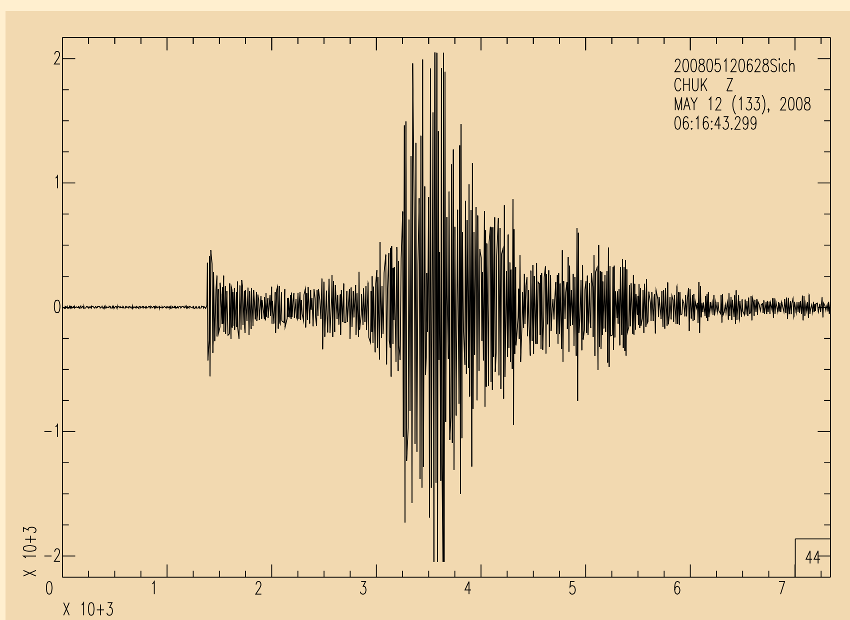
Sumário

1 Funções e Modelos

Normalmente, um gráfico é a melhor maneira de representar uma função em razão da transmissão de muita informação em um relance. Ao lado está um gráfico da aceleração de solo criada pelo terremoto de 2008 em Sichuan, província da China. A cidade mais atingida foi Beichuan, coomo mostra a foto.

Mark Ralston/AFP/Getty Images



Cortesia da IRIS Consortium. Disonível em: www.iris.edu

O objeto fundamental do cálculo são as funções. Este capítulo abre o caminho para o cálculo, discutindo as ideias básicas concernentes às funções e seus gráficos, bem como as formas de combiná-los e transformá-los. Destacamos que uma função pode ser representada de diferentes maneiras: por uma equação, por uma tabela, por um gráfico ou por meio de palavras. Vamos examinar os principais tipos de funções que ocorrem no cálculo e descrever o modo de usá-las como modelos matemáticos de fenômenos do mundo real. Também discutiremos o uso de calculadoras gráficas e de software gráfico para computadores.

1.1 Quatro Maneiras de Representar uma Função

As funções surgem quando uma quantidade depende de outra. Consideremos as seguintes situações:

A. A área A de um círculo depende do seu raio r. A regra que conecta r e A é dada pela equação $A = \pi r^2$. A cada número r positivo está associado um único valor de A e dizemos que A é uma *função* de r.

B. A população humana do mundo P depende do tempo t. A tabela mostra as estimativas da população mundial $P(t)$ no momento t em certos anos. Por exemplo,

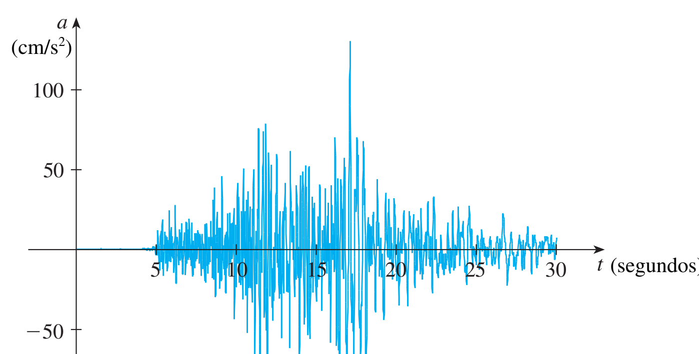
$$P(1950) \approx 2.560.000.000$$

Porém, para cada valor do tempo t, existe um valor correspondente de P, e dizemos que P é uma função de t.

Ano	População (milhões)
1900	1.650
1910	1.750
1920	1.860
1930	2.070
1940	2.300
1950	2.560
1960	3.040
1970	3.710
1980	4.450
1990	5.280
2000	6.080
2010	6.870

C. O custo C de enviar uma carta preferencial pelo correio depende de seu peso w. Embora não haja uma fórmula simples relacionando w e C, o correio tem uma fórmula que permite calcular C quando w é dado.

D. A aceleração vertical a do solo registrada por um sismógrafo durante um terremoto é uma função do tempo t. A Figura 1 mostra o gráfico gerado pela atividade sísmica durante o terremoto de Northridge, que abalou Los Angeles em 1994. Para um dado valor de t, o gráfico fornece um valor correspondente de a.



Fonte: Departamento de Minas e Geologia da Califórnia

FIGURA 1
Aceleração de solo vertical durante o terremoto de Northridge

Cada um desses exemplos descreve uma regra pela qual, dado um número (r, t, w ou t), outro número (A, P, C ou a) é associado. Em cada caso dizemos que o segundo número é uma função do primeiro.

> Uma **função** f é uma lei que associa, a cada elemento x em um conjunto D, exatamente um elemento, chamado $f(x)$, em um conjunto E.

Em geral, consideramos as funções para as quais D e E são conjuntos de números reais. O conjunto D é chamado **domínio** da função. O número $f(x)$ é o **valor de f em x** e é lido "f de x". A **imagem** de f é o conjunto de todos os valores possíveis de $f(x)$ obtidos quando x varia por todo o domínio. O símbolo que representa um número arbitrário no *domínio* de uma função f é denominado uma **variável independente**. Um símbolo que representa um número na *imagem* de f é denominado uma **variável dependente**. No Exemplo A, a variável r é independente, enquanto A é dependente.

É útil considerar uma função como uma **máquina** (veja a Figura 2). Se x estiver no domínio da função f, quando x entrar na máquina, ele será aceito como entrada, e a máquina produzirá uma saída $f(x)$ de acordo com a lei que define a função. Assim, podemos pensar o domínio como o conjunto de todas as entradas, enquanto a imagem é o conjunto de todas as saídas possíveis.

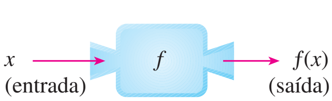


FIGURA 2
Diagrama de máquina para uma função f

As funções pré-programadas de sua calculadora são exemplos de funções como máquinas. Por exemplo, a tecla de raiz quadrada em sua calculadora é uma dessas funções. Você pressiona a tecla $\sqrt{\ }$ (ou $\sqrt{x}$), e insere o valor x. Se $x < 0$, então x não está no domínio dessa função; isto é, x não é uma entrada aceitável, e a calculadora indicará um erro. Se $x \geqslant 0$, então uma *aproximação* para $\sqrt{x}$ aparecerá no mostrador. Assim, a tecla $\sqrt{x}$ de sua calculadora não é exatamente a mesma coisa que a função matemática f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

Outra forma de ver a função é como um **diagrama de flechas**, como na Figura 3. Cada flecha conecta um elemento de D com um elemento de E. A flecha indica que $f(x)$ está associado a x, $f(a)$ está associado a a e assim por diante.

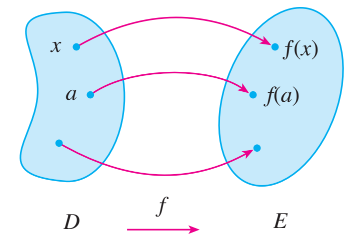


FIGURA 3
Diagrama de flechas para f

O método mais comum de visualizar uma função consiste em fazer seu gráfico. Se f for uma função com domínio D, então seu **gráfico** será o conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

(Note que esses são os pares entrada-saída). Em outras palavras, o gráfico de f consiste de todos os pontos (x, y) no plano coordenado tais que $y = f(x)$ e x está no domínio de f.

O gráfico de uma função f nos fornece uma imagem útil do comportamento ou "histórico" da função. Uma vez que a coordenada y de qualquer ponto (x, y) sobre o gráfico é $y = f(x)$, podemos ler o valor $f(x)$ como a altura do ponto no gráfico acima de x (veja a Figura 4). O gráfico de f também nos permite visualizar o domínio de f sobre o eixo x e a imagem sobre o eixo y, como na Figura 5.

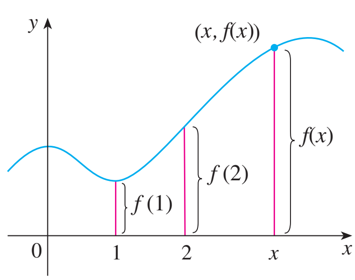


FIGURA 4

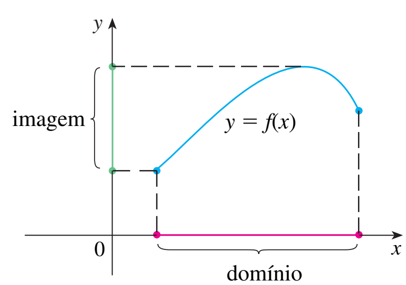


FIGURA 5

EXEMPLO 1 O gráfico de uma função f está na Figura 6.
(a) Encontre os valores de $f(1)$ e $f(5)$.
(b) Quais são o domínio e a imagem de f?

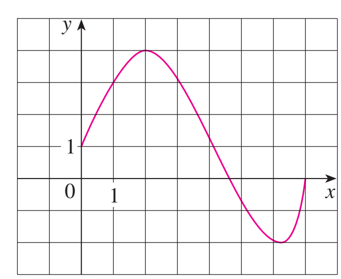


FIGURA 6

SOLUÇÃO
(a) Vemos na Figura 6 que o ponto (1, 3) encontra-se no gráfico de f, então, o valor de f em 1 é $f(1) = 3$. (Em outras palavras, o ponto no gráfico que se encontra acima de $x = 1$ está 3 unidades acima do eixo x.)

Quando $x = 5$, o ponto no gráfico que corresponde a esse valor está 0,7 unidade abaixo do eixo x e estimamos que $f(5) \approx -0{,}7$.
(b) Vemos que $f(x)$ está definida quando $0 \leqslant x \leqslant 7$, logo, o domínio de f é o intervalo fechado $[0, 7]$. Observe que os valores de f variam de -2 a 4, assim, a imagem de f é

$$\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4]$$

A notação para intervalos é dada no Apêndice A.

EXEMPLO 2 Esboce o gráfico e encontre o domínio e a imagem de cada função.

(a) $f(x) = 2x - 1$ (b) $g(x) = x^2$

SOLUÇÃO
(a) O gráfico tem equação $y = 2x - 1$, que reconhecemos ser a equação de uma reta com inclinação 2 e intersecção com o eixo y-igual a -1. (Relembre a forma inclinação-intersecção da equação de uma reta: $y = mx + b$. Veja o Apêndice B.) Isso nos possibilita esboçar uma parte do gráfico de f na Figura 7. A expressão $2x - 1$ é definida para todos os números reais; logo, o domínio f é o conjunto de todos os números reais, denotado por $\mathbb{R}$. O gráfico mostra ainda que a imagem também é $\mathbb{R}$.

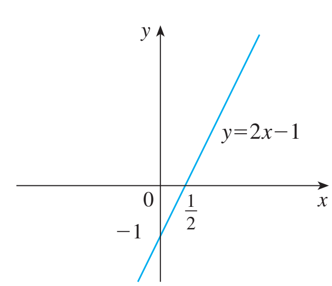


FIGURA 7

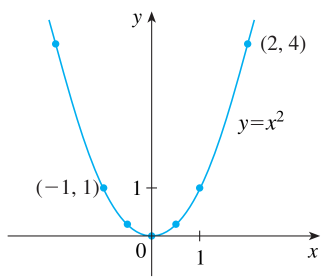


FIGURA 8

(b) Uma vez que $g(2) = 2^2 = 4$ e $g(-1) = (-1)^2 = 1$, podemos marcar os pontos (2,4) e (−1,1), junto com outros poucos pontos para ligá-los, produzir o gráfico da Figura 8. A equação do gráfico é $y = x^2$, que representa uma parábola (veja o Anexo C). O domínio de g é $\mathbb{R}$. A imagem de g consiste em todos os valores $g(x)$, isto é, todos os números da forma x^2. Mas $x^2 \geqslant 0$ para todos os números reais x e todo número positivo y é um quadrado. Assim, a imagem de g é $\{y \mid y \geqslant 0\} = [0, \infty)$. Isso também pode ser visto na Figura 8.

EXEMPLO 3 Se $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ e $h \neq 0$, avalie $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

SOLUÇÃO Primeiro calculamos $f(a + h)$ substituindo x por $a + h$ na expressão para $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= 2(a+h)^2 - 5(a+h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a+h) + 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 \end{aligned}$$

A seguir, substituímos isso na expressão dada e simplificamos:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a + 1)}{h} \\ &= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5 \end{aligned}$$

A expressão

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

no Exemplo 3 é chamada de **quociente de diferenças** e ocorre com frequência no cálculo. Como veremos no Capítulo 2, ela representa a taxa média de variação de $f(x)$ entre $x = a$ e $x = a + h$.

Representações de Funções

É possível representar uma função de quatro maneiras:

- verbalmente (descrevendo-a com palavras)
- numericamente (por meio de uma tabela de valores)
- visualmente (através de um gráfico)
- algebricamente (utilizando-se uma fórmula explícita)

Se uma função puder ser representada das quatro maneiras, em geral é útil ir de uma representação para a outra, a fim de obter um entendimento adicional da função. (No Exemplo 2, por exemplo, iniciamos com fórmulas algébricas e então obtemos os gráficos). Mas certas funções são descritas mais naturalmente por um método do que pelo outro. Tendo isso em mente, vamos reexaminar as quatro situações consideradas no começo desta seção.

A. A mais útil dentre as representações da área de um círculo em função de seu raio é provavelmente a fórmula $A(r) = \pi r^2$, apesar de ser possível elaborar uma tabela de valores, bem como esboçar um gráfico (meia parábola). Como o raio do círculo deve ser positivo, o domínio da função é $\{r \mid r > 0\} = (0, \infty)$, e a imagem também é $(0, \infty)$.

t	População (milhões)
0	1.650
10	1.750
20	1.860
30	2.070
40	2.300
50	2.560
60	3.040
70	3.710
80	4.450
90	5.280
100	6.080
110	6.870

B. Fornecemos uma descrição da função em palavras: $P(t)$ é a população humana mundial no momento t. Vamos medir t de modo que $t = 0$ corresponde ao ano 1900. A tabela de valores da população mundial nos fornece uma representação conveniente dessa função. Se marcarmos esses valores, vamos obter o gráfico da Figura 9 (chamado *diagrama de dispersão*). Ele é também uma representação útil, já que nos possibilita absorver todos os dados de uma vez. E o que dizer sobre uma fórmula para a função? Certamente, é impossível dar uma fórmula explícita que forneça a população humana exata $P(t)$ a qualquer momento t. Mas é possível encontrar uma expressão para uma função que *se aproxime de* $P(t)$. De fato, usando métodos explicados na Seção 1.2 obtemos a aproximação

$$P(t) \approx f(t) = (1.43653 \times 10^9) \cdot (1.01395)^t$$

A Figura 10 mostra que o "ajuste" é bem razoável. A função f é chamada *modelo matemático* do crescimento populacional. Em outras palavras, é uma função com uma fórmula explícita que aproxima o comportamento da função dada. No entanto, vamos ver que podemos aplicar ideias de cálculo em tabelas de valores, não sendo necessária uma fórmula explícita.

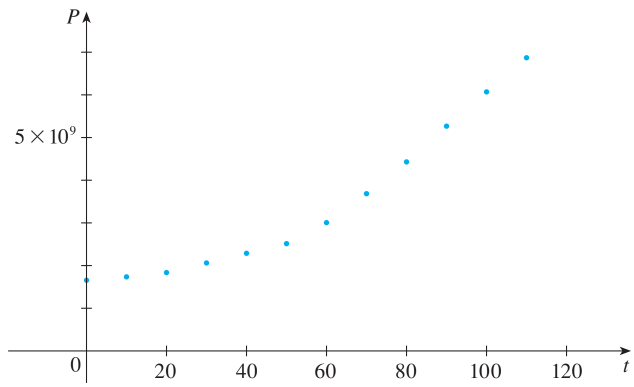


FIGURA 9

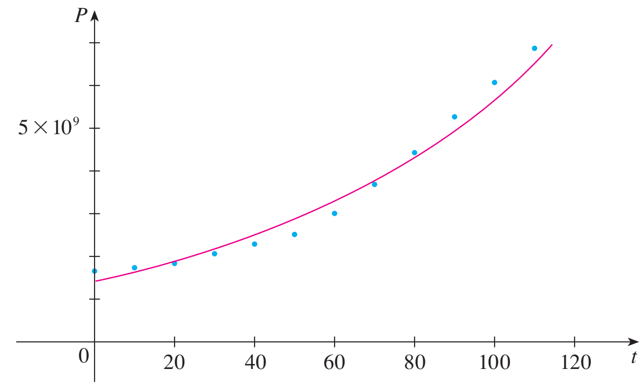


FIGURA 10

A função P é um exemplo típico das funções que aparecem quando tentamos aplicar o cálculo ao mundo real. Começamos por uma descrição verbal de uma função. Então é possível que a partir de dados experimentais possamos construir as tabelas de valores da função. Mesmo que não tenhamos um conhecimento completo dos valores da função, veremos por todo este livro que é possível realizar operações do cálculo nessas funções.

Uma função definida por uma tabela de valores é chamada função *tabular*.

C. Novamente, a função é descrita em palavras: $C(w)$ é o custo de envio pelo correio de uma carta preferencial com peso w. A regra que os Correios de Hong Kong utilizaram a partir de 2010 é a seguinte: o custo é de US$ 1,40 para até 30 g, US$ 2,20 para pesos entre 30 g a 50 g, e assim por diante. A tabela de valores mostrada ao lado é a representação mais conveniente dessa função, embora seja possível esboçar seu gráfico (veja o Exemplo 10).

w (gramas)	$C(w)$ (dólar HKD)
$0 < w \leqslant 30$	1,40
$30 < w \leqslant 50$	2,20
$50 < w \leqslant 100$	3,00
$100 < w \leqslant 150$	3,70
$150 < w \leqslant 200$	4,00
⋮	⋮

D. O gráfico na Figura 1 é a representação mais natural da função aceleração vertical $a(t)$. É verdade que seria possível montar uma tabela de valores e até desenvolver uma fórmula aproximada. Porém tudo o que um geólogo precisa saber – amplitude e padrões – pode ser facilmente obtido do gráfico. (O mesmo é válido tanto para os padrões de um eletrocardiograma como para o caso de um detector de mentiras.)

No próximo exemplo, vamos esboçar o gráfico de uma função definida verbalmente.

EXEMPLO 4 Quando você abre uma torneira de água quente, a temperatura T da água depende de há quanto tempo ela está correndo. Esboce um gráfico de T como uma função do tempo t decorrido desde a abertura da torneira.

SOLUÇÃO A temperatura inicial da água corrente está próxima da temperatura ambiente, pois ela estava em repouso nos canos. Quando a água do tanque de água quente começa a escoar da torneira, T aumenta rapidamente. Na próxima fase, T fica constante, na temperatura da água aquecida no tanque. Quando o tanque fica vazio, T decresce para a temperatura da fonte de água. Isso nos permite fazer o esboço de T como uma função de t na Figura 11. ▬

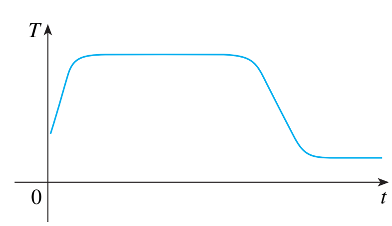


FIGURA 11

No exemplo a seguir, começamos pela descrição verbal de uma função em uma situação física e depois obtemos uma fórmula algébrica explícita. A habilidade de fazer essa transição é muito útil na solução de problemas de cálculo envolvendo a determinação de valores máximo ou mínimo de quantidades.

EXEMPLO 5 Uma caixa de armazenamento retangular aberta na parte superior tem um volume de 10 m³. O comprimento da base é o dobro de sua largura. O material da base custa \$ 10 por metro quadrado, ao passo que o material das laterais custa \$ 6 por metro quadrado. Expresse o custo total do material como uma função do comprimento da base.

SOLUÇÃO Fazemos um diagrama como o da Figura 12, com uma notação na qual w e $2w$ são, respectivamente, o comprimento e a largura da base, e h é a altura.

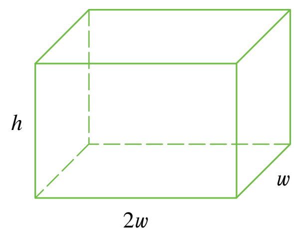


FIGURA 12

A área da base é $(2w)w = 2w^2$, assim, o custo do material em dólares para a base é de $10(2w^2)$. Quanto aos lados, dois têm área wh e os outros dois, $2wh$, portanto, o custo total dos lados é $6[2(wh) + 2(2wh)]$. Logo, o custo total é

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh$$

Para expressar C como uma função somente de w, precisamos eliminar h, o que é feito usando o volume dado, de 10 m³. Assim,

$$w(2w)h = 10$$

o que fornece

$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

SP Na montagem de funções aplicadas, como no Exemplo 5, pode ser útil rever os Princípios da Resolução de Problemas, particularmente a Etapa 1: Entendendo o Problema. Veja na página 69.

Substituindo essa expressão na fórmula de C, temos

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

Portanto, a equação

$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \qquad w > 0$$

expressa C como uma função de w.

EXEMPLO 6 Encontre o domínio de cada função.

(a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

SOLUÇÃO

(a) Como a raiz quadrada de um número negativo não é definida (como um número real), o domínio de f consiste em todos os valores de x tais que $x + 2 \geqslant 0$. Isso é equivalente a $x \geqslant -2$; assim, o domínio é o intervalo $[-2, \infty)$.

(b) Uma vez que

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x - 1)}$$

Convenção de Domínio
Se uma função é dada por uma fórmula e o domínio não é declarado explicitamente, a convenção é que o domínio é o conjunto de todos os números para os quais a fórmula faz sentido e define um número real.

e a divisão por 0 não é permitida, vemos que $g(x)$ não está definida no caso $x = 0$ ou $x = 1$. Dessa forma, o domínio de g é

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

que também pode ser dado na notação de intervalo como

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

O gráfico de uma função é uma curva no plano xy. Mas surge a questão: quais curvas no plano xy são gráficos de funções? Essa pergunta será respondida por meio do teste a seguir.

Teste da Reta Vertical Uma curva no plano xy é o gráfico de uma função de x se e somente se nenhuma reta vertical cortar a curva mais de uma vez.

A razão da veracidade do Teste da Reta Vertical pode ser vista na Figura 13. Se cada reta vertical $x = a$ cruzar a curva somente uma vez, em (a, b), então exatamente um valor funcional é definido por $f(a) = b$. Mas se a reta $x = a$ interceptar a curva em dois pontos, em (a, b) e (a, c), nesse caso, a curva não pode representar uma função, pois uma função não pode associar dois valores diferentes a a.

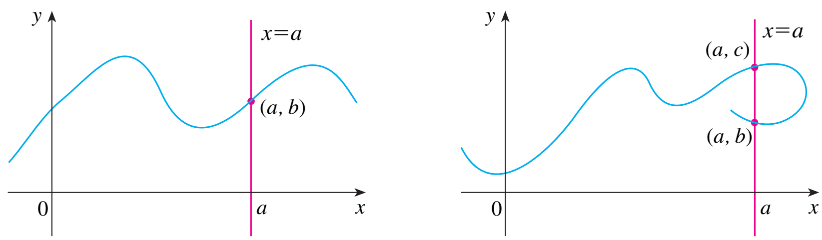


FIGURA 13

Por exemplo, a parábola $x = y^2 - 2$ na Figura 14(a) não é o gráfico de uma função de x, pois, como podemos ver, existem retas verticais que interceptam a parábola duas vezes. A parábola, no entanto, contém os gráficos de *duas* funções de x. Note que a equação $x = y^2 - 2$ implica $y^2 = x + 2$, de modo que $y = \pm\sqrt{x + 2}$. Assim, a metade superior e a inferior da parábola são os gráficos de $f(x) = \sqrt{x + 2}$ [do Exemplo 6(a)] e $g(x) = -\sqrt{x + 2}$. [Observe as Figuras 14(b) e (c).] Observe que se invertermos os papéis de x e y, e então a equação $x = h(y) = y^2 - 2$ define x como uma função de y (com y como uma variável independente e x como variável dependente), e a parábola agora é o gráfico da função h.

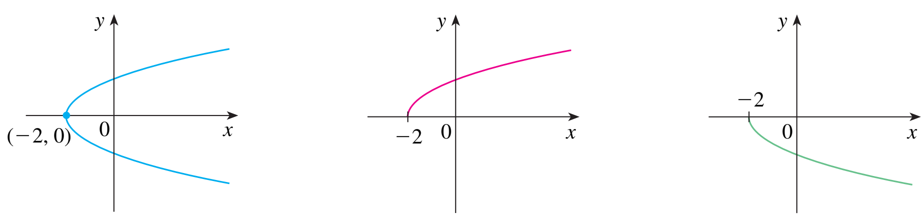


FIGURA 14 (a) $x=y^2-2$ (b) $y=\sqrt{x+2}$ (c) $y=-\sqrt{x+2}$

Funções Definidas por Partes

As funções nos quatro exemplos a seguir são definidas por fórmulas distintas em diferentes partes de seus domínios. Tais funções são chamadas **funções definidas por partes**.

EXEMPLO 7 Uma função f é definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

Avalie $f(-2)$, $f(-1)$, e $f(0)$ e esboce o gráfico.

SOLUÇÃO Lembre-se de que toda função é uma regra. Para esta função em particular a regra é a seguinte: primeiro olhe para o valor da entrada x. Se acontecer de $x \leqslant -1$, então o valor de $f(x)$ é $1 - x$. Por outro lado, se $x > -1$, então o valor de $f(x)$ é x^2.

Uma vez que $-2 \leqslant -1$, temos $f(-2) = 1 - (-2) = 3$.

Uma vez que $-1 \leqslant -1$, temos $f(-1) = 1 - (-1) = 2$.

Uma vez que $0 > -1$, temos $f(0) = 0^2 = 0$.

Como fazer o gráfico de f? Observamos que se $x \leqslant -1$, então $f(x) = 1 - x$, assim, a parte do gráfico de f à esquerda da reta vertical $x = -1$ deve coincidir com a reta $y = 1 - x$, essa última com inclinação -1 e intersecção com o eixo y igual a 1. Se $x > -1$, então $f(x) = x^2$ e dessa forma, a parte do gráfico f à direita da reta $x = -1$ deve coincidir com o gráfico de $y = x^2$, que é uma parábola. Isso nos permite esboçar o gráfico na Figura 15. O círculo cheio indica que o ponto $(-1, 2)$ está incluso no gráfico; o círculo vazio indica que o ponto $(-1, 1)$ está excluído do gráfico.

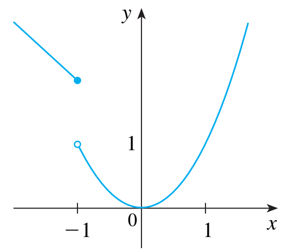


FIGURA 15

Para uma revisão mais aprofundada sobre valores absolutos, veja o Apêndice A.

O próximo exemplo de função definida por partes é a função valor absoluto. Lembre-se de que o **valor absoluto** de um número a, denotado por $|a|$, é a distância de a até 0 sobre a reta real. Como distâncias são sempre positivas ou nulas, temos

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a.$$

Por exemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

Em geral, temos

$$\boxed{\begin{aligned} |a| &= a \qquad \text{se } a \geqslant 0 \\ |a| &= -a \qquad \text{se } a < 0 \end{aligned}}$$

(Lembre-se de que se a for negativo, então $-a$ será positivo.)

EXEMPLO 8 Esboce o gráfico da função valor absoluto $f(x) = |x|$.

SOLUÇÃO Da discussão precedente sabemos que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Usando o mesmo método empregado no Exemplo 7, vemos que o gráfico de f coincide com a reta $y = x$ à direita do eixo y e com a reta $y = -x$ à esquerda do eixo y (veja a Figura 16).

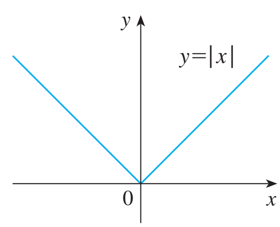


FIGURA 16

EXEMPLO 9 Encontre uma fórmula para a função f cujo gráfico está na Figura 17.

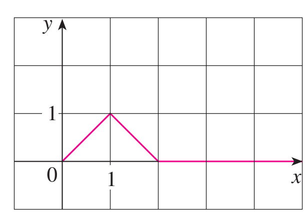


FIGURA 17

SOLUÇÃO A reta que passa pelos pontos (0, 0) e (1, 1) tem inclinação $m = 1$ e intersecção com o eixo y, $b = 0$; assim, sua equação é $y = x$. Logo, para a parte do gráfico de f que liga os pontos (0, 0) e (1, 1), temos

$$f(x) = x \qquad \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

A reta que passa pelos pontos (1, 1) e (2, 0) tem uma inclinação de $m = -1$, dessa maneira, a forma ponto-inclinação será

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \qquad \text{ou} \qquad y = 2 - x.$$

A forma ponto-inclinação da equação da reta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Veja o Apêndice B.

Logo, temos $$f(x) = 2 - x \qquad \text{se } 1 < x \leqslant 2.$$

Vemos também que o gráfico de f coincide com o eixo x para $x > 2$. Juntando todas as informações, temos a seguinte fórmula em três partes para f:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

EXEMPLO 10 No Exemplo C, no início desta seção, consideramos o custo $C(w)$ do envio pelo correio de uma carta preferencial em Hong Kong com o peso w. Na realidade, esta é uma função definida por partes, pois a partir da tabela de valores na página 13, temos

$$C(w) = \begin{cases} 1{,}40 & \text{se } 0 < w \leqslant 30 \\ 2{,}20 & \text{se } 30 < w \leqslant 50 \\ 3{,}00 & \text{se } 50 < w \leqslant 100 \\ 3{,}70 & \text{se } 100 < w \leqslant 150 \\ 4{,}00 & \text{se } 150 < w \leqslant 200 \end{cases}$$

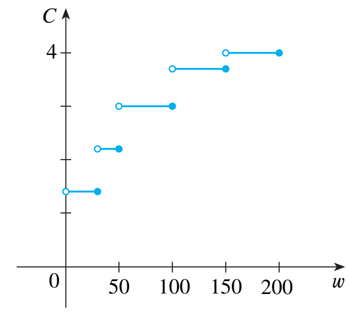


FIGURA 18

O gráfico é mostrado na Figura 18. Você pode entender então por que funções similares a esta são chamadas **funções escada** – elas pulam de um valor para o próximo. Essas funções serão estudadas no Capítulo 2.

Simetria

Se uma função f satisfaz $f(-x) = f(x)$ para todo número x em seu domínio, então f é chamada **função par**. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ é par, pois

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

O significado geométrico de uma função ser par é que seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y (veja a Figura 19). Isso significa que se fizermos o gráfico de f para $x \geqslant 0$, então, para obter o gráfico inteiro, basta refletir esta parte em torno do eixo y.

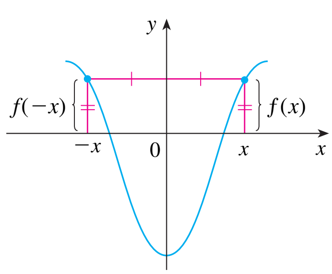


FIGURA 19 Uma função par

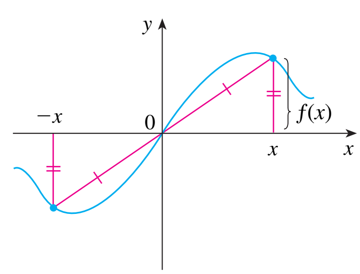


FIGURA 20 Uma função ímpar

Se f satisfaz $f(-x) = -f(x)$ para cada número x em seu domínio, então f é chamada **função ímpar**. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ é ímpar, pois

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem (veja a Figura 20). Se já tivermos o gráfico de f para $x \geqslant 0$, poderemos obter o restante do gráfico girando esta parte 180º em torno da origem.

EXEMPLO 11 Determine se a função é par, ímpar ou nenhum dos dois.

(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = 1 - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

SOLUÇÃO

(a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5 x^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Portanto, f é uma função ímpar.

(b)
$$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

Assim, g é par.

(c) $$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Como $h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$, concluímos que h não é par nem ímpar.

Os gráficos das funções no Exemplo 11 estão na Figura 21. Observe que o gráfico de h não é simétrico em relação ao eixo y nem em relação à origem.

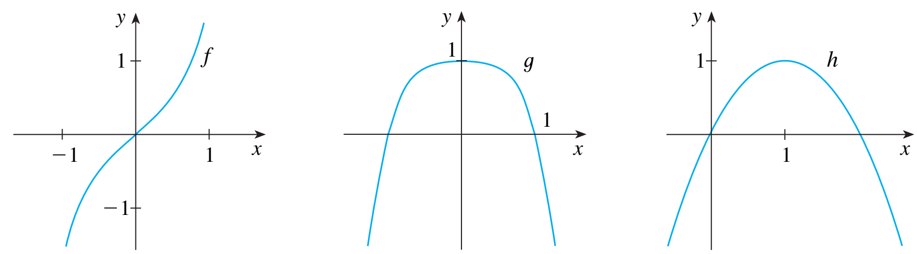


FIGURA 21 (a) (b) (c)

Funções Crescentes e Decrescentes

O gráfico da Figura 22 cresce de A para B, decresce de B para C, e cresce novamente de C para D. Digamos que a função f é crescente no intervalo $[a, b]$, decrescente em $[b, c]$ e crescente novamente em $[c, d]$. Note que se x_1 e x_2 são dois números quaisquer entre a e b com $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$. Utilizamos isso como a propriedade que define uma função crescente.

> Uma função f é chamada **crescente** em um intervalo I se
>
> $$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{quando } x_1 < x_2 \text{ em } I.$$
>
> É denominada **decrescente** em I se
>
> $$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{quando } x_1 < x_2 \text{ em } I.$$

Na definição de uma função crescente, é importante perceber que a desigualdade $f(x_1) < f(x_2)$deve responder a *cada* par de números x_1 e x_2 em I com $x_1 < x_2$.

Você pode ver que na Figura 23 a função $f(x) = x^2$ é decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$ e crescente no intervalo $[0, \infty)$.

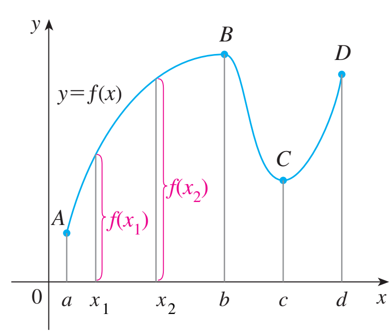


FIGURA 22

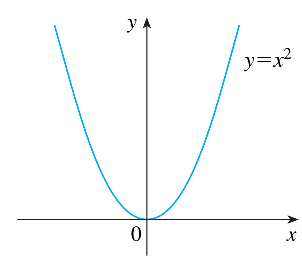


FIGURA 23

1.1 Exercícios

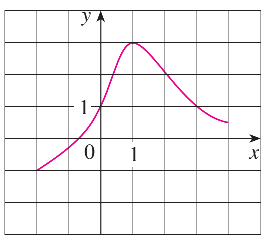
1. Se $f(x) = x + \sqrt{2 - x}$ e $g(u) = u + \sqrt{2 - u}$, é verdadeiro que $f = g$?

2. Se

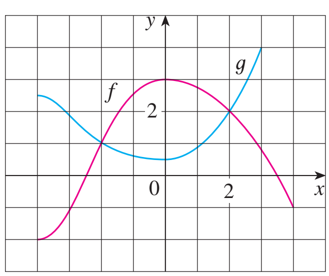
$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x$$

é verdadeiro que $f = g$?

3. O gráfico de uma função f é dado:
(a) Diga o valor de $f(1)$.
(b) Estime o valor de $f(-1)$.
(c) Para quais valores de x é $f(x) = 1$?
(d) Estime os valores de x tais que $f(x) = 0$.
(e) Diga qual é o domínio e a imagem de f.
(f) Em qual intervalo f é crescente?



4. Os gráficos de f e g são dados.
(a) Diga o valor de $f(-4)$ e $g(3)$.
(b) Para quais valores de x é $f(x) = g(x)$?
(c) Estime a solução da equação $f(x) = -1$.
(d) Em qual intervalo f é decrescente?
(e) Diga qual é o domínio e a imagem de f.
(f) Obtenha o domínio e a imagem de g.

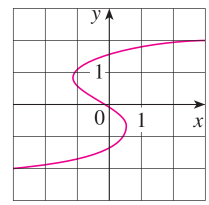


5. A Figura 1 foi registrada por um instrumento monitorado pelo Departamento de Minas e Geologia da Califórnia pertencente ao Hospital Universitário do Sul da Califórnia, em Los Angeles. Use-a para estimar a imagem da função da aceleração vertical do solo na USC durante o terremoto de Northridge.

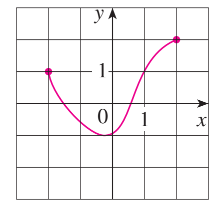
6. Nesta seção, discutimos os exemplos de funções cotidianas: a população em função do tempo; o custo da franquia postal em função do peso; a temperatura da água em função do tempo. Dê três novos exemplos de funções cotidianas que possam ser descritas verbalmente. O que você pode dizer sobre o domínio e a imagem de cada uma dessas funções? Se possível, esboce um gráfico para cada uma delas.

7–10 Determine se a curva é o gráfico de uma função de x. Se o for, determine o domínio e a imagem da função.

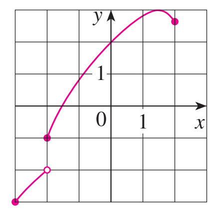
7.



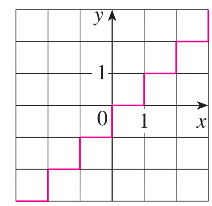
8.



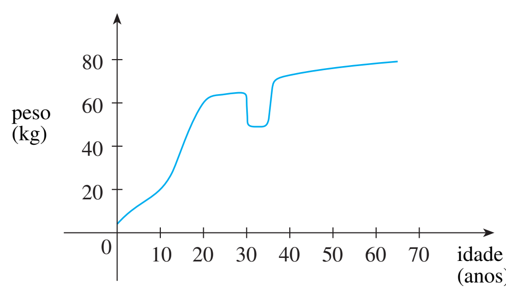
9.



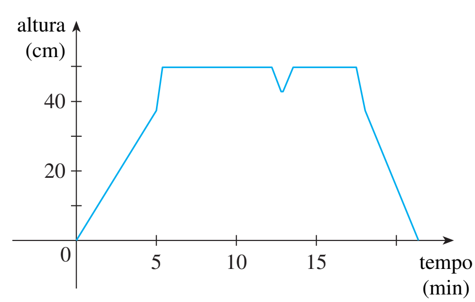
10.



11. O gráfico mostra o peso de uma certa pessoa como uma função da idade. Descreva em forma de texto como o peso dessa pessoa varia com o tempo. O que você acha que aconteceu quando essa pessoa tinha 30 anos?



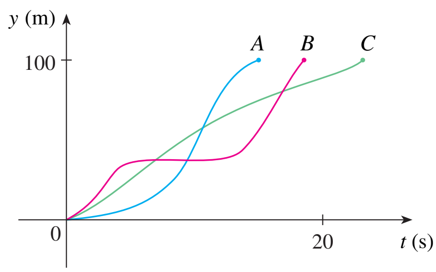
12. O gráfico mostra a altura da água na banheira como uma função de tempo. Dê uma descrição verbal do que você acha que aconteceu.



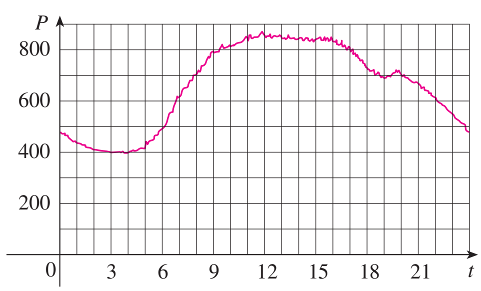
13. Ponha cubos de gelo em um copo, encha-o com água fria e deixe-o sobre uma mesa. Descreva como vai variar no tempo a temperatura da água. Esboce então um gráfico da temperatura da água como uma função do tempo decorrido.

14. Três corredores competem em uma corrida de 100 metros. O gráfico representa a distância da corrida como uma função de tempo para cada corredor. Descreva o que o gráfico diz sobre esta corrida. Quem ganhou? Todos os corredores finalizaram a prova?

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com



15. O gráfico mostra o consumo de energia por um dia em setembro em São Francisco. (P é medido em megawatts; t é medido em horas a partir da meia-noite.)
(a) O que acontece com o consumo de energia às 6 da manhã? E às 6 da tarde?
(b) Quando houve o menor consumo de energia? E quando foi o maior? Esses horários parecem razoáveis?



Fonte: Pacific Gas & Electric

16. Esboce um gráfico do número de horas diárias de luz do sol como uma função do tempo no decorrer de um ano.

17. Esboce um gráfico da temperatura externa como uma função do tempo durante um dia típico de primavera.

18. Esboce um gráfico do valor de mercado de um carro novo como função do tempo por um período de 20 anos. Suponha que ele esteja bem conservado.

19. Esboce o gráfico da quantidade de uma marca particular de café vendida por uma loja como função do preço do café.

20. Coloque uma torta gelada em um forno e asse-a por uma hora. Tire-a do forno e deixe-a esfriar antes de comê-la. Descreva como varia no tempo a temperatura da torta. Esboce um gráfico da temperatura da torta como uma função do tempo.

21. Um homem apara seu gramado toda quarta-feira à tarde. Esboce o gráfico da altura da grama como uma função do tempo no decorrer de um período de quatro semanas.

22. Um avião decola de um aeroporto e aterrissa uma hora depois em outro aeroporto, a 400 km. Se t representa o tempo em minutos desde a partida do avião, seja $x(t)$ a distância horizontal percorrida e $y(t)$ a altura do avião.
(a) Esboce um possível gráfico de $x(t)$.
(b) Esboce um possível gráfico de $y(t)$.
(c) Esboce um possível gráfico da velocidade no solo.
(d) Esboce um possível gráfico da velocidade vertical.

23. Uma estimativa anual do número N (em milhões) de assinantes de telefones celulares nos Estados Unidos é mostrada na tabela. (Estimativas dadas para meados do ano.)

t	1996	1998	2000	2002	2004	2006
N	44	69	109	141	182	233

(a) Use os dados da tabela para esboçar o gráfico de N como uma função t.
(b) Use seu gráfico para estimar o número de assinantes de telefones celulares nos anos de 2001 e 2005.

24. Os registros de temperatura T (em °C) foram tomados de três em três horas a partir da meia-noite até às 15 horas em Montreal, em 13 de julho de 2004. O tempo foi medido em horas a partir da meia-noite.

t	0	3	6	9	12	15
T	21,5	19,8	20,0	22,2	24,8	25,8

(a) Use os registros para esboçar um gráfico de T como uma função de t.
(b) Use seu gráfico para estimar a temperatura às 11 horas da manhã.

25. Se $f(x) = 3x^2 - x + 2$, ache $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(a+1)$, $2f(a)$, $f(2a)$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$ e $f(a+h)$.

26. Um balão esférico com raio de r polegadas tem o volume $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encontre uma função que represente a quantidade de ar necessária para inflar o balão de um raio de r polegadas até um raio de $r + 1$ polegada.

27–30 Calcule o quociente das diferenças para a função dada. Simplifique sua resposta.

27. $f(x) = 4 + 3x - x^2$, $\quad \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$

28. $f(x) = x^3$, $\quad \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

29. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

30. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$, $\quad \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

31–37 Encontre o domínio da função.

31. $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2 - 9}$

32. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5}{x^2 + x - 6}$

33. $f(t) = \sqrt[3]{2t - 1}$

34. $g(t) = \sqrt{3 - t} - \sqrt{2 + t}$

35. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$

36. $f(u) = \dfrac{u+1}{1 + \dfrac{1}{u+1}}$

37. $F(p) = \sqrt{2 - \sqrt{p}}$

38. Encontre o domínio e a imagem e esboce o gráfico da função $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

39–50 Encontre o domínio e esboce o gráfico da função.

39. $f(x) = 2 - 0{,}4x$

40. $F(x) = x^2 - 2x + 1$

41. $f(t) = 2t + t^2$

42. $H(t) = \dfrac{4 - t^2}{2 - t}$

43. $g(x) = \sqrt{x - 5}$

44. $F(x) = |2x + 1|$

45. $G(x) = \dfrac{3x + |x|}{x}$

46. $g(x) = |x| - x$

47. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ 1 - x & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & \text{se } x \leqslant 2 \\ 2x - 5 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

49. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$

50. $f(x) = \begin{cases} x + 9 & \text{se } x < -3 \\ -2x & \text{se } |x| \leqslant 3 \\ -6 & \text{se } x > 3 \end{cases}$

51–56 Encontre uma expressão para a função cujo gráfico é a curva dada.

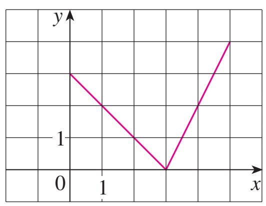
51. O segmento de reta unindo os pontos $(1, -3)$ e $(5, 7)$

52. O segmento de reta unindo os pontos $(-5, 10)$ e $(7, -10)$

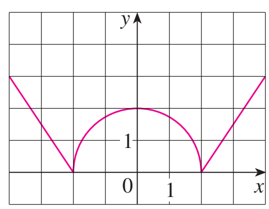
53. A metade inferior da parábola $x + (y - 1)^2 = 0$

54. A metade superior do círculo $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

55.



56.



57–61 Encontre uma fórmula para a função descrita e obtenha seu domínio.

57. Um retângulo tem um perímetro de 20 m. Expresse a área do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.

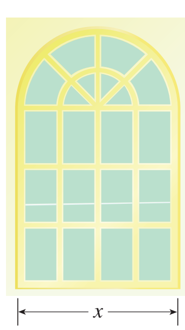
58. Um retângulo tem uma área de 16 m^2. Expresse o perímetro do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.

59. Expresse a área de um triângulo equilátero como uma função do comprimento de um lado.

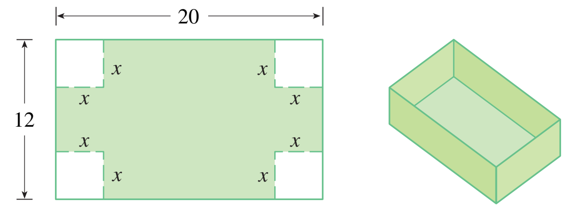
60. Expresse a área da superfície de um cubo como uma função de seu volume.

61. Uma caixa retangular aberta com volume de 2 m³ tem uma base quadrada. Expresse a área da superfície da caixa como uma função do comprimento de um lado da base.

62. Uma janela normanda tem o formato de um retângulo em cima do qual se coloca um semicírculo. Se o perímetro da janela for de 10 m, expresse a área A da janela como uma função de sua largura x.



63. Uma caixa sem tampa deve ser construída de um pedaço retangular de papelão com dimensões 12 cm por 20 cm. Para isso, devem-se cortar quadrados de lados x de cada canto e depois dobrar, conforme mostra a figura. Expresse o volume V da caixa como uma função de x.



64. Um plano de telefone celular tem uma taxa de US$ 35 mensais. O plano inclui 400 minutos gratuitos e taxa de 10 centavos para cada minuto adicional utilizado. Expresse o custo mensal C como uma função do número de minutos utilizados e esboce o gráfico C como uma função de x para $0 \leqslant x \leqslant 600$.

65. Em uma certa província a velocidade máxima permitida em estradas é de 100km/h e a velocidade mínima é de 50km/h. A multa por violar esses limites é de US$ 10 para cada quilômetro por hora acima da velocidade máxima ou abaixo da velocidade mínima. Expresse a quantidade de multa F como uma função de velocidade de condução x e esboce o gráfico $F(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 180$.

66. Uma empresa de eletricidade cobra de seus clientes uma taxa-base de US$ 10 mensais, mais 6 centavos por quilowatt-hora (kWh) para os primeiros 1 200 kWh e 7 centavos para todo o uso acima de 1 200 kWh. Expresse o custo mensal E como uma função da quantidade utilizada x de eletricidade. Então, faça um gráfico da função E para $0 \leqslant x \leqslant 2000$.

67. Em um certo país, o imposto de renda é taxado da maneira a seguir: não existe nenhuma taxa para rendimentos de até US$ 10.000,00. Qualquer renda acima de US$ 10.000,00 e abaixo de US$ 20.000,00 tem uma taxa de 10%. Qualquer renda acima de US$ 20.000,00 é taxada a 15%.

(a) Esboce o gráfico da taxa de impostos R como uma função da renda I.

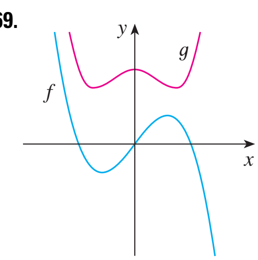
(b) Qual o imposto cobrado sobre um rendimento de $ 14.000? E sobre $ 26.000?

(c) Esboce o gráfico do imposto total cobrado T como uma função da renda I.

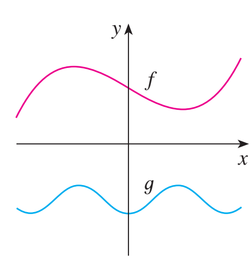
68. As funções no Exemplo 10 e no Exercícios 67 são chamadas *funções escada* em virtude do aspecto de seus gráficos. Dê dois outros exemplos de funções escada que aparecem no dia a dia.

69–70 Os gráficos de f e g são mostrados a seguir. Verifique se cada função é par, ímpar ou nem par nem ímpar. Explique seu raciocínio.

69.



70.



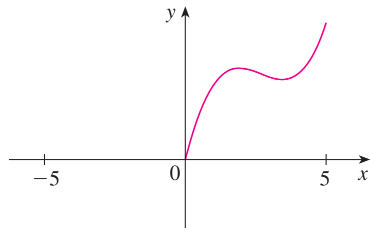
71. (a) Se o ponto (5, 3) estiver no gráfico de uma função par, que outro ponto também deverá estar no gráfico?

(b) Se o ponto (5, 3) estiver no gráfico de uma função ímpar, que outro ponto também deverá estar no gráfico?

72. Uma função f tem o domínio $[-5, 5]$ e é mostrada uma parte do seu gráfico.

(a) Complete o gráfico de f sabendo que f é uma função par.

(b) Complete o gráfico de f sabendo que f é uma função ímpar.



73–78 Determine se f é par, ímpar ou nenhum dos dois. Se você tiver uma calculadora gráfica, use-a para verificar visualmente sua resposta.

73. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ **74.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

75. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ **76.** $f(x) = x|x|$

77. $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$ **78.** $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

79. Se f e g são funções pares, $f + g$ é par? Se f e g são funções ímpares, $f + g$ é ímpar? O que se pode dizer se f for par e g for ímpar? Justifique suas respostas.

80. Se f e g são funções pares, o produto fg é par? Se f e g são funções ímpares, fg é ímpar? O que se pode dizer se f for par e g for ímpar? Justifique suas respostas.

1.2 Modelos Matemáticos: Uma Lista de Funções Essenciais

Um **modelo matemático** é a descrição matemática (frequentemente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real, como o tamanho de uma população, a demanda por um produto, a velocidade de um objeto caindo, a concentração de um produto em uma reação química, a expectativa de vida de uma pessoa ao nascer ou o custo da redução de poluentes. O propósito desses modelos é entender o fenômeno e talvez fazer previsões sobre seu comportamento futuro.

A Figura 1 ilustra o processo de modelagem matemática. Dado um problema do mundo real, nossa primeira tarefa é formular um modelo matemático por meio da identificação e especificação das variáveis dependentes e independentes e da formulação de hipóteses que simplifiquem o fenômeno o suficiente, tornando-o matematicamente tratável. Usamos nosso conhecimento da situação física e nossos recursos matemáticos para obter equações que relacionem as variáveis. Em situações em que não existe uma lei física para nos guiar, pode ser necessário coletar dados (de uma biblioteca, da Internet ou conduzindo nossas próprias experiências) e examiná-los na forma de uma tabela, a fim de perceber os padrões. Dessa representação numérica de uma função podemos obter sua representação gráfica marcando os dados. Esse gráfico pode até sugerir a fórmula algébrica apropriada, em alguns casos.

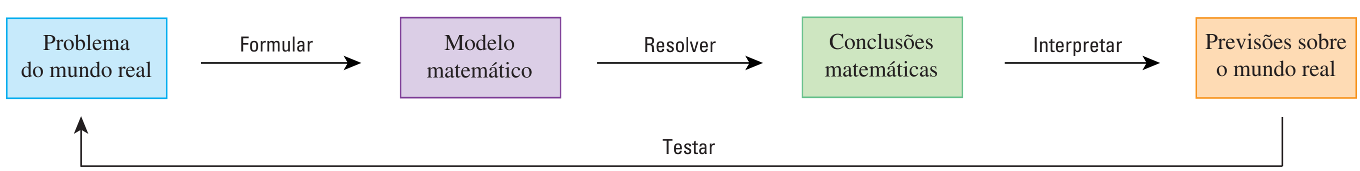


FIGURA 1 Processo de modelagem

O segundo estágio é aplicar a matemática que sabemos (tal como o cálculo a ser desenvolvido neste livro) ao modelo matemático que formulamos, a fim de tirar conclusões matemáticas. Então, em um terceiro estágio, interpretamos essas conclusões matemáticas como informações sobre o fenômeno original e oferecemos explicações ou fazemos previsões. A etapa final é testar nossas previsões, comparando-as com novos dados reais. Se as previsões não se ajustam bem à realidade, precisamos refinar nosso modelo ou formular um novo, começando novamente o ciclo.

Um modelo matemático nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física – é uma *idealização*. Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, precisão suficiente para conclusões significativas. É importante entender as limitações do modelo. A palavra final está com a Mãe Natureza.

Existem vários tipos diferentes de funções que podem ser usados para modelar as relações observadas no mundo real. A seguir, discutiremos o comportamento e os gráficos dessas funções e daremos exemplos de situações modeladas apropriadamente por elas.

Modelos Lineares

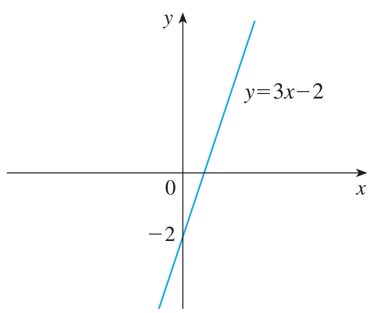
Quando dizemos que y é uma **função linear** de x, queremos dizer que o gráfico da função é uma reta; assim, podemos usar a forma inclinação-intersecção da equação de uma reta para escrever uma fórmula para a função, como

A revisão de geometria em coordenadas das retas está no Apêndice B.

$$y = f(x) = mx + b$$

onde m é o coeficiente angular da reta e b é a intersecção com o eixo y.

Uma característica peculiar das funções lineares é que elas variam a uma taxa constante. Por exemplo, a Figura 2 mostra o gráfico da função linear $f(x) = 3x - 2$ e uma tabela de valores amostrais. Note que sempre que x aumenta 0,1, o valor de $f(x)$ aumenta em 0,3. Então, $f(x)$ aumenta três vezes mais rápido que x. Assim, a inclinação do gráfico $y = 3x - 2$, isto é, 3, pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x.



x	$f(x) = 3x - 2$
1,0	1,0
1,1	1,3
1,2	1,6
1,3	1,9
1,4	2,2
1,5	2,5

FIGURA 2

EXEMPLO 1

(a) À medida que o ar seco move-se para cima, ele se expande e esfria. Se a temperatura do solo for de 20 °C e a temperatura a uma altitude de 1 km for de 10 ºC, expresse a temperatura T (em °C) como uma função da altitude h (em km), supondo que um modelo linear seja apropriado.

(b) Faça um gráfico da função na parte (a). O que a inclinação representa?

(c) Qual é a temperatura a 2,5 km de altura?

SOLUÇÃO

(a) Como estamos supondo que T é uma função linear de h, podemos escrever

$$T = mh + b$$

Também nos é dado que $T = 20$ quando $h = 0$, então

$$20 = m \cdot 0 + b = b$$

Em outras palavras, a intersecção com o eixo y é $b = 20$.

Também nos é dado que $T = 10$ quando $h = 1$, então

$$10 = m \cdot 1 + 20$$

A inclinação da reta é, portanto, $m = 10 - 20 = -10$ e a função linear procurada é

$$T = -10h + 20$$

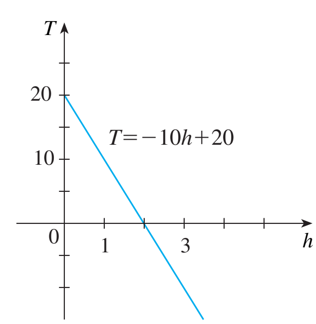


FIGURA 3

(b) O gráfico está esboçado na Figura 3. A inclinação é igual a $m = -10$ °C/km e representa a taxa de variação da temperatura em relação à altura.

(c) A uma altitude de $h = 2,5$ km, a temperatura é

$$T = -10(2,5) + 20 = -5 \text{ °C}$$

Se não existir uma lei física ou princípio que nos ajude a formular o modelo, construímos um **modelo empírico**, inteiramente baseado em dados coletados. Procuramos uma curva que se ajuste aos dados, no sentido de que ela capte a tendência dos pontos dados.

EXEMPLO 2 A Tabela 1 fornece uma lista de níveis médios de dióxido de carbono na atmosfera, medidos em partes por milhão no Observatório de Mauna Loa em Hilo, no Havaí, de 1980 a 2008. Use os dados da Tabela 1 para encontrar um modelo para o nível de dióxido de carbono.

SOLUÇÃO Utilizamos os dados da Tabela 1 para montar o gráfico de dispersão na Figura 4, onde t representa tempo (em anos) e C representa o nível de CO_2 (em partes por milhão, ppm).

TABELA 1

Ano	Nível de CO_2 (em ppm)	Ano	Nível de CO_2 (em ppm)
1980	338,7	1996	362,4
1982	341,2	1998	366,5
1984	344,4	2000	369,4
1986	347,2	2002	373,2
1988	351,5	2004	377,5
1990	354,2	2006	381,9
1992	356,3	2008	385,6
1994	358,6		

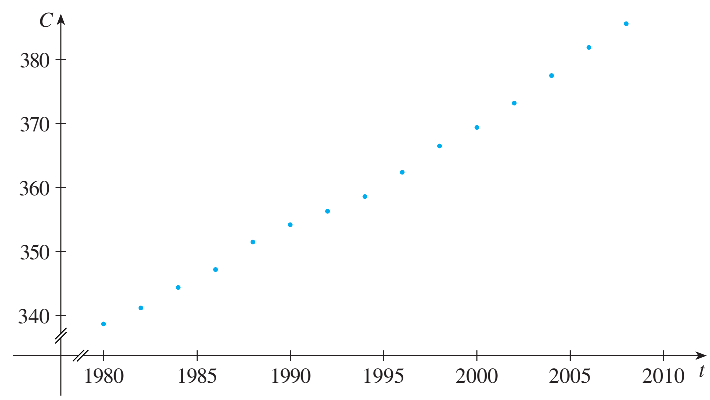


FIGURA 4 Diagrama de dispersão para o nível médio de CO_2

Observe que os pontos estão muito próximos de uma reta; dessa forma, é natural escolher um modelo linear nesse caso. Porém, há inúmeras possibilidades de retas para aproximar esses pontos. Qual deveríamos usar? Uma possibilidade é a reta que passa pelo primeiro e o último pontos dados. A inclinação dessa reta é

$$\frac{385{,}6 - 338{,}7}{2008 - 1980} = \frac{46{,}9}{28} = 1{,}675$$

e sua equação é

$$C - 338{,}7 = 1{,}675(t - 1980)$$

ou

$$\boxed{1} \qquad C = 1{,}675t - 2977{,}8$$

A Equação 1 fornece um modelo linear possível para o nível de dióxido de carbono; seu gráfico está mostrado na Figura 5.

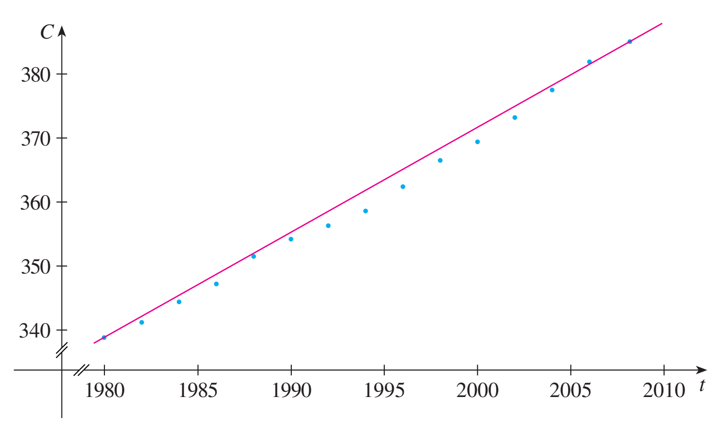


FIGURA 5
Modelo linear pelo primeiro e último pontos dados

Note que nosso modelo dá valores mais altos do que os níveis reais de CO_2. Um modelo linear melhor seria obtido por meio de um procedimento da estatística chamado *regressão linear*. Se utilizarmos uma calculadora gráfica, inserimos os dados da Tabela 1 no editor de dados e escolhemos o comando de regressão linear. (Com o Maple, utilizamos o comando fit [leastsquare] no pacote estático; com Mathematica utilizamos o comando Fit.) A máquina dá a inclinação e a intersecção com o eixo *y* da reta de regressão como

Um computador ou uma calculadora gráfica encontra a reta de regressão pelo Método dos mínimos quadráticos, que minimiza a soma dos quadrados das distâncias verticais entre os pontos dados e a reta. Os detalhes serão esclarecidos na Seção 14.7, no Volume 2.

$$m = 1{,}65429 \qquad \text{e} \qquad b = -2938{,}07$$

Assim, nosso modelo de mínimos quadrados para o nível de CO_2 é

$$\boxed{2} \qquad C = 1{,}65429t - 2938{,}07$$

Na Figura 6 fizemos o gráfico da reta de regressão e marcamos os pontos dados. Comparando-a com a Figura 5, vemos que ela fornece um ajuste melhor que o anterior para nosso modelo linear.

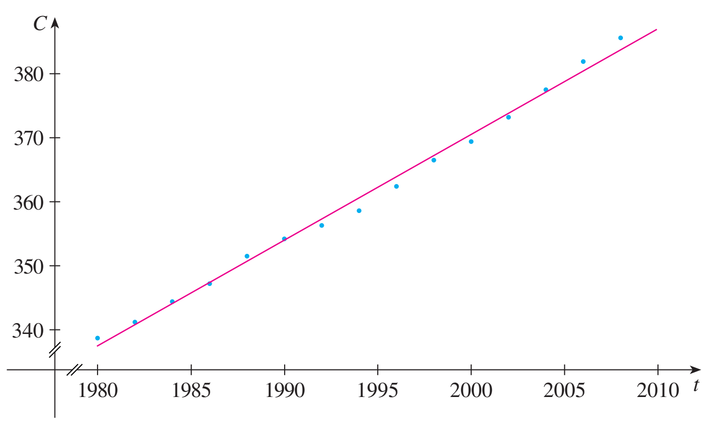


FIGURA 6
A reta de regressão

EXEMPLO 3 Use o modelo linear dado pela Equação 2 para estimar o nível médio de CO_2 em 1987 e predizer o nível para o ano de 2015. De acordo com esse modelo, quando o nível de CO_2 excederá 420 ppm?

SOLUÇÃO Usando a Equação 2 com $t = 1987$, estimamos que o nível médio de CO_2 era

$$C(1987) = (1{,}65429)(1987) - 2938{,}07 \approx 349{,}00.$$

Esse é um exemplo de *interpolação*, pois estimamos um valor *entre* valores observados. (De fato, o Observatório de Mauna Loa registrou em 1987 um nível médio de 348,93 ppm; assim, nossa estimativa é bem precisa.)

Com $t = 2015$, obtemos

$$C(2015) = (1{,}65429)(2015) - 2938{,}07 \approx 395{,}32.$$

Prevemos então que o nível médio de CO_2 no ano de 2015 será de 395,3 ppm. Esse é um exemplo de *extrapolação*, pois prevemos um valor *fora* da região de observações. Consequentemente, temos menos certeza da precisão dessa nossa previsão.

Usando a Equação 2, vemos que o nível de CO_2 excederá 420 ppm quando

$$1{,}65429t - 2938{,}07 > 420$$

Resolvendo essa desigualdade, obtemos

$$t > \frac{3358{,}07}{1{,}65429} \approx 2029{,}92$$

Portanto, predizemos que o nível de CO_2 excederá 420 ppm perto do ano de 2030. Esta previsão é arriscada porque envolve um tempo bastante remoto de nossas observações. De fato, vemos na Figura 6 que a tendência era que os níveis de CO_2 aumentassem mais rapidamente nos últimos anos; assim, o nível excederia as 420 ppm muito antes de 2030.

Polinômios

Uma função P é denominada **polinômio** se

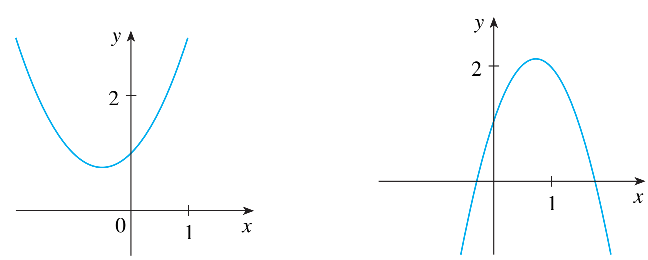
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde n é um inteiro não negativo e os números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são constantes chamadas **coeficientes** do polinômio. O domínio de qualquer polinômio é $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Se o coeficiente dominante $a_n \neq 0$, então o **grau** do polinômio é n. Por exemplo, a função

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \tfrac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

é um polinômio de grau 6.

Um polinômio de grau 1 é da forma $P(x) = mx + b$, portanto, é uma função linear. Um polinômio de grau 2 é da forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ e é chamado **função quadrática**. O gráfico de P é sempre uma parábola obtida por translações da parábola $y = ax^2$, conforme veremos na próxima seção. A parábola abre-se para cima se $a > 0$ e para baixo quando $a < 0$. (Veja a Figura 7.)



(a) $y=x^2+x+1$

(b) $y=-2x^2+3x+1$

FIGURA 7
Os gráficos de funções quadráticas são parábolas.

Um polinômio de grau 3 tem a forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad a \neq 0$$

e é chamado **função cúbica**. A Figura 8 mostra o gráfico de uma função cúbica na parte (a) e os gráficos de polinômios de graus 4 e 5 nas partes (b) e (c). Veremos adiante por que os gráficos têm esses aspectos.

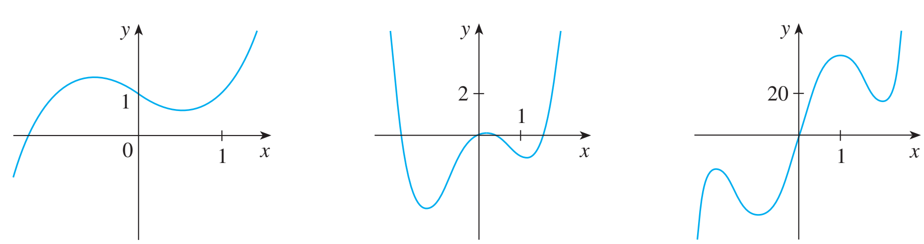


FIGURA 8

(a) $y=x^3-x+1$

(b) $y=x^4-3x^2+x$

(c) $y=3x^5-25x^3+60x$

Os polinômios são usados comumente para modelar diversas quantidades que ocorrem em ciências sociais e naturais. Por exemplo, na Seção 3.7 explicaremos por que os economistas frequentemente usam um polinômio $P(x)$ para representar o custo da produção de x unidades de um produto. No exemplo a seguir vamos usar uma função quadrática para modelar a queda de uma bola.

EXEMPLO 4 Uma bola é solta a partir do posto de observação no topo da Torre CN, 450 m acima do chão, e sua altura h acima do solo é registrada em intervalos de 1 segundo na Tabela 2. Encontre um modelo para ajustar os dados e use-o para predizer o tempo após o qual a bola atinge o chão.

TABELA 2

Tempo (segundos)	Altura (metros)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

SOLUÇÃO Vamos fazer um diagrama de dispersão na Figura 9 e observar que um modelo linear não é apropriado. Parece que os pontos podem estar sobre uma parábola; assim, vamos tentar um modelo quadrático. Usando uma calculadora gráfica ou um SCA (que usa o método dos mínimos quadrados), obtemos o seguinte modelo quadrático:

$$\boxed{3} \qquad h = 449.36 + 0.96t - 4.90t^2$$

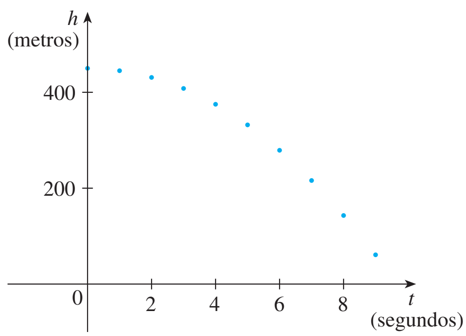


FIGURA 9
Diagrama de dispersão para uma bola caindo

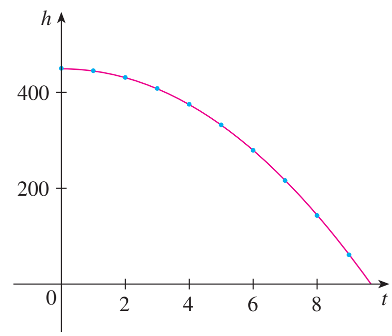


FIGURA 10
Modelo quadrático para uma bola caindo

Na Figura 10 fizemos um gráfico da Equação 3 a partir dos pontos dados e vimos que o modelo quadrático é adequado.

A bola atinge o chão quando $h = 0$, e assim resolvemos a equação quadrática

$$-4{,}90t^2 + 0{,}96t + 449{,}36 = 0$$

A fórmula quadrática fornece

$$t = \frac{-0{,}96 \pm \sqrt{(0{,}96)^2 - 4(-4{,}90)(449{,}36)}}{2(-4{,}90)}$$

A raiz positiva é $t \approx 9{,}67$; dessa forma, predizemos que a bola vai atingir o chão após 9,7 segundos.

Funções Potências

Uma função da forma $f(x) = x^a$, onde a é uma constante, é chamada **função potência**. Vamos considerar vários casos.

(i) $a = n$, onde n é um inteiro positivo

Os gráficos de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5 estão indicados na Figura 11. (Esses são polinômios com somente um termo.) Já conhecíamos os gráficos de $y = x$ (uma reta passando pela origem, com inclinação 1) e $y = x^2$ [uma parábola – veja o Exemplo 2(b) da Seção 1.1].

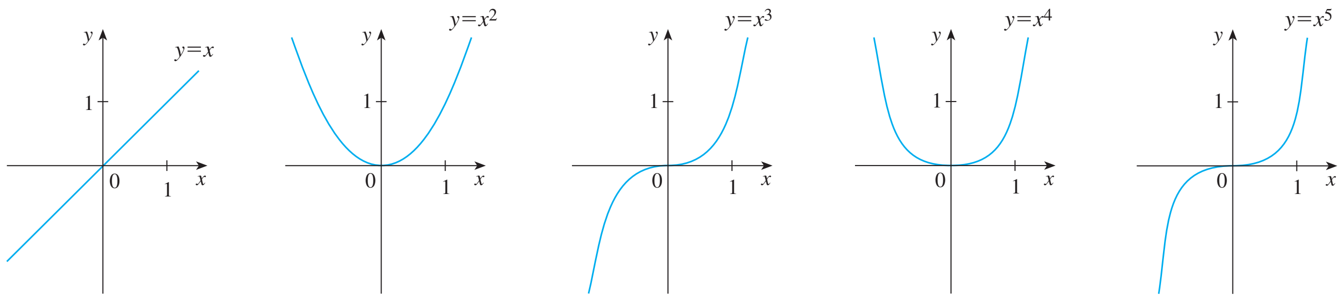


FIGURA 11 Gráficos de $f(x)=x^n$ para $n=1, 2, 3, 4, 5$

A forma geral do gráfico de $f(x) = x^n$ depende de n ser par ou ímpar. Se n for par, então $f(x) = x^n$ será uma função par e seu gráfico será similar ao da parábola $y = x^2$. Se n for ímpar, então $f(x) = x^n$ será uma função ímpar e seu gráfico será similar ao de $y = x^3$. Observe na Figura 12, porém, que à medida que n cresce, o gráfico de $y = x^n$ torna-se mais achatado quando próximo de zero e mais inclinado quando $|x| \geqslant 1$. (Se x for pequeno, então x^2 é menor; x^3 será ainda menor; e x^4 será muito menor, e assim por diante.)

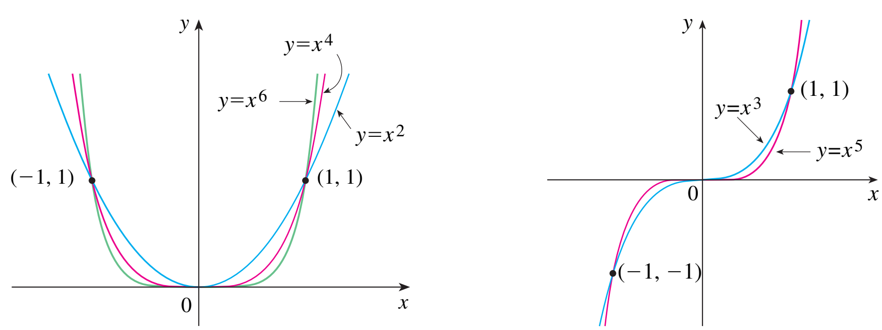


FIGURA 12
Famílias de funções potências

(ii) $\boldsymbol{a = 1/n}$**, onde** $\boldsymbol{n}$ **é um inteiro positivo**

A função $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ é uma **função raiz**. Para $n = 2$, ela é a função raiz quadrada $f(x) = \sqrt{x}$, cujo domínio é $[0, \infty)$ e cujo gráfico é a parte superior da parábola $x = y^2$. [Veja a Figura 13(a).] Para outros valores pares de n, o gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ é semelhante ao de $y = \sqrt{x}$. Para $n = 3$, temos a função de raiz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$, cujo domínio é $\mathbb{R}$ (lembre-se de que cada número real um uma raiz cúbica) e cujo gráfico será indicado na Figura 13(b). O gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ para n ímpar ($n > 3$) é similar ao de $y = \sqrt[3]{x}$.

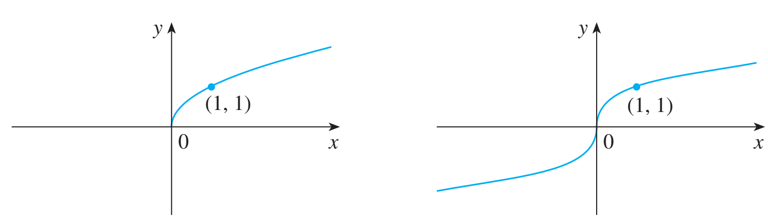


FIGURA 13
Gráficos das funções raízes

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(iii) $\boldsymbol{a = -1}$

O gráfico de **função recíproca** $f(x) = x^{-1} = 1/x$ está na Figura 14. Seu gráfico tem a equação $y = 1/x$, ou $xy = 1$, e é uma hipérbole com os eixos coordenados como suas assíntotas. Esta função aparece em física e química em conexão com a Lei de Boyle, que afirma que, sendo constante a temperatura, o volume de um gás V é inversamente proporcional à pressão P:

$$V = \frac{C}{P}$$

onde C é uma constante. Assim, o gráfico de V como uma função de P (veja a Figura 15) tem o mesmo formato geral da metade direita da Figura 14.

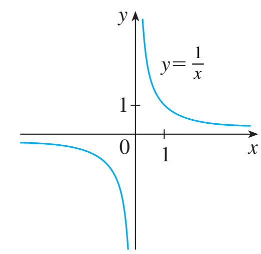


FIGURA 14
A função recíproca

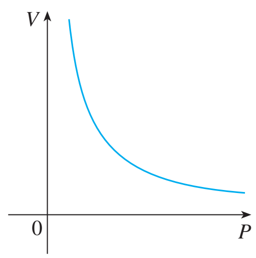


FIGURA 15
Volume como uma função da pressão à temperatura constante

As funções potência também são utilizadas para modelar as relações espécie-área (Exercícios 26–27), iluminação como uma função de uma distância da fonte de luz (Exercício 25) e o período de revolução de um planeta como uma função da sua distância a partir do sol (Exercício 28).

Funções Racionais

Uma **função racional** f é a razão de dois polinômios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios. O domínio consiste em todos os valores de x tais que $Q(x) \neq 0$. Um exemplo simples de uma função racional é a função $f(x) = 1/x$, cujo domínio é $\{x \mid x \neq 0\}$; esta é a função recíproca cujo gráfico está na Figura 14. A função

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

é uma função racional com domínio $\{x \mid x \neq \pm 2\}$. O gráfico é mostrado na Figura 16.

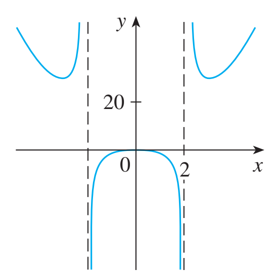


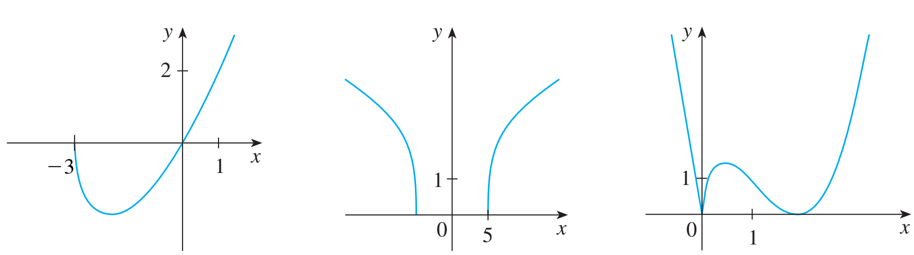
FIGURA 16
$f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

Funções Algébricas

Uma função f é chamada **função algébrica** se puder ser construída por meio de operações algébricas (como adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes) a partir de polinômios. Toda função racional é automaticamente uma função algébrica. A seguir, alguns exemplos:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}.$$

Quando trabalharmos com funções algébricas, no Capítulo 4, veremos que seus gráficos podem assumir diversas formas. A Figura 17 ilustra algumas dessas possibilidades.



(a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ (c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

FIGURA 17

Um exemplo de função algébrica ocorre na Teoria da Relatividade. A massa de uma partícula com uma velocidade v é

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

em que m_0 é a massa da partícula em repouso e $c = 3{,}0 \times 10^5$ km/s é a velocidade da luz no vácuo.

Funções Trigonométricas

As páginas de referência estão localizadas no fim do livro.

Há uma revisão de trigonometria e de funções trigonométricas no Apêndice D. Em cálculo, convenciona-se dar a medida de ângulos em radianos (exceto quando explicitamente mencionado). Por exemplo, quando utilizamos a função $f(x) = \text{sen } x$, entende-se que sen x seja o seno de um ângulo cuja medida em radianos é x. Assim, os gráficos das funções seno e cosseno estão na Figura 18.

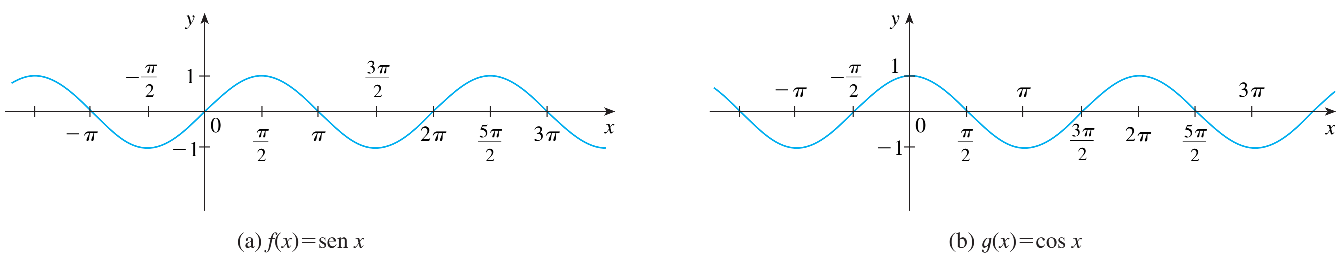


FIGURA 18

Observe que tanto para a função seno quanto para a função cosseno o domínio é $(-\infty, \infty)$, e a imagem é o intervalo fechado $[-1, 1]$. Dessa forma, para todos os valores de x temos

$$\boxed{-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

ou, em termos de valores absolutos,

$$|\text{sen } x| \leqslant 1 \qquad |\cos x| \leqslant 1.$$

Além disso, os zeros da função seno ocorrem nos múltiplos inteiros de π; isto é,

$$\text{sen } x = 0 \qquad \text{quando} \qquad x = n\pi, \quad n \text{ é um número inteiro.}$$

Uma propriedade importante das funções seno e cosseno é que elas são periódicas e têm um período 2π. Isso significa que, para todos os valores de x,

$$\boxed{\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x}$$

A natureza periódica dessas funções torna-as adequadas à modelagem de fenômenos repetitivos, tais como marés, cordas vibrantes e ondas sonoras. Como ilustração, no Exemplo 4 da Seção 1.3 veremos que um modelo razoável para o número de horas de luz solar na Filadélfia t dias após 1º de janeiro é dado pela função

$$L(t) = 12 + 2{,}8 \text{ sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

A função tangente relaciona-se com as funções seno e cosseno pela equação

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

e seu gráfico é ilustrado na Figura 19. Ela não está definida quando $\cos x = 0$, isto é, quando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$. Sua imagem é $(-\infty, \infty)$. Observe que a função tangente tem período π:

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x \qquad \text{para todo } x$$

As três funções trigonométricas remanescentes (cossecante, secante e cotangente) são as recíprocas das funções seno, cosseno e tangente. Seus gráficos estão no Apêndice D.

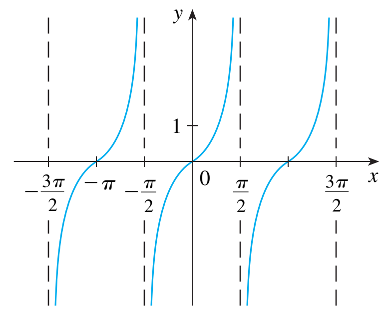
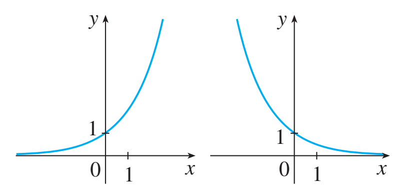


FIGURA 19
$y = \operatorname{tg} x$

Funções Exponenciais

As **funções exponenciais** são da forma $f(x) = a^x$, em que a base a é uma constante positiva. Os gráficos de $y = 2^x$ e $y = (0{,}5)^x$ são indicados na Figura 20. Em ambos os casos, o domínio é $(-\infty, \infty)$ e a imagem é $(0, \infty)$.

As funções exponenciais serão estudadas em detalhes na Seção 1.5 e veremos que elas são úteis na modelagem de muitos fenômenos naturais, como crescimento populacional (se $a > 1$) e decaimento radioativo (se $a < 1$).



(a) $y = 2^x$ (b) $y = (0{,}5)^x$

FIGURA 20

Funções Logarítmicas

As **funções logarítmicas** $f(x) = \log_a x$, onde a base a é uma constante positiva, são inversas das funções exponenciais e serão estudadas na Seção 1.6. A Figura 21 mostra os gráficos de quatro funções logarítmicas com várias bases. Em cada caso o domínio é $(0, \infty)$, a imagem é $(-\infty, \infty)$ e as funções crescem vagarosamente quando $x > 1$.

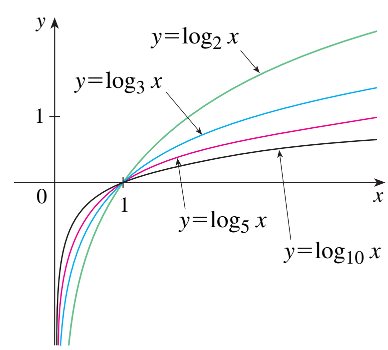


FIGURA 21

EXEMPLO 5 Classifique as funções a seguir em um dos tipos discutidos.

(a) $f(x) = 5^x$ (b) $g(x) = x^5$

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ (d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

SOLUÇÃO

(a) $f(x) = 5^x$ é uma função exponencial. (x é o expoente.)

(b) $g(x) = x^5$ é a função potência. (x é a base.) Podemos também considerá-la um polinômio de grau 5.

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ é uma função algébrica.

(d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$é um polinômio de grau 4.

1.2 Exercícios

1–2 Classifique cada função como uma função potência, função raiz, função polinomial (estabeleça seu grau), função racional, função algébrica, função trigonométrica, função exponencial ou função logarítmica.

1. (a) $f(x) = \log_2 x$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x}$

(c) $h(x) = \dfrac{2x^3}{1 - x^2}$ (d) $u(t) = 1 - 1{,}1t + 2{,}54t^2$

(e) $v(t) = 5^t$ (f) $w(\theta) = \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta$

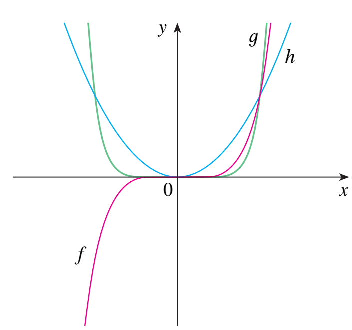
2. (a) $y = \pi^x$ (b) $y = x^\pi$

(c) $y = x^2(2 - x^3)$ (d) $y = \operatorname{tg} t - \cos t$

(e) $y = \dfrac{s}{1 + s}$ (f) $y = \dfrac{\sqrt{x^3 - 1}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

3–4 Associe cada equação a seu gráfico. Explique sua escolha. (Não use computador ou calculadora gráfica.)

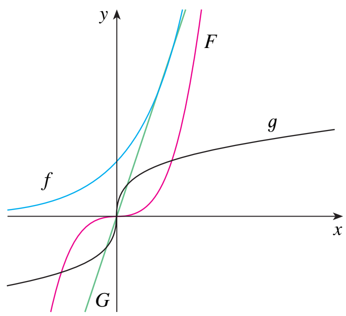
3. (a) $y = x^2$ (b) $y = x^5$ (c) $y = x^8$



É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

4. (a) $y = 3x$ (b) $y = 3^x$
(c) $y = x^3$ (d) $y = \sqrt[3]{x}$

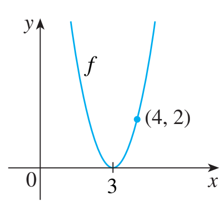


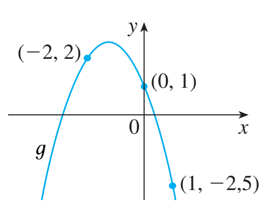
5. (a) Encontre uma equação para a família de funções lineares com inclinação 2 e esboce os gráficos de vários membros da família.
(b) Encontre uma equação para a família de funções lineares tais que $f(2) = 1$ e esboce os gráficos de vários membros da família.
(c) Qual função pertence a ambas as famílias?

6. O que todos os membros da família de funções lineares $f(x) = 1 + m(x + 3)$ têm em comum? Esboce os gráficos de vários membros da família.

7. O que todos os membros da família de funções lineares $f(x) = c - x$ têm em comum? Esboce os gráficos de vários membros da família.

8. Encontre expressões para as funções quadráticas cujos gráficos são mostrados abaixo.





9. Encontre uma expressão para uma função cúbica f se $f(1) = 6$ e $f(-1) = f(0) = f(2) = 0$.

10. Estudos recentes indicam que a temperatura média da superfície da Terra vem aumentando continuamente. Alguns cientistas modelaram a temperatura pela função linear $T = 0{,}02t + 8{,}50$, em que T é a temperatura em ºC e t representa o número de anos desde 1900.
(a) O que a inclinação e a intersecção com o eixo T representam?
(b) Use a equação para prever a temperatura média global em 2100.

11. Se a dose de uma medicação recomendada para um adulto é D (em mg), então, para determinar a dosagem apropriada c para uma criança com a anos de idade, os farmacêuticos usam a equação $c = 0{,}0417D(a + 1)$. Suponha que a dosagem para um adulto seja 200 mg.
(a) Encontre a inclinação do gráfico de c. O que ela representa?
(b) Qual é a dosagem para um recém-nascido?

12. Um administrador de bazar de fim de semana sabe por experiência que se cobrar x dólares pelo aluguel de espaço no bazar o número y de espaços que ele conseguirá alugar é dado pela equação $y = 200 - 4x$.
(a) Esboce o gráfico dessa função linear. (Lembre-se de que o aluguel cobrado pelo espaço e o número de espaços alugados não podem ser quantidades negativas.)
(b) O que representam a inclinação, a intersecção com o eixo y e a intersecção com o eixo x?

13. A relação entre as escalas de temperatura Fahrenheit (F) e Celsius (C) é dada pela função linear $F = \frac{9}{5}C + 32$.
(a) Esboce o gráfico dessa função.
(b) Qual a inclinação do gráfico e o que ela representa? O que representa a intersecção com o eixo F do gráfico?

14. Kelly parte de Winnipeg às 14 h e dirige a uma velocidade constante para oeste na rodovia Trans-Canadá. Ela passa por Brandon, a 210 km de Winnipeg, às 16 h.
(a) Expresse a distância percorrida em função do tempo decorrido.
(b) Desenhe o gráfico da equação da parte (a).
(c) Qual é a inclinação desta reta? O que ela representa?

15. Biólogos notaram que a taxa de cricridos de uma certa espécie de grilo está relacionada com a temperatura de uma maneira que aparenta ser quase linear. Um grilo cricrila 112 vezes por minuto a 20 ºC e 180 vezes por minuto a 29 ºC.
(a) Encontre uma equação linear que modele a temperatura T como uma função dos números de cricridos por minuto N.
(b) Qual é a inclinação do gráfico? O que ela representa?
(c) Se os grilos estiverem cricrilando 150 vezes por minuto, estime a temperatura.

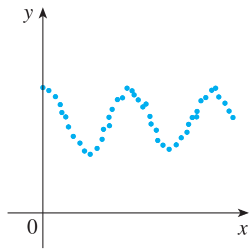
16. Um administrador de uma fábrica de móveis descobre que custa $ 2.200 para fabricar 100 cadeiras em um dia e $ 4.800 para produzir 300 cadeiras em um dia.
(a) Expresse o custo como uma função do número de cadeiras produzidas, supondo que ela seja linear. A seguir, esboce o gráfico.
(b) Qual a inclinação do gráfico e o que ela representa?
(c) Qual a intersecção com o eixo y do gráfico e o que ela representa?

17. Na superfície do oceano, a pressão da água é igual à do ar acima da água, 1,05 kg/cm^2. Para cada metro abaixo da superfície, a pressão da água cresce 0,10 kg/cm^2.
(a) Expresse a pressão da água como uma função da profundidade abaixo da superfície do oceano.
(b) A que profundidade a pressão é de 7 kg/cm^2?

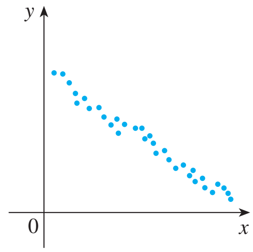
18. O custo mensal do uso de um carro depende do número de quilômetros rodados. Lynn descobriu que em maio custou US$ 380 para dirigir 768 km e em junho, US$ 460 para dirigir 1.280 km.
(a) Expresse o custo mensal C como uma função da distância percorrida d, presumindo que a relação linear proporciona um modelo adequado.
(b) Use a parte (a) para predizer o custo quando forem percorridos 2.400 km por mês.
(c) Esboce o gráfico da função. O que a inclinação representa?
(d) O que representa a intersecção com o eixo y?
(e) Por que uma função linear é um modelo apropriado nessa situação?

19–20 Para cada diagrama de dispersão, decida qual tipo de função você escolheria como um modelo para os dados. Explique sua escolha.

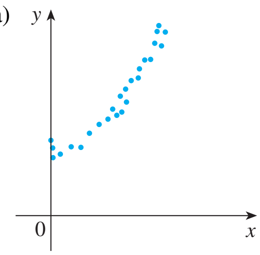
19. (a)



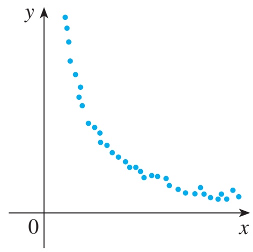
(b)



20. (a)



(b)



21. A tabela mostra as taxas de úlcera péptica (medida no decurso de toda vida) a cada 100 habitantes, de várias rendas familiares, conforme divulgado em 1989 pelo National Health Interview Survey.

Rendimento	Taxa de úlcera (por população de 100)
\$4.000	14,1
\$6.000	13,0
\$8.000	13,4
\$12.000	12,5
\$16.000	12,0
\$20.000	12,4
\$30.000	10,5
\$45.000	9,4
\$60.000	8,2

(a) Faça um diagrama de dispersão desses dados e decida se um modelo linear seria apropriado.

(b) Faça um gráfico de modelo linear usando o primeiro e o último pontos.

(c) Encontre e faça um gráfico da reta de regressão por mínimos quadrados.

(d) Use o modelo linear de (c) para estimar a taxa de úlcera correspondente a uma renda de \$ 25.000.

(e) De acordo com o modelo, qual a chance de alguém com uma renda de \$ 80.000 sofrer de úlcera péptica?

(f) Você acha razoável aplicar o modelo a alguém com uma renda de \$ 200.000?

22. Biólogos observaram que a taxa de cricridos dos grilos de uma certa espécie aparentemente está relacionada com a temperatura. A tabela mostra as taxas de canto para várias temperaturas.

Temperatura (°C)	Taxa de canto (cricridos/min)	Temperatura (°C)	Taxa de canto (cricridos/min)
20	113	30	188
22	128	32	203
24	143	34	218
26	158	36	233
28	173		

(a) Faça um diagrama de dispersão dos dados.

(b) Encontre e faça um gráfico da reta de regressão.

(c) Use o modelo linear da parte (b) para estimar a taxa de cricridos a 40ºC.

23. A tabela dá as alturas vencedoras do salto com vara nas Olimpíadas de até 2004.

Ano	Altura (m)	Ano	Altura (m)
1896	3,30	1960	4,70
1900	3,30	1964	5,10
1904	3,50	1968	5,40
1908	3,71	1972	5,64
1912	3,95	1976	5,64
1920	4,09	1980	5,78
1924	3,95	1984	5,75
1928	4,20	1988	5,90
1932	4,31	1992	5,87
1936	4,35	1996	5,92
1948	4,30	2000	5,90
1952	4,55	2004	5,95
1956	4,56		

(a) Faça um diagrama de dispersão e decida se um modelo linear é apropriado.

(b) Encontre e faça um gráfico da reta de regressão.

(c) Use o modelo linear para predizer qual a altura vencedora nas Olimpíadas de 2008 e compare com a altura vencedora de 5,96 m.

(d) É razoável usar o modelo para predizer a altura vencedora para as Olimpíadas de 2100?

24. A tabela mostra a porcentagem da população da Argentina que vivia em áreas rurais de 1955 a 2000. Encontre um modelo para os dados e utilize-o para estimar a porcentagem rural em 1988 e 2002.

Ano	Porcentagem rural	Ano	Porcentagem rural
1955	30,4	1980	17,1
1960	26,4	1985	15,0
1965	23,6	1990	13,0
1970	21,1	1995	11,7
1975	19,0	2000	10,5

25. Muitas quantidades físicas são conectadas pelas *leis quadradas inversas*, isto é, pelas funções potências da forma $f(x) = kx^{-2}$. Em particular, a iluminação de um objeto pela fonte de luz é inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte. Suponha que após escurecer, você está em um quarto com somente uma lâmpada e está tentando ler um livro. A iluminação é muito escura e então você precisa mover até um certo ponto para a lâmpada. Qual é a intensidade desta luz?

26. Faz sentido que quanto maior a área, maior a quantidade de espécies que habitam a região. Muitos ecologistas modelaram a relação espécie-área com uma função potência e, em particular, a quantidade de espécies de morcegos vivendo em cavernas no México Central foi relatada à área de superfície A de cavernas pela equação $S = 0{,}7A^{0{,}3}$.

(a) A caverna chamada *Misión Imposible* próxima de Puebla, México, tem uma área de superfície de $A = 60$ m^2. Quantas espécies de morcegos se esperaencontrar nesta caverna?

(b) Se você descobrir que quatro espécies de morcego vivem em uma caverna, estime a área da caverna.

27. A tabela mostra a quantidade N de espécies de répteis e anfíbios habitando as ilhas caribenhas e a área A da ilha em quilômetros quadrados.

Ilha	A	N
Saba	10	5
Monserrat	104	9
Porto Rico	8.958	40
Jamaica	11.423	39
Hispaniola	76.184	84
Cuba	114.511	76

(a) Utilize a função potência para modelar N como uma função de A.

(b) A ilha caribenha de Dominica tem uma área de 754 km^2. Quantas espécies de répteis e anfíbios você espera encontrar em Dominica?

28. A tabela mostra as distâncias médias d dos planetas ao Sol (tomando como unidade de medida a distância da Terra ao Sol) e seus períodos T (tempo de revolução em anos).

Planeta	d	T
Mercúrio	0,387	0,241
Vênus	0,723	0,615
Terra	1,000	1,000
Marte	1,523	1,881
Júpiter	5,203	11,861
Saturno	9,541	29,457
Urano	19,190	84,008
Netuno	30,086	164,784

(a) Ajuste um modelo de função potência aos dados.

(b) A Terceira Lei de Movimento Planetário de Kepler diz que "O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol".
Seu modelo confirma a Terceira Lei de Kepler?

1.3 Novas Funções a Partir de Conhecidas

Nesta seção, partimos das funções básicas definidas na Seção 1.2 e obtemos novas funções por deslocamento, expansão ou reflexão de seus gráficos. Vamos mostrar também como combinar pares de funções por meio de operações aritméticas ordinárias e por composição.

Transformações de Funções

Aplicando certas transformações aos gráficos de uma função obtemos o gráfico de funções relacionadas. Isso nos capacita a fazer o esboço de muitas funções à mão e nos permite também escrever equações para gráficos dados. Vamos considerar inicialmente as **translações**. Se c for um número positivo, então o gráfico de $y = f(x) + c$ é tão-somente o gráfico de $y = f(x)$ deslocado para cima em c unidades (uma vez que cada coordenada y fica acrescida pelo mesmo número c). Da mesma forma, se fizermos $g(x) = f(x - c)$, onde $c > 0$, então o valor de g em x é igual ao valor de f em $x - c$ (c unidades à esquerda de x). Portanto, o gráfico de $y = f(x - c)$ é precisamente o de $y = f(x)$ deslocado c unidades para a direita (veja a Figura 1).

Deslocamentos Verticais e Horizontais Suponha $c > 0$. Para obter o gráfico de

$y = f(x) + c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para cima;

$y = f(x) - c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para baixo;

$y = f(x - c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a direita;

$y = f(x + c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a esquerda.

Vamos considerar agora as transformações de **expansão** e **reflexão**. Se $c > 1$, então o gráfico de $y = cf(x)$ é o gráfico de $y = f(x)$ expandido por um fator c na direção vertical (pois cada coordenada y fica multiplicada pelo mesmo número c). O gráfico de $y = -f(x)$ é o gráfico de $y = f(x)$ refletido em torno do eixo x, pois o ponto (x, y) é substituído pelo ponto $(x, -y)$. (Veja a Figura 2 e a tabela a seguir, onde estão os resultados de várias transformações de expansão, compressão e reflexão.)

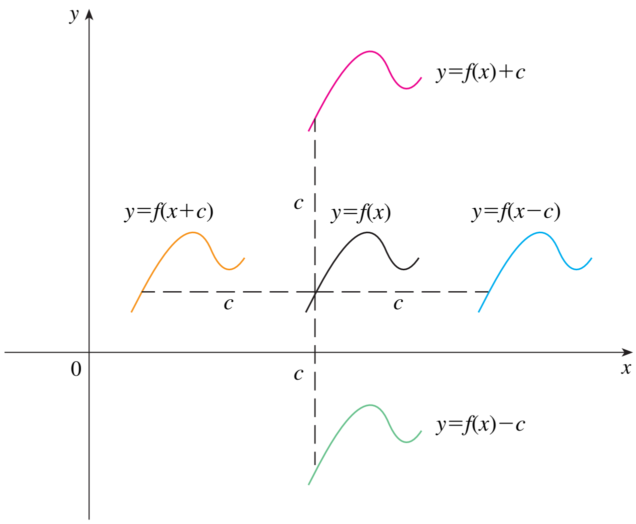


FIGURA 1
Translações do gráfico de f

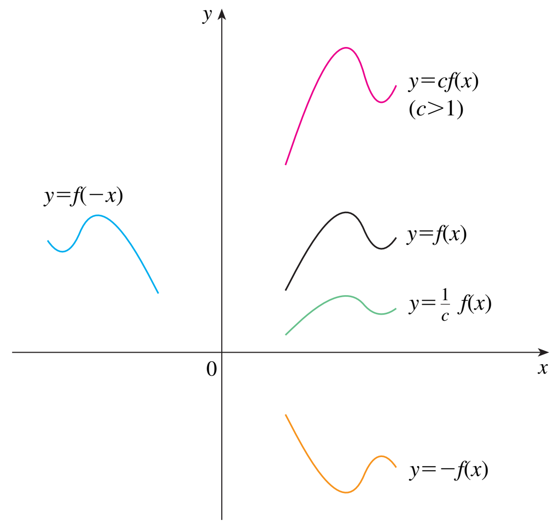


FIGURA 2
Expansões e reflexões do gráfico f

Reflexões e Expansões Horizontais e Verticais Suponha $c > 1$. Para obter o gráfico de

$y = cf(x)$, expanda o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c;
$y = (1/c)f(x)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c;
$y = f(cx)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c;
$y = f(x/c)$, expanda o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c;
$y = -f(x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x;
$y = f(-x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo y.

A Figura 3 ilustra essas transformações de expansão quando aplicadas à função de cosseno com $c = 2$. Por exemplo, para obter o gráfico $y = 2 \cos x$, multiplicamos as coordenadas y de cada ponto do gráfico de $y = \cos x$ por 2. Isso significa que o gráfico de $y = \cos x$ fica expandido verticalmente por um fator de 2.

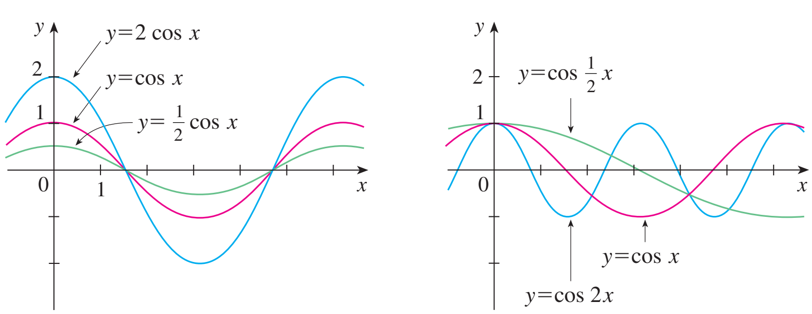


FIGURA 3

EXEMPLO 1 Dado o gráfico de $y = \sqrt{x}$, use transformações para obter os gráficos de $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ e $y = \sqrt{-x}$.

SOLUÇÃO O gráfico da função raiz quadrada $y = \sqrt{x}$, obtido da Figura 13(a), na Seção 1.2, é mostrado na Figura 4(a). Nas outras partes da figura esboçamos $y = \sqrt{x} - 2$ deslocando 2 unidades para baixo; $y = \sqrt{x-2}$ deslocando 2 unidades para a direita; $y = -\sqrt{x}$ refletindo em torno do eixo x; $y = 2\sqrt{x}$ expandindo verticalmente por um fator de 2; e $y = \sqrt{-x}$ refletindo em torno do eixo y.

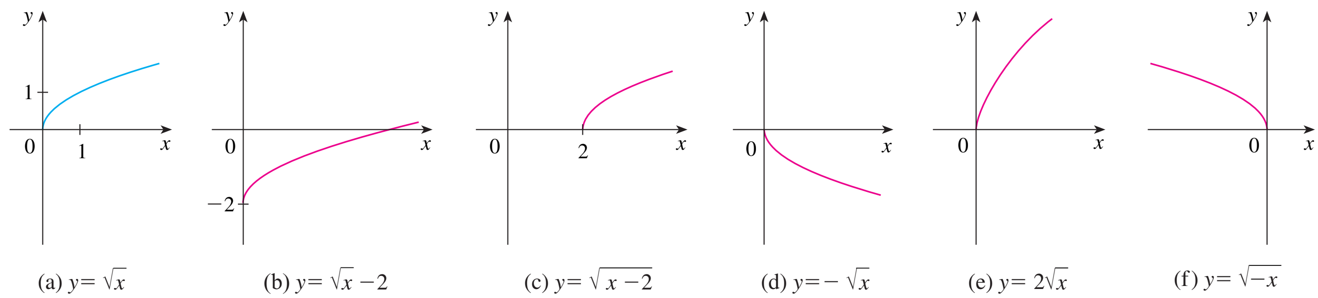


FIGURA 4

EXEMPLO 2 Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

SOLUÇÃO Completando o quadrado, escrevemos a equação do gráfico como

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

Isso significa que obtemos o gráfico desejado começando com a parábola $y = x^2$ e deslocando--a 3 unidades para a esquerda e então 1 unidade para cima (veja a Figura 5).

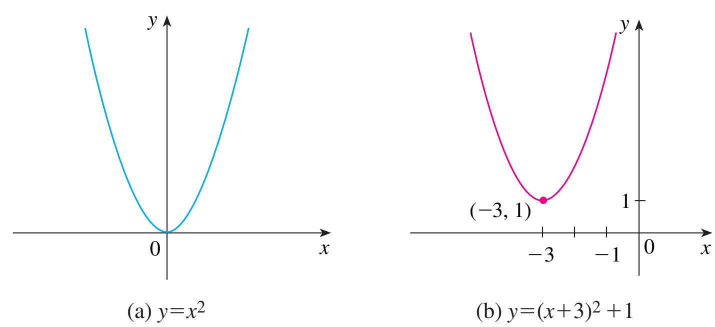


FIGURA 5

EXEMPLO 3 Esboce os gráficos das seguintes funções.
(a) $y = \text{sen}\, 2x$ (b) $y = 1 - \text{sen}\, x$

SOLUÇÃO
(a) Obtemos o gráfico $y = \text{sen}\, 2x$ a partir de $y = \text{sen}\, x$ comprimindo horizontalmente este último por um fator de 2 (veja as Figuras 6 e 7). Assim, enquanto que o período de $y = \text{sen}\, x$ é 2π, o período de $y = \text{sen}\, 2x$ é $2\pi/2 = \pi$.

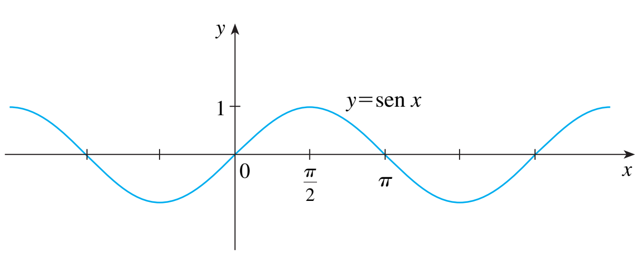


FIGURA 6

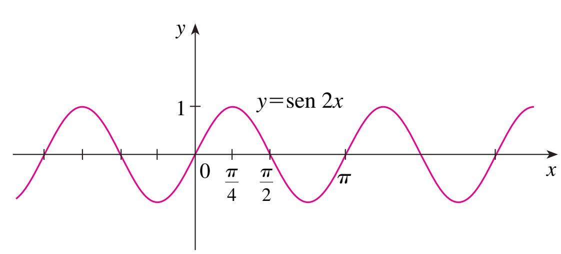


FIGURA 7

(b) Para obter o gráfico de $y = 1 - \text{sen}\, x$, começamos novamente com $y = \text{sen}\, x$. Refletimos em torno do eixo x para obter o gráfico de $y = -\text{sen}\, x$ e então deslocamos uma unidade para cima para obter $y = 1 - \text{sen}\, x$. (Veja a Figura 8.)

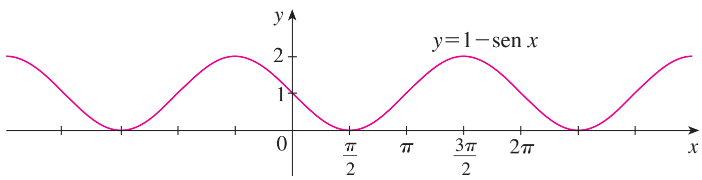


FIGURA 8

EXEMPLO 4 A Figura 9 mostra gráficos do número de horas de luz solar como função da época do ano em diversas latitudes. Dado que Ancara, na Turquia, está localizada a aproximadamente 40 ºN de latitude, encontre uma função que modele a duração da luz solar em Ancara.

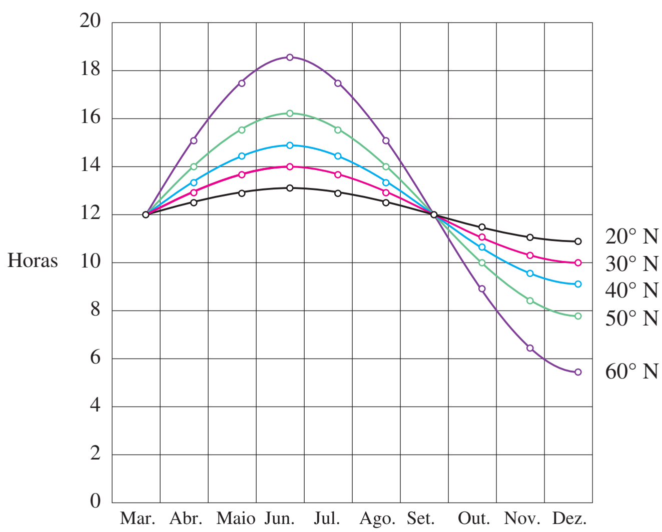


FIGURA 9
Gráfico da duração da luz solar de 21 de março a 21 de dezembro em várias latitudes
Fonte: Lucia C. Harrison, *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (New York, 1935), página 40.

SOLUÇÃO Observe que cada curva se assemelha à função seno deslocada e expandida. Observando a curva azul, vemos que, na latitude de Ancara, a luz solar dura cerca de 14,8 horas em 21 de junho e 9,2 horas em 21 de dezembro; assim, a amplitude da curva (o fator pelo qual expandimos verticalmente a curva do seno) é $\frac{1}{2}(14,8 - 9,2) = 2,8$.

Por qual fator deveremos expandir horizontalmente a curva do seno se a medida do tempo t for em dias? Em razão de haver aproximadamente 365 dias no ano, o período do nosso modelo deve ser 365. Mas o período de $y = \operatorname{sen} t$ é 2π, de modo que o fator de expansão horizontal deve ser $c = 2\pi/365$.

Notamos também que a curva começa seu ciclo em 21 de março, 80º dia do ano, e então devemos deslocar a curva 80 unidades para a direita. Além disso, deslocamos 12 unidades para cima. Portanto, modelamos a duração da luz solar em Ancara no dia t do ano pela função

$$L(t) = 12 + 2,8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Outra transformação de algum interesse é tomar o *valor absoluto* de uma função. Se $y = |f(x)|$, então, de acordo com a definição de valor absoluto, $y = f(x)$ quando $f(x) \geqslant 0$ e $y = -f(x)$ quando $f(x) < 0$. Isso nos diz como obter o gráfico de $y = |f(x)|$ a partir do gráfico de $y = f(x)$: a parte do gráfico que está acima do eixo x permanece a mesma, enquanto a parte que está abaixo do eixo x é refletida em torno do eixo x.

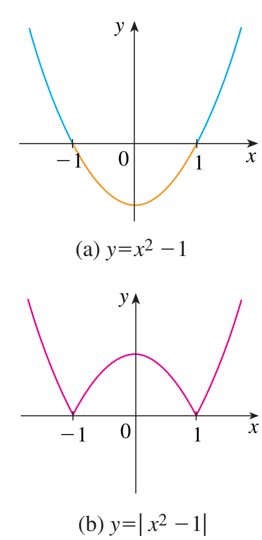


FIGURA 10

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico da função $y = |x^2 - 1|$.

SOLUÇÃO Primeiro fazemos o gráfico da parábola $y = x^2 - 1$, como na Figura 10(a), deslocando a parábola $y = x^2$ para baixo em uma unidade. Vemos que o gráfico está abaixo do eixo x quando $-1 < x < 1$; assim, refletimos essa parte do gráfico em torno do eixo x para obter o gráfico de $y = |x^2 - 1|$ na Figura 10(b).

Combinações de Funções

Duas funções f e g podem ser combinadas para formar novas funções $f + g$, $f - g$, fg e f/g de forma similar àquela pela qual somamos, subtraímos, multiplicamos e dividimos números reais. As funções soma e diferença são assim definidas

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

Se o domínio de f é A e o domínio de g é B, então o domínio de $f + g$ é a intersecção $A \cap B$, porque tanto $f(x)$ quanto $g(x)$ devem estar definidos. Por exemplo, o domínio de $f(x) = \sqrt{x}$ é $A = [0, \infty)$ e o domínio de $g(x) = \sqrt{2 - x}$ é $B = (-\infty, 2]$, de modo que o domínio de $(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$ é $A \cap B = [0, 2]$.

Analogamente, as funções produto e quociente são definidas por

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

O domínio de fg é $A \cap B$, mas não podemos dividir por zero e, assim, o domínio de f/g é $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$. Por exemplo, se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 1$, então o domínio da função racional $(f/g)(x) = x^2/(x - 1)$ é $\{x \mid x \neq 1\}$, ou $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Existe outra maneira de combinar duas funções para obter uma nova função. Por exemplo, suponha que $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$. Como y é uma função de u e u, por sua vez, é uma função de x, segue que, afinal de contas, y é uma função de x. Computamos isso pela substituição:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Este procedimento é chamado *composição*, pois a nova função é *composta* das duas funções dadas f e g.

Em geral, dadas quaisquer duas funções f e g, começamos com um número x no domínio de g e encontramos sua imagem $g(x)$. Se este número $g(x)$ estiver no domínio de f, podemos calcular o valor de $f(g(x))$. Note que a saída de uma função é utilizada como entrada para a próxima função. O resultado é uma nova função $h(x) = f(g(x))$ obtida pela substituição de g em f. É chamada de *composição* (ou *composta*) de f e g e é denotada por $f \circ g$ ("f bola g").

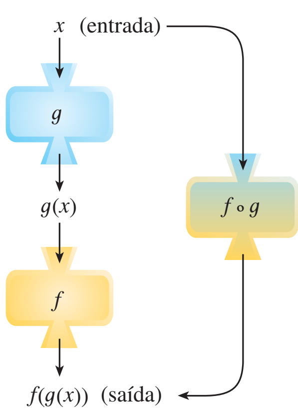


FIGURA 11
A $f \circ g$ máquina é composta pela máquina g (primeiro) e a seguir pela máquina f.

Definição Dadas duas funções f e g, a **função composta** $f \circ g$ (também chamada de **composição** de f e g) é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O domínio $f \circ g$ é o conjunto de todos os x no domínio de g tais que $g(x)$ está no domínio de f. Em outras palavras, $(f \circ g)(x)$ está definida sempre que tanto $g(x)$ quanto $f(g(x))$ estiverem definidas. A Figura 11 mostra como visualizar $f \circ g$ em termos de máquinas.

EXEMPLO 6 Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 3$, encontre as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.

SOLUÇÃO Temos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

NOTA Você pode ver no Exemplo 6 que, em geral, $f \circ g \neq g \circ f$. Lembre-se de que a notação $f \circ g$ significa que a função g é aplicada primeiro, e depois f é aplicada. No Exemplo 6, $f \circ g$ é a função que *primeiro* subtrai 3 e *então* eleva ao quadrado; $g \circ f$ é a função que *primeiro* eleva ao quadrado e *então* subtrai 3.

EXEMPLO 7 Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encontre cada uma das funções e seus domínios.
(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$

SOLUÇÃO

(a) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$$

O domínio de $f \circ g$ é $\{x \mid 2 - x \geqslant 0\} = \{x \mid x \leqslant 2\} = (-\infty, 2]$.

(b) $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

Se $0 \leqslant a \leqslant b$, então $a^2 \leqslant b^2$.

Para $\sqrt{x}$ estar definida, devemos ter $x \geqslant 0$. Para $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ estar definida, devemos ter $2 - \sqrt{x} \geqslant 0$, isto é, $\sqrt{x} \leqslant 2$, ou $x \leqslant 4$. Assim, temos $0 \leqslant x \leqslant 4$, e o domínio de $g \circ f$ é o intervalo fechado $[0, 4]$.

(c) $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

O domínio de $f \circ f$ é $[0, \infty)$.

(d) $$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$$

Para essa expressão estar definida, $2 - x \geqslant 0$ e $2 - \sqrt{2 - x} \geqslant 0$. A primeira desigualdade significa que $x \leqslant 2$, e a segunda é equivalente a $\sqrt{2 - x} \leqslant 2$, ou $2 - x \leqslant 4$, ou $x \geqslant -2$. Assim, $-2 \leqslant x \leqslant 2$, logo, o domínio de $g \circ g$ é o intervalo fechado $[-2, 2]$.

É possível fazer a composição de três ou mais funções. Por exemplo, a função composta $f \circ g \circ h$ pode ser encontrada calculando-se primeiro h, então g e depois f, como a seguir:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))).$$

EXEMPLO 8 Encontre $f \circ g \circ h$ se $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ e $h(x) = x + 3$.

SOLUÇÃO
$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 3)) \\ &= f((x + 3)^{10}) = \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}\end{aligned}$$

Até aqui usamos a composição para construir funções complicadas a partir das mais simples. Mas, em cálculo, é frequentemente útil *decompor* uma função complicada em outras mais simples, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 9 Dada $F(x) = \cos^2(x + 9)$, encontre as funções f, g e h tal que $F = f \circ g \circ h$.

SOLUÇÃO Uma vez que $F(x) = [\cos(x + 9)]^2$, a fórmula para F diz: primeiro adicione 9, então tomemos o cosseno do resultado e, finalmente, o quadrado. Assim, fazemos

$$h(x) = x + 9 \qquad g(x) = \cos x \qquad f(x) = x^2$$

Então
$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 9)) = f(\cos(x + 9)) \\ &= [\cos(x + 9)]^2 = F(x).\end{aligned}$$

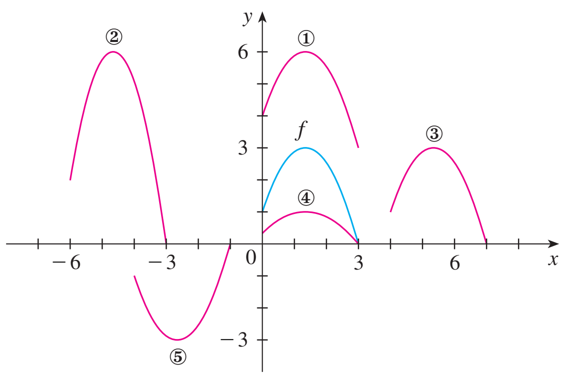
1.3 Exercícios

1. Suponha que seja dado o gráfico de f. Escreva as equações para os gráficos obtidos a partir do gráfico de f da seginte forma:
(a) Desloque 3 unidades para cima.
(b) Desloque 3 unidades para baixo.
(c) Desloque 3 unidades para a direita.
(d) Desloque 3 unidades para a esquerda.
(e) Reflita em torno do eixo x.
(f) Reflita em torno do eixo y.

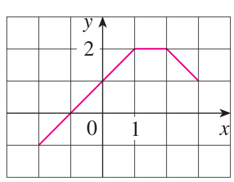
(g) Expanda verticalmente por um fator de 3.
(h) Comprima verticalmente por um fator de 3.

2. Explique como obter, a partir do gráfico de $y = f(x)$, os gráficos a seguir:
(a) $y = f(x) + 8$ (b) $y = f(x + 8)$
(c) $y = 8f(x)$ (d) $y = f(8x)$
(e) $y = -f(x) - 1$ (f) $y = 8f(\frac{1}{8}x)$

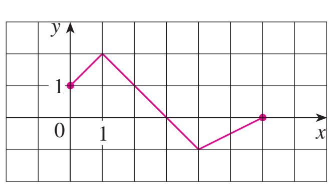
3. Dado o gráfico de $y = f(x)$, associe cada equação com seu gráfico e justifique suas escolhas.
(a) $y = f(x - 4)$ (b) $y = f(x) + 3$
(c) $y = \frac{1}{3}f(x)$ (d) $y = -f(x + 4)$
(e) $y = 2f(x + 6)$



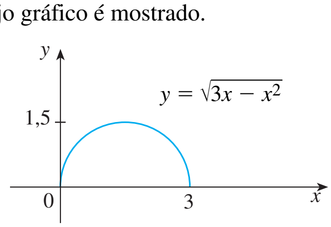
4. É dado o gráfico de f. Esboce os gráficos das seguintes funções:
(a) $y = f(x) - 2$ (b) $y = f(x - 2)$
(c) $y = -2f(x)$ (d) $y = f(\frac{1}{3}x) + 1$



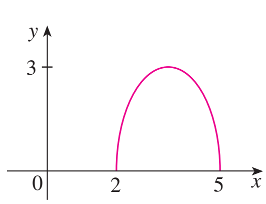
5. O gráfico de f é dado. Use-o para fazer o gráfico das seguintes funções:
(a) $y = f(2x)$ (b) $y = f(\frac{1}{2}x)$
(c) $y = f(-x)$ (d) $y = -f(-x)$



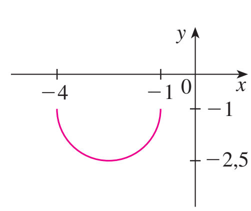
6–7 O gráfico de $y = \sqrt{3x - x^2}$ é dado. Use transformações para criar a função cujo gráfico é mostrado.



6.



7.



8. (a) Como estão relacionados o gráfico de $y = 2 \operatorname{sen} x$ e o de $y = \operatorname{sen} x$? Use sua resposta e a Figura 6 para esboçar o gráfico de $y = 2 \operatorname{sen} x$.
(b) Como estão relacionados o gráfico de $y = 1 + \sqrt{x}$ e o de $y = \sqrt{x}$? Utilize sua resposta e a Figura 4(a) para esboçar o gráfico de $y = 1 + \sqrt{x}$.

9–24 Faça o gráfico de cada função, sem marcar pontos, mas começando com o gráfico de uma das funções básicas dadas na Seção 1.2 e então aplicando as transformações apropriadas.

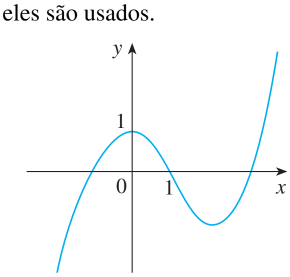
9. $y = \dfrac{1}{x + 2}$
10. $y = (x - 1)^3$
11. $y = -\sqrt[3]{x}$
12. $y = x^2 + 6x + 4$
13. $y = \sqrt{x - 2} - 1$
14. $y = 4 \operatorname{sen} 3x$
15. $y = \operatorname{sen}(\frac{1}{2}x)$
16. $y = \dfrac{2}{x} - 2$
17. $y = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$
18. $y = 1 - 2\sqrt{x + 3}$
19. $y = 1 - 2x - x^2$
20. $y = |x| - 2$
21. $y = |x - 2|$
22. $y = \dfrac{1}{4} \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
23. $y = |\sqrt{x} - 1|$
24. $y = |\cos \pi x|$

25. A cidade de Nova Delhi, na Índia, está localizada a uma latitude de 30 ºN. Use a Figura 9 para encontrar uma função que modele o número de horas de luz solar em Nova Delhi como uma função da época do ano. Para verificar a precisão do seu modelo, use o fato de que nessa cidade, em 31 de março, o Sol surge às 6h13 da manhã e se põe às 18h39.

26. Uma estrela variável é aquela cujo brilho alternadamente cresce e decresce. Para a estrela variável mais visível, Delta Cephei, o período de tempo entre os brilhos máximos é de 5,4 dias, o brilho médio (ou magnitude) da estrela é 4,0, e seu brilho varia de $\pm 0{,}35$ em magnitude. Encontre uma função que modele o brilho de Delta Cephei como uma função do tempo.

27. (a) Como estão relacionados o gráfico de $y = f(|x|)$ e o de f?
(b) Esboce o gráfico de $y = \operatorname{sen}|x|$.
(c) Esboce o gráfico de $y = \sqrt{|x|}$.

28. Use o gráfico dado de f para esboçar o gráfico $y = 1/f(x)$. Quais aspectos de f são os mais importantes no esboço de $y = 1/f(x)$? Explique como eles são usados.



29–30 Encontre (a) $f + g$, (b) $f - g$, (c) fg e (d) f/g e defina seus domínios.

29. $f(x) = x^3 + 2x^2, \quad g(x) = 3x^2 - 1$

30. $f(x) = \sqrt{3 - x}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

31–36 Encontre as funções (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$ e (d) $g \circ g$ e seus domínios.

31. $f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 1$

32. $f(x) = x - 2, \quad g(x) = x^2 + 3x + 4$

33. $f(x) = 1 - 3x, \quad g(x) = \cos x$

34. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

35. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$

36. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}, \quad g(x) = \operatorname{sen} 2x$

37–40 Encontre $f \circ g \circ h$.

37. $f(x) = 3x - 2, \quad g(x) = \operatorname{sen} x, \quad h(x) = x^2$

38. $f(x) = |x - 4|, \quad g(x) = 2^x, \quad h(x) = \sqrt{x}$

39. $f(x) = \sqrt{x - 3}, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x^3 + 2$

40. $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad g(x) = \dfrac{x}{x - 1}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$

41–46 Expresse a função na forma $f \circ g$.

41. $F(x) = (2x + x^2)^4$

42. $F(x) = \cos^2 x$

43. $F(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

44. $G(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1 + x}}$

45. $v(t) = \sec(t^2)\operatorname{tg}(t^2)$

46. $u(t) = \dfrac{\operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t}$

47–49 Expresse a função na forma $f \circ g \circ h$.

47. $R(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1}$

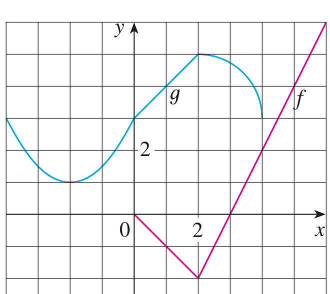
48. $H(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$

49. $H(x) = \sec^4(\sqrt{x})$

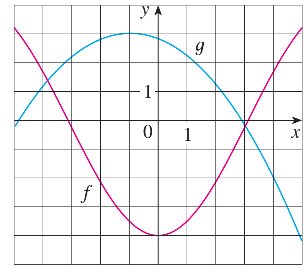
50. Use a tabela para determinar o valor de cada expressão.
(a) $f(g(1))$ (b) $g(f(1))$ (c) $f(f(1))$
(d) $g(g(1))$ (e) $(g \circ f)(3)$ (f) $(f \circ g)(6)$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

51. Use os gráficos dados de f e g para determinar o valor de cada uma das expressões ou explique por que elas não estão definidas.
(a) $f(g(2))$ (b) $g(f(0))$ (c) $(f \circ g)(0)$
(d) $(g \circ f)(6)$ (e) $(g \circ g)(-2)$ (f) $(f \circ f)(4)$



52. Use os gráficos dados de f e g para estimar o valor de $f(g(x))$ para $x = -5, -4, -3, \ldots, 5$. Use essas estimativas para esboçar o gráfico de $f \circ g$.



53. A queda de uma pedra em um lago gera ondas circulares que se espalham a uma velocidade de 60 cm/s.
(a) Expresse o raio r desse círculo como uma função do tempo t (em segundos).
(b) Se A é a área do círculo como uma função do raio, encontre $A \circ r$ e interprete-a.

54. Um balão esférico é inflado e seu raio aumenta a uma taxa de 2 cm/s.
(a) Expresse o raio r do balão como uma função do tempo t (em segundos).
(b) Se V for o volume do balão como função do raio, encontre $V \circ r$ e interprete-a.

55. Um navio se move a uma velocidade de 30 km/h paralelo a uma costa retilínea. O navio está a 6 km da costa e passa por um farol ao meio-dia.
(a) Expresse a distância s entre o farol e o navio como uma função de d, a distância que o navio percorreu desde o meio-dia; ou seja, encontre f tal que $s = f(d)$.
(b) Expresse d como uma função de t, o tempo decorrido desde o meio-dia; ou seja, encontre g tal que $d = g(t)$.
(c) Encontre $f \circ g$. O que esta função representa?

56. Um avião voa a uma velocidade de 350 km/h, a uma altitude de 1 km e passa diretamente sobre uma estação de radar no instante $t = 0$.
(a) Expresse a distância horizontal de voo d (em quilômetros) como uma função de t.
(b) Expresse a distância s entre o avião e a estação de radar como uma função de d.
(c) Use composição para expressar s como uma função de t.

57. A **função de Heaviside** H é definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Essa função é usada no estudo de circuitos elétricos para representar o surgimento repentino de corrente elétrica, ou voltagem, quando uma chave é instantaneamente ligada.
(a) Esboce o gráfico da função de Heaviside.
(b) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ no circuito se uma chave for ligada no instante $t = 0$ e 120 volts forem aplicados instantaneamente no circuito. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$.
(c) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ em um circuito quando é ligada uma chave em $t = 5$ segundos e 240 volts são aplicados instantaneamente no circuito. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$. (Observe que começar em $t = 5$ corresponde a uma translação.)

58. A função de Heaviside definida no Exercício 57 pode também ser usada para definir uma **função rampa** $y = ctH(t)$, que representa o crescimento gradual na voltagem ou corrente no circuito.

(a) Esboce o gráfico da função rampa $y = tH(t)$.

(b) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ no circuito se uma chave for ligada no instante $t = 0$ e a voltagem crescer gradualmente até 120 volts em um intervalo de 60 segundos. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$ para $t \leqslant 60$.

(c) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ em um circuito se em $t = 7s$ for ligada uma chave e a voltagem crescer gradualmente até 100 volts em um período de 25 segundos. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$ para $t \leqslant 32$.

59. Sejam f e g funções lineares com equações $f(x) = m_1 x + b_1$ e $g(x) = m_2 x + b_2$. A função $f \circ g$ também é linear? Em caso afirmativo, qual é a inclinação de seu gráfico?

60. Se você investir x dólares a 4% de juros capitalizados anualmente, então o valor $A(x)$ do investimento depois de um ano é $A(x) = 1{,}04x$. Encontre $A \circ A$, $A \circ A \circ A$ e $A \circ A \circ A \circ A$. O que estas composições representam? Encontre uma fórmula para a composição de n cópias de A.

61. (a) Se $g(x) = 2x + 1$ e $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, encontre uma função de f tal que $f \circ g = h$. (Pense em quais operações você teria que efetuar na fórmula de g para chegar à fórmula de h.)

(b) Se $f(x) = 3x + 5$ e $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, encontre uma função g tal que $f \circ g = h$.

62. Se $f(x) = x + 4$ e $h(x) = 4x - 1$, encontre uma função g tal que $g \circ f = h$.

63. Suponha que g seja uma função par e seja $h = f \circ g$. A função h é sempre uma função par?

64. Suponha que g seja uma função ímpar e seja $h = f \circ g$. A função h é sempre uma função ímpar? E se f for ímpar? E se f for par?

1.4 Calculadoras Gráficas e Computadores

Nesta seção vamos assumir que você tem acesso a uma calculadora ou a um computador com um software gráfico. Veremos como o uso dessas ferramentas nos possibilita fazer o gráfico de funções mais complicadas e resolver problemas mais complexos, que de outra forma não poderiam ser resolvidos. Vamos salientar também mais algumas das armadilhas ocultas nessas máquinas.

As calculadoras gráficas e os computadores podem fazer gráficos bastante precisos de funções. Mas, como será visto no Capítulo 4, só por meio do cálculo podemos estar certos de ter descoberto todos os aspectos interessantes de um gráfico.

Tanto calculadoras quanto computadores exibem um recorte retangular do gráfico de uma função em uma **janela de exposição** ou **tela de inspeção**, que será chamada aqui de **janela retangular**. A visão-padrão frequentemente nos fornece uma imagem incompleta ou enganadora, portanto é importante escolher com cuidado a janela retangular. Se escolhermos a variação de x de *Xmin* $= a$ até *Xmax* $= b$ e os valores de y de *Ymin* $= c$ até *Ymax* $= d$, então a parte visível do gráfico está no retângulo

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

mostrada na Figura 1. Vamos nos referir a ela como janela retangular $[a, b]$ *por* $[c, d]$.

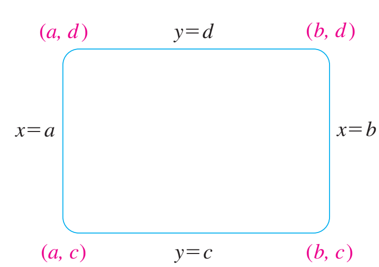


FIGURA 1
A janela retangular $[a, b]$ por $[c, d]$

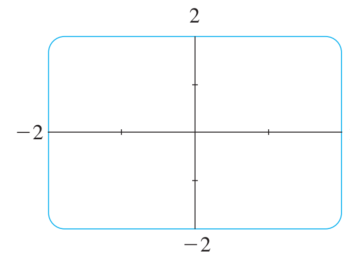
A máquina faz o gráfico da função f da mesma forma que você o faria. Ela marca pontos da forma $(x, f(x))$ para uma certa quantidade de valores igualmente espaçados de x entre a e b. Se um valor x não está no domínio de f, ou se $f(x)$ estiver fora da janela retangular, ela vai para o próximo valor de x. A máquina conecta cada ponto ao ponto anterior marcado para formar uma representação do gráfico de f.

EXEMPLO 1 Em cada uma das janelas retangulares a seguir faça o gráfico de $f(x) = x^2 + 3$.

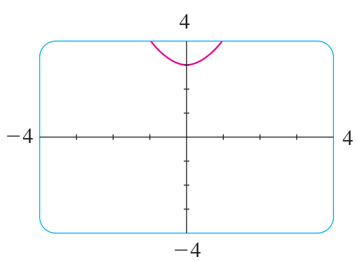
(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
(b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
(c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$
(d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1000]$

SOLUÇÃO Para parte (a) selecionamos a imagem configurando $Xmin = -2$, $Xmax = 2$, $Ymin = -2$ e $Ymax = 2$. O gráfico resultante está na Figura 2(a). A janela está em branco! Um instante de reflexão proporciona a explicação: note que $x^2 \geqslant 0$ para todo x, então $x^2 + 3 \geqslant 3$ para todo x. Assim, uma imagem da função $f(x) = x^2 + 3$ é $[3, \infty)$. Isso significa que o gráfico de f está inteiramente fora da janela retangular $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

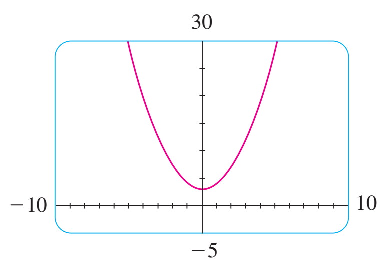
Os gráficos para as janelas retangulares das partes (b), (c) e (d) estão na Figura 2. Observe que em (c) e (d) a visão está mais completa, porém em (d) não fica claro que a intersecção com o eixo y é 3.



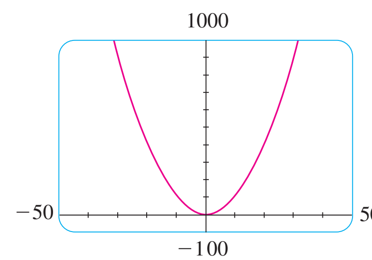
(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$



(b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$



(c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$



(d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1000]$

FIGURA 2 Gráficos de $f(x) = x^2 + 3$

A partir do Exemplo 1 vemos que a escolha da janela retangular faz uma grande diferença no aspecto do gráfico. Algumas vezes, para obter uma visão mais completa ou mais global do gráfico, é necessário ampliar a janela. No exemplo a seguir veremos que um conhecimento prévio do domínio e da imagem da função dá pistas de como selecionar a janela retangular.

EXEMPLO 2 Determine uma janela apropriada para a função $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ e utilize-a para fazer o gráfico de f.

SOLUÇÃO A expressão para $f(x)$ é definida quando

$$8 - 2x^2 \geqslant 0 \iff 2x^2 \leqslant 8 \iff x^2 \leqslant 4$$
$$\iff |x| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2$$

Portanto, o domínio de f é o intervalo $[-2, 2]$. Também,

$$0 \leqslant \sqrt{8 - 2x^2} \leqslant \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$$

logo, a imagem de f é o intervalo $\left[0, 2\sqrt{2}\right]$.

Escolhemos a janela retangular de forma que o intervalo sobre o eixo x fosse um pouco maior que o domínio e o intervalo sobre o eixo y fosse um pouco maior que a imagem. Tomando a janela retangular $[-3, 3]$ por $[-1, 4]$, obtemos o gráfico da Figura 3.

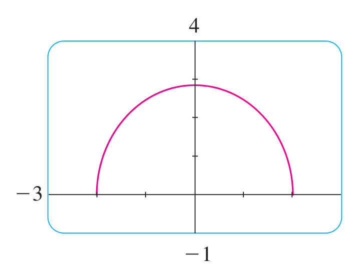


FIGURA 3
$f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$

EXEMPLO 3 Faça o gráfico da função $y = x^3 - 150x$.

SOLUÇÃO Aqui, o domínio é $\mathbb{R}$, o conjunto de todos os números reais. Isso não ajuda na escolha da janela. Vamos fazer algumas experiências. Se iniciarmos com a janela retangular $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$, obteremos o gráfico da Figura 4. Ele parece estar vazio, mas, na verdade, o gráfico está tão próximo de ser vertical que chega a se confundir com o eixo y.

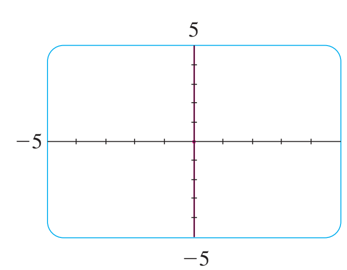


FIGURA 4

Se mudarmos a janela retangular para $[-20, 20]$ por $[-20, 20]$, obtemos a imagem da Figura 5(a). O gráfico parece ser formado por retas verticais, mas sabemos que isso não é correto. Observando cuidadosamente enquanto o gráfico está sendo feito, vemos que o gráfico desaparece da tela para depois reaparecer. Isso indica que é necessário olhar com mais detalhes na direção vertical da tela. Dessa forma, mudamos a janela retangular para $[-20, 20]$ por

[−500, 500]. O gráfico resultante está na Figura 5(b). Todavia, ela ainda não revela bem todos os aspectos principais da função; assim, tentamos a janela [−20, 20] por [−1000, 1000] na Figura 5(c). Tudo indica que finalmente chegamos a uma janela apropriada. No Capítulo 4 veremos que realmente o gráfico da Figura 5(c) revela todos os principais aspectos da função.

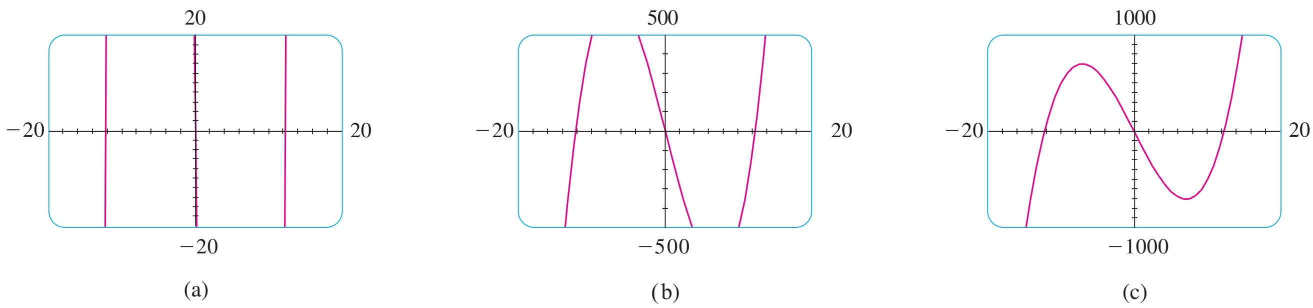


FIGURA 5 Gráficos de $y = x^3 - 150x$

EXEMPLO 4 Faça o gráfico da função $f(x) = \text{sen } 50x$ em uma janela apropriada.

SOLUÇÃO A Figura 6(a) mostra o gráfico de f produzido por uma calculadora gráfica usando uma janela retangular de $[-12, 12]$ por $[-1{,}5; 1{,}5]$. À primeira vista o gráfico parece ser razoável. Porém, se mudarmos para as outras janelas da Figura 6, o gráfico mudará completamente. Algo estranho está acontecendo.

A aparência do gráfico na Figura 6 depende da máquina usada. Os gráficos que você obtiver em sua máquina podem não ser parecidos com os destas figuras, mas serão igualmente imprecisos.

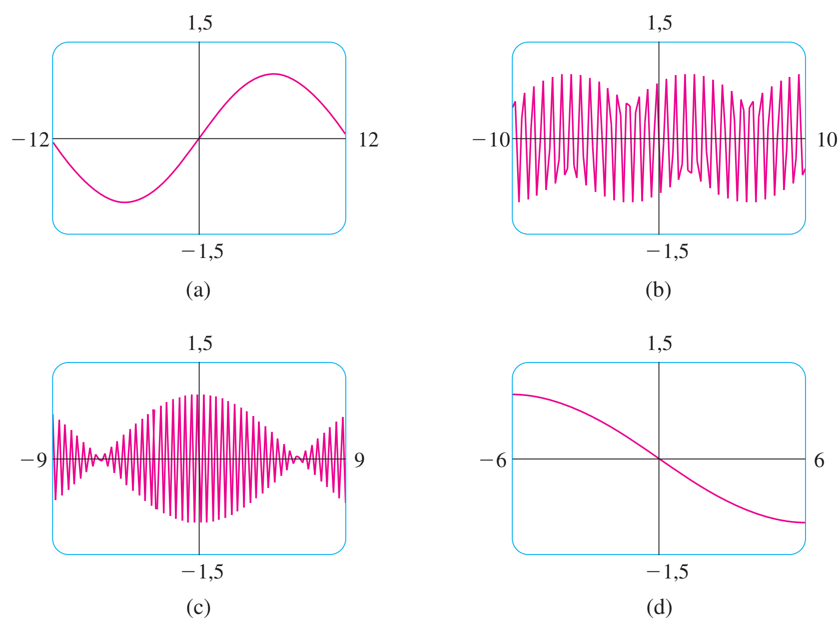


FIGURA 6
Gráficos de $f(x) = \text{sen } 50x$ em quatro janelas retangulares

A fim de explicar a grande diferença no aspecto desses gráficos e definir a janela mais apropriada, é necessário encontrar o período da função $y = \text{sen } 50x$. Sabemos que o período da função $y = \text{sen } x$ é 2π e que o gráfico de $y = \text{sen } 50x$ é horizontalmente comprimido pelo fator de 50; assim, o período de $y = \text{sen } 50x$ é

$$\frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0{,}126$$

Isso sugere que devemos trabalhar com os valores pequenos de x para mostrar somente algumas das oscilações do gráfico. Se escolhermos a janela $[-0{,}25; 0{,}25]$ por $[-1{,}5; 1{,}5]$, obteremos o gráfico da Figura 7.

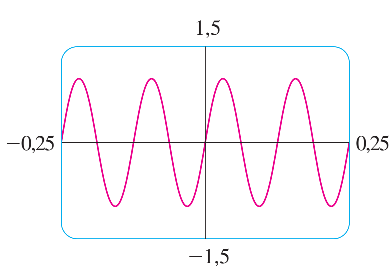


FIGURA 7
$f(x) = \text{sen } 50x$

Vemos agora o erro cometido na Figura 6. As oscilações de $y = \text{sen } 50x$ são tão rápidas que, quando a calculadora marca pontos e os une, perde os pontos de máximo e de mínimo, dando assim uma impressão errada sobre o gráfico.

Vimos que a escolha de uma janela pouco apropriada pode levar a uma visão errônea do gráfico de uma função. Nos Exemplos 1 e 3 resolvemos o problema ampliando a janela, ao passo que no Exemplo 4 a reduzimos. No próximo exemplo examinaremos uma função para a qual não existe qualquer janela satisfatória que revele a verdadeira forma do gráfico.

EXEMPLO 5 Faça o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{100} \cos 100x$.

SOLUÇÃO A Figura 8 mostra o gráfico de f produzido por uma calculadora gráfica com uma janela retangular de $[-6{,}5; 6{,}5]$ por $[-1{,}5; 1{,}5]$. Ele se parece com o gráfico de $y = \operatorname{sen} x$, talvez acrescido de algumas oscilações. Se aumentarmos para a janela retangular $[-0{,}1; 0{,}1]$ por $[-0{,}1; 0{,}1]$, podemos ver a forma dessas protuberâncias mais claramente na Figura 9. A razão para este comportamento é que o segundo termo, $\frac{1}{100} \cos 100x$, é muito pequeno em comparação ao primeiro termo, $\operatorname{sen} x$. Assim, realmente precisamos de dois gráficos para ver a natureza verdadeira dessa função.

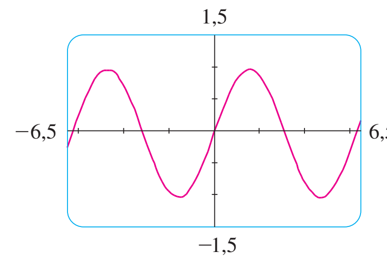


FIGURA 8

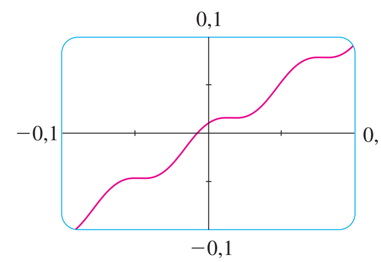


FIGURA 9

EXEMPLO 6 Faça o gráfico da função $y = \dfrac{1}{1 - x}$

SOLUÇÃO A Figura 10(a) mostra o gráfico produzido por uma calculadora com uma janela $[-9, 9]$ por $[-9, 9]$. Ao conectar os pontos sucessivos sobre o gráfico, a calculadora produz um segmento de reta íngreme do topo até a base da tela. Esse segmento de reta realmente não faz parte do gráfico. Observe que o domínio da função $y = 1/(1 - x)$ é $\{x \mid x \neq 1\}$. Podemos eliminar a reta quase vertical fazendo experiências com mudanças de escala. Quando mudamos para uma janela menor $[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-4{,}7; 4{,}7]$, obtemos um gráfico muito melhor, como mostrado na Figura 10(b).

Outra maneira de evitar a reta que não pertence ao gráfico é mudar o modo gráfico na calculadora, para que os pontos não sejam ligados.

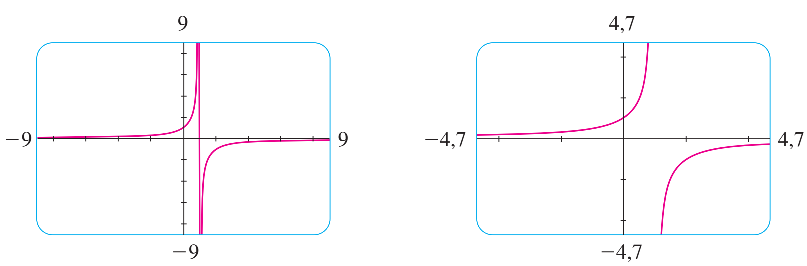


FIGURA 10 (a) (b)

EXEMPLO 7 Faça o gráfico da função $y = \sqrt[3]{x}$.

SOLUÇÃO Alguns dispositivos gráficos mostram o gráfico indicado na Figura 11, enquanto outros produzem um gráfico como o da Figura 12. Sabemos da Seção 1.2 (Figura 13) que o gráfico na Figura 12 está correto; então, o que aconteceu na Figura 11? A explicação disso é que, em algumas máquinas, a raiz cúbica de x é calculada por meio de um algoritmo, que não é definido se x for negativo. Logo, somente a metade à direita do gráfico é produzida.

Você pode obter o gráfico correto com Maple digitando primeiro

```
with(RealDomain);
```

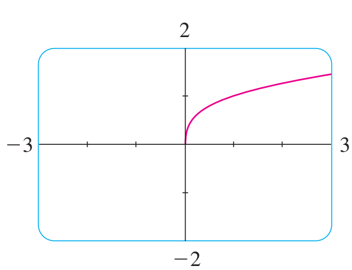


FIGURA 11

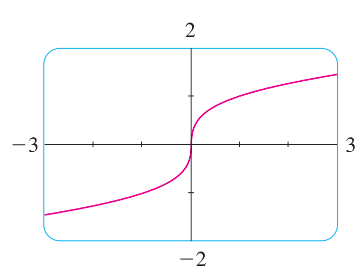


FIGURA 12

Você deve experimentar com sua máquina para ver qual desses dois gráficos será produzido. Se obtiver o gráfico da Figura 11, poderá obter a imagem correta fazendo o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}.$$

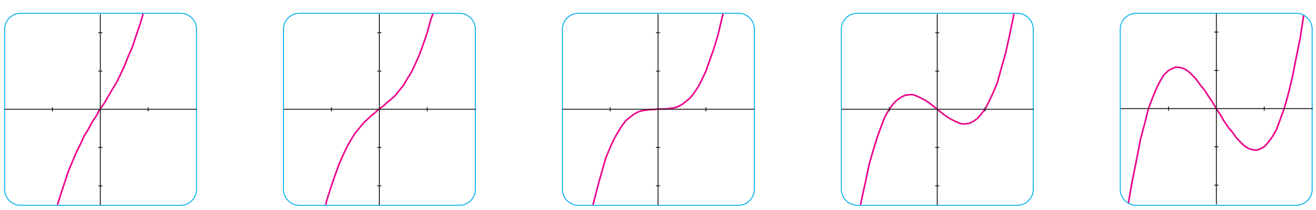
Observe que essa função é igual a $\sqrt[3]{x}$ (exceto quando $x = 0$).

Para entender como a expressão de uma função relaciona-se com seu gráfico, é útil fazer o gráfico de uma **família de funções**, isto é, uma coleção de funções cujas equações estão relacionadas. No exemplo a seguir, faremos os gráficos de membros de uma família de polinômios cúbicos.

TEC Em *Visual 1.4* você pode ver uma animação da Figura 13.

EXEMPLO 8 Faça o gráfico da função $y = x^3 + cx$ para vários valores de c. Como mudará o gráfico quando fizermos c variar?

SOLUÇÃO A Figura 13 mostra os gráficos de $y = x^3 + cx$ para $c = 2, 1, 0, -1$ e -2. Vemos que, para os valores positivos de c, o gráfico é crescente da esquerda para a direita sem pontos de máximo ou de mínimo (picos ou vales). Quando $c = 0$, a curva é achatada na origem. Quando c é negativo, a curva tem um ponto de máximo e um ponto de mínimo. À medida que c decresce, o ponto de máximo fica cada vez mais alto, e o ponto de mínimo, cada vez mais baixo.



(a) $y=x^3+2x$ (b) $y=x^3+x$ (c) $y=x^3$ (d) $y=x^3-x$ (e) $y=x^3-2x$

FIGURA 13
Vários membros da família de funções $y=x^3+cx$ têm seus gráficos esboçados na janela retangular $[-2, 2]$ por $[-2{,}5; 2{,}5]$.

EXEMPLO 9 Encontre as soluções da equação $\cos x = x$ com duas casas decimais de precisão.

SOLUÇÃO As soluções da equação $\cos x = x$ são as coordenadas x dos pontos de intersecção das curvas $y = \cos x$ e $y = x$. Da Figura 14(a) vemos que há uma única solução e ela está entre 0 e 1. Dando um zoom na janela $[0, 1]$ por $[0, 1]$, vemos, da Figura 14(b), que a solução está entre 0,7 e 0,8. Assim damos mais um zoom para a janela $[0{,}7; 0{,}8]$ por $[0{,}7; 0{,}8]$ na Figura 14(c). Movendo o cursor para o ponto de intersecção das duas curvas, ou por verificação e pelo fato de que a escala em x é 0,01, vemos que a solução da equação é cerca de 0,74. (Muitas calculadoras possuem dispositivos que fornecem pontos de intersecção.)

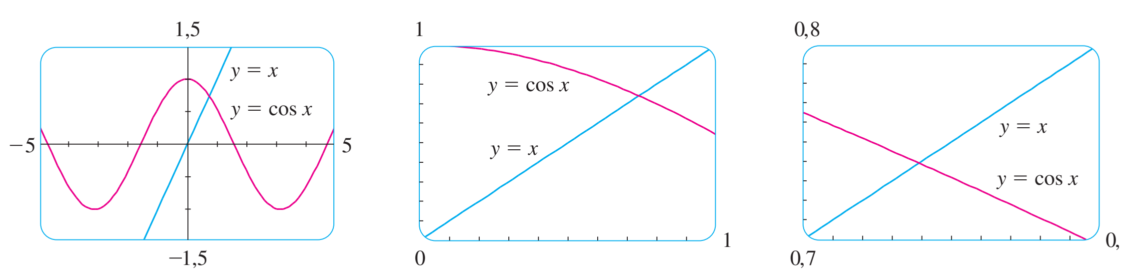


FIGURA 14
Localização das soluções de $\cos x=x$

(a) $[-5, 5]$ por $[-1{,}5; 1{,}5]$ escala $x=1$

(b) $[0, 1]$ por $[0, 1]$ escala $x=0{,}1$

(c) $[0{,}7; 0{,}8]$ por $[0{,}7; 0{,}8]$ escala $x=0{,}01$

1.4 Exercícios

1. Use uma calculadora gráfica ou um computador para determinar qual das janelas retangulares dadas produz o gráfico mais apropriado da função $f(x) = \sqrt{x^3 - 5x^2}$.
 (a) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$ (b) $[0, 10]$ por $[0, 2]$
 (c) $[0, 10]$ por $[0, 10]$

2. Use uma calculadora gráfica ou um computador para determinar qual das janelas retangulares dadas produz o gráfico mais apropriado da função $f(x) = x^4 - 16x^2 + 20$.
 (a) $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$ (b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
 (c) $[-50, 50]$ por $[-50, 50]$ (d) $[-5, 5]$ por $[-50, 50]$

3–14 Determine uma janela retangular apropriada para a função dada e use-a para fazer o gráfico da função.

3. $f(x) = x^2 - 36x + 32$
4. $f(x) = x^3 + 15x^2 + 65x$
5. $f(x) = \sqrt{50 - 0{,}2x}$
6. $f(x) = \sqrt{15x - x^2}$
7. $f(x) = x^3 - 225x$
8. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 100}$
9. $f(x) = \text{sen}^2(1000x)$
10. $f(x) = \cos(0{,}001x)$
11. $f(x) = \text{sen}\,\sqrt{x}$
12. $f(x) = \sec(20\pi x)$
13. $y = 10\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,100x$
14. $y = x^2 + 0{,}02\,\text{sen}\,50x$

15. (a) Tente encontrar uma janela retangular apropriada para $f(x) = (x - 10)^3 2^{-x}$.
 (b) Você precisa de mais de uma janela? Por quê?

16. Faça o gráfico da função $f(x) = x^2\sqrt{30 - x}$ em uma janela apropriada. Por que parte do gráfico parece faltar?

17. Faça o gráfico da elipse $4x^2 + 2y^2 = 1$ por meio dos gráficos das funções que são a metade superior e inferior da elipse.

18. Faça o gráfico da hipérbole $y^2 - 9x^2 = 1$ por meio dos gráficos das funções que são os ramos superior e inferior da hipérbole.

19–20 Os gráficos se interceptam na janela retangular dada? Se eles se interceptarem, quantos pontos de intersecção existem?

19. $y = 3x^2 - 6x + 1$, $y = 0{,}23x - 2{,}25$; $[-1, 3]$ por $[-2{,}5; 1{,}5]$

20. $y = 6 - 4x - x^2$, $y = 3x + 18$; $[-6, 2]$ por $[-5, 20]$

21–23 Encontre todas as soluções da equação, com duas casas decimais de precisão.

21. $x^4 - x = 1$
22. $\sqrt{x} = x^3 - 1$
23. $\text{tg}\,x = \sqrt{1 - x^2}$

24. Vimos, no Exemplo 9, que a equação $\cos x = x$ tem uma única solução.
 (a) Use um gráfico para mostrar que a equação $\cos x = 0{,}3x$ tem três soluções e encontre-as com duas casas decimais de precisão.
 (b) Encontre um valor aproximado m tal que a equação $\cos x = mx$ tenha exatamente duas soluções.

25. Use os gráficos para determinar qual das funções $f(x) = 10x^2$ e $g(x) = x^3/10$ é, eventualmente, maior (isto é, maior quando x for muito grande).

26. Use os gráficos para determinar qual dentre as funções $f(x) = x^4 - 100x^3$ e $g(x) = x^3$ é, eventualmente, maior.

27. Para quais valores de x é válido que $|\text{tg}\,x - x| < 0{,}01$ e $-\pi/2 < x < \pi/2$?

28. Faça o gráfico dos polinômios $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$ e $Q(x) = 3x^5$ na mesma tela, usando primeiro a janela retangular $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ e então mudando para $[-10, 10]$ por $[-10\,000, 10\,000]$. O que você pode observar a partir desses gráficos?

29. Neste exercício consideramos a família de funções $f(x) = \sqrt[n]{x}$, onde n é um inteiro positivo.
 (a) Faça os gráficos das funções $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ e $y = \sqrt[6]{x}$, na mesma tela, usando a janela retangular $[-1, 4]$ por $[-1, 3]$.
 (b) Faça os gráficos das funções $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \sqrt[5]{x}$ na mesma tela, usando a janela retangular $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. (Veja o Exemplo 7.)
 (c) Faça os gráficos das funções $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ e $y = \sqrt[5]{x}$ na mesma tela usando a janela retangular $[-1, 3]$ por $[-1, 2]$.
 (d) Que conclusões você pode tirar desses gráficos?

30. Neste exercício consideramos a família de funções $f(x) = 1/x^n$, onde n é um inteiro positivo.
 (a) Faça os gráficos das funções $y = 1/x$ e $y = 1/x^3$ na mesma tela usando a janela retangular $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$.
 (b) Faça o gráfico das funções $y = 1/x^2$ e $y = 1/x^4$ na mesma tela usando a janela retangular dada na parte (a).
 (c) Faça o gráfico de todas as funções das partes (a) e (b) na mesma tela usando a janela retangular $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$.
 (d) Que conclusões você pode tirar desses gráficos?

31. Faça o gráfico da função $f(x) = x^4 + cx^2 + x$ para diversos valores de c. Como o gráfico muda conforme c varia?

32. Faça o gráfico da função $f(x) = \sqrt{1 + cx^2}$ para diversos valores de c. Descreva como a modificação do valor de c afeta o gráfico.

33. Faça o gráfico da função $y = x^n 2^{-x}$, $x \geqslant 0$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6. Como varia o gráfico com o crescimento de n?

34. As curvas com equações

$$y = \frac{|x|}{\sqrt{c - x^2}}$$

são chamadas **curvas ponta de bala**. Faça o gráfico de algumas dessas curvas para entender o porquê de seu nome. O que acontece quando c cresce?

35. O que acontece com o gráfico da equação $y^2 = cx^3 + x^2$ à medida que c varia?

36. Este exercício explora o efeito da função interior g sobre a função composta $y = f(g(x))$.

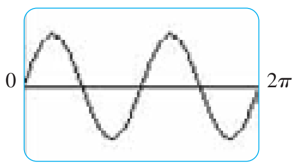
É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

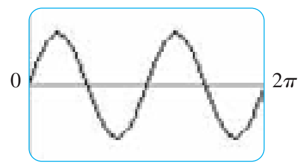
(a) Faça o gráfico da função $y = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ usando a janela $[0, 400]$ por $[-1{,}5; 1{,}5]$. Qual a diferença entre esse gráfico e o da função seno?

(b) Faça o gráfico da função $y = \operatorname{sen}(x^2)$ usando a janela $[-5, 5]$ por $[-1{,}5; 1{,}5]$. Qual a diferença entre esse gráfico e o da função seno?

37. As figuras a seguir mostram os gráficos de $y = \operatorname{sen} 96x$ e $y = \operatorname{sen} 2x$ conforme são exibidos por uma calculadora gráfica TI-83. O primeiro gráfico é inexato. Explique por que os dois gráficos parecem ser idênticos. [*Dica:* A janela gráfica da TI-83 é de 95 pixels de largura. Quais pontos específicos a calculadora marca?]

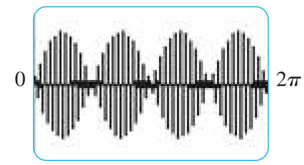


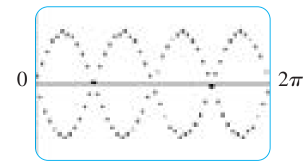
$y = \operatorname{sen} 96x$



$y = \operatorname{sen} 2x$

38. O primeiro gráfico da figura a seguir é aquele que uma calculadora gráfica TI-83 exibe como função $y = \operatorname{sen} 45x$. Ele está incorreto e, portanto, para ajudar a explicar sua aparência, redesenhamos a curva em questão no modo pontual da calculadora, obtendo o segundo gráfico. Que duas curvas senoidais a calculadora parece estar desenhando? Mostre que cada ponto do gráfico de $y = \operatorname{sen} 45x$ que a TI-83 escolhe para desenhar está, de fato, em uma dessas duas curvas. (A janela gráfica da TI-83 é de 95 pixels de largura.)





1.5 Funções Exponenciais

No Apêndice D apresentamos uma abordagem alternativa para as funções exponencial e logarítmica, usando o cálculo integral.

A função $f(x) = 2^x$ é chamada *função exponencial*, pois a variável, x, é o expoente. Ela não deve ser confundida com a função potência $g(x) = x^2$, na qual a variável é a base.

Em geral, uma **função exponencial** é uma função da forma

$$f(x) = a^x$$

onde a é uma constante positiva. Vamos recordar o que isso significa.

Se $x = n$, um inteiro positivo, então

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Se $x = 0$, então $a^0 = 1$, e se $x = -n$, onde n é um inteiro positivo, então

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Se x for um número racional, $x = p/q$, onde p e q são inteiros e $q > 0$, então

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Mas qual o significado de a^x se x for um número irracional? Por exemplo, qual o significado de $2^{\sqrt{3}}$ ou 5^{π}?

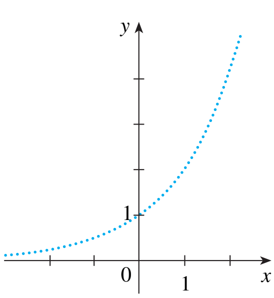


FIGURA 1
Representação de $y = 2^x$, x racional

Para ajudá-lo a responder a essa questão, olhemos primeiro o gráfico da função $y = 2^x$, nos pontos em que x é racional. Uma representação desse gráfico encontra-se na Figura 1. Queremos aumentar o domínio de $y = 2^x$ para incluir tanto os números racionais quanto os irracionais.

Existem buracos no gráfico na Figura 1, correspondendo aos valores irracionais de x. Queremos preencher os buracos com a definição de $f(x) = 2^x$, onde $x \in \mathbb{R}$ de modo que f seja uma função crescente. Em particular, uma vez que o número irracional $\sqrt{3}$ satisfaz

$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$$

devemos ter

$$2^{1{,}7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}8}$$

e sabemos o que $2^{1{,}7}$ e $2^{1{,}8}$ significam, pois 1,7 e 1,8 são números racionais. Analogamente, usando melhores aproximações para $\sqrt{3}$, obtemos melhores aproximações para $2^{\sqrt{3}}$:

$$
\begin{aligned}
1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1{,}73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}74} \\
1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1{,}732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}733} \\
1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1{,}7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}7321} \\
1{,}73205 < \sqrt{3} < 1{,}73206 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1{,}73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}73206} \\
\vdots \qquad \vdots \qquad &\qquad \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}
$$

Pode ser mostrado que há exatamente um número maior que todos os números

$$2^{1{,}7}, \quad 2^{1{,}73}, \quad 2^{1{,}732}, \quad 2^{1{,}7320}, \quad 2^{1{,}73205}, \quad \ldots$$

e menor que todos os números

$$2^{1{,}8}, \quad 2^{1{,}74}, \quad 2^{1{,}733}, \quad 2^{1{,}7321}, \quad 2^{1{,}73206}, \quad \ldots$$

Uma demonstração dessa afirmação é dada em J. Marsden e A. Weinstein, *Calculus Unlimited* (Menlo Park, CA, 1981). Para uma versão online, veja caltechbook.library.caltech.edu/197/

Definimos $2^{\sqrt{3}}$ como esse número. Usando o processo de aproximação precedente podemos calculá-lo corretamente com seis casas decimais:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}321997.$$

Analogamente, podemos definir 2^x (ou a^x, se $a > 0$), onde x é um número irracional qualquer. A Figura 2 mostra como todos os buracos da Figura 1 foram preenchidos para completar o gráfico da função $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

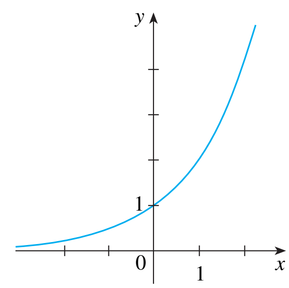


FIGURA 2
$y = 2^x$, x real

Os gráficos dos membros da família de funções $y = a^x$ estão na Figura 3, para vários valores da base a. Observe que todos esses gráficos passam pelo mesmo ponto (0, 1) porque $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Observe que a função exponencial cresce mais rapidamente à medida que a fica maior (para $x > 0$).

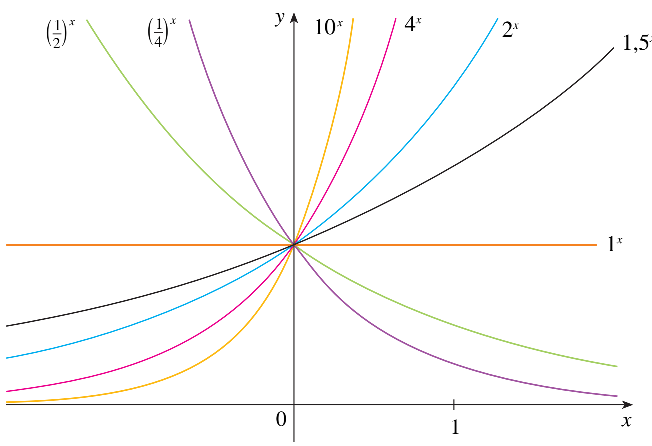


FIGURA 3

Se $0 < a < 1$, então a^x aproxima-se de 0 à medida que x cresce. Se $a > 1$, então a^x tende a 0 conforme x decresce por valores negativos. Em ambos os casos, o eixo x é uma assíntota horizontal. Esses assuntos serão discutidos na Seção 2.6.

Você pode ver na Figura 3 que basicamente existem três tipos de função exponencial $y = a^x$. Se $0 < a < 1$, a função exponencial decresce; se $a = 1$, ela é uma constante; e se $a > 1$, ela cresce. Esses três casos são ilustrados na Figura 4. Observe que se $a \neq 1$, então a função exponencial $y = a^x$ tem domínio $\mathbb{R}$ e imagem $(0, \infty)$. Além disso, uma vez que $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$, o gráfico de $y = (1/a)^x$ é a reflexão do gráfico de $y = a^x$ em torno do eixo y.

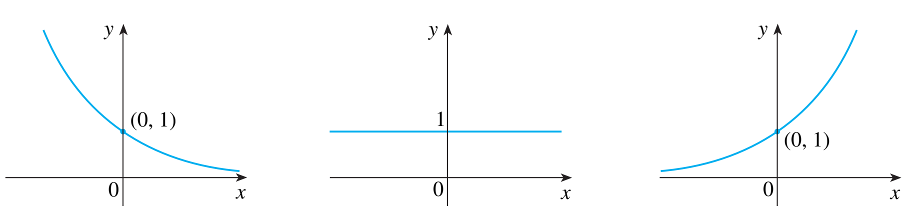


FIGURA 4 (a) $y=a^x$, $0<a<1$ (b) $y=1^x$ (c) $y=a^x$, $a>1$

Uma razão para a importância da função exponencial está nas propriedades a seguir. Se x e y forem números racionais, então essas propriedades são bem conhecidas da álgebra elementar. Pode-se demonstrar que elas permanecem verdadeiras para números reais arbitrários x e y.

Propriedades dos Expoentes Se a e b forem números positivos e x e y, quaisquer números reais, então

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

EXEMPLO 1 Esboce o gráfico da função $y = 3 - 2^x$ e determine seu domínio e imagem.

Para uma revisão sobre as reflexões e translações de gráficos, veja a Seção 1.3.

SOLUÇÃO Primeiro refletimos o gráfico de $y = 2^x$ [mostrado nas Figuras 2 e 5(a)] em torno do eixo x para obter o gráfico de $y = -2^x$ na Figura 5(b). A seguir deslocamos o gráfico de $y = -2^x$ em 3 unidades para cima, para obter o gráfico de $y = 3 - 2^x$ na Figura 5(c). O domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem é $(-\infty, 3)$.

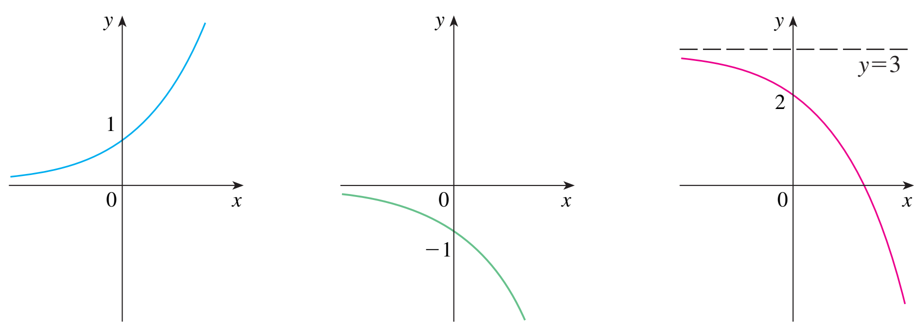


FIGURA 5 (a) $y=2^x$ (b) $y=-2^x$ (c) $y=3-2^x$

O Exemplo 2 mostra que $y = 2^x$ aumenta mais rapidamente que $y = x^2$. Para verificar quão rapidamente $f(x) = 2^x$ cresce, vamos fazer a seguinte experiência mental. Começaremos com um pedaço de papel com uma espessura de 1 décimo de milímetro e vamos dobrá-lo pela metade 50 vezes. Cada vez que dobramos o papel pela metade, a sua espessura se duplica; assim, a sua espessura resultante seria $2^{50}/10$ mm. Que espessura você acha que isso representa? De fato, mais que 100 milhões de quilômetros!

EXEMPLO 2 Use uma ferramenta gráfica para comparar a função exponencial $f(x) = 2^x$ e a função potência $g(x) = x^2$. Qual função crescerá mais rapidamente quando x for grande?

SOLUÇÃO A Figura 6 mostra os gráficos das duas funções na janela retangular $[-2, 6]$ por $[0, 40]$. Vemos que os gráficos se interceptam três vezes, mas, para $x > 4$, o gráfico de $f(x) = 2^x$ fica acima do gráfico de $g(x) = x^2$. A Figura 7 dá uma visão mais abrangente e mostra que, para grandes valores de x, a função exponencial $y = 2^x$ cresce muito mais rapidamente que a função potência $y = x^2$.

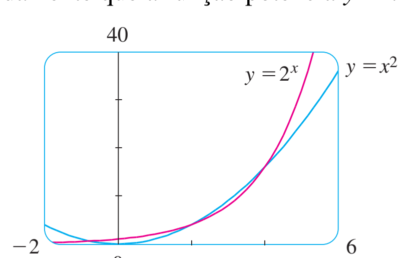


FIGURA 6

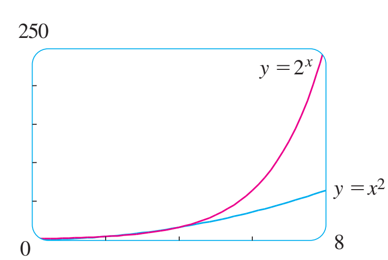


FIGURA 7

Aplicações de Funções Exponenciais

A função exponencial ocorre frequentemente em modelos matemáticos da natureza e da sociedade. Vamos indicar brevemente aqui como eles surgem na descrição do crescimento populacional e do decaimento radioativo. Nos próximos capítulos vamos explorar estas e outras aplicações em mais detalhes.

Vamos considerar primeiro uma população de bactérias em um meio nutriente homogêneo. Suponhamos que tomando amostras da população em certos intervalos de tempo fique determinado que a população dobra a cada hora. Se o número de bactérias no instante t for $p(t)$, onde t é medido em horas, e a população inicial for $p(0) = 1000$, então

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1000$$

$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1000$$

$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1000$$

Desse padrão parece que, em geral,

$$p(t) = 2^t \times 1\,000 = (1000)2^t$$

A função população é um múltiplo constante da função exponencial $y = 2^t$; logo, ela exibe o rápido crescimento que observamos nas Figuras 2 e 7. Sob condições ideais (espaço e alimentos ilimitados e ausência de doenças), esse crescimento exponencial é típico do que ocorre realmente na natureza.

O que pode ser dito sobre a população humana? A Tabela 1 mostra os dados da população mundial do século XX, e a Figura 8 mostra o correspondente diagrama de dispersão.

TABELA 1

t	População (milhões)
0	1.650
10	1.750
20	1.860
30	2.070
40	2.300
50	2.560
60	3.040
70	3.710
80	4.450
90	5.280
100	6.080
110	6.870

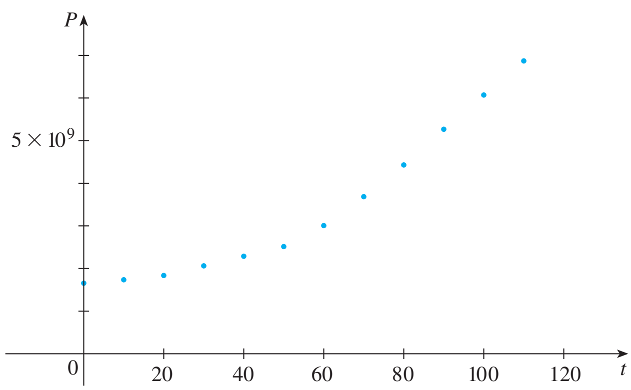


FIGURA 8 Diagrama de dispersão para o crescimento populacional mundial

O padrão dos dados da Figura 8 sugere um crescimento exponencial; assim, se usarmos uma calculadora gráfica com capacidade para regressão exponencial por mínimos quadrados, obteremos o seguinte modelo exponencial:

$$P = (1.436{,}53) \cdot (1{,}01395)^t$$

onde $t = 0$ corresponde a 1900. A Figura 9 mostra o gráfico dessa função exponencial junto com os pontos originais. Podemos ver que a curva exponencial se ajusta razoavelmente aos dados. Os períodos de crescimento populacional lento podem ser explicados pelas duas guerras mundiais e pela depressão dos anos 1930.

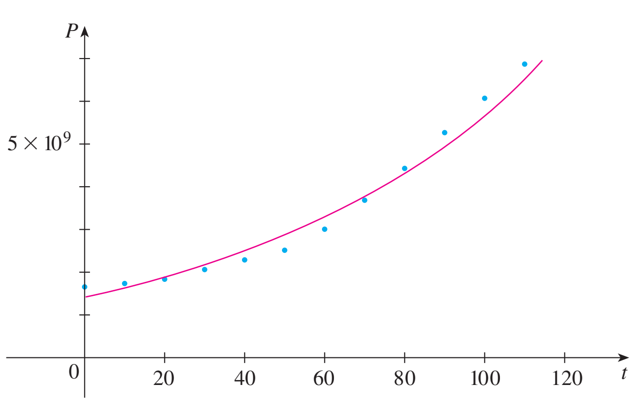


FIGURA 9
Modelo exponencial para o crescimento populacional

O Número e

Dentre todas as bases possíveis para uma função exponencial, há uma que é mais conveniente para os propósitos do cálculo. A escolha de uma base a é influenciada pela maneira que o gráfico de $y = a^x$ cruza o eixo y. As Figuras 10 e 11 mostram as retas tangentes para os gráficos de $y = 2^x$ e $y = 3^x$ no ponto $(0, 1)$. (As retas tangentes serão definidas precisamente na Seção 2.7. Para as finalidades presentes, você pode pensar na reta tangente para um gráfico exponencial em um ponto como a reta que toca o gráfico somente naquele ponto.) Se medirmos as inclinações dessas retas tangentes em $(0, 1)$, descobrimos que $m \approx 0{,}7$ para $y = 2^x$ e $m \approx 1{,}1$ para $y = 3^x$.

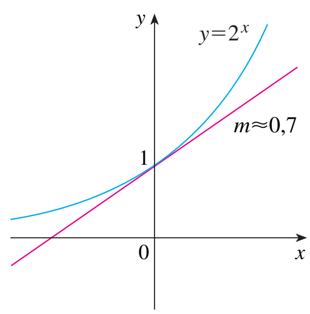


FIGURA 10

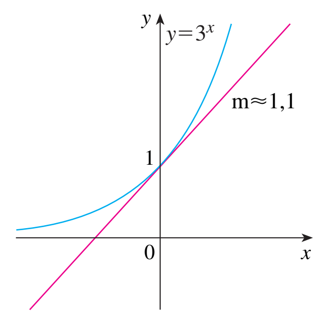


FIGURA 11

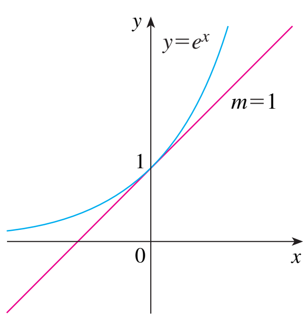


FIGURA 12

A função exponencial natural cruza o eixo y com uma inclinação igual a 1.

TEC *Module 1.5* habilita você a fazer gráficos de funções exponenciais com diversas bases e suas retas tangentes para estimar o valor de a mais próximo para o qual a tangente tem inclinação 1.

Conforme será visto no Capítulo 3, as fórmulas do cálculo ficam muito simplificadas quando escolhemos como base a aquela para a qual resulta uma reta tangente a $y = a^x$ em $(0, 1)$ com uma inclinação de *exatamente* 1. (Veja a Figura 12.) De fato, *existe* um número assim e ele é denotado pelo caractere e. (Esta notação foi escolhida pelo matemático suíço Leonhard Euler em 1727, provavelmente porque é o primeiro caractere da palavra *exponencial*.) Na visualização das Figuras 10 e 11, não surpreende que o número e está entre 2 e 3 e o gráfico de $y = e^x$ esteja entre os gráficos $y = 2^x$ e $y = 3^x$. (Veja a Figura 13.) No Capítulo 3 veremos que o valor de e correto até a quinta casa decimal é

$$e \approx 2{,}71828$$

Podemos chamar a função $f(x) = e^x$ de **função exponencial natural**.

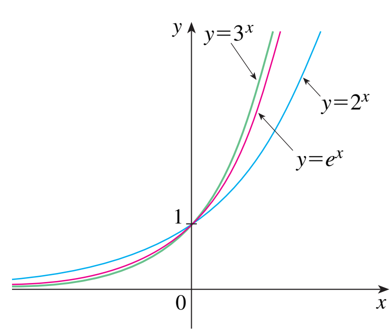


FIGURA 13

EXEMPLO 3 Faça o gráfico de $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ e diga qual o domínio e a imagem.

SOLUÇÃO Começamos com o gráfico de $y = e^x$ das Figuras 12 e 14(a) e o refletimos em torno do eixo y para obter o gráfico de $y = e^{-x}$ ilustrado na Figura 14(b). (Observe que essa curva cruza o eixo y com uma inclinação de -1). Então comprimimos verticalmente o gráfico por um fator de 2 para obter o gráfico de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ mostrado na Figura 14(c). Finalmente deslocamos o gráfico para baixo uma unidade, para obter o que foi pedido na Figura 14(d). O domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem é $(-1, \infty)$.

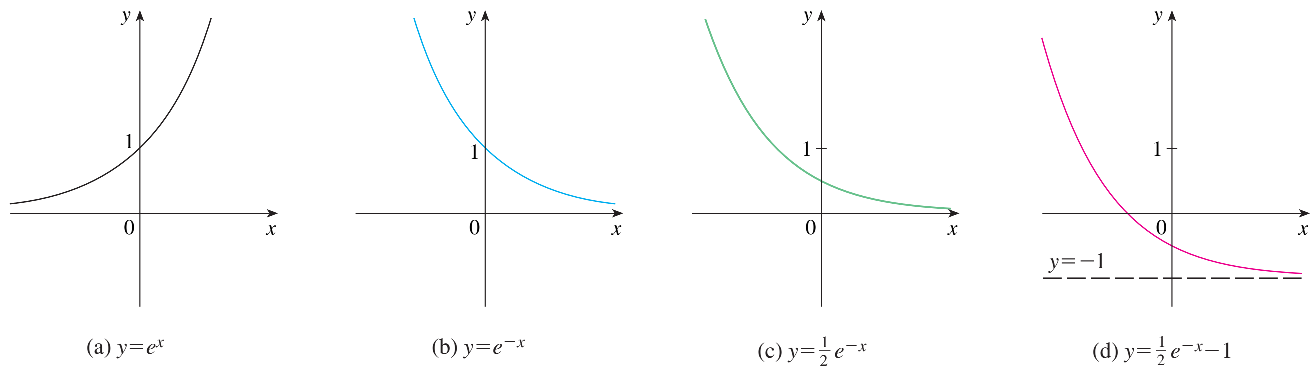


FIGURA 14

A que distância à direita da origem você estará quando o gráfico de $y = e^x$ ultrapassar 1 milhão? O próximo exemplo mostra a rapidez do crescimento dessa função, dando uma resposta a essa pergunta que poderá surpreendê-lo.

EXEMPLO 4 Use uma ferramenta gráfica para encontrar os valores de x para os quais $e^x > 1\,000\,000$.

SOLUÇÃO Na Figura 15 fizemos os gráficos da função $y = e^x$ e da reta horizontal $y = 1\,000\,000$. Vemos que essas curvas se interceptam quando $x \approx 13{,}8$. Assim, $e^x > 10^6$ quando $x > 13{,}8$. Talvez seja surpreendente que os valores da função exponencial já ultrapassem 1 milhão quando x é somente 14.

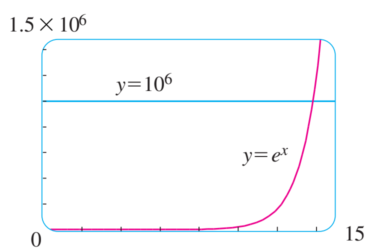


FIGURA 15

1.5 Exercícios

1–4 Utilize a Propriedade dos Exponentes para reescrever e simplificar a expressão.

1. (a) $\dfrac{4^{-3}}{2^{-8}}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

2. (a) $8^{4/3}$ (b) $x(3x^2)^3$

3. (a) $b^8(2b)^4$ (b) $\dfrac{(6y^3)^4}{2y^5}$

4. (a) $\dfrac{x^{2n} \cdot x^{3n-1}}{x^{n+2}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}}$

5. (a) Escreva uma equação que defina a função exponencial com base $a > 0$.
(b) Qual o domínio dessa função?
(c) Se $a \neq 1$, qual a imagem dessa função?
(d) Esboce a forma geral do gráfico da função exponencial nos seguintes casos.
(i) $a > 1$ (ii) $a = 1$ (iii) $0 < a < 1$

6. (a) Como é definido o número e?
(b) Qual o valor aproximado de e?
(c) Qual a função exponencial natural?

7–10 Faça em uma mesma tela os gráficos das funções dadas. Como esses gráficos estão relacionados?

7. $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 5^x$, $y = 20^x$

8. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 8^x$, $y = 8^{-x}$

9. $y = 3^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

10. $y = 0{,}9^x$, $y = 0{,}6^x$, $y = 0{,}3^x$, $y = 0{,}1^x$

11–16 Faça um esboço do gráfico de cada função. Não use a calculadora. Use somente os gráficos dados nas Figuras 3 e 13 e, se necessário, as transformações da Seção 1.3.

11. $y = 10^{x+2}$ **12.** $y = (0{,}5)^x - 2$

13. $y = -2^{-x}$

14. $y = e^{|x|}$

15. $y = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$

16. $y = 2(1 - e^{x})$

17. Começando com o gráfico de $y = e^x$, escreva as equações correspondentes aos gráficos que resultam ao
(a) deslocar 2 unidades para baixo
(b) deslocar 2 unidades para a direita
(c) refletir em torno do eixo x
(d) refletir em torno do eixo y
(e) refletir em torno do eixo x e, depois, do eixo y

18. Começando com o gráfico de $y = e^x$, encontre as equações dos gráficos que resultam ao
(a) refletir em torno da reta $y = 4$
(b) refletir em torno da reta $x = 2$

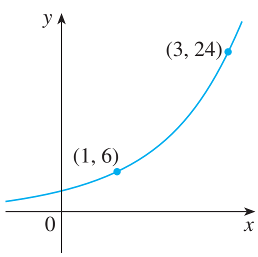
19–20 Encontre o domínio de cada função.

19. (a) $f(x) = \dfrac{1 - e^{x^2}}{1 - e^{1-x^2}}$ (b) $f(x) = \dfrac{1 + x}{e^{\cos x}}$

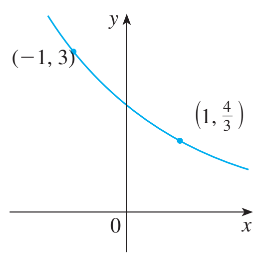
20. (a) $g(t) = \text{sen}(e^{-t})$ (b) $g(t) = \sqrt{1 - 2^t}$

21–22 Encontre a função exponencial $f(x) = Ca^x$ cujo gráfico é dado.

21.



22.



23. Se $f(x) = 5^x$, mostre que

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 5^x\left(\frac{5^h - 1}{h}\right)$$

24. Suponha que você receba uma oferta para trabalhar por apenas um mês. Qual das seguintes formas de pagamento você prefere?
I. Um milhão de dólares no fim do mês.
II. Um centavo de dólar no primeiro dia do mês, dois centavos no segundo dia, quatro centavos no terceiro dia, e, em geral, 2^{n-1} centavos de dólar no n-ésimo dia.

25. Suponha que os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$ sejam feitos sobre uma malha coordenada onde a unidade de comprimento seja 1 centímetro. Mostre que, a uma distância de 1 m à direita da origem, a altura do gráfico de f é 100 m, mas a altura do gráfico de g é maior que 10^{25} km.

26. Compare as funções $f(x) = x^5$ e $g(x) = 5^x$ por meio de seus gráficos em várias janelas retangulares. Encontre todos os pontos de intersecção dos gráficos corretos até uma casa decimal. Para grandes valores de x, qual função cresce mais rapidamente?

27. Compare as funções $f(x) = x^{10}$ e $g(x) = e^x$ traçando os gráficos de f e g em várias janelas retangulares. Quando finalmente o gráfico de g ultrapassa o de f?

28. Use um gráfico para estimar os valores de x tais que $e^x > 1\,000\,000\,000$.

29. Sob condições ideais sabe-se que uma certa população de bactérias dobra a cada 3 horas. Supondo que inicialmente existam 100 bactérias:
(a) Qual o tamanho da população após 15 horas?
(b) Qual o tamanho da população após t horas?
(c) Qual o tamanho da população após 20 horas?
(d) Trace o gráfico da função população e estime o tempo para a população atingir 50 000 bactérias.

30. Uma cultura de bactérias começa com 500 indivíduos e dobra de tamanho a cada meia hora.
(a) Quantas bactérias existem após 3 horas?
(b) Quantas bactérias existem após t horas?
(c) Quantas bactérias existem após 40 minutos?
(d) Trace o gráfico da função população e estime o tempo para a população atingir 100 000 bactérias.

31. Utilize uma calculadora gráfica com capacidade para regressão exponencial para modelar a população mundial com os dados de 1950 a 2000 da Tabela 1 da página 51. Use o modelo para estimar a população em 1993 e para predizer a população em 2020.

32. A tabela mostra a população da Malásia, em milhões, entre os anos de 1950 - 2000. Utilize uma calculadora gráfica com capacidade de regressão exponencial para modelar a população da Malásia desde 1950. Use o modelo para estimar a população em 1975 e para predizer a população nos anos 2010 e 2020.

Ano	População	Ano	População
1950	6,1	1980	13,8
1955	7,0	1985	15,7
1960	8,1	1990	17,8
1965	9,5	1995	20,4
1970	10,9	2000	23,0
1975	12,3		

33. Se você traçar o gráfico da função

$$f(x) = \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

você verá que f parece ser uma função ímpar. Demonstre isso.

34. Trace o gráfico de diversos membros da família de funções

$$f(x) = \frac{1}{1 + ae^{bx}}$$

onde $a > 0$. Como o gráfico muda conforme b varia? Como ele muda conforme a varia?

1.6 Funções Inversas e Logaritmos

A Tabela 1 fornece os dados de uma experiência na qual uma cultura começou com 100 bactérias em um meio limitado em nutrientes; o tamanho da população foi registrado em intervalos de uma hora. O número N de bactérias é uma função do tempo t: $N = f(t)$.

Suponha, todavia, que o biólogo mude seu ponto de vista e passe a se interessar pelo tempo necessário para a população alcançar vários níveis. Em outras palavras, ela está pensando em t como uma função de N. Essa função, chamada de *função inversa* de f, é denotada por f^{-1}, e deve ser lida assim: "inversa de f". Logo, $t = f^{-1}(N)$ é o tempo necessário para o nível da população atingir N. Os valores de f^{-1} podem ser encontrados na Tabela 1 lendo-a ao contrário ou consultando a Tabela 2. Por exemplo, $f^{-1}(550) = 6$, pois $f(6) = 550$.

TABELA 1 N como uma função de t

t (horas)	$N = f(t)$ = população no instante t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

TABELA 2 t como uma função de N

N	$t = f^{-1}(N)$ = tempo para atingir N bactérias
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

Nem todas as funções possuem inversas. Vamos comparar as funções f e g cujo diagrama de flechas está na Figura 1. Observe que f nunca assume duas vezes o mesmo valor (duas entradas quaisquer em A têm saídas diferentes), enquanto g assume o mesmo valor duas vezes (2 e 3 têm a mesma saída, 4). Em símbolos,

$$g(2) = g(3)$$

mas $$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{sempre que } x_1 \neq x_2$$

Funções que compartilham essa última propriedade com f são chamadas *funções injetoras*.

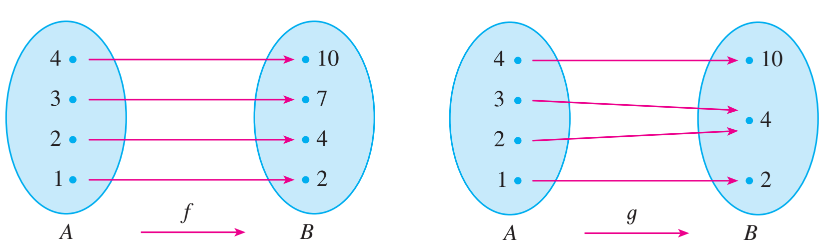


FIGURA 1
f é injetora; g não é

1 Definição Uma função f é chamada **função injetora** se ela nunca assume o mesmo valor duas vezes; isto é,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{sempre que } x_1 \neq x_2$$

Na linguagem de entradas e saídas, essa definição diz que f é injetora se cada *saída* corresponde a uma única *entrada*.

Se uma reta horizontal intercepta o gráfico de f em mais de um ponto, então vemos da Figura 2 que existem números x_1 e x_2 tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Isso significa que f não é uma função injetora. Portanto, temos o seguinte método geométrico para determinar se a função é injetora.

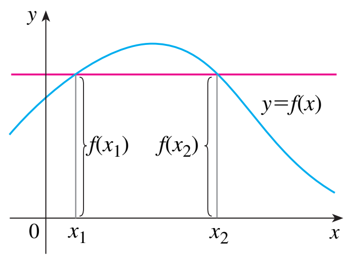


FIGURA 2
Esta função não é injetora, pois $f(x_1)=f(x_2)$.

> **Teste da Reta Horizontal** Uma função é injetora se nenhuma reta horizontal intercepta seu gráfico em mais de um ponto.

EXEMPLO 1 A função $f(x) = x^3$ é injetora?

SOLUÇÃO 1 Se $x_1 \neq x_2$, então $x_1^3 \neq x_2^3$ (dois números diferentes não podem ter o mesmo cubo). Portanto, pela Definição 1, $f(x) = x^3$ é injetora.

SOLUÇÃO 2 Da Figura 3 vemos que nenhuma reta horizontal intercepta o gráfico de $f(x) = x^3$ em mais de um ponto. Logo, pelo Teste da Reta Horizontal, f é injetora.

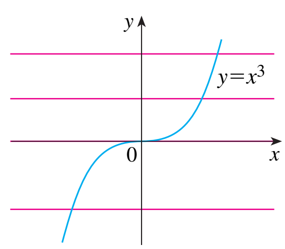


FIGURA 3
$f(x)=x^3$ é injetora.

EXEMPLO 2 A função $g(x) = x^2$ é injetora?

SOLUÇÃO 1 Esta função não é injetora, pois, por exemplo,

$$g(1) = 1 = g(-1)$$

e, portanto, 1 e -1 têm a mesma saída.

SOLUÇÃO 2 Da Figura 4 vemos que existem retas horizontais que interceptam o gráfico de g mais de uma vez. Assim, pelo Teste da Reta Horizontal, g não é injetora.

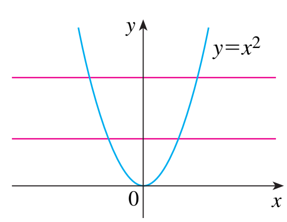


FIGURA 4
$g(x)=x^2$ não é injetora.

As funções injetoras são importantes, pois são precisamente as que possuem funções inversas, de acordo com a seguinte definição:

> **2 Definição** Seja f uma função injetora com domínio A e imagem B. Então, a sua **função inversa** f^{-1} tem domínio B e imagem A e é definida por
>
> $$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$
>
> para todo y em B.

Esta definição diz que se f transforma x em y, então f^{-1} transforma y de volta para x. (Se f não for injetora, então f^{-1} não seria definida de forma única.) O diagrama de setas na Figura 5 indica que f^{-1} reverte o efeito de f. Note que

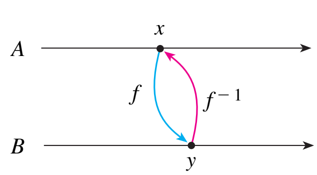


FIGURA 5

> domínio de f^{-1} = imagem de f
>
> imagem de f^{-1} = domínio de f

Por exemplo, a função inversa de $f(x) = x^3$ é $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ porque se $y = x^3$, então

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x.$$

ATENÇÃO Não confunda o -1 em f^{-1} com um expoente. Assim,

$$f^{-1}(x) \quad \text{não significa que} \quad \frac{1}{f(x)}$$

O recíproco $1/f(x)$, pode, todavia, ser escrito como $[f(x)]^{-1}$.

EXEMPLO 3 Se $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ e $f(8) = -10$, encontre $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(-10)$.

SOLUÇÃO Da definição de f^{-1} temos

$$f^{-1}(7) = 3 \quad \text{porque} \quad f(3) = 7$$

$$f^{-1}(5) = 1 \quad \text{porque} \quad f(1) = 5$$

$$f^{-1}(-10) = 8 \quad \text{porque} \quad f(8) = -10$$

O diagrama na Figura 6 torna claro que f^{-1} reverte o efeito de f nesses casos.

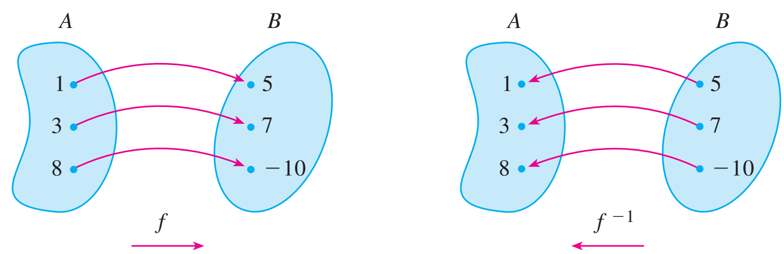


FIGURA 6
A função inversa reverte entradas e saídas.

A letra x é usada tradicionalmente como a variável independente; logo, quando nos concentramos em f^{-1} em vez de f, geralmente reverteremos os papéis de x e y na Definição 2 e escreveremos

3
$$\boxed{f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x}$$

Substituindo y na Definição 2 e x em $\boxed{3}$, obtemos as seguintes **equações de cancelamento**:

4
$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \quad \text{para todo } x \text{ em } A \\ f(f^{-1}(x)) &= x \quad \text{para todo } x \text{ em } B \end{aligned}$$

A primeira lei do cancelamento diz que se começarmos em x, aplicarmos f e, em seguida f^{-1}, obteremos de volta x, de onde começamos (veja o diagrama de máquina na Figura 7). Assim, f^{-1} desfaz o que f faz. A segunda equação diz que f desfaz o que f^{-1} faz.

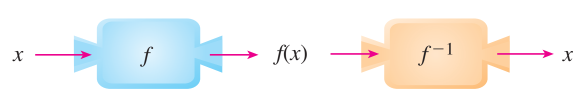


FIGURA 7

Por exemplo, se $f(x) = x^3$, então $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ as equações de cancelamento ficam

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f(f^{-1}(x)) = (x^{1/3})^3 = x$$

Essas equações simplesmente dizem que a função cubo e a função raiz cúbica cancelam-se uma à outra quando aplicadas sucessivamente.

Vamos ver agora como calcular as funções inversas. Se tivermos uma função $y = f(x)$ e formos capazes de resolver nessa equação para x em termos de y, então, de acordo com a Definição 2, devemos ter $x = f^{-1}(y)$. Se quisermos chamar a variável independente de x, trocamos x por y e chegamos à equação $y = f^{-1}(x)$.

5 Como Achar a Função Inversa de uma Função *f* Injetora

Passo 1 Escreva $y = f(x)$.
Passo 2 Isole x nessa equação, escrevendo-o em termos de y (se possível).
Passo 3 Para expressar f^{-1} como uma função de x, troque x por y. A equação resultante é $y = f^{-1}(x)$.

EXEMPLO 4 Encontre a função inversa $f(x) = x^3 + 2$.

SOLUÇÃO De acordo com $\boxed{5}$ escrevemos primeiro

$$y = x^3 + 2$$

Então, isolamos x nessa equação:

$$x^3 = y - 2$$

$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

Finalmente, trocando x por y:

$$y = \sqrt[3]{x - 2}$$

Portanto, a função inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

No Exemplo 4, perceba que f^{-1} reverte o efeito de f. A função f é dada pela regra "eleve ao cubo e então adicione 2"; f^{-1} é dada pela regra "subtraia 2 e então tome a raiz cúbica".

O princípio de trocar x e y para encontrar a função inversa também nos dá um método de obter o gráfico f^{-1} a partir de f. Uma vez que $f(a) = b$ se e somente se $f^{-1}(b) = a$, o ponto (a, b) está no gráfico de f se e somente se o ponto (b, a) estiver no gráfico de f^{-1}. Mas obtemos o ponto (b, a) de (a, b) refletindo-o em torno da reta $y = x$. (Veja a Figura 8.)

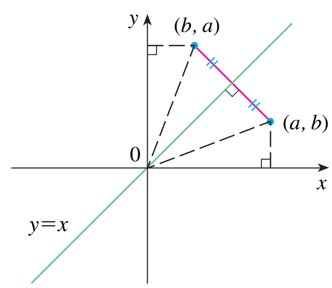


FIGURA 8

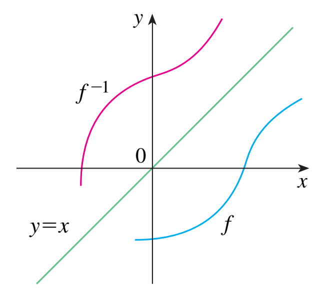


FIGURA 9

Portanto, conforme ilustrado na Figura 9:

> O gráfico de f^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico de f em torno da reta $y = x$.

EXEMPLO 5 Esboce os gráficos de $f(x) = \sqrt{-1 - x}$ e de sua função inversa usando o mesmo sistema de coordenadas.

SOLUÇÃO Esboçamos primeiro a curva $y = \sqrt{-1 - x}$ (a metade superior da parábola $y^2 = -1 - x$, ou $x = -y^2 - 1$), e então, refletindo em torno da reta $y = x$, obtemos o gráfico de f^{-1}. (Veja a Figura 10.) Como uma verificação de nosso gráfico, observe que a expressão para f^{-1} é $f^{-1}(x) = -x^2 - 1$, $x \geqslant 0$. Assim, o gráfico de f^{-1} é a metade à direita da parábola $y = -x^2 - 1$, e isso parece razoável pela Figura 10.

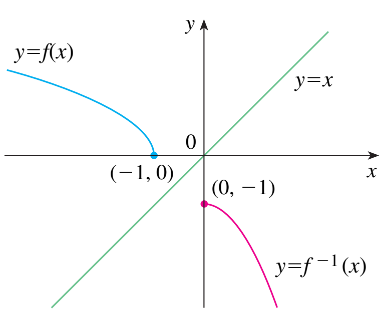


FIGURA 10

Funções Logarítmicas

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente ou decrescente, e, portanto, injetora pelo Teste da Reta Horizontal. Assim, existe uma função inversa f^{-1}, chamada **função logarítmica com base *a*** denotada por $\log_a$. Se usarmos a formulação de função inversa dada por $\boxed{3}$

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

teremos

$$\boxed{6} \qquad \boxed{\log_a x = y \iff a^y = x}$$

Dessa forma, se $x > 0$, então $\log_a x$ é o expoente ao qual deve se elevar a base a para se obter x. Por exemplo, $\log_{10} 0{,}001 = -3$ pois $10^{-3} = 0{,}001$.

As equações de cancelamento $\boxed{4}$, quando aplicadas a $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$, ficam assim:

7

$$\boxed{\begin{array}{ll} \log_a(a^x) = x & \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ a^{\log_a x} = x & \text{para todo } x > 0 \end{array}}$$

A função logarítmica $\log_a$ tem o domínio $(0, \infty)$ e a imagem $\mathbb{R}$. Seu gráfico é a reflexão do gráfico de $y = a^x$ em torno da reta $y = x$.

A Figura 11 mostra o caso em que $a > 1$. (As funções logarítmicas mais importantes têm base $a > 1$.) O fato de que $y = a^x$ é uma função que cresce muito rapidamente para $x > 0$ está refletido no fato de que $y = \log_a x$ é uma função de crescimento muito lento para $x > 1$.

A Figura 12 mostra os gráficos de $y = \log_a x$ com vários valores da base $a > 1$. Uma vez que $\log_a 1 = 0$, os gráficos de todas as funções logarítmicas passam pelo ponto $(1, 0)$.

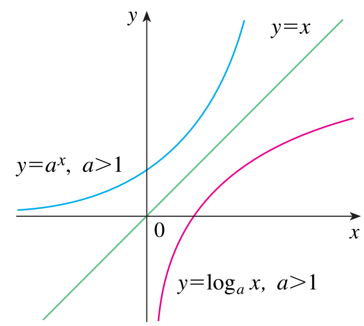


FIGURA 11

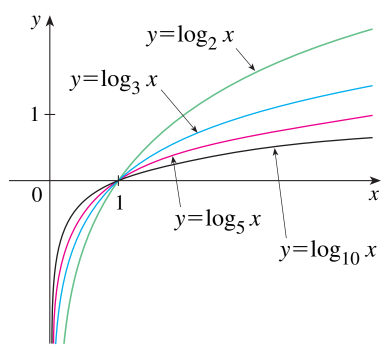


FIGURA 12

As seguintes propriedades das funções logarítmicas resultam das propriedades correspondentes das funções exponenciais dadas na Seção 1.5.

Propriedades de Logaritmos Se x e y forem números positivos, então

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$ (onde r é qualquer número real)

EXEMPLO 6 Use as propriedades dos logaritmos para calcular $\log_2 80 - \log_2 5$.

SOLUÇÃO Usando a Propriedade 2, temos

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

pois $2^4 = 16$.

Logaritmos Naturais

De todas as possíveis bases a para os logaritmos, veremos no Capítulo 3 que a escolha mais conveniente para uma base é e, definido na Seção 1.5. O logaritmo na base e é chamado **logaritmo natural** e tem uma notação especial:

$$\boxed{\log_e x = \ln x}$$

NOTAÇÃO PARA LOGARITMOS

A maioria dos livros didáticos de cálculo e ciências, assim como as calculadoras, utiliza a notação $\ln x$ para o logaritmo natural e $\log x$ para o "logaritmo comum" $\log_{10} x$. Em literaturas matemáticas e científicas mais avançadas e em linguagem de computação, no entanto, a notação $\log x$ geralmente denota o logaritmo natural.

Se fizermos $a = e$ e substituirmos $\log_e$ por "ln" em $\boxed{6}$ e $\boxed{7}$, então as propriedades que definem a função logaritmo natural ficam

8 $$\boxed{\ln x = y \iff e^y = x}$$

9 $$\boxed{\begin{array}{ll} \ln(e^x) = x & x \in \mathbb{R} \\ e^{\ln x} = x & x > 0 \end{array}}$$

Em particular, se fizermos $x = 1$, obteremos

$$\boxed{\ln e = 1}$$

EXEMPLO 7 Encontre x se $\ln x = 5$.

SOLUÇÃO 1 De $\boxed{8}$ vemos que

$$\ln x = 5 \qquad \text{significa} \qquad e^5 = x$$

Portanto, $x = e^5$.

(Se você tiver problemas com a notação "ln", substitua-a por $\log_e$. Então a equação torna-se $\log_e x = 5$; portanto, pela definição de logaritmo, $e^5 = x$.)

SOLUÇÃO 2 Comece com a equação

$$\ln x = 5$$

e então aplique a função exponencial a ambos os lados da equação:

$$e^{\ln x} = e^5$$

Mas a segunda equação do cancelamento em $\boxed{9}$ afirma que $e^{\ln x} = x$. Portanto, $x = e^5$.

EXEMPLO 8 Resolva a equação $e^{5-3x} = 10$.

SOLUÇÃO Tomando-se o logaritmo natural de ambos os lados da equação e usando $\boxed{9}$:

$$\ln(e^{5-3x}) = \ln 10$$

$$5 - 3x = \ln 10$$

$$3x = 5 - \ln 10$$

$$x = \tfrac{1}{3}(5 - \ln 10)$$

Uma vez que o logaritmo natural é encontrado em calculadoras científicas, podemos aproximar a solução: até quatro casas decimais, $x \approx 0{,}8991$.

EXEMPLO 9 Expresse $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$ como um único logaritmo.

SOLUÇÃO Usando as Propriedades 3 e 1 dos logaritmos, temos

$$\begin{aligned} \ln a + \tfrac{1}{2}\ln b &= \ln a + \ln b^{1/2} \\ &= \ln a + \ln\sqrt{b} \\ &= \ln\left(a\sqrt{b}\right) \end{aligned}$$

A fórmula a seguir mostra que os logaritmos com qualquer base podem ser expressos em termos de logaritmos naturais.

10 Fórmula de Mudança de Base Para todo número positivo a ($a \neq 1$), temos

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $y = \log_a x$. Então, de $\boxed{6}$, temos $a^y = x$. Tomando-se logaritmos naturais em ambos os lados da equação, obtemos $y \ln a = \ln x$. Logo,

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

As calculadoras científicas têm uma tecla para os logaritmos naturais; assim, a Fórmula 10 nos capacita a usar a calculadora para calcular o logaritmo em qualquer base (conforme mostra o próximo exemplo). Analogamente, a Fórmula 10 nos permite fazer o gráfico de qualquer função logarítmica em calculadoras e computadores (veja os Exercícios 43 e 44).

EXEMPLO 10 Calcule $\log_8 5$ com precisão até a sexta casa decimal.

SOLUÇÃO A Fórmula 10 nos dá

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0{,}773976.$$

Gráfico e Crescimento do Logaritmo Natural

Os gráficos da função exponencial $y = e^x$ e de sua função invertida, a função logaritmo natural, são indicados na Figura 13. Em razão de a curva $y = e^x$ cruzar o eixo y com inclinação igual a 1, segue que a curva refletida $y = \ln x$ cruza o eixo x também com inclinação igual a 1.

Assim como todas as outras funções logarítmicas com base maior que 1, o logaritmo natural é uma função crescente definida em $(0, \infty)$ e com o eixo y como assíntota vertical. (Isto significa que os valores de $\ln x$ se tornam números negativos com valores absolutos muito grandes quando x tende a 0.)

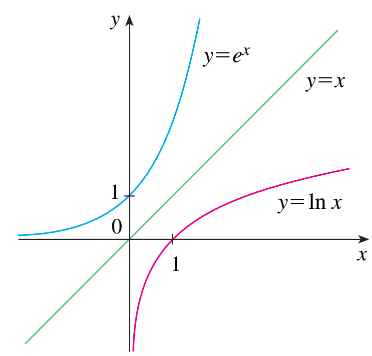


FIGURA 13
O gráfico de $y = \ln x$ é a reflexão do gráfico de $y = e^x$ em torno da reta $y = x$

EXEMPLO 11 Esboce o gráfico da função $y = \ln(x - 2) - 1$.

SOLUÇÃO Iniciaremos com o gráfico de $y = \ln x$ dado na Figura 13. Usando as transformações da Seção 1.3, o deslocamos duas unidades para a direita, obtendo o gráfico de $y = \ln(x - 2)$ e então o deslocamos uma unidade para cima, para obter o gráfico de $y = \ln(x - 2) - 1$. (Veja a Figura 14.)

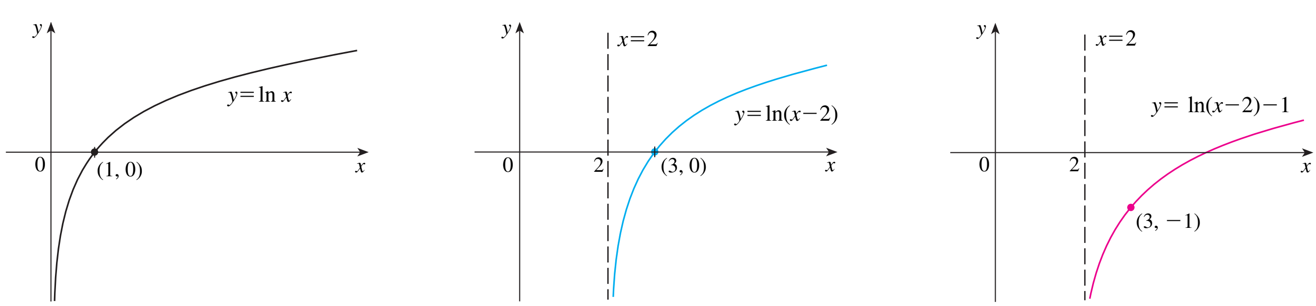


FIGURA 14

Embora $\ln x$ seja uma função crescente, seu crescimento é *muito* lento quando $x > 1$. De fato, $\ln x$ cresce mais vagarosamente do que qualquer potência positiva de x. Para ilustrar este fato, comparamos os valores aproximados das funções $y = \ln x$ e $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ na tabela a seguir e fazemos os gráficos nas Figuras 15 e 16. Podemos ver que inicialmente os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e $y = \ln x$ crescem a taxas comparáveis, mas eventualmente a função raiz ultrapassa em muito o logaritmo.

x	1	2	5	10	50	100	500	1.000	10.000	100.000
$\ln x$	0	0,69	1,61	2,30	3,91	4,6	6,2	6,9	9,2	11,5
$\sqrt{x}$	1	1,41	2,24	3,16	7,07	10,0	22,4	31,6	100	316
$\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0,49	0,72	0,73	0,55	0,46	0,28	0,22	0,09	0,04

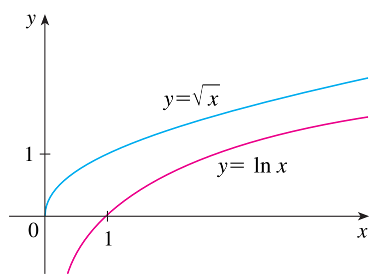


FIGURA 15

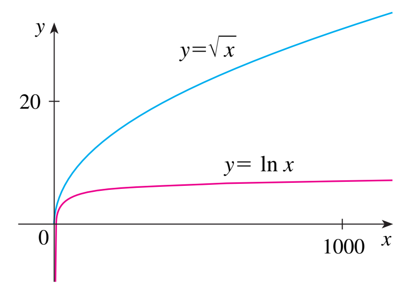


FIGURA 16

Funções Trigonométricas Inversas

Quando tentamos encontrar as funções trigonométricas inversas, temos uma pequena dificuldade: em razão de as funções trigonométricas não serem injetoras, elas não têm funções inversas. A dificuldade é superada restringindo-se os domínios dessas funções de forma a torná-las injetoras.

Você pode ver na Figura 17 que a função $y = \operatorname{sen} x$ não é injetora (use o Teste da Reta Horizontal). Mas a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$, *é* injetora (veja a Figura 18). A função inversa dessa função seno restrita f existe e é denotada por sen^{-1}, ou arcsen. Ela é chamada **inversa da função seno**, ou **função arco-seno**.

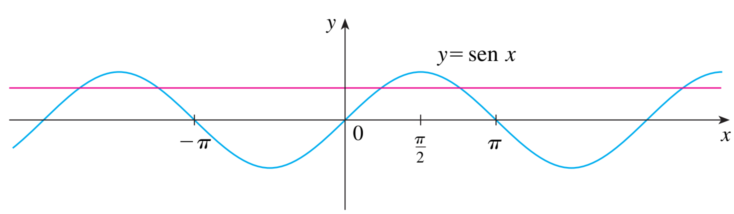


FIGURA 17

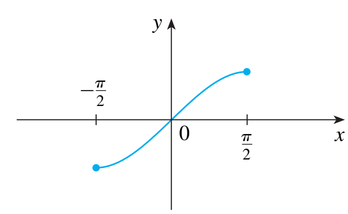


FIGURA 18 $y = \operatorname{sen} x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

Uma vez que a definição de uma função inversa diz

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

temos

$$\operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$\operatorname{sen}^{-1} x \neq \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Assim, se $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $\operatorname{sen}^{-1} x$ é o número entre $-\pi/2$ e $\pi/2$ cujo seno é x.

EXEMPLO 12 Calcule (a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ e (b) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{3}\right)$.

SOLUÇÃO

(a) Temos

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

pois $\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$ e $\pi/6$ se situa entre $-\pi/2$ e $\pi/2$.

(b) Seja $\theta = \text{arcsen}\,\frac{1}{3}$, logo sen $\theta = \frac{1}{3}$. Podemos desenhar um triângulo retângulo com o ângulo θ, como na Figura 19 e deduzir do Teorema de Pitágoras que o terceiro lado tem comprimento $\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$. Isso nos possibilita interpretar a partir do triângulo que

$$\text{tg}\left(\text{arcsen}\,\tfrac{1}{3}\right) = \text{tg}\,\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

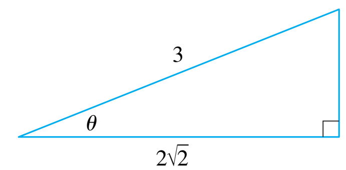


FIGURA 19

As equações de cancelamento para as funções inversas tornam-se, nesse caso,

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,x) = x \quad \text{para } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ &\text{sen}(\text{sen}^{-1}x) = x \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{aligned}}$$

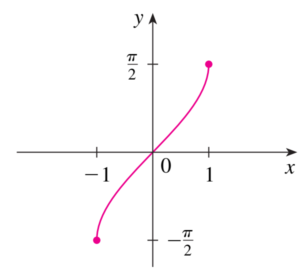


FIGURA 20
$y = \text{sen}^{-1}x = \text{arcsen}\,x$

A função inversa do seno, sen^{-1}, tem domínio $[-1, 1]$ e imagem $[-\pi/2, \pi/2]$, e seu gráfico, mostrado na Figura 20, é obtido daquela restrição da função seno (Figura 18) por reflexão em torno da reta $y = x$.

A **função inversa do cosseno** é tratada de modo similar. A função cosseno restrita $f(x) = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, é injetora (veja a Figura 21); logo, ela tem uma função inversa denotada por $\cos^{-1}$ ou arccos.

$$\boxed{\cos^{-1}x = y \iff \cos y = x \quad \text{e} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi}$$

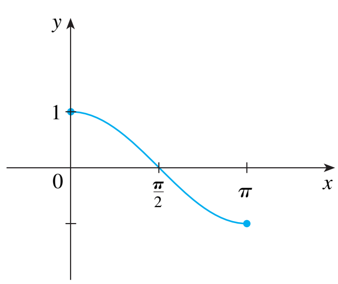


FIGURA 21
$y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$

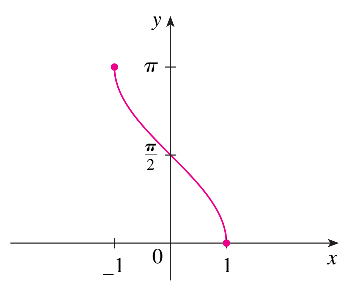


FIGURA 22
$y = \cos^{-1}x = \arccos x$

As equações de cancelamento são

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos^{-1}(\cos x) = x \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ &\cos(\cos^{-1}x) = x \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{aligned}}$$

A função inversa do cosseno, $\cos^{-1}$, tem domínio $[-1, 1]$ e imagem $[0, \pi]$. O gráfico está mostrado na Figura 22.

A função tangente se torna injetora quando restrita ao intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Assim, a **função inversa da tangente** é definida como a inversa da função $f(x) = \text{tg}\,x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. (Veja a Figura 23.) Ela é denotada por tg^{-1} ou arctg.

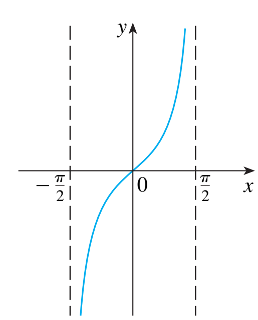


FIGURA 23
$y = \text{tg}\,x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\text{tg}^{-1}x = y \iff \text{tg}\,y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}}$$

EXEMPLO 13 Simplifique a expressão $\cos(\text{tg}^{-1}x)$.

SOLUÇÃO 1 Seja $y = \text{tg}^{-1}x$. Então $\text{tg}\,y = x$ e $-\pi/2 < y < \pi/2$. Queremos determinar $\cos y$ mas, uma vez tg y é conhecida, é mais fácil determinar sec y primeiro:

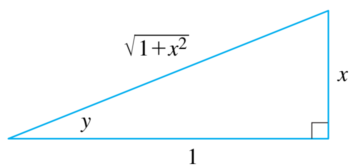


FIGURA 24

$$\sec^2 y = 1 + \mathrm{tg}^2 y = 1 + x^2$$

$$\sec y = \sqrt{1 + x^2} \qquad \text{(uma vez que } \sec y > 0 \text{ para } -\pi/2 < y < \pi/2\text{)}$$

Assim, $$\cos(\mathrm{tg}^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

SOLUÇÃO 2 Em vez de usar as identidades trigonométricas como na Solução 1, talvez seja mais fácil fazer um diagrama. Se $y = \mathrm{tg}^{-1}x$, então $\mathrm{tg}\, y = x$, e podemos concluir da Figura 24 (que ilustra o caso $y > 0$) que

$$\cos(\mathrm{tg}^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

A função inversa da tangente, $\mathrm{tg}^{-1} = \mathrm{arctg}$, tem domínio $\mathbb{R}$ e imagem $(-\pi/2, \pi/2)$. O gráfico está mostrado na Figura 25.

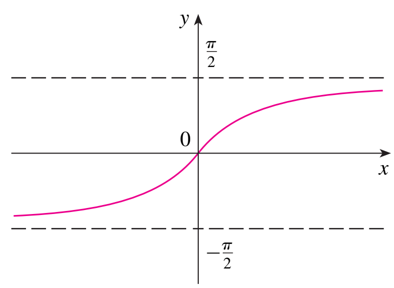


FIGURA 25
$y = \mathrm{tg}^{-1}\, x = \mathrm{arctg}\, x$

Sabemos que as retas $x = \pm\pi/2$ são assíntotas verticais do gráfico da tangente. Uma vez que o gráfico da tg^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico da função tangente restrita em torno da reta $y = x$, segue que as retas $y = \pi/2$ e $y = -\pi/2$ são assíntotas horizontais do gráfico de tg^{-1}.

As funções inversas trigonométricas restantes não são usadas com tanta frequência e estão resumidas aqui.

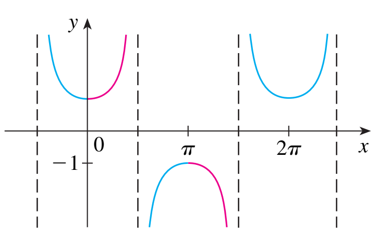


FIGURA 26
$y = \sec x$

$\boxed{11}$ $y = \mathrm{cossec}^{-1}x \ (|x| \geqslant 1) \iff \mathrm{cossec}\, y = x$ e $y \in (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2]$

$y = \sec^{-1}x \ (|x| \geqslant 1) \iff \sec y = x$ e $y \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$

$y = \mathrm{cotg}^{-1}x \ (x \in \mathbb{R}) \iff \mathrm{cotg}\, y = x$ e $y \in (0, \pi)$

A escolha dos intervalos para y nas definições de cossec^{-1} e $\sec^{-1}$ não são de aceitação universal. Por exemplo, alguns autores usam $y \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ na definição de $\sec^{-1}$. (Você pode ver do gráfico da função secante na Figura 26 que esta escolha e a feita em $\boxed{11}$ são ambas válidas.)

1.6 Exercícios

1. (a) O que é uma função injetora?
(b) A partir do gráfico, como dizer se uma função é injetora?

2. (a) Suponha que f seja uma função injetora com domínio A e imagem B. Como a inversa da função, f^{-1}, é definida? Qual o domínio de f^{-1}? Qual a imagem de f^{-1}?
(b) Se for dada uma fórmula para f, como você encontrará uma fórmula para f^{-1}?
(c) Se for dado o gráfico de f, como você encontrará o gráfico de f^{-1}?

3–14 Uma função é dada por uma tabela de valores, um gráfico, uma fórmula ou por meio de descrição verbal. Determine se f é injetora.

3.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1,5	2,0	3,6	5,3	2,8	2,0

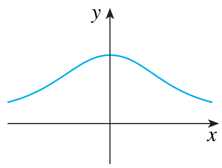
4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1,0	1,9	2,8	3,5	3,1	2,9

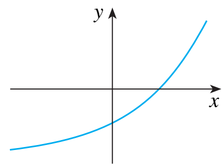
É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador   SCA Sistema algébrico computacional necessário

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

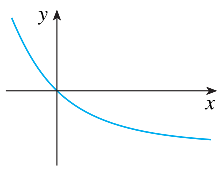
5.



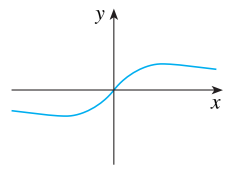
6.



7.



8.



9. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$

10. $f(x) = 1 + 4x - x^2$

11. $g(x) = |x|$

12. $g(x) = \sqrt{x}$

13. $f(t)$ é a altura de uma bola t segundos após ser chutada.

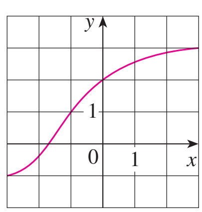
14. $f(t)$ é a sua altura com t anos de idade.

15. Suponha que f é uma função injetora.
(a) Se $f(6) = 17$, o que é $f^{-1}(17)$?
(b) Se $f^{-1}(3) = 2$, o que é $f(2)$?

16. Se $f(x) = x^5 + x^3 + x$, encontre $f^{-1}(3)$ e $f(f^{-1}(2))$.

17. Se $g(x) = 3 + x + e^x$, encontre $g^{-1}(4)$.

18. É dado o gráfico de f.
(a) Por que f é injetora?
(b) Determine o domínio e a imagem de f^{-1}?
(c) Qual o valor de $f^{-1}(2)$?
(d) Obtenha uma estimativa para o valor de $f^{-1}(0)$.



19. A fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, onde $F \geqslant -459{,}67$, expressa a temperatura C em graus Celsius como uma função da temperatura F em graus Fahrenheit. Encontre uma fórmula para a função inversa e interprete-a. Qual o domínio da função inversa?

20. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa da partícula no repouso e c é a velocidade da luz no vácuo. Encontre a função inversa de f e explique seu significado.

21–26 Encontre uma fórmula para a função inversa.

21. $f(x) = 1 + \sqrt{2 + 3x}$

22. $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$

23. $f(x) = e^{2x-1}$

24. $y = x^2 - x, \quad x \geqslant \frac{1}{2}$

25. $y = \ln(x + 3)$

26. $y = \dfrac{e^x}{1 + 2e^x}$

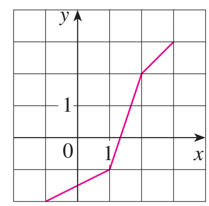
27–28 Encontre uma fórmula explícita para f^{-1} e use-a para fazer na mesma tela os gráficos de f^{-1}, f e da reta $y = x$. Para verificar seu trabalho, veja se seus gráficos de f e f^{-1} são reflexões em torno da reta.

27. $f(x) = x^4 + 1, \quad x \geqslant 0$

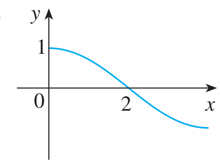
28. $f(x) = 2 - e^x$

29–30 Use o gráfico dado de f para esboçar o de f^{-1}.

29.



30.



31. Seja $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$.
(a) Encontre f^{-1}. Como está relacionada a f?
(b) Identifique o gráfico de f e explique a sua resposta para a parte (a).

32. Seja $g(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.
(a) Encontre g^{-1}. Como está relacionada a g?
(b) Faça um gráfico de g. Como você explica a sua resposta para a parte (a)?

33. (a) Como está definida a função logarítmica $y = \log_a x$?
(b) Qual o domínio dessa função?
(c) Qual a imagem dessa função?
(d) Esboce a forma geral do gráfico da função $y = \log_a x$ se $a > 1$.

34. (a) O que é o logaritmo natural?
(b) O que é o logaritmo comum?
(c) Esboce os gráficos, no mesmo sistema de coordenadas, das funções logaritmo natural e exponencial natural.

35–38 Encontre o valor exato de cada expressão.

35. (a) $\log_5 125$ (b) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$

36. (a) $\ln(1/e)$ (b) $\log_{10}\sqrt{10}$

37. (a) $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$
(b) $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

38. (a) $e^{-2\ln 5}$ (b) $\ln\left(\ln e^{e^{10}}\right)$

39–41 Expresse a quantidade dada como um único logaritmo.

39. $\ln 5 + 5 \ln 3$

40. $\ln(a + b) + \ln(a - b) - 2 \ln c$

41. $\frac{1}{3}\ln(x + 2)^3 + \frac{1}{2}[\ln x - \ln(x^2 + 3x + 2)^2]$

42. Use a Fórmula 10 para calcular cada logaritmo com precisão até a sexta casa decimal.
(a) $\log_{12} 10$ (b) $\log_2 8{,}4$

43–44 Use a Fórmula 10 para fazer o gráfico das funções dadas em uma mesma tela. Como esses gráficos estão relacionados?

43. $y = \log_{1,5} x, \quad y = \ln x, \quad y = \log_{10} x, \quad y = \log_{50} x$

44. $y = \ln x, \quad y = \log_{10} x, \quad y = e^x, \quad y = 10^x$

45. Suponha que o gráfico de $y = \log_2 x$ seja feito sobre uma malha coordenada onde a unidade de comprimento seja 1 centímetro. Quantos quilômetros à direita da origem devemos percorrer antes de a altura da curva atingir 1 m?

46. Compare as funções $f(x) = x^{0,1}$ e $g(x) = \ln x$ traçando os gráficos de f e g em várias janelas retangulares. Quando finalmente o gráfico de f ultrapassa o de g?

47–48 Faça o esboço do gráfico de cada função. Não use a calculadora. Use somente os gráficos dados nas Figuras 12 e 13 e, se necessário, as transformações da Seção 1.3.

47. (a) $y = \log_{10}(x + 5)$ (b) $y = -\ln x$

48. (a) $y = \ln(-x)$ (b) $y = \ln |x|$

49–50 (a) Quais são o domínio e a imagem de f?
(b) Qual é a intersecção com o eixo x do gráfico de f?
(c) Esboce o gráfico de f.

49. $f(x) = \ln x + 2$ **50.** $f(x) = \ln(x - 1) - 1$

51–54 Resolva cada equação em x.

51. (a) $2 \ln x = 1$ (b) $e^{-x} = 5$

52. (a) $e^{2x+3} - 7 = 0$ (b) $\ln(5 - 2x) = -3$

53. (a) $2^{x-5} = 3$ (b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

54. (a) $\ln(\ln x) = 1$ (b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, onde $a \neq b$

55–56 Resolva cada inequação em x.

55. (a) $\ln x < 0$ (b) $e^x > 5$

56. (a) $1 < e^{3x-1} < 2$ (b) $1 - 2 \ln x < 3$

57. (a) Encontre o domínio de $f(x) = \ln(e^x - 3)$.
(b) Encontre f^{-1} e seu domínio.

58. (a) Quais são os valores de $e^{\ln 300}$ e $\ln(e^{300})$?
(b) Utilize a sua calculadora para calcular $e^{\ln 300}$ e $\ln(e^{300})$. O que você observa? Você pode explicar por que a calculadora encontra dificuldade?

SCA **59.** Faça o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ e explique por que ela é injetora. Use então um sistema de computação algébrica (SCA) para encontrar uma expressão explícita para $f^{-1}(x)$. (Seu SCA vai produzir três expressões possíveis. Explique por que duas delas são irrelevantes neste contexto.)

SCA **60.** (a) Se $g(x) = x^6 + x^4, x \geqslant 0$, use um sistema de computação algébrica para encontrar uma expressão para $g^{-1}(x)$.
(b) Use a expressão da parte (a) para fazer na mesma tela um gráfico de $y = g(x)$, $y = x$ e $y = g^{-1}(x)$.

61. Se a população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas, então o número de bactérias após t horas é $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$. (Veja o Exercício 29 na Seção 1.5.)
(a) Encontre a função inversa e explique seu significado.
(b) Quando a população atingirá 50 000 bactérias?

62. Após acionado o *flash* de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do *flash*, que armazena uma carga elétrica dada por

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a}).$$

(A capacidade máxima de carga é Q_0, e t é medido em segundos.)
(a) Encontre a função inversa e explique seu significado.
(b) Quanto tempo levará para recarregar o capacitor 90% da capacidade, se $a = 2$?

63–68 Encontre o valor exato de cada expressão.

63. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$ (b) $\cos^{-1}(-1)$

64. (a) $\operatorname{tg}^{-1}(1/\sqrt{3})$ (b) $\sec^{-1} 2$

65. (a) $\operatorname{arctg} 1$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(1/\sqrt{2})$

66. (a) $\operatorname{cotg}^{-1}(-\sqrt{3})$ (b) $\arccos(-\frac{1}{2})$

67. (a) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 10)$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(7\pi/3))$

68. (a) $\operatorname{tg}(\sec^{-1} 4)$ (b) $\operatorname{sen}(2 \operatorname{sen}^{-1}(\frac{3}{5}))$

69. Demonstre que $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$.

70–72 Simplifique a expressão.

70. $\operatorname{tg}(\operatorname{sen}^{-1} x)$ **71.** $\operatorname{sen}(\operatorname{tg}^{-1} x)$

72. $\cos(2 \operatorname{tg}^{-1} x)$

73–74 Obtenha os gráficos das funções dadas em uma mesma tela. Como esses gráficos estão relacionados?

73. $y = \operatorname{sen} x, \; -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2; \quad y = \operatorname{sen}^{-1} x; \quad y = x$

74. $y = \operatorname{tg} x, \; -\pi/2 < x < \pi/2; \quad y = \operatorname{tg}^{-1} x; \quad y = x$

75. Determine o domínio e a imagem da função

$$g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(3x + 1)$$

76. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$ e explique sua aparência.
(b) Faça o gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$. Como você pode explicar a aparência desse gráfico?

77. (a) Se transladamos uma curva para a esquerda, o que acontece com sua reflexão em torno da reta $y = x$? Em vista deste princípio geométrico, encontre uma expressão para a inversa de $g(x) = f(x + c)$, em que f é uma função injetora.
(b) Encontre uma expressão para a inversa de $h(x) = f(cx)$, em que $c \neq 0$.

1 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) O que é uma função? O que são o domínio e a imagem de uma função?
(b) O que é o gráfico de uma função?
(c) Como podemos dizer se uma dada curva é o gráfico de uma função?

2. Discuta as quatro maneiras de representar uma função. Ilustre com exemplos.

3. (a) O que é uma função par? Como saber, a partir do gráfico, se uma função é par ou não? Dê três exemplos de uma função par.
(b) O que é uma função ímpar? Como saber, a partir do gráfico, se uma função é ímpar ou não? Dê três exemplos de uma função ímpar.

4. O que é uma função crescente?

5. O que é um modelo matemático?

6. Dê um exemplo de cada tipo de função.
(a) Função linear
(b) Função potência
(c) Função exponencial
(d) Função quadrática
(e) Função polinomial de grau 5
(f) Função racional

7. Esboce à mão no mesmo sistema de coordenadas os gráficos das seguintes funções.
(a) $f(x) = x$ (b) $g(x) = x^2$
(c) $h(x) = x^3$ (d) $j(x) = x^4$

8. Esboce à mão o gráfico de cada função.
(a) $y = \operatorname{sen} x$ (b) $y = \operatorname{tg} x$
(c) $y = e^x$ (d) $y = \ln x$
(e) $y = 1/x$ (f) $y = |x|$
(g) $y = \sqrt{x}$ (h) $y = \operatorname{tg}^{-1} x$

9. Suponha que os domínios de f tem domínio A e g, respectivamente B.
(a) Qual o domínio de $f + g$?
(b) Qual o domínio de fg?
(c) Qual o domínio de f/g?

10. Como é definida a função composta $f \circ g$? Qual seu domínio?

11. Suponha que seja dado o gráfico de f. Escreva a equação para cada um dos seguintes gráficos obtidos a partir do gráfico de f:
(a) Deslocado 2 unidades para cima.
(b) Deslocado 2 unidades para baixo.
(c) Deslocado 2 unidades para a direita.
(d) Deslocado 2 unidades para a esquerda.
(e) Refletido em torno do eixo x.
(f) Refletido em torno do eixo y.
(g) Expandido verticalmente por um fator de 2.
(h) Contraído verticalmente por um fator de 2.
(i) Expandido horizontalmente por um fator de 2.
(j) Contraído horizontalmente por um fator de 2.

12. (a) O que é uma função injetora? Como decidir, a partir de seu gráfico, se uma função é injetora?
(b) Se f é uma função injetora, como é definida a função inversa f^{-1}? Como obter o gráfico f^{-1} do gráfico de f?

13. (a) Como a inversa da função seno $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$ é definida? Qual é o seu domínio e qual é a sua imagem?
(b) Como a inversa da função cosseno $f(x) = \cos^{-1} x$ é definida? Qual é o seu domínio e qual é a sua imagem?
(c) Como a inversa da função tangente $f(x) = \operatorname{tg}^{-1} x$ é definida? Qual é o seu domínio e qual é a sua imagem?

Testes Verdadeiro-Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se f é uma função, então $f(s + t) = f(s) + f(t)$.

2. Se $f(s) = f(t)$, então $s = t$.

3. Se f é uma função, então $f(3x) = 3f(x)$.

4. Se $x_1 < x_2$ e f for uma função decrescente, então $f(x_1) > f(x_2)$.

5. Uma reta vertical intercepta o gráfico de uma função no máximo uma vez.

6. Se f e g são funções, então $f \circ g = g \circ f$.

7. Se f for injetora, então $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

8. É sempre possível dividir por e^x.

9. Se $0 < a < b$, então $\ln a < \ln b$.

10. Se $x > 0$, então $(\ln x)^6 = 6 \ln x$.

11. Se $x > 0$ e $a > 1$, então $\dfrac{\ln x}{\ln a} = \ln \dfrac{x}{a}$.

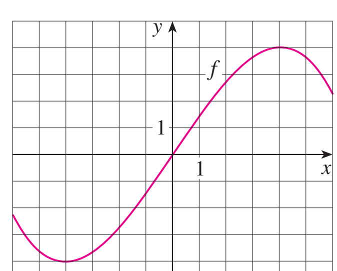
12. $\operatorname{tg}^{-1}(-1) = 3\pi/4$

13. $\operatorname{tg}^{-1} x = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\cos^{-1} x}$

14. Se x for qualquer número real, então $\sqrt{x^2} = x$.

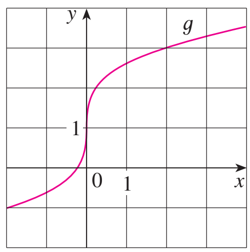
Exercícios

1. Seja f a função cujo gráfico é dado.
(a) Estime o valor de $f(2)$.
(b) Estime os valores de x tais que $f(x) = 3$.
(c) Diga qual é o domínio de f.
(d) Diga qual é a imagem de f.
(e) Em qual intervalo a função f é crescente?
(f) f é injetora? Explique.
(g) f é par, ímpar ou nenhum dos dois? Explique.



É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

2. É dado o gráfico de g.
(a) Diga o valor de $g(2)$.
(b) Por que g é injetora?
(c) Estime o valor de $g^{-1}(2)$.
(d) Estime o domínio de g^{-1}.
(e) Esboce o gráfico de g^{-1}.



3. Se $f(x) = x^2 - 2x + 3$, calcule o quociente das diferenças

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

4. Esboce o gráfico do rendimento de uma colheita como uma função da quantidade usada de fertilizante.

5–8 Encontre o domínio e a imagem das funções. Escreva sua resposta usando a notação de intervalos.

5. $f(x) = 2/(3x - 1)$

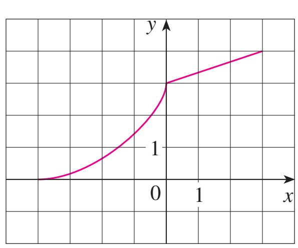
6. $g(x) = \sqrt{16 - x^4}$

7. $h(x) = \ln(x + 6)$

8. $F(t) = 3 + \cos 2t$

9. Suponha que seja dado o gráfico de f. Descreva como os gráficos das seguintes funções podem ser obtidos a partir do gráfico de f.
(a) $y = f(x) + 8$
(b) $y = f(x + 8)$
(c) $y = 1 + 2f(x)$
(d) $y = f(x - 2) - 2$
(e) $y = -f(x)$
(f) $y = f^{-1}(x)$

10. É dado o gráfico de f. Esboce os gráficos das seguintes funções:
(a) $y = f(x - 8)$
(b) $y = -f(x)$
(c) $y = 2 - f(x)$
(d) $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$
(e) $y = f^{-1}(x)$
(f) $y = f^{-1}(x + 3)$



11–16 Use transformações para esboçar o gráfico da função.

11. $y = -\text{sen}\, 2x$

12. $y = 3\ln(x - 2)$

13. $y = \frac{1}{2}(1 + e^x)$

14. $y = 2 - \sqrt{x}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

16. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$

17. Determine se f é par, ímpar ou nenhum dos dois.
(a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$
(b) $f(x) = x^3 - x^7$
(c) $f(x) = e^{-x^2}$
(d) $f(x) = 1 + \text{sen}\, x$

18. Encontre uma expressão para a função cujo gráfico consiste no segmento de reta ligando o ponto $(-2, 2)$ ao ponto $(-1, 0)$ junto com a parte de cima do círculo com centro na origem e raio 1.

19. Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2 - 9$, encontre as funções (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$ e (d) $g \circ g$ e seus domínios.

20. Expresse a função $F(x) = 1/\sqrt{x + \sqrt{x}}$ como uma composição de três funções.

21. A tabela mostra a população da Indonésia, em milhões, entre os anos de 1950 a 2000. Decida que tipo de modelo é adequado e use-o para prever a população da Indonésia em 2010.

Ano	População	Ano	População
1950	80	1980	150
1955	86	1985	166
1960	96	1990	182
1965	107	1995	197
1970	120	2000	212
1975	134		

22. Um pequeno fabricante descobre que custa \$ 9.000 para produzir 1.000 torradeiras elétricas em uma semana e \$ 12.000 para produzir 1.500 torradeiras em uma semana.
(a) Expresse o custo como uma função do número de torradeiras produzidas, supondo que ele é linear. A seguir, esboce o gráfico.
(b) Qual a inclinação do gráfico e o que ela representa?
(c) Qual a intersecção do gráfico com o eixo y e o que ela representa?

23. Se $f(x) = 2x + \ln x$, encontre $f^{-1}(2)$.

24. Encontre a função inversa de $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 1}$.

25. Encontre o valor exato de cada expressão.
(a) $e^{2\ln 3}$
(b) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$
(c) $\text{tg}\left(\text{arcsen}\, \frac{1}{2}\right)$
(d) $\text{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

26. Resolva cada equação em x.
(a) $e^x = 5$
(b) $\ln x = 2$
(c) $e^{e^x} = 2$
(d) $\text{tg}^{-1} x = 1$

27. A população de uma certa espécie em um ambiente limitado, com população inicial igual a 100 e capacidade para comportar 1 000 indivíduos, é

$$P(t) = \frac{100\,000}{100 + 900e^{-t}}$$

onde t é medido em anos.
(a) Faça o gráfico dessa função e estime quanto tempo levará para a população atingir 900 indivíduos.
(b) Encontre a inversa dessa função e explique seu significado.
(c) Use a função inversa para encontrar o tempo necessário para a população atingir 900 indivíduos. Compare com os resultados da parte (a).

28. Faça o gráfico das três funções $y = x^a$, $y = a^x$ e $y = \log_a x$ na mesma tela para dois ou três valores de $a > 1$. Para grandes valores de x, quais dessas funções terão os maiores valores e quais terão os menores valores?

Princípios da Resolução de Problemas

Não existem regras rígidas que garantam sucesso na resolução de problemas. Porém, é possível esboçar alguns passos gerais no processo de resolver problemas e fornecer alguns princípios que poderão ser úteis ao resolver certos problemas. Esses passos e princípios são tão somente o senso comum tornado explícito. Eles foram adaptados do livro de George Polya *How To Solve It*.

1 ENTENDENDO O PROBLEMA

O primeiro passo é ler o problema e assegurar-se de que o entendeu claramente. Faça a si mesmo as seguintes perguntas:

Qual é a incógnita?

Quais são as quantidades dadas?

Quais são as condições dadas?

Para muitos problemas é proveitoso

fazer um diagrama,

e identificar nele as quantidades dadas e pedidas.

Geralmente é necessário

introduzir uma notação apropriada

Ao escolher os símbolos para as incógnitas, frequentemente utilizamos letras tais como a, b, c, m, n, x, e y, mas, em alguns casos, é proveitoso usar as iniciais como símbolos sugestivos; por exemplo, V para o volume ou t para o tempo.

2 PLANEJANDO

Encontre uma conexão entre a informação dada e a pedida que o ajude a encontrar a incógnita. Frequentemente pergunte se: "Como posso relacionar o que foi dado ao que foi pedido?". Se não for possível visualizar imediatamente a conexão, as seguintes ideias podem ser úteis para delinear um plano.

Tente Reconhecer Algo Familiar Relacione a situação dada com seu conhecimento anterior. Olhe para a incógnita e tente se lembrar de um problema familiar que a envolva.

Tente Reconhecer os Padrões Alguns problemas são resolvidos reconhecendo-se o tipo de padrão no qual ocorrem. O padrão pode ser geométrico, numérico ou algébrico. Você pode ver a regularidade ou a repetição em um problema ou ser capaz de conjecturar sobre o padrão de seu desenvolvimento para depois demonstrá-lo.

Use Analogias Tente pensar sobre problemas análogos, isto é, um problema similar, um problema relacionado, mas que seja mais simples que o problema original. Se você puder resolver o problema similar mais simples, isso poderá lhe dar pistas sobre a solução do problema mais difícil. Por exemplo, se um problema envolver números muito grandes, você poderá primeiro tentar um problema similar com números menores. Caso o problema envolva a geometria tridimensional, você poderá tentar primeiro um problema similar bidimensional. Se seu problema for genérico, tente primeiro um caso especial.

Introduza Algo Mais Às vezes pode ser necessário introduzir algo novo, um auxílio extra, para que você faça a conexão entre o que foi dado e o que foi pedido. Por exemplo, em um problema no qual o diagrama é fundamental, a ajuda extra pode ser o traçado de uma nova reta nele. Em problemas mais algébricos, pode ser a introdução de uma nova incógnita, relacionada com a original.

Divida em Casos Às vezes podemos ter que dividir um problema em diversos casos e dar um argumento diferente para cada um deles. Por exemplo, frequentemente temos que utilizar esta estratégia ao lidar com o valor absoluto.

Trabalhe Retroativamente Às vezes é proveitoso imaginar o problema já resolvido e trabalhar passo a passo retroativamente até chegar ao que foi dado. Então você poderá reverter seus passos e, portanto, construir uma solução para o problema original. Esse procedimento é usado frequentemente na solução de equações. Por exemplo, ao resolver a equação $3x - 5 = 7$, supomos que x seja um número que satisfaça $3x - 5 = 7$ e trabalhamos retroativamente. Adicionamos 5 a ambos os lados da equação e então dividimos cada lado por 3 para obter $x = 4$. Como cada um desses passos pode ser revertido, resolvemos o problema.

Estabeleça Submetas Em um problema complexo é frequentemente útil estabelecer submetas (nas quais a situação desejada é apenas parcialmente satisfeita). Você pode atingir primeiro essas submetas e, depois, a partir delas, chegar à meta final.

Raciocine Indiretamente Algumas vezes é apropriado lidar com o problema indiretamente. Para demonstrar, por contradição, que P implica Q, supomos que P seja verdadeira e Q seja falsa e tentamos ver por que isso não pode acontecer. De certa forma temos de usar essa informação e chegar a uma contradição do que sabemos com certeza ser verdadeiro.

Indução Matemática Para demonstrar afirmações que envolvem um número inteiro positivo n, é frequentemente útil usar o seguinte princípio.

Princípio da Indução Matemática Seja S_n uma afirmação sobre o número positivo inteiro n.

Suponha que

1. S_1 seja verdadeira.

2. S_{k+1} seja verdadeira sempre que S_k for verdadeira.

Então S_n é verdadeira para todo inteiro positivo n.

Isso é razoável, pois uma vez que S_1 é verdadeira, segue, da condição 2 (com $k = 1$), que S_2 também é verdadeira. Então, utilizando a condição 2 com $k = 2$, vemos que S_3 é verdadeira. E novamente usando a condição 2 e, dessa vez, com $k = 3$, temos S_4 como verdadeira. Esse procedimento pode ser seguido indefinidamente.

3 CUMPRINDO O PLANO

Na etapa 2 um plano foi delineado. Para cumpri-lo, devemos verificar cada etapa do plano e escrever os detalhes que demonstram que cada etapa está correta.

4 REVENDO

Tendo completado nossa solução, é prudente revisá-la, em parte para ver se foram cometidos erros, e em parte para ver se podemos descobrir uma forma mais fácil de resolver o problema. Outra razão para a revisão é nos familiarizarmos com o método de resolução que pode ser útil na solução de futuros problemas. Descartes disse: “Todo problema que resolvi acabou se tornando uma regra que serviu posteriormente para resolver outros problemas”.

Esses princípios da resolução de problemas serão ilustrados nos exemplos a seguir. Antes de ver as soluções, tente resolvê-los usando os princípios aqui estudados. Pode ser útil consultar de tempos em tempos esta seção, quando você estiver resolvendo os exercícios nos demais capítulos do livro.

EXEMPLO 1 Expresse a hipotenusa h de um triângulo retângulo com uma área de 25 m^2 como uma função do seu perímetro P.

SP Entendendo o problema

SOLUÇÃO Classifique primeiro as informações, identificando a quantidade desconhecida e os dados:

Incógnita: hipotenusa h

Quantidades dadas: perímetro P, área de 25 m^2

SP Desenhe um diagrama

É útil fazer um diagrama; assim, fizemos isto na Figura 1.

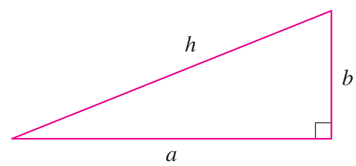


FIGURA 1

Para conectar as quantidades dadas à incógnita, introduzimos duas variáveis extras a e b, que são os comprimentos dos outros dois lados do triângulo. Isso nos permite expressar a condição dada, de o triângulo ser retângulo, pelo Teorema de Pitágoras:

SP Conecte os dados à incógnita

SP Introduza algo extra

$$h^2 = a^2 + b^2$$

As outras conexões entre as variáveis surgem escrevendo-se as expressões para a área e o perímetro:

$$25 = \tfrac{1}{2}ab \qquad P = a + b + h$$

Uma vez que P é dado, observe que agora temos três equações em três incógnitas a, b e h:

$$\boxed{1} \qquad h^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{2} \qquad 25 = \tfrac{1}{2}ab$$

$$\boxed{3} \qquad P = a + b + h$$

Embora tenhamos um número correto de equações, elas não são fáceis de resolver diretamente. Porém, se usarmos as estratégias de resolução de problemas para tentar reconhecer algo familiar, poderemos resolver essas equações de forma mais fácil. Olhando os segundos membros das Equações 1, 2 e 3, eles não são familiares? Observe que eles contêm os ingredientes de uma fórmula familiar:

SP Relacione com algo familiar

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Usando essa ideia, vamos expressar $(a + b)^2$ de duas maneiras. Das Equações 1 e 2 temos

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = h^2 + 4(25)$$

Da Equação 3 temos

$$(a + b)^2 = (P - h)^2 = P^2 - 2Ph + h^2$$

Assim,

$$h^2 + 100 = P^2 - 2Ph + h^2$$

$$2Ph = P^2 - 100$$

$$h = \frac{P^2 - 100}{2P}$$

Essa é a expressão pedida de h como uma função de P.

Como o exemplo a seguir ilustra, é frequentemente necessário usar o princípio de *dividir em casos* quando lidamos com valores absolutos.

EXEMPLO 2 Resolva a inequação $|x - 3| + |x + 2| < 11$.

SOLUÇÃO Lembre-se da definição de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Segue que

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x - 3 \geqslant 0 \\ -(x - 3) & \text{se } x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \geqslant 3 \\ -x + 3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

De forma análoga
$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x + 2 \geqslant 0 \\ -(x + 2) & \text{se } x + 2 < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geqslant -2 \\ -x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

Essas expressões mostram que devemos considerar três casos:

SP Divida em casos

$$x < -2 \qquad -2 \leqslant x < 3 \qquad x \geqslant 3$$

CASO I Se $x < -2$, temos

$$\begin{aligned} |x - 3| + |x + 2| &< 11 \\ -x + 3 - x - 2 &< 11 \\ -2x &< 10 \\ x &> -5 \end{aligned}$$

CASO II Se $-2 \leqslant x < 3$, a desigualdade dada torna-se

$$\begin{aligned} -x + 3 + x + 2 &< 11 \\ 5 &< 11 \qquad \text{(sempre é verdadeiro)} \end{aligned}$$

CASO III Se $x \geqslant 3$, a desigualdade torna-se

$$\begin{aligned} x - 3 + x + 2 &< 11 \\ 2x &< 12 \\ x &< 6 \end{aligned}$$

Combinando os casos I, II e III, vemos que a inequação está satisfeita quando $-5 < x < 6$. Logo, a solução é o intervalo $(-5, 6)$.

No exemplo a seguir, tentaremos conjecturar a resposta examinando casos especiais e reconhecendo um padrão. Provamos nossa conjectura pela indução matemática.

Ao usarmos o Princípio da Indução Matemática, seguimos três etapas:

Passo 1 Prove que S_n é verdadeira quando $n = 1$.

Passo 2 Suponha que S_n seja verdadeira quando $n = k$ e deduza que S_n seja verdadeira quando $n = k + 1$.

Passo 3 Conclua que S_n é verdadeira para todos os n pelo Princípio de Indução Matemática.

EXEMPLO 3 Se $f_0(x) = x/(x + 1)$ e $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encontre uma fórmula para $f_n(x)$.

SP Analogia: Tente um problema semelhante mais simples

SOLUÇÃO Começamos por encontrar fórmulas para $f_n(x)$ para os casos especiais $n = 1$, 2 e 3.

$$f_1(x) = (f_0 \circ f_0)(x) = f_0(f_0(x)) = f_0\left(\frac{x}{x + 1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{x + 1}}{\dfrac{x}{x + 1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{x + 1}}{\dfrac{2x + 1}{x + 1}} = \frac{x}{2x + 1}$$

$$f_2(x) = (f_0 \circ f_1)(x) = f_0\big(f_1(x)\big) = f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

$$f_3(x) = (f_0 \circ f_2)(x) = f_0\big(f_2(x)\big) = f_0\left(\frac{x}{3x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{x}{3x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{4x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1}$$

SP Busca por padrão

Percebemos um padrão: o coeficiente de x no denominador de $f_n(x)$ é $n + 1$ nos três casos calculados. Assim sendo, fazemos a seguinte conjectura, no caso geral,

$$\boxed{4} \qquad f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x+1}$$

Para demonstrá-la, usamos o Princípio da Indução Matemática. Já verificamos que $\boxed{4}$ é verdadeira para $n = 1$. Suponha que ela é verdadeira para $n = k$, isto é,

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x+1}$$

Então
$$f_{k+1}(x) = (f_0 \circ f_k)(x) = f_0\big(f_k(x)\big) = f_0\left(\frac{x}{(k+1)x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{x}{(k+1)x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{(k+2)x+1}{(k+1)x+1}} = \frac{x}{(k+2)x+1}.$$

Essa expressão mostra que $\boxed{4}$ é verdadeira para $n = k + 1$. Portanto, por indução matemática, é verdadeira para todo n inteiro positivo.

Problemas

1. Um dos lados de um triângulo retângulo tem 4 cm de comprimento. Expresse o comprimento da altura perpendicular à hipotenusa como uma função do comprimento da hipotenusa.

2. A altura perpendicular à hipotenusa de um triângulo retângulo é de 12 cm. Expresse o comprimento da hipotenusa como uma função do perímetro.

3. Resolva a equação $|2x - 1| - |x + 5| = 3$.

4. Resolva a inequação $|x - 1| - |x - 3| \geqslant 5$.

5. Esboce o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$.

6. Esboce o gráfico da função $g(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$.

7. Faça o gráfico da equação $x + |x| = y + |y|$.

8. Esboce a região do plano que consiste de todos os pontos (x, y) tais que

$$|x - y| + |x| - |y| \leqslant 2.$$

9. A notação $\max\{a, b, \ldots\}$ significa o maior dos números $a, b, \ldots$ Esboce o gráfico de cada função.
(a) $f(x) = \max\{x, 1/x\}$ (b) $f(x) = \max\{\text{sen}\, x, \cos x\}$ (c) $f(x) = \max\{x^2, 2 + x, 2 - x\}$

10. Esboce a região do plano definida para cada uma das seguintes equações ou inequações.

(a) $\max\{x, 2y\} = 1$ (b) $-1 \leqslant \max\{x, 2y\} \leqslant 1$ (c) $\max\{x, y^2\} = 1$

11. Calcule $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)\cdots(\log_{31} 32)$.

12. (a) Mostre que a função $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ é ímpar.

(b) Encontre a função inversa de f.

13. Resolva a inequação $\ln(x^2 - 2x - 2) \leqslant 0$.

14. Use um raciocínio indireto para demonstrar que $\log_2 5$ é um número irracional.

15. Uma pessoa inicia uma viagem. Na primeira metade do percurso ela dirige sossegadamente a 60 km/h; na segunda, ela vai a 120 km/h. Qual sua velocidade média na viagem?

16. É verdadeiro que $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$?

17. Demonstre que, se n for um inteiro positivo, então $7^n - 1$ é divisível por 6.

18. Demonstre que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

19. Se $f_0(x) = x^2$ e $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ para $n = 0, 1, 2, \ldots,$ encontre uma fórmula para $f_n(x)$.

20. (a) Se $f_0(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ e $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots,$ encontre uma expressão para $f_n(x)$ e utilize a indução matemática para demonstrá-la.

(b) Faça na mesma tela os gráficos de f_0, f_1, f_2, f_3 e descreva os efeitos da composição repetida.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador