Sumário

Prefácio IX

Testes de Verificação XXI

UMA APRESENTAÇÃO DO CÁLCULO 1

1 Funções e Modelos 9

1.1 Quatro Maneiras de Representar uma Função 10

1.2 Modelos Matemáticos: Uma Lista de Funções Essenciais 22

1.3 Novas Funções a Partir de Conhecidas 34

1.4 Calculadoras Gráficas e Computadores 42

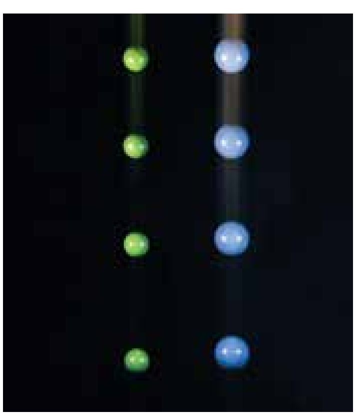
1.5 Funções Exponenciais 48

1.6 Funções Inversas e Logaritmos 55

Revisão 66

Princípios da Resolução de Problemas 69

2 Limites e Derivadas 75



2.1 Os problemas da Tangente e da Velocidade 76

2.2 O Limite de uma Função 80

2.3 Cálculos Usando Propriedades dos Limites 91

2.4 A Definição Precisa de um Limite 100

2.5 Continuidade 109

2.6 Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais 119

2.7 Derivadas e Taxas de Variação 131

Projeto Escrito ▪ Métodos Iniciais para Encontrar Tangentes 139

2.8 A Derivada como uma Função 140

Revisão 150

Problemas Quentes 154

3 Regras de Derivação 157

3.1 Derivadas de Funções Polinomiais e Exponenciais 158

Projeto Aplicado ▪ Construindo uma Montanha-Russa Melhor 166

3.2 As Regras do Produto e do Quociente 167

3.3 Derivadas de Funções Trigonométricas 173

3.4 A Regra da Cadeia 179

Projeto Aplicado ▪ Onde um Piloto Deve Iniciar a Descida? 188

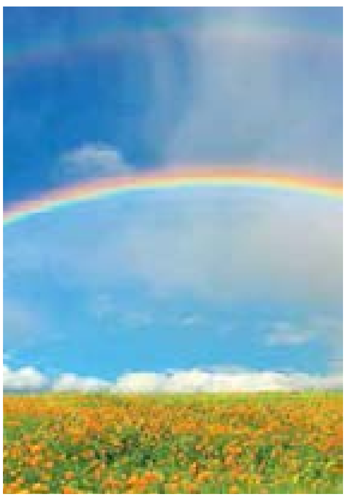
3.5 Derivação Implícita 188

Projeto Aplicado ▪ Famílias de Curvas Implícitas 196

3.6 Derivadas de Funções Logarítmicas 196

3.7 Taxas de Variação nas Ciências Naturais e Sociais 201
3.8 Crescimento e Decaimento Exponenciais 213
3.9 Taxas Relacionadas 220
3.10 Aproximações Lineares e Diferenciais 226
Projeto Aplicado ■ Polinômios de Taylor 231
3.11 Funções Hiperbólicas 232
Revisão 238
Problemas Quentes 241

4 Aplicações de Derivação 247



4.1 Valores Máximo e Mínimo 248
Projeto Aplicado ■ O Cálculo do Arcos-Íris 256
4.2 O Teorema do Valor Médio 257
4.3 Como as Derivadas Afetam a Forma de um Gráfico 262
4.4 Formas Indeterminadas e Regra de l'Hôspital 272
Projeto Escrito ■ As Origens da Regra de l'Hôspital 280
4.5 Resumo do Esboço de Curvas 280
4.6 Representação Gráfica com Cálculo e Calculadoras 287
4.7 Problemas de Otimização 294
Projeto Aplicado ■ A Forma de uma Lata 304
4.8 Método de Newton 305
4.9 Primitivas 310
Revisão 317
Problemas Quentes 320

5 Integrais 325

5.1 Áreas e Distâncias 326
5.2 A Integral Definida 337
Projeto de Descoberta ■ Funções Área 349
5.3 O Teorema Fundamental do Cálculo 350
5.4 Integrais Indefinidas e o Teorema da Variação Total 360
Projeto Escrito ■ Newton, Leibniz e a Invenção do Cálculo 368
5.5 A Regra da Substituição 369
Revisão 376
Problemas Quentes 379

6 Aplicações de Integração 381

6.1 Áreas entre as Curvas 382
Projeto Aplicado ■ O Índice de Gini 388
6.2 Volumes 389
6.3 Volumes por Cascas Cilíndricas 399
6.4 Trabalho 404
6.5 Valor Médio de uma Função 409
Projeto Aplicado ■ Cálculos e Beisebol 412
Projeto Aplicado ■ Onde Sentar-se no Cinema 413
Revisão 413
Problemas Quentes 415

7 Técnicas de Integração 419

7.1 Integração por Partes 420
7.2 Integrais Trigonométricas 425
7.3 Substituição Trigonométrica 431
7.4 Integração de Funções Racionais por Frações Parciais 438
7.5 Estratégias para Integração 447
7.6 Integração Usando Tabelas e Sistemas de Computação Algébrica 452
Projeto de Descoberta ■ Padrões em Integrais 457
7.7 Integração Aproximada 458
7.8 Integrais Impróprias 470
Revisão 479
Problemas Quentes 483

8 Mais Aplicações de Integração 487

8.1 Comprimento de Arco 488
Projeto de Descoberta ■ Torneio de Comprimento de Arcos 494
8.2 Área de uma Superfície de Revolução 495
Projeto de Descoberta ■ Rotação em Torno de uma Reta Inclinada 500
8.3 Aplicações à Física e à Engenharia 501
Projeto de Descoberta ■ Xícaras de Café Complementares 510
8.4 Aplicações à Economia e à Biologia 511
8.5 Probabilidade 515
Revisão 521
Problemas Quentes 523

Apêndices A1

A Números, Desigualdades e Valores Absolutos A2
B Geometria Analítica e Retas A9
C Gráficos de Equações de Segundo Grau A14
D Trigonometria A21
E Notação de Somatória (ou Notação Sigma) A30
F Demonstração dos Teoremas A35
G O Logaritmo Definido como uma Integral A44
H Números Complexos A51
I Respostas para os Exercícios Ímpares A58

Índice Remissivo I1

Volume II

Capítulo 9 Equações Diferenciais
Capítulo 10 Equações Paramétricas e Coordenadas Polares
Capítulo 11 Sequências e Séries Infinitas
Capítulo 12 Vetores e a Geometria do Espaço
Capítulo 13 Funções Vetoriais
Capítulo 14 Derivadas Parciais
Capítulo 15 Integrais Múltiplas
Capítulo 16 Cálculo Vetorial
Capítulo 17 Equações Diferenciais de Segunda Ordem

2 Limites e Derivadas

Uma bola cai com cada vez mais velocidade com o passar do tempo. Galileu descobriu que a distância da queda é proporcional ao quadrado do tempo em que ela está em queda. O Cálculo então nos permite conhecer a velocidade da bola em um dado momento.

1986 Petcolas/Megna, Fundamental Photographs, NYC

Em *Uma Apresentação do Cálculo*, vimos como a ideia de limite é a base dos vários ramos do cálculo. Por isso, é apropriado começar nosso estudo de cálculo examinando os limites e suas propriedades. O tipo especial de limite usado para encontrar as tangentes e as velocidades dá origem à ideia central do cálculo diferencial – a derivada.

2.1 Os Problemas da Tangente e da Velocidade

Nesta seção vamos ver como surgem os limites quando tentamos encontrar a tangente de uma curva ou a velocidade de um objeto.

O Problema da Tangente

A palavra *tangente* vem do latim *tangens*, que significa "tocando". Assim, uma tangente a uma curva é uma reta que toca a curva. Em outros termos, uma reta tangente deve ter a mesma direção que a curva no ponto de contato. Como tornar precisa essa ideia?

Para um círculo, poderíamos simplesmente, como Euclides, dizer que a tangente é uma reta que intercepta o círculo uma única vez, conforme a Figura 1(a). Para as curvas mais complicadas essa definição é inadequada. A Figura l(b) mostra duas retas, l e t, passando através de um ponto P em uma curva C. A reta l intersecta C somente uma vez, mas certamente não se parece com o que pensamos ser uma tangente. A reta t, por outro lado, parece ser uma tangente, mas intercepta C duas vezes.

Para sermos objetivos, vamos examinar no exemplo a seguir o problema de encontrar uma reta t tangente à parábola $y = x^2$.

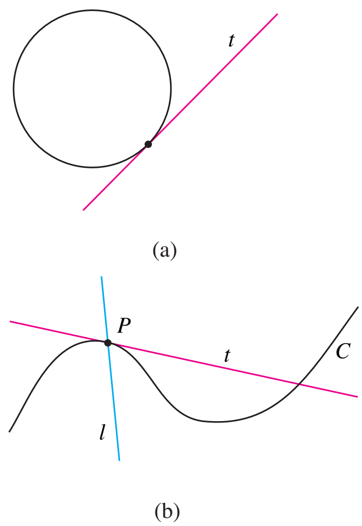


FIGURA 1

EXEMPLO 1 Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

SOLUÇÃO Podemos encontrar uma equação da reta tangente t assim que soubermos sua inclinação m. A dificuldade está no fato de conhecermos somente o ponto P, em t, quando precisamos de dois pontos para calcular a inclinação. Observe, porém, que podemos calcular uma aproximação de m escolhendo um ponto próximo $Q(x, x^2)$ sobre a parábola (como na Figura 2) e calculando a inclinação m_{PQ} da reta secante PQ. [Uma **reta secante**, do latim *secans*, significando corte, é uma linha que corta (intersecta) uma curva mais de uma vez.]

Escolhemos $x \neq 1$ de forma que $Q \neq P$. Então

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

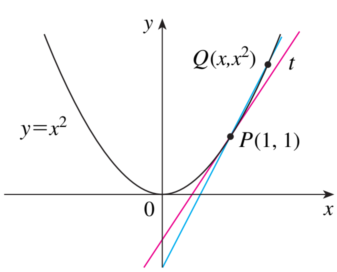


FIGURA 2

Por exemplo, para o ponto $Q(1{,}5;\ 2{,}25)$, temos

$$m_{PQ} = \frac{2{,}25 - 1}{1{,}5 - 1} = \frac{1{,}25}{0{,}5} = 2{,}5$$

x	m_{PQ}
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001

x	m_{PQ}
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999

As tabelas mostram os valores de m_{PQ} para vários valores de x próximos a 1. Quanto mais próximo Q estiver de P, mais próximo x estará de 1, e a tabela indica que m_{PQ} estará mais próximo de 2. Isso sugere que a inclinação da reta tangente t deve ser $m = 2$.

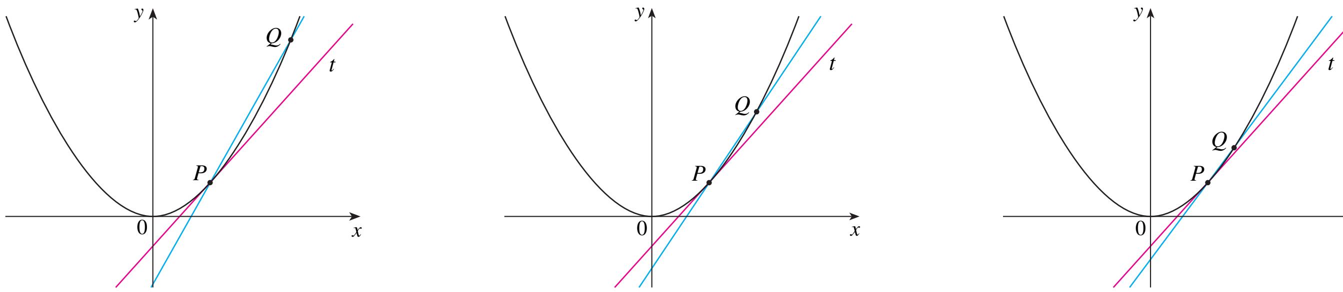
Dizemos que a inclinação da reta tangente é o *limite* das inclinações das retas secantes e expressamos isso simbolicamente escrevendo que

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

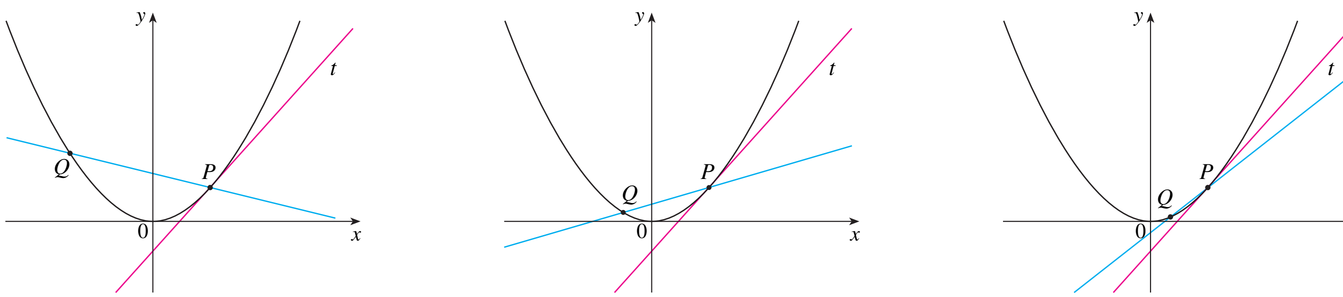
Supondo que a inclinação da reta tangente seja realmente 2, podemos usar a forma ponto-inclinação da equação de uma reta (veja o Apêndice B) para escrever a equação da tangente no ponto $(1, 1)$ como

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = 2x - 1$$

A Figura 3 ilustra o processo de limite que ocorre neste exemplo. À medida que Q tende a P ao longo da parábola, as retas secantes correspondentes giram em torno de P e tendem à reta tangente t.



Q tende a *P* pela direita



Q tende a *P* pela esquerda

FIGURA 3

Em ciências, muitas funções não são descritas por equações explícitas; elas são definidas por dados experimentais. O exemplo a seguir mostra como estimar a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma dessas funções.

TEC Em *Visual 2.1*, você pode ver como o processo na Figura 3 funciona para funções adicionais.

EXEMPLO 2 O flash de uma câmera opera armazenando carga em um capacitor e liberando-a instantaneamente ao ser disparado. Os dados na tabela à esquerda descrevem a carga Q armazenada no capacitor (medida em microcoulombs) no instante t (medido em segundos após o flash ter sido disparado). Use os dados para esboçar o gráfico desta função e estimar a inclinação da reta tangente no ponto onde $t = 0{,}04$. [*Observação:* A inclinação da reta tangente representa a corrente elétrica fluindo do capacitor à lâmpada do flash (medida em microamperes.]

t	Q
0,00	100,00
0,02	81,87
0,04	67,03
0,06	54,88
0,08	44,93
0,10	36,76

SOLUÇÃO Na Figura 4 marcamos os pontos dados e os usamos para esboçar uma curva que aproxima o gráfico da função.

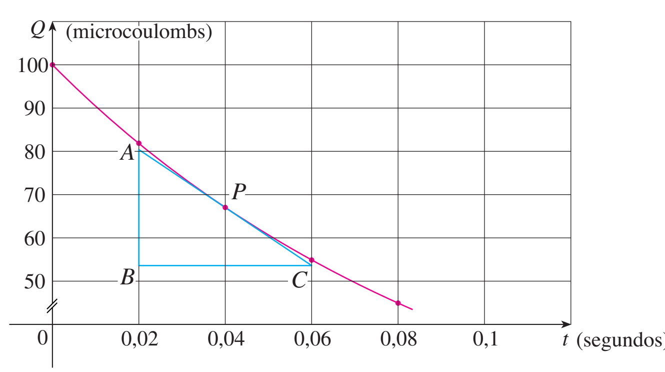


FIGURA 4

Dados os pontos $P(0{,}04; 67{,}03)$ e $R(0{,}00; 100{,}00)$ no gráfico, descobrimos que a inclinação da reta secante PR é

$$m_{PR} = \frac{100{,}00 - 67{,}03}{0{,}00 - 0{,}04} = -824{,}25.$$

R	m_{PR}
(0,00; 100,00)	−824,25
(0,02; 81,87)	−742,00
(0,06; 54,88)	−607,50
(0,08; 44,93)	−552,50
(0,10; 36,76)	−504,50

A tabela à esquerda mostra os resultados de cálculos semelhantes para as inclinações de outras retas secantes. A partir dela podemos esperar que a inclinação da reta tangente em $t = 0{,}04$ esteja em algum ponto entre -742 e $-607{,}5$. De fato, a média das inclinações das duas retas secantes mais próximas é

$$\tfrac{1}{2}(-742 - 607{,}5) = -674{,}75$$

Assim, por esse método, estimamos que a inclinação da reta tangente é -675.

Outro método é traçar uma aproximação da reta tangente em P e medir os lados do triângulo ABC, como na Figura 4. Isso dá uma estimativa da inclinação da reta tangente como

$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{80{,}4 - 53{,}6}{0{,}06 - 0{,}02} = -670$$

O significado físico da resposta do Exemplo 2 é que a corrente que flui do capacitor para o flash após 0,04 s é de cerca de –670 microamperes.

O Problema da Velocidade

Se você observar o velocímetro de um carro no tráfego urbano, verá que o ponteiro não fica parado por muito tempo; isto é, a velocidade do carro não é constante. Podemos conjecturar, pela observação do velocímetro, que o carro tem uma velocidade definida em cada momento. Mas como definir essa velocidade "instantânea"? Vamos investigar o exemplo da bola caindo.

EXEMPLO 3 Suponha que uma bola seja solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN, em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos.

SOLUÇÃO Por meio de experimentos feitos séculos atrás, Galileu descobriu que a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda. (Esse modelo para a queda livre despreza a resistência do ar.) Se a distância percorrida após t segundos for chamada $s(t)$ e medida em metros, então a Lei de Galileu pode ser expressa pela equação

$$s(t) = 4{,}9t^2$$

A dificuldade em encontrar a velocidade após 5 segundos está em tratarmos de um único instante de tempo $(t = 5)$, ou seja, não temos um intervalo de tempo. Porém, podemos aproximar a quantidade desejada calculando a velocidade média sobre o breve intervalo de tempo de um décimo de segundo, de $t = 5$ até $t = 5{,}1$:

$$\begin{aligned}\text{velocidade média} &= \frac{\text{mudança de posição}}{\text{tempo decorrido}}\\ &= \frac{s(5{,}1) - s(5)}{0{,}1}\\ &= \frac{4{,}9(5{,}1)^2 - 4{,}9(5)^2}{0{,}1} = 49{,}49 \text{ m/s}\end{aligned}$$

A Torre CN em Toronto foi o maior edifício do mundo por 32 anos.

A tabela a seguir mostra os resultados de cálculos similares da velocidade média em períodos de tempo cada vez menores.

Intervalo de tempo	Velocidade média (m/s)
$5 \leqslant t \leqslant 6$	53,9
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}1$	49,49
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}05$	49,245
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}01$	49,049
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}001$	49,0049

Parece que, à medida que encurtamos o período do tempo, a velocidade média fica cada vez mais próxima de 49 m/s. A **velocidade instantânea** quando $t = 5$ é definida como o valor limite dessas velocidades médias em períodos de tempo cada vez menores, começando em $t = 5$. Assim, a velocidade (instantânea) após 5 segundos é

$$v = 49 \text{ m/s}$$

Você deve ter percebido que os cálculos usados na solução desse problema são muito semelhantes àqueles usados anteriormente nesta seção para encontrar as tangentes. Na realidade, há uma estreita relação entre o problema da tangente e o cálculo de velocidades. Se traçarmos o gráfico da função distância percorrida pela bola (como na Figura 5) e considerarmos os pontos $P(a;\, 4{,}9a^2)$ e $Q(a + h;\, 4{,}9(a + h)^2)$ sobre o gráfico, então a inclinação da reta secante PQ será

$$m_{PQ} = \frac{4{,}9(a + h)^2 - 4{,}9a^2}{(a + h) - a}$$

que é igual à velocidade média no intervalo de tempo $[a, a + h]$. Logo, a velocidade no instante $t = a$ (o limite dessas velocidades médias quando h tende a 0) deve ser igual à inclinação da reta tangente em P (o limite das inclinações das retas secantes).

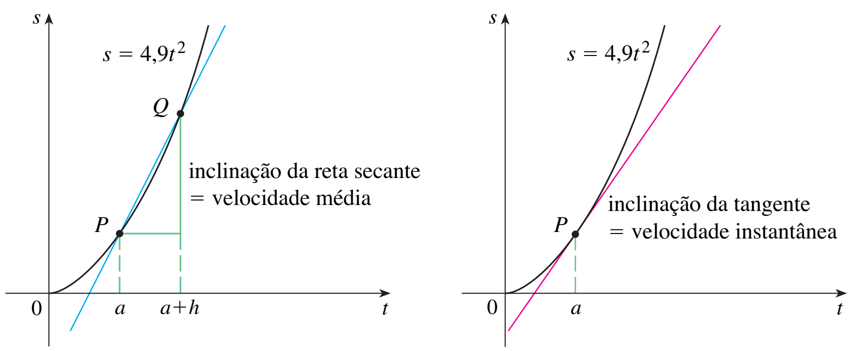


FIGURA 5

Os Exemplos 1 e 3 mostram que para resolver problemas de velocidade e de tangente precisamos encontrar limites. Após estudarmos métodos para o cálculo de limites nas próximas quatro seções, retornaremos aos problemas de encontrar tangentes e velocidades na Seção 2.7.

2.1 Exercícios

1. Um tanque com capacidade para 1.000 litros de água é drenado pela base em meia hora. Os valores na tabela mostram o volume V de água remanescente no tanque (em litros) após t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (L)	694	444	250	111	28	0

(a) Se P é o ponto (15, 250) sobre o gráfico de V, encontre as inclinações das retas secantes PQ, onde Q é o ponto sobre o gráfico com $t = 5$, 10, 20, 25 e 30.

(b) Estime a inclinação da reta tangente em P pela média das inclinações de duas retas secantes.

(c) Use um gráfico da função para estimar a inclinação da tangente em P. (Essa inclinação representa a razão na qual a água flui do tanque após 15 minutos.)

2. Um monitor é usado para medir os batimentos cardíacos de um paciente após uma cirurgia. Ele fornece um número de batimentos cardíacos após t minutos. Quando os dados na tabela são colocados em um gráfico, a inclinação da reta tangente representa a taxa de batimentos cardíacos por minuto.

t (min)	36	38	40	42	44
Batimentos cardíacos	2.530	2.661	2.806	2.948	3.080

O monitor estima esse valor calculando a inclinação de uma reta secante. Use os dados para estimar a taxa de batimentos cardíacos após 42 minutos, utilizando a reta secante entre os pontos para os valores de t dados.

(a) $t = 36$ e $t = 42$ (b) $t = 38$ e $t = 42$
(c) $t = 40$ e $t = 42$ (d) $t = 42$ e $t = 44$

Quais são suas conclusões?

3. O ponto $P(2, -1)$ está sobre a curva $y = 1/(1 - x)$.

(a) Se Q é o ponto $(x, 1/(1 - x))$, use sua calculadora para determinar a inclinação da reta secante PQ, com precisão de seis casas decimais, para os seguintes valores de x:

(i) 1,5 (ii) 1,9 (iii) 1,99 (iv) 1,999
(v) 2,5 (vi) 2,1 (vii) 2,01 (viii) 2,001

(b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(2, -1)$.

(c) Usando a inclinação da parte (b), encontre uma equação da reta tangente à curva em $P(2, -1)$.

4. O ponto $P(0{,}5;\,0)$ está sobre a curva $y = \cos \pi x$.

(a) Se Q é o ponto $(x, \cos \pi x)$, use sua calculadora para determinar a inclinação da reta secante PQ (com precisão de seis casas decimais) para os seguintes valores de x:

(i) 0 (ii) 0,4 (iii) 0,49 (iv) 0,499

(v) 1 (vi) 0,6 (vii) 0,51 (viii) 0,501

(b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(0{,}5;\,0)$.

(c) Use a inclinação obtida na parte (b) para achar uma equação da reta tangente à curva em $P(0{,}5;\,0)$.

(d) Esboce a curva, duas das retas secantes e a reta tangente.

5. Uma bola é atirada no ar com velocidade de 10 m/s. Sua altura em metros após t segundos é dada por $y = 10t - 4{,}9t^2$.

(a) Encontre a velocidade média para o período de tempo que começa quando $t = 1{,}5$ s e dura

(i) 0,5 s (ii) 0,1 s

(iii) 0,05 s (iv) 0,01 s

(b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1{,}5$ s.

6. Se uma pedra for jogada para cima no planeta Marte com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) t segundos mais tarde é dada por $y = 10t - 1{,}86t^2$.

(a) Encontre a velocidade média entre os intervalos de tempo dados:

(i) [1, 2] (ii) [1; 1,5] (iii) [1; 1,1]

(iv) [1; 1,01] (v) [1; 1,001]

(b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1$.

7. A tabela mostra a posição de um ciclista.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	0	1,4	5,1	10,7	17,7	25,8

(a) Encontre a velocidade média nos períodos de tempo a seguir:

(i) [1, 3] (ii) [2, 3] (iii) [3, 5] (iv) [3, 4]

(b) Use o gráfico de s como uma função de t para estimar a velocidade instantânea quando $t = 3$.

8. O deslocamento (em centímetros) de uma partícula se movendo para frente e para trás ao longo de uma reta é dado pela equação de movimento $s = 2 \operatorname{sen} \pi t + 3 \cos \pi t$, em que t é medido em segundos.

(a) Encontre a velocidade média em cada período de tempo:

(i) [1, 2] (ii) [1; 1,1]

(iii) [1; 1,01] (iv) [1; 1,001]

(b) Estime a velocidade instantânea da partícula quando $t = 1$.

9. O ponto $P(1, 0)$ está sobre a curva $y = \operatorname{sen}(10\pi/x)$.

(a) Se Q for o ponto $(x, \operatorname{sen}(10\pi/x))$, encontre a inclinação da reta secante PQ (com precisão de quatro casas decimais) para $x = 2$, 1,5, 1,4, 1,3, 1,2, 1,1, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8 e 0,9. As inclinações parecem tender a um limite?

(b) Use um gráfico da curva para explicar por que as inclinações das retas secantes da parte (a) não estão próximas da inclinação da reta tangente em P.

(c) Escolhendo as retas secantes apropriadas, estime a inclinação da reta tangente em P.

2.2 O Limite de uma Função

Tendo visto na seção anterior como surgem os limites quando queremos encontrar as tangentes a uma curva ou a velocidade de um objeto, vamos voltar nossa atenção para os limites em geral e para os métodos de calculá-los.

Vamos analisar o comportamento da função f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos de 2. A tabela a seguir fornece os valores de $f(x)$ para valores de x próximos de 2, mas não iguais a 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

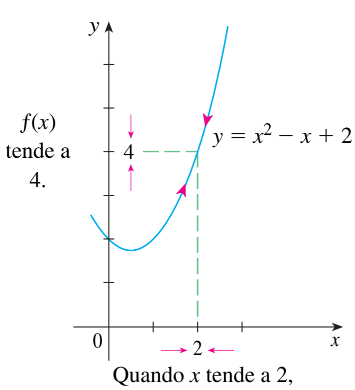


FIGURA 1

Da tabela e do gráfico de f (uma parábola) mostrado na Figura 1, vemos que quando x estiver próximo de 2 (de qualquer lado de 2), $f(x)$ tenderá a 4. De fato, parece que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 4 quanto quisermos, ao tornar x suficientemente próximo de 2. Expressamos isso dizendo que "o limite da função $f(x) = x^2 - x + 2$ quando x tende a 2 é igual a 4". A notação para isso é

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

Em geral, usamos a seguinte notação.

1 Definição Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número a. (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a, exceto possivelmente no próprio a.) Então escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L"

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

Grosso modo, isso significa que os valores de $f(x)$ tendem a L quando x tende a a. Em outras palavras, os valores de $f(x)$ tendem a ficar cada vez mais próximos do número L à medida que x tende ao número a (por qualquer lado de a), mas $x \neq a$. (Uma definição mais precisa será dada na Seção 2.4.)

Uma notação alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

é

$$f(x) \to L \quad \text{quando} \quad x \to a$$

que geralmente é lida como "$f(x)$ tende a L quando x tende a a".

Observe a frase "mas $x \neq a$" na definição de limite. Isso significa que, ao procurar o limite de $f(x)$ quando x tende a a, nunca consideramos $x = a$. Na verdade, $f(x)$ não precisa sequer estar definida quando $x = a$. A única coisa que importa é como f está definida *próximo de a*.

A Figura 2 mostra os gráficos de três funções. Note que, na parte (c), $f(a)$ não está definida e, na parte (b), $f(a) \neq L$. Mas, em cada caso, não importando o que acontece em a, é verdade que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

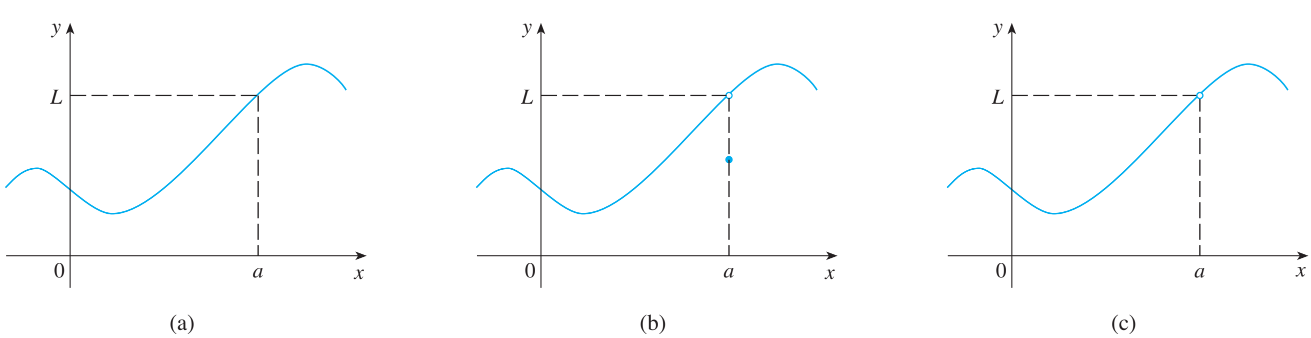


FIGURA 2 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ nos três casos

EXEMPLO 1 Estime o valor de $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$.

SOLUÇÃO Observe que a função $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$ não está definida quando $x = 1$, mas isso não importa, pois a definição de $\lim_{x \to a} f(x)$ diz que devemos considerar valores de x que estão próximos de a, mas não são iguais a a.

As tabelas à esquerda na próxima página dão os valores de $f(x)$ (com precisão de seis casas decimais) para os valores de x que tendem a 1 (mas não são iguais a 1). Com base nesses valores, podemos conjecturar que

$x < 1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0,999	0,500250
0,9999	0,500025

$x > 1$	$f(x)$
1,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0{,}5$$

O Exemplo 1 está ilustrado pelo gráfico de f na Figura 3. Agora, vamos mudar ligeiramente f definindo seu valor como 2 quando $x = 1$ e chamando a função resultante de g:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Essa nova função g tem o mesmo limite quando x tende a 1 (veja a Figura 4).

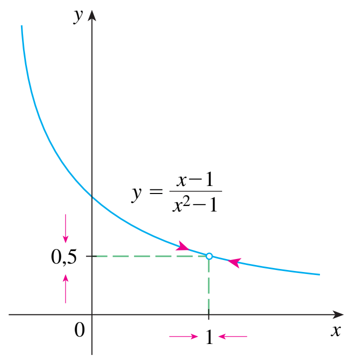


FIGURA 3

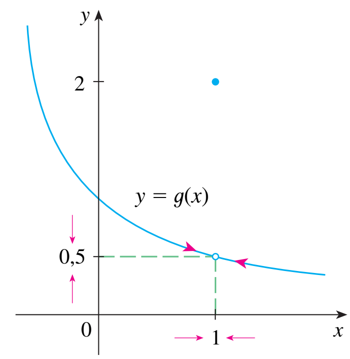


FIGURA 4

EXEMPLO 2 Estime o valor de $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

SOLUÇÃO A tabela fornece uma lista de valores da função para vários valores de t próximos de 0.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
$\pm 1{,}0$	0,16228
$\pm 0{,}5$	0,16553
$\pm 0{,}1$	0,16662
$\pm 0{,}05$	0,16666
$\pm 0{,}01$	0,16667

À medida que t tende a 0, os valores da função parecem tender a 0,1666666 . . . e, assim, podemos conjecturar que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
$\pm 0{,}0005$	0,16800
$\pm 0{,}0001$	0,20000
$\pm 0{,}00005$	0,00000
$\pm 0{,}00001$	0,00000

O que aconteceria no Exemplo 2 se tivéssemos dado valores ainda menores para t? A tabela ao lado mostra os resultados obtidos em uma calculadora; você pode observar que algo estranho acontece.

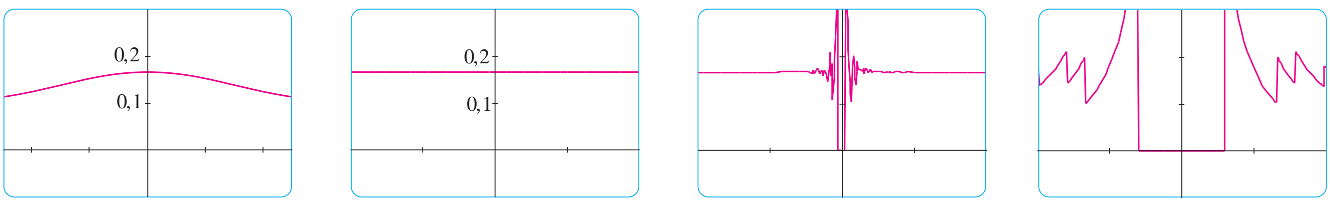
Se você tentar fazer esses cálculos em sua calculadora, poderá obter valores diferentes, mas finalmente vai obter o valor 0 para um t suficientemente pequeno. Isso significa que a resposta é realmente 0, e não $\frac{1}{6}$? Não, o valor do limite é $\frac{1}{6}$, como veremos na próxima seção. O problema é que a calculadora dá valores falsos, pois $\sqrt{t^2+9}$ fica muito próximo de 3 quando t é pequeno. (Na realidade, quando t é suficientemente pequeno, o valor obtido na calculadora para $\sqrt{t^2+9}$ é 3,000. . ., com tantas casas decimais quanto a calculadora for capaz de fornecer).

Para maiores explicações do motivo de calculadoras às vezes fornecerem valores falsos, acesse na Trilha "Mentiras que a minha calculadora e computador me contaram". Leia com atenção o ítem "Os perigos da subtração".

Algo muito parecido acontece ao tentarmos fazer o gráfico da função

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$$

do Exemplo 2 em uma calculadora gráfica ou computador. As partes (a) e (b) da Figura 5 mostram gráficos bem precisos de f e, quando usamos o *trace mode* (se disponível), podemos facilmente estimar que o limite é de cerca de $\frac{1}{6}$. Porém, se dermos um *zoom*, como em (c) e (d), obteremos gráficos imprecisos, novamente em virtude de problemas com a subtração.



(a) $[-5, 5]$ por $[-0{,}1; 0{,}3]$ (b) $[-0{,}1; 0{,}1]$ por $[-0{,}1; 0{,}3]$ (c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0{,}1; 0{,}3]$ (d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0{,}1; 0{,}3]$

FIGURA 5

EXEMPLO 3 Faça uma estimativa de $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x}$.

SOLUÇÃO A função $f(x) = (\text{sen}\, x)/x$ não está definida quando $x = 0$. Usando uma calculadora (e lembrando-se de que, se $x \in \mathbb{R}$, sen x indica o seno de um ângulo cuja medida em *radianos* é x), construímos a tabela ao lado usando valores com precisão de oito casas decimais. Da tabela e do gráfico da Figura 6, temos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$$

Essa suposição está de fato correta, como será demonstrado no Capítulo 3 usando argumentos geométricos.

x	$\dfrac{\text{sen}\, x}{x}$
$\pm 1{,}0$	0,84147098
$\pm 0{,}5$	0,95885108
$\pm 0{,}4$	0,97354586
$\pm 0{,}3$	0,98506736
$\pm 0{,}2$	0,99334665
$\pm 0{,}1$	0,99833417
$\pm 0{,}05$	0,99958339
$\pm 0{,}01$	0,99998333
$\pm 0{,}005$	0,99999583
$\pm 0{,}001$	0,99999983

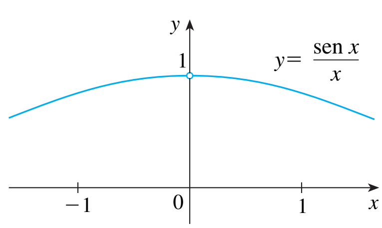


FIGURA 6

EXEMPLO 4 Analise $\displaystyle\lim_{x \to 0} \text{sen}\, \frac{\pi}{x}$.

SOLUÇÃO Mais uma vez a função $f(x) = \text{sen}(\pi/x)$ não está definida em 0. Calculando a função para alguns valores pequenos de x, temos

$$f(1) = \text{sen}\, \pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \text{sen}\, 2\pi = 0$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \text{sen}\, 3\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \text{sen}\, 4\pi = 0$$

$$f(0{,}1) = \text{sen}\, 10\pi = 0 \qquad f(0{,}01) = \text{sen}\, 100\pi = 0$$

Da mesma maneira, $f(0{,}001) = f(0{,}0001) = 0$. Com base nessa informação, ficaríamos tentados a conjecturar que

$$\lim_{x \to 0} \text{sen}\, \frac{\pi}{x} = 0.$$

Sistemas de Computação Algébrica
Os sistemas de computação algébrica (SCA) têm comandos para calcular limites. A fim de evitar falhas como as ilustradas nos Exemplos 2, 4 e 5, eles não encontram os limites por experimentação numérica. Em vez disso, usam técnicas mais sofisticadas, como o cálculo de séries infinitas. Se você tiver acesso a um SCA, use o comando de limite para calcular os limites nos exemplos desta seção e verificar suas respostas para os exercícios deste capítulo.

Dessa vez, no entanto, nossa conjectura está errada. Observe que, embora $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$ para todo número inteiro n, é também verdadeiro que $f(x) = 1$ para infinitos valores de x que tendem a 0. Você poderá ver isto a partir do gráfico de f mostrado na Figura 7.

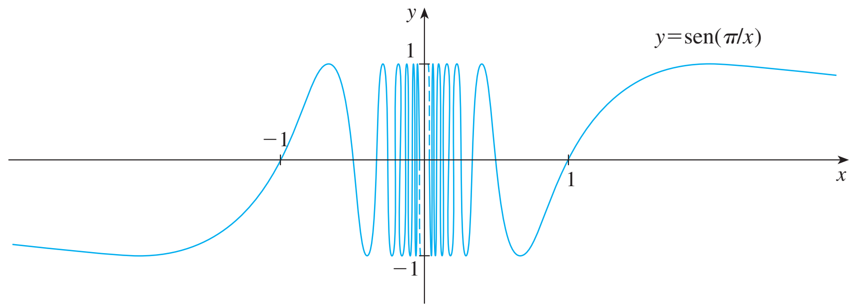


FIGURA 7

As linhas tracejadas perto do eixo de y indicam que os valores de $\operatorname{sen}(\pi/x)$ oscilam entre 1 e -1 infinitas vezes quando x tende a 0 (veja o Exercício 45).

Uma vez que os valores de $f(x)$ não tendem a um número fixo quando x tende a 0,

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \quad \text{não existe}$$

EXEMPLO 5 Encontre $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right)$.

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10.000}$
1	1,000028
0,5	0,124920
0,1	0,001088
0,05	0,000222
0,01	0,000101

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10.000}$
0,005	0,00010009
0,001	0,00010000

SOLUÇÃO Como antes, construímos uma tabela de valores. Pela primeira tabela à esquerda, parece que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0$$

Mas, se continuarmos com os valores ainda menores de x, a segunda tabela sugere que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0{,}000100 = \frac{1}{10\,000}$$

Mais tarde, veremos que $\lim_{x \to 0} \cos 5x = 1$, e então segue que o limite é 0,0001.

Os Exemplos 4 e 5 ilustram algumas das armadilhas na conjectura sobre o valor de um limite. É fácil conjecturar um valor falso se usarmos os valores não apropriados de x, mas é difícil saber quando parar de calcular valores. E, como mostra a discussão após o Exemplo 2, algumas vezes as calculadoras e os computadores dão valores falsos. Nas duas próximas seções, porém, vamos desenvolver métodos infalíveis no cálculo de limites.

EXEMPLO 6 A função de Heaviside, H, é definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

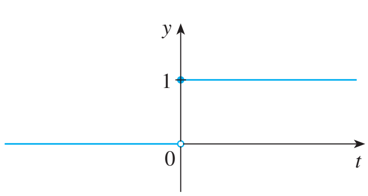


FIGURA 8
A função Heaviside

[Essa função, cujo nome homenageia o engenheiro elétrico Oliver Heaviside (1850-1925), pode ser usada para descrever uma corrente elétrica que é ligada em $t = 0$.] Seu gráfico está na Figura 8.

Quando t tende a 0 pela esquerda, $H(t)$ tende a 0. Quando t tende a 0 pela direita, $H(t)$ tende a 1. Não há um número único para o qual $H(t)$ tende quando t tende a 0. Portanto, $\lim_{t \to 0} H(t)$ não existe.

Limites Laterais

Vimos no Exemplo 6 que $H(t)$ tende a 0 quando t tende a 0 pela esquerda, e $H(t)$ tende a 1 quando t tende a 0 pela direita. Indicamos essa situação simbolicamente escrevendo

$$\lim_{t \to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to 0^+} H(t) = 1$$

O símbolo "$t \to 0^-$" indica que estamos considerando somente valores de t menores que 0. Da mesma forma, "$t \to 0^+$" indica que estamos considerando somente valores de t maiores que 0.

2 Definição Escrevemos

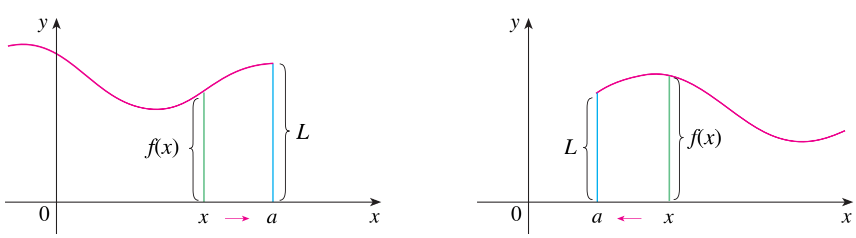
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

e dizemos que o **limite à esquerda de *f* (*x*) quando *x* tende a *a*** [ou o **limite de *f* (*x*) quando *x* tende a *a* pela esquerda**] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, para x suficientemente próximo de a e x menor que a.

Perceba que a Definição 2 difere da Definição 1 somente por necessitarmos que x seja menor que a. De maneira semelhante, se exigirmos que x seja maior que a, obtemos "o **limite à direita de *f* (*x*) quando *x* tende a *a*** é igual a L" e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Dessa forma, o símbolo "$x \to a^+$" indica que estamos considerando somente $x > a$. Essas definições estão ilustradas na Figura 9.



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

FIGURA 9

Comparando a Definição 1 com as definições de limites laterais, vemos ser verdadeiro o que segue.

3 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

EXEMPLO 7 O gráfico de uma função g é apresentado na Figura 10. Use-o para estabelecer os valores (caso existam) dos seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

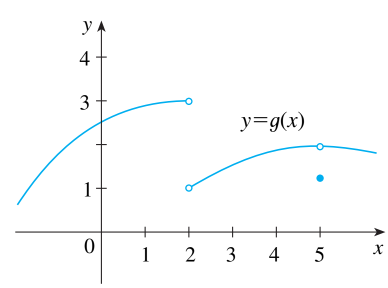


FIGURA 10

SOLUÇÃO A partir do gráfico, vemos que os valores de $g(x)$ tendem a 3 à medida que os de x tendem a 2 pela esquerda, mas tendem a 1 quando x tende a 2 pela direita. Logo

$$\text{(a)} \lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \qquad \text{e} \qquad \text{(b)} \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

(c) Uma vez que são diferentes os limites à esquerda e à direita, concluímos de $\boxed{3}$ que $\lim_{x \to 2} g(x)$ não existe.

O gráfico mostra também que

$$\text{(d)} \lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \qquad \text{e} \qquad \text{(e)} \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

(f) Agora, os limites à esquerda e à direita são iguais; assim, de $\boxed{3}$, temos

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

Apesar desse fato, observe que $g(5) \neq 2$.

Limites Infinitos

x	$\dfrac{1}{x^2}$
± 1	1
$\pm 0{,}5$	4
$\pm 0{,}2$	25
$\pm 0{,}1$	100
$\pm 0{,}05$	400
$\pm 0{,}01$	10.000
$\pm 0{,}001$	1.000.000

EXEMPLO 8 Encontre $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$, se existir.

SOLUÇÃO À medida que x tende a 0, x^2 também tende a 0, e $1/x^2$ fica muito grande. (Veja a tabela na margem.) De fato, a partir do gráfico da função $f(x) = 1/x^2$ da Figura 11, parece que a função $f(x)$ pode se tornar arbitrariamente grande ao tornarmos os valores de x suficientemente próximos de 0. Assim, os valores de $f(x)$ não tendem a um número, e não existe $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$.

Para indicar o tipo de comportamento exibido no Exemplo 8 usamos a notação

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Isso não significa que consideramos ∞ como um número. Tampouco significa que o limite existe. Expressa simplesmente uma maneira particular de não existência de limite: $1/x^2$ pode ser tão grande quanto quisermos, tornando x suficientemente perto de 0.

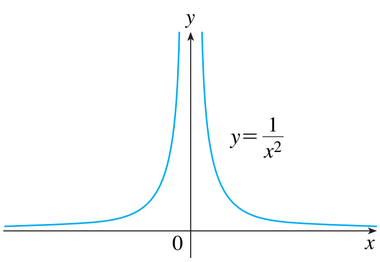


FIGURA 11

Em geral, simbolicamente, escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

para indicar que os valores de $f(x)$ tendem a se tornar cada vez maiores (ou "a crescer ilimitadamente") à medida que x se tornar cada vez mais próximo de a.

> **4 Definição** Seja f uma função definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente no próprio a. Então
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$
>
> significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tornando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

Outra notação para $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ é

$$f(x) \to \infty \qquad \text{quando} \qquad x \to a$$

Novamente, o símbolo ∞ não é um número; todavia, a expressão $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ é usualmente lida como

"o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é infinito"

ou "$f(x)$ se torna infinito quando x tende a a"

ou "$f(x)$ cresce ilimitadamente quando x tende a a"

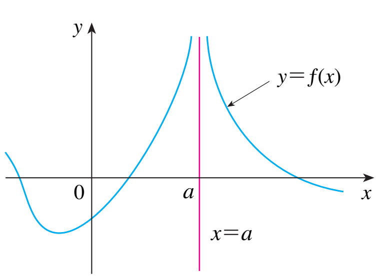


FIGURA 12
$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

Essa definição está ilustrada na Figura 12.

Um tipo análogo de limite, para funções que se tornam grandes em valor absoluto, porém negativas, quando x tende a a, cujo significado está na Definição 5, é ilustrado na Figura 13.

> **5 Definição** Seja f definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente no próprio a. Então
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$
>
> significa que os valores de $f(x)$ podem ser arbitrariamente grandes, porém negativos, ao tornarmos x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

Quando dizemos que um número é um "negativo grande", queremos dizer que ele é negativo, mas que seu valor absoluto é grande.

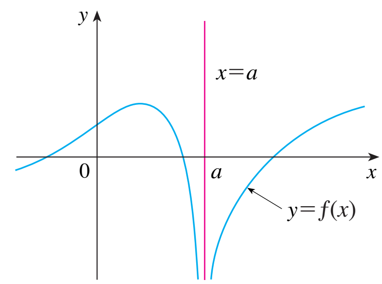


FIGURA 13
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

O símbolo $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ pode ser lido das seguintes formas: "o limite de $f(x)$ quando tende a a é menos infinito", ou "$f(x)$ decresce ilimitadamente quando x tende a a". Como exemplo, temos

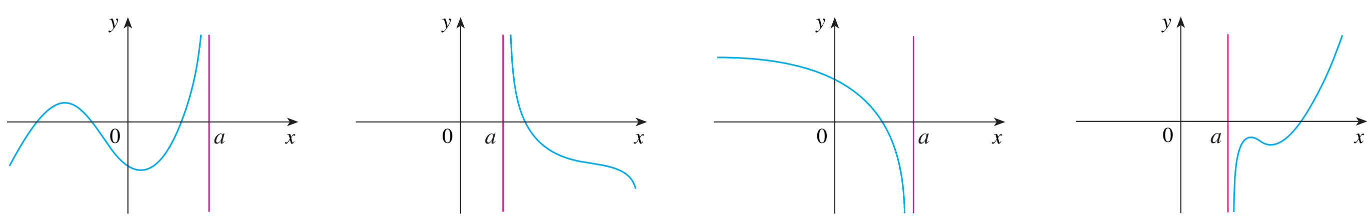
$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

Definições similares podem ser dadas no caso de limites laterais

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

lembrando que "$x \to a^-$" significa considerar somente os valores de x menores que a, ao passo que "$x \to a^+$" significa considerar somente $x > a$. Ilustrações desses quatro casos são dados na Figura 14.



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 14

> **6 Definição** A reta $x = a$ é chamada **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Por exemplo, o eixo y é uma assíntota vertical da curva $y = 1/x^2$, pois $\lim_{x \to 0} (1/x^2) = \infty$. Na Figura 14, a reta $x = a$ é uma assíntota vertical em cada um dos quatro casos considerados. Em geral, o conhecimento de assíntotas verticais é muito útil no esboço de gráficos.

EXEMPLO 9 Encontre $\displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3}$ e $\displaystyle\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3}$.

SOLUÇÃO Se x está próximo a 3 mas é maior que 3, então o denominador $x - 3$ é um número positivo pequeno e $2x$ está próximo a 6. Portanto, o quociente $2x/(x-3)$ é um número *positivo* grande. Então, intuitivamente, temos que

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

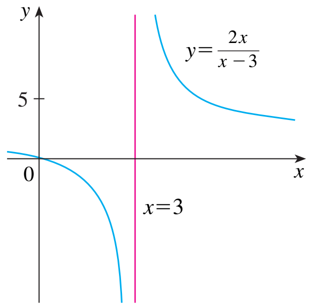


FIGURA 15

Analogamente, se x está próximo a 3 mas é menor que 3, então $x - 3$ é um número negativo pequeno, mas $2x$ ainda é um número positivo (próximo a 6). Portanto, $2x/(x - 3)$ é um número *negativo* grande. Assim,

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x - 3} = -\infty$$

O gráfico da curva $y = 2x/(x - 3)$ está dado na Figura 15. A reta $x = 3$ é uma assíntota vertical.

EXEMPLO 10 Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \operatorname{tg} x$.

SOLUÇÃO Como

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

existem assíntotas verticais em potencial nos pontos nos quais $\cos x = 0$. De fato, como $\cos x \to 0^+$ quando $x \to (\pi/2)^-$ e $\cos x \to 0^-$ quando $x \to (\pi/2)^+$, enquanto sen x é positivo quando x está próximo de $\pi/2$, temos

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \operatorname{tg} x = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to (\pi/2)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

Isso mostra que a reta $x = \pi/2$ é uma assíntota vertical. Um raciocínio similar mostra que as retas $x = (2n + 1)\pi/2$, onde n é um número inteiro, são todas assíntotas verticais de $f(x) = \operatorname{tg} x$. O gráfico da Figura 16 confirma isso.

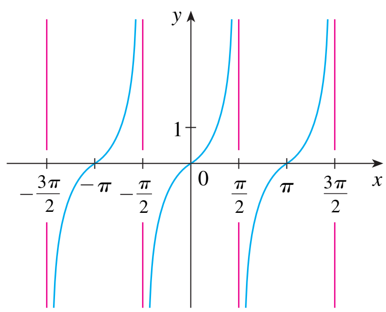


FIGURA 16
$y = \operatorname{tg} x$

Outro exemplo de uma função cujo gráfico tem uma assíntota vertical é a função logaritmo natural $y = \ln x$. Da Figura 17, vemos que

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$$

e, assim, a reta $x = 0$ (o eixo y) é uma assíntota vertical. Na realidade, isso é válido para $y = \log_a x$ desde que $a > 1$. (Veja as Figuras 11 e 12 na Seção 1.6.)

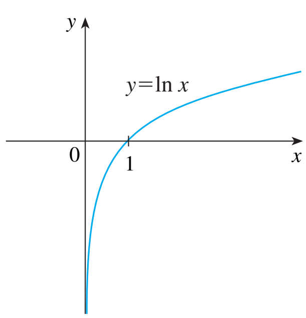


FIGURA 17
O eixo y é uma assíntota vertical da função logaritmo natural.

2.2 Exercícios

1. Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique o que significa dizer que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

Nesta situação, é possível que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Explique.

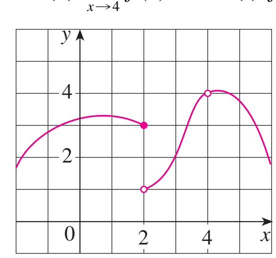
3. Explique o significado de cada uma das notações a seguir.

(a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

4. Use o gráfico dado de f para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

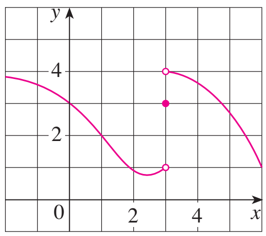
(d) $f(2)$ (e) $\lim_{x \to 4} f(x)$ (f) $f(4)$



5. Para a função f, cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (e) $f(3)$



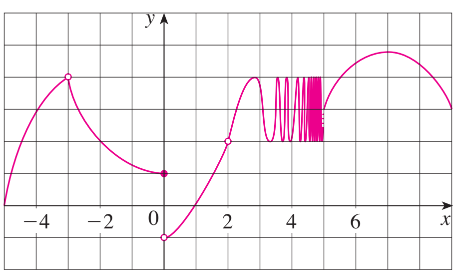
6. Para a função h cujo gráfico é dado, diga o valor da cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x\to -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x\to -3} h(x)$

(d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x\to 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x\to 0^+} h(x)$

(g) $\lim_{x\to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x\to 2} h(x)$

(j) $h(2)$ (k) $\lim_{x\to 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x\to 5^-} h(x)$

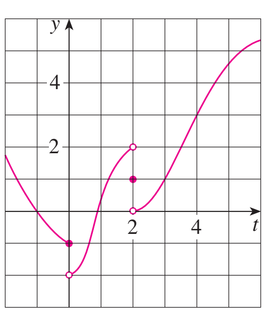


7. Para a função g cujo gráfico é dado, diga o valor da cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{t\to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t\to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t\to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t\to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t\to 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t\to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim_{t\to 4} g(t)$

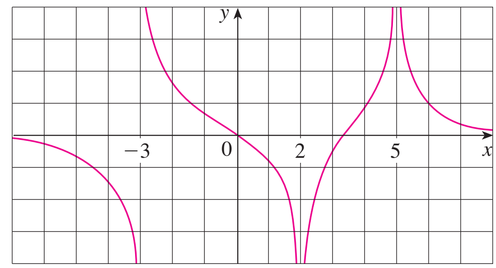


8. Para a função R, cujo gráfico é mostrado a seguir, diga quem são:

(a) $\lim_{x\to 2} R(x)$ (b) $\lim_{x\to 5} R(x)$

(c) $\lim_{x\to -3^-} R(x)$ (d) $\lim_{x\to -3^+} R(x)$

(e) As equações das assíntotas verticais.

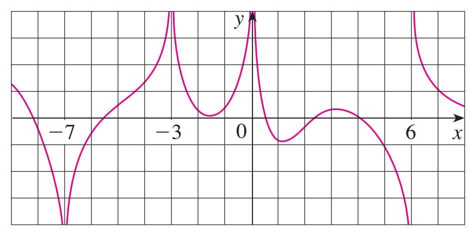


9. Para a função f cujo gráfico é mostrado a seguir, determine o seguinte:

(a) $\lim_{x\to -7} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -3} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 6^-} f(x)$ (e) $\lim_{x\to 6^+} f(x)$

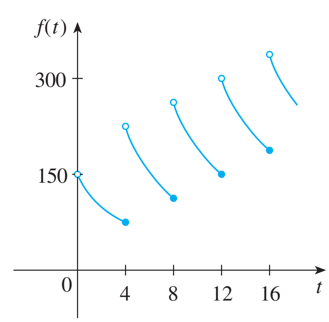
(f) As equações das assíntotas verticais.



10. Um paciente recebe uma injeção de 150 mg de uma droga a cada 4 horas. O gráfico mostra a quantidade $f(t)$ da droga na corrente sanguínea após t horas. Encontre

$$\lim_{t\to 12^-} f(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 12^+} f(t)$$

e explique o significado desses limites laterais.



11–12 Esboce o gráfico da função e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x\to a} f(x)$ existe:

11. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leqslant x < 1 \\ 2 - x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{se } x > \pi \end{cases}$

13–14 Use o gráfico da função f para dizer o valor de cada limite, se existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

13. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

14. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

15–18 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

15. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -2, \quad f(1) = 2$

16. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 0,$
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(0)$ não está definido

17. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to -2} f(x) = 2,$
$f(3) = 3, \quad f(-2) = 1$

18. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 4^-} f(x) = 3,$
$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 0, \quad f(0) = 2, \quad f(4) = 1$

19–22 Faça uma conjectura sobre o valor do limite (se ele existir) por meio dos valores da função nos números dados (com precisão de seis casas decimais).

19. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$,
$x = 2{,}5,\ 2{,}1,\ 2{,}05,\ 2{,}01,\ 2{,}005,\ 2{,}001,$
$1{,}9,\ 1{,}95,\ 1{,}99,\ 1{,}995,\ 1{,}999$

20. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$,
$x = 0,\ -0{,}5,\ -0{,}9,\ -0{,}95,\ -0{,}99,\ -0{,}999,$
$-2,\ -1{,}5,\ -1{,}1,\ -1{,}01,\ -1{,}001$

21. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}, \quad x = \pm 1,\ \pm 0{,}5,\ \pm 0{,}1,\ \pm 0{,}05,\ \pm 0{,}01$

22. $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x + x^2), \quad x = 1,\ 0{,}5,\ 0{,}1,\ 0{,}05,\ 0{,}01,\ 0{,}005,\ 0{,}001$

23–26 Use uma tabela de valores para estimar o valor do limite. Se você tiver alguma ferramenta gráfica, use-a para confirmar seu resultado.

23. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$

24. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } 3x}{\text{tg } 5x}$

25. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$

26. $\lim_{x \to 0} \dfrac{9^x - 5^x}{x}$

27. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\cos 2x - \cos x)/x^2$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y, estime o valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$.
(b) Verifique sua resposta da parte (a), calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximem de 0.

28. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{\text{sen } \pi x}$$

traçando o gráfico da função $f(x) = (\text{sen } x)/(\text{sen } \pi x)$. Forneça sua resposta com precisão de duas casas decimais.
(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximem de 0.

29–37 Determine o limite infinito.

29. $\lim_{x \to -3^+} \dfrac{x + 2}{x + 3}$

30. $\lim_{x \to -3^-} \dfrac{x + 2}{x + 3}$

31. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2 - x}{(x - 1)^2}$

32. $\lim_{x \to 5^-} \dfrac{e^x}{(x - 5)^3}$

33. $\lim_{x \to 3^+} \ln(x^2 - 9)$

34. $\lim_{x \to \pi^-} \cot x$

35. $\lim_{x \to 2\pi^-} x \csc x$

36. $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

37. $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$

38. (a) Encontre as assíntotas verticais da função

$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$

(b) Confirme sua resposta da parte (a) fazendo o gráfico da função.

39. Determine $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x^3 - 1}$ e $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^3 - 1}$
(a) calculando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para valores de x que se aproximam de 1 pela esquerda e pela direita,
(b) raciocinando como no Exemplo 9, e
(c) a partir do gráfico de f.

40. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\text{tg } 4x)/x$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y, estime o valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$.
(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximam de 0.

41. (a) Estime o valor do limite $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$ com cinco casas decimais. Esse número lhe parece familiar?
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da função $y = (1 + x)^{1/x}$.

42. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = e^x + \ln|x - 4|$ para $0 \leqslant x \leqslant 5$. Você acha que o gráfico é uma representação precisa de f?
(b) Como você faria para que o gráfico represente melhor f?

43. (a) Avalie a função $f(x) = x^2 - (2^x/1.000)$ para $x = 1,\ 0{,}8,\ 0{,}6,\ 0{,}4,\ 0{,}2,\ 0{,}1$ e $0{,}05$, e conjecture qual o valor de

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1.000} \right)$$

(b) Avalie $f(x)$ para $x = 0{,}04,\ 0{,}02,\ 0{,}01,\ 0{,}005,\ 0{,}003$ e $0{,}001$. Faça uma nova conjectura.

44. (a) Avalie $h(x) = (\text{tg } x - x)/x^3$ para $x = 1,\ 0{,}5,\ 0{,}1,\ 0{,}05,\ 0{,}01$ e $0{,}005$.
(b) Estime o valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x - x}{x^3}$
(c) Calcule $h(x)$ para valores sucessivamente menores de x até finalmente atingir um valor de 0 para $h(x)$. Você ainda está confiante que a conjectura em (b) está correta? Explique como finalmente obteve valores 0. (Na Seção 4.4 veremos um método para calcular esse limite.)
(d) Faça o gráfico da função h na janela retangular $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Dê *zoom* até o ponto onde o gráfico corta o eixo y para estimar o limite de $h(x)$ quando x tende a 0. Continue

dando *zoom* até observar distorções no gráfico de h. Compare com os resultados da parte (c).

45. Faça o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(\pi/x)$ do Exemplo 4 na janela retangular $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Então dê um *zoom* em direção à origem diversas vezes. Comente o comportamento dessa função.

46. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa da partícula em repouso e c, a velocidade da luz. O que acontece se $v \to c^-$?

47. Use um gráfico para estimar as equações de todas as assíntotas verticais da curva

$$y = \text{tg}(2 \,\text{sen}\, x) \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Encontre, então, as equações exatas dessas assíntotas.

48. (a) Use evidências numéricas e gráficas para fazer uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

(b) A que distância de 1 deverá estar x para garantir que a função da parte (a) esteja a uma distância de 0,5 de seu limite?

2.3 Cálculos Usando Propriedades dos Limites

Na Seção 2.2 empregamos gráficos e calculadoras para fazer conjecturas sobre o valor de limites, mas vimos que esses métodos nem sempre levam a respostas corretas. Nesta seção usaremos as *Propriedades dos Limites*, para calculá-los.

Propriedades dos Limites Supondo que c seja uma constante e os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

existam, então

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{se } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Essas cinco propriedades podem ser enunciadas da seguinte forma:

1. O limite de uma soma é a soma dos limites. — Propriedade da Soma
2. O limite de uma diferença é a diferença dos limites. — Propriedade da Diferença
3. O limite de uma constante multiplicando uma função é a constante multiplicando o limite desta função. — Propriedade da Multiplicação por Constante
4. O limite de um produto é o produto dos limites. — Propriedade do Produto
5. O limite de um quociente é o quociente dos limites (desde que o limite do denominador não seja zero). — Propriedade do Quociente

É fácil acreditar que essas propriedades são verdadeiras. Por exemplo, se $f(x)$ estiver próximo de L e $g(x)$ estiver próximo a M, é razoável concluir que $f(x) + g(x)$ está próximo a $L + M$. Isso nos dá uma base intuitiva para acreditar que a Propriedade 1 é verdadeira. Na Seção 2.4 daremos uma definição precisa de limite e a usaremos para demonstrar essa propriedade. As demonstrações das propriedades remanescentes encontram-se no Apêndice F.

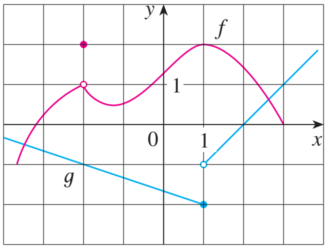


FIGURA 1

EXEMPLO 1 Use as Propriedades dos Limites e os gráficos de f e g na Figura 1 para calcular os seguintes limites, se eles existirem.

(a) $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ (c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

SOLUÇÃO

(a) Dos gráficos de f e g vemos que

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -2} g(x) = -1$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)] &= \lim_{x \to -2} f(x) + \lim_{x \to -2} [5g(x)] && \text{(pela Propriedade 1)} \\ &= \lim_{x \to -2} f(x) + 5 \lim_{x \to -2} g(x) && \text{(pela Propriedade 3)} \\ &= 1 + 5(-1) = -4\end{aligned}$$

(b) Vemos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Mas $\lim_{x \to 1} g(x)$ não existe, pois os limites à esquerda e à direita são diferentes:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = -1$$

Assim, não podemos usar a Propriedade 4 para o limite solicitado. Mas *podemos* usar a Propriedade 4 para os limites laterais:

$$\lim_{x \to 1^-} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-2) = -4 \qquad \lim_{x \to 1^+} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-1) = -2$$

Os limites à esquerda e à direita não são iguais, logo $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ não existe.

(c) Os gráficos mostram que

$$\lim_{x \to 2} f(x) \approx 1{,}4 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = 0$$

Como o limite do denominador é 0, não podemos usar a Propriedade 5. O limite dado não existe, pois o denominador tende a 0, enquanto o numerador tende a um número diferente de 0. ■

Usamos a Propriedade do Produto repetidamente com $g(x) = f(x)$ para obter a seguinte equação.

Propriedade da Potência

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ onde n é um inteiro positivo

Para aplicar essas seis propriedades, vamos precisar usar dois limites especiais:

7. $\lim_{x \to a} c = c$ **8.** $\lim_{x \to a} x = a$

Esses limites são óbvios do ponto de vista intuitivo (expresse-os em palavras ou esboce os gráficos de $y = c$ e $y = x$), mas as demonstrações baseadas na definição precisa serão pedidas nos exercícios da Seção 2.4.

Se pusermos agora $f(x) = x$ nas Propriedades 6 e 8, vamos obter outro limite especial útil.

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ onde n é um inteiro positivo

Um limite similar é válido para as raízes da forma a seguir. (Para as raízes quadradas, a demonstração está esboçada no Exercício 37 da Seção 2.4.)

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ onde n é um inteiro positivo
(Se n for par, supomos que $a > 0$.)

De forma mais geral, temos a seguinte Propriedade, que será demonstrada na Seção 2.5 como consequência da Propriedade 10.

Propriedade da Raiz

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ onde n é um inteiro positivo

$\left[\text{Se } n \text{ for par, supomos que } \lim_{x \to a} f(x) > 0.\right]$

EXEMPLO 2 Calcule os limites a seguir justificando cada passagem.

(a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ (b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUÇÃO

(a)
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(pelas Propriedades 2 e 1)} \\
&= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(pela Propriedade 3)} \\
&= 2(5^2) - 3(5) + 4 && \text{(pelas Propriedades 9, 8 e 7)} \\
&= 39.
\end{aligned}$$

(b) Começamos aplicando a Propriedade 5, mas seu uso só ficará completamente justificado no último passo, quando virmos que os limites do numerador e do denominador existem e o do denominador não é 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} &= \frac{\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x \to -2} (5 - 3x)} && \text{(pela Propriedade 5)} \\
&= \frac{\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} 5 - 3 \lim_{x \to -2} x} && \text{(pelas Propriedades 1, 2 e 3)} \\
&= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} && \text{(pelas Propriedades 9, 8 e 7)} \\
&= -\frac{1}{11}
\end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO: Se tornamos $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, então $f(5) = 39$. Em outras palavras, teríamos obtido a resposta correta no Exemplo 2(a) substituindo x por 5. Analogamente, a substituição direta fornece a resposta correta na parte (b). As funções no Exemplo 2 são polinomial e racional, respectivamente, e o uso similar das Propriedades dos Limites demonstra que a substituição direta sempre funciona para essas funções (veja os Exercícios 55 e 56). Enunciamos esse fato a seguir.

Propriedade de Substituição Direta Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

As funções que possuem essa propriedade de substituição direta, chamadas de *contínuas em a*, serão estudadas na Seção 2.5. Entretanto, nem todos os limites podem ser calculados pela substituição direta, como mostram os exemplos a seguir.

Newton e os Limites

Isaac Newton nasceu no Natal, em 1642, ano da morte de Galileu. Quando entrou na Universidade de Cambridge em 1661, Newton não sabia muito de matemática, mas aprendeu rapidamente lendo Euclides e Descartes e frequentando as aulas de Isaac Barrow. Cambridge foi fechada devido à praga em 1665 e 1666, e Newton voltou para casa para refletir sobre o que aprendeu. Esses dois anos foram incrivelmente produtivos, pois neste tempo ele fez quatro de suas principais descobertas: (1) suas representações de funções como somas de séries infinitas, incluindo o teorema binominal; (2) seu trabalho sobre o cálculo diferencial e integral; (3) suas leis de movimento e da gravitação universal; e (4) seus experimentos com prismas sobre a natureza da luz e da cor. Devido ao medo de controvérsias e críticas, Newton relutou em publicar suas descobertas, e não o fez até 1687, quando, a pedido do astrônomo Halley, publicou *Principia Mathematica*. Neste trabalho, o maior tratado científico já escrito, Newton tornou pública sua versão de cálculo e usou-a para pesquisar mecânica, dinâmica de fluidos e movimentos de ondas, e explicar o movimento de planetas e cometas.

O início do cálculo é encontrado nos cálculos de áreas e volumes pelos gregos antigos, como Eudoxo e Arquimedes. Embora aspectos da ideia de um limite estejam implícitos em seu "método de exaustão", Eudoxo e Arquimedes nunca formularam explicitamente o conceito de limite. Da mesma maneira, matemáticos como Cavalieri, Fermat e Barrow, precursores imediatos de Newton no desenvolvimento de cálculo, não usaram limites realmente. Foi Isaac Newton quem primeiro falou explicitamente sobre limites. Explicou que a ideia principal de limites é que as quantidades "se aproximam mais do que por qualquer diferença dada". Newton declarou que o limite era um conceito básico no cálculo, mas foi deixado para outros matemáticos posteriores, como Cauchy esclarecer suas ideias sobre limites.

EXEMPLO 3 Encontre $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

SOLUÇÃO Seja $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. Não podemos encontrar o limite substituindo $x = 1$ porque $f(1)$ não está definido. Nem podemos aplicar a Propriedade do Quociente porque o limite do denominador é 0. De fato, precisamos fazer inicialmente algumas operações algébricas. Fatoramos o numerador como uma diferença de quadrados:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

O numerador e o denominador têm um fator comum, que é $x - 1$. Ao tornarmos o limite quando x tende a 1, temos $x \neq 1$ e, assim, $x - 1 \neq 0$. Portanto, podemos cancelar o fator comum e calcular o limite, como segue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x + 1) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

O limite nesse exemplo já apareceu na Seção 2.1, quando tentávamos encontrar a tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$.

OBSERVAÇÃO: No Exemplo 3 conseguimos calcular o limite substituindo a função dada $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ por outra mais simples, $g(x) = x + 1$, que tem o mesmo limite. Isso é válido porque $f(x) = g(x)$, exceto quando $x = 1$ e, no cômputo de um limite, quando x tende a 1, não consideramos o que acontece quando x é exatamente *igual* a 1. Em geral, temos o seguinte fato útil.

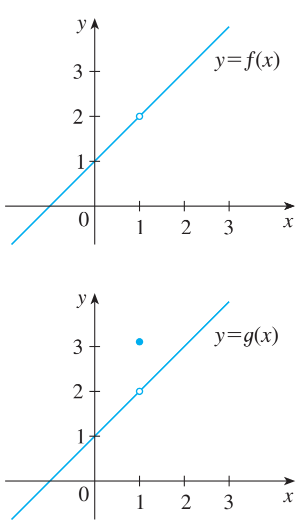


FIGURA 2
Gráficos das funções f (do Exemplo 3) e g (do Exemplo 4)

> Se $f(x) = g(x)$ quando $x \neq a$, então $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$, desde que o limite exista.

EXEMPLO 4 Encontre $\lim_{x \to 1} g(x)$ onde

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \neq 1 \\ \pi & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

SOLUÇÃO Aqui g está definida em $x = 1$ e $g(1) = \pi$, mas o valor de um limite, quando x tende a 1, não depende do valor da função em 1. Como $g(x) = x + 1$ para $x \neq 1$, temos

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

Observe que os valores das funções nos Exemplos 3 e 4 são idênticos, exceto quando $x = 1$ (veja a Figura 2), e assim elas têm o mesmo limite quando x tende a 1.

EXEMPLO 5 Calcule $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}$.

SOLUÇÃO Se definirmos

$$F(h) = \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$$

então, como no Exemplo 3, não podemos calcular $\lim_{h \to 0} F(h)$ fazendo $h = 0$, uma vez que $F(0)$ não está definida. Mas, se simplificarmos algebricamente $F(h)$, encontraremos que

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

(Lembre-se de que consideramos apenas $h \neq 0$ quando fazemos h tender a 0.) Assim,

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

EXEMPLO 6 Encontre $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUÇÃO Não podemos aplicar a Propriedade do Quociente de imediato, uma vez que o limite do denominador é 0. Aqui as operações algébricas preliminares consistem em racionalizar o numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0} (t^2 + 9)} + 3} \\
&= \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Esse cálculo confirma a conjectura que fizemos no Exemplo 2 da Seção 2.2.

Para alguns limites, é melhor calcular primeiro os limites laterais (à esquerda e à direita). O seguinte teorema é um lembrete do que descobrimos na Seção 2.2, isto é, que o limite bilateral existe se e somente se ambos os limites laterais (à esquerda e à direita) existem e são iguais.

1 Teorema $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se $\displaystyle\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Quando calculamos limites laterais, aproveitamos o fato de que as Propriedades dos Limites são válidas também para eles.

EXEMPLO 7 Mostre que $\displaystyle\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

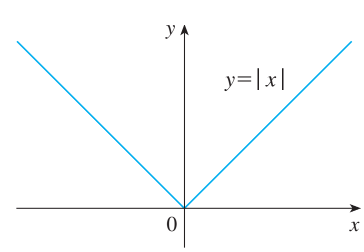


FIGURA 3

SOLUÇÃO Lembre-se de que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Uma vez que $|x| = x$ para $x > 0$, temos

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$, temos $|x| = -x$ e, assim,

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

O resultado do Exemplo 7 parece plausível pela Figura 3.

Portanto, pelo Teorema 1,

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

EXEMPLO 8 Demonstre que $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.

SOLUÇÃO

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

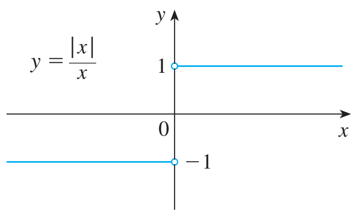


FIGURA 4

Uma vez que os limites laterais à esquerda e à direita são diferentes, segue do Teorema 1 que $\lim_{x \to 0} |x|/x$ não existe. O gráfico da função $f(x) = |x|/x$ é mostrado na Figura 4 e confirma os limites laterais que encontramos.

EXEMPLO 9 Se

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 4} & \text{se } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

determine se $\lim_{x \to 4} f(x)$ existe.

SOLUÇÃO Uma vez que $f(x) = \sqrt{x - 4}$ para $x > 4$, temos

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x - 4} = \sqrt{4 - 4} = 0$$

Mostra-se no Exemplo 3 da Seção 2.4 que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Uma vez que $f(x) = 8 - 2x$ para $x < 4$, temos

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

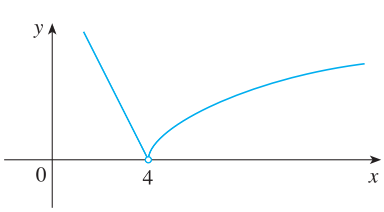


FIGURA 5

Os limites laterais (à esquerda e à direita) são iguais. Dessa forma, o limite existe e vale

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 0.$$

O gráfico de f é exibido na Figura 5.

EXEMPLO 10 A **função maior inteiro** é definida por $[\![x]\!]$ = o maior inteiro que é menor que ou igual a x. (Por exemplo, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4{,}8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![\sqrt{2}\,]\!] = 1$, $[\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$.) Mostre que $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ não existe.

Outras notações para $[\![x]\!]$ são $[x]$ e $\lfloor x \rfloor$. A função maior inteiro é as vezes chamada de *função piso*.

SOLUÇÃO O gráfico da função maior inteiro é exibido na Figura 6. Uma vez que $[\![x]\!] = 3$ para $3 \leqslant x < 4$, temos

$$\lim_{x \to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^+} 3 = 3$$

Uma vez que $[\![x]\!] = 2$ para $2 \leqslant x < 3$, temos

$$\lim_{x \to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2$$

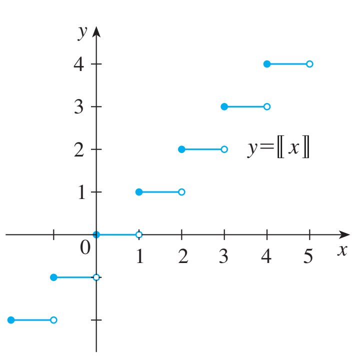


FIGURA 6
Função maior inteiro

Como esses limites laterais não são iguais, pelo Teorema 1, $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ não existe.

Os próximos dois teoremas dão duas propriedades adicionais dos limites. Suas demonstrações podem ser encontradas no Apêndice F.

2 **Teorema** Se $f(x) \leqslant g(x)$ quando x está próximo a a (exceto possivelmente em a) e os limites de f e g, ambos existem quando x tende a a, então

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$$

3 **Teorema do Confronto** Se $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ quando x está próximo a a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

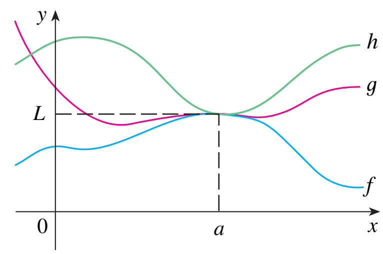


FIGURA 7

O Teorema do Confronto, algumas vezes chamado Teorema do Sanduíche ou do Imprensamento, está ilustrado na Figura 7. Ele diz que se $g(x)$ ficar imprensado entre $f(x)$ e $h(x)$ nas proximidades de a, e se f e h tiverem o mesmo limite L em a, então t será forçada a ter o mesmo limite L em a.

EXEMPLO 11 Mostre que $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUÇÃO Observe primeiro que **não** podemos usar

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

porque $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ não existe (veja o Exemplo 4 da Seção 2.2).

Ao invés disso, aplicamos o Teorema do Confronto de modo que precisamos encontrar uma função f menor que $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ e uma função h maior que g tal que $f(x)$ e $h(x)$ tendam a 0. Para fazer isso, usamos nosso conhecimento da função seno. Como o seno de qualquer número está entre -1 e 1, podemos escrever

$$\boxed{4} \qquad -1 \leqslant \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant 1$$

Qualquer inequação permanece verdadeira quando multiplicada por um número positivo. Sabemos que $x^2 \geqslant 0$ para todos os valores de x e então, multiplicando cada lado das inequações em $\boxed{4}$ por x^2, temos

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant x^2$$

como ilustrado na Figura 8. Sabemos que

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$

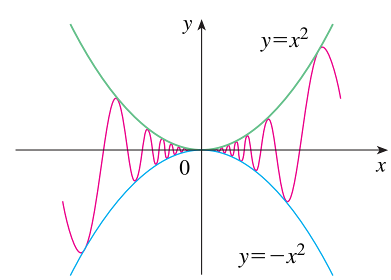


FIGURA 8
$y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

Tomando-se $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, e $h(x) = x^2$ no Teorema do Confronto, obtemos

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

2.3 Exercícios

1. Dado que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2} h(x) = 0$$

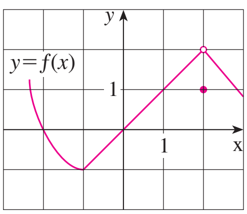
encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

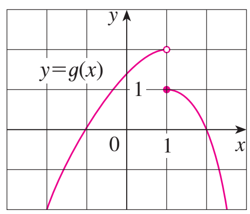
(a) $\lim_{x\to 2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 2} [g(x)]^3$

(c) $\lim_{x\to 2} \sqrt{f(x)}$ (d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Os gráficos de f e g são dados. Use-os para calcular cada limite. Caso não exista, explique por quê.





(a) $\lim_{x\to 2} [f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 1} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x\to 0} [f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2} [x^3 f(x)]$ (f) $\lim_{x\to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

3–9 Calcule o limite justificando cada passagem com as Propriedades dos Limites que forem usadas.

3. $\lim_{x\to -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$

4. $\lim_{x\to -1} (x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$

5. $\lim_{t\to -2} \dfrac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

6. $\lim_{u\to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x\to 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

8. $\lim_{t\to 2} \left(\dfrac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5}\right)^2$

9. $\lim_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

10. (a) O que há de errado com a equação a seguir?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) Em vista de (a), explique por que a equação

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to 2} (x + 3)$$

está correta.

11–32 Calcule o limite, se existir.

11. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

12. $\lim_{x\to -4} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

13. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

14. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{t\to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

17. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

18. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$

21. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

22. $\lim_{u\to 2} \dfrac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2}$

23. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{x}}{4 + x}$

24. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

25. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + t} - \sqrt{1 - t}}{t}$

26. $\lim_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t}\right)$

27. $\lim_{x\to 16} \dfrac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

28. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

29. $\lim_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \dfrac{1}{t}\right)$

30. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

31. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

32. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(x + h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$

33. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

traçando o gráfico da função $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$

(b) Faça uma tabela de valores de $f(x)$ para x próximo de 0 e estime qual será o valor do limite.

(c) Use as Propriedades dos Limites para mostrar que sua estimativa está correta.

34. (a) Use um gráfico de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$ com duas casas decimais.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com quatro casas decimais.

(c) Use as Propriedades dos Limites para encontrar o valor exato do limite.

35. Use o Teorema do Confronto para mostrar que $\lim_{x\to 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0$. Ilustre, fazendo os gráficos das funções $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ e $h(x) = x^2$ na mesma tela.

36. Empregue o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3 + x^2}\, \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0.$$

Ilustre, fazendo os gráficos das funções f, g e h (como no Teorema do Confronto) na mesma tela.

37. Se $4x - 9 \leqslant f(x) \leqslant x^2 - 4x + 7$ para $x \geqslant 0$, encontre $\lim_{x\to 4} f(x)$.

38. Se $2x \leqslant g(x) \leqslant x^4 - x^2 + 2$ para todo x, avalie $\lim_{x\to 1} g(x)$.

39. Demonstre que $\lim_{x\to 0} x^4 \cos \dfrac{2}{x} = 0$.

40. Demonstre que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0$.

41-46 Encontre, quando existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

41. $\lim_{x\to 3} (2x + |x - 3|)$

42. $\lim_{x\to -6} \dfrac{2x + 12}{|x + 6|}$

43. $\lim_{x\to 0{,}5^-} \dfrac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}$

44. $\lim_{x\to -2} \dfrac{2 - |x|}{2 + x}$

45. $\lim_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

46. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

---

47. A função sinal, denotada por sgn, é definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico dessa função.
(b) Encontre ou explique por que não existe cada um dos limites a seguir.
(i) $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x$ (ii) $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x$
(iii) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ (iv) $\lim_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x|$

48. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(a) Encontre $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.
(b) $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe?
(c) Esboce o gráfico de f.

49. Seja $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$.

(a) Encontre
(i) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ (ii) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$
(b) $\lim_{x\to 2} g(x)$ existe?
(c) Esboce o gráfico de g.

50. Seja

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \\ x - 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Determine as quantidades a seguir, se existirem.
(i) $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ (ii) $\lim_{x\to 1} g(x)$ (iii) $g(1)$
(iv) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ (v) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ (vi) $\lim_{x\to 2} g(x)$
(b) Esboce o gráfico de g.

51. (a) Se o símbolo $[\![\ ]\!]$ denota a função maior inteiro do Exemplo 10, calcule
(i) $\lim_{x\to -2^+} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x\to -2} [\![x]\!]$ (iii) $\lim_{x\to -2{,}4} [\![x]\!]$
(b) Se n for um inteiro, calcule
(i) $\lim_{x\to n^-} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x\to n^+} [\![x]\!]$
(c) Para quais valores de a o limite $\lim_{x\to a} [\![x]\!]$ existe?

52. Seja $f(x) = [\![\cos x]\!]$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.
(a) Esboce o gráfico de f.
(b) Calcule cada limite, se existir
(i) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to (\pi/2)^-} f(x)$
(iii) $\lim_{x\to (\pi/2)^+} f(x)$ (iv) $\lim_{x\to \pi/2} f(x)$
(c) Para quais valores de a o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe?

53. Se $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, mostre que existe $\lim_{x\to 2} f(x)$, mas que não é igual a $f(2)$.

54. Na Teoria da Relatividade, a fórmula da contração de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. Encontre $\lim_{v\to c^-} L$ e interprete o resultado. Por que é necessário o limite à esquerda?

55. Se p for um polinômio, mostre que $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.

56. Se r for uma função racional, use o Exercício 55 para mostrar que $\lim_{x\to a} r(x) = r(a)$ para todo número a no domínio de r.

57. Se $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, encontre $\lim_{x\to 1} f(x)$.

58. Se $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, encontre os seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

59. Se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

demonstre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

60. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x\to a} f(x)$ nem $\lim_{x\to a} g(x)$ existam.

61. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x\to a} f(x)$ nem $\lim_{x\to a} g(x)$ existam.

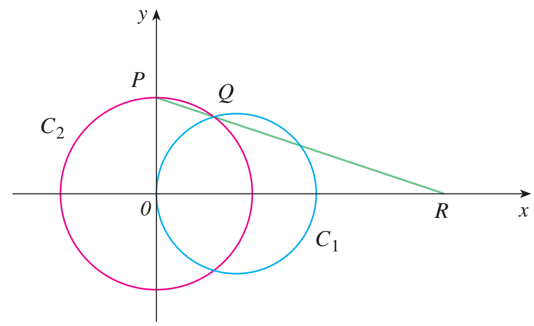
62. Calcule $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$

63. Existe um número a tal que

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Caso exista, encontre a e o valor do limite.

64. A figura mostra um círculo fixo C_1 de equação $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e um círculo C_2, a ser encolhido, com raio r e centro na origem. P é o ponto $(0, r)$, Q é o ponto de intersecção superior dos dois círculos, e R é o ponto de intersecção da reta PQ com o eixo x. O que acontecerá com R quando C_2 se contrair, isto é, quando $r \to 0^+$?



2.4 A Definição Precisa de um Limite

A definição intuitiva de limite dada na Seção 2.2 é inadequada para alguns propósitos, pois frases como "x está próximo de 2" e "$f(x)$ aproxima-se cada vez mais de L" são vagas. Para sermos capazes de demonstrar conclusivamente que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10.000} \right) = 0{,}0001 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

devemos tornar precisa a definição de limite.

Para chegar à definição precisa de limite, consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

É intuitivamente claro que quando x está próximo de 3, mas $x \neq 3$, então $f(x)$ está próximo de 5 e, sendo assim, $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.

Para obter informações mais detalhadas sobre como $f(x)$ varia quando x está próximo de 3, fazemos a seguinte pergunta:

Quão próximo de 3 deverá estar x para que $f(x)$ difira de 5 por menos que 0,1?

É costume usar a letra grega δ (delta) nessa situação.

A distância de x a 3 é $|x - 3|$, e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x) - 5|$, logo, nosso problema é achar um número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0{,}1 \qquad \text{se} \qquad |x - 3| < \delta \quad \text{mas } x \neq 3$$

Se $|x - 3| > 0$, então $x \neq 3$; portanto uma formulação equivalente de nosso problema é achar um número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0{,}1 \qquad \text{se} \qquad 0 < |x - 3| < \delta$$

Observe que, se $0 < |x - 3| < (0{,}1)/2 = 0{,}05$, então

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 2(0{,}05) = 0{,}1$$

isto é, $$|f(x) - 5| < 0{,}1 \qquad \text{se} \qquad 0 < |x - 3| < 0{,}05$$

Assim, uma resposta para o problema é dada por $\delta = 0{,}05$; isto é, se x estiver a uma distância de no máximo 0,05 de 3, então $f(x)$ estará a uma distância de no máximo 0,1 de 5.

Se mudarmos o número 0,1 em nosso problema para o número menor 0,01, então, usando o mesmo método, achamos que $f(x)$ diferirá de 5 por menos que 0,01, desde que x difira de 3 por menos que $(0{,}01)/2 = 0{,}005$:

$$|f(x) - 5| < 0{,}01 \qquad \text{se} \qquad 0 < |x - 3| < 0{,}005$$

De forma análoga,

$$|f(x) - 5| < 0{,}001 \qquad \text{se} \qquad 0 < |x - 3| < 0{,}0005$$

Os números 0,1, 0,01 e 0,001, anteriormente considerados, são *tolerâncias de erro* que podemos admitir. Para que o número 5 seja precisamente o limite de $f(x)$, quando x tende a 3, devemos não apenas ser capazes de tornar a diferença entre $f(x)$ e 5 menor que cada um desses três números; devemos ser capazes de torná-la menor que *qualquer* número positivo. E, por analogia ao procedimento adotado, nós podemos! Se chamarmos ε (a letra grega épsilon) a um número positivo arbitrário, então encontramos, como anteriormente, que

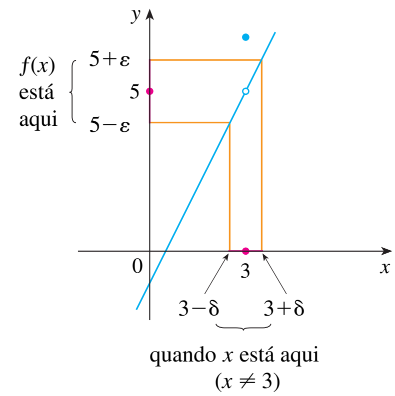


FIGURA 1

1 $$|f(x) - 5| < \varepsilon \qquad \text{se} \qquad 0 < |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Esta é uma maneira precisa de dizer que $f(x)$ está próximo de 5 quando x está próximo de 3, pois 1 diz que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem dentro de uma distância arbitrária ε de 5 tomando os valores de x dentro de uma distância $\varepsilon/2$ de 3 (mas $x \neq 3$).

Observe que 1 pode ser reescrita como:

$$\text{se} \quad 3 - \delta < x < 3 + \delta \quad (x \neq 3) \qquad \text{então} \qquad 5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$$

e isso está ilustrado na Figura 1. Tomando os valores de x ($\neq 3$) dentro do intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$, podemos obter os valores de $f(x)$ dentro do intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.

Usando 1 como modelo, temos uma definição precisa de limite.

2 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que o **limite de $f(x)$ quando x tende a a é L**, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Uma vez que $|x - a|$ é a distância de x a a e $|f(x) - L|$ é a distância de $f(x)$ a L, e como ε pode ser arbitrariamente pequeno, a definição de limite pode ser expressa em palavras da seguinte forma:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que a distância entre $f(x)$ e L fica arbitrariamente pequena tomando-se a distância de x a a suficientemente pequena (mas não igual a 0).

Alternativamente,

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que os valores de $f(x)$ podem ser tornados tão próximos de L quanto desejarmos, tornado-se x suficientemente próximo de a (mas não igual a a).

Podemos também reformular a Definição 2 em termos de intervalos, observando que a desigualdade $|x - a| < \delta$ é equivalente a $-\delta < x - a < \delta$, que pode ser escrita como $a - \delta < x < a + \delta$. Além disso, $0 < |x - a|$ é válida se, e somente se, $x - a \neq 0$, isto é, $x \neq a$. Analogamente, a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ é equivalente ao par de desigualdades $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Portanto, em termos de intervalos, a Definição 2 pode ser enunciada desta maneira:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ (não importa quão pequeno ε for) podemos achar $\delta > 0$ tal que, se x estiver no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ e $x \neq a$, então $f(x)$ estará no intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Podemos interpretar geometricamente essa definição, representando a função por um diagrama de flechas, como na Figura 2, onde f leva um subconjunto de $\mathbb{R}$ em outro subconjunto de $\mathbb{R}$.

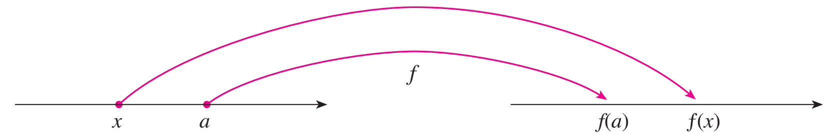


FIGURA 2

A definição de limite afirma que, se for dado qualquer intervalo pequeno $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ em torno de L, então podemos achar um intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ em torno de a tal que f leve todos os pontos de $(a - \delta, a + \delta)$ (exceto possivelmente a) para dentro do intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. (Veja a Figura 3.)

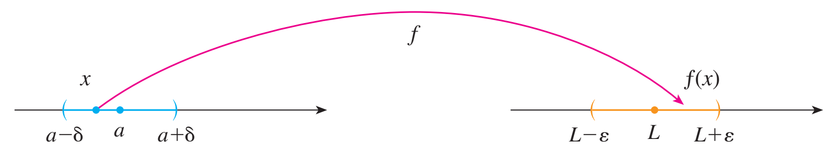


FIGURA 3

Outra interpretação geométrica de limite pode ser dada em termos do gráfico de uma função. Se for dado $\varepsilon > 0$, então trocamos as retas horizontais $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ e o gráfico de f (veja a Figura 4). Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então podemos achar um número $\delta > 0$ tal que, se limitarmos x ao intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ e deixarmos $x \neq a$, a curva $y = f(x)$ ficará entre as retas $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$ (veja a Figura 5). Você pode ver que, se um destes δ tiver sido encontrado, então qualquer δ menor também servirá.

É importante compreender que o processo ilustrado nas Figuras 4 e 5 deve funcionar para *todo* número positivo ε, independentemente de quão pequeno ele seja. A Figura 6 mostra que se um ε menor for escolhido, então será necessário um δ menor.

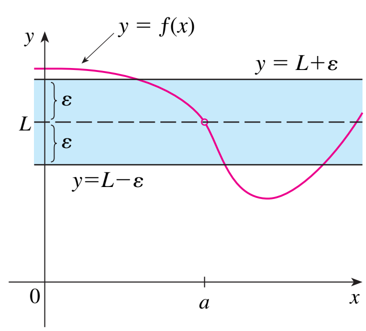


FIGURA 4

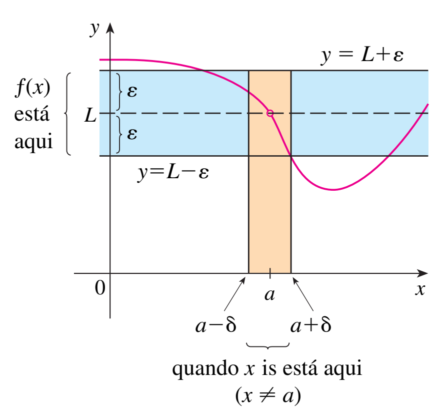


FIGURA 5

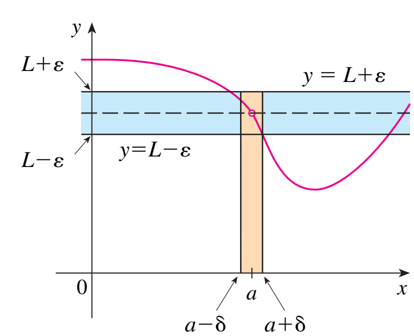


FIGURA 6

EXEMPLO 1 Use um gráfico para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \qquad |x - 1| < \delta \qquad \text{então} \qquad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}2$$

Em outras palavras, encontre um número δ que corresponda a $\varepsilon = 0{,}2$ na definição de um limite para a função $f(x) = x^3 - 5x + 6$ com $a = 1$ e $L = 2$.

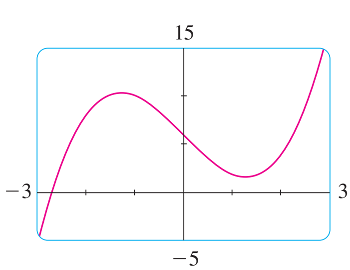


FIGURA 7

SOLUÇÃO Um gráfico de f é mostrado na Figura 7, e estamos interessados na região próxima do ponto $(1, 2)$. Observe que podemos reescrever a desigualdade

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}2$$

como

$$1{,}8 < x^3 - 5x + 6 < 2{,}2$$

Assim, precisamos determinar os valores de x para os quais a curva $y = x^3 - 5x + 6$ está entre as retas horizontais $y = 1{,}8$ e $y = 2{,}2$. Portanto, traçamos o gráfico das curvas $y = x^3 - 5x + 6$, $y = 1{,}8$ e $y = 2.2$ próximo do ponto $(1, 2)$ na Figura 8. Então usamos o cursor para estimar que a coordenada x do ponto de intersecção da reta $y = 2{,}2$ com a curva $y = x^3 - 5x + 6$ está em torno de 0,911. Analogamente, $y = x^3 - 5x + 6$ intercepta a reta $y = 1{,}8$ quando $x \approx 1{,}124$. Logo, arredondando-se, a favor da segurança, podemos afirmar que

$$\text{se} \qquad 0{,}92 < x < 1{,}12 \qquad \text{então} \qquad 1{,}8 < x^3 - 5x + 6 < 2{,}2$$

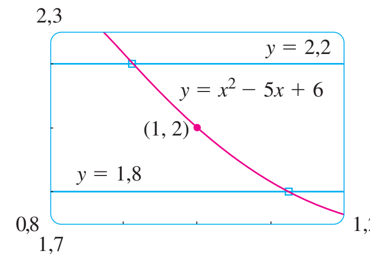


FIGURA 8

Esse intervalo (0,92, 1,12) não é simétrico em torno de $x = 1$. A distância de $x = 1$ até a extremidade esquerda é $1 - 0{,}92 = 0{,}08$, e a distância até a extremidade direita é 0,12. Podemos escolher δ como o menor desses números, isto é, $\delta = 0{,}08$. Então podemos reescrever nossas desigualdades em termos de distâncias da seguinte forma:

$$\text{se} \qquad |x - 1| < 0{,}08 \qquad \text{então} \qquad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}2$$

Isso somente nos diz que, mantendo x dentro de uma distância de 0,08 de 1, podemos manter $f(x)$ dentro de uma distância de 0,2 de 2.

Embora tenhamos escolhido $\delta = 0{,}08$, qualquer valor menor positivo de δ também funcionaria.

O procedimento gráfico do Exemplo 1 dá uma ilustração da definição para $\varepsilon = 0{,}2$, mas não *prova* que o limite é igual a 2. Uma demonstração deve fornecer um δ para *cada* ε.

Ao demonstrar afirmações sobre os limites, pode ser proveitoso imaginar a definição de limite como um desafio. Primeiro ela o desafia com um número ε. Você deve então ser capaz de obter um δ adequado. Você deve fazer isso para *todo* $\varepsilon > 0$, e não somente para um valor particular de ε.

TEC Em *Module 2.4/2.6* você pode explorar a definição precisa de um limite tanto geograficamente quanto numericamente.

Imagine uma competição entre duas pessoas, A e B, e suponha que você seja B. A pessoa A estipula que o número fixo L deverá ser aproximado por valores de $f(x)$ com um grau de precisão ε (digamos 0,01). O indivíduo B então responde encontrando um número δ tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Nesse caso, A pode tornar-se mais exigente e desafiar B com um valor menor de ε (digamos, 0,0001). Novamente, B deve responder encontrando um δ correspondente. Geralmente, quanto menor o valor de ε, menor deve ser o valor de δ correspondente. Se B sempre vencer, não importa quão pequeno A torna ε, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

EXEMPLO 2 Prove que $\displaystyle\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$.

SOLUÇÃO

1. *Uma análise preliminar do problema* (*conjecturando um valor para* δ). Seja ε um número positivo dado. Queremos encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - 3| < \delta \qquad \text{então} \qquad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Porém $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$. Portanto, queremos δ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - 3| < \delta \qquad \text{então} \qquad 4|x - 3| < \varepsilon$$

isto é,
$$\text{se} \qquad 0 < |x - 3| < \delta \qquad \text{então} \qquad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Isso sugere que deveríamos escolher $\delta = \varepsilon/4$.

2. *Demonstração* (*mostrando que este* δ *funciona*). Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \varepsilon/4$. Se $0 < |x - 3| < \delta$, então

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

Assim,

$$\text{se} \qquad 0 < |x - 3| < \delta \qquad \text{então} \qquad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

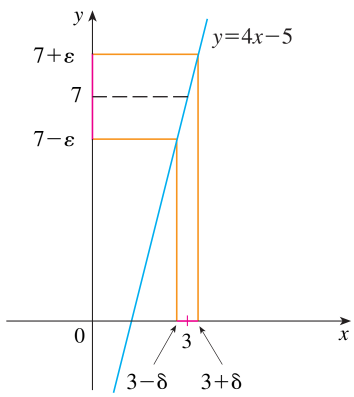


FIGURA 9

Portanto, pela definição de limite,

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

Este exemplo está ilustrado na Figura 9.

Observe que a solução do Exemplo 2 envolvia dois estágios – conjectura e demonstração. Fizemos uma análise preliminar que nos permitiu conjecturar um valor para δ. Então, em um segundo estágio, tivemos de voltar e demonstrar cuidadosamente e de forma lógica que fizemos uma conjectura correta. Esse procedimento é típico de boa parte da matemática. Por vezes é necessário primeiro fazer uma conjectura inteligente sobre a resposta de um problema para então demonstrar que a conjectura é correta.

As definições intuitivas de limites laterais dadas na Seção 2.2 podem ser reformuladas com mais precisão da seguinte forma.

3 Definição de Limite à Esquerda

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad a - \delta < x < a \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

4 Definição de Limite à Direita

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad a < x < a + \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Observe que a Definição 3 é igual à Definição 2, exceto que x está restrito à metade *esquerda* $(a - \delta, a)$ do intervalo $(a - \delta, a + \delta)$. Na Definição 4, x está restrito à metade *direita* $(a, a + \delta)$ do intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.

EXEMPLO 3 Use a Definição 4 para provar que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

SOLUÇÃO

1. *Conjecturando um valor para* δ. Seja ε um número positivo dado. Aqui, $a = 0$ e $L = 0$; logo, queremos achar um número δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < x < \delta \quad \text{então} \quad |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

isto é, $$\text{se} \quad 0 < x < \delta \quad \text{então} \quad \sqrt{x} < \varepsilon$$

ou, elevando ao quadrado ambos os lados da desigualdade $\sqrt{x} < \varepsilon$, obtemos

$$\text{se} \quad 0 < x < \delta \quad \text{então} \quad x < \varepsilon^2$$

Isso sugere que deveríamos escolher $\delta = \varepsilon^2$.

2. *Mostrando que esse δ funciona*. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon^2$. Se $0 < x < \delta$, então

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

logo $$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

Consequentemente, pela Definição 4, isso mostra que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Cauchy e os Limites

Após a invenção do cálculo, no século XVII, seguiu-se um período de livre desenvolvimento do assunto, no século XVIII. Matemáticos como os irmãos Bernoulli e Euler estavam ansiosos por explorar o poder do cálculo, e exploraram audaciosamente as consequências dessa encantadora e nova teoria matemática sem grandes preocupações com o fato de suas demonstrações estarem ou não completamente corretas.

O século XIX, ao contrário, foi a Época do Rigor na matemática. Houve um movimento de volta aos fundamentos do assunto – de fornecer definições cuidadosas e demonstrações rigorosas. Na linha de frente desse movimento estava o matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), que começou como engenheiro militar antes de se tornar professor de matemática em Paris. Cauchy pegou a ideia de limite de Newton, mantida viva no século XVIII pelo matemático francês Jean d´Alembert, e tornou-a mais precisa. Sua definição de limite tem a seguinte forma: "Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de forma que no final diferem dele por tão pouco quanto se queira, esse último é chamado limite de todos os outros". Mas quando Cauchy usava essa definição em exemplos e demonstrações, ele frequentemente empregava desigualdades delta-épsilon similares às desta seção. Uma prova de Cauchy típica se inicia com: "Designando por δ e ε dois números muito pequenos; . . ." Ele usou ε em virtude de uma correspondência entre épsilon e a palavra francesa *erreur*, e δ, pois delta corresponderia a *différence*. Mais tarde o matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897) enunciou a definição de limite exatamente como em nossa Definição 2.

EXEMPLO 4 Demonstre que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

SOLUÇÃO

1. *Conjecturando um valor para* δ. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Temos de achar um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |x^2 - 9| < \varepsilon$$

Para relacionar $|x^2 - 9|$ com $|x - 3|$ escrevemos $|x^2 - 9| = |(x + 3)(x - 3)|$. Assim sendo, queremos $\delta > 0$ cumprindo

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |x + 3||x - 3| < \varepsilon$$

Observe que, se pudermos achar uma constante positiva C tal que $|x + 3| < C$, então

$$|x + 3||x - 3| < C|x - 3|$$

e podemos fazer $C|x - 3| < \varepsilon$ ao usar $|x - 3| < \varepsilon/C = \delta$.

Podemos encontrar esse número C se restringirmos x a algum intervalo centrado em 3. De fato, uma vez que estamos interessados apenas em valores de x que estão próximos de 3, é razoável assumir que x está a uma distância menor do que 1 de 3; isto é, $|x - 3| < 1$. Então $2 < x < 4$, logo $5 < x + 3 < 7$. Assim, temos $|x + 3| < 7$; logo, $C = 7$ é uma escolha conveniente para a constante.

Mas agora há duas restrições sobre $|x - 3|$, que são

$$|x - 3| < 1 \quad \text{e} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{C} = \frac{\varepsilon}{7}$$

Para ter certeza de que ambas as desigualdades são satisfeitas, tomemos δ como o menor dos dois números 1 e $\varepsilon/7$. A notação para isso é $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$.

2. *Mostrando que esse* δ *funciona*. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$. Se $0 < |x - 3| < \delta$, então $|x - 3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow |x + 3| < 7$ (como na parte 1). Temos também $|x - 3| < \varepsilon/7$, logo

$$|x^2 - 9| = |x + 3||x - 3| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

Isso mostra que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

O Exemplo 4 mostra que nem sempre é fácil demonstrar que são verdadeiras as afirmações sobre limites usando a definição de ε, δ. De fato, se nos fosse dada uma função mais complexa, como $f(x) = (6x^2 - 8x + 9)/(2x^2 - 1)$, isso iria requerer uma grande dose de engenhosidade. Felizmente isso é desnecessário, pois as Propriedades dos Limites dadas na Seção 2.3 podem ser demonstradas usando a Definição 2, e então os limites das funções complexas podem ser encontrados rigorosamente a partir das Propriedades dos Limites, sem recorrer diretamente à definição.

Por exemplo, provamos a Propriedade de Soma: se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, ambos, existirem, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

As propriedades restantes estão demonstradas nos exercícios e no Apêndice F.

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE DA SOMA Seja $\varepsilon > 0$ dado. Devemos encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

Desigualdade Triangular:

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

(Veja o Apêndice A.)

Usando a desigualdade triangular podemos escrever

$$\boxed{5} \qquad \begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

Podemos tornar $|f(x) + g(x) - (L + M)|$ menor que ε tornando cada um dos termos $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$ menor que $\varepsilon/2$.

Uma vez que $\varepsilon/2 > 0$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L$, existe um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1 \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Analogamente, uma vez que $\lim_{x \to a} g(x) = M$, existe um número $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2 \qquad \text{então} \qquad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, o menor dos números δ_1 e δ_2. Observe que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

e assim
$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Portanto, de $\boxed{5}$,

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Resumindo,

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

Assim, pela definição de limite,

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

Limites Infinitos

Os limites infinitos podem também ser definidos de maneira precisa. A seguir apresenta-se uma versão precisa da Definição 4 da Seção 2.2.

$\boxed{6}$ **Definição** Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que, para todo número positivo M, há um número positivo δ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad f(x) > M$$

Isso diz que o valor de $f(x)$ pode ser arbitrariamente grande (maior que qualquer número dado M) tornando-se x suficientemente próximo de a (dentro de uma distância δ, em que δ depende de M, mas com $x \neq a$). Uma ilustração geométrica está na Figura 10.

Dada qualquer reta horizontal $y = M$, podemos achar um número $\delta > 0$ tal que, se restringirmos x a ficar no intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, mas $x \neq a$, então a curva $y = f(x)$ ficará acima da reta $y = M$. Você pode ver que se um M maior for escolhido, então um δ menor poderá ser necessário.

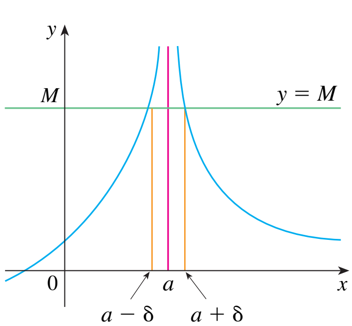


FIGURA 10

EXEMPLO 5 Use a Definição 6 para demonstrar que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

SOLUÇÃO Seja M um número positivo dado. Queremos encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x| < \delta \quad \text{então} \quad 1/x^2 > M$$

Mas $$\frac{1}{x^2} > M \iff x^2 < \frac{1}{M} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Assim, se escolhermos $\delta = 1/\sqrt{M}$ e se $0 < |x| < \delta = 1/\sqrt{M}$, então $1/x^2 > M$. Isto mostra que $1/x^2 \to \infty$ quando $x \to 0$.

De maneira semelhante, a seguir apresentamos uma versão precisa da Definição 5 da Seção 2.2, a qual é ilustrada pela Figura 11.

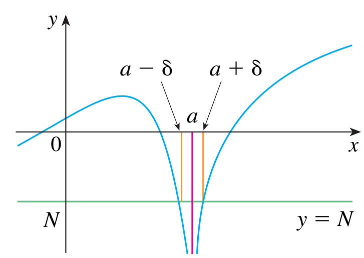


FIGURA 11

7 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

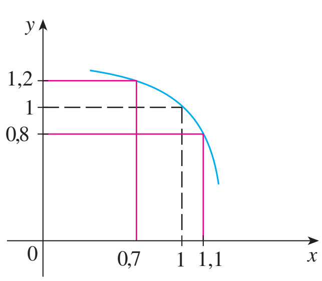
significa que para todo número negativo N há um número positivo δ tal que,

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad f(x) < N$$

2.4 Exercícios

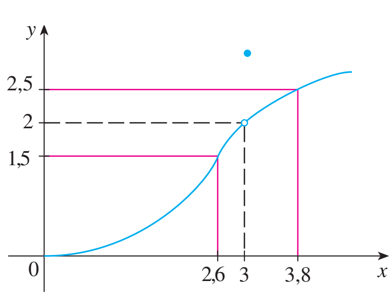
1. Use o gráfico dado de f para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - 1| < 0{,}2$$



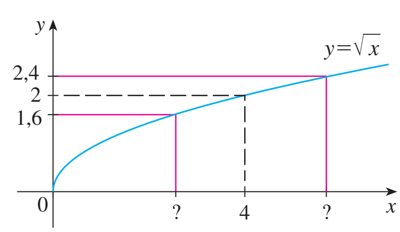
2. Use o gráfico dado de f para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - 2| < 0{,}5$$



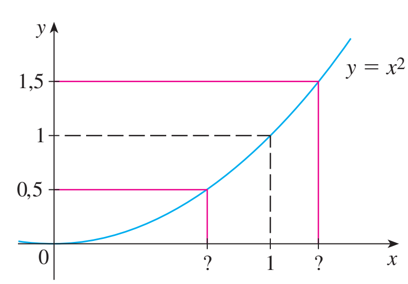
3. Use o gráfico dado de $f(x) = \sqrt{x}$ para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad |x - 4| < \delta \quad \text{então} \quad |\sqrt{x} - 2| < 0{,}4$$



4. Use o gráfico dado de $f(x) = x^2$ para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{então} \quad |x^2 - 1| < \tfrac{1}{2}$$



É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

5. Use um gráfico para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad \left| x - \frac{\pi}{4} \right| < \delta \quad \text{então} \quad |\text{tg}\, x - 1| < 0{,}2$$

6. Use um gráfico para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{então} \quad \left| \frac{2x}{x^2 + 4} - 0{,}4 \right| < 0{,}1$$

7. Para o limite

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 3x + 4) = 6$$

ilustre a Definição 2 encontrando os valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 0{,}2$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

8. Para o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2$$

ilustre a Definição 2 encontrando os valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

9. Dado que $\lim_{x \to \pi/2} \text{tg}^2 x = \infty$, ilustre a Definição 6 encontrando os valores de δ que correspondam a (a) $M = 1\,000$ e (b) $M = 10\,000$.

10. Use um gráfico para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad 5 < x < 5 + \delta \quad \text{então} \quad \frac{x^2}{\sqrt{x - 5}} > 100$$

11. Foi pedido a um torneiro mecânico que fabricasse um disco de metal circular com área de 1.000 cm².
(a) Qual o raio do disco produzido?
(b) Se for permitido ao torneiro uma tolerância do erro de ± 5 cm² na área do disco, quão próximo do raio ideal da parte (a) o torneiro precisa controlar o raio?
(c) Em termos da definição ε, δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, o que é x? O que é $f(x)$? O que é a? O que é L? Qual valor de ε é dado? Qual o valor correspondente de δ?

12. Uma fornalha para a produção de cristais é usada em uma pesquisa para determinar a melhor maneira de manufaturar os cristais utilizados em componentes eletrônicos para os veículos espaciais. Para a produção perfeita do cristal, a temperatura deve ser controlada precisamente, ajustando-se a potência de entrada. Suponha que a relação seja dada por

$$T(w) = 0{,}1w^2 + 2{,}155w + 20$$

onde T é a temperatura em graus Celsius e w é a potência de entrada em watts.
(a) Qual a potência necessária para manter a temperatura em 200 ºC?
(b) Se for permitida uma variação de ± 1 °C a partir dos 200 °C, qual será o intervalo de potência permitido para a entrada?
(c) Em termos da definição ε, δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, o que é x? O que é $f(x)$? O que é a? O que é L? Qual valor de ε é dado? Qual o valor correspondente de δ?

13. (a) Encontre um número δ tal que se $|x - 2| < \delta$, então $|4x - 8| < \varepsilon$, onde $\varepsilon = 0{,}1$.
(b) Repita a parte (a) com $\varepsilon = 0{,}01$.

14. Dado que $\lim_{x \to 2}(5x - 7) = 3$, ilustre a Definição 2 encontrando valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}05$ e $\varepsilon = 0{,}01$.

15–18 Demonstre cada afirmação usando a definição ε, δ de um limite e ilustre com um diagrama como o da Figura 9.

15. $\lim_{x \to 1} (2x + 3) = 5$

16. $\lim_{x \to -2} \left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 2$

17. $\lim_{x \to -3} (1 - 4x) = 13$

18. $\lim_{x \to -2} (3x + 5) = -1$

19–32 Demonstre cada afirmação usando a definição ε, δ de limite.

19. $\lim_{x \to 1} \frac{2 + 4x}{3} = 2$

20. $\lim_{x \to 10} \left(3 - \frac{4}{5}x\right) = -5$

21. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$

22. $\lim_{x \to -1{,}5} \frac{9 - 4x^2}{3 + 2x} = 6$

23. $\lim_{x \to a} x = a$

24. $\lim_{x \to a} c = c$

25. $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

26. $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$

27. $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

28. $\lim_{x \to -6^+} \sqrt[8]{6 + x} = 0$

29. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4x + 5) = 1$

30. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 7) = 1$

31. $\lim_{x \to -2} (x^2 - 1) = 3$

32. $\lim_{x \to 2} x^3 = 8$

33. Verifique que outra escolha possível de δ para mostrar que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ no Exemplo 4 é $\delta = \min\{2, \varepsilon/8\}$.

34. Verifique, usando argumentos geométricos, que a maior escolha possível para o δ para que se possa mostrar que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ é $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$.

SCA **35.** (a) Para o limite $\lim_{x \to 1} (x^3 + x + 1) = 3$, use um gráfico para encontrar o valor de δ que corresponde a $\varepsilon = 0{,}4$.
(b) Usando um sistema de computação algébrica para resolver a equação cúbica $x^3 + x + 1 = 3 + \varepsilon$, determine o maior valor possível para δ que funcione para qualquer $\varepsilon > 0$ dado.
(c) Tome $\varepsilon = 0{,}4$ na sua resposta da parte (b) e compare com a sua resposta da parte (a).

36. Demonstre que $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

37. Demonstre que $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ se $a > 0$.

$$\left[\textit{Dica: } \text{Use } \left| \sqrt{x} - \sqrt{a} \right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}. \right]$$

38. Se H é a função de Heaviside definida no Exemplo 6 na Seção 2.2, prove, usando a Definição 2, que $\lim_{t \to 0} H(t)$ não existe. [*Dica:* Use uma prova indireta como segue. Suponha que o limite seja L. Tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$ na definição de limite e tente chegar a uma contradição.]

39. Se a função f for definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

demonstre que $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe.

40. Comparando as Definições 2, 3 e 4, demonstre o Teorema 1 da Seção 2.3.

41. Quão próximo de -3 devemos deixar x para que

$$\frac{1}{(x + 3)^4} > 10\,000?$$

42. Demonstre, usando a Definição 6, que $\lim_{x \to -3} \frac{1}{(x + 3)^4} = \infty$.

43. Demonstre que $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

44. Suponha que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é um número real. Demonstre cada afirmação

(a) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \infty$

(b) $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \infty$ se $c > 0$

(c) $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = -\infty$ se $c < 0$

2.5 Continuidade

Percebemos na Seção 2.3 que o limite de uma função quando x tende a a pode muitas vezes ser encontrado simplesmente calculando o valor da função em a. Funções com essa propriedade são chamadas de *contínuas em a*. Veremos que a definição matemática de continuidade tem correspondência bem próxima ao significado da palavra *continuidade* no uso comum. (Um processo contínuo é aquele que ocorre gradualmente, sem interrupções ou mudanças abruptas.)

1 Definição Uma função f é **contínua em um número a** se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Como ilustrado na Figura 1, se f é contínua, então os pontos $(x, f(x))$ sobre o gráfico de f tendem ao ponto $(a, f(a))$ do gráfico. Então, não há quebras na curva.

Observe que a Definição 1 implicitamente requer três coisas para a continuidade de f em a:

1. $f(a)$ está definida (isto é, a está no domínio de f)

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

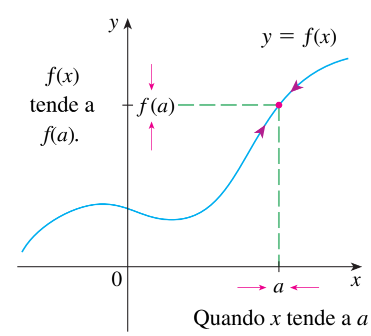


FIGURA 1

A definição diz que f é contínua em a se $f(x)$ tende a $f(a)$ quando x tende a a. Assim, uma função contínua f tem a propriedade de que uma pequena mudança em x produz somente uma pequena alteração em $f(x)$. De fato, a alteração em $f(x)$ pode ser mantida tão pequena quanto desejarmos, mantendo-se a variação em x suficientemente pequena.

Se f está definida próximo de a (em outras palavras, f está definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a), dizemos que f é **descontínua em a** (ou que f tem uma **descontinuidade** em a) se f não é contínua em a.

Os fenômenos físicos são geralmente contínuos. Por exemplo, o deslocamento ou a velocidade de um veículo variam continuamente com o tempo, como a altura das pessoas. Mas descontinuidades ocorrem em situações tais como a corrente elétrica. [Veja o Exemplo 6 da Seção 2.2, onde a função de Heaviside é descontínua em 0, pois $\lim_{t \to 0} H(t)$ não existe.]

Geometricamente, você pode pensar em uma função contínua em todo número de um intervalo como uma função cujo gráfico não se quebra. O gráfico pode ser desenhado sem remover sua caneta do papel.

EXEMPLO 1 A Figura 2 mostra o gráfico da função f. Em quais números f é descontínua? Por quê?

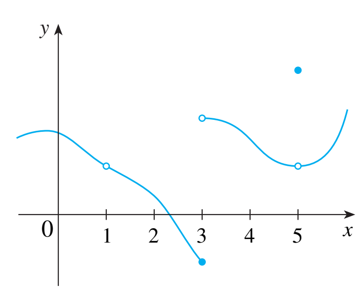


FIGURA 2

SOLUÇÃO Parece haver uma descontinuidade quando $a = 1$, pois aí o gráfico tem um buraco. A razão oficial para f ser descontínua em 1 é que $f(1)$ não está definida.

O gráfico também tem uma quebra em $a = 3$, mas a razão para a descontinuidade é diferente. Aqui, $f(3)$ está definida, mas $\lim_{x \to 3} f(x)$ não existe (pois o limites esquerdo e direito são diferentes). Logo f é descontínua em 3.

E $a = 5$? Aqui, $f(5)$ está definida e $\lim_{x \to 5} f(x)$ existe (pois o limite esquerdo e o direito são iguais). Mas

$$\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$$

Logo, f é descontínua em 5.

Agora vamos ver como detectar descontinuidades quando uma função estiver definida por uma fórmula.

EXEMPLO 2 Onde cada uma das seguintes funções é descontínua?

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUÇÃO

(a) Observe que $f(2)$ não está definida; logo, f é descontínua em 2. Mais à frente veremos por que f é contínua em todos os demais números.

(b) Aqui $f(0) = 1$ está definida, mas

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

não existe. (Veja o Exemplo 8 na Seção 2.2.) Então f é descontínua em 0.

(c) Aqui $f(2) = 1$ está definida e

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 1) = 3$$

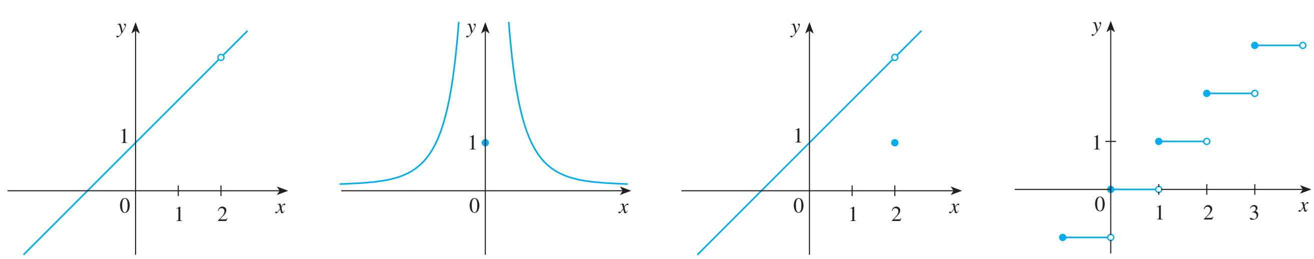
existe. Mas

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

logo, f não é contínua em 2.

(d) A função maior inteiro $f(x) = [\![x]\!]$ tem descontinuidades em todos os inteiros, pois $\lim_{x \to n} [\![x]\!]$ não existe se n for um inteiro. (Veja o Exemplo 10 e o Exercício 51 da Seção 2.3.)

A Figura 3 mostra os gráficos das funções no Exemplo 2. Em cada caso o gráfico não pode ser feito sem levantar a caneta do papel, pois um buraco, uma quebra ou salto ocorrem no gráfico. As descontinuidades ilustradas nas partes (a) e (c) são chamadas **removíveis**, pois podemos removê-las redefinindo f somente no número 2. [A função $g(x) = x + 1$ é contínua.] A descontinuidade da parte (b) é denominada **descontinuidade infinita**. As descontinuidades da parte (d) são ditas **descontinuidades em saltos**, porque a função "salta" de um valor para outro.



(a) $f(x)= \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b) $f(x)= \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x)= \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = [\![x]\!]$

FIGURA 3
Gráficos das funções do Exemplo 2

2 Definição Uma função f é **contínua à direita em um número a** se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

e f é **contínua à esquerda em a** se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

EXEMPLO 3 Em cada inteiro n, a função $f(x) = [\![x]\!]$ [veja a Figura 3(d)] é contínua à direita, mas descontínua à esquerda, pois

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n = f(n)$$

mas

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq f(n)$$

3 Definição Uma função f é **contínua em um intervalo** se for contínua em todos os números do intervalo. (Se f for definida somente de um lado da extremidade do intervalo, entendemos *continuidade* na extremidade como *continuidade à direita* ou *à esquerda*.)

EXEMPLO 4 Mostre que a função $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ é contínua no intervalo $[-1, 1]$.

SOLUÇÃO Se $-1 < a < 1$, então, usando as Propriedades dos Limites, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \\
&= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} && \text{(pelas Propriedades 2 e 7)} \\
&= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a} (1 - x^2)} && \text{(pela Propriedade 11)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - a^2} && \text{(pelas Propriedades 2, 7 e 9)} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

Assim, pela Definição 1, f é contínua em a se $-1 < a < 1$. Cálculos análogos mostram que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

logo, f é contínua à direita em -1 e contínua à esquerda em 1. Consequentemente, de acordo com a Definição 3, f é contínua em $[-1, 1]$.

O gráfico de f está esboçado na Figura 4. É a metade inferior do círculo

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

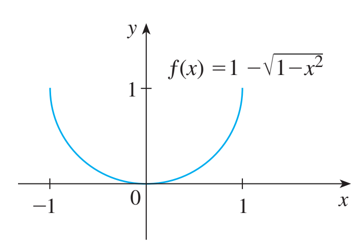


FIGURA 4

Ao invés de sempre usar as Definições 1, 2 e 3 para verificar a continuidade de uma função como no Exemplo 4, muitas vezes é conveniente usar o próximo teorema, que mostra como construir as funções contínuas complicadas a partir de simples.

4 Teorema Se f e g forem contínuas em a e se c for uma constante, então as seguintes funções também são contínuas em a:

1. $f + g$ **2.** $f - g$ **3.** cf

4. fg **5.** $\dfrac{f}{g}$ se $g(a) \neq 0$

DEMONSTRAÇÃO Cada uma das cinco partes desse teorema segue da correspondente Propriedade dos Limites da Seção 2.3. Por exemplo, vejamos a demonstração da parte 1. Uma vez que f e g são contínuas em a, temos

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

Logo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} (f+g)(x) &= \lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] \\ &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \qquad \text{(pela Propriedade 1)} \\ &= f(a) + g(a) \\ &= (f+g)(a) \end{aligned}$$

Isso mostra que $f + g$ é contínua em a.

Segue do Teorema 4 e da Definição 3 que se f e g forem contínuas em um intervalo, então $f + g$, $f - g$, cf, fg, e (se g nunca for 0) f/g também o são. O seguinte teorema foi enunciado na Seção 2.3 como a Propriedade da Substituição Direta.

5 Teorema

(a) Qualquer polinômio é contínuo em toda a parte; ou seja, é contínuo em $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

(b) Qualquer função racional é contínua sempre que estiver definida; ou seja, é contínua em seu domínio.

DEMONSTRAÇÃO

(a) Um polinômio é uma função da forma

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

onde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ são constantes. Sabemos que

$$\lim_{x\to a} c_0 = c_0 \qquad \text{(pela Propriedade 7)}$$

e

$$\lim_{x\to a} x^m = a^m \qquad m = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(pela Propriedade 9)}$$

Essa equação é precisamente a informação de que a função $f(x) = x^m$ é uma função contínua. Assim, pela parte 3 do Teorema 4, a função $g(x) = cx^m$ é contínua. Uma vez que P é a soma das funções desta forma e uma função constante, segue da parte 1 do Teorema 4 que P é contínua.

(b) Uma função racional é uma função da forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios. O domínio de f é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Sabemos, da parte (a), que P e Q são contínuas em toda a parte. Assim, pela parte 5 do Teorema 4, f é contínua em todo número de D.

Como uma ilustração do Teorema 5, observe que o volume de uma esfera varia continuamente com seu raio, pois a fórmula $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ mostra que V é uma função polinomial de r. Da mesma forma, se uma bola for atirada verticalmente no ar com uma velocidade de 20 m/s, então a altura da bola em metros, t segundos mais tarde, é dada pela fórmula $h = 20t - 4{,}9t^2$. Novamente, essa é uma função polinomial, portanto a altura é uma função contínua do tempo decorrido.

O conhecimento de quais funções são contínuas nos permite calcular muito rapidamente alguns limites, como no exemplo a seguir. Compare-o com o Exemplo 2(b) da Seção 2.3.

EXEMPLO 5 Encontre $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

SOLUÇÃO A função

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

é racional; assim, pelo Teorema 5, é contínua em seu domínio, que é $\{x \mid x \neq \frac{5}{3}\}$. Logo

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$

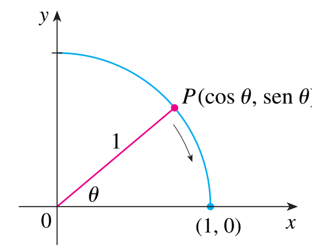


FIGURA 5

Resulta que as funções familiares são contínuas em todos os números de seus domínios. Por exemplo, a Propriedade dos Limites 10 é exatamente a afirmação que as funções raízes são contínuas.

Pela forma dos gráficos das funções seno e cosseno (Figura 18 da Seção 1.2) iríamos certamente conjecturar que elas são contínuas. Sabemos das definições de sen θ e cos θ que as coordenadas do ponto P na Figura 5 são (cos θ, sen θ). À medida que $\theta \to 0$, vemos que P tende ao ponto $(1, 0)$ e, portanto, cos $\theta \to 1$ e sen $\theta \to 0$. Assim,

Outra forma de estabelecer os limites em $\boxed{6}$ é fazer uso do Teorema do Confronto com a desigualdade sen $\theta < \theta$ (para $\theta > 0$), que está demonstrada na Seção 3.3.

$\boxed{6}$ $$\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1 \qquad \lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen}\theta = 0$$

Uma vez que $\cos 0 = 1$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$, as equações em $\boxed{6}$ asseguram que as funções seno e cosseno são contínuas em 0. As fórmulas de adição para seno e cosseno podem, então, ser usadas para deduzir que essas funções são contínuas em toda a parte (veja os Exercícios 60 e 61).

Segue da parte 5 do Teorema 4 que

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

é contínua, exceto onde $\cos x = 0$. Isso acontece quando x é um múltiplo inteiro ímpar de $\pi/2$, portanto $y = \operatorname{tg} x$ tem descontinuidades infinitas quando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2$, e assim por diante (veja a Figura 6).

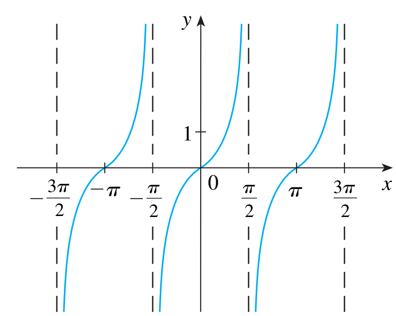


FIGURA 6 $y = \operatorname{tg} x$

A função inversa de qualquer função contínua é também contínua. (Esse fato é provado no Apêndice F, mas nossa intuição geométrica faz com que seja plausível: o gráfico de f^{-1} é obtido refletindo o gráfico de f sobre a reta $y = x$. Então, se o gráfico de f não possui quebras, o gráfico de f^{-1} tampouco possui.) Assim, as funções trigonométricas inversas são contínuas.

As funções trigonométricas inversas foram revistas na Seção 1.6.

Na Seção 1.5 definimos a função exponencial $y = a^x$ de forma a preencher os buracos no gráfico de $y = a^x$, onde x é racional. Em outras palavras, a própria definição de $y = a^x$ torna-a uma função contínua em $\mathbb{R}$. Portanto, sua função inversa $y = \log_a x$ é contínua em $(0, \infty)$.

$\boxed{7}$ **Teorema** Os seguintes tipos de funções são contínuas para todo o número de seus domínios:

polinômios	funções racionais	funções raízes
funções trigonométricas	funções trigonométricas inversas	
funções exponenciais	funções logarítmicas	

EXEMPLO 6 Onde a função $f(x) = \dfrac{\ln x + \operatorname{tg}^{-1} x}{x^2 - 1}$ é contínua?

SOLUÇÃO Sabemos do Teorema 7 que a função $y = \ln x$ é contínua para $x > 0$ e que $y = \operatorname{tg}^{-1} x$ é contínua em $\mathbb{R}$. Assim, pela parte 1 do Teorema 4, $y = \ln x + \operatorname{tg}^{-1} x$ é contínua em $(0, \infty)$. O denominador $y = x^2 - 1$ é um polinômio, portanto é contínuo em toda parte. Assim, pela parte 5 do Teorema 4, f é contínua em todos os números positivos x, exceto onde $x^2 - 1 = 0$. Logo, f é contínua nos intervalos abertos $(0, 1)$ e $(1, \infty)$.

EXEMPLO 7 Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$.

SOLUÇÃO O Teorema 7 nos diz que a função $y = \operatorname{sen} x$ é contínua. A função no denominador, $y = 2 + \cos x$, é a soma de duas funções contínuas e, portanto, é contínua. Observe que esta função nunca é 0, pois $\cos x \geqslant -1$ para todo x e assim $2 + \cos x > 0$ em toda parte. Logo, a razão

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$$

é sempre contínua. Portanto, pela definição de função contínua,

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} = \lim_{x\to\pi} f(x) = f(\pi) = \frac{\operatorname{sen} \pi}{2 + \cos \pi} = \frac{0}{2 - 1} = 0$$

Outra forma de combinar as funções contínuas f e g para obter novas funções contínuas é formar a função composta $f \circ g$. Esse fato é uma consequência do seguinte teorema.

Esse teorema afirma que um símbolo de limite pode ser movido através um símbolo de função se a função for contínua e se o limite existir. Em outras palavras, a ordem desses dois símbolos pode ser trocada.

8 Teorema Seja f contínua em b e $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = b$, então $\displaystyle\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f(b)$. Em outras palavras,

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big).$$

Intuitivamente, o Teorema 8 é razoável, pois se x está próximo de a, então $g(x)$ está próximo de b, e como f é contínua em b, se $g(x)$ está próxima de b, então $f\big(g(x)\big)$ está próxima de $f(b)$. Uma prova do Teorema 8 é dada no Apêndice F.

EXEMPLO 8 Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right)$.

SOLUÇÃO Uma vez que arcsen é uma função contínua, podemos aplicar o Teorema 8:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) &= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x\to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x\to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x\to 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\right) \\
&= \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Vamos aplicar agora o Teorema 8 no caso especial em que $f(x) = \sqrt[n]{x}$, onde n é um inteiro positivo. Então

$$f\big(g(x)\big) = \sqrt[n]{g(x)}$$

e
$$f\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big) = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Se colocarmos essas expressões no Teorema 8, obteremos

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}$$

e, assim, a Propriedade dos Limites 11 foi demonstrada. (Pressupomos que a raiz exista.)

9 Teorema Se g for contínua em a e f for contínua em $g(a)$, então a função composta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em a.

Esse teorema é, com frequência, expresso informalmente dizendo que "uma função contínua de uma função contínua é uma função contínua".

DEMONSTRAÇÃO Uma vez que g é contínua em a, temos

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Uma vez que f é contínua em $b = g(a)$, podemos aplicar o Teorema 8 para obter

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

que é precisamente a afirmação de que a função $h(x) = f(g(x))$ é contínua em a; isto é, $f \circ g$ é contínua em a.

EXEMPLO 9 Onde as seguintes funções são contínuas?

(a) $h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ (b) $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

SOLUÇÃO

(a) Temos $h(x) = f(g(x))$, onde

$$g(x) = x^2 \qquad \text{e} \qquad f(x) = \operatorname{sen} x$$

Agora, g é contínua em $\mathbb{R}$, pois é um polinômio, e f também é contínua em toda parte. Logo, $h = f \circ g$ é contínua em $\mathbb{R}$ pelo Teorema 9.

(b) Sabemos do Teorema 7 que $f(x) = \ln x$ é contínua e $g(x) = 1 + \cos x$ é contínua (pois ambas, $y = 1$ e $y = \cos x$, são contínuas). Portanto, pelo Teorema 9, $F(x) = f(g(x))$ é contínua sempre que estiver definida. Agora, $\ln(1 + \cos x)$ está definida quando $1 + \cos x > 0$. Dessa forma, não está definida quando $\cos x = -1$, e isso acontece quando $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ Logo, F tem descontinuidades quando x é um múltiplo ímpar de π e é contínua nos intervalos entre esses valores (veja a Figura 7).

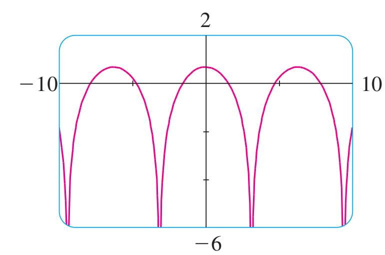


FIGURA 7
$y = \ln(1 + \cos x)$

Uma propriedade importante das funções contínuas está expressa pelo teorema a seguir, cuja demonstração é encontrada em textos mais avançados de cálculo.

10 Teorema do Valor Intermediário Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, em que $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número c em (a, b) tal que $f(c) = N$.

O Teorema do Valor Intermediário afirma que uma função contínua assume todos os valores intermediários entre os valores da função $f(a)$ e $f(b)$. Isso está ilustrado na Figura 8. Observe que o valor N pode ser assumido uma vez [como na parte (a)] ou mais [como na parte (b)].

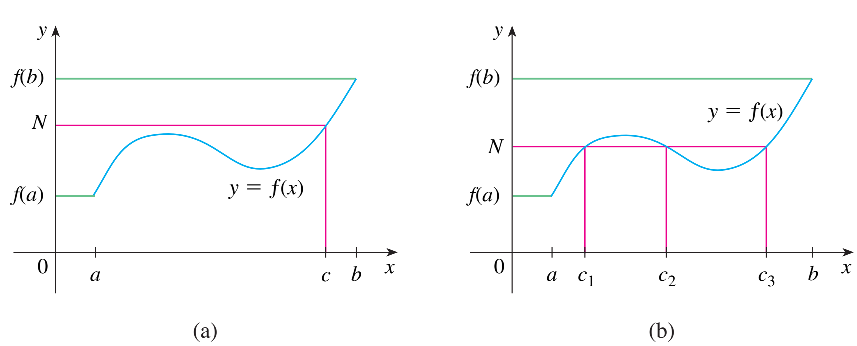


FIGURA 8

Se pensarmos em uma função contínua como aquela cujo gráfico não tem nem saltos nem quebras, então é fácil acreditar que o Teorema do Valor Intermediário é verdadeiro. Em termos geométricos, ele afirma que, se for dada uma reta horizontal qualquer $y = N$ entre $y = f(a)$ e $y = f(b)$, como na Figura 9, então o gráfico de f não poderá saltar a reta. Ele precisará interceptar $y = N$ em algum ponto.

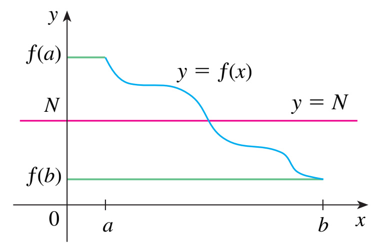


FIGURA 9

É importante que a função f do Teorema 10 seja contínua. O Teorema do Valor Intermediário não é verdadeiro em geral para as funções descontínuas (veja o Exercício 48).

Uma das aplicações do Teorema do Valor Intermediário é a localização das raízes de equações, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 10 Mostre que existe uma raiz da equação

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 e 2.

SOLUÇÃO Seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Estamos procurando por uma solução da equação dada, isto é, um número c entre 1 e 2 tal que $f(c) = 0$. Portanto, tomamos $a = 1$, $b = 2$ e $N = 0$ no Teorema 10. Temos

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

e

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Logo, $f(1) < 0 < f(2)$, isto é, $N = 0$ é um número entre $f(1)$ e $f(2)$. Como f é contínua, por ser um polinômio, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existe um número c entre 1 e 2 tal que $f(c) = 0$. Em outras palavras, a equação $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tem pelo menos uma raiz c no intervalo (1, 2).

De fato, podemos localizar mais precisamente a raiz usando novamente o Teorema do Valor Intermediário. Uma vez que

$$f(1{,}2) = -0{,}128 < 0 \qquad \text{e} \qquad f(1{,}3) = 0{,}548 > 0$$

uma raiz deve estar entre 1,2 e 1,3. Uma calculadora fornece, por meio de tentativa e erro,

$$f(1{,}22) = -0{,}007008 < 0 \qquad \text{e} \qquad f(1{,}23) = 0{,}056068 > 0$$

assim, uma raiz está no intervalo (1,22; 1,23).

Podemos usar uma calculadora gráfica ou computador para ilustrar o uso do Teorema do Valor Intermediário no Exemplo 10. A Figura 10 mostra o gráfico de f em uma janela retangular $[-1, 3]$ por $[-3, 3]$, e você pode ver o gráfico cruzando o eixo x entre 1 e 2. A Figura 11 mostra o resultado ao se aplicar o *zoom*, obtendo a janela retangular [1,2; 1,3] por [−0,2; 0,2].

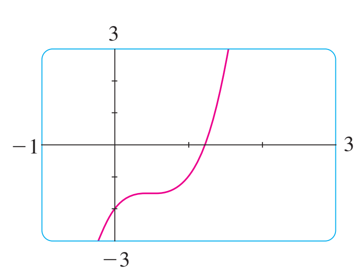


FIGURA 10

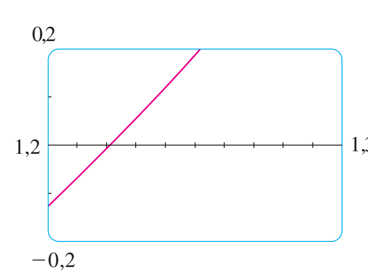


FIGURA 11

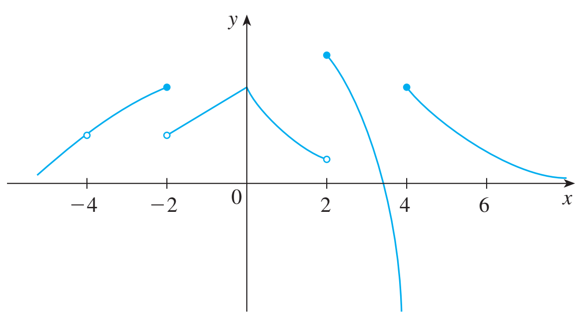
De fato, o Teorema do Valor Intermediário desempenha um papel na própria maneira de funcionar destas ferramentas gráficas. Um computador calcula um número finito de pontos sobre o gráfico e acende os pixels que contêm os pontos calculados. Ele pressupõe que a função é contínua e acende todos os valores intermediários entre dois pontos consecutivos. O computador, portanto, conecta os pixels acendendo os pixels intermediários.

2.5 Exercícios

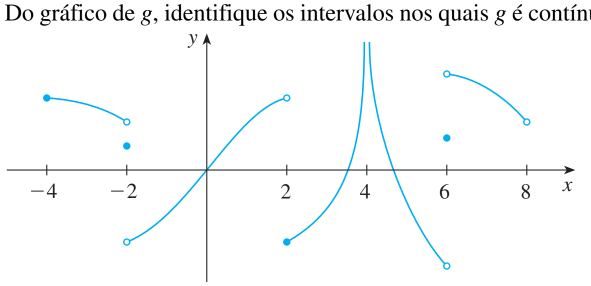
1. Escreva uma equação que expresse o fato de que uma função f é contínua no número 4.

2. Se f é contínua em $(-\infty, \infty)$, o que você pode dizer sobre seu gráfico?

3. (a) Do gráfico de f, identifique números nos quais f é descontínua e explique por quê.
(b) Para cada um dos números indicados na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.



4. Do gráfico de g, identifique os intervalos nos quais g é contínua.



5–8 Esboce o gráfico de uma função que seja contínua exceto para a descontinuidade declarada.

5. Descontínua, porém contínua à direita, em 2

6. Descontinuidades em -1 e 4, porém contínua à esquerda em -1 e à direita em 4

7. Descontinuidade removível em 3, descontinuidade em salto em 5

8. Não é contínua à direita nem à esquerda em -2; contínua somente à esquerda em 2

9. A tarifa T cobrada para dirigir em um certo trecho de uma rodovia com pedágio é de \$ 5, exceto durante o horário de pico (entre 7 da manhã e 10 da manhã e entre 4 da tarde e 7 da noite), quando a tarifa é de \$ 7.
(a) Esboce um gráfico de T como função do tempo t, medido em horas após a meia-noite.
(b) Discuta as descontinuidades da função e seu significado para alguém que use a rodovia.

10. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
(a) A temperatura em um local específico como uma função do tempo.
(b) A temperatura em um tempo específico como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris.
(c) A altitude acima do nível do mar como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris.
(d) O custo de uma corrida de táxi como uma função da distância percorrida.
(e) A corrente no circuito para as luzes de uma sala como uma função do tempo.

11. Suponha que f e g sejam funções contínuas tal que $g(2) = 6$ e $\lim_{x \to 2} [3f(x) + f(x)g(x)] = 36$. Encontre $f(2)$.

12–14 Use a definição de continuidade e propriedades de limites para demonstrar que a função é contínua em um dado número a.

12. $f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}, \quad a = 4.$

13. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1.$

14. $h(t) = \dfrac{2t - 3t^2}{1 + t^3}, \quad a = 1.$

15–16 Use a definição da continuidade e propriedades de limites para mostrar que a função é contínua no intervalo dado.

15. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}, \quad (2, \infty).$

16. $g(x) = 2\sqrt{3 - x}, \quad (-\infty, 3].$

17–22 Explique por que a função é descontínua no número dado a. Esboce o gráfico da função.

17. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2} \qquad a = -2$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & \text{se } x \neq -2 \\ 1 & \text{se } x = -2 \end{cases} \qquad a = -2$

19. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad a = 0$

20. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

21. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador   1. As Homeworks Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

22. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$ $\quad a = 3$

23–24 Como você "removeria a descontinuidade" de f? Em outras palavras, como você definiria $f(2)$ no intuito de fazer f contínua em 2?

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ **24.** $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

25–32 Explique, usando os Teoremas 4, 5, 7 e 9, por que a função é contínua em todo o número em seu domínio. Diga qual é o domínio.

25. $F(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 6}$ **26.** $G(x) = \sqrt[3]{x}\,(1 + x^3)$

27. $R(x) = x^2 + \sqrt{2x - 1}$ **28.** $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x + 1}$

29. $A(t) = \operatorname{arcsen}(1 + 2t)$ **30.** $B(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{4 - x^2}}$

31. $M(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$ **32.** $N(r) = \operatorname{tg}^{-1}(1 + e^{-r^2})$

33–34 Localize as descontinuidades da função e ilustre com um gráfico.

33. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ **34.** $y = \ln(\operatorname{tg}^2 x)$

35–38 Use a continuidade para calcular o limite.

35. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$ **36.** $\lim\limits_{x \to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

37. $\lim\limits_{x \to 1} e^{x^2 - x}$ **38.** $\lim\limits_{x \to 2} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$

39–40 Mostre que f é contínua em $(-\infty, \infty)$.

39. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{se } x \geq \pi/4 \end{cases}$

41–43 Encontre os pontos nos quais f é descontínua. Em quais desses pontos f é contínua à direita, à esquerda ou em nenhum deles? Esboce o gráfico de f.

41. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 1/x & \text{se } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

44. A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma unidade de massa a uma distância r do centro do planeta é

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{se } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

onde M é a massa da Terra; R é seu raio; e G é a constante gravitacional. F é uma função contínua de r?

45. Para quais valores da constante c a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{se } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

46. Encontre os valores de a e b que tornam f contínua em toda parte.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

47. Quais das seguintes funções f têm uma descontinuidade removível em a? Se a descontinuidade for removível, encontre uma função g que seja igual a f para $x \neq a$ e seja contínua em a.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$

(c) $f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!], \quad a = \pi$

48. Suponha que uma função f seja contínua em $[0, 1]$, exceto em 0,25, e que $f(0) = 1$ e $f(1) = 3$. Seja $N = 2$. Esboce dois gráficos possíveis de f, um indicando que f pode não satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário e outro mostrando que f poderia ainda satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário (mesmo que não satisfaça as hipóteses).

49. Se $f(x) = x^2 + 10 \operatorname{sen} x$, mostre que existe um número c tal que $f(c) = 1.000$.

50. Suponha f contínua em $[1, 5]$ e que as únicas soluções da equação $f(x) = 6$ sejam $x = 1$ e $x = 4$. Se $f(2) = 8$, explique por que $f(3) > 6$.

51–54 Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

51. $x^4 + x - 3 = 0, \quad (1, 2)$ **52.** $\sqrt[3]{x} = 1 - x, \quad (0, 1)$

53. $e^x = 3 - 2x, \quad (0, 1)$ **54.** $\operatorname{sen} x = x^2 - x, \quad (1, 2)$

55–56 (a) Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real.
(b) Use sua calculadora para encontrar um intervalo de comprimento 0,01 que contenha uma raiz.

55. $\cos x = x^3$ **56.** $\ln x = 3 - 2x$

57–58 (a) Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real.
(b) Use sua ferramenta gráfica para encontrar a raiz correta até a terceira casa decimal.

57. $100e^{-x/100} = 0{,}01x^2$ **58.** $\operatorname{arctg} x = 1 - x$

59. Demonstre que f é contínua em a se, e somente se,

$$\lim_{h\to 0} f(a + h) = f(a).$$

60. Para demonstrar que seno é contínuo, precisamos mostrar que $\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ para todo número real a. Pelo Exercício 59, uma afirmação equivalente é que

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(a + h) = \operatorname{sen} a.$$

Use $\boxed{6}$ para mostrar que isso é verdadeiro.

61. Demonstre que o cosseno é uma função contínua.

62. (a) Demonstre a parte 3 do Teorema 4.
(b) Demonstre a parte 5 do Teorema 4.

63. Para que valores de x a função f é contínua?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

64. Para que valores de x a função g é contínua?

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ x & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

65. Existe um número que é exatamente uma unidade a mais do que seu cubo?

66. Se a e b são números positivos, prove que a equação

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

possui no mínimo uma solução no intervalo $(-1, 1)$.

67. Demonstre que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $(-\infty, \infty)$.

68. (a) Mostre que a função valor absoluto $F(x) = |x|$ é contínua em toda parte.
(b) Demonstre que se f for uma função contínua em um intervalo, então também o é $|f|$.
(c) A recíproca da afirmação da parte (b) também é verdadeira? Em outras palavras, se $|f|$ for contínua, segue que f também o é? Se for assim, demonstre isso. Caso contrário, encontre um contraexemplo.

69. Um monge tibetano deixa o monastério às 7 horas da manhã e segue sua caminhada usual para o topo da montanha, chegando lá às 7 horas da noite. Na manhã seguinte, ele parte do topo às 7 horas da manhã, pega o mesmo caminho de volta e chega ao monastério às 7 horas noite. Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe um ponto no caminho que o monge vai cruzar exatamente na mesma hora do dia em ambas as caminhadas.

2.6 Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

Nas Seções 2.2 e 2.4, estudamos os limites infinitos e as assíntotas verticais. Lá tomávamos x tendendo a um número e, como resultado, os valores de y ficavam arbitrariamente grandes (positivos ou negativos). Nesta seção vamos tornar x arbitrariamente grande (positivo ou negativo) e ver o que acontece com y.

Vamos começar pela análise do comportamento da função f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

quando x aumenta. A tabela ao lado fornece os valores dessa função, com precisão de seis casas decimais, e o gráfico de f feito por um computador está na Figura 1.

x	$f(x)$
0	−1
±1	0
±2	0,600000
±3	0,800000
±4	0,882353
±5	0,923077
±10	0,980198
±50	0,999200
±100	0,999800
±1000	0,999998

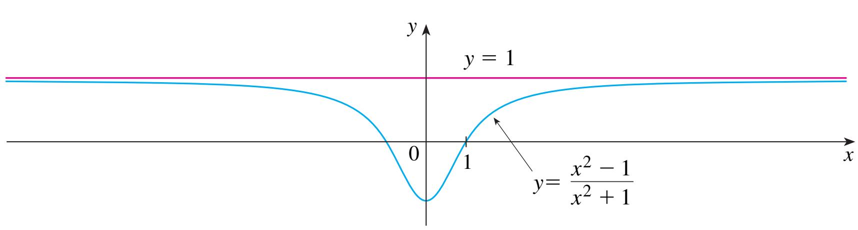


FIGURA 1

Quanto maior o x, mais próximos de 1 ficam os valores de $f(x)$. De fato, temos a impressão de que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 1 quanto quisermos se tornarmos um x suficientemente grande. Essa situação é expressa simbolicamente escrevendo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Em geral, usamos a notação

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

para indicar que os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de L à medida que x fica maior.

1 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente grande.

Outra notação para $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ é

$$f(x) \to L \quad \text{quando} \quad x \to \infty.$$

O símbolo ∞ não representa um número. Todavia, frequentemente a expressão $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ é lida como

"o limite de $f(x)$, quando x tende ao infinito, é L"

ou "o limite de $f(x)$, quando x se torna infinito, é L"

ou "o limite de $f(x)$, quanto x cresce ilimitadamente, é L"

O significado dessas frases é dado pela Definição 1. Uma definição mais precisa, análoga àquela de ε, δ da Seção 2.4, será dada no final desta seção.

As ilustrações geométricas da Definição 1 estão na Figura 2. Observe que existem muitas formas de o gráfico de f aproximar-se da reta $y = L$ (chamada *assíntota horizontal*) quando olhamos para a extremidade direita de cada gráfico.

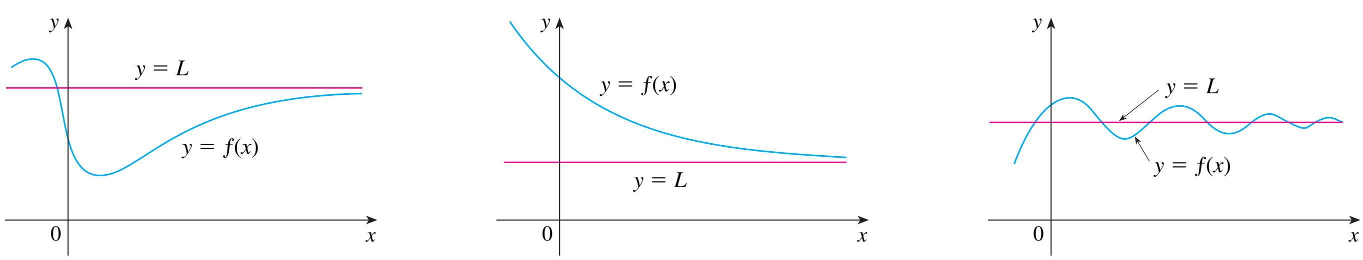


FIGURA 2
Exemplos ilustrando $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

Com relação ainda à Figura 1, vemos que para os valores negativos de x com grande valor absoluto, os valores de $f(x)$ estão próximos de 1. Fazendo x decrescer ilimitadamente para valores negativos, podemos tornar $f(x)$ tão próximo de 1 quanto quisermos. Isso é expresso escrevendo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

A definição geral é dada a seguir.

2 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L, tomando-se x suficientemente grande em valor absoluto, mas negativo.

Novamente, o símbolo $-\infty$ não representa um número; todavia, a expressão $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ é frequentemente lida como

"o limite de $f(x)$, quando x tende a menos infinito, é L"

A Definição 2 está ilustrada na Figura 3. Observe que o gráfico aproxima-se da reta $y = L$ quando olhamos para a extremidade esquerda de cada gráfico.

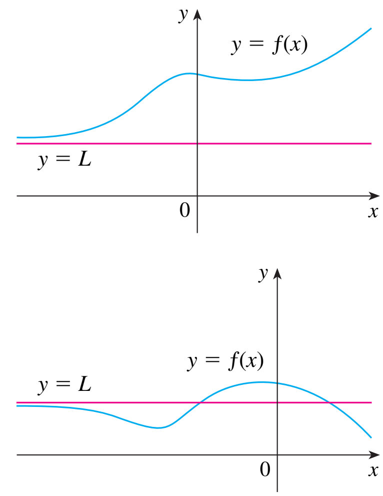


FIGURA 3
Exemplos ilustrando $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$

3 Definição A reta $y = L$ é chamada **assíntota horizontal** da curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Por exemplo, a curva ilustrada na Figura 1 tem a reta $y = 1$ como uma assíntota horizontal, pois

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1.$$

Um exemplo de curva com duas assíntotas horizontais é $y = \operatorname{tg}^{-1}x$. (veja a Figura 4). Na verdade,

4
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{tg}^{-1}x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to\infty} \operatorname{tg}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

logo, ambas as retas $y = -\pi/2$ e $y = \pi/2$ são assíntotas horizontais. (Isso segue do fato de que as retas $x = \pm\pi/2$ são assíntotas verticais do gráfico da tangente.)

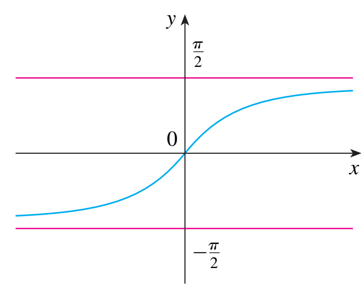


FIGURA 4
$y = \operatorname{tg}^{-1}x$

EXEMPLO 1 Encontre os limites infinitos, limites no infinito e assíntotas para a função f cujo gráfico está na Figura 5.

SOLUÇÃO Vemos que os valores de $f(x)$ ficam grandes por ambos os lados como $x \to -1$, então

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \infty$$

Observe que $f(x)$ torna-se grande em valor absoluto (porém negativo) quando x tende a 2 à esquerda; porém torna-se grande e positivo quando x tende a 2 à direita. Logo,

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = \infty$$

Assim, ambas as retas $x = -1$ e $x = 2$ são assíntotas verticais.

Quando x torna-se grande, vemos que $f(x)$ tende a 4. Mas quando x decresce para valores negativos, $f(x)$ tende a 2. Logo,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 4 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$

Isso significa que $y = 4$ e $y = 2$ são assíntotas horizontais.

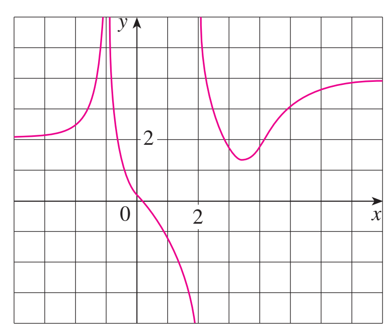


FIGURA 5

EXEMPLO 2 Encontre $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ e $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

SOLUÇÃO Observe que quando x é grande, $1/x$ é pequeno. Por exemplo,

$$\frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001 \qquad \frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000001$$

De fato, tomando x grande o bastante, podemos fazer $1/x$ tão próximo de 0 quanto quisermos. Portanto, conforme a Definição 1, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Um raciocínio análogo mostra que, quando x é grande em valor absoluto (porém negativo), $1/x$ é pequeno em valor absoluto (mas negativo); logo, temos também

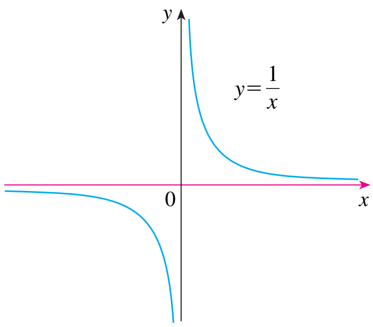


FIGURA 6

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

Segue que a reta $y = 0$ (o eixo x) é uma assíntota horizontal da curva $y = 1/x$. (Esta é uma hipérbole equilátera; veja a Figura 6.)

A maioria das Propriedades dos Limites que foram dadas na Seção 2.3 também são válidas para os limites no infinito. Pode ser demonstrado que as *Propriedades dos Limites listadas na Seção 2.3 (com exceção das Propriedades 9 e 10) são também válidas se "$x \to a$" for substituído por "$x \to \infty$" ou "$x \to -\infty$"*. Em particular, se combinarmos as Propriedades 6 e 11 com o resultado do Exemplo 2, obteremos a seguinte regra importante no cálculo de limites.

5 **Teorema** Se $r > 0$ for um número racional, então

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^r}=0$$

Se $r > 0$ for um número racional tal que x^r seja definida para todo x, então

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^r}=0$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$$

e indique quais propriedades de limites foram usadas em cada etapa.

SOLUÇÃO Quando x cresce, o numerador e o denominador também crescem, logo, não fica óbvio o que ocorre com a razão entre eles. Para eliminar essa indeterminação, precisaremos antes manipular algebricamente a expressão.

Para calcular o limite no infinito de uma função racional, primeiro dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador. (Podemos assumir que $x \neq 0$, uma vez que estamos interessados apenas em valores grandes de x.) Nesse caso a maior potência de no denominador é x^2; logo, temos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2-x-2}{x^2}}{\dfrac{5x^2+4x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{(pela Propriedade dos Limites 5)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}3-\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-2\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty}5+4\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}} \qquad \text{(pelas Propriedades 1, 2 e 3)}$$

$$=\frac{3-0-0}{5+0+0} \qquad \text{(pela Propriedade 7 e pelo Teorema 5)}$$

$$=\frac{3}{5}$$

Um cálculo análogo mostra que o limite quando $x \to -\infty$ também é $\frac{3}{5}$. A Figura 7 ilustra o resultado destes cálculos mostrando como o gráfico da função racional dada aproxima-se da assíntota horizontal $y = \frac{3}{5}$.

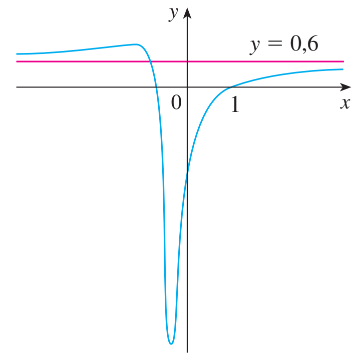


FIGURA 7
$y = \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$

EXEMPLO 4 Determine as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

SOLUÇÃO Dividindo o numerador e o denominador por x e usando as propriedade dos limites, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}} \qquad (\text{pois } \sqrt{x^2} = x \text{ para } x > 0)$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \dfrac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - 5 \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}} = \frac{\sqrt{2+0}}{3 - 5 \cdot 0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Portanto, a reta $y = \sqrt{2}/3$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f.

No cálculo do limite quando $x \to -\infty$, devemos lembrar que, para $x < 0$, temos $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Logo, quando dividimos o numerador por x, para $x < 0$, obtemos

$$\frac{1}{x}\sqrt{2x^2+1} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{2x^2+1} = -\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}$$

Logo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}} = \frac{-\sqrt{2 + \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}}}{3 - 5\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Assim, a reta $y = -\sqrt{2}/3$ é também uma assíntota horizontal.

Uma assíntota vertical deve ocorrer quando o denominador, $3x - 5$, é 0, isto é, quando $x = \frac{5}{3}$. Se x estiver próximo de $\frac{5}{3}$ e $x > \frac{5}{3}$, então o denominador está próximo de 0, e $3x - 5$ é positivo. O numerador $\sqrt{2x^2+1}$ é sempre positivo, logo $f(x)$ é positivo. Assim

$$\lim_{x\to(5/3)^+} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \infty$$

Se x estiver próximo de $\frac{5}{3}$, mas $x < \frac{5}{3}$, então $3x - 5 < 0$, logo $f(x)$ é muito grande em valor absoluto (porém negativa). Assim,

$$\lim_{x\to(5/3)^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = -\infty$$

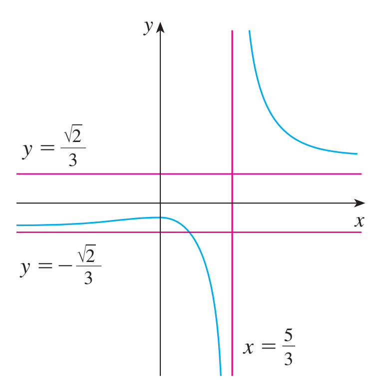


FIGURA 8
$y = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

A assíntota vertical é $x = \frac{5}{3}$. Todas as três assíntotas estão mostradas na Figura 8.

EXEMPLO 5 Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

SOLUÇÃO Como tanto $\sqrt{x^2+1}$ quanto x são grandes quando x é grande, é difícil ver o que acontece com sua diferença; logo, usamos a álgebra para reescrever a função. Vamos primeiro multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado radical:

Podemos pensar na função dada como tendo denominador 1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

Note que o denominador desta última expressão $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ cresce ilimitadamente quando $x \to \infty$ (é maior que x). Logo,

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

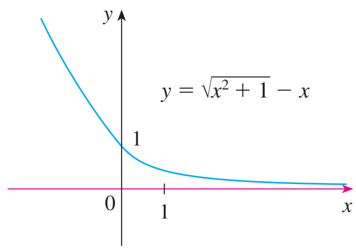


FIGURA 9

A Figura 9 ilustra esse resultado.

EXEMPLO 6 Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-2}\right)$.

SOLUÇÃO Se considerarmos $t = 1/(x-2)$, sabemos que $t \to \infty$ quando $x \to 2^+$. Portanto, pela segunda equação em $\boxed{4}$, temos

$$\lim_{x\to 2^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-2}\right) = \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}$$

O gráfico da função exponencial natural $y = e^x$ tem a reta $y = 0$ (o eixo x) como uma assíntota horizontal. (O mesmo é verdadeiro para qualquer função exponencial com base $a > 1$.) Na verdade, a partir do gráfico na Figura 10 e da tabela de valores correspondentes, vemos que

6 $$\boxed{\lim_{x\to -\infty} e^x = 0}$$

Observe que os valores de e^x tendem a 0 muito rapidamente.

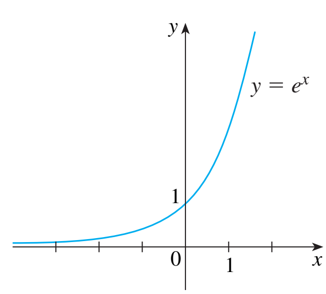


FIGURA 10

x	e^x
0	1,00000
-1	0,36788
-2	0,13534
-3	0,04979
-5	0,00674
-8	0,00034
-10	0,00005

EXEMPLO 7 Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$.

SP A estratégia de solução de problemas para os Exemplos 6 e 7 é de apresentar algo extra. Aqui, o algo extra, a ajuda auxiliar, é a nova variável t.

SOLUÇÃO Se deixarmos $t = 1/x$, sabemos que $t \to -\infty$ quando $x \to 0^-$. Assim, por $\boxed{6}$,

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0$$

(Veja o Exercício 75.)

EXEMPLO 8 Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$.

SOLUÇÃO Quando x cresce, os valores de sen x oscilam entre 1 e -1 um número infinito de vezes; logo, eles não tendem a qualquer número definido. Portanto, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ não existe.

Limites Infinitos no Infinito

A notação

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

é usada para indicar que os valores de $f(x)$ tornam-se grandes quanto x se torna grande. Significados análogos são dados aos seguintes símbolos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

EXEMPLO 9 Encontre $\lim_{x\to\infty} x^3$ e $\lim_{x\to-\infty} x^3$.

SOLUÇÃO Quando x torna-se grande, x^3 também fica grande. Por exemplo,

$$10^3 = 1\,000 \qquad 100^3 = 1\,000\,000 \qquad 1\,000^3 = 1\,000\,000\,000$$

Na realidade, podemos fazer x^3 ficar tão grande quanto quisermos tomando x grande o suficiente. Portanto, podemos escrever

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

Analogamente, quando x é muito grande em módulo, porém negativo, x^3 também o é. Assim,

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

Essas afirmações sobre limites também podem ser vistas no gráfico de $y = x^3$ da Figura 11.

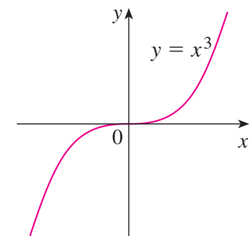


FIGURA 11
$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Olhando para a Figura 10 vemos que

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

mas, como ilustra a Figura 12, $y = e^x$ torna-se grande muito mais rapidamente que $y = x^3$ quando $x \to \infty$.

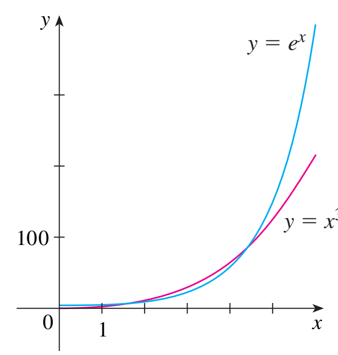


FIGURA 12
e^x é muito maior que x^3 quando x é grande.

EXEMPLO 10 Encontre $\lim_{x\to\infty} (x^2 - x)$.

SOLUÇÃO Seria **errado** escrever

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x^2 - \lim_{x\to\infty} x = \infty - \infty$$

As Propriedades dos Limites não podem ser aplicadas para os limites infinitos, pois ∞ não é um número (não podemos definir $\infty - \infty$). Contudo, *podemos* escrever

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x(x - 1) = \infty$$

porque, como x e $x - 1$ tornam-se arbitrariamente grandes, o mesmo acontece com seu produto.

EXEMPLO 11 Encontre $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + x}{3 - x}$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 3, vamos dividir o numerador e o denominador pela potência mais elevada de x do denominador, que é justamente x:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 1}{\dfrac{3}{x} - 1} = -\infty$$

pois $x + 1 \to \infty$ e $3/x - 1 \to -1$ quando $x \to \infty$.

O próximo exemplo mostra que, usando o limite infinito no infinito, com as intersecções com os eixos, podemos obter uma ideia aproximada do gráfico de um polinômio sem ter de marcar um grande número de pontos.

EXEMPLO 12 Esboce o gráfico de $y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$ achando suas intersecções com os eixos e seus limites quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$.

SOLUÇÃO A intersecção com o eixo y é $f(0) = (-2)^4(1)^3(-1) = -16$, e as intersecções com o eixo x são encontradas fazendo-se $y = 0$: $x = 2, -1, 1$. Observe que, como $(x - 2)^4$ é positivo, a função não muda de sinal em 2; assim, o gráfico não cruza o eixo x em 2. O gráfico cruza o eixo em -1 e 1.

Para os valores grandes de x, todos os três fatores também são grandes; logo,

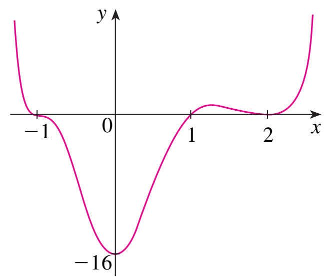


FIGURA 13
$y=(x-2)^4(x+1)^3(x-1)$

$$\lim_{x \to \infty} (x-2)^4(x+1)^3(x-1) = \infty$$

Quando os valores de x tiverem um módulo grande, porém forem negativos, o primeiro fator será positivo e grande, ao passo que o segundo e o terceiro fatores têm grande valor absoluto, porém são negativos. Portanto

$$\lim_{x \to -\infty} (x-2)^4(x+1)^3(x-1) = \infty$$

Combinando essas informações, damos um esboço do gráfico na Figura 13.

Definições Precisas

Podemos enunciar mais precisamente a Definição 1 da seguinte forma.

7 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe um correspondente número N tal que

$$\text{se} \quad x > N \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Em palavras, isso diz que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L (dentro de uma distância ε, onde ε é qualquer número positivo), bastando apenas tornar x suficientemente grande (maior que N, onde N depende de ε). Graficamente, isso quer dizer que, escolhendo x suficientemente grande (maior que algum número N), podemos fazer o gráfico de f ficar entre duas retas horizontais dadas $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$, como na Figura 14. Isso deve ser verdadeiro, não importando quão pequeno seja ε. A Figura 15 indica que se for escolhido um valor menor de ε, então poderá ser necessário um valor maior para N.

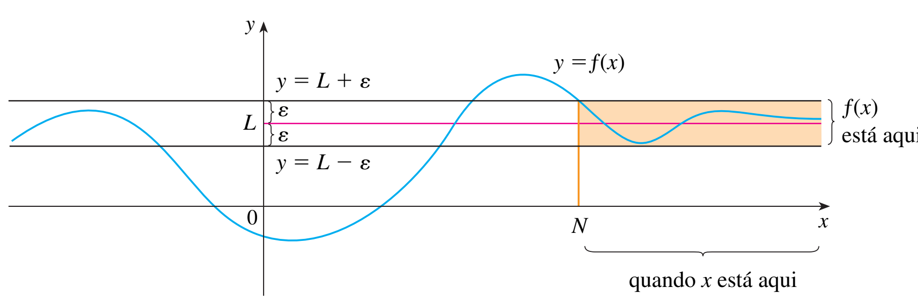


FIGURA 14
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

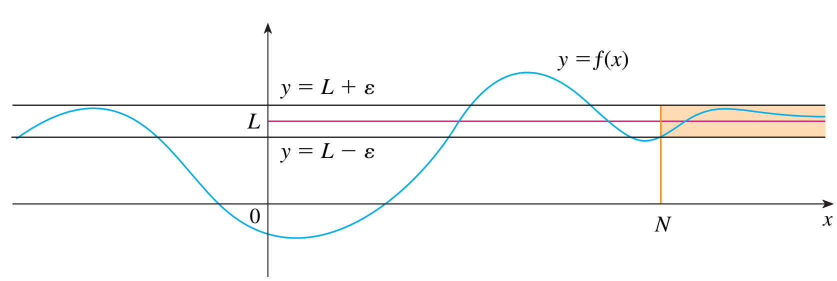


FIGURA 15
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Analogamente, uma versão precisa da Definição 2 é dada pela Definição 8, que está ilustrada na Figura 16.

8 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe um correspondente número N tal que

$$\text{se} \quad x < N \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

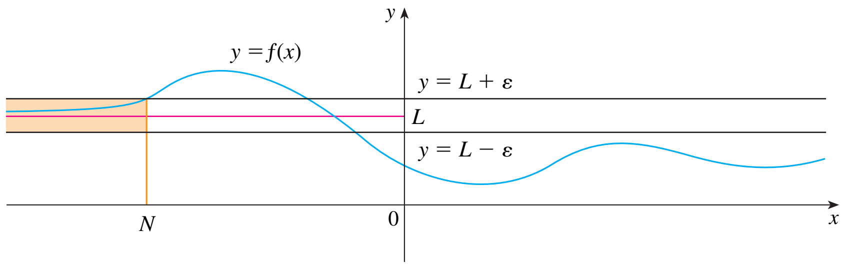


FIGURA 16
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

No Exemplo 3 calculamos que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{5}$$

No próximo exemplo vamos usar uma ferramenta gráfica para relacionar isso com a Definição 7, com $L = \frac{3}{5}$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

TEC Em *Module 2.4/2.6* você pode explorar a definição precisa de um limite tanto geograficamente quanto numericamente.

EXEMPLO 13 Use um gráfico para encontrar um número N tal que

$$\text{se} \quad x > N \qquad \text{então} \qquad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0{,}6 \right| < 0{,}1$$

SOLUÇÃO Vamos reescrever a desigualdade dada como

$$0{,}5 < \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} < 0{,}7$$

Precisamos determinar os valores de x para os quais a curva dada fica entre as retas horizontais $y = 0{,}5$ e $y = 0{,}7$. Então fazemos o gráfico da curva e destas retas na Figura 17. Assim, usamos o cursor para estimar que a curva cruza a reta $y = 0{,}5$ quando $x \approx 6{,}7$. À direita desse número a curva fica entre as retas $y = 0{,}5$ e $y = 0{,}7$. Arredondando a favor da segurança, podemos dizer que

$$\text{se} \quad x > 7 \qquad \text{então} \qquad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0{,}6 \right| < 0{,}1$$

Em outras palavras, para $\varepsilon = 0{,}1$ podemos escolher $N = 7$ (ou qualquer número maior) na Definição 7.

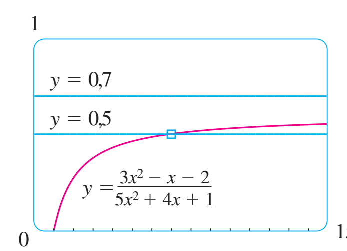


FIGURA 17

EXEMPLO 14 Use a Definição 7 para demonstrar que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUÇÃO Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar N tal que

$$\text{se} \qquad x > N \qquad \text{então} \qquad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

Ao calcular o limite, podemos assumir que $x > 0$. Então, $1/x < \varepsilon \iff x > 1/\varepsilon$. Escolhemos $N = 1/\varepsilon$. Logo

$$\text{se} \qquad x > N = \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{então} \qquad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$$

Logo, pela Definição 7,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

A Figura 18 ilustra a demonstração mostrando alguns valores de ε e os valores correspondentes de N.

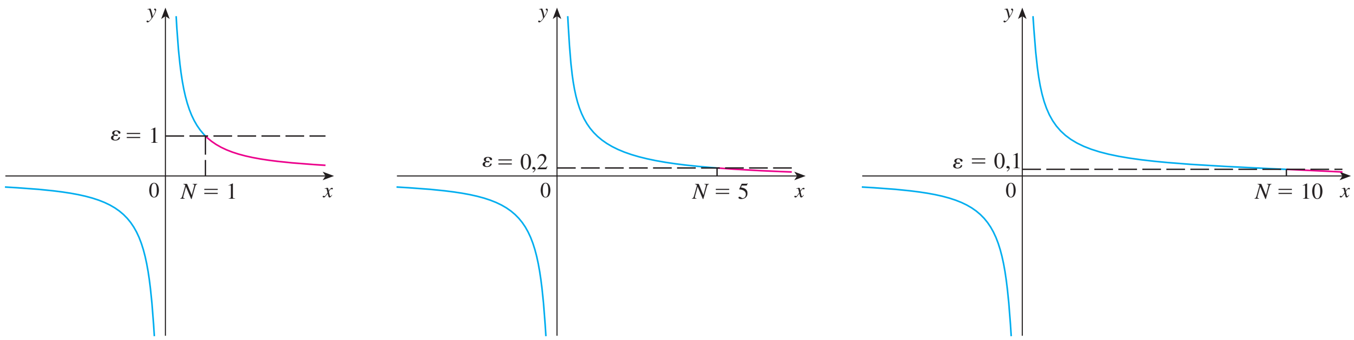


FIGURA 18

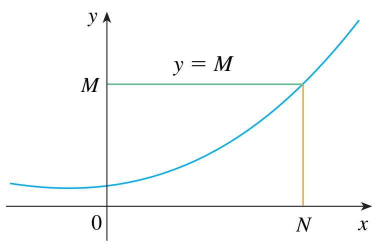


FIGURA 19
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Finalmente, observamos que pode ser definido um limite infinito no infinito da forma a seguir. A ilustração geométrica está dada na Figura 19.

9 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

significa que para todo positivo M existe um correspondente número positivo N tal que

$$\text{se} \quad x > N \qquad \text{então} \qquad f(x) > M.$$

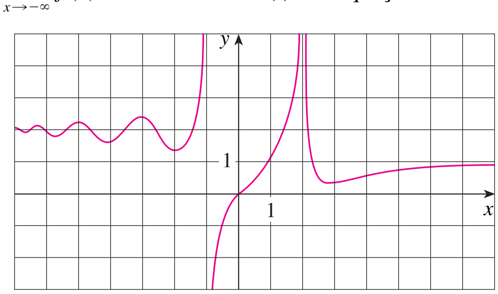
Definições análogas podem ser feitas quando o símbolo ∞ é substituído por $-\infty$. (Veja o Exercício 74.)

2.6 Exercícios

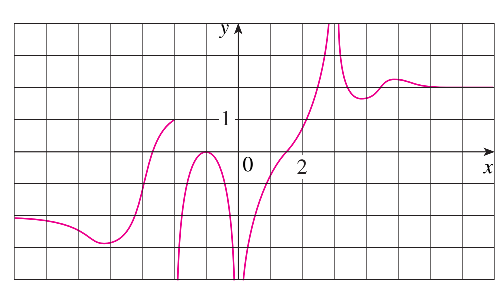
1. Explique com suas palavras o significado de cada um dos itens a seguir.
(a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 5$ (b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

2. (a) O gráfico de $y = f(x)$ pode interceptar uma assíntota vertical? E uma assíntota horizontal? Ilustre com gráficos.
(b) Quantas assíntotas horizontais pode ter o gráfico de $y = f(x)$? Ilustre com gráficos as possibilidades.

3. Para a função f, cujo gráfico é dado, diga quem são.
(a) $\lim_{x \to 2} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$
(c) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ (d) $\lim_{x \to \infty} f(x)$
(e) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ (f) As equações das assíntotas



4. Para a função g, cujo gráfico é dado, determine o que se pede.
(a) $\lim_{x \to \infty} g(x)$ (b) $\lim_{x \to -\infty} g(x)$
(c) $\lim_{x \to 3} g(x)$ (d) $\lim_{x \to 0} g(x)$
(e) $\lim_{x \to -2^+} g(x)$ (f) As equações das assíntotas



5–10 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

5. $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 5$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -5$

6. $\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $f(0) = 0$

7. $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$,
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, f é ímpar

9. $f(0) = 3$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$,
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \infty$,
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

10. $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$, $f(0) = 0$, f é par

11. Faça uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

calculando a função $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ e 100. Então, use o gráfico de f para comprovar sua conjectura.

12. (a) Use o gráfico de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ com precisão de duas casas decimais.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com precisão de quatro casas decimais.

13–14 Calcule o limite justificando cada passagem com as propriedade dos limites que forem usadas.

13. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - x + 4}{2x^2 + 5x - 8}$

14. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}}$

15–38 Encontre o limite ou demonstre que não existe.

15. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x + 3}$

16. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x + 5}{x - 4}$

17. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$

18. $\lim_{y\to\infty} \dfrac{2 - 3y^2}{5y^2 + 4y}$

19. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$

20. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{t - t\sqrt{t}}{2t^{3/2} + 3t - 5}$

21. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(2x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + x)}$

22. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}}$

23. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

24. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

25. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

26. $\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

27. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

28. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + 1}$

29. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$

30. $\lim_{x\to\infty} (e^{-x} + 2\cos 3x)$

31. $\lim_{x\to-\infty} (x^4 + x^5)$

32. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1 + x^6}{x^4 + 1}$

33. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(e^x)$

34. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$

35. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$

36. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 + 1}$

37. $\lim_{x\to\infty} (e^{-2x}\cos x)$

38. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg}^{-1}(\ln x)$

39. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

traçando o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$

(b) Faça uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar qual será o valor do limite.

(c) Demonstre que sua conjectura está correta.

40. (a) Use um gráfico de

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ com precisão de uma casa decimal.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com precisão de quatro casas decimais.

(c) Encontre o valor exato do limite.

41–46 Encontre as assíntotas horizontais e verticais de cada curva. Confira seu trabalho por meio de um gráfico da curva e das estimativas das assíntotas.

41. $y = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$

42. $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$

43. $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

44. $y = \dfrac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$

45. $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

46. $y = \dfrac{2e^x}{e^x - 5}$

47. Estime a assíntota horizontal da função

$$f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2\,000}$$

através do gráfico f para $-10 \leqslant x \leqslant 10$. A seguir, determine a equação da assíntota calculando o limite. Como você explica a discrepância?

48. (a) Trace o gráfico da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

Quantas assíntotas horizontais e verticais você observa? Use o gráfico para estimar os valores dos limites

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

(b) Calculando valores de $f(x)$, dê estimativas numéricas dos limites na parte (a).

(c) Calcule os valores exatos dos limites na parte (a). Você obtém os mesmos valores ou valores diferentes para estes limites? [Em vista de sua resposta na parte (a), você pode ter de verificar seus cálculos para o segundo limite.]

49. Encontre uma fórmula para uma função f que satisfaça as seguintes condições:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ $f(2) = 0$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

50. Encontre uma fórmula para uma função que tenha por assíntotas verticais $x = 1$ e $x = 3$ e por assíntota horizontal $y = 1$.

51. Uma função f é a razão de funções quadráticas e possui uma assíntota vertical $x = 4$ e somente um intercepto com o eixo das abscissas em $x = 1$. Sabe-se que f possui uma descontinuidade removível em $x = -1$ e $\lim_{x \to -1} f(x) = 2$. Calcule
(a) $f(0)$ (b) $\lim_{x \to \infty} f(x)$

52–56 Encontre os limites quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$. Use essa informação, bem como as intersecções com os eixos, para fazer um esboço do gráfico, como no Exemplo 12.

52. $y = 2x^3 - x^4$ **53.** $y = x^4 - x^6$

54. $y = x^3(x + 2)^2(x - 1)$

55. $y = (3 - x)(1 + x)^2(1 - x)^4$

56. $y = x^2(x^2 - 1)^2(x + 2)$

---

57. (a) Use o Teorema do Confronto para determinar $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$.
(b) Faça o gráfico de $f(x) = (\text{sen}\, x)/x$. Quantas vezes o gráfico cruza a assíntota?

58. Por *comportamento final* de uma função queremos indicar uma descrição do que acontece com seus valores quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$.
(a) Descreva e compare o comportamento final das funções

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

por meio do gráfico de ambas nas janelas retangulares $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ e $[-10, 10]$ por $[-10.000, 10.000]$.
(b) Dizemos que duas funções têm o *mesmo comportamento final* se sua razão tende a 1 quando $x \to \infty$. Mostre que P e Q têm o mesmo comportamento final.

59. Sejam P e Q polinômios. Encontre

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se o grau de P for (a) menor que o grau de Q e (b) maior que o grau de Q.

60. Faça um esboço da curva $y = x^n$ (n inteiro) nos seguintes casos:
(i) $n = 0$ (ii) $n > 0$, n ímpar
(iii) $n > 0$, n par (iv) $n < 0$, n ímpar
(v) $n < 0$, n par
Então, use esses esboços para encontrar os seguintes limites:
(a) $\lim_{x \to 0^+} x^n$ (b) $\lim_{x \to 0^-} x^n$
(c) $\lim_{x \to \infty} x^n$ (d) $\lim_{x \to -\infty} x^n$

61. Encontre $\lim_{x \to \infty} f(x)$ se, para todo $x > 1$,

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x - 1}}$$

62. (a) Um tanque contém 5.000 litros de água pura. Água salgada contendo 30 g de sal por litro de água é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 25 L/min. Mostre que a concentração de sal depois de t minutos (em gramas por litro) é

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

(b) O que acontece com a concentração quando $t \to \infty$?

63. Seremos capazes de mostrar, no Capítulo 9 do Volume II, que, sob certas condições, a velocidade $v(t)$ de uma gota de chuva caindo no instante t é

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*}),$$

onde g é a aceleração da gravidade e v^* é a *velocidade final* da gota.
(a) Encontre $\lim_{t \to \infty} v(t)$.
(b) Faça o gráfico de $v(t)$ se $v^* = 1$ m/s e $g = 9{,}8$ m/s^2 Quanto tempo levará para a velocidade da gota atingir 99% de sua velocidade final?

64. (a) Fazendo os gráficos de $y = e^{-x/10}$ e $y = 0{,}1$ na mesma tela, descubra quão grande você precisará tomar x para que $e^{-x/10} < 0{,}1$.
(b) A parte (a) pode ser resolvida sem usar uma ferramenta gráfica?

65. Use um gráfico para encontrar um número N tal que

$$\text{se} \quad x > N \quad \text{então} \quad \left| \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} - 1{,}5 \right| < 0{,}05$$

66. Para o limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = 2$$

ilustre a Definição 7, encontrando os valores de N que correspondam a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

67. Para o limite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = -2$$

ilustre a Definição 8, encontrando os valores de N correspondentes a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

68. Para o limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

ilustre a Definição 9, encontrando um valor de N correspondente a $M = 100$.

69. (a) De que tamanho devemos tomar x para que $1/x^2 < 0{,}0001$?
(b) Tomando $r = 2$ no Teorema 5, temos a igualdade

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Demonstre isso diretamente usando a Definição 7.

70. (a) De que tamanho devemos tornar x para que $1/\sqrt{x} < 0.0001$?
(b) Tomando $r = \frac{1}{2}$ no Teorema 5, temos a igualdade

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Demonstre isso diretamente usando a Definição 7.

71. Use a Definição 8 para demonstrar que $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

72. Demonstre, usando a Definição 9, que $\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$.

73. Use a Definição 9 para demonstrar que $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$.

74. Formule precisamente a definição de

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Então, use sua definição para demonstrar que

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + x^3) = -\infty$$

75. Demonstre que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{t \to 0^+} f(1/t)$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^-} f(1/t)$$

se esses limites existirem.

2.7 Derivadas e Taxas de Variação

O problema de encontrar a reta tangente a uma curva e o problema de encontrar a velocidade de um objeto envolvem determinar o mesmo tipo de limite, como vimos na Seção 2.1. Este tipo especial de limite é chamado *derivada* e veremos que ele pode ser interpretado como uma taxa de variação tanto nas ciências quanto na engenharia.

Tangentes

Se uma curva C tiver uma equação $y = f(x)$ e quisermos encontrar a reta tangente a C em um ponto $P(a, f(a))$, consideramos um ponto próximo $Q(x, f(x))$, onde $x \neq a$, e calculamos a inclinação da reta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Então fazemos Q aproximar-se de P ao longo da curva C ao obrigar x tender a a. Se m_{PQ} tender a um número m, então definimos a *tangente t* como a reta que passa por P e tem inclinação m. (Isso implica dizer que a reta tangente é a posição-limite da reta secante PQ quando Q tende a P. Veja a Figura 1.)

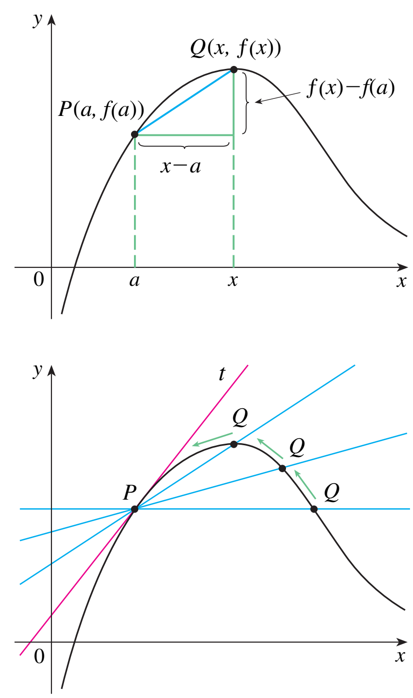


FIGURA 1

1 Definição A **reta tangente** à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando por P com a inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista.

Em nosso primeiro exemplo vamos confirmar uma conjectura que foi feita no Exemplo 1 da Seção 2.1.

EXEMPLO 1 Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

SOLUÇÃO Temos aqui $a = 1$ e $f(x) = x^2$, logo a inclinação é

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Usando a forma ponto-inclinação da reta, encontramos que uma equação da reta tangente em $(1, 1)$ é

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = 2x - 1$$

A forma ponto-inclinação da equação da reta por um ponto (x_1, y_1) com uma inclinação m é:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Algumas vezes nos referimos à inclinação da reta tangente como a **inclinação da curva** no ponto. A ideia por detrás disso é que, se dermos *zoom* (suficiente) em direção ao ponto, a curva parecerá quase uma reta. A Figura 2 ilustra esse procedimento para a curva $y = x^2$ do Exemplo 1. Quanto maior for o *zoom*, mais indistinguível da reta tangente será a parábola. Em outras palavras, a curva se torna quase indistinguível de sua reta tangente.

TEC *Visual 2.7* mostra uma animação da Figura 2.

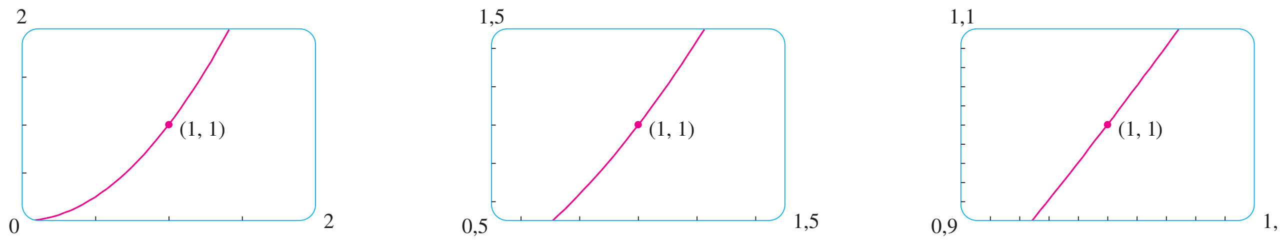


FIGURA 2 Um *zoom* cada vez maior da parábola $y=x^2$ em torno do ponto (1, 1).

Há outra expressão para a inclinação da reta tangente que é, às vezes, mais fácil de ser usada. Se $h = x - a$, então $x = a + h$ e, assim, a inclinação da reta secante PQ é

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

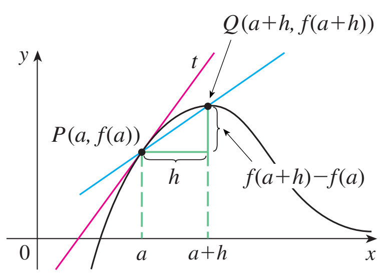


FIGURA 3

(Veja a Figura 3 onde o caso $h > 0$ é ilustrado e Q está à direita de P. Se acontecesse que $h < 0$, entretanto, Q estaria à esquerda de P.)

Observe que quando x tende a a, h tende a 0 (pois $h = x - a$); assim, a expressão para a inclinação da reta tangente na Definição 1 fica

2
$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

EXEMPLO 2 Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole $y = 3/x$ no ponto (3, 1).

SOLUÇÃO Seja $f(x) = 3/x$. Então a inclinação da reta tangente em (3, 1) é

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3-(3+h)}{3+h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3+h} = -\frac{1}{3}$$

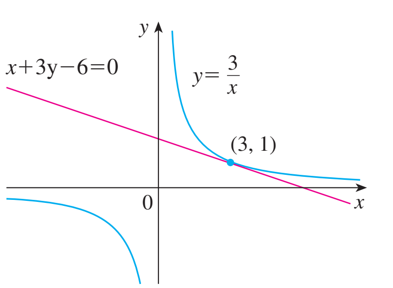


FIGURA 4

Portanto, uma equação da reta tangente no ponto (3, 1) é

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

que se simplifica para $$x + 3y - 6 = 0.$$
A hipérbole e sua tangente estão na Figura 4.

Velocidades

Na Seção 2.1 estudamos o movimento de uma bola abandonada de cima da Torre CN e sua velocidade foi definida como o valor-limite das velocidades médias em períodos cada vez menores.

Em geral, suponha que um objeto se mova sobre uma reta de acordo com a equação $s = f(t)$, na qual s é o deslocamento do objeto a partir da origem no instante t. A função f que descreve o movimento é chamada **função de posição** do objeto. No intervalo de tempo entre $t = a$ e $t = a + h$, a variação na posição será de $f(a + h) - f(a)$. (Veja a Figura 5.) A velocidade média nesse intervalo é

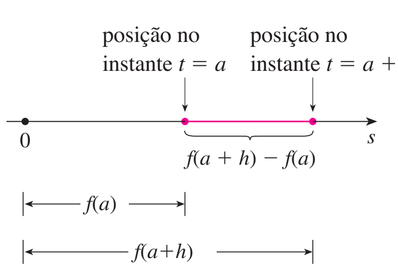


FIGURA 5

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

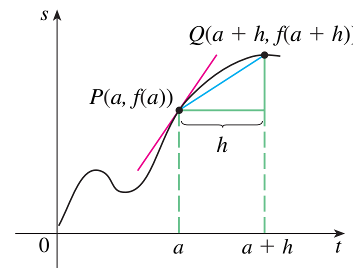
que é o mesmo que a inclinação da reta secante PQ na Figura 6.

Suponha agora que a velocidade média seja calculada em intervalos cada vez menores $[a, a + h]$. Em outras palavras, fazemos h tender a 0. Como no exemplo da queda da bola, definimos **velocidade** (ou **velocidade instantânea**) $v(a)$ no instante $t = a$ como o limite dessas velocidades médias:

3
$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Isso significa que a velocidade no instante $t = a$ é igual à inclinação da reta tangente em P (compare as Equações 2 e 3).

Agora que sabemos calcular os limites, vamos retornar ao problema da queda da bola.



$m_{PQ} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

= velocidade média

FIGURA 6

EXEMPLO 3 Suponha que a bola foi deixada cair do posto de observação da torre, 450 m acima do solo.
(a) Qual a velocidade da bola após 5 segundos?
(b) Com qual velocidade a bola chega ao solo?

Lembre-se da Seção 2.1: A distância (em metros) percorrida após t segundos é $4{,}9t^2$.

SOLUÇÃO Precisaremos encontrar a velocidade tanto quando $t = 5$ quanto quando a bola atinge o solo, de modo que é eficiente começar encontrando a velocidade em um instante geral $t = a$. Usando a equação de movimento $s = f(t) = 4{,}9t^2$, temos

$$\begin{aligned} v(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(a + h)^2 - 4{,}9a^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(2ah + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 4{,}9(2a + h) = 9{,}8a \end{aligned}$$

(a) A velocidade após 5 s é de $v(5) = (9{,}8)(5) = 49$m/s.
(b) Uma vez que o posto de observação está 450 m acima do solo, a bola vai atingir o chão em t_1, quando $s(t_1) = 450$, isto é,

$$4{,}9t_1^2 = 450.$$

Isso fornece

$$t_1^2 = \frac{450}{4{,}9} \qquad \text{e} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4{,}9}} \approx 9{,}6 \text{ s}$$

A velocidade com que a bola atinge o chão é, portanto,

$$v(t_1) = 9{,}8t_1 = 9{,}8\sqrt{\frac{450}{4{,}9}} \approx 94 \text{ m/s}$$

Derivadas

Vimos que o mesmo tipo de limite aparece ao encontrar a inclinação de uma reta tangente (Equação 2) ou a velocidade de um objeto (Equação 3). De fato, os limites do tipo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

surgem sempre que calculamos uma taxa de variação em qualquer ramo das ciências ou engenharia, tais como a taxa de uma reação química ou o custo marginal em economia. Uma vez que esse tipo de limite ocorre amplamente, ele recebe nome e notação especiais.

4 **Definição** A **derivada de uma função f em um número a**, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

$f'(a)$ é lido como "f linha de a."

Se escrevermos $x = a + h$, então $h = x - a$ e h tende a 0 se, e somente se, x tende a a. Consequentemente, uma maneira equivalente de enunciar a definição da derivada, como vimos na determinação das retas tangentes, é

5
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

EXEMPLO 4 Encontre a derivada da função $f(x) = x^2 - 8x + 9$ em um número a.

SOLUÇÃO Da Definição 4, temos

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[(a + h)^2 - 8(a + h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h - 8) \\ &= 2a - 8 \end{aligned}$$

Definimos a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$ como a reta que passa em P e tem inclinação m dada pela Equação 1 ou 2. Uma vez que, pela Definição 4, isso é o mesmo que a derivada $f'(a)$, podemos agora dizer o seguinte:

> A reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ é a reta que passa em $(a, f(a))$, cuja inclinação é igual a $f'(a)$, a derivada de f em a.

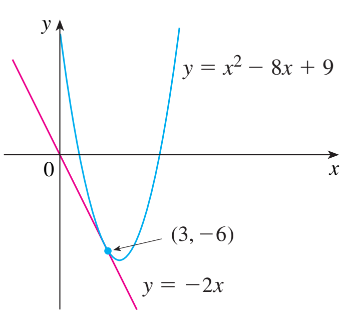


FIGURA 7

Se usarmos a forma ponto-inclinação da equação de uma reta, poderemos escrever uma equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

EXEMPLO 5 Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2 - 8x + 9$ no ponto $(3, -6)$.

SOLUÇÃO Do Exemplo 4, sabemos que a derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ no número a é $f'(a) = 2a - 8$. Portanto, a inclinação da reta tangente em $(3, -6)$ é $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. Dessa forma, uma equação da reta tangente, ilustrada na Figura 7, é

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \qquad \text{ou} \qquad y = -2x$$

Taxas de Variação

Suponha que y seja uma quantidade que depende de outra quantidade x. Assim, y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Se x variar de x_1 a x_2, então a variação em x (também chamada **incremento** de x) será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em y será

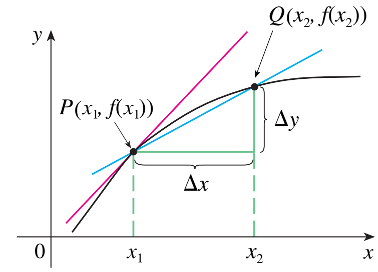
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

O quociente das diferenças

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é denominado **taxa média de variação de y em relação a x** no intervalo $[x_1, x_2]$ e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante PQ na Figura 8.

Por analogia com a velocidade, consideramos a taxa média de variação em intervalos cada vez menores fazendo x_2 tender a x_1 e, portanto, fazendo Δx tender a 0. O limite dessas taxas médias de variação é chamado **taxa (instantânea) de variação de y em relação a x** em $x = x_1$, que é interpretada como a inclinação da tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:



taxa média de variação $= m_{PQ}$

taxa instantânea de variação = inclinação da tangente e

FIGURA 8

$$\boxed{6} \qquad \text{taxa instantânea de variação} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Reconhecemos este limite como a derivada $f'(x_1)$.

Sabemos que uma das interpretações da derivada $f'(a)$ é a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ quando $x = a$. Agora temos uma segunda interpretação:

> A derivada $f'(a)$ é a taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ em relação a x quando $x = a$.

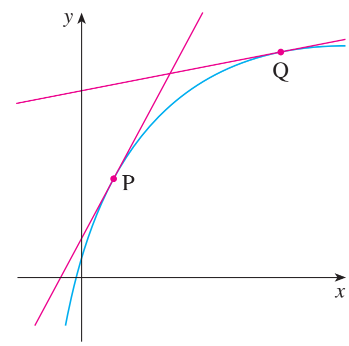


FIGURA 9
Os valores de y estão variando rapidamente em P e de modo lento em Q.

A conexão com a primeira interpretação é que, se esboçarmos a curva $y = f(x)$, então a taxa instantânea de variação será a inclinação da tangente a essa curva no ponto onde $x = a$. Isso significa que quando a derivada for grande (e, portanto, a curva for íngreme como no ponto P na Figura 9), os valores de y mudarão rapidamente. Quando a derivada for pequena, a curva será relativamente achatada (como no ponto Q) e os valores de y mudarão lentamente.

Em particular, se $s = f(t)$ for a função de posição de uma partícula que se move ao longo de uma reta, então $f'(a)$ será a taxa de variação do deslocamento s em relação ao tempo t. Em outras palavras, $f'(a)$ *é a velocidade da partícula no instante* $t = a$. A **velocidade** escalar da partícula é o valor absoluto da velocidade, isto é, $|f'(a)|$.

No próximo exemplo discutiremos o significado da derivada de uma função definida verbalmente.

V EXEMPLO 6 Um fabricante produz peças de tecido com tamanho fixo. O custo, em dólares, da produção de x metros de certo tecido é $C = f(x)$.
(a) Qual o significado da derivada $f'(x)$? Quais são suas unidades?
(b) Em termos práticos, o que significa dizer que $f'(1\,000) = 9$?
(c) O que você acha que é maior, $f'(50)$ ou $f'(500)$? E $f'(5\,000)$?

SOLUÇÃO
(a) A derivada $f'(x)$ é a taxa de variação instantânea de C em relação a x; isto é, $f'(x)$ significa a taxa de variação do custo de produção em relação ao número de metros produzidos. (Os economistas chamam essa taxa de variação de *custo marginal*. Essa ideia está discutida em mais detalhes nas Seções 3.7 e 4.7.)

Como

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

as unidades para $f'(x)$ são iguais àquelas do quociente de diferenças $\Delta C/\Delta x$. Uma vez que ΔC é medida em dólares e Δx em metros, segue que a unidade para $f'(x)$ é dólares por metro.

(b) A afirmação que $f'(1\,000) = 9$ significa que, depois de 1 000 metros da peça terem sido fabricados, a taxa segundo a qual o custo de produção está aumentando é \$ 9/m (quando $x = 1\,000$, C está aumentando 9 vezes mais rápido que x).

Uma vez que $\Delta x = 1$ é pequeno comparado com $x = 1\,000$, podemos usar a aproximação

$$f'(1\,000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

e dizer que o custo de fabricação do milésimo metro (ou do 1001º) está em torno de \$ 9.

Aqui estamos assumindo que a função custo é bem comportada; ou seja, $C(x)$ não oscila muito rapidamente próximo a $x = 1\,000$.

(c) A taxa segundo a qual o custo de produção está crescendo (por metro) é provavelmente menor quando $x = 500$ do que quando $x = 50$ (o custo de fabricação do 500º metro é menor que o custo do 50º metro), em virtude da economia de escala. (O fabricante usa mais eficientemente os custos fixos de produção.) Então

$$f'(50) > f'(500).$$

Mas, à medida que a produção expande, a operação de larga escala resultante pode se tornar ineficiente, e poderiam ocorrer custos de horas extras. Logo, é possível que a taxa de crescimento dos custos possa crescer no futuro. Assim, pode ocorrer que

$$f'(5.000) > f'(500).$$

No exemplo a seguir estimamos a taxa de variação da dívida nacional em relação ao tempo. Aqui, a função é definida não por uma fórmula, mas por uma tabela de valores.

t	$D(t)$
1994	414,0
1996	469,5
1998	467,3
2000	456,4
2002	442,3

EXEMPLO 7 Seja $D(t)$ a dívida pública bruta canadense no momento t. A tabela ao lado dá os valores aproximados dessa função, fornecendo as estimativas da dívida, em meados do ano, em bilhões de dólares, no período de 1994 a 2002. Interprete e estime os valores de $D'(1998)$.

SOLUÇÃO A derivada $D'(1998)$ indica a taxa de variação da dívida D com relação a t quando $t = 1998$, isto é, a taxa de crescimento da dívida nacional em 1998.

De acordo com a Equação 3,

$$D'(1998) = \lim_{t \to 1998} \frac{D(t) - D(1998)}{t - 1998}$$

Dessa forma, calculamos e tabulamos os valores do quociente de diferenças (as taxas médias da variação) como a seguir:

t	$\dfrac{D(t) - D(1998)}{t - 1998}$
1994	13,3
1996	$-1,1$
2000	$-5,5$
2002	$-6,3$

Da tabela vemos que $D'(1998)$ situa-se em algum lugar entre $-1,1$ e $-5,5$ bilhões de dólares por ano. [Aqui faremos a razoável suposição de que a dívida não flutuou muito entre 1998 e 2002.] Estimamos que a taxa de crescimento da divida nacional do Canadá em 1998 foi a média desses dois números, a saber:

$$D'(1998) \approx -3,3 \text{ bilhões de dólares por ano.}$$

Uma Observação sobre Unidades
As unidades para a taxa média de variação $\Delta D/\Delta t$ são as unidades para ΔD divididas pelas unidades para Δt, a saber, bilhões de dólares por ano. A taxa instantânea de variação é o limite das taxas médias de variação, de modo que é medida nas mesmas unidades: bilhões de dólares por ano.

O sinal de menos significa que o débito está *decrescendo* naquele instante.

Um outro método seria traçar a função de debito e estimar a inclinação da reta tangente quando $t = 1998$.

Nos Exemplos 3, 6 e 7, vimos três casos específicos de taxas de variação: a velocidade de um objeto é a taxa de variação do deslocamento com relação ao tempo; o custo marginal é a taxa de variação do custo de produção em relação ao número de itens produzidos; a taxa de variação do débito em relação ao tempo é de interesse em economia. Aqui está uma pequena amostra de outras taxas de variação: em física, a taxa de variação do trabalho com relação ao tempo é chamada *potência*. Os químicos que estudam reações químicas estão interessados na taxa de variação da concentração de um reagente em relação ao tempo (chamada *taxa de reação*). Um biólogo está interessado na taxa de variação da população de uma colônia de bactérias em relação ao tempo. Na realidade, o cálculo das taxas de variação é importante em todas as ciências naturais, na engenharia e mesmo nas ciências sociais. Mais exemplos serão dados na Seção 3.7.

Todas essas taxas de variação são derivadas e podem, portanto, ser interpretadas como inclinações das tangentes. Isto dá importância extra à solução de problemas envolvendo tangentes. Sempre que resolvemos um problema envolvendo retas tangentes, não estamos resolvendo apenas um problema geométrico. Estamos também resolvendo implicitamente uma grande variedade de problemas envolvendo taxas de variação nas ciências e na engenharia.

2.7 Exercícios

1. Uma curva tem por equação $y = f(x)$.
(a) Escreva uma expressão para a inclinação da reta secante pelos pontos $P(3, f(3))$ e $Q(x, f(x))$.
(b) Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente em P.

2. Faça o gráfico da curva $y = e^x$ nas janelas $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0{,}5; 0{,}5]$ por $[0{,}5; 1{,}5]$, e $[-0{,}1; 0{,}1]$ por $[0{,}9; 1{,}1]$. Dando um *zoom* no ponto $(0, 1)$, o que você percebe na curva?

3. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à parábola $y = 4x - x^2$ no ponto $(1, 3)$
(i) usando a Definição 1. (ii) usando a Equação 2.
(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).
(c) Faça os gráficos da parábola e da reta tangente. Como verificação, dê um *zoom* em direção ao ponto $(1, 3)$ até que a parábola e a reta tangente fiquem indistinguíveis.

4. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x - x^3$ no ponto $(1, 0)$
(i) usando a Definição 1. (ii) usando a Equação 2.
(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).
(c) Faça um gráfico da curva e da reta tangente em janelas retangulares cada vez menores centrados no ponto $(1, 0)$ até que a curva e a tangente pareçam indistinguíveis.

5–8 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

5. $y = 4x - 3x^2$, $(2, -4)$

6. $y = x^3 - 3x + 1$, $(2, 3)$

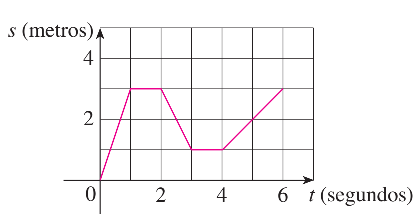
7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$

8. $y = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$, $(1, 1)$

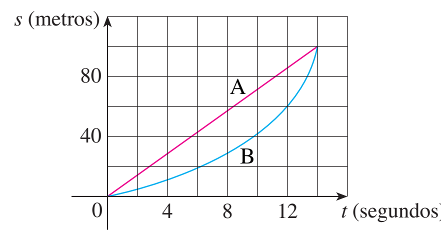
9. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ no ponto onde $x = a$.
(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, 5)$ e $(2, 3)$.
(c) Faça o gráfico da curva e de ambas as tangentes em uma mesma tela.

10. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 1/\sqrt{x}$ no ponto onde $x = a$.
(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, 1)$ e $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
(c) Faça o gráfico da curva e de ambas as tangentes em uma mesma tela.

11. (a) Uma partícula começa se movendo para a direita ao longo de uma reta horizontal; o gráfico de sua função posição está mostrado. Quando a partícula está se movendo para a direita? E para a esquerda? Quando está parada?
(b) Trace um gráfico da função velocidade.



12. São dados os gráficos das funções das posições de dois corredores, A e B, que correm 100 metros rasos e terminam empatados.



(a) Descreva e compare como os corredores correram a prova.
(b) Em que instante a distância entre os corredores é maior?
(c) Em que instante eles têm a mesma velocidade?

13. Se uma bola for atirada ao ar com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $y = 10t - 4{,}9t^2$. Encontre a velocidade quando $t = 2$.

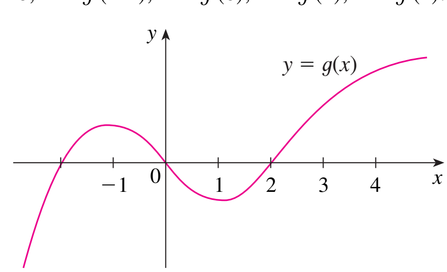
14. Se uma pedra for lançada para cima no planeta Marte com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) após t segundos é dada por $H = 10t - 1{,}86t^2$.
(a) Encontre a velocidade da pedra após um segundo.
(b) Encontre a velocidade da pedra quando $t = a$.
(c) Quando a pedra atinge a superfície?
(d) Com que velocidade a pedra atinge a superfície?

15. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação do movimento $s = 1/t^2$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula nos instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$.

16. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação $s = t^2 - 8t + 18$, onde t é medido em segundos.
(a) Encontre as velocidades médias sobre os seguintes intervalos de tempo:
(i) $[3, 4]$ (ii) $[3{,}5; 4]$
(iii) $[4, 5]$ (iv) $[4; 4{,}5]$
(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 4$.
(c) Faça o gráfico de s como uma função de t e desenhe as retas secantes cujas inclinações são as velocidades médias da parte (a), e a reta tangente cuja inclinação é a velocidade instantânea da parte (b).

17. Para a função g cujo gráfico é dado, arrume os seguintes números em ordem crescente e explique seu raciocínio:

$$0, \quad g'(-2), \quad g'(0), \quad g'(2), \quad g'(4).$$



É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

18. Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = g(x)$ em $x = 5$ se $g(5) = -3$ e $g'(5) = 4$.

19. Se uma equação de uma reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto onde $a = 2$ é $y = 4x - 5$, encontre $f(2)$ e $f'(2)$.

20. Se a reta tangente a $y = f(x)$ em (4, 3) passar pelo ponto (0, 2), encontre $f(4)$ e $f'(4)$.

21. Esboce o gráfico de uma função f para a qual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ e $f'(2) = -1$.

22. Esboce o gráfico de uma função g para a qual $g(0) = g(2) = g(4) = 0$, $g'(1) = g'(3) = 0$, $g'(0) = g'(4) = 1$, $g'(2) = -1$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

23. Se $f(x) = 3x^2 - x^3$, encontre $f'(1)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 3x^2 - x^3$ no ponto (1, 2).

24. Se $g(x) = x^4 - 2$, encontre $g'(1)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = x^4 - 2$ no ponto $(1, -1)$.

25. (a) Se $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encontre $F'(2)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 5x/(1 + x^2)$ no ponto (2, 2).
(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e a reta tangente na mesma tela.

26. (a) Se $G(x) = 4x^2 - x^3$, encontre $G'(a)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 4x^2 - x^3$ nos pontos (2, 8) e (3, 9).
(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e as retas tangentes na mesma tela.

27–32 Encontre $f'(a)$.

27. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

28. $f(t) = 2t^3 + t$

29. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

30. $f(x) = x^{-2}$

31. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

32. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1 - x}}$

33–38 Cada limite representa a derivada de certa função f em certo número a. Diga o que são f e a em cada caso.

33. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1 + h)^{10} - 1}{h}$

34. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

35. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2^x - 32}{x - 5}$

36. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \pi/4}$

37. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

38. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

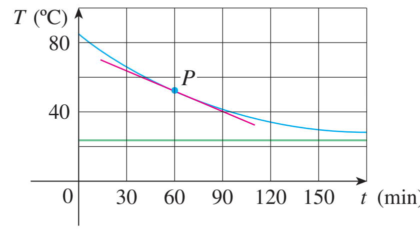
39–40 Uma partícula se move ao longo de uma reta com equação de movimento $s = f(t)$, onde s é medido em metros e t em segundos. Encontre a velocidade e a velocidade escalar quando $t = 5$.

39. $f(t) = 100 + 50t - 4{,}9t^2$

40. $f(t) = t^{-1} - t$

41. Uma lata de refrigerante morna é colocada na geladeira. Esboce o gráfico da temperatura do refrigerante como uma função do tempo. A taxa de variação inicial da temperatura é maior ou menor que a taxa de variação após 1 hora?

42. Um peru assado é tirado de um forno quando a sua temperatura atinge 85 ºC e colocado sobre uma mesa, em uma sala na qual a temperatura é 24 °C. O gráfico mostra como a temperatura do peru diminui e finalmente chega à temperatura ambiente. Por meio da medida da inclinação da reta tangente, estime a taxa de variação da temperatura após 1 hora.



43. A tabela mostra o número de passageiros P que chegaram à Irlanda por avião, em milhões.

Ano	2001	2003	2005	2007	2009
P	8,49	9,65	11,78	14,54	12,84

(a) Determine a taxa média de crescimento de P
(i) de 2001 a 2005 (ii) de 2003 a 2005
(iii) de 2005 a 2007
Em cada caso, inclua as unidades.
(b) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2005, tomando a média de duas taxas médias de variação. Quais são suas unidades?

44. O número N de franquias de uma certa cadeia popular de cafeteiras é mostrada na tabela. (São dados os números de franquias no dia 01 de outubro.)

Ano	2004	2005	2006	2007	2008
N	8.569	10.241	12.440	15.011	16.680

(a) Determine a taxa média de crescimento
(i) de 2006 a 2008 (ii) de 2006 a 2007
(iii) de 2005 a 2006
Em cada caso, inclua as unidades.
(b) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2006 tomando a média de duas taxas médias de variação. Quais são suas unidades?
(c) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2006 medindo a inclinação de uma tangente.
(d) Estime a taxa instantânea de crescimento em 2007 e compare-a com a taxa de crescimento em 2006. O que você pode concluir?

45. O custo (em dólares) de produzir x unidades de uma certa mercadoria é $C(x) = 5.000 + 10x + 0{,}05x^2$.
(a) Encontre a taxa média da variação de C em relação a x quando os níveis de produção estiverem variando
(i) de $x = 100$ a $x = 105$
(ii) de $x = 100$ a $x = 101$
(b) Encontre a taxa instantânea da variação de C em relação a x quando $x = 100$. (Isso é chamado *custo marginal*. Seu significado será explicado na Seção 3.7.)

46. Se um tanque cilíndrico comporta 100.000 litros de água, que podem escoar pela base do tanque em uma hora, então a Lei de Torricelli fornece o volume V de água que restou no tanque após t minutos como

$$V(t) = 100\,000\left(1 - \tfrac{1}{60}t\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 60$$

Encontre a taxa pela qual a água está escoando para fora do tanque (a taxa instantânea da variação de V em relação a t) como uma função de t. Quais são suas unidades? Para os instantes $t = 0$, 10, 20, 30, 40, 50 e 60 minutos, encontre a taxa do escoamento e a quantidade de água restante no tanque. Resuma o que você achou em uma ou duas sentenças. Em que instante a taxa do escoamento é a máxima? E a mínima?

47. O custo da produção de x quilogramas de ouro provenientes de uma nova mina é $C = f(x)$ dólares.
(a) Qual o significado da derivada $f'(x)$? Quais são suas unidades?
(b) O que significa a afirmativa $f'(50) = 36$?
(c) Você acha que os valores de $f'(x)$ irão crescer ou decrescer a curto prazo? E a longo prazo? Explique.

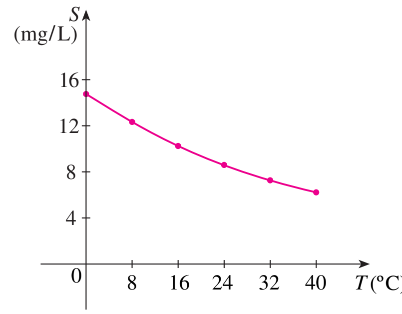
48. O número de bactérias depois de t horas em um laboratório experimental controlado é $n = f(t)$.
(a) Qual o significado da derivada $f'(5)$? Quais são suas unidades?
(b) Suponha que haja uma quantidade ilimitada de espaço e nutrientes para a bactéria. Qual será maior: $f'(5)$ ou $f'(10)$? Se a oferta de nutrientes for limitada, isso afetaria sua conclusão? Explique.

49. Seja $T(t)$ a temperatura (em °C) em Manila, horas após o meio-dia, em 19 de julho de 2011. A tabela mostra os valores dessa função registrados de duas em duas horas. Qual o significado de $T'(5)$? Estime o seu valor.

t	1	3	5	7	9	11
T	32	32	31	27	26	25

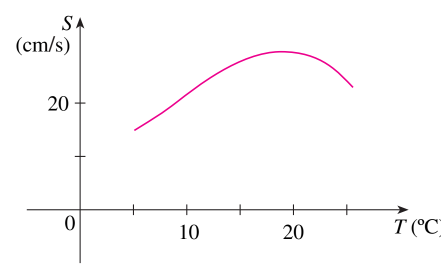
50. A quantidade (em quilogramas) de café vendida por uma companhia para uma lanchonete ao preço de p dólares por quilogramas é dada por $Q = f(p)$.
(a) Qual o significado da derivada $f'(8)$? Quais são suas unidades?
(b) $f'(8)$ é positivo ou negativo? Explique.

51. A quantidade de oxigênio que pode ser dissolvido em água depende da temperatura da água. (Logo, a poluição térmica influencia o nível de oxigênio da água.) O gráfico mostra como a solubilidades do oxigênio varia em função da temperatura T da água.
(a) Qual o significado da derivada $S'(T)$? Quais são suas unidades?
(b) Dê uma estimativa do valor $S'(16)$ e interprete-o.



Adaptado de Kupchella & Hyland, *Environmental Science: Living Within the System of Nature*, 2ª ed.; © 1989. Impresso e reproduzido eletronicamente com permissão da Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ.

52. O gráfico mostra a influência da temperatura T sobre a velocidade máxima s de nado de salmões Coho.
(a) Qual o significado da derivada $S'(T)$? Quais são suas unidades?
(b) Dê uma estimativa dos valores de $S'(15)$ e $S'(25)$ e interprete-os.



53–54 Determine se existe ou não $f'(0)$.

53. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

54. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

PROJETO ESCRITO — MÉTODOS INICIAIS PARA ENCONTRAR TANGENTES

A primeira pessoa a formular explicitamente as ideias de limite e derivada foi Sir Isaac Newton, em 1660. Mas Newton reconhecia que "Se vejo mais longe do que outros homens, é porque estou sobre os ombros de gigantes". Dois desses gigantes eram Pierre Fermat (1601-1665) e o mentor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton estava familiarizado com os métodos deles para encontrar as retas tangentes, e esses métodos desempenharam papel importante na formulação final do cálculo de Newton.

As seguintes referências contêm explicações desses métodos. Leia uma ou mais referências e escreva um relatório comparando os métodos ou de Fermat ou de Barrow com os métodos modernos. Em particular, use o método da Seção 2.7 para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 + 2x$ no ponto (1, 3) e mostre como Fermat ou Barrow teriam resolvido o mesmo problema. Embora você tenha usado as derivadas e eles não, mostre a analogia entre os métodos.

1. Boyer C.; Merzbach U. *A History of Mathematics*. Nova York: Wiley, 1989, p. 389, 432.

2. Edwards C. H. *The Historical Development of the Calculus*. Nova York: Springer-Verlag, 1979, p. 124, 132.

3. Eves H. *An Introduction to the History of Mathematics*, 6. ed. Nova York: Saunders, 1990, p. 391, 395.

4. Kline M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nova York: Oxford University Press, 1972, p. 344, 346.

2.8 A Derivada como uma Função

Na seção precedente consideramos a derivada de uma função f em um número fixo a:

$$\boxed{1} \qquad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Aqui mudamos nosso ponto de vista e deixamos o número a variar. Se substituirmos a na Equação 1 por uma variável x, obtemos

$$\boxed{2} \qquad \boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Dado qualquer número x para o qual esse limite exista, atribuímos a x o número $f'(x)$. Assim, podemos considerar f' como uma nova função, chamada **derivada de f** e definida pela Equação 2. Sabemos que o valor de f' em x, $f'(x)$, pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

A função f' é denominada derivada de f, pois foi "derivada" a partir de f pela operação limite na Equação 2. O domínio de f' é o conjunto $\{x \mid f'(x) \text{ existe}\}$ e pode ser menor que o domínio de f.

EXEMPLO 1 O gráfico de uma função f é ilustrado na Figura 1. Use-o para esboçar o gráfico da derivada f'.

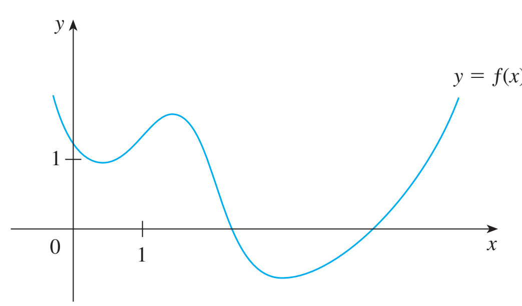


FIGURA 1

SOLUÇÃO Podemos estimar o valor da derivada para qualquer valor de x traçando a tangente no ponto $(x, f(x))$ e estimando sua inclinação. Por exemplo, para $x = 5$ traçamos a tangente em P na Figura 2(a) e estimamos sua inclinação como cerca de $\frac{3}{2}$, então $f'(5) \approx 1{,}5$. Isso nos permite desenhar o ponto $P'(5; 1{,}5)$ sobre o gráfico de f' diretamente abaixo de P. Repetindo esse procedimento em vários pontos, obteremos o gráfico ilustrado na Figura 2(b). Observe que as tangentes em A, B e C são horizontais; logo, ali a derivada é 0 e o gráfico de f' cruza o eixo x nos pontos A', B' e C' diretamente abaixo de A, B e C. Entre A e B, as tangentes têm inclinação positiva; logo, $f'(x)$ é positiva ali. Mas entre B e C as tangentes têm inclinação negativa; logo, $f'(x)$ lá é negativa.

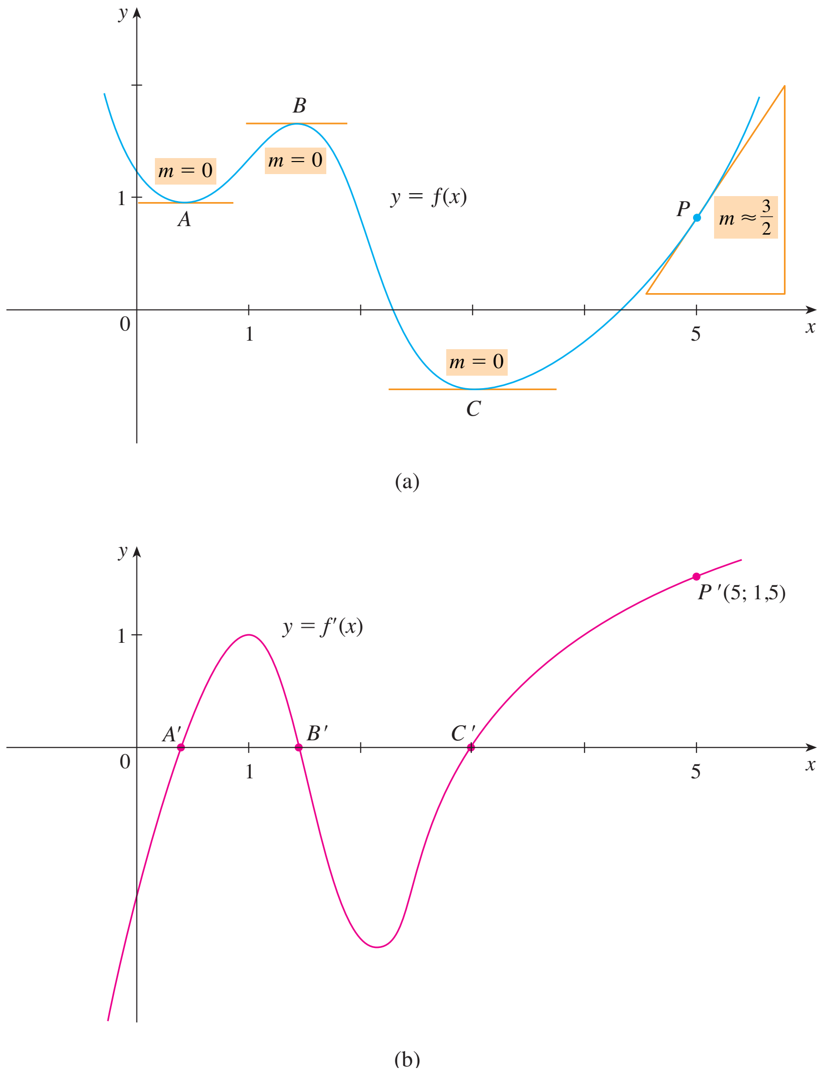


FIGURA 2

TEC *Visual 2.8* mostra uma animação da Figura 2 para várias funções.

EXEMPLO 2

(a) Se $f(x) = x^3 - x$, encontre uma fórmula para $f'(x)$.
(b) Ilustre, comparando os gráficos de f e f'.

SOLUÇÃO

(a) Ao usar a Equação 2 para calcular uma derivada, devemos nos lembrar de que a variável é h e de que x é considerado temporariamente uma constante para os cálculos do limite.

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h\to 0}\,(3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1
\end{aligned}
$$

(b) Vamos fazer os gráficos de f e f' utilizando alguma ferramenta gráfica. O resultado está na Figura 3. Observe que $f'(x) = 0$ quando f tem tangentes horizontais e que $f'(x)$ é positivo quando as tangentes têm inclinação positiva. Assim, esses gráficos servem como verificação do trabalho feito em (a).

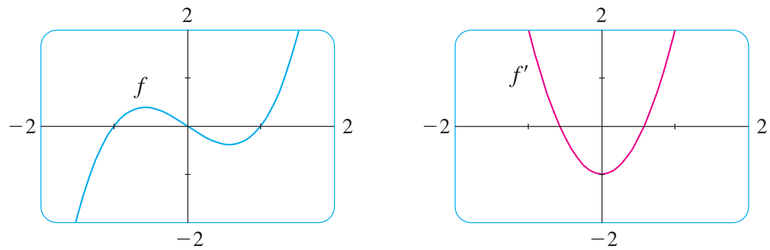


FIGURA 3

Aqui racionalizamos o numerador.

EXEMPLO 3 Se $f(x) = \sqrt{x}$, encontre a derivada de f. Diga qual é o domínio de f'.

SOLUÇÃO

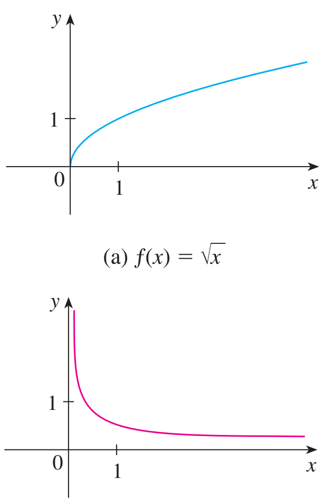
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Vemos que $f'(x)$ existe se $x > 0$; logo, o domínio de f' é $(0, \infty)$. Ele é menor que o domínio de f, que é $[0, \infty)$.



(a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

FIGURA 4

Vejamos se o resultado do Exemplo 3 é razoável, observando os gráficos de f e f' na Figura 4. Quando x estiver próximo de 0, $\sqrt{x}$ estará próximo de 0; logo, $f'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$ é muito grande, e isso corresponde a retas tangentes íngremes próximas de $f'(x)$ na Figura 4(a) e os grandes valores de $f'(x)$ logo à direita de 0 na Figura 4(b). Quando x for grande, $f'(x)$ será muito pequena, o que corresponde ao achatamento das retas tangentes no extremo direito do gráfico de f e à assíntota horizontal do gráfico de f'.

EXAMPLE 4 Encontre f' se $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$.

$$\frac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}}{e} = \frac{ad - bc}{bd} \cdot \frac{1}{e}$$

SOLUÇÃO

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \dfrac{1-x}{2+x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1-x-h)(2+x) - (1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2-x-2h-x^2-xh) - (2-x+h-x^2-xh)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)} = \lim_{h\to 0} \frac{-3}{(2+x+h)(2+x)} = -\frac{3}{(2+x)^2}$$

Outras Notações

Se usarmos a notação tradicional $y = f(x)$ para indicar que a variável independente é x e a variável dependente é y, então algumas notações alternativas para a derivada são as seguintes:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x).$$

Os símbolos D e d/dx são chamados **operadores diferenciais**, pois indicam a operação de **diferenciação**, que é o processo de cálculo de uma derivada.

O símbolo dy/dx, introduzido por Leibniz, não deve ser encarado como um quociente (por ora); trata-se simplesmente de um sinônimo para $f'(x)$. Todavia, essa notação é muito útil e proveitosa, especialmente quando usada em conjunto com a notação de incremento. Podemos reescrever a definição de derivada (Equação 2.7.6) como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Para indicar o valor de uma derivada dy/dx na notação de Leibniz em um número específico a, usamos a notação

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad \text{ou} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

que é um sinônimo para $f'(a)$.

3 Definição Uma função f é derivável ou **diferenciável em a**, se $f'(a)$ existir. É **derivável ou diferenciável em um intervalo aberto** (a, b) [ou (a, ∞) ou $(-\infty, a)$ ou $(-\infty, \infty)$] se for diferenciável em cada número do intervalo.

EXEMPLO 5 Onde a função $f(x) = |x|$ é diferenciável?

SOLUÇÃO Se $x > 0$, então $|x| = x$ e podemos escolher h suficientemente pequeno para que $x + h > 0$ e portanto $|x + h| = x + h$. Consequentemente, para $x > 0$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

e, dessa forma, f é diferenciável para qualquer $x > 0$.

Analogamente, para $x < 0$ temos $|x| = -x$ e podemos escolher h suficientemente pequeno para que $x + h < 0$, e assim $|x + h| = -(x + h)$. Portanto, para $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

e, dessa forma, f é diferenciável para qualquer $x < 0$.

Para $x = 0$ temos de averiguar

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \qquad \text{(se existir)}$$

Vamos calcular os limites à esquerda e à direita:

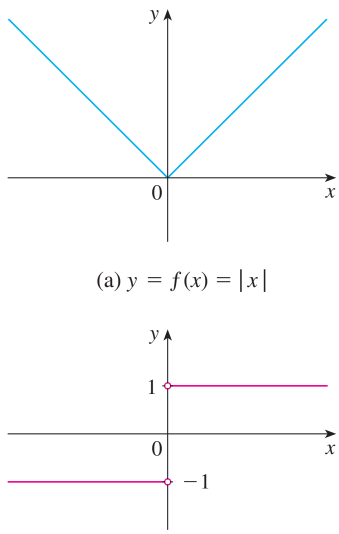
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

e

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em Leipzig em 1646 e estudou direito, teologia, filosofia e matemática na universidade local, graduando-se com 17 anos. Após obter seu doutorado em direito aos 20 anos, Leibniz entrou para o serviço diplomático, passando a maior parte de sua vida viajando pelas capitais europeias em missões políticas. Em particular, empenhou-se em afastar uma ameaça militar da França contra a Alemanha e tentou reconciliar as igrejas Católica e Protestante. Leibniz só começou a estudar seriamente matemática em 1672, quando em missão diplomática em Paris. Lá ele construiu uma máquina de calcular e encontrou cientistas, como Huygens, que dirigiram sua atenção para os últimos desenvolvimentos da matemática e da ciência. Leibniz procurou desenvolver uma lógica simbólica e um sistema de notação que simplificassem o raciocínio lógico. Em particular, a versão do cálculo publicada por ele em 1684 estabeleceu a notação e as regras para encontrar as derivadas usadas até hoje. Infelizmente, uma disputa muito acirrada de prioridades surgiu em 1690 entre os seguidores de Newton e os de Leibniz sobre quem teria inventado primeiro o cálculo. Leibniz foi até mesmo acusado de plágio pelos membros da Royal Society na Inglaterra. A verdade é que cada um inventou independentemente o cálculo. Newton chegou primeiro à sua versão do cálculo, mas, por temer controvérsias, não a publicou imediatamente. Assim, a publicação do cálculo de Leibniz em 1684 foi a primeira a aparecer.



(a) $y = f(x) = |x|$

(b) $y = f'(x)$

FIGURA 5

SP Um aspecto importante da resolução do problema é tentar encontrar uma conexão entre o dado e o desconhecido. Veja a Etapa 2 (Planejando) nos *Princípios da Resolução de Problemas* do Capítulo 1.

Uma vez que esses limites são diferentes, $f'(0)$ não existe. Logo, f é diferenciável para todo x, exceto 0.

Uma fórmula para f' é dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e seu gráfico está ilustrado na Figura 5(b). O fato de que $f'(0)$ não existe está refletido geometricamente no fato de que a curva $y = |x|$ não tem reta tangente em (0, 0). [Veja a Figura 5(a).]

Tanto a continuidade como a diferenciabilidade são propriedades desejáveis em uma função. O seguinte teorema mostra como essas propriedades estão relacionadas.

4 Teorema Se f for diferenciável em a, então f é contínua em a.

DEMONSTRAÇÃO Para demonstrar que f é contínua em a, temos de mostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Fazemos isso ao mostrar que a diferença $f(x) - f(a)$ tende a 0.

A informação dada é que f é diferenciável em a, isto é,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe (veja a Equação 2.7.5). Para conectar o dado e o desconhecido, dividimos e multiplicamos $f(x) - f(a)$ por $x - a$ (o que pode ser feito quando $x \neq a$):

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

Assim, usando a Propriedade do Produto e a Equação 2.7.5, podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Para usar o que acabamos de demonstrar, vamos começar com $f(x)$, e somar e subtrair $f(a)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} [f(a) + (f(x) - f(a))] \\ &= \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] \\ &= f(a) + 0 = f(a) \end{aligned}$$

Consequentemente, f é contínua em a.

OBSERVAÇÃO A recíproca do Teorema 4 é falsa, isto é, há funções que são contínuas, mas não são diferenciáveis. Por exemplo, a função $f(x) = |x|$ é contínua em 0, pois

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$$

(Veja o Exemplo 7 na Seção 2.3.) Mas, no Exemplo 5, mostramos que f não é diferenciável em 0.

Como uma Função Pode Não Ser Diferenciável?

Vimos que a função $y = |x|$ do Exemplo 5 não é diferenciável em 0, e a Figura 5(a) mostra que em $x = 0$ a curva muda abruptamente de direção. Em geral, se o gráfico de uma função f tiver uma "quina" ou uma "dobra", então o gráfico de f não terá tangente nesse ponto e f não será diferenciável ali. (Ao tentar calcular $f'(a)$, vamos descobrir que os limites à esquerda e à direita são diferentes.)

O Teorema 4 nos dá outra forma de uma função deixar de ter uma derivada. Ele afirma que se não for contínua em a, então f não é diferenciável em a. Então, em qualquer descontinuidade (por exemplo, uma descontinuidade de salto) f deixa de ser diferenciável.

Uma terceira possibilidade surge quando a curva tem uma **reta tangente vertical** quando $x = a$; isto é, f é contínua em a e

$$\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$$

Isso significa que a reta tangente fica cada vez mais íngreme quando $x \to a$. A Figura 6 mostra uma forma de isso acontecer, e a Figura 7(c), outra. A Figura 7 ilustra as três possibilidades discutidas.

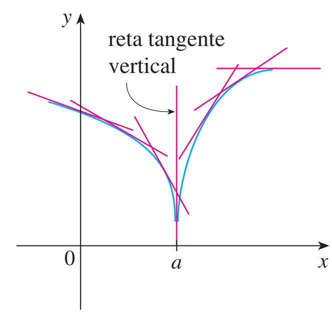


FIGURA 6

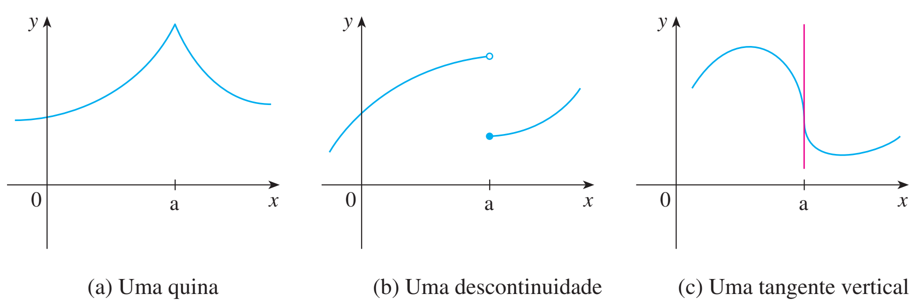


FIGURA 7
Três maneiras de f não ser diferenciável em a.

As calculadoras gráficas e os computadores são outra possibilidade de análise da diferenciabilidade. Se f for diferenciável em a, ao darmos *zoom* em direção ao ponto $(a, f(a))$, o gráfico vai se endireitando e se parecerá cada vez mais com uma reta. (Veja a Figura 8. Vimos um exemplo específico na Figura 2 da Seção 2.7.) Por outro lado, independentemente da maneira como dermos o *zoom* em direção a pontos como os das Figuras 6 e 7(a), não poderemos eliminar a ponta aguda ou quina (veja a Figura 9).

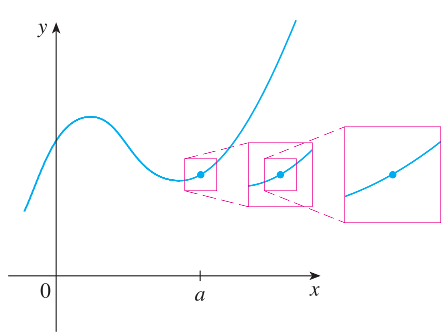


FIGURA 8
f é diferenciável em a.

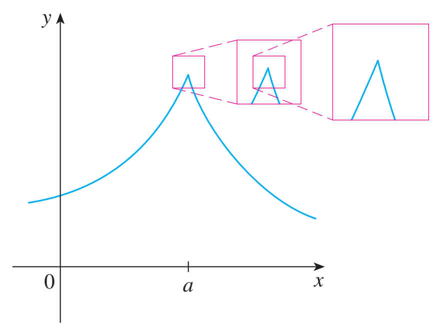


FIGURA 9
f não é diferenciável em a.

Derivadas de Ordem Superior

Se f for uma função diferenciável, então sua derivada f' também é uma função, de modo que f' pode ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$. Esta nova função f'' é chamada de **segunda derivada** ou derivada de ordem dois de f. Usando a notação de Leibniz, escrevemos a segunda derivada de $y = f(x)$ como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

EXEMPLO 6 Se $f(x) = x^3 - x$, encontre e interprete $f''(x)$.

SOLUÇÃO No Exemplo 2, encontramos que a primeira derivada é $f'(x) = 3x^2 - 1$. Assim, a segunda derivada é

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x$$

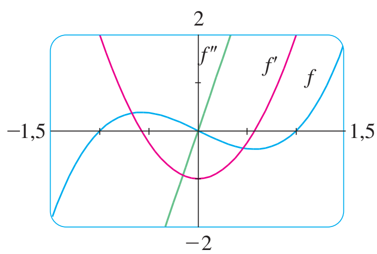


FIGURA 10

TEC Em *Module 2.8*, você poderá ver como a mudança dos coeficientes de um polinômio afeta a aparência dos gráficos de f, f' e f''.

Os gráficos de f, f' e f'' são mostrados na Figura 10.

Podemos interpretar $f''(x)$ como a inclinação da curva $y = f'(x)$ no ponto $(x, f'(x))$. Em outras palavras, é a taxa de variação da inclinação da curva original $y = f(x)$.

Observe pela Figura 10 que $f''(x)$ é negativa quando $y = f'(x)$ tem inclinação negativa e positiva quando $y = f'(x)$ tem inclinação positiva. Assim, os gráficos servem como verificação de nossos cálculos.

Em geral, podemos interpretar uma segunda derivada como uma taxa de variação de uma taxa de variação. O exemplo mais familiar disso é a *aceleração*, que é definida desta maneira:

Se $s = s(t)$ for a função da posição de um objeto que se move em uma reta, sabemos que sua primeira derivada representa a velocidade $v(t)$ do objeto como uma função do tempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

A taxa instantânea de variação da velocidade com relação ao tempo é chamada **aceleração** $a(t)$ do objeto. Assim, a função aceleração é a derivada da função velocidade e, portanto, é a segunda derivada da função posição:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

ou, na notação de Leibniz,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

A **terceira derivada** f''' (ou derivada de terceira ordem) é a derivada da segunda derivada: $f''' = (f'')'$. Assim, $f'''(x)$ pode ser interpretada como a inclinação da curva $y = f''(x)$ ou como a taxa de variação $f''(x)$. Se $y = f(x)$, então as notações alternativas são

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

O processo pode continuar. A quarta derivada f'''' (ou derivada de quarta ordem) é usualmente denotada por $f^{(4)}$. Em geral, a n-ésima derivada de f é denotada por $f^{(n)}$ e é obtida a partir de f, derivando n vezes. Se $y = f(x)$, escrevemos

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

EXEMPLO 7 Se $f(x) = x^3 - x$, encontre $f'''(x)$ e $f^{(4)}(x)$.

SOLUÇÃO No Exemplo 6 encontramos $f''(x) = 6x$. O gráfico da segunda derivada tem equação $y = 6x$ e portanto é uma reta com inclinação 6. Como a derivada $f'''(x)$ é a inclinação de $f''(x)$, temos

$$f'''(x) = 6$$

para todos os valores de x. Assim, f''' é uma função constante e seu gráfico é uma reta horizontal. Portanto, para todos os valores de x,

$$f^{(4)}(x) = 0$$

Podemos interpretar fisicamente a terceira derivada no caso em que a função é a função posição $s = s(t)$ de um objeto que se move ao longo de uma reta. Como $s''' = (s'')' = a'$, a terceira derivada da função posição é a derivada da função aceleração e é chamada ***jerk***:

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

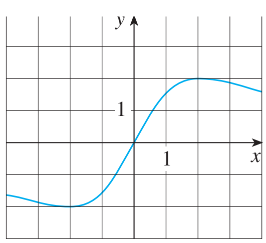
Assim, o *jerk* j é a taxa de variação da aceleração. O nome é adequado (*jerk*, em português, significa solavanco, sacudida), pois um *jerk* grande significa uma variação súbita na aceleração, o que causa um movimento abrupto em um veículo.

Vimos que uma aplicação da segunda e terceira derivadas ocorre na análise do movimento de objetos usando aceleração e *jerk*. Investigaremos mais uma aplicação da segunda derivada na Seção 4.3, quando mostraremos como o conhecimento de f'' nos dá informação sobre a forma do gráfico de f. No Capítulo 11, no Volume II, veremos como a segunda derivada e as derivadas de ordem mais alta nos permitem representar funções como somas de séries infinitas.

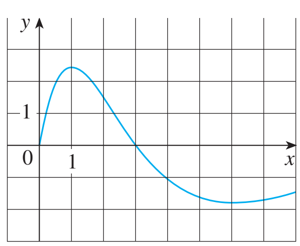
2.8 Exercícios

1–2 Use os gráficos dados para estimar o valor de cada derivada. Esboce então o gráfico de f'.

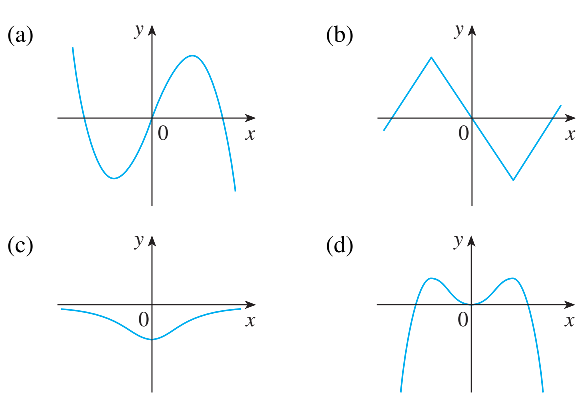
1. (a) $f'(-3)$
(b) $f'(-2)$
(c) $f'(-1)$
(d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$
(f) $f'(2)$
(g) $f'(3)$

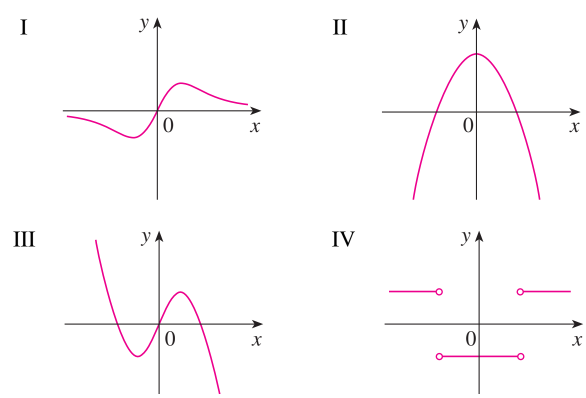


2. (a) $f'(0)$
(b) $f'(1)$
(c) $f'(2)$
(d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$
(f) $f'(5)$
(g) $f'(6)$
(h) $f'(7)$



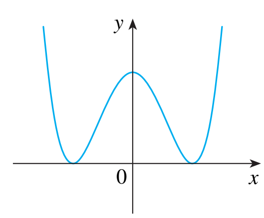
3. Associe o gráfico de cada função em (a)-(d) com o gráfico de sua derivada em I–IV. Dê razões para suas escolhas.



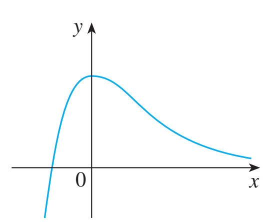


4–11 Trace ou copie o gráfico da função f dada. (Assuma que os eixos possuem escalas iguais.) Use, então, o método do Exemplo 1 para esboçar o gráfico de f' abaixo.

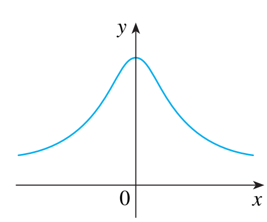
4.



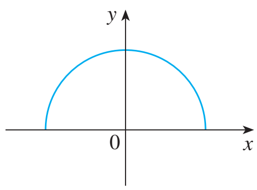
5.



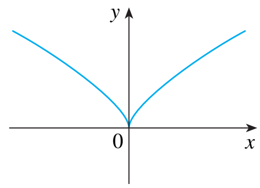
6.



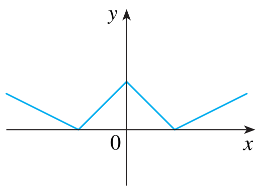
7.



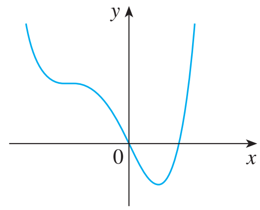
8.



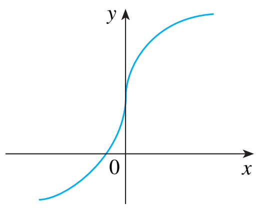
9.



10.

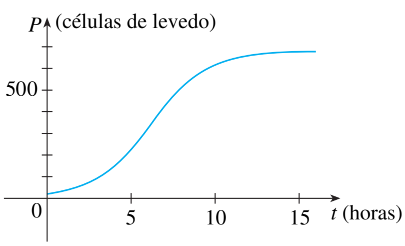


11.



---

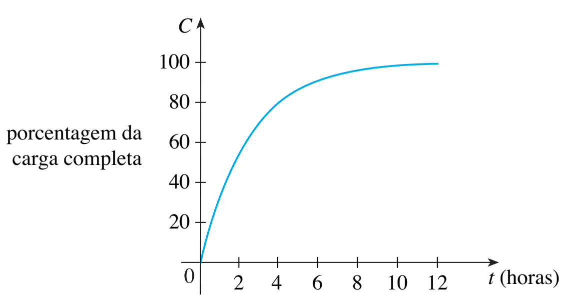
12. O gráfico mostrado corresponde ao da função população $P(t)$ de cultura em laboratório de células de levedo. Use o método do Exemplo 1 para obter o gráfico da derivada $P'(t)$. O que o gráfico de P' nos diz sobre a população de levedo?



13. Uma pilha recarregável é colocada no carregador. O gráfico mostra $C(t)$, a porcentagem de capacidade total que a pilha alcança conforme a função de tempo t passa (em horas).

(a) Qual o significado da derivada $C'(t)$?

(b) Esboce o gráfico de $C'(t)$. O que o gráfico diz?

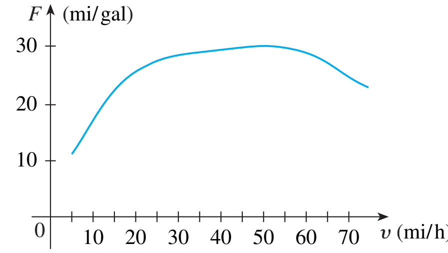


14. O gráfico (do Departamento de Energia dos EUA) mostra como a velocidade do carro afeta o rendimento do combustível. O rendimento do combustível F é medido em milhas por galão e a velocidade v é medida em milhas por hora.

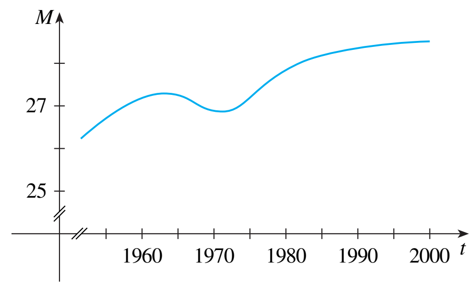
(a) Qual o significado da derivada $F'(v)$?

(b) Esboce o gráfico de $F'(v)$.

(c) Em qual velocidade você deve dirigir se quer economizar combustível?



15. O gráfico mostra como a idade média dos homens japoneses quando se casam pela primeira vez variou na última metade do século XX. Esboce o gráfico da função derivada $M'(t)$. Em quais os anos a derivada foi negativa?



16–18 Faça um esboço cuidadoso de f e abaixo dele esboce o gráfico de f', como foi feito nos Exercícios 4–11. Você pode sugeir uma fórmula para $f'(x)$ a partir de seu gráfico?

16. $f(x) = \text{sen}\, x$

17. $f(x) = e^x$

18. $f(x) = \ln x$

---

19. Seja $f(x) = x^2$.

(a) Estime os valores de $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1)$ e $f'(2)$ fazendo uso de uma ferramenta gráfica para dar *zoom* no gráfico de f.

(b) Use a simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2}), f'(-1)$ e $f'(-2)$.

(c) Utilize os resultados de (a) e (b) para conjecturar uma fórmula para $f'(x)$.

(d) Use a definição de derivada para demonstrar que sua conjectura em (c) está correta.

20. Seja $f(x) = x^3$.

(a) Estime os valores de $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1), f'(2)$ e $f'(3)$ fazendo uso de uma ferramenta gráfica para dar *zoom* no gráfico de f.

(b) Use simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2}), f'(-1), f'(-2)$ e $f'(-3)$.

(c) Empregue os valores de (a) e (b) para fazer o gráfico de f'.

(d) Conjecture uma fórmula para $f'(x)$.

(e) Use a definição de derivada para demonstrar que sua conjectura em (d) está correta.

21–31 Encontre a derivada da função dada usando a definição. Diga quais são os domínios da função e da derivada.

21. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

22. $f(x) = mx + b$

23. $f(t) = 5t - 9t^2$

24. $f(x) = 1{,}5x^2 - x + 3{,}7$

25. $f(x) = x^3 - 3x + 5$

26. $f(x) = x + \sqrt{x}$

27. $g(x) = \sqrt{9 - x}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

29. $G(t) = \dfrac{1 - 2t}{3 + t}$

30. $f(x) = x^{3/2}$

31. $f(x) = x^4$

---

32. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ começando pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$ e usando as transformações da Seção 1.3.
(b) Use o gráfico da parte (a) para esboçar o gráfico de f'.
(c) Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$. Quais os domínios de f e f'?
(d) Use uma ferramenta gráfica para fazer o gráfico de f' e compare-o com o esboço da parte (b).

33. (a) Se $f(x) = x^4 + 2x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável, comparando os gráficos de f e f'.

34. (a) Se $f(x) = x + 1/x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável, comparando os gráficos de f e f'.

35. A taxa de desemprego $U(t)$ varia com o tempo. A tabela fornece a porcentagem de desempregados na força de trabalho australiana em meados de 1995 a 2004.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1995	8,1	2000	6,2
1996	8,0	2001	6,9
1997	8,2	2002	6,5
1998	7,9	2003	6,2
1999	6,7	2004	5,6

(a) Qual o significado de $U'(t)$? Quais são suas unidades?
(b) Construa uma tabela de valores para $U'(t)$.

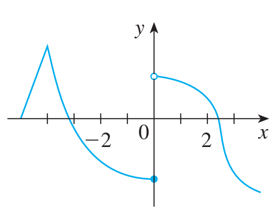
36. Seja $P(t)$ a porcentagem da população das Filipinas com idade maior que 60 anos no instante t. A tabela fornece projeções dos valores desta função de 1995 a 2020.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1995	5,2	2010	6,7
2000	5,5	2015	7,7
2005	6,1	2020	8,9

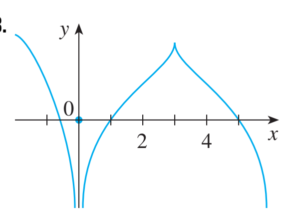
(a) Qual o significado de $P'(t)$? Quais são suas unidades?
(b) Construa uma tabela de valores para $P'(t)$.
(c) Faça os gráficos de P e P'.

37–40 O gráfico de f é dado. Indique os números nos quais f não é diferenciável.

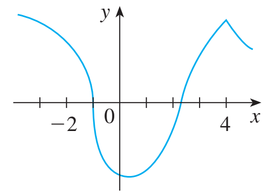
37.



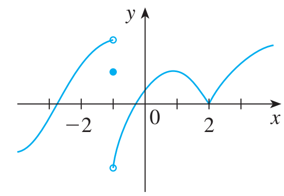
38.



39.



40.

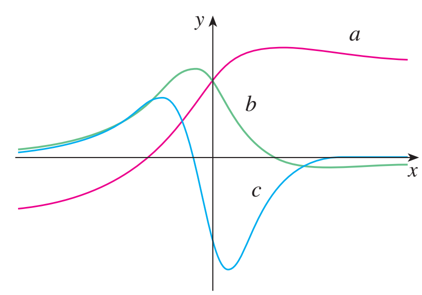


---

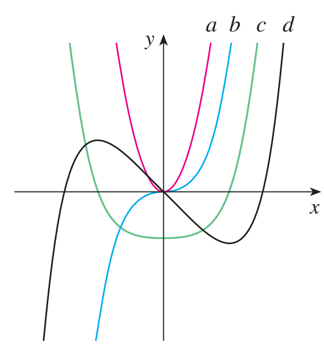
41. Faça o gráfico da função $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Dê *zoom* primeiro em direção ao ponto $(-1, 0)$ e, então, em direção à origem. Qual a diferença entre os comportamentos de f próximo a esses dois pontos? O que você conclui sobre a diferenciabilidade de f?

42. Dê *zoom* em direção aos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(-1, 0)$ sobre o gráfico da função $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. O que você observa? Explique o que você viu em termos da diferenciabilidade de g.

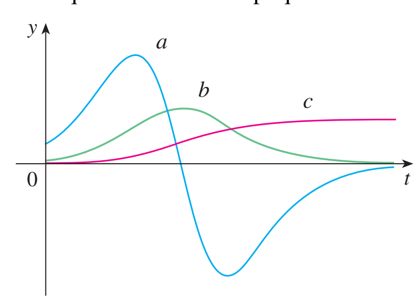
43. A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



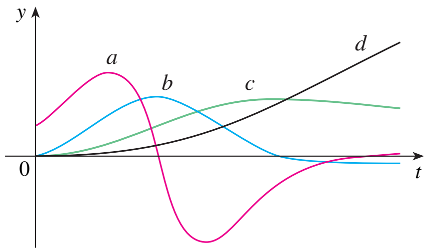
44. A figura mostra os gráficos de f, f', f'' e f'''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



45. A figura mostra os gráficos de três funções. Uma é a função da posição de um carro, outra é a velocidade do carro e outra é sua aceleração. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



46. A figura mostra os gráficos de quatro funções. Uma é a função da posição de um carro, outra é a velocidade do carro, outra é sua aceleração e outra é seu *jerk*. Identifique cada curva e explique suas escolhas.

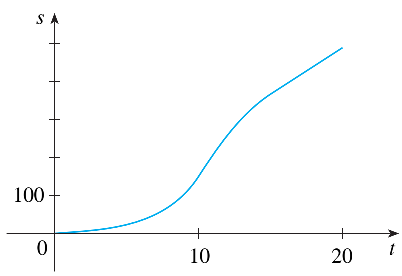


47–48 Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$ e $f''(x)$. A seguir, trace f, f' e f'' em uma mesma tela e verifique se suas respostas são razoáveis.

47. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ **48.** $f(x) = x^3 - 3x$

49. Se $f(x) = 2x^2 - x^3$, encontre $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ e $f^{(4)}(x)$. Trace f, f', f'' e f''' em uma única tela. Os gráficos são consistentes com as interpretações geométricas destas derivadas?

50. (a) É mostrado o gráfico da função posição de um veículo, onde s é medido em metros e t, em segundos. Use-o para traçar a velocidade e a aceleração do veículo. Qual é a aceleração em $t = 10$ segundos?



(b) Use a curva da aceleração da parte (a) para estimar o *jerk* em $t = 10$ segundos. Qual a unidade do *jerk*?

51. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
(a) Se $a \neq 0$, use a Equação 2.7.5 para encontrar $f'(a)$.
(b) Mostre que $f'(0)$ não existe.
(c) Mostre que $y = \sqrt[3]{x}$ tem uma reta tangente vertical em $(0, 0)$. (Relembre o formato do gráfico de f. Veja a Figura 13 na Seção 1.2.)

52. (a) Se $g(x) = x^{2/3}$, mostre que $g'(0)$ não existe.
(b) Se $a \neq 0$, encontre $g'(a)$.
(c) Mostre que $y = x^{2/3}$ tem uma reta tangente vertical em $(0, 0)$.
(d) Ilustre a parte (c) fazendo o gráfico de $y = x^{2/3}$.

53. Mostre que a função $f(x) = |x - 6|$ não é diferenciável em 6. Encontre uma fórmula para f' e esboce seu gráfico.

54. Onde a função maior inteiro $f(x) = [\![x]\!]$ não é diferenciável? Encontre uma fórmula para f' e esboce seu gráfico.

55. (a) Esboce o gráfico da função $f(x) = x|x|$.
(b) Para quais valores de x é f diferenciável?
(c) Encontre uma fórmula para f'.

56. As derivadas **à esquerda** e **à direita** de F em a são definidas por

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

e

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

se esses limites existirem. Então $f'(a)$ existe se, e somente se, essas derivadas unilaterais existirem e forem iguais.
(a) Encontre $f'_-(4)$ e $f'_+(4)$ para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 5 - x & \text{se } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(b) Esboce o gráfico de f.
(c) Onde f é descontínua?
(d) Onde f não é diferenciável?

57. Lembre-se de que uma função f é chamada *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, e *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$ para cada um destes x. Demonstre cada uma das afirmativas a seguir.
(a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.
(b) A derivada de uma função ímpar é uma função par.

58. Quando você abre uma torneira de água quente, a temperatura T da água depende de quanto tempo a água está fluindo.
(a) Esboce um gráfico possível de T como uma função do tempo t que decorreu desde que a torneira foi aberta.
(b) Descreva como é a taxa de variação de T em relação a t quando t está crescendo.
(c) Esboce um gráfico da derivada de T.

59. Seja ℓ a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$. O *ângulo de inclinação* de ℓ é o ângulo ϕ que ℓ faz com a direção positiva do eixo x. Calcule ϕ com a precisão de um grau.

2 Revisão

Verificação de Conceitos

1. Explique o significado de cada um dos limites a seguir e ilustre com um esboço.
(a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$
(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
(e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2. Descreva as várias situações nas quais um limite pode não existir. Ilustre-as com figuras.

3. Enuncie cada uma das seguintes Propriedades dos Limites.
(a) Propriedade da Soma (b) Propriedade da Diferença
(c) Propriedade do Múltiplo (d) Propriedade do Produto Constante
(e) Propriedade do Quociente (f) Propriedade da Potência
(g) Propriedade da Raiz

4. O que afirma o Teorema do Confronto?

5. (a) O que significa dizer que uma reta $x = a$ é uma assíntota vertical da curva $y = f(x)$? Trace curvas que ilustrem cada uma das várias possibilidades.

(b) O que significa dizer que uma reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$? Trace curvas que ilustrem cada uma das várias possibilidades.

6. Quais das curvas a seguir têm assíntotas verticais? E horizontais?

(a) $y = x^4$ (b) $y = \operatorname{sen} x$

(c) $y = \operatorname{tg} x$ (d) $y = \operatorname{tg}^{-1} x$

(e) $y = e^x$ (f) $y = \ln x$

(g) $y = 1/x$ (h) $y = \sqrt{x}$

7. (a) Qual o significado de f ser contínua em a?

(b) Qual o significado de f ser contínua no intervalo $(-\infty, \infty)$? Nesse caso, o que se pode dizer sobre o gráfico de f?

8. O que afirma o Teorema do Valor Intermediário?

9. Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

10. Considere um objeto movendo-se ao longo de uma reta com a posição dada por $f(t)$ no momento t. Escreva uma expressão para a velocidade instantânea do objeto em $t = a$. Como pode ser interpretada essa velocidade em termos do gráfico de f?

11. Se $y = f(x)$ e x variar de x_1 a x_2, escreva uma expressão para o seguinte:

(a) Taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$.

(b) Taxa instantânea de variação de y em relação a x em $x = x_1$.

12. Defina a derivada $f'(a)$. Discuta as duas maneiras de interpretar esse número.

13. Defina a segunda derivada de f. Se $f(t)$ for a função de posição de uma partícula, como você pode interpretar a segunda derivada?

14. (a) O que significa f ser diferenciável em a?

(b) Qual a relação entre diferenciabilidade e continuidade de uma função?

(c) Esboce o gráfico de uma função que é contínua, mas não diferenciável em $a = 2$.

15. Descreva as várias situações nas quais uma função não é diferenciável. Ilustre-as com figuras.

Teste – Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 4}\left(\frac{2x}{x-4} - \frac{8}{x-4}\right) = \lim_{x\to 4}\frac{2x}{x-4} - \lim_{x\to 4}\frac{8}{x-4}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6} = \frac{\lim_{x\to 1}(x^2+6x-7)}{\lim_{x\to 1}(x^2+5x-6)}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x^2+2x-4} = \frac{\lim_{x\to 1}(x-3)}{\lim_{x\to 1}(x^2+2x-4)}$

4. Se $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ não existe.

5. Se $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ não existe.

6. Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ não existem, então $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ não existe.

7. Se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe mas $\lim_{x\to a} g(x)$ não existe, então $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ não existe.

8. Se $\lim_{x\to 6}[f(x)g(x)]$ existe, então o limite deve ser $f(6)g(6)$.

9. Se p for um polinômio, então $\lim_{x\to b} p(x) = p(b)$.

10. Se $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = 0$.

11. Uma função pode ter duas assíntotas horizontais distintas.

12. Se f tem domínio $[0, \infty)$ e não possui assíntota horizontal, então $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

13. Se a reta $x = 1$ for uma assíntota vertical de $y = f(x)$, então f não está definida em 1.

14. Se $f(1) > 0$ e $f(3) < 0$, então existe um número c entre 1 e 3 tal que $f(c) = 0$.

15. Se f for contínua em 5 e $f(5) = 2$ e $f(4) = 3$, então $\lim_{x\to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.

16. Se f for contínua em $[-1, 1]$ e $f(-1) = 4$ e $f(1) = 3$, então existe um número r tal que $|r| < 1$ e $f(r) = \pi$.

17. Seja f uma função tal que $\lim_{x\to 0} f(x) = 6$. Então existe um número positivo δ tal que, se $0 < |x| < \delta$, então $|f(x) - 6| < 1$.

18. Se $f(x) > 1$ para todo x e $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, então $\lim_{x\to 0} f(x) > 1$.

19. Se f for contínua em a, então f é diferenciável em a.

20. Se $f'(r)$ existe, então $\lim_{x\to r} f(x) = f(r)$.

21. $\displaystyle\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

22. A equação $x^{10} - 10x^2 + 5 = 0$ tem uma raiz no intervalo $(0, 2)$.

23. Se f é contínua em a, então $|f|$ também o é.

24. Se $|f|$ é contínua em a, então f também o é.

Exercícios

1. É dado o gráfico de f.

(a) Encontre cada limite, ou explique por que ele não existe.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to -3^+} f(x)$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to -3} f(x)$ (iv) $\displaystyle\lim_{x\to 4} f(x)$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ (vi) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x)$

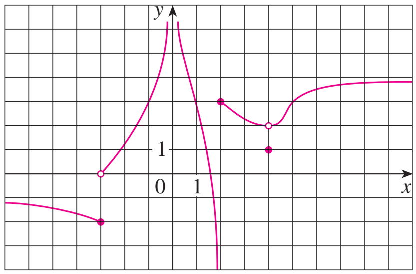
(vii) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} f(x)$ (viii) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x)$

(b) Dê as equações das assíntotas horizontais.

(c) Dê as equações das assíntotas verticais.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

(d) Em que números f é descontínua? Explique.



2. Esboce um gráfico de um exemplo de função f que satisfaça as seguintes condições:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-3} f(x) = \infty$,
$\lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to3^+} f(x) = 2$,
f é contínua à direita em 3.

3–20 Encontre o limite.

3. $\lim_{x\to1} e^{x^3-x}$

4. $\lim_{x\to3} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

5. $\lim_{x\to-3} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

6. $\lim_{x\to1^+} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

7. $\lim_{h\to0} \dfrac{(h-1)^3+1}{h}$

8. $\lim_{t\to2} \dfrac{t^2-4}{t^3-8}$

9. $\lim_{r\to9} \dfrac{\sqrt{r}}{(r-9)^4}$

10. $\lim_{v\to4^+} \dfrac{4-v}{|4-v|}$

11. $\lim_{u\to1} \dfrac{u^4-1}{u^3+5u^2-6u}$

12. $\lim_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2}$

13. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

14. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

15. $\lim_{x\to\pi^-} \ln(\operatorname{sen} x)$

16. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1-2x^2-x^4}{5+x-3x^4}$

17. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)$

18. $\lim_{x\to\infty} e^{x-x^2}$

19. $\lim_{x\to0^+} \operatorname{tg}^{-1}(1/x)$

20. $\lim_{x\to1} \left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$

21–22 Use gráficos para descobrir as assíntotas das curvas. E então demonstre o que você tiver descoberto.

21. $y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

22. $y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}$

23. Se $2x-1 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ para $0 < x < 3$, encontre $\lim_{x\to1} f(x)$.

24. Demonstre que $\lim_{x\to0} x^2\cos(1/x^2) = 0$.

25–28 Demonstre cada afirmação usando a definição precisa de limite.

25. $\lim_{x\to2} (14-5x) = 4$

26. $\lim_{x\to0} \sqrt[3]{x} = 0$

27. $\lim_{x\to2} (x^2-3x) = -2$

28. $\lim_{x\to4^+} \dfrac{2}{\sqrt{x-4}} = \infty$

29. Considere

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \\ 3-x & \text{se } 0 \leqslant x < 3 \\ (x-3)^2 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

(a) Calcule cada limite, se ele existir.

(i) $\lim_{x\to0^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to0^-} f(x)$ (iii) $\lim_{x\to0} f(x)$

(iv) $\lim_{x\to3^-} f(x)$ (v) $\lim_{x\to3^+} f(x)$ (vi) $\lim_{x\to3} f(x)$

(b) Onde f é descontínua?

(c) Esboce o gráfico de f.

30. Considere

$$g(x) = \begin{cases} 2x-x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2-x & \text{se } 2 < x \leqslant 3 \\ x-4 & \text{se } 3 < x < 4 \\ \pi & \text{se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(a) Para cada um dos números 2, 3 e 4, descubra se g é contínua à esquerda, à direita ou contínua no número.

(b) Esboce o gráfico de g.

31–32 Mostre que cada função é contínua em seu domínio. Diga qual é o domínio.

31. $h(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$

32. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-2}$

33–34 Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação no intervalo dado.

33. $x^5 - x^3 + 3x - 5 = 0$, $(1, 2)$

34. $\cos\sqrt{x} = e^x - 2$, $(0, 1)$

35. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = 9 - 2x^2$ no ponto $(2, 1)$.

(b) Encontre uma equação dessa reta tangente.

36. Encontre as equações de retas tangentes à curva

$$y = \frac{2}{1-3x}$$

nos pontos de abscissas 0 e -1.

37. O deslocamento (em metros) de um objeto movendo-se ao longo de uma reta é dado por $s = 1 + 2t + \frac{1}{4}t^2$, onde t é medido em segundos.

(a) Encontre a velocidade média nos seguintes períodos.

(i) $[1, 3]$ (ii) $[1, 2]$

(iii) $[1; 1{,}5]$ (iv) $[1; 1{,}1]$

(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 1$.

38. De acordo com a Lei de Boyle, se a temperatura de um gás confinado for mantida constante, então o produto da pressão P pelo volume V é uma constante. Suponha que, para um certo gás, $PV = 4.000$, P é medido em pascals e V é medido em litros.

(a) Encontre a taxa de variação média de P quando V aumenta de 3 L para 4 L.

(b) Expresse V como uma função de P e mostre que a taxa de variação instantânea de V em relação a P é inversamente proporcional ao quadrado de P.

39. (a) Use a definição de derivada para encontrar $f'(2)$, onde $f(x) = x^3 - 2x$.

(b) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 2x$ no ponto $(2, 4)$.

(c) Ilustre a parte (b) fazendo o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

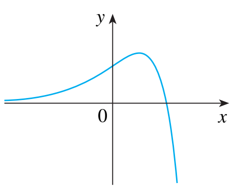
40. Encontre uma função f e um número a tais que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

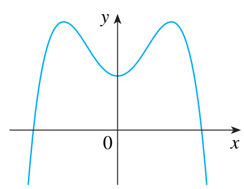
41. O custo total de saldar uma dívida a uma taxa de juros de $r\%$ ao ano é $C = f(r)$.
(a) Qual o significado da derivada $f'(r)$? Quais são suas unidades?
(b) O que significa a afirmativa $f'(10) = 1200$?
(c) $f'(r)$ é sempre positiva ou muda de sinal?

42–44 Trace ou copie o gráfico da função. Então, esboce o gráfico de sua derivada.

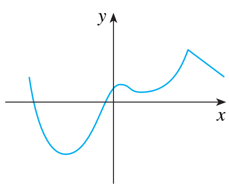
42.



43.



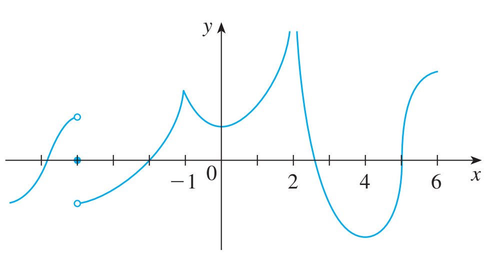
44.



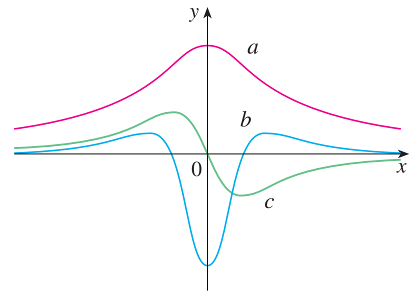
45. (a) Se $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$, use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$.
(b) Encontre os domínios de f e f'.
(c) Faça os gráficos na mesma tela de f e f'. Compare os gráficos para ver se sua resposta da parte (a) é razoável.

46. (a) Encontre as assíntotas do gráfico de $f(x) = \dfrac{4 - x}{3 + x}$ e use-as para esboçar o gráfico.
(b) Use o gráfico da parte (a) para esboçar o gráfico de f'.
(c) Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$.
(d) Use uma ferramenta gráfica para fazer o gráfico de f' e compare-o com o esboço da parte (b).

47. É dado o gráfico de f. Indique os números nos quais f não é diferenciável.



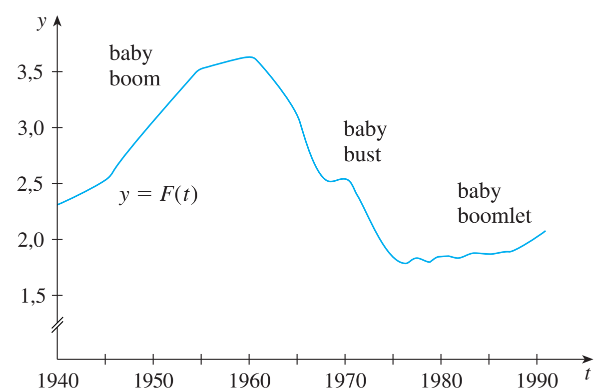
48. A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



49. Seja $E(t)$ o valor do euro (a moeda europeia) em termos do dólar americano no instante t. A tabela dá valores desta função, em meados do ano, de 2000 a 2004. Interprete e estime os valores de $E'(2002)$.

t	2000	2001	2002	2003	2004
$E(t)$	0,955	0,847	0,986	1,149	1,218

50. A *taxa de fertilidade total* no momento t, denotada por $F(t)$, é a estimativa do número médio de crianças nascidas de cada mulher (supondo que a taxa de nascimento corrente permaneça constante). O gráfico da taxa de fertilidade total dos Estados Unidos mostra as flutuações entre 1940 a 1990.
(a) Estime os valores de $F'(1950)$, $F'(1965)$ e $F'(1987)$.
(b) Qual o significado dessas derivadas?
(c) Você pode sugerir as razões para os valores dessas derivadas?



51. Suponha que $|f(x)| \leqslant g(x)$ para todo x, onde $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Encontre $\lim_{x \to a} f(x)$.

52. Seja $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$.
(a) Para quais valores de a existe $\lim_{x \to a} f(x)$?
(b) Em quais números f é descontínua?

Problemas Quentes

Em uma discussão anterior consideramos a estratégia de *introduzir algo novo* nos **Princípios da Resolução de Problemas** (No final do Capítulo 1). No exemplo a seguir vamos mostrar como esse princípio pode ser algumas vezes proveitoso quando calculamos os limites. A ideia é mudar a variável – introduzir uma nova variável relacionada à original – de forma a tornar mais simples o problema. Mais tarde, na Seção 5.5, faremos uso mais extensivo dessa ideia geral.

EXEMPLO 1 Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x}$, onde c é uma constante.

SOLUÇÃO Colocado dessa forma, esse limite parece desafiador. Na Seção 2.3 calculamos vários limites nos quais tanto o numerador quanto o denominador tendem a zero. Lá, nossa estratégia foi realizar algum tipo de manipulação algébrica que levasse a um cancelamento simplificador, porém, aqui não está claro que tipo de álgebra será necessário.

Assim, introduzimos uma nova variável t pela equação

$$t = \sqrt[3]{1 + cx}$$

Também necessitamos expressar x em termos de t, e então resolvemos esta equação:

$$t^3 = 1 + cx \Rightarrow x = \frac{t^3 - 1}{c} \qquad (\text{se } c \neq 0)$$

Observe que $x \to 0$ é equivalente a $t \to 1$. Isso nos permite converter o limite dado em outro, envolvendo a variável t:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x} = \lim_{t \to 1} \frac{t - 1}{(t^3 - 1)/c} = \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1}$$

A mudança de variável nos permitiu substituir um limite relativamente complicado por um mais simples, de um tipo já visto antes. Fatorando o denominador como uma diferença dos cubos, obtemos

$$\lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} = \lim_{t \to 1} \frac{c}{t^2 + t + 1} = \frac{c}{3}$$

Ao fazer a mudança da variável, tivemos de descartar o caso $c = 0$. Mas, se $c = 0$, a função é nula para todo x diferente de zero e então seu limite é 0. Assim, em todos os casos, o limite é $c/3$.

As questões a seguir destinam-se a testar e desafiar suas habilidades na resolução de problemas. Algumas delas requerem uma considerável quantidade de tempo para ser resolvidas; assim sendo, não se desencoraje se não puder resolvê-las de imediato. Se você tiver dificuldades, pode ser proveitoso rever a discussão sobre os princípios de resolução de problemas, no Capítulo 1.

Problemas

1. Calcule $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

2. Encontre números a e b tais que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$.

3. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x}$.

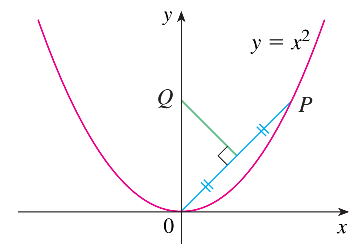


FIGURA PARA O PROBLEMA 4

4. A figura mostra um ponto P sobre a parábola $y = x^2$ e um ponto Q onde a perpendicular que bissecta OP intercepta o eixo y. À medida que P tende à origem ao longo da parábola, o que acontece com Q? Ele tem uma posição-limite? Se sim, encontre-a.

5. Calcule os limites a seguir, se existirem, onde $[\![x]\!]$ denota a função maior inteiro.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{[\![x]\!]}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\,[\![1/x]\!]$

6. Esboce a região do plano definida por cada uma das seguintes equações.

(a) $[\![x]\!]^2 + [\![y]\!]^2 = 1$ (b) $[\![x]\!]^2 - [\![y]\!]^2 = 3$ (c) $[\![x + y]\!]^2 = 1$ (d) $[\![x]\!] + [\![y]\!] = 1$

7. Encontre todos os valores de a para os quais f é contínua em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leqslant a \\ x^2 & \text{se } x > a. \end{cases}$$

8. Um **ponto fixo** de uma função f é um número c em seu domínio tal que $f(c) = c$. (A função não movimenta c; ele fica fixo.)

(a) Esboce o gráfico de uma função contínua com o domínio $[0, 1]$ cuja imagem também está em $[0, 1]$. Localize um ponto fixo de f.

(b) Tente fazer o gráfico de uma função contínua com o domínio $[0, 1]$ e a imagem em $[0, 1]$ que *não* tenha um ponto fixo. Qual é o obstáculo?

(c) Use o Teorema do Valor Intermediário para demonstrar que toda função contínua com o domínio $[0, 1]$ e a imagem em $[0, 1]$ deve ter um ponto fixo.

9. Se $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = 2$ e $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = 1$, encontre $\lim_{x\to a}[f(x)\,g(x)]$.

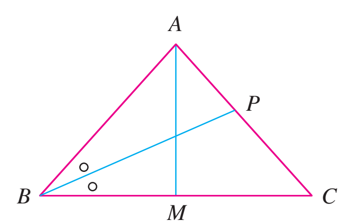


FIGURA PARA O PROBLEMA 10

10. (a) A figura mostra um triângulo isósceles ABC com $\angle B = \angle C$. A bissetriz do ângulo B intersecta o lado AC no ponto P. Suponha que a base BC permaneça fixa, mas a altura $|AM|$ do triângulo tenda a 0, de forma que A tenda ao ponto médio M de BC. O que acontece com o ponto P durante esse processo? Ele tem uma posição-limite? Se sim, encontre-a.

(b) Tente esboçar a trajetória descrita por P durante esse processo. Então, encontre a equação dessa curva e use-a para esboçar a curva.

11. (a) Se começarmos da latitude 0º e procedermos na direção oeste, poderemos ter $T(x)$ como a temperatura de um ponto x em um dado instante. Supondo que T seja uma função contínua de x, mostre que a todo instante fixo existem pelo menos dois pontos diametralmente opostos sobre a linha do equador com exatamente a mesma temperatura.

(b) O resultado da parte (a) é verdadeiro para os pontos sobre qualquer círculo sobre a superfície da Terra?

(c) O resultado da parte (a) vale para a pressão barométrica e para a altitude?

12. Se f for uma função diferenciável e $g(x) = xf(x)$, use a definição de derivada para mostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

13. Suponha que f seja uma função que satisfaça a equação

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

para todos os números reais x e y. Suponha também que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(a) Encontre $f(0)$. (b) Encontre $f'(0)$. (c) Encontre $f'(x)$.

14. Suponha que f seja uma função com a propriedade $|f(x)| \leqslant x^2$ para todo x. Mostre que $f(0) = 0$. A seguir, mostre que $f'(0) = 0$.