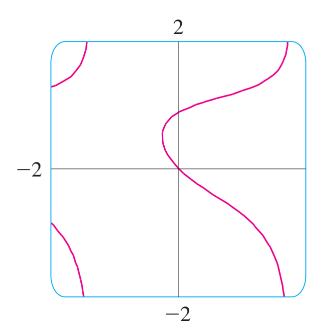


FIGURA 6

As Figuras 7, 8 e 9 mostram mais três curvas produzidas por um SCA com um comando de traçagem implícita. Nos Exercícios 41–42 você terá uma oportunidade de criar e examinar curvas incomuns dessa natureza.

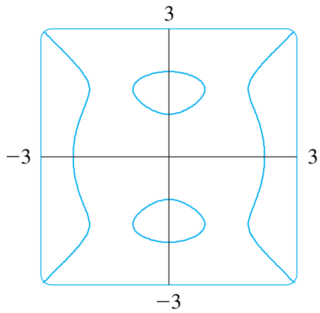


FIGURA 7
$(y^2 - 1)(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 4)$

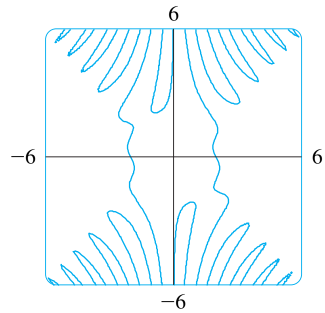


FIGURA 8
$(y^2 - 1)\ \mathrm{sen}(xy) = x^2 - 4$

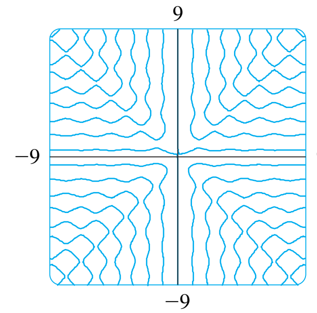


FIGURA 9
$y\ \mathrm{sen}\ 3x = x \cos 3y$

O exemplo seguinte ilustra como descobrir a segunda derivada de uma função implicitamente definida.

EXEMPLO 4 Encontre y'' se $x^4 + y^4 = 16$.

SOLUÇÃO Derivando a equação implicitamente em relação a x, obtemos

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$

Isolando y', temos

$$\boxed{3} \qquad y' = -\frac{x^3}{y^3}$$

A Figura 10 mostra o gráfico da curva $x^4 + y^4 = 16$ do Exemplo 4. Observe que ele é uma versão esticada e achatada do círculo $x^2 + y^2 = 4$. Por esta razão, ele é às vezes chamado *círculo gordo* (no inglês, *fat circle*). Ele começa muito íngreme à esquerda, mas rapidamente se torna muito achatado. Isto pode ser visto a partir da expressão

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} = -\left(\frac{x}{y}\right)^3$$

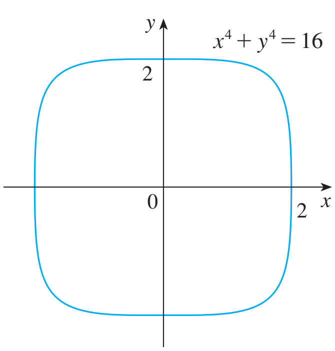


FIGURA 10

Para encontrar y'' derivamos esta expressão para y', usando a Regra do Quociente e lembrando que y é uma função de x:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{y^3\,(d/dx)(x^3) - x^3\,(d/dx)(y^3)}{(y^3)^2}$$

$$= -\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3(3y^2y')}{y^6}$$

Se agora substituirmos a Equação 3 nesta expressão, obtemos

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\dfrac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$

$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

Mas os valores de x e y devem satisfazer a equação original $x^4 + y^4 = 16$. Assim, a resposta se simplifica para

$$y'' = -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -48\,\frac{x^2}{y^7}$$

Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas

As funções trigonométricas inversas foram revisadas na Seção 1.6. Discutimos suas continuidades na Seção 2.5 e suas assíntotas na Seção 2.6. Aqui, a derivação implícita será usada para determinar as derivadas das funções trigonométricas inversas, supondo que essas funções sejam deriváveis. [Na realidade, se f for qualquer função derivável injetora, pode-se demonstrar que sua função inversa, f^{-1}, é também derivável, exceto onde suas tangentes são verticais. Isso é plausível, pois o gráfico de uma função derivável não possui bicos ou dobras e, se o refletimos em torno de $y = x$, o gráfico de sua função inversa também não terá bicos ou dobras.]

Lembre-se de que a função inversa da função seno foi definida por:

$$y = \operatorname{sen}^{-1}x \qquad \text{significa} \qquad \operatorname{sen} y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Derivando $\operatorname{sen} y = x$ implicitamente em relação a x, obtemos

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Esse mesmo método pode ser utilizado para obter a fórmula da derivada de *qualquer* função inversa. Veja o Exercício 77.

Agora, $\cos y \geqslant 0$, uma vez que $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, então

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

Logo,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

A fórmula para a derivada da função arco tangente é deduzida de maneira análoga. Se $y = \operatorname{tg}^{-1}x$, então $\operatorname{tg} y = x$. Derivando essa última equação implicitamente em relação a x, temos

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2}}$$

A Figura 11 mostra o gráfico de $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}x$ e sua derivada $f'(x) = 1/(1 + x^2)$. Observe que f é crescente e que $f'(x)$ é sempre positiva. O fato de que $\operatorname{tg}^{-1}x \to \pm\pi/2$ quando $x \to \pm\infty$ está refletido no fato de que $f'(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$.

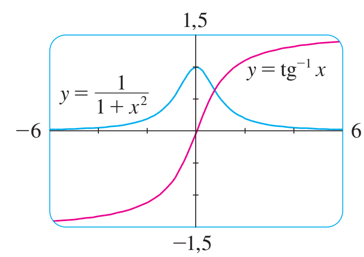


FIGURA 11

EXEMPLO 5 Derive (a) $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^{-1}x}$ e (b) $f(x) = x \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

SOLUÇÃO

(a)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-1} = -(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-2}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)$$
$$= -\frac{1}{(\operatorname{sen}^{-1}x)^2\sqrt{1 - x^2}}$$

(b)
$$f'(x) = x\frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2}\left(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{x}$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{2(1 + x)} + \operatorname{arctg}\sqrt{x}$$

Lembre-se de $\operatorname{arctg} x$ é uma notação alternativa para $\operatorname{tg}^{-1}x$.

As funções trigonométricas inversas que ocorrem com mais frequência são aquelas que acabamos de discutir. As derivadas das quatro funções remanescentes estão dadas na tabela a seguir. As demonstrações das fórmulas ficam como exercício.

Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cossec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cotg}^{-1}x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

As fórmulas para as derivadas de $\operatorname{cossec}^{-1}x$ e $\sec^{-1}x$ dependem das definições que foram usadas para essas funções. Veja o Exercício 64.

3.5 Exercícios

1–4
(a) Encontre y' derivando implicitamente.
(b) Resolva a equação explicitamente isolando y e derive para obter y' em termos de x.
(c) Verifique que suas soluções para as partes (a) e (b) são consistentes substituindo a expressão por y na sua solução para a parte (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$

2. $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

4. $\cos x + \sqrt{y} = 5$

5–20 Encontre dy/dx por derivação implícita.

5. $x^3 + y^3 = 1$

6. $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

7. $x^2 + xy - y^2 = 4$

8. $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$

9. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$

10. $xe^y = x - y$

11. $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$

12. $1 + x = \operatorname{sen}(xy^2)$

13. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$

14. $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$

15. $e^{x/y} = x - y$

16. $\sqrt{x + y} = 1 + x^2y^2$

17. $\operatorname{tg}^{-1}(x^2y) = x + xy^2$

18. $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 1$

19. $e^y \cos x = 1 + \operatorname{sen}(xy)$

20. $\operatorname{tg}(x - y) = \frac{y}{1 + x^2}$

21. Se $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ e $f(1) = 2$, encontre $f'(1)$.

22. Se $g(x) + x \operatorname{sen} g(x) = x^2$, encontre $g'(0)$.

23–24 Considere y como a variável independente e x como a variável dependente e use a derivação implícita para encontrar dx/dy.

23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$

24. $y \sec x = x \operatorname{tg} y$

25–32 Use a derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

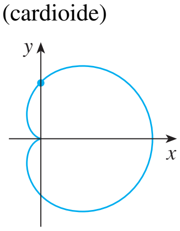
25. $y \operatorname{sen} 2x = x \cos 2y, \quad (\pi/2, \pi/4)$

26. $\operatorname{sen}(x + y) = 2x - 2y, \quad (\pi, \pi)$

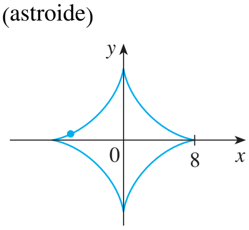
27. $x^2 + xy + y^2 = 3, \quad (1, 1)$ (elipse)

28. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2, \quad (1, 2)$ (hipérbole)

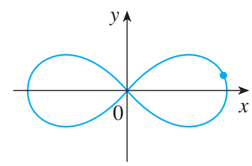
29. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$
$(0, \frac{1}{2})$
(cardioide)



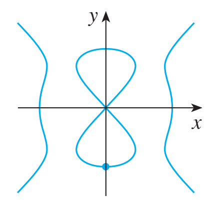
30. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
$(-3\sqrt{3}, 1)$
(astroide)



31. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$
$(3, 1)$
(lemniscata)



32. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$
$(0, -2)$
(curva do diabo)



33. (a) A curva com equação $y^2 = 5x^4 - x^2$ é chamada **kampyle** (do grego, curvado) **de Eudoxo**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, 2)$.
(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e a reta tangente em uma tela comum. (Se sua ferramenta gráfica puder traçar curvas definidas implicitamente, então use esse recurso. Caso não seja possível, você pode ainda criar o gráfico dessa curva traçando suas metades superior e inferior separadamente.)

34. (a) A curva com equação $y^2 = x^3 + 3x^2$ é denominada **cúbica de Tschirnhausen**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, -2)$.
(b) Em que pontos essa curva tem uma tangente horizontal?
(c) Ilustre as partes (a) e (b) traçando a curva e as retas tangentes sobre uma tela comum.

35–38 Encontre y'' por derivação implícita.

35. $9x^2 + y^2 = 9$

36. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

37. $x^3 + y^3 = 1$

38. $x^4 + y^4 = a^4$

39. Se $xy + e^y = e$, encontre o valor de y'' no ponto onde $x = 0$.

40. Se $x^2 + xy + y^3 = 1$, encontre o valor de y''' no ponto onde $x = 1$.

41. Formas extravagantes podem ser criadas usando-se a capacidade de traçar funções definidas implicitamente de um SCA.
(a) Trace a curva com equação

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

Em quantos pontos essa curva tem tangentes horizontais? Estime as abscissas desses pontos.
(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(0, 1)$ e $(0, 2)$.
(c) Encontre as abscissas exatas dos pontos da parte (a).
(d) Crie curvas ainda mais extravagantes modificando a equação da parte (a).

42. SCA (a) A curva com equação

$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

foi comparada com um "vagão sacolejante". Use um SCA para traçar essa curva e descubra o porquê desse nome.
(b) Em quantos pontos essa curva tem retas tangentes horizontais?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador   SCA Requer sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

Encontre as coordenadas x desses pontos.

43. Encontre os pontos sobre a lemniscata do Exercício 31 onde a tangente é horizontal.

44. Mostre, fazendo a derivação implícita, que a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

45. Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0).

46. Mostre que a soma das coordenadas das intersecções com os eixos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c.

47. Mostre, usando a derivação implícita, que qualquer reta tangente em um ponto P a um círculo com centro O é perpendicular ao raio OP.

48. A Regra da Potência pode ser demonstrada usando a derivação implícita para o caso onde n é um número racional, $n = p/q$, e $y = f(x) = x^n$ é suposta de antemão ser uma função derivável. Se $y = x^{p/q}$, então $y^q = x^p$. Use a derivação implícita para mostrar que

$$y' = \frac{p}{q}\,x^{(p/q)-1}$$

49–60 Encontre a derivada da função. Simplifique quando possível.

49. $y = \text{tg}^{-1}\sqrt{x}$

50. $y = \sqrt{\text{tg}^{-1}x}$

51. $y = \text{sen}^{-1}(2x + 1)$

52. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}\,\sec^{-1}x$

53. $G(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\arccos x$

54. $y = \text{tg}^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

55. $h(t) = \text{cotg}^{-1}(t) + \text{cotg}^{-1}(1/t)$

56. $F(\theta) = \text{arcsen}\sqrt{\text{sen}\,\theta}$

57. $y = x\,\text{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2}$

58. $y = \cos^{-1}(\text{sen}^{-1}t)$

59. $y = \arccos\left(\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \; a > b > 0$

60. $y = \text{arctg}\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

61–62 Encontre $f'(x)$. Verifique se sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f'.

61. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\text{arcsen}\,x$

62. $f(x) = \text{arctg}(x^2 - x)$

63. Demonstre a fórmula para $(d/dx)(\cos^{-1}x)$ pelo mesmo método usado para $(d/dx)(\text{sen}^{-1}x)$.

64. (a) Uma maneira de definir $\sec^{-1}x$ é dizer que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ e $0 \leqslant y < \pi/2$ ou $\pi \leqslant y < 3\pi/2$. Mostre que, com essa definição,

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

(b) Outra maneira de definir $\sec^{-1}x$ que é às vezes usada é dizer que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ e $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $y \neq 0$. Mostre que, com essa definição,

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

65–68 Duas curvas são **ortogonais** se suas retas tangentes forem perpendiculares em cada ponto de intersecção. Mostre que as famílias dadas de curvas são **trajetórias ortogonais** uma em relação a outra, ou seja, toda curva de uma família é ortogonal a toda curva da outra família. Esboce ambas as famílias de curvas no mesmo sistema de coordenadas.

65. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

66. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

67. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

68. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

69. Mostre que a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ e a hipérbole $x^2/A^2 - y^2/B^2 = 1$ são trajetórias ortogonais se $A^2 < a^2$ e $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$ (logo, a elipse e a hipérbole possuem os mesmos focos).

70. Encontre o valor do número a de tal modo que as famílias das curvas $y = (x + c)^{-1}$ e $y = a(x + k)^{1/3}$ sejam trajetórias ortogonais.

71. (a) A *Equação de van der Waals* para n mols de um gás é

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

onde P é a pressão, V é o volume e T é a temperatura do gás. A constante R é a constante de gás universal e a e b são constantes positivas que são características de um gás em particular. Se T permanece constante, use a derivação implícita para encontrar dV/dP.

(b) Encontre a taxa de variação de volume em relação à pressão de 1 mol de dióxido de carbono em um volume de $V = 10$ L e uma pressão de $P = 2{,}5$ atm. Use $a = 3{,}592\ \text{L}^2\text{-atm/mol}^2$ e $b = 0{,}04267$ L/mol.

72. (a) Use a derivação implícita para encontrar y' se $x^2 + xy + y^2 + 1 = 0$.

(b) Trace a curva da parte (a). O que você observa? Demonstre que o que você observa está correto.

(c) Em vista da parte (b), o que você pode dizer sobre a expressão para y' que você encontrou na parte (a)?

73. A equação $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa uma "elipse girada", isto é, uma elipse cujos eixos não são paralelos aos eixos coordenados. Encontre os pontos nos quais essa elipse cruza o eixo x e mostre que as retas tangentes nesses pontos são paralelas.

74. (a) Onde a reta normal à elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$ no ponto $(-1, 1)$ intersecta a elipse uma segunda vez?

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da elipse e da reta normal.

75. Encontre todos os pontos sobre a curva $x^2y^2 + xy = 2$ onde a inclinação da reta tangente é -1.

76. Encontre as equações de ambas as retas tangentes para a elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que passem pelo ponto $(12, 3)$.

77. (a) Suponha que f seja uma função injetora, derivável e que sua função inversa f^{-1} seja também derivável. Use a derivação implícita para mostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

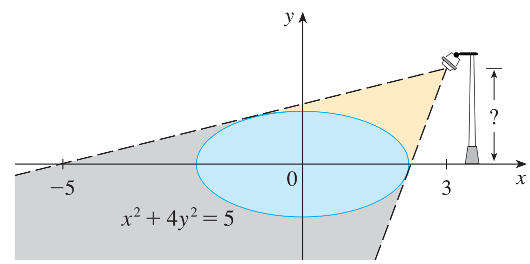
desde que o denominador não seja 0.

(b) Se $f(4) = 5$ e $f'(4) = \frac{2}{3}$, encontre $(f^{-1})'(5)$.

78. (a) Mostre que $f(x) = x + e^x$ é injetora.
(b) Qual o valor de $f^{-1}(1)$?
(c) Use a fórmula do Exercício 77(a) para determinar $(f^{-1})'(1)$.

79. A **Função de Bessel** de ordem 0, $y = J(x)$, satisfaz a equação diferencial $xy'' + y' + xy = 0$ para todos os valores de x e seu valor em 0 é $J(0) = 1$.
(a) Encontre $J'(0)$.
(b) Use a derivação implícita para encontrar $J''(0)$.

80. A figura mostra uma lâmpada localizada três unidades à direita do eixo y e uma sombra originada pela região elíptica $x^2 + 4y^2 \leq 5$. Se o ponto $(-5, 0)$ estiver na borda da sombra, qual a altura da lâmpada acima do eixo?



PROJETO APLICADO SCA **FAMÍLIAS DE CURVAS IMPLÍCITAS**

Neste projeto você explorará os formatos mutantes de curvas definidas implicitamente ao variar constantes numa família e determinará que características são comuns a todos os membros da família.

1. Considere a família de curvas

$$y^2 - 2x^2(x + 8) = c[(y + 1)^2(y + 9) - x^2]$$

(a) Traçando as curvas com $c = 0$ e $c = 2$, determine quantos pontos de intersecção existem. (Você pode precisar aplicar o *zoom* para encontrar todas elas.)
(b) Agora adicione as curvas com $c = 5$ e $c = 10$ aos esboços da parte (a). O que você percebe? E quanto aos outros valores de c?

2. (a) Trace diversos membros da família de curvas

$$x^2 + y^2 + cx^2y^2 = 1$$

Descreva como a curva muda à medida que você varia o valor de c.
(b) O que acontece à curva quando $c = -1$? Descreva o que aparece na tela. Você pode provar isso algebricamente?
(c) Encontre y' por derivação implícita. Para o caso $c = -1$, sua expressão para y' é consistente com o que você descobriu na parte (b)?

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

3.6 Derivadas de Funções Logarítmicas

Nesta seção vamos usar a derivação implícita para achar as derivadas das funções logarítmicas $y = \log_a x$ e, em particular, da função logarítmica natural $y = \ln x$. [É possível demonstrar que as funções logarítmicas são deriváveis: com certeza isso é plausível a partir dos seus gráficos (Veja a Figura 12 na Seção 1.6).]

1
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $y = \log_a x$. Então

$$a^y = x$$

Derivando essa equação implicitamente em relação a x, usando a Fórmula 3.4.5, obtemos

$$a^y(\ln a)\frac{dy}{dx} = 1$$

e assim

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

A Fórmula 3.4.5 diz que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a.$$

Se pusermos $a = e$ na Fórmula 1, então o fator $\ln a$ no lado direito torna-se $\ln e = 1$, e obtemos a fórmula para a derivada da função logarítmica natural $\log_e x = \ln x$:

2

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Comparando as Fórmulas 1 e 2, vemos uma das principais razões para os logaritmos naturais (logaritmos com base e) serem usados em cálculo. A fórmula de derivação é a mais simples quando $a = e$ porque $\ln e = 1$.

EXEMPLO 1 Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

SOLUÇÃO Para usarmos a Regra da Cadeia, vamos fazer $u = x^3 + 1$. Então, $y = \ln u$, logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{x^3 + 1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3 + 1}$$

De forma geral, se combinarmos a Fórmula 2 com a Regra da Cadeia, como no Exemplo 1, obtemos

3

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

EXEMPLO 2 Encontre $\dfrac{d}{dx}\ln(\text{sen } x)$.

SOLUÇÃO Usando $\boxed{3}$, temos

$$\frac{d}{dx}\ln(\text{sen } x) = \frac{1}{\text{sen } x}\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \frac{1}{\text{sen } x}\cos x = \text{cotg } x$$

EXEMPLO 3 Derive $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

SOLUÇÃO Dessa vez o logaritmo é a função de dentro; logo, a Regra da Cadeia dá

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

EXEMPLO 4 Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \text{sen } x)$.

SOLUÇÃO Usando a Fórmula 1 com $a = 10$, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\log_{10}(2 + \text{sen } x)$$

$$= \frac{1}{(2 + \text{sen } x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2 + \text{sen } x)$$

$$= \frac{\cos x}{(2 + \text{sen } x)\ln 10}$$

EXEMPLO 5 Encontre $\dfrac{d}{dx} \ln \dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$.

SOLUÇÃO 1

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}} \frac{d}{dx} \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \\
&= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1} \frac{\sqrt{x-2} \cdot 1 - (x+1)\left(\frac{1}{2}\right)(x-2)^{-1/2}}{x-2} \\
&= \frac{x - 2 - \frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\
&= \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}
\end{aligned}$$

SOLUÇÃO 2 Se primeiro simplificarmos a função dada usando as propriedades do logaritmo, então a derivação ficará mais fácil:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \frac{d}{dx} \left[\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x-2)\right] \\
&= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right)
\end{aligned}$$

(Essa resposta pode ser deixada assim, mas se usássemos um denominador comum obteríamos a mesma resposta da Solução 1.)

A Figura 1 mostra o gráfico da função f do Exemplo 5 com o gráfico de sua derivada. Ela mostra a verificação visual de nosso cálculo. Observe que $f'(x)$ é uma negativa grande quando f está reduzindo rapidamente.

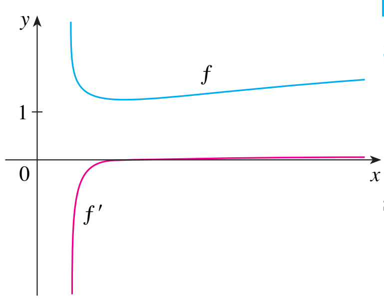


FIGURA 1

EXEMPLO 6 Encontre $f'(x)$ se $f(x) = \ln|x|$.

SOLUÇÃO Uma vez que

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

segue-se que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\[2mm] \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Assim, $f'(x) = 1/x$ para todo $x \neq 0$.

A Figura 2 ilustra o gráfico da função $f(x) = \ln|x|$ do Exemplo 6 e sua derivada $f'(x) = 1/x$. Observe que, quando x é pequeno, o gráfico de $y = \ln|x|$ é íngreme e, portanto, $f'(x)$ é grande (positiva ou negativa).

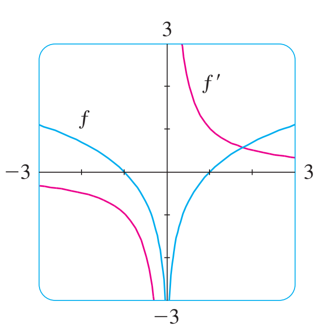


FIGURA 2

O resultado do Exemplo 6 vale a pena ser lembrado:

4 $$\boxed{\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}}$$

Derivação Logarítmica

Os cálculos de derivadas de funções complicadas envolvendo produtos, quocientes ou potências podem muitas vezes ser simplificados tomando-se os logaritmos. O método usado no exemplo a seguir é chamado **derivação logarítmica**.

EXEMPLO 7 Derive $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

SOLUÇÃO Tome o logaritmo em ambos os lados da equação e use as Propriedades do Logaritmo para simplificar:

$$\ln y = \tfrac{3}{4}\ln x + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

Derivando implicitamente em relação a x, temos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\cdot\frac{3}{3x+2}$$

Isolando dy/dx, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Se não usássemos a derivação logarítmica no Exemplo 7, teríamos de utilizar tanto a Regra do Quociente quanto a Regra do Produto. Os cálculos resultantes seriam horríveis.

Como temos uma expressão explícita para y, podemos substituí-lo por ela e escrever

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Passos na Derivação Logarítmica

1. Tome o logaritmo natural em ambos os lados de uma equação $y = f(x)$ e use as Propriedades dos Logaritmos para simplificar.
2. Derive implicitamente em relação a x.
3. Isole y' na equação resultante.

Se $f(x) < 0$ para algum valor de x, então $\ln f(x)$ não está definida, mas podemos escrever $|y| = |f(x)|$ e usar a Equação 4. Ilustramos esse procedimento demonstrando a versão geral da Regra da Potência, como prometemos na Seção 3.1.

A Regra da Potência Se n for qualquer número real e $f(x) = x^n$, então

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $y = x^n$. Use a derivação logarítmica:

$$\ln|y| = \ln|x|^n = n\ln|x| \qquad x \neq 0$$

Se $x = 0$, podemos mostrar que $f'(0) = 0$ para $n > 1$ diretamente da definição de derivada.

Logo, $$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$$

Daí $$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$$

Você deve distinguir cuidadosamente a Regra da Potência $[(x^n)' = nx^{n-1}]$, na qual a base é variável e o expoente, constante, da regra para diferenciar as funções exponenciais $[(a^x)' = a^x \ln a]$, na qual a base é constante e o expoente, variável.

Em geral há quatro casos para os expoentes e as bases:

1. $\dfrac{d}{dx}(a^b) = 0$ (a e b são constantes) — Base constante, expoente constante
2. $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1}f'(x)$ — Base variável, expoente constante
3. $\dfrac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\ln a)g'(x)$ — Base constante, expoente variável

Base variável, expoente variável

4. Para encontrar $(d/dx)[f(x)]^{g(x)}$, a derivação logarítmica pode ser usada, como no exemplo.

EXEMPLO 8 Derive $y = x^{\sqrt{x}}$.

A Figura 3 ilustra o Exemplo 8 mostrando os gráficos de $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ e sua derivada.

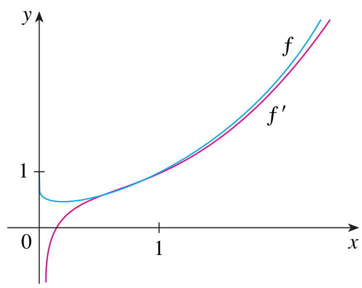


FIGURA 3

SOLUÇÃO 1 Uma vez que a base e o expoente são variáveis, usamos a derivação logarítmica:

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + (\ln x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

SOLUÇÃO 2 Outro método é escrever $x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}\ln x}\right) = e^{\sqrt{x}\ln x}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\ln x\right)$$

$$= x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \text{(como na Solução 1)}$$

O Número e como um Limite

Já mostramos que se $f(x) = \ln x$, então $f'(x) = 1/x$. Assim, $f'(1) = 1$. Agora, usamos esse fato para expressar o número e como um limite.

Da definição de derivada como um limite, temos

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}$$

Por causa de $f'(1) = 1$, temos

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = 1$$

Assim, pelo Teorema 2.5.8 e pela continuidade da função exponencial, temos

$$e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

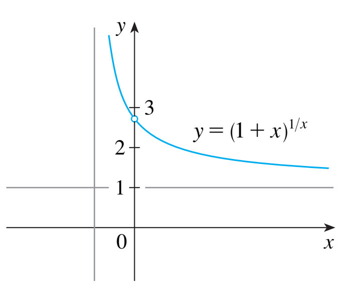


FIGURA 4

x	$(1 + x)^{1/x}$
0,1	2,59374246
0,01	2,70481383
0,001	2,71692393
0,0001	2,71814593
0,00001	2,71826824
0,000001	2,71828047
0,0000001	2,71828169
0,00000001	2,71828181

5 $$\boxed{e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}}$$

A Fórmula 5 está ilustrada pelo gráfico da função $y = (1+x)^{1/x}$ na Figura 4 e na tabela para os valores pequenos de x. Isso ilustra o fato de que, com precisão até a sétima casa decimal,

$$e \approx 2{,}7182818$$

Se colocarmos $n = 1/x$ na Fórmula 5, então $n \to \infty$ quando $x \to 0^+$ e uma expressão alternativa para e é

6 $$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

3.6 Exercícios

1. Explique por que a função logarítmica natural $y = \ln x$ é usada mais vezes no cálculo do que as outras funções logarítmicas $y = \log_a x$.

2–22 Derive a função.

2. $f(x) = x \ln x - x$

3. $f(x) = \text{sen}(\ln x)$

4. $f(x) = \ln(\text{sen}^2 x)$

5. $f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$

6. $f(x) = \ln \sqrt[5]{x}$

7. $f(x) = \log_{10}(x^3 + 1)$

8. $f(x) = \log_5(xe^x)$

9. $f(x) = \text{sen}\, x \ln(5x)$

10. $f(u) = \dfrac{u}{1 + \ln u}$

11. $g(x) = \ln\left(x\sqrt{x^2 - 1}\right)$

12. $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

13. $G(y) = \ln \dfrac{(2y + 1)^5}{\sqrt{y^2 + 1}}$

14. $g(r) = r^2 \ln(2r + 1)$

15. $F(s) = \ln \ln s$

16. $y = \ln|1 + t - t^3|$

17. $y = \text{tg}[\ln(ax + b)]$

18. $y = \ln|\cos(\ln x)|$

19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

20. $H(z) = \ln \sqrt{\dfrac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

21. $y = 2x \log_{10}\sqrt{x}$

22. $y = \log_2(e^{-x} \cos \pi x)$

23–26 Encontre y' e y''.

23. $y = x^2 \ln(2x)$

24. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

25. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

26. $y = \ln(\sec x + \text{tg}\, x)$

27–30 Derive f e encontre o domínio de f.

27. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln(x - 1)}$

28. $f(x) = \sqrt{2 + \ln x}$

29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

30. $f(x) = \ln \ln \ln x$

31. Se $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, encontre $f'(1)$.

32. Se $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$, encontre $f'(0)$.

33–34 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

33. $y = \ln(x^2 - 3x + 1)$, $(3, 0)$

34. $y = x^2 \ln x$, $(1, 0)$

35. Se $f(x) = \text{sen}\, x + \ln x$, encontre $f'(x)$. Verifique se sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f'.

36. Encontre as equações das retas tangentes para a curva $y = (\ln x)/x$ nos pontos $(1, 0)$ e $(e, 1/e)$. Ilustre fazendo o gráfico da curva e de suas retas tangentes.

37. Seja $f(x) = cx + \ln(\cos x)$. Para qual valor de c ocorre $f'(\pi/4) = 6$?

38. Seja $f(x) = \log_a(3x^2 - 2)$. Para qual valor de a ocorre $f'(1) = 3$?

39–50 Use a derivação logarítmica para achar a derivada de função.

39. $y = (2x + 1)^5 (x^4 - 3)^6$

40. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$

41. $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^4 + 1}}$

42. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2 - x}(x + 1)^{2/3}$

43. $y = x^x$

44. $y = x^{\cos x}$

45. $y = x^{\text{sen}\, x}$

46. $y = \sqrt{x}^{\,x}$

47. $y = (\cos x)^x$

48. $y = (\text{sen}\, x)^{\ln x}$

49. $y = (\text{tg}\, x)^{1/x}$

50. $y = (\ln x)^{\cos x}$

51. Encontre y' se $y = \ln(x^2 + y^2)$.

52. Encontre y' se $x^y = y^x$.

53. Encontre uma fórmula para $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = \ln(x - 1)$.

54. Encontre $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.

55. Use a definição da derivada para demonstrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

56. Mostre que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ para qualquer $x > 0$.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

3.7 Taxas de Variação nas Ciências Naturais e Sociais

Sabemos que se $y = f(x)$, então a derivada dy/dx pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x. Nesta seção examinaremos algumas das aplicações dessa ideia na física, química, biologia, economia e em outras ciências.

Vamos nos recordar da Seção 2.7, que apresentou a ideia básica das taxas de variação. Se x variar de x_1 a x_2, então a variação em x será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em y será

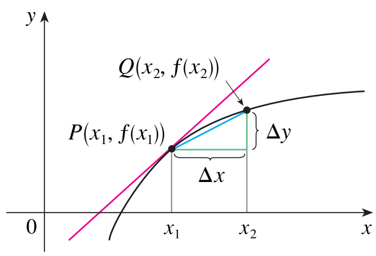
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

O quociente da diferença

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é a **taxa média de variação de y em relação a x** sobre o intervalo $[x_1, x_2]$ e pode ser interpretada como a inclinação da reta secante PQ na Figura 1. Seu limite como $\Delta x \to 0$ é a derivada $f'(x_1)$, que pode portanto ser interpretada como a **taxa instantânea de variação de y em relação a x** ou a inclinação da reta tangente em $P(x_1, f(x_1))$. Usando a notação de Leibniz, escrevemos o processo na forma:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



m_{PQ} = taxa média de variação
$m = f'(x_1)$ = taxa instantânea de variação

FIGURA 1

Sempre que a função $y = f(x)$ tiver uma interpretação específica em uma das ciências, sua derivada terá outra interpretação específica, como uma taxa de variação. (Como discutido na Seção 2.7, as unidades dy/dx são as unidades para y divididas pela unidade para x.) Agora vamos examinar algumas dessas interpretações nas ciências naturais e sociais.

Física

Se $s = f(t)$ for a função posição de uma partícula que está se movendo em uma reta, então $\Delta s/\Delta t$ representa a velocidade média ao longo de um período de tempo Δt, e $v = ds/dt$ representa a **velocidade** instantânea (a taxa de variação do deslocamento em relação ao tempo). A taxa instantânea de variação da velocidade com relação ao tempo é a **aceleração**: $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Isso já foi discutido nas Seções 2.7 e 2.8, mas agora que conhecemos as fórmulas de derivação, estamos habilitados a resolver os problemas de velocidade mais facilmente.

EXEMPLO 1 A posição de uma partícula é dada pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

onde t é medido em segundos e s, em metros.
(a) Encontre a velocidade no tempo t.
(b) Qual a velocidade depois de 2 s? E depois de 4 s?
(c) Quando a partícula está em repouso?
(d) Quando a partícula está se movendo para a frente (isto é, no sentido positivo)?
(e) Faça um diagrama para representar o movimento da partícula.
(f) Encontre a distância total percorrida pela partícula durante os primeiros cinco segundos.
(g) Encontre a aceleração no tempo t e depois de 4 s.
(h) Faça os gráficos das funções posição, velocidade e aceleração para $0 \leqslant t \leqslant 5$.
(i) Quando a partícula está acelerando? Quando está freando?

SOLUÇÃO
(a) A função velocidade é a derivada da função posição:

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

(b) A velocidade depois de 2 s é a velocidade instantânea quando $t = 2$, ou seja,

$$v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m/s}$$

A velocidade depois de 4 s é

$$v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m/s}$$

(c) A partícula está em repouso quando $v(t) = 0$, isto é,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t - 1)(t - 3) = 0$$

e isso acontece quando $t = 1$ ou $t = 3$. Dessa forma, a partícula está em repouso após 1 s e depois de 3 s.

(d) A partícula move-se no sentido positivo quando $v(t) > 0$, ou seja

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) > 0$$

Essa desigualdade é verdadeira quando ambos os fatores forem positivos ($t > 3$) ou quando ambos os fatores forem negativos ($t < 1$). Assim, a partícula move-se no sentido positivo nos intervalos de tempo $t < 1$ e $t > 3$. Move-se para trás (no sentido negativo) quando $1 < t < 3$.

(e) Usando as informações da parte (d), fazemos um esquema ilustrativo na Figura 2 do movimento da partícula, que volta e depois torna a avançar ao longo da reta (eixo s).

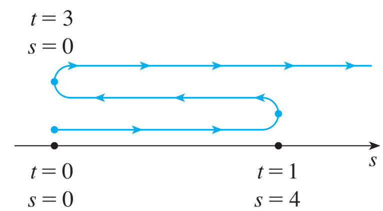


FIGURA 2

(f) Por causa do que aprendemos nas partes (d) e (e), precisamos calcular separadamente a distância percorrida durante os intervalos de tempo [0, 1], [1, 3] e [3, 5] separadamente.

A distância percorrida no primeiro segundo é

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$$

De $t = 1$ a $t = 3$ a distância percorrida é

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$$

De $t = 3$ a $t = 5$ a distância percorrida é

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$$

A distância total é $4 + 4 + 20 = 28$ m.

(g) A aceleração é a derivada da função velocidade:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

$$a(4) = 6(4) - 12 = 12 \text{ m/s}^2$$

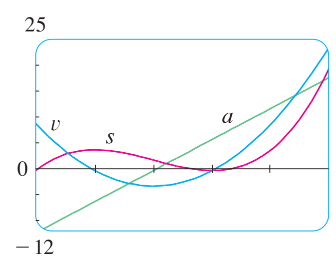


FIGURA 3

(h) A Figura 3 mostra os gráficos de s, v e a.

(i) A partícula acelera quando a velocidade é positiva e crescente (v e a são ambas positivas) e, também, quando a velocidade é negativa e decrescente (v e a são ambas negativas). Em outras palavras, a partícula aumenta a velocidade quando a velocidade e a aceleração têm o mesmo sinal. (A partícula é empurrada na mesma direção em que está se movendo.) Da Figura 3 vemos que isso ocorre quando $1 < t < 2$ e quando $t > 3$. A partícula está reduzindo velocidade quando v e a têm sinais opostos, ou seja, quando $0 \leqslant t < 1$ e quando $2 < t < 3$. A Figura 4 resume o movimento da partícula.

TEC Em *Module 3.7* você pode ver uma animação da Figura 4 com uma expressão para s que você mesmo pode escolher.

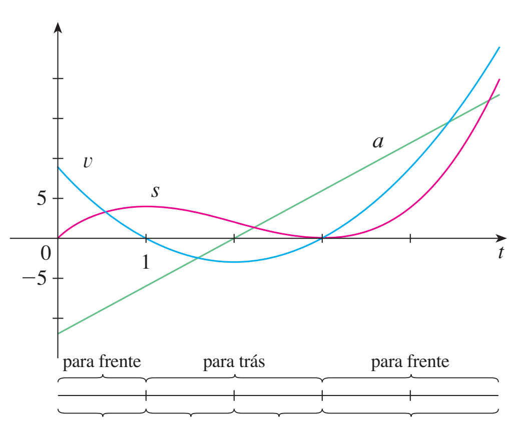


FIGURA 4

EXEMPLO 2 Se uma barra ou pedaço de fio forem homogêneos, então sua densidade linear será uniforme e estará definida como a massa por unidade de comprimento ($\rho = m/l$) medida em quilogramas por metro. Suponha, contudo, que a barra não seja homogênea, mas que sua massa, medida a partir da extremidade esquerda até um ponto x, seja $m = f(x)$, conforme mostrado na Figura 5.

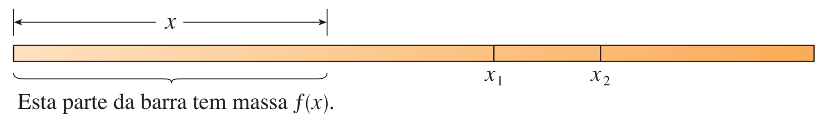


FIGURA 5

A massa da parte da barra que está situada entre $x = x_1$ e $x = x_2$ é dada por $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$; logo, a densidade média daquela parte da barra é

$$\text{densidade média} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Se fizermos $\Delta x \to 0$ (ou seja, $x_2 \to x_1$), estaremos computando a densidade média em intervalos cada vez menores. A **densidade linear** ρ em x_1 é o limite dessas densidades médias quando $\Delta x \to 0$; ou seja, a densidade linear é a taxa de variação da massa em relação ao comprimento. Simbolicamente,

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

Assim, a densidade linear da barra é a derivada da massa em relação ao comprimento.

Por exemplo, se $m = f(x) = \sqrt{x}$, onde x é medida em metros e m em quilogramas, então a densidade média da parte da barra dada por $1 \leqslant x \leqslant 1{,}2$ é

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1{,}2) - f(1)}{1{,}2 - 1} = \frac{\sqrt{1{,}2} - 1}{0{,}2} \approx 0{,}48 \text{ kg/m}$$

enquanto a densidade exatamente em $x = 1$ é

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 0{,}50 \text{ kg/m}$$

EXEMPLO 3 Uma corrente existe sempre que cargas elétricas se movem. A Figura 6 ilustra parte de um fio e elétrons movimentando-se através de uma superfície plana sombreada em vermelho. Se ΔQ é a quantidade de carga líquida que passa através dessa superfície durante um período de tempo Δt, então a corrente média durante esse intervalo de tempo é definida como

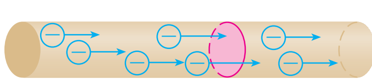


FIGURA 6

$$\text{corrente média} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}$$

Se fizermos o limite dessa corrente média sobre intervalos de tempo cada vez menores, obteremos o que denominamos **corrente** I em um dado tempo t_1:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Assim, a corrente é a taxa na qual a carga flui através de uma superfície. É medida em unidades de carga por unidade de tempo (frequentemente coulombs por segundo, chamados ampères).

A velocidade, densidade e corrente não são as únicas taxas importantes na física. São inclusas também a potência (a taxa segundo a qual um trabalho é realizado), a taxa do fluxo de calor, o gradiente da temperatura (a taxa de variação da temperatura em relação à posição) e a taxa de decaimento radioativo de uma substância na física nuclear.

Química

EXEMPLO 4 Uma reação química resulta na formação de uma ou mais substâncias (conhecidas como *produtos*) a partir de um ou mais materiais iniciais (ditos *reagentes*). Por exemplo, a "equação"

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

indica que duas moléculas de hidrogênio e uma molécula de oxigênio formam duas moléculas de água. Consideremos a reação

$$A + B \rightarrow C$$

onde A e B são reagentes e C é o produto. A **concentração** de um reagente A é o número de mols (1 mol $= 6{,}022 \times 10^{23}$ moléculas) por litro e é denotada por [A]. A concentração varia durante a reação, logo [A], [B] e [C] são funções do tempo (t). A taxa média da reação do produto C sobre um intervalo de tempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ é

$$\frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{[C](t_2) - [C](t_1)}{t_2 - t_1}$$

Mas os químicos estão mais interessados na **taxa de reação instantânea**, obtida fazendo-se o limite da taxa de reação média quando o intervalo de tempo Δt tende a 0:

$$\text{taxa de reação} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{d[C]}{dt}$$

Uma vez que a concentração do produto aumenta quando a reação avança, a derivada $d[C]/dt$ será positiva. (Você pode ver intuitivamente que a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função crescente é positiva.) Assim, a taxa de reação de C é positiva. A concentração de reagentes, entretanto, decresce durante a reação; logo, para tornar as taxas de reação de A e B números positivos, colocamos sinais de menos na frente das derivadas $d[A]/dt$ e $d[B]/dt$. Uma vez que [A] e [B] decrescem na mesma taxa que [C] aumenta, temos

$$\text{taxa de reação} = \frac{d[C]}{dt} = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt}$$

Mais geralmente, o resultado é que para uma reação da forma

$$aA + bB \rightarrow cC + dD$$

temos

$$-\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[D]}{dt}$$

A taxa de reação pode ser determinada graficamente. Em alguns casos podemos usar a taxa de reação para achar fórmulas explícitas para as concentrações como funções do tempo que nos permitem calcular a taxa de reação (veja o Exercício 24).

EXEMPLO 5 Uma das quantidades de interesse na termodinâmica é a compressibilidade. Se uma dada substância é mantida a uma temperatura constante, então seu volume V depende de sua pressão P. Podemos considerar a taxa de variação de volume em relação à pressão, isto é, a derivada dV/dP. À medida que P aumenta, V diminui, logo, $dV/dP < 0$. A **compressibilidade** é definida introduzindo-se o sinal negativo e dividindo essa derivada pelo volume V:

$$\text{compressibilidade isotérmica} = \beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

Assim, β mede quão rápido, por unidade de volume, o volume de uma substância decresce quando a pressão sobre ela cresce, a uma temperatura constante.
Por exemplo, o volume V (em metros cúbicos) de uma amostra do ar a 25 ºC está relacionado com a pressão P (em quilopascals) pela equação

$$V = \frac{5{,}3}{P}$$

A taxa de variação de V em relação a P quando $P = 50$ kPa é

$$\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = -\left.\frac{5{,}3}{P^2}\right|_{P=50}$$

$$= -\frac{5{,}3}{2.500} = -0{,}00212 \text{ m}^3/\text{kPa}$$

A compressibilidade naquela pressão é

$$\beta = -\frac{1}{V}\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = \frac{0{,}00212}{\dfrac{5{,}3}{50}} = 0{,}02 \text{ (m}^3/\text{kPa)/m}^3$$

Biologia

EXEMPLO 6 Seja $n = f(t)$ o número de indivíduos numa população animal ou de plantas num tempo t. A variação no tamanho da população entre os tempos $t = t_1$ e $t = t_2$ é $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$, e então a taxa média de crescimento durante o período de tempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ é

$$\text{taxa média de crescimento} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

A **taxa de crescimento instantâneo** é obtida dessa taxa média de crescimento fazendo-se o período de tempo Δt tender a 0:

$$\text{taxa de crescimento} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

Estritamente falando, isso não é muito preciso, pois o gráfico real de uma função de população $n = f(t)$ seria uma função escada, que é descontínua sempre que ocorre um nascimento ou morte e, portanto, não seria derivável. Contudo, para uma grande população animal ou vegetal, podemos substituir o gráfico por uma curva aproximante lisa, como na Figura 7.

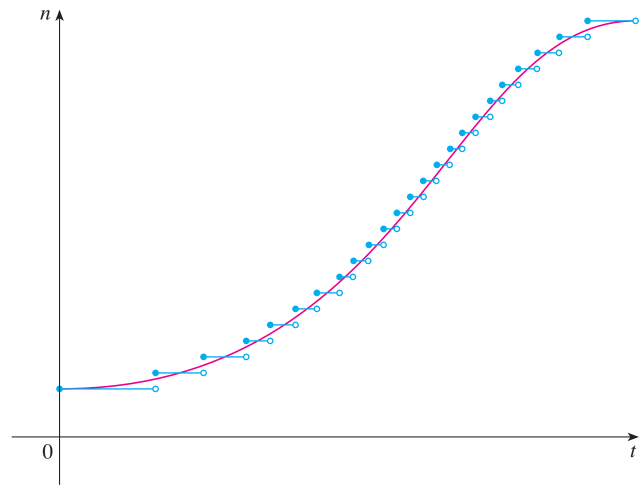


FIGURA 7
Uma curva aproximante lisa de uma função crescimento

Para ser mais específico, considere uma população de bactérias em um meio nutriente homogêneo. Suponha que tomando amostras da população em certos intervalos, determina-se que ela duplica a cada hora. Se a população inicial for n_0 e o tempo for medido em horas, então

$$f(1) = 2f(0) = 2n_0$$

$$f(2) = 2f(1) = 2^2 n_0$$

$$f(3) = 2f(2) = 2^3 n_0$$

e, em geral,

$$f(t) = 2^t n_0$$

A função da população é $n = n_0 2^t$.

Na Seção 3.4 mostramos que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

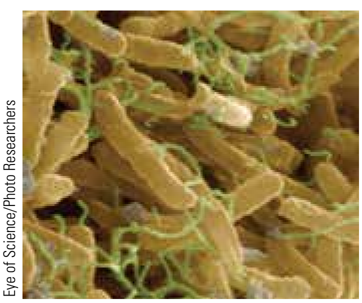
Portanto, a taxa de crescimento da população de bactérias no tempo t é

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(n_0 2^t) = n_0 2^t \ln 2$$

Por exemplo, suponha que comecemos com uma população inicial de $n_0 = 100$ bactérias. Então, a taxa de crescimento depois de 4 horas é

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} = 100 \cdot 2^4 \ln 2 = 1.600 \ln 2 \approx 1.109$$

Isso quer dizer que, depois de 4 horas, a população de bactérias está crescendo a uma taxa de cerca de 1.109 bactérias por hora.



Eye of Science/Photo Researchers

As bactérias E. coli têm cerca de 2 micrômetros (μm) de comprimento e 0,75 μm de largura. A imagem foi produzida com escaneamento por microscópio de elétrons.

EXEMPLO 7 Considerando o fluxo de sangue através de um vaso sanguíneo, como uma veia ou artéria, podemos modelar a forma do vaso sanguíneo por um tubo cilíndrico de raio R e comprimento l, conforme ilustrado na Figura 8.

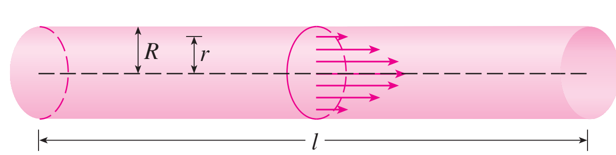


FIGURA 8
Fluxo de sangue em uma artéria

Em razão do atrito nas paredes do tubo, a velocidade v do sangue é maior ao longo do eixo central e decresce à medida que r se distancia do eixo central, até que v torna-se 0 na parede. A relação entre v and r é dada pela **lei do fluxo laminar**, descoberta em 1840 pelo físico francês Jean-Louis-Marie Poiseuille. Esta lei afirma que

Para informações mais detalhadas, veja W. Nichols e M. O'Rourke (eds). *McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretical, Experimental, and Clinical Principles*, 5. ed. (Nova York, 2005).

$$\boxed{1} \qquad v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

onde η é a viscosidade do sangue e P é a diferença entre as pressões nos extremos do tubo. Se P e l forem constantes, então v é uma função de com o domínio $[0, R]$.

A taxa da variação média da velocidade quando nos movemos de $r = r_1$ para $r = r_2$ é dada por

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

e se fizermos $\Delta r \to 0$, obteremos o **gradiente da velocidade**, isto é, a taxa instantânea de variação da velocidade em relação a r:

$$\text{gradiente da velocidade} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}$$

Usando a Equação 1, obtemos

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta l}(0 - 2r) = -\frac{Pr}{2\eta l}$$

Para artérias humanas menores podemos tomar $\eta = 0{,}027$, $R = 0{,}008$ cm, $l = 2$ cm e $P = 4\,000$ dinas/cm^2, o que fornece

$$\begin{aligned} v &= \frac{4\,000}{4(0{,}027)2}(0{,}000064 - r^2) \\ &\approx 1{,}85 \times 10^4(6{,}4 \times 10^{-5} - r^2) \end{aligned}$$

Em $r = 0{,}002$ cm, o sangue está fluindo a uma velocidade de

$$\begin{aligned} v(0{,}002) &\approx 1{,}85 \times 10^4(64 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-6}) \\ &= 1{,}11 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

e o gradiente da velocidade nesse ponto é

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0{,}002} = -\frac{4.000(0{,}002)}{2(0{,}027)2} \approx -74 \text{ (cm/s)/cm}$$

Para sentirmos o que isso significa, vamos mudar nossas unidades de centímetros para micrômetros (1 cm = 10 000 µm). Então o raio da artéria é 80 µm. A velocidade no eixo central é 11 850 µm/s, que decresce para 11 110 µm/s a uma distância de $r = 20$ µm. O fato de que $dv/dr = -74$ (µm/s)/µm quer dizer que quando $r = 20$ µm, a velocidade está decrescendo a uma taxa de cerca de 74 µm/s para cada micrômetro que afastarmos do centro.

Economia

EXEMPLO 8 Suponha que $C(x)$ seja o custo total que uma empresa incorre na produção de x unidades de uma certo produto. A função C é denominada **função de custo**. Se o número de itens produzidos aumenta de x_1 para x_2, o custo adicional será $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$, e a taxa média de variação do custo será

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

O limite dessa grandeza quando $\Delta x \to 0$, ou seja, a taxa de variação instantânea de variação do custo em relação ao número de itens produzidos, é denominado **custo marginal** pelos economistas:

$$\text{custo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

[Uma vez que x pode geralmente assumir somente os valores inteiros, pode não fazer sentido tomar Δx, mas podemos sempre substituir $C(x)$ por uma função lisa aproximante, como no Exemplo 6].

Fazendo $\Delta x = 1$ e n muito grande (de modo que Δx seja pequeno comparado com n), temos

$$C'(n) \approx C(n + 1) - C(n)$$

Assim, o custo marginal de produção de n unidades é aproximadamente igual ao custo de produção de mais uma unidade [a $(n + 1)$-ésima unidade].

Em geral, é apropriado representar uma função custo por um polinômio

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

onde a representa os custos gerais indiretos (aluguel, aquecimento, manutenção), e os outros termos representam o custo das matérias-primas, da mão de obra e assim por diante. (O custo das matérias-primas pode ser proporcional a x, mas o custo da mão de obra poderia depender parcialmente de potências mais altas de x, em decorrência dos custos de horas extras e ineficiências envolvidas em operações de larga escala.)

Por exemplo, suponha que uma empresa tenha estimado que o custo (em dólares) de produção de x itens seja

$$C(x) = 10\,000 + 5x + 0{,}01x^2$$

Então, a função custo marginal é

$$C'(x) = 5 + 0{,}02x$$

O custo marginal no nível de produção de 500 itens é

$$C'(500) = 5 + 0{,}02(500) = \$15/\text{item}.$$

Isso dá a taxa segundo a qual os custos estão crescendo em relação ao nível de produção quando $x = 500$ e prediz o custo da 501ª unidade.

O custo real de produção da 501ª unidade é

$$\begin{aligned} C(501) - C(500) &= [10\,000 + 5(501) + 0{,}01(501)^2] \\ &\qquad - [10\,000 + 5(500) + 0{,}01(500)^2] \\ &= \$15{,}01 \end{aligned}$$

Observe que $C'(500) \approx C(501) - C(500)$.

Os economistas também estudam a demanda marginal, a renda marginal e o lucro marginal, que são derivadas das funções demanda, renda e lucro. Isso será visto no Capítulo 4, depois de desenvolvermos as técnicas para encontrar os valores máximo e mínimo de funções.

Outras Ciências

As taxas de variação ocorrem em todas as ciências. Um geólogo se interessa em saber a taxa na qual uma massa de rocha fundida resfria pela condução de calor para o meio rochoso que a envolve. Um engenheiro quer saber a taxa segundo a qual a água escoa para dentro ou para fora de um reservatório. Um geógrafo urbano tem interesse na taxa de variação da densidade da população numa cidade à medida que a distância do centro da cidade aumenta. Um meteorologista se preocupa com a taxa de variação da pressão atmosférica em relação à altura (veja o Exercício 17 na Seção 3.8).

Em psicologia, os interessados na teoria do aprendizado estudam a chamada curva de aprendizado, que é o gráfico do desempenho $P(t)$ de alguém aprendendo alguma coisa como função do tempo de treinamento t. É de particular interesse a taxa segundo a qual o desempenho melhora à medida que o tempo passa, isto é, dP/dt.

Em sociologia, o cálculo diferencial é usado na análise da divulgação do boato (ou inovações, ou modismos, ou padrões). Se $p(t)$ denota a proporção de uma população que fica sabendo de um boato no tempo t, então a derivada dp/dt representa a taxa de divulgação do boato (veja o Exercício 84 na Seção 3.4).

Uma Única Ideia, Muitas Interpretações

A velocidade, a densidade, a corrente, a potência e o gradiente da temperatura na física; a taxa de reação e a compressibilidade na química; a taxa de crescimento e o gradiente da velocidade do sangue na biologia; o custo e o lucro marginal na economia; a taxa do fluxo do calor na geologia; a taxa de desenvolvimento do desempenho na psicologia; a taxa de divulgação de um boato na sociologia – todos esses são casos especiais de um único conceito matemático, a derivada.

Isto é uma ilustração do fato de que parte do poder da matemática está em sua abstração. Um único conceito matemático abstrato (tal como a derivada) pode ter interpretações diferentes para cada uma das ciências. Quando desenvolvemos as propriedades do conceito matemático de uma vez por todas, podemos voltar e aplicar esses resultados em todas as ciências. Isso é muito mais eficiente do que desenvolver as propriedades de conceitos especiais para cada ciência separada. O matemático Francês Joseph Fourier (1768–1830) colocou de forma sucinta: "A matemática compara os mais diversos fenômenos e descobre as analogias secretas que os unem".

3.7 Exercícios

1–4 Uma partícula move-se segundo a lei do movimento $s = f(t)$, $t \geqslant 0$, em que t é medido em segundos e s, em metros.

(a) Encontre a velocidade no tempo t.
(b) Qual a velocidade depois de 3 s?
(c) Quando a partícula está em repouso?
(d) Quando a partícula está se movendo no sentido positivo?
(e) Encontre a distância total percorrida durante os 8 primeiros segundos.
(f) Desenhe um diagrama como na Figura 2 para ilustrar o movimento da partícula.
(g) Encontre a aceleração no tempo t e depois de 3 s.
(h) Faça os gráficos das funções posição, velocidade e aceleração para $0 \leqslant t \leqslant 8$.
(i) Quando a partícula está acelerando? Quando está freando?

1. $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$

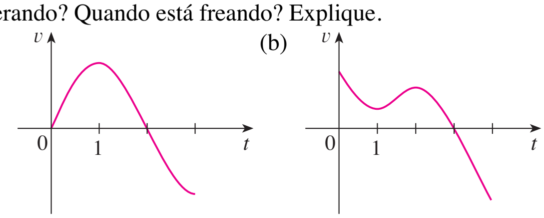
2. $f(t) = 0{,}01t^4 - 0{,}04t^3$

3. $f(t) = \cos(\pi t/4), \quad t \leqslant 10$

4. $f(t) = te^{-t/2}$

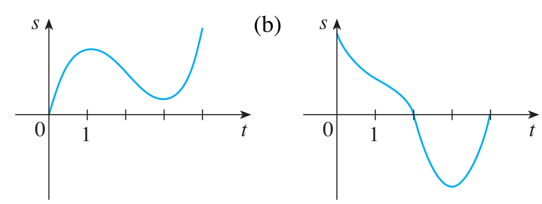
5. São mostrados os gráficos das funções *velocidade* de duas partículas, com t medido em segundos. Quando cada partícula está acelerando? Quando está freando? Explique.

(a) (b)



6. São mostrados os gráficos das funções *posição* de duas partículas, com t medido em segundos. Quando cada partícula está acelerando? Quando está freando? Explique.

(a) (b)



7. A altura (em metros) de um projétil lançado verticalmente para cima de um ponto a 2 m acima do nível do solo com velocidade inicial de 24,5 m/s é $h = 2 + 24{,}5t - 4{,}9t^2$ após t segundos.

(a) Encontre a velocidade após 2 s e após 4 s.
(b) Quando o projétil alcança sua altura máxima?
(c) Qual é a altura máxima?
(d) Quando ele atinge o solo?
(e) Com qual velocidade ele atinge o solo?

8. Se uma bola for atirada verticalmente para cima com velocidade de 24,5 m/s, então sua altura depois de t segundos será $s = 24{,}5t - 4{,}9t^2$.

(a) Qual a altura máxima atingida pela bola?
(b) Qual a velocidade da bola quando estiver 29,4 m acima do solo na subida? E na descida?

9. Se uma pedra for atirada verticalmente para cima sobre a superfície de Marte, com velocidade de 15 m/s, sua altura após t segundos será $h = 15t - 1{,}86t^2$.

(a) Qual a velocidade da pedra após 2 s?
(b) Qual a velocidade da pedra quando sua altura for 25 m acima do solo na subida? E na descida?

10. Um partícula se move com uma função posição

$$s = t^4 - 4t^3 - 20t^2 + 20t \qquad t \geqslant 0$$

(a) Quando a partícula tem a velocidade de 20 m/s?
(b) Quando a aceleração é 0? Qual é o significado deste valor de t?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador   **1.** As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

11. (a) Uma empresa produz *chips* de computador a partir de placas quadradas de silício. Ela quer manter o comprimento do lado da placa muito próximo de 15 mm e deseja saber como a área $A(x)$ da placa varia quando mudamos o comprimento x do lado. Encontre $A'(15)$ e explique seu significado nessa situação.

(b) Mostre que a taxa de variação da área de um quadrado em relação ao comprimento de seu lado é a metade de seu perímetro. Tente explicar geometricamente por que isso é verdade, desenhando um quadrado cujo comprimento de lado x é aumentado em Δx. Como você pode aproximar a variação resultante ΔA se Δx for pequeno?

12. (a) Os cristais de cloreto de sódio crescem facilmente em forma de cubos ao permitir que uma solução de água e de cloreto de sódio evapore lentamente. Se V for o volume de cada cubo com comprimento de lado x, calcule dV/dx quando $x = 3$ mm e explique seu significado.

(b) Mostre que a taxa de variação do volume de cada cubo em relação ao comprimento da aresta é igual à metade da área da superfície do cubo. Explique geometricamente por que esse resultado é verdadeiro, mostrando um argumento análogo ao do Exercício 11(b).

13. (a) Encontre a taxa de variações média da área de um círculo em relação a seu raio r quando r varia de

(i) 2 a 3 (ii) 2 a 2,5 (iii) 2 a 2,1

(b) Encontre a taxa de variação instantânea quando $r = 2$.

(c) Mostre que a taxa de variação da área de um círculo em relação a seu raio (para qualquer r) é igual à circunferência do círculo. Tente explicar geometricamente por que isso é verdadeiro, desenhando um círculo cujo raio foi aumentado em Δr. Como você pode aproximar a variação resultante ΔA se Δr for pequeno?

14. A queda de uma pedra em um lago gera um onda circular que cresce a uma velocidade de 60 cm/s. Encontre a taxa em que a área dentro do círculo está aumentando após (a) 1 s, (b) 3 s e (c) 5 s. O que você conclui?

15. Um balão esférico começa a ser inflado. Encontre a taxa de crescimento da área da superfície ($S = 4\pi r^2$) em relação ao raio r quando r é (a) 20 cm, (b) 40 cm e (c) 60 cm. Que conclusão você pode tirar?

16. (a) O volume de uma célula esférica de tamanho crescente é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, onde o raio r é medido em micrômetros ($1\ \mu\text{m} = 10^{-6}$ m). Encontre a taxa de variação média de V em relação a r quando r varia de

(i) 5 a 8 μm (ii) 5 a 6 μm (iii) 5 a 5,1 μm

(b) Encontre a taxa instantânea de variação V em relação a r quando $r = 5\ \mu\text{m}$.

(c) Mostre que a taxa de variação do volume de uma esfera em relação a seu raio é igual à área de sua superfície. Explique geometricamente por que esse resultado é verdadeiro. Mostre um argumento análogo ao do Exercício 13(c).

17. A massa da parte de uma barra de metal que se encontra entre sua extremidade esquerda e um ponto a x metros à direita é $3x^2$ kg. Encontre a densidade linear (veja o Exemplo 2) quando x for (a) 1 m, (b) 2 m e (c) 3 m. Onde a densidade é maior? E menor?

18. Se um tanque tem 5 000 galões de água, que escoa pelo fundo em 40 minutos, então a Lei de Torricelli dá o volume V de água que restou no tanque depois de t minutos como

$$V = 5\,000\left(1 - \tfrac{1}{40}t\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 40$$

Encontre a taxa segundo a qual a água está escoando do tanque depois de (a) 5 min, (b) 10 min, (c) 20 min e (d) 40 min. Em que instante o escoamento é mais rápido? E mais vagaroso? Resuma o que você encontrou.

19. A quantidade de carga Q, em coloumbs (C), que passa através de um ponto em um fio até o instante t (medido em segundos) é dada por $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Encontre a corrente quando (a) $t = 0{,}5$ s e (b) $t = 1$ s. [Veja o Exemplo 3. A unidade da corrente é um ampère (1 A = 1 C/s).] Quando a corrente é mais baixa?

20. A Lei de Gravitação de Newton diz que a intensidade F da força exercida por um corpo de massa m sobre um corpo de massa M é

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

onde G é a constante gravitacional e r é a distância entre os corpos.

(a) Encontre dF/dr e explique seu significado. O que o sinal de menos indica?

(b) Suponha que seja conhecido que a Terra atrai um objeto com uma força que decresce a uma taxa de 2 N/km quando $r = 20.000$ km. Quão rápido essa força varia quando $r = 10.000$ km?

21. A força F agindo num corpo com massa m e velocidade v é a taxa de variação de momentum: $F = (d/dt)(mv)$. Se m for uma constante, torna-se $F = ma$, onde $a = dv/dt$ é a aceleração. Mas na teoria da relatividade a massa de uma partícula varia com v da seguinte forma: $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, onde m_0 é a massa da partícula em repouso e c é a velocidade da luz. Mostre que

$$F = \frac{m_0 a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$$

22. Algumas das maiores marés no mundo ocorrem na Bay of Fundy, na Costa Atlântica do Canadá. No Cabo Hopewell a profundidade da água em maré baixa é cerca de 2,0 m e em maré alta é cerca de 12,0 m. O período natural de oscilação é pouco mais de 12 horas e, em 30 de junho de 2009, a maré alta ocorreu às 6h45. Isso ajuda a explicar o seguinte modelo para a profundidade de água D (em metros) como uma função do tempo t (em horas após a meia-noite) naquele dia:

$$D(t) = 7 + 5\cos[0{,}503(t - 6{,}75)]$$

Em que velocidade a maré aumentava (ou diminuía) nos seguintes horários?

(a) 3 h 00 (b) 6 h 00

(c) 9 h 00 (d) Meio-dia

23. A Lei de Boyle afirma que quando uma amostra de gás é comprimida a uma temperatura constante, o produto da pressão pelo volume permanece constante: $PV = C$.

(a) Encontre a taxa de variação do volume em relação à pressão.

(b) Uma amostra de gás está em um recipiente à baixa pressão e é regularmente comprimida à temperatura constante por 10 minutos. O volume decresce mais rapidamente no início ou no final dos 10 minutos? Explique.

(c) Demonstre que a compressibilidade isotérmica (veja o Exemplo 5) é dada por $\beta = 1/P$.

24. Se, no Exemplo 4, uma molécula do produto C é produzida de uma molécula do reagente A e de uma molécula do reagente B, e as concentrações iniciais de A e B têm um mesmo valor $[A] = [B] = a$ mols/L, então

$$[C] = a^2kt/(akt + 1)$$

onde k é uma constante.

(a) Encontre a taxa de reação no instante t.

(b) Mostre que, se $x = [\mathrm{C}]$, então

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2$$

(c) O que acontece com a concentração quando $t \to \infty$?

(d) O que acontece com a taxa de reação quando $t \to \infty$?

(e) O que os resultados da parte (c) e (d) significam em termos práticos?

25. No Exemplo 6, consideramos uma população de bactérias que dobra a cada hora. Suponha que outra população de bactérias triplique a cada hora e comece com 400 bactérias. Encontre a expressão para o número n de bactérias depois de t horas e use-a para estimar a taxa de crescimento da população de bactérias depois de 2,5 horas.

26. O número de células de levedura em uma cultura de laboratório aumenta rapidamente no início, mas eventualmente estabiliza. A população é modelada pela função

$$n = f(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,7t}}$$

onde t é medido em horas. No tempo $t = 0$ a população é de 20 células e está crescendo a uma taxa de 12 células/hora. Encontre os valores de a e b. De acordo com este modelo, o que ocorre com a população de levedura depois de muito tempo?

27. A tabela fornece a população mundial no século XX.

Ano	População (em milhões)	Ano	População (em milhões)
1900	1.650	1960	3.040
1910	1.750	1970	3.710
1920	1.860	1980	4.450
1930	2.070	1990	5.280
1940	2.300	2000	6.080
1950	2.560		

(a) Estime a taxa de crescimento populacional em 1920 e em 1980 fazendo a média das inclinações de duas retas secantes.

(b) Use uma calculadora gráfica ou computador para achar uma função cúbica (um polinômio de terceiro grau) que modele os dados (veja a Seção 1.2).

(c) Utilize o modelo da parte (b) para achar um modelo para a taxa de crescimento populacional no século XX.

(d) Use a parte (c) para estimar as taxas de crescimento em 1920 e 1980. Compare com sua estimativa da parte (a).

(e) Estime a taxa de crescimento em 1985.

28. A tabela mostra como a média de idade das mulheres japonesas quando se casam pela primeira vez variou na última metade do século XX.

t	$A(t)$	t	$A(t)$
1950	23,0	1980	25,2
1955	23,8	1985	25,5
1960	24,4	1990	25,9
1965	24,5	1995	26,3
1970	24,2	2000	27,0
1975	24,7		

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para modelar esses dados por um polinômio de quarto grau.

(b) Use a parte (a) para achar um modelo para $A'(t)$.

(c) Estime a taxa de variação da idade no primeiro casamento dessas mulheres em 1990.

(d) Faça o gráfico dos pontos dados e dos modelos para A e A'.

29. Considere a lei de fluxo laminar fornecida no Exemplo 7. Considere um vaso sanguíneo com raio 0,01 cm, comprimento 3 cm, diferença de pressão 3.000 dinas/cm^2 e viscosidade $\eta = 0,027$.

(a) Encontre a velocidade do sangue ao longo do eixo central $r = 0$, no raio $r = 0,005$ cm e na parede $r = R = 0,01$ cm.

(b) Encontre o gradiente da velocidade em $r = 0$, $r = 0,005$ e $r = 0,01$.

(c) Onde a velocidade é máxima? Onde a velocidade varia mais?

30. A frequência da vibração de uma corda de violino é dada por

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

onde L é o comprimento da corda, T é sua tensão e ρ é sua densidade linear. [Veja o Capítulo 11 em D. E. Hall, *Musical Acoustics*, 3. ed. (Pacific Grover, CA, Brooks/Cole, 2002).]

(a) Encontre a taxa de variação da frequência em relação

(i) ao comprimento (quando T e ρ são constantes),

(ii) à tensão (quando L e ρ são constantes), e

(iii) à densidade linear (quando L e T são constantes).

(b) A intensidade de uma nota (quão alta ou baixa soa a nota) é determinada pela frequência f. (Quanto maior a frequência, maior a intensidade.) Use os sinais das derivadas da parte (a) para determinar o que acontece com a intensidade de uma nota

(i) quando o comprimento efetivo de uma corda é decrescido colocando-se o dedo sobre ela, de forma que uma porção menor da corda vibre;

(ii) quando a tensão é aumentada girando-se a cravelha (pino de afinação);

(iii) quando a densidade linear é aumentada, mudando-se a corda.

31. O custo, em dólares, da produção de x metros de certo tecido é

$$C(x) = 1.200 + 12x - 0,1x^2 + 0,0005x^3$$

(a) Encontre a função de custo marginal.

(b) Encontre $C'(200)$ e explique seu significado. O que ele prediz?

(c) Compare $C'(200)$ com o custo da manufaturação do 201º metro de tecido.

32. A função de custo para um certo produto é

$$C(x) = 339 + 25x - 0,09x^2 + 0,0004x^3$$

(a) Encontre e interprete $C'(100)$.

(b) Compare $C'(100)$ com o custo de produzir o 101º item.

33. Se $p(x)$ for o valor total da produção quando há x trabalhadores em uma fábrica, então a *produtividade média* da força de trabalho da fábrica é

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

(a) Encontre $A'(x)$. Por que a companhia precisa empregar mais trabalhadores se $A'(x) > 0$?

(b) Mostre que $A'(x) > 0$ se $p'(x)$ for maior que a produtividade média.

34. Se R denota a reação do corpo a algum estímulo de intensidade x, a *sensibilidade S* é definida como a taxa de variação da reação em relação a x. Um exemplo ocorre quando a luminosidade x de uma fonte de luz é aumentada e o olho reage diminuído a área R da pupila. A fórmula experimental

$$R = \frac{40 + 24x^{0,4}}{1 + 4x^{0,4}}$$

tem sido usada para modelar a dependência de R com respeito a x, quando R é medido em milímetros quadrados e x, em uma unidade apropriada de luminosidade.

(a) Encontre a sensibilidade.

(b) Ilustre a parte (a) traçando ambos R e S como funções de x. Comente sobre os valores de R e S em baixos níveis de luminosidade. Isso é o que você esperaria?

35. A lei dos gases para um gás ideal à temperatura absoluta T (em kelvins), pressão P (em atmosferas) e volume V (em litros) é $PV = nRT$, em que n é o número de mols de gás e $R = 0{,}0821$ é a constante do gás. Suponha que, em um certo instante, $P = 8{,}0$ atm, e está crescendo a uma taxa de 0,10 atm/min, e $V = 10$ L, e está decrescendo a uma taxa de 0,15 L/min. Encontre a taxa de variação de T em relação ao tempo naquele instante, se $n = 10$ mols.

36. Em uma fazenda de piscicultura, uma população de peixes é colocada dentro de um pequeno lago e removida regularmente. Um modelo para a taxa de variação da população é dado pela equação

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t)$$

onde r_0 é a taxa de nascimento dos peixes, P_c é a população máxima que o pequeno lago pode manter (ou seja, sua *capacidade de suporte*) e β é a porcentagem da população que é recolhida.

(a) Qual o valor de dP/dt que corresponde à população estável?

(b) Se o pequeno lago pode manter 10.000 peixes, a taxa de nascimento é 5% e a taxa de colheita, 4%, encontre o nível estável da população.

(c) O que acontece se β for aumentada para 5%?

37. No estudo de ecossistemas, o modelo *predador-presa* é muitas vezes usado para estudar a interação entre as espécies. Considere uma população de lobos da tundra, dada por $W(t)$, e caribus, dada por $C(t)$, no norte do Canadá. A interação foi modelada pelas equações:

$$\frac{dC}{dt} = aC - bCW \qquad \frac{dW}{dt} = -cW + dCW$$

(a) Que valores de dC/dt e dW/dt correspondem às populações estáveis?

(b) Como representar matematicamente a afirmação: “O caribu está extinto.”?

(c) Suponha que $a = 0{,}05$, $b = 0{,}001$, $c = 0{,}05$, e $d = 0{,}0001$. Encontre todos os pares (C, W) que levam a populações estáveis. Segundo esse modelo, é possível para as espécies viverem em equilíbrio, ou uma ou as duas espécies acabarão por se extinguir?

3.8 Crescimento e Decaimento Exponenciais

Em muitos fenômenos naturais, quantidades crescem ou decaem a uma taxa proporcional a seu tamanho. Por exemplo, se $y = f(t)$ for o número de indivíduos numa população animal ou de bactérias no instante t, então parece plausível esperar que a taxa de crescimento $f'(t)$ seja proporcional à população $f(t)$; ou seja, $f'(t) = kf(t)$ para alguma constante k. De fato, sob as condições ideais (ambiente ilimitado, nutrição adequada, imunidade a doenças), o modelo matemático dado pela equação $f'(t) = kf(t)$ prediz o que acontece na realidade com bastante precisão. Outro exemplo ocorre na física nuclear, onde a massa de uma substância radioativa decai numa taxa proporcional à massa. Na química, a taxa de uma reação unimolecular de primeira ordem é proporcional à concentração da substância. Em finanças, o valor de uma conta de poupança com juros contabilizados continuamente aumenta a uma taxa proporcional a esse valor.

Em geral, se $y(t)$ for o valor de uma quantidade y no instante t, e se a taxa de variação de y com relação a t for proporcional a seu tamanho $y(t)$ em qualquer instante, então

1
$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky}$$

onde k é uma constante. A Equação 1 é às vezes chamada **lei de crescimento natural** (se $k > 0$) ou **lei de decaimento natural** (se $k < 0$). Ela é chamada **equação diferencial**, pois envolve uma função desconhecida y e sua derivada dy/dt.

Não é difícil pensar em uma solução para a Equação 1. Essa equação nos pede para encontrar uma função cuja derivada seja uma constante multiplicada por ela própria. Já encontramos funções dessas neste capítulo. Qualquer função exponencial da forma $y(t) = Ce^{kt}$, onde C é uma constante, satisfaz

$$y'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = ky(t)$$

Veremos na Seção 9.4 que *qualquer* função que satisfaça $dy/dt = ky$ deve ser da forma $y = Ce^{kt}$. Para perceber o significado da constante C, observamos que

$$y(0) = Ce^{k \cdot 0} = C$$

Portanto, C é o valor inicial da função.

$\boxed{2}$ **Teorema** As únicas soluções da equação diferencial $dy/dt = ky$ são as exponenciais

$$y(t) = y(0)e^{kt}$$

Crescimento Populacional

Qual é o significado da constante de proporcionalidade k? No contexto do crescimento populacional, quando $P(t)$ for o tamanho de uma população no instante t, podemos escrever

$$\boxed{3} \qquad \frac{dP}{dt} = kP \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

A quantidade

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$$

é a taxa de crescimento dividida pelo tamanho da população; ela é chamada **taxa de crescimento relativa**. De acordo com $\boxed{3}$, em vez de dizer "a taxa de crescimento é proporcional ao tamanho da população" poderíamos dizer "a taxa de crescimento relativa é constante". Então, $\boxed{2}$ diz que uma população com uma taxa de crescimento relativa constante deve crescer exponencialmente. Observe que a taxa de crescimento relativa k aparece como o coeficiente de t na função exponencial Ce^{kt}. Por exemplo, se

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}02P$$

e t for medido em anos, então a taxa de crescimento relativa será $k = 0{,}02$ e a população estará crescendo a uma taxa relativa de 2% ao ano. Se a população no tempo 0 for P_0, então a expressão para a população será

$$P(t) = P_0e^{0{,}02t}$$

EXEMPLO 1 Use o fato de que a população mundial era 2 560 milhões em 1950 e 3 040 milhões em 1960 para modelar a população do mundo na segunda metade do século XX. (Suponha que a taxa de crescimento seja proporcional ao tamanho da população.) Qual é a taxa de crescimento relativa? Use o modelo para estimar a população do mundo em 1993 e para prever a população no ano de 2020.

SOLUÇÃO Medimos o tempo t em anos e fazemos $t = 0$ no ano 1950. Medimos a população $P(t)$ em milhões de pessoas. Então $P(0) = 2\,560$ e $P(10) = 3\,040$. Uma vez que estamos supondo que $dP/dt = kP$, o Teorema 2 nos dá

$$P(t) = P(0)e^{kt} = 2\,560e^{kt}$$

$$P(10) = 2\,560e^{10k} = 3\,040$$

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{3\,040}{2\,560} \approx 0{,}017185.$$

A taxa de crescimento relativa é cerca de 1,7% ao ano, e o modelo é

$$P(t) = 2\,560e^{0{,}017185t}$$

Estimamos que a população mundial em 1993 era

$$P(43) = 2\,560e^{0{,}017185(43)} \approx 5\,360 \text{ milhões}$$

O modelo prevê que a população em 2020 será

$$P(70) = 2\,560e^{0{,}017185(70)} \approx 8\,524 \text{ milhões}$$

O gráfico na Figura 1 mostra que o modelo é bem acurado para o fim do século XX (os pontos representam a população real), de modo que a estimativa para 1993 é bem confiável. Mas a previsão para 2020 é mais arriscada.

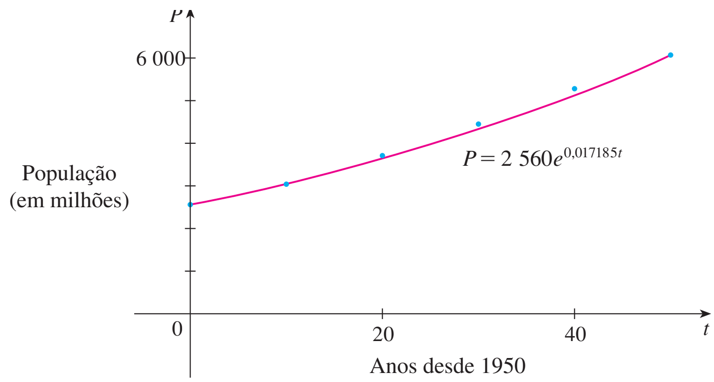


FIGURA 1
Um modelo para o crescimento da população mundial na segunda metade do século XX

Decaimento Radioativo

As substâncias radioativas decaem pela emissão espontânea de radiação. Se $m(t)$ for a massa remanescente de uma massa inicial m_0 da substância após um tempo t, então a taxa de decaimento

$$-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

foi analisada experimentalmente como sendo constante. (Como dm/dt é negativo, a taxa de decaimento relativa é positiva.) Segue que

$$\frac{dm}{dt} = km$$

em que k é uma constante negativa. Em outras palavras, substâncias radioativas decaem a uma taxa proporcional à sua massa restante. Isso significa que podemos usar $\boxed{2}$ para mostrar que a massa decai exponencialmente:

$$m(t) = m_0 e^{kt}$$

Os físicos expressam a taxa de decaimento radioativo como **meia-vida**, o tempo necessário para a metade de qualquer quantidade dada decair.

EXEMPLO 2 A meia-vida do rádio-226 é de 1 590 anos.
(a) Uma amostra de rádio-226 possui uma massa de 100 mg. Encontre uma fórmula para a massa da amostra que resta após t anos.
(b) Encontre a massa depois de 1 000 anos, com a precisão de um miligrama.
(c) Quando a massa será reduzida para 30 gramas?

SOLUÇÃO
(a) Seja $m(t)$ a massa do rádio-226 (em miligramas) que resta depois de t anos. Então, $dm/dt = km$ e $y(0) = 100$, logo $\boxed{2}$ nos fornece

$$m(t) = m(0)e^{kt} = 100e^{kt}$$

Para determinarmos o valor de k, usamos o fato de que $y(1\ 590) = \frac{1}{2}(100)$. Assim,

$$100e^{1\ 590k} = 50 \qquad \text{logo} \qquad e^{1\ 590k} = \tfrac{1}{2}$$

e $$1\ 590k = \ln \tfrac{1}{2} = -\ln 2$$

$$k = -\frac{\ln 2}{1\ 590}$$

Portanto, $$m(t) = 100e^{-(\ln 2)t/1\ 590}$$

Poderíamos usar o fato de que $e^{\ln 2} = 2$ para escrever a expressão para $m(t)$ na forma alternativa

$$m(t) = 100 \times 2^{-t/1\,590}$$

(b) A massa depois de 1.000 anos é

$$m(1\,000) = 100e^{-(\ln 2)1\,000/1\,590} \approx 65 \text{ mg}$$

(c) Queremos encontrar o valor de t tal que $m(t) = 30$, ou seja,

$$100e^{-(\ln 2)t/1\,590} = 30 \qquad \text{ou} \qquad e^{-(\ln 2)t/1\,590} = 0{,}3$$

Resolvemos essa equação em t tomando o logaritmo natural em ambos os lados:

$$-\frac{\ln 2}{1\,590}t = \ln 0{,}3$$

Logo $$t = -1\,590\frac{\ln 0{,}3}{\ln 2} \approx 2\,762 \text{ anos}$$

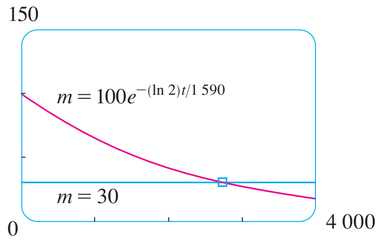


FIGURA 2

Como uma verificação de nosso trabalho no Exemplo 2, usamos uma ferramenta gráfica para traçar o gráfico de $m(t)$ na Figura 2 junto com a reta horizontal $m = 30$. As curvas se interceptam quando $t \approx 2\,800$, e isto coincide com a resposta da parte (c).

Lei de Resfriamento de Newton

A Lei de Resfriamento de Newton afirma que a taxa de resfriamento de um objeto é proporcional à diferença de temperaturas entre o objeto e o meio circundante, desde que esta diferença não seja muito grande. (Essa lei também se aplica ao aquecimento). Se tomarmos $T(t)$ como a temperatura do objeto no tempo t e T_s como a temperatura do meio circundante, então podemos formular a Lei de Resfriamento de Newton como uma equação diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$$

onde k é uma constante. Esta equação não é exatamente a mesma que a Equação 1. Assim, fazemos a mudança de variáveis $y(t) = T(t) - T_s$. Como T_s é constante, temos $y'(t) = T'(t)$ e a equação se torna

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Podemos então usar $\boxed{2}$ para encontrar uma expressão para y, da qual podemos encontrar T.

EXEMPLO 3 Uma garrafa de refrigerante que está à temperatura ambiente (22 ºC) é colocada em um refrigerador, no qual a temperatura é 7 ºC. Depois de meia hora o refrigerante esfriou para 16 ºC.
(a) Qual a temperatura do refrigerante depois de mais meia hora?
(b) Quanto tempo demora para o refrigerante resfriar até 10 ºC?

SOLUÇÃO
(a) Seja $T(t)$ a temperatura do refrigerante depois de t minutos. A temperatura ambiente é de $T_s = 7$ °C, logo a Lei de Resfriamento de Newton afirma que

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 7)$$

Se tomarmos $y = T - 7$, então $y(0) = T(0) - 7 = 22 - 7 = 15$, e y assim é uma solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = 15$$

e por $\boxed{2}$ temos

$$y(t) = y(0)e^{kt} = 15e^{kt}$$

Foi-nos dado que $T(30) = 16$, assim $y(30) = 16 - 7 = 9$ e

$$15e^{30k} = 9 \qquad e^{30k} = \tfrac{3}{5}$$

Tomando logaritmos, temos

$$k = \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{30} \approx -0{,}01703$$

Logo,

$$y(t) = 15e^{-0{,}01703t}$$

$$T(t) = 7 + 15e^{-0{,}01703t}$$

$$T(60) = 7 + 15e^{-0{,}01703(60)} \approx 12{,}4$$

Assim, depois de mais meia hora, o refrigerante terá resfriado para cerca de 12 ºC.
(b) Teremos $T(t) = 10$ quando

$$7 + 15e^{-0{,}01703t} = 10$$

$$e^{-0{,}01703t} = \tfrac{3}{15} = \tfrac{1}{5}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{-0{,}01703} \approx 94{,}5$$

O refrigerante é resfriado para 10 ºC depois de 1 hora e 35 minutos.

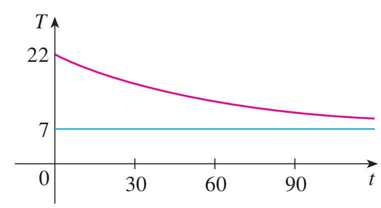


FIGURA 3

Observe que, no Exemplo 3, temos

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty} (7 + 15e^{-0{,}01703t}) = 7 + 15 \cdot 0 = 7$$

o que era de esperar. O gráfico da função temperatura é mostrado na Figura 3.

Juros Capitalizados Continuamente

EXEMPLO 4 Se \$ 1.000 forem investidos a 6% de juros capitalizados (ou compostos) anualmente, depois de 1 ano o investimento valerá \$1.000(1,06) = \$1.060, depois de 2 anos valerá \$[1.000(1,06)]1,06 = \$1.123,60, e depois de t anos valerá \$1.000$(1{,}06)^t$. Em geral, se uma quantia A_0 for investida a uma taxa de juros r ($r = 0{,}06$ neste exemplo), então depois de t anos, ela valerá $A_0(1 + r)^t$. Usualmente, entretanto, os juros são capitalizados com mais frequência, digamos n vezes em um ano. Então, em cada período de capitalização, a taxa de juros é r/n e existem nt períodos de capitalização em t anos, de modo que o valor do investimento é

$$A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Por exemplo, depois de três anos a 6% de juros, um investimento de \$1.000 valerá

$$\$1.000(1{,}06)^3 = \$1.191{,}02 \quad \text{com capitalização anual,}$$

$$\$1.000(1{,}03)^6 = \$1.194{,}05 \quad \text{com capitalização semianual,}$$

$$\$1.000(1{,}015)^{12} = \$1.195{,}62 \quad \text{com capitalização trimestral,}$$

$$\$1.000(1{,}005)^{36} = \$1.196{,}68 \quad \text{com capitalização mensal,}$$

$$\$1.000\left(1 + \frac{0{,}06}{365}\right)^{365\cdot 3} = \$1.197{,}20 \quad \text{com capitalização diária.}$$

Você pode ver que os juros pagos aumentam conforme o número de períodos de capitalização (n) aumenta. Se fizermos $n \to \infty$, então estaremos capitalizando os juros **continuamente** e o valor do investimento será

$$A(t) = \lim_{n\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$= \lim_{n\to\infty} A_0\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt}$$

$$= A_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt}$$

$$= A_0\left[\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} \qquad \text{(onde } m = n/r\text{)}$$

Mas o limite nesta expressão é igual ao número e (veja a Equação 3.6.6). Assim, com capitalização contínua de juros a uma taxa de juros r, a quantia depois de t anos será

$$A(t) = A_0e^{rt}$$

Se derivarmos essa função, obtemos

$$\frac{dA}{dt} = rA_0e^{rt} = rA(t)$$

que é o mesmo que dizer que, com capitalização contínua de juros, a taxa de aumento de um investimento é proporcional a seu tamanho.

Voltando ao exemplo dos \$ 1.000 investidos por três anos, a 6% de juros, vemos que com a capitalização contínua dos juros, o valor do investimento será

$$A(3) = \$1.000e^{(0,06)3} = \$1.197,22$$

Observe como é próximo da quantidade que calculamos para a capitalização diária, \$ 1.197,20. Mas a quantidade é mais fácil de computar se usarmos a capitalização contínua.

3.8 Exercícios

1. Uma população de protozoários se desenvolve a uma taxa de crescimento relativa constante de 0,7944 membro por dia. No dia zero, a população consistia em dois membros. Encontre o tamanho da população depois de seis dias.

2. Um habitante comum do intestino humano é a bactéria *Escherichia coli*. Uma célula desta bactéria em um meio nutriente líquido se divide em duas células a cada 20 minutos. A população inicial de uma cultura é de 60 células.
(a) Encontre a taxa de crescimento relativa.
(b) Encontre uma expressão para o número de células depois de t horas.
(c) Encontre o número de células após 8 horas.
(d) Encontre a taxa de crescimento depois de 8 horas.
(e) Quando a população atingirá 20 000 células?

3. Uma cultura de bactérias inicialmente contém 100 células e cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho. Depois de uma hora a população cresceu para 420.
(a) Encontre uma expressão para o número de bactérias depois de t horas.
(b) Encontre o número de bactérias depois de 3 horas.
(c) Encontre a taxa de crescimento depois de 3 horas.
(d) Quando a população atingirá 10 000?

4. Uma cultura de bactérias cresce a uma taxa de crescimento relativa constante. A contagem de bactérias foi de 400 após 2 horas e 25 600 após 6 horas.
(a) Qual é a taxa de crescimento relativa? Expresse sua resposta como uma porcentagem.
(b) Qual foi o tamanho inicial da cultura?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

(c) Encontre uma expressão para o número de bactérias depois de t horas.
(d) Encontre o número de células após 4,5 horas.
(e) Encontre a taxa de crescimento depois de 4,5 horas.
(f) Quando a população atingirá 50 000?

5. A tabela dá estimativas da população mundial, em milhões, de 1750 a 2000.
(a) Use o modelo exponencial e os valores da população para 1750 e 1800 para prever a população do mundo em 1900 e 1950. Compare com os valores reais.
(b) Use o modelo exponencial e os valores da população para 1850 e 1900 para prever a população do mundo em 1950. Compare com a população real.
(c) Use o modelo exponencial e os valores da população para 1900 e 1950 para prever a população do mundo em 2000. Compare com o valor da tabela e tente explicar a discrepância.

Ano	População	Ano	População
1750	790	1900	1 650
1800	980	1950	2.560
1850	1.260	2000	6.080

6. A tabela dá a população da Índia, em milhões, para a segunda metade do século XX.

Ano	População
1951	361
1961	439
1971	548
1981	683
1991	846
2001	1.029

(a) Use o modelo exponencial e os valores do censo para 1951 e 1961 para prever a população em 2001. Compare com os valores reais.
(b) Use o modelo exponencial e os valores do censo para 1961 e 1981 para prever a população em 2001. Compare com a população real. A seguir, use este modelo para prever a população nos anos de 2010 e 2020.
(c) Trace ambas as funções exponenciais das partes (a) e (b) com um gráfico da população real. Estes modelos são razoáveis?

7. As experiências mostram que se a reação química

$$N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + \tfrac{1}{2}O_2$$

ocorre a 45 ºC, a taxa de reação do pentóxido de dinitrogênio é proporcional à sua concentração da seguinte forma:

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0{,}0005[N_2O_5]$$

(Veja o Exemplo 4 na Seção 3.7.)
(a) Encontre uma expressão para a concentração $[N_2O_5]$ após t segundos se a concentração inicial for C.
(b) Quanto tempo levará para que a reação reduza a concentração de N_2O_5 para 90% de seu valor original?

8. O Estrôncio-90 tem uma meia-vida de 28 dias.
(a) Uma amostra tem a massa de 50 mg inicialmente. Encontre a fórmula para a massa restante após t dias.
(b) Encontre a massa remanescente depois de 40 dias.
(c) Quanto tempo a amostra leva para decair para uma massa de 2 mg?
(d) Esboce o gráfico da função massa.

9. A meia-vida do césio-137 é 30 anos. Suponha que tenhamos uma amostra de 100 mg.
(a) Encontre a massa remanescente após t anos.
(b) Quanto da amostra restará depois de 100 anos?
(c) Depois de quanto tempo restará apenas 1 mg?

10. Uma amostra de trítio-3 decai para 94,5% de sua quantidade original depois de um ano.
(a) Qual é a meia-vida do trítio-3?
(b) Quanto tempo levaria para a amostra decair para 20% de sua quantidade original?

11. Os cientistas podem determinar a idade de objetos antigos pelo método de *datação por radiocarbono*. O bombardeamento da parte superior da atmosfera por raios cósmicos converte o nitrogênio em um isótopo radioativo do carbono, ^{14}C, com meia-vida de cerca de 5.730 anos. A vegetação absorve o dióxido de carbono através da atmosfera e a vida animal assimila ^{14}C através da cadeia alimentar. Quando uma planta ou animal morre, para de repor seu carbono e a quantidade de ^{14}C começa a decrescer por decaimento radioativo. Portanto o nível de radioatividade também deve decrescer exponencialmente.
Foi descoberto que um fragmento de pergaminho tinha cerca de 74% de ^{14}C do que os materiais das plantas têm atualmente na terra. Estime a idade do papiro.

12. Uma curva passa pelo ponto (0, 5) e tem a propriedade de que a inclinação da curva em todo ponto P é duas vezes a coordenada y de P. Qual é a equação da curva?

13. Um peru assado é tirado de um forno quando a sua temperatura atinge 85 ºC e é colocado sobre uma mesa em um cômodo em que a temperatura é 22 ºC.
(a) Se a temperatura do peru for 65 ºC depois de meia hora, qual será a temperatura depois de 45 minutos?
(b) Quando o peru terá esfriado para 40 ºC?

14. Em uma investigação de assassinato, a temperatura do corpo era 32,5 ºC às 13h30 e 30,3 ºC uma hora depois. A temperatura normal do corpo é 37,0 ºC, e a temperatura do ambiente era 20 ºC. Quando o assassinato aconteceu?

15. Quando uma bebida gelada é tirada da geladeira, sua temperatura é 5 ºC. Depois de 25 minutos em uma sala a 20 ºC, sua temperatura terá aumentado para 10 ºC.
(a) Qual é a temperatura da bebida depois de 50 minutos?
(b) Quando a temperatura será 15 ºC?

16. Uma xícara de café recém-coado tem a temperatura de 95 ºC em uma sala a 20 ºC. Quando sua temperatura for 70 ºC, ele estará esfriando a uma taxa de 1 ºC por minuto. Quando isto ocorre?

17. A taxa de variação da pressão atmosférica P em relação à altitude h é proporcional a P, desde que a temperatura seja constante. A 15 ºC a pressão é 101,3 kPa no nível do mar e 87,14 kPa em $h = 1\,000$ m.
(a) Qual é a pressão a uma altitude de 3 000 m?
(b) Qual é a pressão no topo do Monte McKinley, a uma altitude de 6 187 m?

18. (a) Se \$1.000 é emprestado com 8% de juros, encontre os valores ao fim de 3 anos se o juros for capitalizado (i) anualmente,

(ii) trimestralmente, (iii) mensalmente, (iv) semanalmente, (v) diariamente, (vi) a cada hora e (vii) continuamente.

(b) Suponha que \$1.000 sejam emprestados e que os juros sejam capitalizados continuamente. Se $A(t)$ é o valor após t anos, onde $0 \leqslant t \leqslant 3$, esboce o gráfico $A(t)$ para cada uma das taxas de juros de 6%, 8% e 10% numa tela comum.

19. (a) Se \$3.000 são investidos a 5% de juros, encontre o valor do investimento ao fim de 5 anos, para juros capitalizados (i) anualmente, (ii) semestralmente, (iii) mensalmente, (iv) semanalmente, (v) diariamente ou (vi) continuamente.

(b) Se $A(t)$ for a quantia do investimento no tempo t para o caso da capitalização contínua, escreva uma equação diferencial e uma condição inicial satisfeitas por $A(t)$.

20. (a) Quanto tempo o investimento levará para dobrar o valor se a taxa de juros for 6% e capitalizada continuamente?

(b) Qual é a taxa de juros anual equivalente?

3.9 Taxas Relacionadas

Quando bombeamos ar para dentro de um balão, tanto o volume quanto o raio do balão crescem, e suas taxas de crescimento estão relacionadas. Mas é muito mais fácil medir diretamente a taxa de crescimento do volume do que a do raio.

Em um problema de taxas relacionadas, a ideia é calcular a taxa de variação de uma grandeza em termos da taxa de variação da outra (que pode ser medida mais facilmente). O procedimento é achar uma equação que relacione as duas grandezas e então usar a Regra da Cadeia para derivar ambos os lados em relação ao tempo.

EXEMPLO 1 Ar está sendo bombeado para um balão esférico de modo que seu volume aumenta a uma taxa de 100 cm³/s. Quão rápido o raio do balão está aumentando quando o diâmetro for 50 cm?

SP De acordo com os Princípios de Resolução de Problemas discutidos no Capítulo 1, o primeiro passo é entender o problema. Isso inclui lê-lo cuidadosamente, identificando o que foi dado e as incógnitas, e introduzir uma notação adequada.

SOLUÇÃO Vamos começar identificando duas coisas:

a *informação dada:*

a taxa de crescimento do ar é 100 cm³/s

e a *incógnita*:

a taxa de crescimento do raio quando o diâmetro é 50 cm

Para expressarmos matematicamente essas grandezas, introduzimos alguma *notação* sugestiva:

Seja V o volume do balão e seja r seu raio.

A chave está em lembrar que taxas de variação são derivadas. Neste problema, o volume e o raio são funções do tempo t. A taxa de crescimento do volume em relação ao tempo é a derivada dV/dt, e a taxa de crescimento do raio é dr/dt. Podemos, portanto, reapresentar o que foi dado e a incógnita como a seguir:

$$\textit{Dada:} \qquad \frac{dV}{dt} = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$\textit{Incógnita:} \qquad \frac{dr}{dt} \text{ quando } r = 25 \text{ cm}$$

SP O segundo estágio da resolução do problema é idealizar um esquema que vincule o que foi dado à incógnita.

Para conectarmos dV/dt e dr/dt, primeiro relacionamos V e r pela fórmula para o volume de uma esfera:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Para usarmos a informação dada, derivamos cada lado dessa equação em relação a t. Para derivarmos o lado direito precisamos usar a Regra da Cadeia:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Observe que, embora dV/dt seja constante, dr/dt *não é* constante.

Agora, isolamos a incógnita:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Se colocarmos $r = 25$ e $dV/dt = 100$ nessa equação, obtemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2}100 = \frac{1}{25\pi}$$

O raio do balão está crescendo a uma taxa de $1/(25\pi) \approx 0{,}0127$ cm/s.

EXEMPLO 2 Uma escada com 5 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada desliza, afastando-se da parede a uma taxa de 1 m/s, quão rápido o topo da escada está escorregando para baixo na parede quando a base da escada está a 3 m da parede?

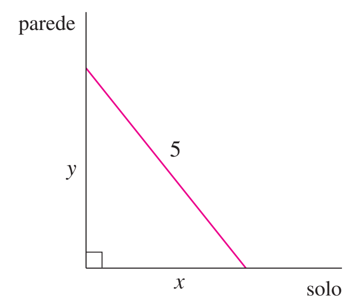


FIGURA 1

SOLUÇÃO Primeiro desenhe um diagrama e coloque legendas, como na Figura 1. Sejam x metros a distância da base da escada à parede, e y metros a distância do topo da escada ao solo. Observe que x e y são ambas funções de t (tempo, medido em segundos).

Foi-nos dado que $dx/dt = 1$ m/s, e nos foi pedido para encontrar dy/dt quando $x = 3$ m (veja a Figura 2). Neste problema, a relação entre x e y é dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Derivando cada lado em relação a t usando a Regra da Cadeia, temos

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

e isolando a taxa desejada, obtemos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

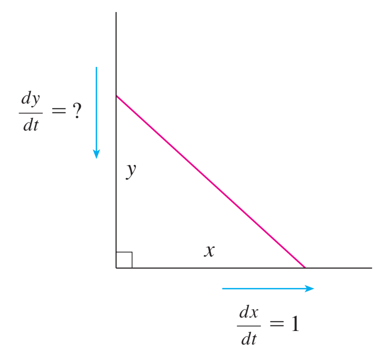


FIGURA 2

Quando $x = 3$, o Teorema de Pitágoras fornece $y = 4$ e, portanto, substituindo esses valores e $dx/dt = 1$, temos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4}(1) = -\frac{3}{4} \text{ m/s}$$

O fato de dy/dt ser negativo indica que a distância do topo da escada ao solo está *decrescendo* a uma taxa de $\frac{3}{4}$ m/s. Em outras palavras, o topo da escada está deslizando para baixo a uma taxa de $\frac{3}{4}$ m/s.

EXEMPLO 3 Um tanque de água possui o formato de um cone circular invertido, com base de raio de 2 m e altura igual a 4 m. Se a água está sendo bombeada para o tanque a uma taxa de 2 m³/ min, encontre a taxa na qual o nível de água está aumentando quando a água estiver a 3 m de profundidade.

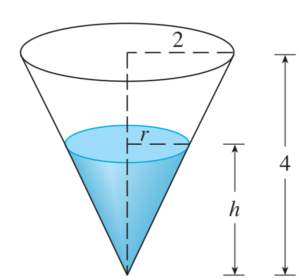


FIGURA 3

SOLUÇÃO Primeiro vamos esboçar o cone e colocar legendas, como na Figura 3. Sejam V, r, e h o volume da água, o raio da superfície e a altura no instante t, onde t é medido em minutos.

Foi-nos dado que $dV/dt = 2$ m³/min e nos foi pedido para encontrar dh/dt quando h for 3 m. As quantidades V e h são relacionadas pela equação

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

mas é muito útil expressar V como uma função apenas de h. Para eliminar r, usamos os triângulos similares na Figura 3 para escrever

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \qquad r = \frac{h}{2}$$

e a expressão para V se torna

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

Agora podemos derivar cada lado em relação a t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt}$$

então

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2} \frac{dV}{dt}$$

Substituindo $h = 3$ m e $dV/dt = 2$ m^3/min, temos

SP Pare um pouco: o que aprendemos nos Exemplos 1–3 que nos ajudará a resolver os problemas futuros?

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2} \cdot 2 = \frac{8}{9\pi}$$

O nível da água estará subindo a uma taxa de $8/(9\pi) \approx 0{,}28$ m/min.

Estratégia de Solução de Problemas É útil lembrar-se de alguns dos *Princípios de Resolução de Problemas* (Capítulo 1) e adaptá-los para as taxas relacionadas como demonstrou nossa experiência nos Exemplos 1–3:

1. Leia cuidadosamente o problema.
2. Se possível, faça um diagrama.
3. Introduza uma notação. Atribua símbolos para todas as grandezas que são funções do tempo.
4. Expresse a informação dada e a taxa pedida em termos das derivadas.
5. Escreva uma equação que relacione as várias grandezas do problema. Se necessário, use a geometria da situação para eliminar uma das variáveis por substituição (como no Exemplo 3).
6. Use a Regra da Cadeia para derivar ambos os lados da equação em relação a t.
7. Substitua a informação dada na equação resultante e resolva-a para determinar a taxa desconhecida.

ATENÇÃO Um erro comum é substituir a informação numérica dada (para grandezas que variam com o tempo) cedo demais. Isso deve ser feito somente *após* a derivação. (O Passo 7 segue o Passo 6.) Por exemplo, no Exemplo 3 tratamos com valores genéricos de h até que finalmente, na última etapa, substituímos $h = 3$ (Se tivéssemos feito $h = 3$ antes, teríamos obtido $dV/dt = 0$, que está claramente errado.)

Os exemplos a seguir são ilustrações desta estratégia.

EXEMPLO 4 O carro A está se movimentando para o oeste a 90 km/h e o carro B está se movimentando para o norte a 100 km/h. Ambos vão em direção à intersecção de duas estradas. A que taxa os carros se aproximam um do outro quando o carro A está a 60 m e o carro B está a 80 m da intersecção?

SOLUÇÃO Desenhamos a Figura 4, onde C é a intersecção das estradas. Em um dado instante t, seja x a distância do carro A a C, seja y a distância do carro B a C, e seja z a distância entre os carros, em que x, y e z são medidos em quilômetros.

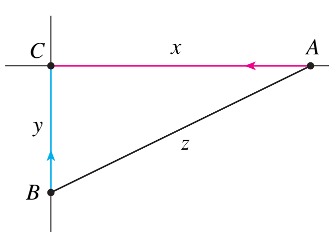


FIGURA 4

Foi-nos dado que $dx/dt = -90$ km/h e $dy/dt = -100$ km/h. (As derivadas são negativas porque x e y são decrescentes.) Foi-nos pedido para encontrar dz/dt. A equação que relaciona x, y e z é dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Derivando cada lado em relação a t, temos

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

Quando $x = 0{,}06$ km e $y = 0{,}08$ km, o Teorema de Pitágoras nos dá $z = 0{,}1$ km, portanto

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0{,}1}[0{,}06(-90) + 0{,}08(-100)]$$

$$= -134 \text{ km/h}$$

Os carros aproximam-se um do outro a uma taxa de 134 km/h.

EXEMPLO 5 Um homem anda ao longo de um caminho reto a uma velocidade de 1,5 m/s. Um holofote localizado no chão a 6 m do caminho é mantido focalizado no homem. A que taxa o holofote está girando quando o homem está a 8 m do ponto do caminho mais próximo da luz?

SOLUÇÃO Desenhamos a Figura 5, onde x é a distância entre o homem e o ponto do caminho mais próximo ao holofote. Seja θ o ângulo entre o feixe do holofote e a perpendicular ao caminho.

Foi-nos dado que $dx/dt = 1{,}5$ m/s e nos foi pedido para encontrar $d\theta/dt$ quando $x = 8$. A equação que relaciona x e θ pode ser escrita a partir da Figura 5:

$$\frac{x}{6} = \operatorname{tg} \theta \qquad x = 6 \operatorname{tg} \theta$$

Derivando cada lado em relação a t, obtemos

$$\frac{dx}{dt} = 6 \sec^2\theta \, \frac{d\theta}{dt}$$

então

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{6} \cos^2\theta \, \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{6} \cos^2\theta \, (1{,}5) = \frac{1}{4} \cos^2\theta$$

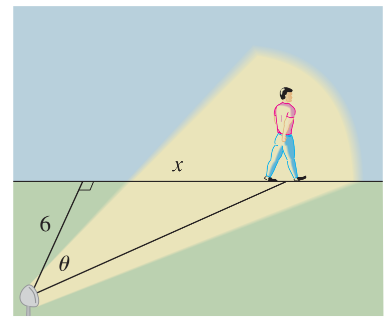


FIGURA 5

Quando $x = 8$, o comprimento do feixe é 10, logo $\cos \theta = \frac{3}{5}$ e

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{100} = 0{,}09$$

O holofote está girando a uma taxa de 0,09 rad/s.

3.9 Exercícios

1. Se V for o volume de um cubo com aresta de comprimento x e, à medida que o tempo passa, o cubo se expandir, encontre dV/dt em termos de dx/dt.

2. (a) Se A é a área de um círculo com raio r e o círculo se expande à medida que o tempo passa, encontre dA/dt em termos de dr/dt.
(b) Suponha que petróleo vaze por uma ruptura de um petroleiro e espalhe-se em um padrão circular. Se o raio do petróleo derramado crescer a uma taxa constante de 1 m/s, quão rápido a área do vazamento está crescendo quando o raio é igual a 30 m?

3. Cada lado de um quadrado está aumentado a uma taxa de 6 cm/s. A que taxa a área do quadrado está aumentando quando a área do quadrado for 16 cm^2?

4. O comprimento de um retângulo está aumentando a uma taxa de 8 cm/s e sua largura está aumentando numa taxa de 3 cm/s. Quando o comprimento for 20 cm e a largura for 10 cm, quão rápido a área do retângulo está aumentando?

5. Um tanque cilíndrico com raio de 5 m está sendo enchido com água a uma taxa de 3 m^3/min. Quão rápido a altura da água está aumentando?

6. O raio de uma esfera está aumentando a uma taxa de 4 mm/s. Quão rápido o volume está aumentando quando o diâmetro for 80 mm?

7. Suponha $y = \sqrt{2x + 1}$, onde x e y são funções de t.
(a) Se $dx/dt = 3$, encontre dy/dt quando $x = 4$.
(b) Se $dy/dt = 5$, encontre dx/dt quando $x = 12$.

8. Suponha $4x^2 + 9y^2 = 36$, onde x e y são funções de t.
(a) Se $dy/dt = \frac{1}{3}$, encontre dx/dt quando $x = 2$ e $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.
(b) Se $dx/dt = 3$, encontre dy/dt quando $x = -2$ e $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.

9. Se $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $dx/dt = 5$ e $dy/dt = 4$, encontre dz/dt quando $(x, y, z) = (2, 2, 1)$.

10. Uma partícula está se movimentando ao longo de uma hipérbole $xy = 8$. Quando atinge o ponto $(4, 2)$, a coordenada y está decrescendo a uma taxa de 3 cm/s. Quão rápido a coordenada x do ponto está variando nesse momento?

11–14
(a) Quais são as quantidades dadas no problema?
(b) Qual é a incógnita?
(c) Faça um desenho da situação para qualquer instante t.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

(d) Escreva uma equação que relacione as quantidades.

(e) Termine a resolução do problema.

11. Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 2 km, a 800 km/h, e passa diretamente sobre uma estação de radar. Encontre a taxa segundo a qual a distância entre o avião e a estação aumenta quando ele está a 3 km além da estação.

12. Se uma bola de neve derrete de forma que a área de sua superfície decresce a uma taxa de 1 cm^2/min, encontre a taxa segundo a qual o diâmetro decresce quando o diâmetro é 10 cm.

13. Uma luz de rua é colocada no topo de um poste de 6 metros de altura. Um homem com 2 m de altura anda, afastando-se do poste com velocidade de 1,5 m/s ao longo de uma trajetória reta. Com que velocidade se move a ponta de sua sombra quando ele está a 10 m do poste?

14. Ao meio-dia, o navio A está a 150 km a oeste do navio B. O navio A está navegando para o leste a 35 km/h e o navio B está navegando para norte a 25 km/h. Quão rápido a distância entre os navios está variando às 16h?

15. Dois carros iniciam o movimento partindo de um mesmo ponto. Um viaja para o sul a 30 km/h e o outro viaja para o oeste a 72 km/h. A qual taxa a distância entre os carros está aumentando duas horas depois?

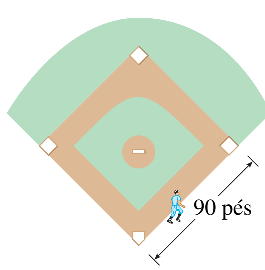
16. Um holofote sobre o solo ilumina uma parede 12 m distante dele. Se um homem de 2 m de altura anda do holofote em direção à parede a uma velocidade de 1,6 m/s, quão rápido o comprimento de sua sombra diminui sobre a parede quando ele está a 4 m dela?

17. Um homem começa a andar para o norte a 1,2 m/s a partir de um ponto *P*. Cinco minutos depois uma mulher começa a andar para o sul a 1,6 m/s de um ponto 200 m a leste de *P*. A que taxa as pessoas estão se distanciando 15 min após a mulher começar a andar?

18. Uma quadra de beisebol é um quadrado com um lado de 90 pés (27,432 m). Um batedor atinge a bola e corre em direção à primeira base com uma velocidade de 24 pés/s (7,3152 m/s).

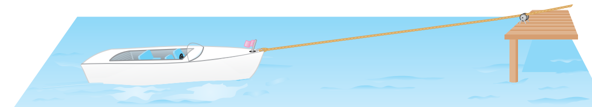
(a) A que taxa decresce sua distância da segunda base quando ele está a meio caminho da primeira base?

(b) A que taxa aumenta sua distância da terceira base no mesmo momento?



19. A altura de um triângulo está aumentando a uma taxa de 1 cm/min enquanto a área do triângulo está aumentando a uma taxa de 2 cm^2/min. A que taxa a base do triângulo está variando quando a altura for 10 cm e a área for 100 cm^2?

20. Um bote é puxado em direção ao ancoradouro por uma corda que está atada na proa do bote e que passa por uma polia sobre o ancoradouro (colocada 1 m mais alto que a proa). Se a corda for puxada a uma taxa de 1 m/s, quão rápido se aproxima o bote do ancoradouro, quando ele estiver a 8 m dele?



21. Ao meio-dia, o navio A está a 100 km a oeste do navio B. O navio A está navegando para o sul a 35 km/h e o navio B está navegando para norte a 25 km/h. Quão rápido a distância entre os navios está variando às16h?

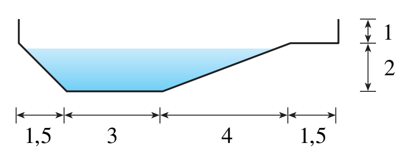
22. Uma partícula move-se ao longo da curva $y = 2\,\text{sen}(\pi x/2)$. Quando a partícula passa pelo ponto $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, sua coordenada x cresce a uma taxa de $\sqrt{10}$ cm/s. Quão rápido a distância da partícula à sua origem está variando nesse momento?

23. Está vazando água de um tanque cônico invertido a uma taxa de 10.000 cm /min. Ao mesmo tempo, água está sendo bombeada para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem 6 m de altura e o diâmetro no topo é de 4 m. Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de 20 cm/min quando a altura da água for 2 m, encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada dentro do tanque.

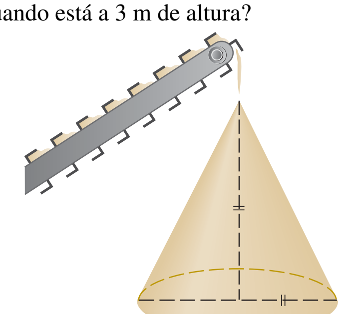
24. Um cocho tem 6 m de comprimento, e suas extremidades têm a forma de triângulos isósceles com 1 m de base e 50 cm de altura. Se o cocho for preenchido com água a uma taxa de 1,2 m^3/min, quão rápido o nível da água estará subindo quando ela tiver 30 cm de profundidade?

25. Um cocho de água tem 10 m de comprimento e uma secção transversal com a forma de um trapezoide isósceles com 30 cm de comprimento na base, 80 cm de extensão no topo e 50 cm de altura. Se o cocho for preenchida com água a uma taxa de 0,2 m^3/min, quão rápido o nível da água estará subindo quando ela tiver 30 cm de profundidade?

26. Uma piscina tem 5 m de largura por 10 m de comprimento, 1 m de profundidade na parte rasa e 3 m na parte mais funda. Sua secção transversal está mostrada na figura. Se a piscina for enchida a uma taxa de 0,1 m^3/min, quão rápido o nível da água estará subindo quando sua profundidade no ponto mais profundo for de 1 m?



27. Uma esteira transportadora está descarregando cascalho a uma taxa de 3 m^3/min, constituindo uma pilha na forma de cone com o diâmetro da base e altura sempre igual. Quão rápido a altura da pilha cresce quando está a 3 m de altura?



28. Uma pipa a 50 m acima do solo move-se horizontalmente a uma velocidade de 2 m/s. A que taxa decresce o ângulo entre a linha e a horizontal depois de 100 m de linha serem soltos?

29. Dois lados de um triângulo têm 4 m e 5 m, e o ângulo entre eles está crescendo a uma taxa de 0,06 rad/s. Encontre a taxa segundo a qual a área está crescendo quando o ângulo entre os lados de comprimento fixo for $\pi/3$.

30. Quão rápido o ângulo entre o solo e a escada está variando no Exemplo 2 quando a parte de baixo da escada estiver a 3 m da parede?

31. O topo de uma escada desliza, por uma parede vertical a uma taxa de 0,15 m/s. No momento em que a base da escada está a 3 m da parede, ela afasta-se da parede à velocidade de 0,2 m/s. Qual o comprimento da escada?

32. Uma torneira está preenchendo uma pia hemisférica de 60 cm de diâmetro com água a uma taxa de 2 L/min. Encontre a taxa na qual a água está aumentando na pia quando estiver cheia até a metade. [Use os seguintes fatos: 1 L é 1 000 cm^3. O volume de uma porção de uma esfera de raio r com altura h a partir da base é $V = \pi\left(rh^2 - \frac{1}{3}h^3\right)$, como será mostrado no Capítulo 6.]

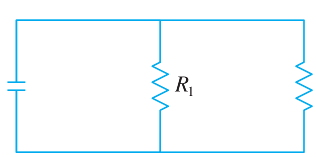
33. A Lei de Boyle afirma que quando uma amostra de gás está sendo comprimida a uma temperatura constante, a pressão P e o volume V satisfazem a equação $PV = C$, onde C é uma constante. Suponha que, em um certo momento, o volume seja de 600 cm^3, a pressão de 150 kPa, e a pressão cresça a uma taxa de 20 kPa/min. A que taxa está decrescendo o volume nesse instante?

34. Quando o ar se expande adiabaticamente (sem ganhar ou perder calor), sua pressão P e volume V estão relacionados pela equação $PV^{1,4} = C$, onde C é uma constante. Suponha que em um certo instante o volume seja de 400 cm^3 e a pressão, 80 kPa, e esteja decrescendo a uma taxa de 10 kPa/min. A que taxa está crescendo o volume nesse momento?

35. Se dois resistores com resistências R_1 e R_2 estão conectados em paralelo, como na figura, então a resistência total R, medida em ohms (Ω), é dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

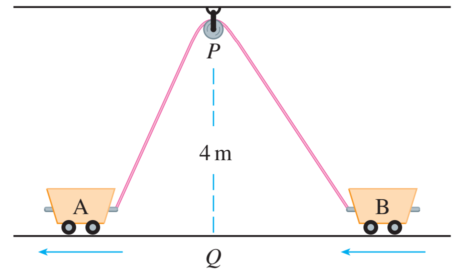
Se R_1 e R_2 estão aumentando a taxas de 0,3 Ω/s e 0,2 Ω/s, respectivamente, quão rápido R está variando quando $R_1 = 80\ \Omega$ e $R_2 = 100\ \Omega$?



36. Nos peixes, o peso B do cérebro como uma função do peso corporal W foi modelado pela função potência $B = 0{,}007W^{2/3}$, onde B e W são medidos em gramas. Um modelo para o peso corporal como uma função de comprimento de corpo L (medido em centímetros) é $W = 0{,}12L^{2,53}$. Se, em 10 milhões de anos, o comprimento médio de uma certa espécie de peixes evoluiu de 15 cm para 20 cm a uma taxa constante, quão rápido estava crescendo o cérebro dessa espécie quando o comprimento médio era de 18 cm?

37. Dois lados de um triângulo têm comprimento de 12 m e 15 m. O ângulo entre eles está aumentando a uma taxa de 2°/min. A que taxa o comprimento de um terceiro lado está aumentando quando o ângulo entre os lados de comprimento fixo for 60º?

38. Duas carretas, A e B, estão conectadas por uma corda de 12 m que passa por uma polia P (veja a figura). O ponto Q no chão está 4 m diretamente abaixo de P e entre as carretas. A carreta A está sendo puxada para longe de Q a uma velocidade de 0,5 m/s. A que velocidade a carreta B está se movendo em direção a Q no instante em que a carreta A estiver 3 m de Q?



39. Uma câmera de televisão está posicionada a 1.200 m de uma base de lançamento de foguete. O ângulo de elevação da câmera deve variar a uma taxa na qual possa focalizar o foguete. O mecanismo de foco da câmera também deve levar em conta o aumento da distância entre a câmera e o foguete em subida. Vamos supor que o foguete suba verticalmente e com velocidade de 200 m/s quando já tiver subido 900 m.

(a) Quão rápido estará variando a distância da câmera ao foguete naquele momento?

(b) Se a câmera de televisão se mantiver sempre na direção do foguete, quão rápido estará variando o ângulo de elevação dela naquele mesmo momento?

40. Um farol está localizado em uma pequena ilha, e a distância entre ele e o ponto P mais próximo em uma costa reta do continente é de 3 km. Sua luz gira quatro revoluções por minuto. Quão rápido o feixe de luz está se movendo ao logo da costa quando ele estiver a 1 km de P?

41. Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 5 km e passa diretamente sobre um telescópio no chão. Quando o ângulo de elevação for $\pi/3$, esse ângulo estará diminuindo a uma taxa de $\pi/6$ rad/min. A que velocidade o avião está viajando naquele instante?

42. Uma roda-gigante com raio de 10 m está girando a uma taxa de uma revolução a cada dois minutos. Quão rápido um passageiro estará subindo quando seu assento estiver 16 m acima do nível do solo?

43. Um avião voando a uma velocidade constante de 300 km/h passa sobre uma estação de radar no solo a uma altitude de 1 km e subindo em um ângulo de 30º. A que taxa está crescendo a distância do avião em relação à estação de radar 1 minuto mais tarde?

44. Duas pessoas começam a andar a partir do mesmo ponto. Uma anda para o leste a 4 km/h e a outra anda para nordeste a 2 km/h. Quão rápido a distância entre as pessoas está variando após 15 minutos?

45. Um velocista corre numa pista circular com raio de 100 m numa velocidade constante de 7 m/s. O amigo do corredor está parado a uma distância 200 m do centro da pista. Quão rápido a distância ente os amigos está variando quando a uma distância entre eles é de 200 m?

46. O ponteiro dos minutos de um relógio mede 8 mm, enquanto o das horas tem 4 mm de comprimento. Quão rápido está variando a distância entre a ponta dos ponteiros à 1 hora?

3.10 Aproximações Lineares e Diferenciais

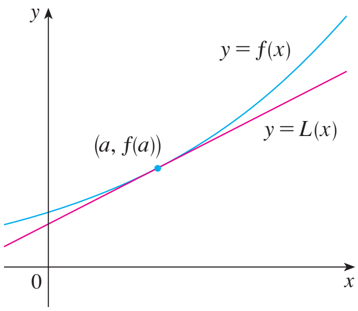


FIGURA 1

Vimos que uma curva fica muito perto de sua reta tangente nas proximidades do ponto de tangência. Na realidade, dando um *zoom* em torno de um ponto sobre o gráfico de uma função derivável, notamos que o gráfico se assemelha cada vez mais à sua reta tangente (veja a Figura 2 na Seção 2.7). Essa observação é a base para um método de encontrar valores aproximados de funções.

A ideia é que pode ser fácil calcular um valor $f(a)$ de uma função, mas difícil (ou mesmo impossível) calcular os valores de f em pontos próximos. Assim, nos contentamos com os valores facilmente calculados da função linear L, cujo gráfico é a reta tangente a f em $(a, f(a))$ (veja a Figura 1).

Em outras palavras, usamos a reta tangente em $(a, f(a))$ como uma aproximação para a curva $y = f(x)$ quando x estiver próximo de a. Uma equação dessa reta tangente é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

e a aproximação

$$\boxed{1} \qquad f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

é denominada **aproximação linear** ou **aproximação pela reta tangente** f em a. A função linear cujo gráfico é essa reta tangente, ou seja,

$$\boxed{2} \qquad L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é denominada **linearização** de f em a.

EXEMPLO 1 Encontre a linearização da função $f(x) = \sqrt{x + 3}$ em $a = 1$ e use-a para aproximar os números $\sqrt{3{,}98}$ e $\sqrt{4{,}05}$. Essas aproximações estão superestimadas ou subestimadas?

SOLUÇÃO A derivada de $f(x) = (x + 3)^{1/2}$ é

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x + 3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}$$

e assim temos $f(1) = 2$ e $f'(1) = \frac{1}{4}$. Colocando esses valores na Equação 2, vemos que a linearização é

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + \tfrac{1}{4}(x - 1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

A aproximação linear correspondente $\boxed{1}$ é

$$\sqrt{x + 3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \qquad \text{(quando } x \text{ estiver próximo a 1)}$$

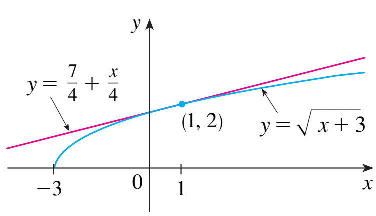


FIGURA 2

Em particular, temos

$$\sqrt{3{,}98} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{0{,}98}{4} = 1{,}995 \qquad \text{e} \qquad \sqrt{4{,}05} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{1{,}05}{4} = 2{,}0125$$

A aproximação linear está ilustrada na Figura 2. Vemos que, realmente, a aproximação pela reta tangente é uma boa aproximação para a função dada quando x está próximo de 1. Vemos também que nossas aproximações são superestimadas, pois a reta tangente está acima da curva.

Naturalmente, uma calculadora nos daria aproximações para $\sqrt{3{,}98}$ e $\sqrt{4{,}05}$, mas a aproximação linear funciona *em todo um intervalo*.

Na tabela a seguir comparamos as estimativas da aproximação linear do Exemplo 1 com os valores verdadeiros. Observe na tabela, e também na Figura 2, que a aproximação pela reta tangente dá boas estimativas quando x está próximo de 1, mas a precisão da aproximação deteriora à medida que x se afasta de 1.

	x	De $L(x)$	Valor Real
$\sqrt{3{,}9}$	0,9	1,975	1,97484176 . . .
$\sqrt{3{,}98}$	0,98	1,995	1,99499373 . . .
$\sqrt{4}$	1	2	2,00000000 . . .
$\sqrt{4{,}05}$	1,05	2,0125	2,01246117 . . .
$\sqrt{4{,}1}$	1,1	2,025	2,02484567 . . .
$\sqrt{5}$	2	2,25	2,23606797 . . .
$\sqrt{6}$	3	2,5	2,44948974 . . .

Quão boa é a aproximação obtida no Exemplo 1? O exemplo a seguir mostra que usando uma calculadora gráfica ou computador podemos determinar o intervalo dentro do qual uma aproximação linear fornece uma precisão especificada.

EXEMPLO 2 Para que valores de x a aproximação linear

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

tem precisão de 0,5? O que se pode dizer sobre uma precisão de 0,1?

SOLUÇÃO Uma precisão de 0,5 significa que as funções devem diferir por menos que 0,5

$$\left| \sqrt{x+3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4} \right) \right| < 0{,}5$$

Da mesma forma, podemos escrever

$$\sqrt{x+3} - 0{,}5 < \frac{7}{4} + \frac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0{,}5$$

o que diz que a aproximação linear deve se encontrar entre as curvas obtidas deslocando-se a curva $y = \sqrt{x+3}$ para cima e para baixo por uma distância de 0,5. A Figura 3 mostra a reta tangente $y = (7 + x)/4$ em intersecção com a curva superior $y = \sqrt{x+3} + 0{,}5$ em P e Q. Dando um o *zoom* e usando o cursor, estimamos que a coordenada x de P seja em torno de $-2{,}66$ e a coordenada x de Q seja em torno de 8,66. Assim, vemos pelo gráfico que a aproximação

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

tem precisão de 0,5 quando $-2{,}6 < x < 8{,}6$. (Arredondamos por segurança.)

De maneira análoga, da Figura 4 vemos que a aproximação tem precisão de 0,1 quando $-1{,}1 < x < 3{,}9$.

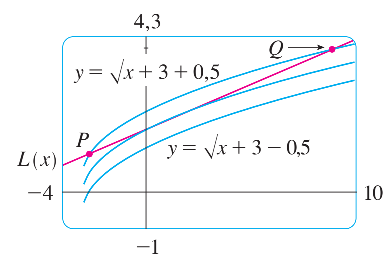


FIGURA 3

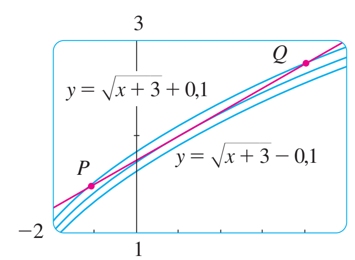


FIGURA 4

Aplicações à Física

As aproximações lineares são muitas vezes usadas em física. Ao analisar as consequências de uma equação, um físico às vezes precisa simplificar uma função, substituindo-a por sua aproximação linear. Por exemplo, ao deduzir uma fórmula para o período de um pêndulo, os livros de física obtêm a expressão $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para a aceleração tangencial e, então, substituem $\operatorname{sen} \theta$ por θ com a observação de que $\operatorname{sen} \theta$ está muito próximo de θ se θ não for grande. [Veja, por exemplo, *Physics: Calculus*, 2. ed., de Eugene Hecht (Pacific Grove, CA, 2000), p. 431.] Você pode verificar que a linearização da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = 0$ é $L(x) = x$ e, assim, a aproximação linear em 0 é

$$\operatorname{sen} x \approx x$$

(veja o Exercício 42). Assim, a dedução da fórmula para o período de um pêndulo usa a aproximação pela reta tangente para a função seno.

Outro exemplo ocorre na teoria da óptica, na qual os raios de luz que chegam em ângulos rasos em relação ao eixo ótico são chamados *raios paraxiais*. Na ótica paraxial (ou gaussiana), tanto sen θ como cos θ são substituídos por suas linearizações. Em outras palavras, as aproximações lineares

$$\text{sen}\,\theta \approx \theta \qquad \text{e} \qquad \cos\theta \approx 1$$

são usados porque θ está próximo de 0. Os resultados de cálculos feitos com essas aproximações tornam-se a ferramenta teórica básica para projetar as lentes. [Veja *Optics*, 4. ed. de Eugene Hecht (San Francisco, 2002), p. 154.]

Na Seção 11.11, no Volume II, vamos apresentar outras aplicações da ideia de aproximação linear na física e na engenharia.

Diferenciais

As ideias por trás das aproximações lineares são algumas vezes formuladas na terminologia e notação de *diferenciais*. Se $y = f(x)$, onde f é uma função derivável, então a **diferencial** dx é uma variável independente, ou seja, a dx pode ser dado um valor qualquer. A **diferencial** dy é então definida em termos de dx pela equação

$$\boxed{3} \qquad dy = f'(x)\,dx$$

Se $dx \neq 0$, podemos dividir ambos os lados da Equação 3 por dx para obter

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Já vimos equações similares antes, mas agora o lado esquerdo pode genuinamente ser interpretado como uma razão de diferenciais.

Assim dy é uma variável dependente; depende dos valores de x e dx. Se a dx for dado um valor específico e x for algum número específico no domínio de f, então o valor numérico de dy está determinado.

O significado geométrico das diferenciais é mostrado na Figura 5. Sejam $P(x, f(x))$ e $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ pontos sobre o gráfico de f e seja $dx = \Delta x$. A variação correspondente em y é

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

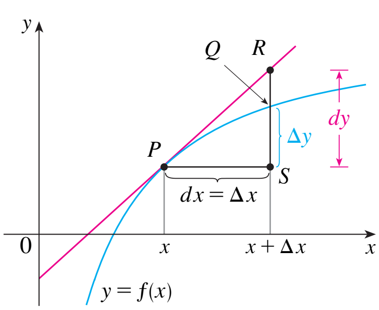


FIGURA 5

A inclinação da reta tangente PR é a derivada $f'(x)$. Assim, a distância direta de S to R é $f'(x)\,dx = dy$. Consequentemente, dy representa a distância que a reta tangente sobe ou desce (a variação na linearização), enquanto Δy representa a distância que a curva $y = f(x)$ sobe ou desce quando x varia por uma quantidade dx.

EXEMPLO 3 Compare os valores de Δy e dy se $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ e x varia (a) de 2 para 2,05 e (b) de 2 para 2,01.

A Figura 6 mostra a função do Exemplo 3 e uma comparação de dy e Δy quando $a = 2$. A janela retangular é [1,8; 2,5] por [6, 18].

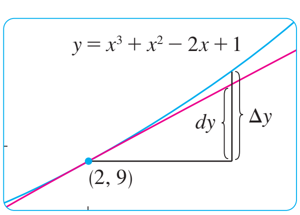


FIGURA 6

SOLUÇÃO

(a) Temos

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$$

$$f(2{,}05) = (2{,}05)^3 + (2{,}05)^2 - 2(2{,}05) + 1 = 9{,}717625$$

$$\Delta y = f(2{,}05) - f(2) = 0{,}717625$$

Em geral, $\qquad dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 2x - 2)\,dx$

Quando $x = 2$ e $dx = \Delta x = 0{,}05$, torna-se

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0{,}05 = 0{,}7$$

(b) $$f(2{,}01) = (2{,}01)^3 + (2{,}01)^2 - 2(2{,}01) + 1 = 9{,}140701$$

$$\Delta y = f(2{,}01) - f(2) = 0{,}140701$$

Quando $dx = \Delta x = 0{,}01$,

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0{,}01 = 0{,}14$$

Observe que no Exemplo 3 a aproximação $\Delta y \approx dy$ torna-se melhor à medida que Δx fica menor. Observe também que é muito mais fácil calcular dy do que Δy. Para as funções mais complicadas pode ser impossível calcular exatamente Δy. Nesses casos, a aproximação por diferenciais é especialmente útil.

Na notação de diferenciais, a aproximação linear $\boxed{1}$ pode ser escrita como

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

Por exemplo, para a função $f(x) = \sqrt{x + 3}$ do Exemplo 1, temos

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}$$

Se $a = 1$ e $dx = \Delta x = 0{,}05$, então

$$dy = \frac{0{,}05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0{,}0125$$

e
$$\sqrt{4{,}05} = f(1{,}05) \approx f(1) + dy = 2{,}0125$$

exatamente como encontramos no Exemplo 1.

Nosso exemplo final ilustra o uso de diferenciais na estimativa de erros que ocorrem em virtude de medidas aproximadas.

EXEMPLO 4 O raio de uma esfera foi medido e descobriu-se que possui 21 cm com uma possibilidade de erro na medida de no máximo 0,05 cm. Qual é o erro máximo usando esse valor de raio para computar o volume da esfera?

SOLUÇÃO Se o raio da esfera for r, então seu volume é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Se o erro na medida do valor de r for denotado por $dr = \Delta r$, então o erro correspondente no cálculo do valor de V é ΔV, que pode ser aproximado pela diferencial

$$dV = 4\pi r^2\,dr$$

Quando $r = 21$ e $dr = 0{,}05$, temos

$$dV = 4\pi(21)^2 0{,}05 \approx 277$$

O erro máximo no volume calculado é de cerca de 277 cm^3.

OBSERVAÇÃO Embora o erro possível no Exemplo 4 possa parecer muito grande, uma ideia melhor é dada pelo **erro relativo**, que é calculado dividindo-se o erro pelo volume total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\,dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\,\frac{dr}{r}$$

Assim, o erro relativo no volume é cerca de três vezes o erro relativo no raio. No Exemplo 4, o erro relativo no raio é de aproximadamente $dr/r = 0{,}05/21 \approx 0{,}0024$ e produz um erro relativo de cerca de 0,007 no volume. Os erros também poderiam ser expressos como **erros percentuais** de 0,24% no raio e 0,7% no volume.

3.10 Exercícios

1–4 Encontre a linearização $L(x)$ da função em a.

1. $f(x) = x^4 + 3x^2, \quad a = -1$

2. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/6$

3. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$

4. $f(x) = x^{3/4}, \quad a = 16$

5. Encontre a aproximação linear da função $f(x) = \sqrt{1 - x}$ em $a = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt{0{,}9}$ e $\sqrt{0{,}99}$. Ilustre fazendo os gráficos de f e da reta tangente.

6. Encontre a aproximação linear da função $g(x) = \sqrt[3]{1+x}$ em $a = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt[3]{0{,}95}$ e $\sqrt[3]{1{,}1}$. Ilustre, fazendo os gráficos de g e da reta tangente.

7–10 Verifique a aproximação linear dada em $a = 0$. A seguir, determine os valores de x para os quais a aproximação linear tem precisão de 0,1.

7. $\ln(1+x) \approx x$ **8.** $\operatorname{tg} x \approx x$

9. $1/(1+2x)^4 \approx 1 - 8x$ **10.** $e^x \cos x \approx 1 + x$

11–14 Encontre a diferencial da função.

11. (a) $y = x^2 \operatorname{sen} 2x$ (b) $y = \ln\sqrt{1+t^2}$

12. (a) $y = s/(1+2s)$ (b) $y = e^{-u}\cos u$

13. (a) $y = \operatorname{tg}\sqrt{t}$ (b) $y = \dfrac{1-v^2}{1+v^2}$

14. (a) $y = e^{\operatorname{tg}\pi t}$ (b) $y = \sqrt{1+\ln z}$

15–18 (a) Encontre a diferencial dy e (b) avalie dy para os valores dados de x e dx.

15. $y = e^{x/10}, \quad x = 0, \quad dx = 0{,}1$

16. $y = \cos \pi x, \quad x = \frac{1}{3}, \quad dx = -0{,}02$

17. $y = \sqrt{3+x^2}, \quad x = 1, \quad dx = -0{,}1$

18. $y = \dfrac{x+1}{x-1}, \quad x = 2, \quad dx = 0{,}05$

19–22 Compute Δy e dy para os valores dados de x e $dx = \Delta x$. A seguir, esboce um diagrama como o da Figura 5, mostrando os segmentos de reta com comprimentos dx, dy e Δy.

19. $y = 2x - x^2, \quad x = 2, \quad \Delta x = -0{,}4$

20. $y = \sqrt{x}, \quad x = 1, \quad \Delta x = 1$

21. $y = 2/x, \quad x = 4, \quad \Delta x = 1$

22. $y = e^x, \quad x = 0, \quad \Delta x = 0{,}5$

23–28 Use uma aproximação linear (ou diferencial) para estimar o número dado.

23. $(1{,}999)^4$ **24.** $e^{-0{,}015}$

25. $\sqrt[3]{1001}$ **26.** $1/4{,}002$

27. $\operatorname{tg} 44°$ **28.** $\sqrt{99{,}8}$

29–31 Explique, em termos de aproximações lineares ou de diferenciais, por que a aproximação é razoável.

29. $\sec 0{,}08 \approx 1$ **30.** $(1{,}01)^6 \approx 1{,}06$

31. $\ln 1{,}05 \approx 0{,}05$

32. Sejam $f(x) = (x-1)^2, \qquad g(x) = e^{-2x}$
e $h(x) = 1 + \ln(1-2x)$.

(a) Encontre as linearizações de f, g e h em $a = 0$. O que você percebe? Como explicar o que aconteceu?

(b) Faça os gráficos de f, g e h, e de suas aproximações lineares. Para qual função a aproximação é melhor? Para qual é pior? Explique.

33. A aresta de um cubo tem 30 cm, com um possível erro de medida de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível no cálculo (a) do volume do cubo e (b) da área da superfície do cubo.

34. O raio de um disco circular é 24 cm, com um erro possível de 0,2 cm.
(a) Use diferenciais para estimar o erro máximo na área calculada do disco.
(b) Qual o erro relativo? Qual o erro percentual?

35. A circunferência de uma esfera mede 84 cm, com erro possível de 0,5 cm.
(a) Use diferenciais para estimar o erro máximo na área calculada da superfície. Qual o erro relativo?
(b) Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo no volume calculado. Qual o erro relativo?

36. Use as diferenciais para estimar a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de 0,05 cm de tinta a um domo com diâmetro de 50 m.

37. (a) Use as diferenciais para encontrar uma fórmula para o volume aproximado de uma fina camada cilíndrica com altura h, raio interno r e espessura Δr.
(b) Qual é o erro envolvido no uso da fórmula da parte (a)?

38. Sabe-se que um lado de um triângulo retângulo mede 20 cm de comprimento e o ângulo oposto foi medido como 30º, com um erro possível de $\pm 1°$.
(a) Use diferenciais para estimar o erro no cálculo da hipotenusa.
(b) Qual é o erro percentual?

39. Se uma corrente I passar por um resistor com resistência R, a Lei de Ohm afirma que a queda de voltagem é $V = RI$. Se V for constante e R for medida com um certo erro, use diferenciais para mostrar que o erro relativo no cálculo de I é aproximadamente o mesmo (em módulo) que o erro relativo em R.

40. Quando o sangue flui ao longo de um vaso sanguíneo, o fluxo F (o volume de sangue por unidade de tempo que passa por um ponto dado) é proporcional à quarta potência do raio R do vaso:

$$F = kR^4$$

(Esta equação é conhecida como a Lei de Poiseuille; mostraremos porque isso é verdadeiro na Seção 8.4.) Uma artéria parcialmente obstruída pode ser alargada por uma operação chamada angioplastia, na qual um cateter-balão é inflado dentro da artéria a fim de aumentá-la e restaurar o fluxo normal do sangue.

Mostre que uma variação relativa em F é cerca de quatro vezes a variação relativa em R. Como um aumento de 5% no raio afeta o fluxo do sangue?

41. Estabeleça as seguintes regras para trabalhar com as diferenciais (onde c denota uma constante e u e v são funções de x).

(a) $dc = 0$ (b) $d(cu) = c\,du$

(c) $d(u+v) = du + dv$ (d) $d(uv) = u\,dv + v\,du$

(e) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ (f) $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

42. Na página 431 de *Physics: Calculus,* 2. ed., por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA, 2000), durante a dedução da Fórmula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ para o período de um pêndulo de comprimento L, o autor obtém a equação $a_T = -g\operatorname{sen}\theta$ para a aceleração tangencial do peso do pêndulo. Ele então afirma: "para ângulos pequenos, o valor de θ em radianos é muito próximo do valor de sen θ; eles diferem por menos que 2% até cerca de 20°".

(a) Verifique a aproximação linear em 0 para a função seno:

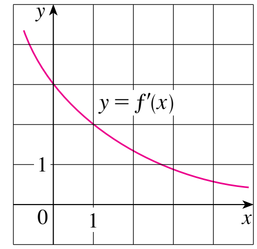
$$\text{sen } x \approx x$$

(b) Use uma ferramenta gráfica para determinar os valores de x para os quais sen x e x difiram por menos que 2%. Então, verifique a afirmação de Hecht, convertendo de radianos para graus.

43. Suponha que a única informação que temos sobre uma função f é que $f(1) = 5$ e que o gráfico de sua *derivada* é como mostrado.

(a) Use uma aproximação linear para estimar $f(0{,}9)$ e $f(1{,}1)$.

(b) Suas estimativas na parte (a) são muito grandes ou pequenas? Explique.



44. Suponha que não tenhamos uma fórmula para $g(x)$, mas saibamos que $g(2) = -4$ e $g'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ para todo x.

(a) Use uma aproximação linear para estimar $g(1{,}95)$ e $g(2{,}05)$.

(b) Suas estimativas na parte (a) são muito grandes ou pequenas? Explique.

PROJETO APLICADO — POLINÔMIOS DE TAYLOR

A aproximação pela reta tangente $L(x)$ é a melhor aproximação de primeiro grau (linear) para $f(x)$ próximo de $x = a$ porque $f(x)$ e $L(x)$ têm a mesma taxa de variação (derivada) em a. Para uma aproximação melhor que a linear, vamos tentar uma aproximação de segundo grau (quadrática) $P(x)$. Em outras palavras, aproximaremos uma curva por uma parábola em vez de uma reta. Para nos assegurarmos de que é uma boa aproximação, estipularemos o seguinte:

(i) $P(a) = f(a)$ (P e f devem ter o mesmo valor em a.)

(ii) $P'(a) = f'(a)$ (P e f devem ter a mesma taxa de mudança em a.)

(iii) $P''(a) = f''(a)$ (As inclinações de P e f devem variar na mesma taxa em a.)

1. Encontre a aproximação quadrática $P(x) = A + Bx + Cx^2$ para a função $f(x) = \cos x$ que satisfaça as condições (i), (ii) e (iii) com $a = 0$. Faça o gráfico de P, f e da aproximação linear $L(x) = 1$ em uma mesma tela. Comente a qualidade das aproximações P e L de f.

2. Determine os valores de x para os quais a aproximação quadrática $f(x) \approx P(x)$ do Problema 1 tem precisão de 0,1. [*Dica:* faça os gráficos de $y = P(x)$, $y = \cos x - 0{,}1$ e $y = \cos x + 0{,}1$ em uma tela comum.]

3. Para aproximar uma função f por uma função quadrática P próxima a um número a, é melhor escrever P na forma

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2$$

Mostre que a função quadrática que satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

4. Encontre a aproximação quadrática para $f(x) = \sqrt{x + 3}$ próxima a $a = 1$. Faça os gráficos de f, da aproximação quadrática e da aproximação linear do Exemplo 2 da Seção 3.10 na mesma tela. O que você conclui?

5. Em vez de ficarmos satisfeitos com aproximações lineares ou quadráticas para $f(x)$ próximo a $x = a$, vamos tentar encontrar aproximações melhores por polinômios de graus mais altos. Procuramos por um polinômio de grau n

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que T_n e suas primeiras n derivadas tenham os mesmos valores em $x = a$ que f e suas primeiras n derivadas. Derivando repetidamente e fazendo $x = a$, mostre que essas condições estão satisfeitas se $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$ e em geral

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

onde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k$. O polinômio resultante

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

é denominado **polinômio de Taylor de grau n de f centrado em a**.

6. Encontre o polinômio de Taylor de 8º grau, centrado em $a = 0$ para a função $f(x) = \cos x$. Faça os gráficos de f junto com os polinômios de Taylor T_2, T_4, T_6, T_8 na janela retangular $[-5, 5]$ por $[-1{,}4; 1{,}4]$ e comente quão bem eles aproximam f.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

3.11 Funções Hiperbólicas

Certas combinações das funções exponenciais e^x e e^{-x} surgem frequentemente em matemática e suas aplicações e, por isso, merecem nomes especiais. Elas são análogas, de muitas maneiras, às funções trigonométricas e possuem a mesma relação com a hipérbole que as funções trigonométricas têm com o círculo. Por essa razão são chamadas coletivamente de **funções hiperbólicas**, e, individualmente, de **seno hiperbólico**, **cosseno hiperbólico** e assim por diante.

Definição das Funções Hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{cossech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

Os gráficos do seno e do cosseno hiperbólicos podem ser esboçados usando uma ferramenta gráfica, como nas Figuras 1 e 2.

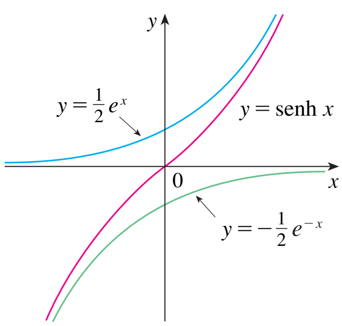


FIGURA 1
$y = \operatorname{senh} x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$

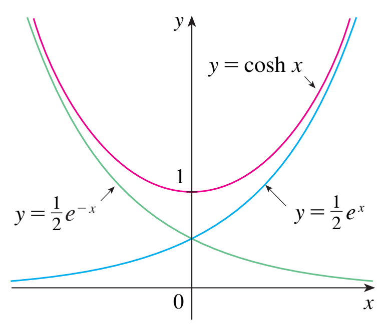


FIGURA 2
$y = \cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$

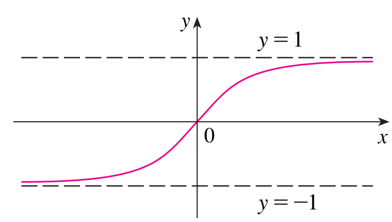


FIGURA 3
$y = \operatorname{tgh} x$

Observe que senh possui domínio e imagem iguais a $\mathbb{R}$, enquanto cosh tem domínio $\mathbb{R}$ e imagem $[1, \infty)$. O gráfico de tgh está mostrado na Figura 3. Ela tem assíntotas horizontais $y = \pm 1$ (veja o Exercício 23).

Alguns dos usos matemáticos de funções hiperbólicas serão vistos no Capítulo 7. As aplicações na ciência e engenharia ocorrem sempre que uma entidade, como a luz, a velocidade, a eletricidade ou a radioatividade, é gradualmente absorvida ou extinguida, pois o decaimento pode ser representado por funções hiperbólicas. A aplicação mais famosa é o uso do cosseno hiperbólico para descrever a forma de um fio dependurado. Pode ser demonstrado que se um cabo flexível pesado (como uma linha de telefone ou de eletricidade) estiver suspenso entre dois pontos na mesma altura, então ele assume a forma de uma curva com a equação $y = c + a\cosh(x/a)$, chamada *catenária* (veja a Figura 4). (A palavra latina *catena* significa "cadeia".)

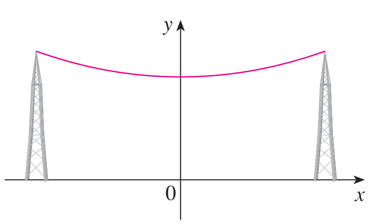


FIGURA 4
Uma catenária $y = c + a\cosh(x/a)$

Uma outra explicação para as funções hiperbólicas ocorre na descrição das ondas do mar. A velocidade de uma onda aquática com comprimento L se movimentando por uma massa de água com profundidade d é modelada pela função

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

onde g é a aceleração da gravidade. (Veja a Figura 5 e o Exercício 49.)

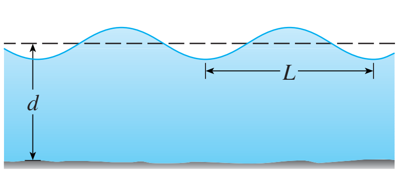


FIGURA 5
Onda do mar idealizada

As funções hiperbólicas satisfazem diversas identidades que são análogas às bem conhecidas identidades trigonométricas. Listaremos algumas aqui, deixando a maioria das demonstrações para os exercícios.

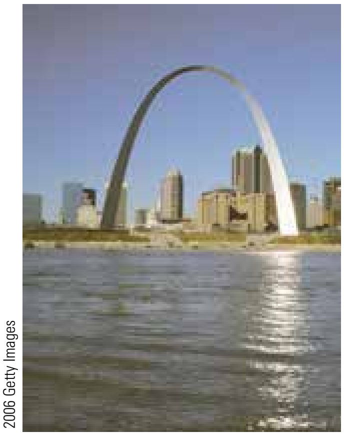
Identidades Hiperbólicas

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad 1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$



O Gateway Arch em St. Louis foi projetado usando-se uma função do cosseno hiperbólica (Exercício 48).

EXEMPLO 1 Demonstre (a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ e (b) $1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.

SOLUÇÃO

(a)
$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(b) Vamos começar com a identidade demonstrada na parte (a):

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Se dividirmos ambos os lados por $\cosh^2 x$, obtemos

$$1 - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

ou
$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

A identidade demonstrada no Exemplo 1(a) fornece um indício para a razão do nome "funções hiperbólicas".

Se t for qualquer número real, então o ponto $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ está sobre o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$, pois $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$. Na realidade, t pode ser interpretado como a medida em radianos de $\angle POQ$ da Figura 6. Por essa razão, as funções trigonométricas são algumas vezes chamadas *funções circulares*.

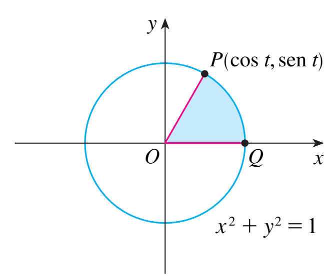


FIGURA 6

Da mesma maneira, se t for qualquer número real, então o ponto $P(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ está sobre o ramo direito da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, pois $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$ e $\cosh t \geqslant 1$. Dessa vez, t não representa a medida de um ângulo. Entretanto, resulta que t representa o dobro da área sombreada do setor hiperbólico da Figura 7, da mesma forma que no caso trigonométrico t representa o dobro da área sombreada do setor circular na Figura 6.

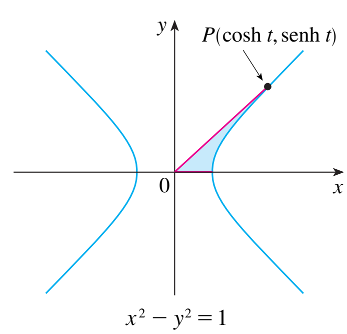


FIGURA 7

As derivadas das funções hiperbólicas são facilmente calculadas. Por exemplo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Vamos listar as fórmulas de derivação para as funções hiperbólicas na Tabela 1. As demonstrações restantes ficarão como exercícios. Observe a analogia com as fórmulas de derivação para as funções trigonométricas, mas esteja alerta – os sinais algumas vezes são diferentes.

1 Derivadas de Funções Hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(\text{senh } x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\text{cossech } x) = -\text{cossech } x \text{ cotgh } x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \text{senh } x \qquad \frac{d}{dx}(\text{sech } x) = -\text{sech } x \text{ tgh } x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{tgh } x) = \text{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\text{cotgh } x) = -\text{cossech}^2 x$$

EXEMPLO 2 Qualquer uma dessas regras de derivação pode ser combinada com a Regra da Cadeia. Por exemplo,

$$\frac{d}{dx}(\cosh \sqrt{x}) = \text{senh } \sqrt{x} \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{\text{senh } \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Funções Hiperbólicas Inversas

Você pode ver pelas Figuras 1 e 3 que senh e tgh são funções injetoras; logo, elas têm funções inversas denotadas por senh^{-1} e tgh^{-1}. A Figura 2 mostra que cosh não é injetora, mas quando restrita ao domínio $[0, \infty)$ torna-se injetora. A inversa da função cosseno hiperbólico está definida como a inversa dessa função restrita.

2

$$y = \text{senh}^{-1}x \iff \text{senh } y = x$$

$$y = \cosh^{-1}x \iff \cosh y = x \quad \text{e} \quad y \geqslant 0$$

$$y = \text{tgh}^{-1}x \iff \text{tgh } y = x$$

As inversas das demais funções hiperbólicas são definidas analogamente (veja o Exercício 28).

Podemos esboçar os gráficos de senh^{-1}, $\cosh^{-1}$ e tgh^{-1} nas Figuras 8, 9 e 10 usando as Figuras 1, 2 e 3.

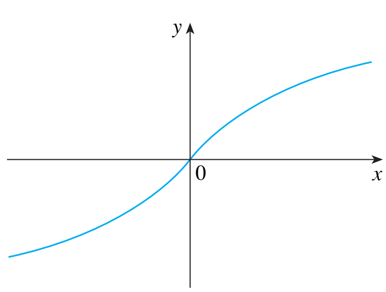


FIGURA 8 $y = \text{senh}^{-1} x$
domínio $= \mathbb{R}$ imagem $= \mathbb{R}$

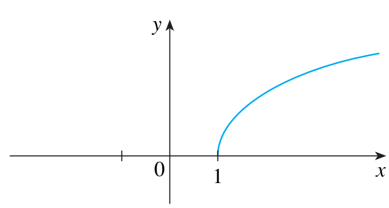


FIGURA 9 $y = \cosh^{-1} x$
domínio $= [1, \infty)$ imagem $= [0, \infty)$

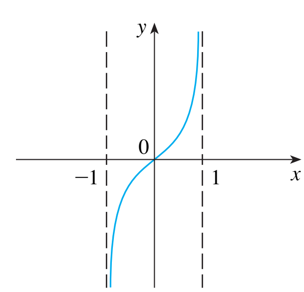


FIGURA 10 $y = \text{tgh}^{-1} x$
domínio $= (-1, 1)$ imagem $= \mathbb{R}$

Uma vez que as funções hiperbólicas estão definidas em termos das funções exponenciais, não é surpreendente descobrir que as funções hiperbólicas inversas podem ser expressas em termos de logaritmos. Especificamente, temos:

A Fórmula 3 está demonstrada no Exemplo 3. As demonstrações das Fórmulas 4 e 5 são pedidas nos Exercícios 26 e 27.

3 $$\text{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

4 $$\cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad x \geqslant 1$$

5 $$\text{tgh}^{-1}x = \tfrac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

EXEMPLO 3 Mostre que $\operatorname{senh}^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

SOLUÇÃO Seja $y = \operatorname{senh}^{-1}x$. Então

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

logo,
$$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

ou, multiplicando por e^y,

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Isso é realmente uma equação quadrática em e^y:

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

Resolvendo com a fórmula quadrática, obtemos

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Observe que $e^y > 0$, mas $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ (pois $x < \sqrt{x^2 + 1}$). Assim, o sinal de menos é inadmissível e temos

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Portanto,
$$y = \ln(e^y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(Veja o Exercício 25 para outro método.)

6 Derivadas de Funções Hiperbólicas Inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cossech}^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh}^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cotgh}^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

Observe que as fórmulas para as derivadas de $\operatorname{tgh}^{-1}x$ e $\operatorname{cotgh}^{-1}x$ parecem idênticas. Mas os domínios dessas funções não possuem números em comum: $\operatorname{tgh}^{-1}x$ é definida para $|x| < 1$, enquanto $\operatorname{cotgh}^{-1}x$ é definida para $|x| > 1$.

As funções hiperbólicas inversas são todas deriváveis, pois as funções hiperbólicas são deriváveis. As fórmulas na Tabela 6 podem ser demonstradas pelo método para as funções inversas ou derivando as Fórmulas 3, 4 e 5.

EXEMPLO 4 Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

SOLUÇÃO 1 Seja $y = \operatorname{senh}^{-1}x$. Então, $\operatorname{senh} y = x$. Se derivarmos essa equação implicitamente em relação a x, obtemos

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = 1$$

Uma vez que $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$ e $\cosh y \geqslant 0$, obtemos $\cosh y = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}$, logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

SOLUÇÃO 2 Da Equação 3 (demonstrada no Exemplo 3), temos

$$\frac{d}{dx}(\text{senh}^{-1}x) = \frac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

EXEMPLO 5 Encontre $\dfrac{d}{dx}[\text{tgh}^{-1}(\text{sen}\, x)]$.

SOLUÇÃO Usando a Tabela 6 e a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{d}{dx}[\text{tgh}^{-1}(\text{sen}\, x)] = \frac{1}{1 - (\text{sen}\, x)^2}\frac{d}{dx}(\text{sen}\, x)$$

$$= \frac{1}{1 - \text{sen}^2 x}\cos x = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x.$$

3.11 Exercícios

1–6 Encontre o valor numérico de cada expressão.

1. (a) senh 0 (b) cosh 0

2. (a) tgh 0 (b) tgh 1

3. (a) senh(ln 2) (b) senh 2

4. (a) cosh 3 (b) cosh(ln 3)

5. (a) sech 0 (b) $\cosh^{-1} 1$

6. (a) senh 1 (b) $\text{senh}^{-1} 1$

7–19 Demonstre a identidade.

7. $\text{senh}(-x) = -\text{senh}\, x$
(Isso mostra que senh é uma função ímpar.)

8. $\cosh(-x) = \cosh x$
(Isso mostra que cosh é uma função par.)

9. $\cosh x + \text{senh}\, x = e^x$

10. $\cosh x - \text{senh}\, x = e^{-x}$

11. $\text{senh}(x + y) = \text{senh}\, x \cosh y + \cosh x\, \text{senh}\, y$

12. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \text{senh}\, x\, \text{senh}\, y$

13. $\text{cotgh}^2 x - 1 = \text{cossech}^2 x$

14. $\text{tgh}(x + y) = \dfrac{\text{tgh}\, x + \text{tgh}\, y}{1 + \text{tgh}\, x\, \text{tgh}\, y}$

15. $\text{senh}\, 2x = 2\, \text{senh}\, x \cosh x$

16. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \text{senh}^2 x$

17. $\text{tg}(\ln x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

18. $\dfrac{1 + \text{tgh}\, x}{1 - \text{tgh}\, x} = e^{2x}$

19. $(\cosh x + \text{senh}\, x)^n = \cosh nx + \text{senh}\, nx$
(n qualquer número real)

20. Se $\text{tgh}\, x = \frac{12}{13}$, encontre os valores das outras funções hiperbólicas em x.

21. Se $\cosh x = \frac{5}{3}$ e $x > 0$, encontre os valores das outras funções hiperbólicas em x.

22. (a) Use os gráficos de senh, cosh e tgh das Figuras 1–3 para fazer os gráficos de cossech, sech e cotgh.
(b) Verifique os gráficos que você esboçou na parte (a) usando uma ferramenta gráfica para produzi-los.

23. Use as definições das funções hiperbólicas para achar os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \text{tgh}\, x$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{tgh}\, x$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \text{senh}\, x$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{senh}\, x$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \text{sech}\, x$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \text{cotgh}\, x$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \text{cotgh}\, x$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \text{cotgh}\, x$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{cossech}\, x$

24. Demonstre as fórmulas dadas na Tabela 1 para as derivadas das funções (a) cosh, (b) tgh, (c) cossech, (d) sech e (e) cotgh.

25. Dê uma solução alternativa para o Exemplo 3 tomando $y = \operatorname{senh}^{-1} x$ e então usando o Exercício 9 e o Exemplo 1(a), com x substituído por y.

26. Demonstre a Equação 4.

27. Demonstre a Equação 5 usando (a) o método do Exemplo 3 e (b) o Exercício 18, com x substituído por y.

28. Para cada uma das seguintes funções (i) dê uma definição como aquelas em $\boxed{2}$, (ii) esboce o gráfico e (iii) encontre uma fórmula similar à Equação 3.
(a) $\operatorname{cossech}^{-1}$ (b) sech^{-1} (c) $\operatorname{cotgh}^{-1}$

29. Demonstre as fórmulas dadas na Tabela 6 para as derivadas das funções a seguir.
(a) $\cosh^{-1}$ (b) tgh^{-1} (c) $\operatorname{cossech}^{-1}$
(d) sech^{-1} (e) $\operatorname{cotgh}^{-1}$

30–45 Encontre a derivada. Simplifique quando possível.

30. $f(x) = \operatorname{tgh}(1 + e^{2x})$

31. $f(x) = x \operatorname{senh} x - \cosh x$

32. $g(x) = \cosh(\ln x)$

33. $h(x) = \ln(\cosh x)$

34. $y = x \operatorname{cotgh}(1 + x^2)$

35. $y = e^{\cosh 3x}$

36. $f(t) = \operatorname{cossech} t(1 - \ln \operatorname{cossech} t)$

37. $f(t) = \operatorname{sech}^2(e^t)$

38. $y = \operatorname{senh}(\cosh x)$

39. $G(x) = \dfrac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x}$

40. $y = \operatorname{senh}^{-1}(\operatorname{tg} x)$

41. $y = \cosh^{-1}\sqrt{x}$

42. $y = x \operatorname{tgh}^{-1} x + \ln \sqrt{1 - x^2}$

43. $y = x \operatorname{senh}^{-1}(x/3) - \sqrt{9 + x^2}$

44. $y = \operatorname{sech}^{-1}(e^{-x})$

45. $y = \operatorname{cotgh}^{-1}(\sec x)$

---

46. Mostre que $\dfrac{d}{dx}\sqrt[4]{\dfrac{1 + \operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh} x}} = \frac{1}{2}e^{x/2}$.

47. Mostre que $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arctg}(\operatorname{tgh} x) = \operatorname{sech} 2x$.

48. O Gateway Arch em St. Louis foi projetado por Eero Saarinen e construído usando a equação

$$y = 211{,}49 - 20{,}96 \cosh 0{,}03291765x$$

para a curva central do arco, em que x e y são medidos em metros e $|x| \leqslant 91{,}20$.
(a) Trace a curva central.
(b) Qual é a altura do arco em seu centro?
(c) Em quais pontos a altura é 100 m?
(d) Qual é a inclinação do arco nos pontos da parte (c)?

49. Se uma onda de comprimento L se move à velocidade v em uma massa de água de profundidade d, então

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

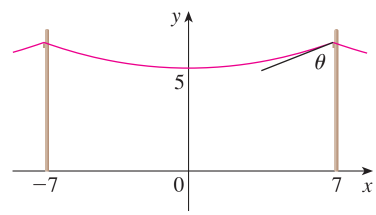
onde g é a aceleração da gravidade. (Veja a Figura 5.) Explique porque a aproximação

$$v \approx \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$$

é adequada para águas profundas.

50. Um cabo flexível pendurado sempre tem a forma de uma catenária $y = c + a\cosh(x/a)$, em que c e a são constantes e $a > 0$ (veja a Figura 4 e o Exercício 52). Faça o gráfico de vários membros da família de funções $y = a\cosh(x/a)$. Como o gráfico muda quando a varia?

51. Uma linha de telefone é pendurada entre dois postes separados a 14 m, na forma da catenária $y = 20\cosh(x/20) - 15$, em que x e y são medidas em metros.
(a) Encontre a inclinação dessa curva onde ela encontra o poste à direita.
(b) Encontre o ângulo θ entre a reta tangente e o poste.



52. Usando os princípios da física, pode ser mostrado que quando um cabo é pendurado entre dois postes, ele toma a forma de uma curva $y = f(x)$ que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

onde ρ é a densidade linear do cabo, g é a aceleração da gravidade e T é a tensão no cabo no ponto mais baixo, e o sistema de coordenadas é apropriadamente escolhido. Verifique que a função

$$y = f(x) = \frac{T}{\rho g}\cosh\left(\frac{\rho g x}{T}\right)$$

é uma solução dessa equação diferencial.

53. Um cabo com densidade linear $\rho = 2$ kg/m é amarrado no topo de dois postes que têm 200 m de distância entre si.
(a) Use o Exercício 52 para encontrar a tensão T de forma que o cabo esteja 60 m acima do solo em seu ponto mais baixo. Qual a altura dos postes?
(b) Se a tensão é dobrada, qual o novo ponto mais baixo do cabo? Qual a altura dos postes agora?

54. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{senh} x}{e^x}$.

55. (a) Mostre que qualquer função da forma

$$y = A \operatorname{senh} mx + B\cosh mx$$

satisfaz a equação diferencial $y'' = m^2 y$.
(b) Encontre $y = y(x)$ de forma que $y'' = 9y$, $y(0) = -4$ e $y'(0) = 6$.

56. Se $x = \ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)$, mostre que $\sec\theta = \cosh x$.

57. Em quais pontos da curva $y = \cosh x$ a tangente tem inclinação 1?

58. Investigue a família das funções

$$f_n(x) = \operatorname{tgh}(n \operatorname{sen} x)$$

onde n é um inteiro positivo. Descreva o que acontece com o gráfico de f_n quando n se torna maior.

59. Mostre que, se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então existem números α e β tais que $ae^x + be^{-x}$ é igual a $\alpha\operatorname{senh}(x + \beta)$ ou $\alpha\cosh(x + \beta)$. Em outras palavras, mostre que quase todas as funções da forma $f(x) = ae^x + be^{-x}$ são funções seno ou cosseno hiperbólicas expandidas e deslocadas.

3 Revisão

Verificação de Conceitos

1. Enuncie cada regra da derivação tanto em símbolos quanto em palavras.
(a) A Regra da Potência
(b) A Regra da Multiplicação por Constante
(c) A Regra da Soma
(d) A Regra da Diferença
(e) A Regra do Produto
(f) A Regra do Quociente
(g) A Regra da Cadeia

2. Determine a derivada de cada função.

(a) $y = x^n$	(b) $y = e^x$	(c) $y = a^x$
(d) $y = \ln x$	(e) $y = \log_a x$	(f) $y = \operatorname{sen} x$
(g) $y = \cos x$	(h) $y = \operatorname{tg} x$	(i) $y = \operatorname{cossec} x$
(j) $y = \sec x$	(k) $y = \operatorname{cotg} x$	(l) $y = \operatorname{sen}^{-1}x$
(m) $y = \cos^{-1}x$	(n) $y = \operatorname{tg}^{-1}x$	(o) $y = \operatorname{senh} x$
(p) $y = \cosh x$	(q) $y = \operatorname{tgh} x$	(r) $y = \operatorname{senh}^{-1}x$
(s) $y = \cosh^{-1}x$	(t) $y = \operatorname{tgh}^{-1}x$	

3. (a) Como é definido o número e?
(b) Expresse e como um limite.
(c) Por que a função exponencial natural $y = e^x$ é usada mais frequentemente em cálculo do que as outras funções exponenciais $y = a^x$?
(d) Por que a função logarítmica natural $y = \ln x$ é usada mais frequentemente em cálculo do que as demais funções logarítmicas $y = \log_a x$?

4. (a) Explique como funciona a derivação implícita.
(b) Explique como funciona a derivação logarítmica.

5. Dê diversos exemplos de como a derivada pode ser interpretada como uma taxa de variação na física, química, biologia, economia ou em outras ciências.

6. (a) Escreva a equação diferencial que expresse a lei de crescimento natural.
(b) Sob quais circunstâncias este é um modelo apropriado para o modelo de crescimento populacional?
(c) Quais são as soluções dessa equação?

7. (a) Escreva uma expressão para a linearização de f em a.
(b) Se $y = f(x)$, escreva uma expressão para a diferencial dy.
(c) Se $dx = \Delta x$, desenhe uma figura mostrando o significado geométrico de Δy e dy.

Teste - Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se f e g forem deriváveis, então
$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

2. Se f e g forem deriváveis, então
$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x)$$

3. Se f e g forem deriváveis, então
$$\frac{d}{dx}\left[f\left(g(x)\right)\right] = f'\left(g(x)\right)g'(x)$$

4. Se f for derivável, então $\dfrac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

5. Se f for derivável, então $\dfrac{d}{dx}f\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$.

6. Se $y = e^2$, então $y' = 2e$.

7. $\dfrac{d}{dx}(10^x) = x10^{x-1}$

8. $\dfrac{d}{dx}(\ln 10) = \dfrac{1}{10}$

9. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tg}^2 x) = \dfrac{d}{dx}(\sec^2 x)$

10. $\dfrac{d}{dx}|x^2 + x| = |2x + 1|$

11. A derivada de um polinômio é um polinômio.

12. Se $f(x) = (x^6 - x^4)^5$, então $f^{(31)}(x) = 0$.

13. A derivada de uma função racional é uma função racional.

14. Uma equação de uma reta tangente à parábola $y = x^2$ em $(-2, 4)$ é $y - 4 = 2x(x + 2)$.

15. Se $g(x) = x^5$, então $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 80$.

Exercícios

1–50 Calcule y'.

1. $y = (x^4 - 3x^2 + 5)^3$

2. $y = \cos(\operatorname{tg} x)$

3. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

4. $y = \dfrac{3x - 2}{\sqrt{2x + 1}}$

5. $y = x^2 \operatorname{sen} \pi x$

6. $y = x \cos^{-1}x$

7. $y = \dfrac{t^4 - 1}{t^4 + 1}$

8. $xe^y = y \operatorname{sen} x$

9. $y = \ln(x \ln x)$

10. $y = e^{mx} \cos nx$

11. $y = \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$

12. $y = (\operatorname{arcsen} 2x)^2$

13. $y = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

14. $y = \ln \sec x$

15. $y + x\cos y = x^2 y$

16. $y = \left(\dfrac{u-1}{u^2+u+1}\right)^4$

17. $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$

18. $y = \operatorname{cotg}(\operatorname{cossec} x)$

19. $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)$

20. $y = e^{x \sec x}$

21. $y = 3^{x \ln x}$

22. $y = \sec(1 + x^2)$

23. $y = (1 - x^{-1})^{-1}$

24. $y = 1/\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

25. $\operatorname{sen}(xy) = x^2 - y$

26. $y = \sqrt{\operatorname{sen}\sqrt{x}}$

27. $y = \log_5(1 + 2x)$

28. $y = (\cos x)^x$

29. $y = \ln \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x$

30. $y = \dfrac{(x^2+1)^4}{(2x+1)^3(3x-1)^5}$

31. $y = x\operatorname{tg}^{-1}(4x)$

32. $y = e^{\cos x} + \cos(e^x)$

33. $y = \ln|\sec 5x + \operatorname{tg} 5x|$

34. $y = 10^{\operatorname{tg}\pi u}$

35. $y = \operatorname{cotg}(3x^2 + 5)$

36. $y = \sqrt{t\ln(t^4)}$

37. $y = \operatorname{sen}\left(\operatorname{tg}\sqrt{1 + x^3}\right)$

38. $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{arcsen}\sqrt{x}\right)$

39. $y = \operatorname{tg}^2(\operatorname{sen}\theta)$

40. $xe^y = y - 1$

41. $y = \dfrac{\sqrt{x+1}\,(2-x)^5}{(x+3)^7}$

42. $y = \dfrac{(x+\lambda)^4}{x^4+\lambda^4}$

43. $y = x\operatorname{senh}(x^2)$

44. $y = \dfrac{\operatorname{sen} mx}{x}$

45. $y = \ln(\cosh 3x)$

46. $y = \ln\left|\dfrac{x^2-4}{2x+5}\right|$

47. $y = \cosh^{-1}(\operatorname{senh} x)$

48. $y = x\operatorname{tgh}^{-1}\sqrt{x}$

49. $y = \cos\left(e^{\sqrt{\operatorname{tg} 3x}}\right)$

50. $y = \operatorname{sen}^2\left(\cos\sqrt{\operatorname{sen}\pi x}\right)$

---

51. Se $f(t) = \sqrt{4t+1}$, encontre $f''(2)$.

52. Se $g(\theta) = \theta\operatorname{sen}\theta$, encontre $g''(\pi/6)$.

53. Encontre y'' se $x^6 + y^6 = 1$.

54. Encontre $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = 1/(2 - x)$.

55. Use a indução matemática para mostrar que se $f(x) = xe^x$, então $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$.

56. Calcule $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{\operatorname{tg}^3(2t)}$.

57–59 Encontre uma equação da tangente à curva no ponto dado.

57. $y = 4\operatorname{sen}^2 x$, $(\pi/6, 1)$

58. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $(0, -1)$

59. $y = \sqrt{1 + 4\operatorname{sen} x}$, $(0, 1)$

60–61 Encontre equações para a reta tangente e para a reta normal à curva no ponto dado.

60. $x^2 + 4xy + y^2 = 13$, $(2, 1)$

61. $y = (2 + x)e^{-x}$, $(0, 2)$

---

62. Se $f(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$, encontre $f'(x)$ Faça os gráficos de f e f' na mesma tela e comente.

63. (a) Se $f(x) = x\sqrt{5 - x}$, encontre $f'(x)$.
(b) Encontre as equações das retas tangentes à curva $y = x\sqrt{5 - x}$ nos pontos $(1, 2)$ e $(4, 4)$.
(c) Ilustre a parte (b) fazendo os gráficos da curva e das retas tangentes.
(d) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável comparando os gráficos de f e f'.

64. (a) Se $f(x) = 4x - \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, encontre f' e f''.
(b) Verifique se suas respostas para a parte (a) são razoáveis comparando os gráficos de f, f' e f''.

65. Em quais pontos da curva $y = \operatorname{sen} x + \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, a reta tangente é horizontal?

66. Encontre os pontos sobre a elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ onde a reta tangente tem inclinação 1.

67. Se $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, mostre que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$$

68. (a) Derivando a fórmula do ângulo duplo

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

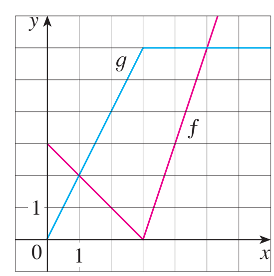
obtenha a fórmula do ângulo duplo para a função seno.
(b) Derivando a fórmula de adição

$$\operatorname{sen}(x + a) = \operatorname{sen} x \cos a + \cos x \operatorname{sen} a$$

obtenha a fórmula de adição para a função cosseno.

69. Suponha que $h(x) = f(x)g(x)$ e $F(x) = f(g(x))$, onde $f(2) = 3$, $g(2) = 5$, $g'(2) = 4$, $f'(2) = -2$ e $f'(5) = 11$.
Encontre (a) $h'(2)$ e (b) $F'(2)$.

70. Se f e g são as funções cujos gráficos estão ilustrados, seja $P(x) = f(x)g(x)$, $Q(x) = f(x)/g(x)$ e $C(x) = f(g(x))$.
Encontre (a) $P'(2)$, (b) $Q'(2)$ e (c) $C'(2)$.



71–78 Encontre f' em termos de g'.

71. $f(x) = x^2 g(x)$

72. $f(x) = g(x^2)$

73. $f(x) = [g(x)]^2$

74. $f(x) = g(g(x))$

75. $f(x) = g(e^x)$

76. $f(x) = e^{g(x)}$

77. $f(x) = \ln|g(x)|$

78. $f(x) = g(\ln x)$

79–81 Encontre h' em termos de f' e g'.

79. $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)}$

80. $h(x) = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

81. $h(x) = f(g(\operatorname{sen} 4x))$

---

82. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = x - 2\operatorname{sen} x$ na janela retangular $[0, 8]$ por $[-2, 8]$.
(b) Em qual intervalo a taxa de variação média é maior: $[1, 2]$ ou $[2, 3]$?
(c) Em qual valor de x a taxa de variação instantânea é maior: $x = 2$ ou $x = 5$?
(d) Verifique sua estimativa visual na parte (c) calculando $f'(x)$ e comparando os valores numéricos de $f'(2)$ e $f'(5)$.

83. Em qual ponto sobre a curva $y = [\ln(x + 4)]^2$ a reta tangente é horizontal?

84. (a) Encontre uma equação para a reta tangente à curva $y = e^x$ que seja paralela à reta $x - 4y = 1$.
(b) Encontre uma equação da tangente à curva $y = e^x$ que passe pela origem.

85. Encontre uma parábola $y = ax^2 + bx + c$ que passe pelo ponto $(1, 4)$ e cujas retas tangentes em $x = -1$ e $x = 5$ tenham inclinações 6 e -2, respectivamente.

86. A função $C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$, onde a, b e K são constantes positivas e $b > a$, é usada para modelar a concentração de uma droga injetada na corrente sanguínea no instante t.
(a) Mostre que $\lim_{t \to \infty} C(t) = 0$.
(b) Encontre $C'(t)$, a taxa segundo a qual a droga é eliminada da circulação.
(c) Quando essa taxa é igual a zero?

87. Uma equação de movimento da forma $s = Ae^{-ct}\cos(\omega t + \delta)$ representa uma oscilação amortecida de um objeto. Encontre a velocidade e a aceleração do objeto.

88. Uma partícula move-se ao longo de uma linha horizontal de tal forma que sua coordenada no tempo t seja $x = \sqrt{b^2 + c^2t^2}$, $t \geqslant 0$, onde b e c são constantes positivas.
(a) Encontre as funções velocidade e aceleração.
(b) Mostre que a partícula se move sempre no sentido positivo.

89. Uma partícula se move sobre uma reta vertical de forma que sua coordenada no tempo t seja $y = t^3 - 12t + 3$, $t \geqslant 0$.
(a) Encontre as funções velocidade e aceleração.
(b) Quando a partícula se move para cima? E para baixo?
(c) Encontre a distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo $0 \leqslant t \leqslant 3$.
(d) Trace as funções posição, velocidade e aceleração para $0 \leqslant t \leqslant 3$.
(e) Quando a partícula está acelerando? Quando está freando?

90. O volume de um cone circular reto é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, onde r é o raio da base e h é a altura.
(a) Encontre a taxa de variação do volume em relação à altura se o raio for mantido constante.
(b) Encontre a taxa de variação do volume em relação ao raio se a altura for mantida constante.

91. A massa de parte de um fio é $x(1 + \sqrt{x})$ kg, onde x é medido em metros a partir de uma extremidade do fio. Encontre a densidade linear do fio quando $x = 4$ m.

92. O custo, em dólares, da produção de x unidades de uma certa mercadoria é

$$C(x) = 920 + 2x - 0{,}02x^2 + 0{,}00007x^3$$

(a) Encontre a função custo marginal.
(b) Encontre $C'(100)$ e explique seu significado.
(c) Compare $C'(100)$ com o custo de produzir o 101º item.

93. Uma cultura de bactérias contém inicialmente 200 células e cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho. Depois de meia hora a população aumentou para 360 células.
(a) Encontre o número de bactérias depois de t horas.
(b) Encontre o número de bactérias depois de 4 horas.
(c) Encontre a taxa de crescimento depois de 4 horas.
(d) Quando a população atingirá 10.000?

94. O cobalto-60 tem a meia-vida de 5,24 anos.
(a) Encontre a massa remanescente de uma amostra de 100 mg depois de 20 anos.
(b) Quanto tempo levaria para a massa decair para 1 mg?

95. Seja $C(t)$ a concentração de uma droga na corrente sanguínea. À medida que o corpo elimina a droga, $C(t)$ diminui a uma taxa que é proporcional à quantidade da droga presente naquele tempo. Assim, $C'(t) = -kC(t)$, em que k é um número positivo denominado *constante de eliminação* da droga.
(a) Se C_0 for a concentração no instante $t = 0$, encontre a concentração no tempo t.
(b) Se o corpo eliminar a metade da droga em 30 horas, quanto tempo levará para eliminar 90% da droga?

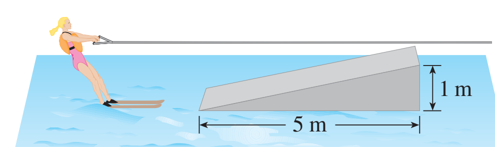
96. Uma xícara de chocolate quente tem a temperatura de 80 ºC em uma sala mantida a 20 ºC. Depois de meia hora, o chocolate quente esfriou para 60 ºC.
(a) Qual a temperatura do chocolate depois de mais meia hora?
(b) Quando o chocolate terá esfriado para 40 ºC?

97. O volume de um cubo cresce a uma taxa de 10 cm³/min. Com que rapidez estará crescendo sua área quando o comprimento de uma das arestas for 30 cm?

98. Um copo de papel tem a forma de um cone com 10 cm de altura e 3 cm de raio (no topo). Se for colocada água dentro do copo a uma taxa de 2 cm³/s, com que rapidez o nível da água se elevará quando ela tiver 5 cm de profundidade?

99. Um balão está subindo numa velocidade constante de 2 m/s. Um garoto está andando de bicicleta por uma estrada numa velocidade de 5 m/s. Quando ele passar por baixo do balão, o mesmo estará 15 m acima dele. Quão rápido cresce a distância entre o balão e o garoto 3 segundos mais tarde?

100. Uma esquiadora aquática sobe a rampa mostrada na figura a uma velocidade de 10 m/s. Com que velocidade ela estará subindo quando deixar a rampa?



101. O ângulo de elevação do Sol está diminuindo numa taxa de 0,25 rad/h. Quão rápido a sombra é projetada por um prédio de 400 pés quando o ângulo de elevação do Sol for $\pi/6$?

102. (a) Encontre a aproximação linear de $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ próximo a 3.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico de f e da aproximação linear.
(c) Para quais valores de x a aproximação linear tem precisão de 0,1?

103. (a) Encontre a linearização de $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x}$ em $a = 0$. Determine a aproximação linear correspondente e use-a para dar um valor aproximado de $\sqrt[3]{1{,}03}$.
(b) Determine os valores de x para os quais a aproximação linear dada na parte (a) tem precisão de 0,1.

104. Calcule dy se $y = x^3 - 2x^2 + 1$, $x = 2$ e $dx = 0.2$.

105. Uma janela tem o formato de um quadrado com um semicírculo em cima. A base da janela é medida como tendo 60 cm de largura com um possível erro de medição de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível no cálculo da área da janela.

106–108 Expresse o limite como uma derivada e calcule-o.

106. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{17} - 1}{x - 1}$

107. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

108. $\lim\limits_{\theta \to \pi/3} \dfrac{\cos\theta - 0{,}5}{\theta - \pi/3}$

109. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}{x^3}$.

110. Suponha que f seja uma função derivável tal que $f(g(x)) = x$ e $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$. Mostre que $g'(x) = 1/(1 + x^2)$.

111. Encontre $f'(x)$ sabendo-se que

$$\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2.$$

112. Mostre que o comprimento da parte de qualquer reta tangente à astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ cortada pelos eixos coordenados é constante.

Problemas Quentes

Antes de você olhar todos os exemplos, cubra a solução e tente resolvê-lo sozinho.

EXEMPLO 1 Quantas retas são tangentes a ambas as parábolas $y = -1 - x^2$ e $y = 1 + x^2$? Encontre as coordenadas dos pontos nos quais essas tangentes tocam as parábolas.

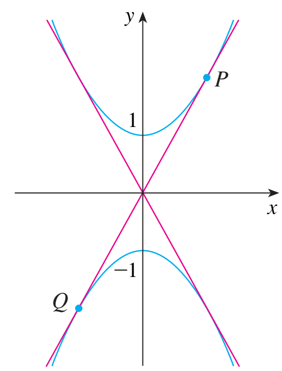


FIGURA 1

SOLUÇÃO É essencial fazer o diagrama para este problema. Assim, esboçamos as parábolas $y = 1 + x^2$ (que é a parábola-padrão $y = x^2$ deslocada uma unidade para cima) e $y = -1 - x^2$ (obtida refletindo-se a primeira parábola em torno do eixo x). Se tentarmos traçar uma reta tangente a ambas as parábolas, logo descobriremos que existem somente duas possibilidades, conforme ilustrado na Figura 1.

Seja P um ponto no qual uma dessas tangentes toca a parábola superior, e seja a sua coordenada x. (A escolha de notação para a incógnita é importante. Naturalmente, poderíamos ter usado b, c, x_0 ou x_1 ao invés de a. Contudo, não é aconselhável usar x no lugar de a porque esse x poderia ser confundido com a variável x na equação da parábola.) Então, uma vez que P se encontra na parábola $y = 1 + x^2$, sua coordenada y deve ser $1 + a^2$. Em virtude da simetria mostrada na Figura 1, as coordenadas do ponto Q, onde a tangente toca a parábola de baixo, devem ser $(-a, -(1 + a^2))$.

Para usarmos a informação dada de que a reta é uma tangente, equacionamos a inclinação da reta PQ como a inclinação da reta tangente em P. Temos

$$m_{PQ} = \frac{1 + a^2 - (-1 - a^2)}{a - (-a)} = \frac{1 + a^2}{a}$$

Se $f(x) = 1 + x^2$, então a inclinação da reta tangente em P é $f'(a) = 2a$. Dessa forma, a condição que precisamos usar é

$$\frac{1 + a^2}{a} = 2a$$

Resolvendo essa equação, obtemos $1 + a^2 = 2a^2$, logo, $a^2 = 1$ e $a = \pm 1$. Portanto, os pontos são $(1, 2)$ e $(-1, -2)$. Por simetria, os pontos remanescentes são $(-1, 2)$ e $(1, -2)$.

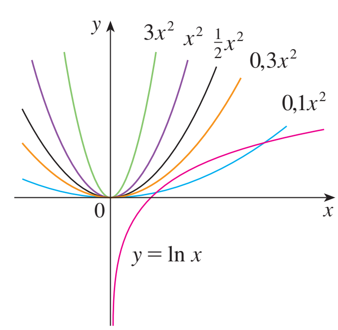


FIGURA 2

EXEMPLO 2 Para que valores de c a equação $\ln x = cx^2$ tem exatamente uma solução?

SOLUÇÃO Um dos princípios mais importantes da resolução do problema é fazer um diagrama, mesmo que o problema como descrito não mencione explicitamente uma situação geométrica. Nosso presente problema pode ser reformulado geometricamente da seguinte forma: para quais valores de c a curva $y = \ln x$ intersecta a curva $y = cx^2$ em exatamente um ponto?

Vamos começar criando o gráfico de $y = \ln x$ e $y = cx^2$ para os vários valores de c. Sabemos que, para $c \neq 0$, $y = cx^2$ é uma parábola que se abre para cima, se $c > 0$, e para baixo, se $c < 0$. A Figura 2 mostra as parábolas $y = cx^2$ para diversos valores positivos de c. A maioria delas não intersecta $y = \ln x$ e uma intersecta duas vezes. Suspeitamos que deve haver um valor de c (em algum lugar entre 0,1 e 0,3) para o qual as curvas se interceptam exatamente uma vez, como na Figura 3.

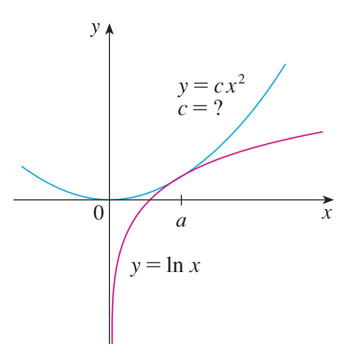


FIGURA 3

Para encontrar aquele valor particular de c, seja a coordenada x do único ponto de intersecção. Em outras palavras, $\ln a = ca^2$, e a é a única solução para a equação dada. Vemos, a

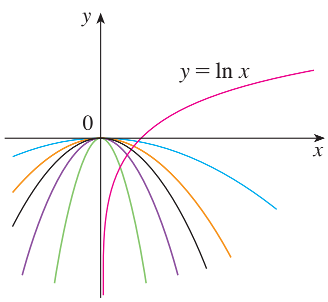


FIGURA 4

partir da Figura 3, que as curvas somente se tocam; portanto, têm uma reta tangente comum quando $x = a$. Isso significa que as curvas $y = \ln x$ e $y = cx^2$ têm a mesma inclinação quando $x = a$. Logo

$$\frac{1}{a} = 2ca$$

Resolvendo as equações $\ln a = ca^2$ e $1/a = 2ca$, obtemos

$$\ln a = ca^2 = c \cdot \frac{1}{2c} = \frac{1}{2}$$

Assim, $a = e^{1/2}$ e

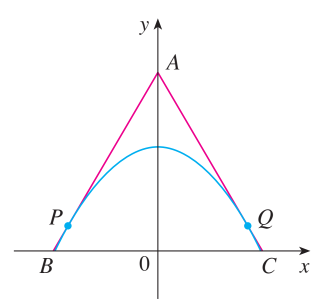
$$c = \frac{\ln a}{a^2} = \frac{\ln e^{1/2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

Para valores negativos de c temos a situação ilustrada na Figura 4: Todas as parábolas $y = cx^2$ com valores negativos de c intersectam $y = \ln x$ exatamente uma única vez. E não esqueçamos de $c = 0$: a curva $y = 0x^2 = 0$ é apenas o eixo x, que intersecta $y = \ln x$ exatamente uma única vez.

Resumindo, os valores pedidos de c são $c = 1/(2e)$ e $c \leqslant 0$.

Problemas

1. Encontre os pontos P e Q sobre a parábola $y = 1 - x^2$ de forma que o triângulo ABC formado pelo eixo x e pelas retas tangentes em P e Q seja equilátero. (Veja a figura.)



2. Encontre o ponto onde as curvas $y = x^3 - 3x + 4$ e $y = 3(x^2 - x)$ são tangentes uma à outra, isto é, têm uma reta tangente comum. Ilustre esboçando as curvas e a tangente em comum.
3. Mostre que as retas tangentes à parábola $y = ax^2 + bx + c$ em quaisquer dois pontos com coordenadas x dadas por p e q devem se interceptar em um ponto cuja coordenada x está no ponto médio de p e q.
4. Mostre que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{cotg} x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}\right) = -\cos 2x$$

5. Se $f(x) = \lim_{t \to x} \frac{\sec t - \sec x}{t - x}$, encontre o valor de $f'(\pi/4)$.
6. Encontre os valores das constantes a e b tais que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{ax + b} - 2}{x} = \frac{5}{12}$$

7. Mostre que $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{tgh} x) = \operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{senh} x)$.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador   SCA Requer sistema de computação algébrica

8. Um carro viaja à noite em uma estrada com formato de uma parábola com seu vértice na origem. (Veja a Figura.) O carro começa em um ponto a 100 m a oeste e 100 m ao norte da origem e viaja na direção leste. A 100 m a leste e a 50 m ao norte da origem existe uma estátua. Em que ponto da estrada os faróis do carro vão iluminar a estátua?

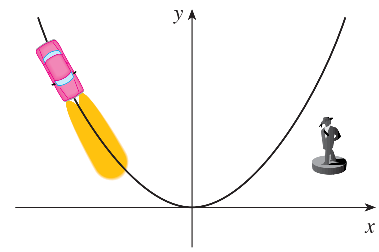
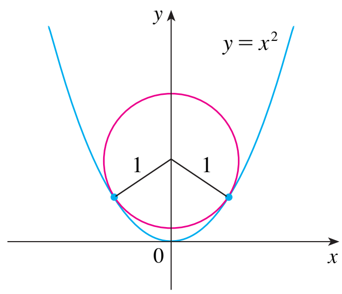


FIGURA PARA O PROBLEMA 8

9. Demonstre que $\dfrac{d^n}{dx^n}(\text{sen}^4 x + \cos^4 x) = 4^{n-1}\cos(4x + n\pi/2)$.

10. Encontre a n-ésima derivada da função $f(x) = x^n/(1 - x)$.

11. A figura mostra um círculo de raio 1 inscrito na parábola $y = x^2$. Encontre o centro do círculo.



12. Se f for derivável em a, onde $a > 0$, calcule o seguinte limite em termos de $f'(a)$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

13. A figura mostra uma roda em rotação com raio de 40 cm e uma barra de conexão AP com comprimento de 1,2 m. O pino P desliza para a frente e para trás no eixo x à medida que a roda gira em sentido anti-horário a uma taxa de 360 revoluções por minuto.

(a) Encontre a velocidade angular da barra de conexão, $d\alpha/dt$, em radianos por segundo, quando $\theta = \pi/3$.

(b) Expresse a distância $x = |OP|$ em termos de θ.

(c) Encontre uma expressão para a velocidade do pino P em termos de θ.

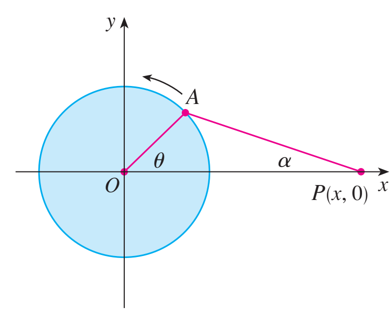


FIGURA PARA O PROBLEMA 13

14. As retas tangentes T_1 e T_2 são traçadas em dois pontos P_1 e P_2 na parábola $y = x^2$ e se intersectam num ponto P. Uma outra reta tangente T é traçado num ponto entre P_1 e P_2; ela intersecta T_1 em Q_1 e T_2 em Q_2. Mostre que

$$\frac{|PQ_1|}{|PP_1|} + \frac{|PQ_2|}{|PP_2|} = 1$$

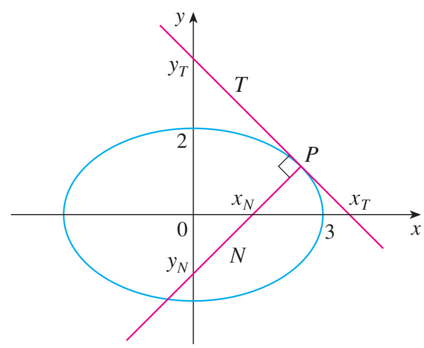
15. Mostre que

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax}\,\text{sen}\,bx) = r^n e^{ax}\,\text{sen}(bx + n\theta)$$

onde a e b são números positivos $r^2 = a^2 + b^2$ e $\theta = \text{tg}^{-1}(b/a)$.

16. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \frac{e^{\text{sen}\,x} - 1}{x - \pi}$.

17. Sejam T e N as retas tangente e normal à elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$ em um ponto qualquer P sobre a elipse no primeiro quadrante. Sejam x_T e y_T as intersecções com os eixos x e y de T e x_N e y_N as intersecções de N. À medida que P se movimenta pela elipse no primeiro quadrante (mas não nos eixos), que valores x_T, y_T, x_N e y_N podem assumir? Tente primeiro conjecturar a resposta somente olhando na figura. Então, use o cálculo para resolver o problema e veja quão boa está sua intuição.



18. Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3 + x)^2 - \operatorname{sen} 9}{x}$.

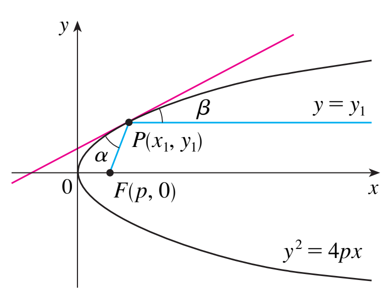
19. (a) Use a identidade para $\operatorname{tg}(x - y)$ (veja a Equação 14b do Apêndice D) para mostrar que, se duas retas L_1 e L_2 se interceptam com um ângulo α, então

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

onde m_1 e m_2 são as inclinações de L_1 e L_2, respectivamente.

(b) O **ângulo entre as curvas** C_1 e C_2 em um ponto de intersecção P é definido como o ângulo entre as retas tangentes para C_1 e C_2 em P (se existirem). Use a parte (a) para encontrar, com precisão de um grau, o ângulo entre cada par de curvas em cada ponto de intersecção.
(i) $y = x^2$ e $y = (x - 2)^2$
(ii) $x^2 - y^2 = 3$ e $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$

20. Seja $P(x_1, y_1)$ um ponto sobre a parábola $y^2 = 4px$ com foco $F(p, 0)$. Seja α o ângulo entre a parábola e o segmento de reta FP e seja β ângulo entre a reta horizontal $y = y_1$ e a parábola, como na figura. Demonstre que $\alpha = \beta$. (Logo, por um princípio da óptica geométrica, a luz de uma fonte colocada em F será refletida ao longo de uma reta paralela ao eixo x. Isso explica por que os *paraboloides*, superfícies obtidas por rotações de parábolas sobre seus eixos, são usados como forma de alguns faróis de automóveis e espelhos para os telescópios.)



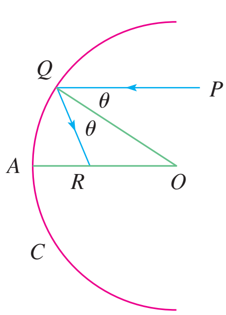


FIGURA PARA O PROBLEMA 21

21. Suponhamos que o espelho parabólico do Problema 20 tenha sido substituído por um esférico. Embora o espelho não tenha foco, podemos mostrar a existência de um foco *aproximado*. Na figura, C é um semicírculo com o centro O. O raio de luz vindo na direção do espelho, paralelo ao eixo, ao longo da reta PQ será refletido para o ponto R sobre o eixo, de modo que $\angle PQO = \angle OQR$ (o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão). O que acontecerá ao ponto R à medida que P fica cada vez mais próximo do eixo?

22. Se f e g forem funções diferenciáveis $f(0) = g(0) = 0$ e $g'(0) \neq 0$, mostre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

23. Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(a + 2x) - 2\,\text{sen}(a + x) + \text{sen}\, a}{x^2}$.

SCA **24.** (a) A função cúbica $f(x) = x(x - 2)(x - 6)$ tem três zeros distintos: 0, 2 e 6. Trace o gráfico de f e de suas retas tangentes nos pontos *médios* de cada par de zeros. O que você percebe?

(b) Suponha que a função cúbica $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ tenha três zeros distintos: a, b, e c. Demonstre, usando um sistema de computação algébrica, que a reta tangente ao gráfico de f no ponto médio dos dois zeros a e b intercepta o gráfico de f no terceiro zero.

25. Para que valor de k a equação $e^{2x} = k\sqrt{x}$ tem exatamente uma solução?

26. Para que números positivos a é verdadeiro que $a^x \geqslant 1 + x$ para todo x?

27. Se

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{\text{sen}\, x}{a + \sqrt{a^2 - 1} + \cos x}$$

mostre que $y' = \dfrac{1}{a + \cos x}$.

28. Dada uma elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, em que $a \neq b$, encontre a equação do conjunto de todos os pontos para os quais existem duas tangentes à curva cujas inclinações são (a) recíprocas e (b) recíprocas negativas.

29. Encontre os dois pontos sobre a curva $y = x^4 - 2x^2 - x$ que têm uma reta tangente comum.

30. Suponha que três pontos sobre a parábola $y = x^2$ tenham a propriedade de que suas retas normais intersectem num ponto em comum. Mostre que a soma de suas coordenadas x é 0.

31. Um *ponto de rede* no plano é um ponto com coordenadas inteiras. Suponha que círculos com raio r sejam feitos usando-se todos os pontos de rede como centros. Encontre o menor valor de r para o qual toda reta com inclinação $\frac{2}{5}$ intercepta alguns desses círculos.

32. Um cone de raio r centímetros e altura h centímetros é submerso a uma taxa de 1 cm/s, primeiro a ponta, em um cilindro alto, com raio R cm, parcialmente cheio de água. Quão rápido se elevará o nível de água no momento em que o cone fica completamente submerso?

33. Um recipiente com a forma de um cone invertido tem 16 cm de altura e 5 cm de raio no topo. Ele está parcialmente cheio com um líquido que vaza pelos lados a uma taxa proporcional à área do recipiente que está em contato com o líquido. (A área da superfície de um cone é πrl, onde r é o raio e l é o comprimento da geratriz.) Se despejarmos o líquido no recipiente numa taxa de 2 cm^3/min, a altura do líquido decrescerá a uma taxa de 0,3 cm/min quando a altura for 10 cm. Se nosso objetivo é manter o líquido à altura constante de 10 cm, a que taxa devemos despejar o líquido no recipiente?