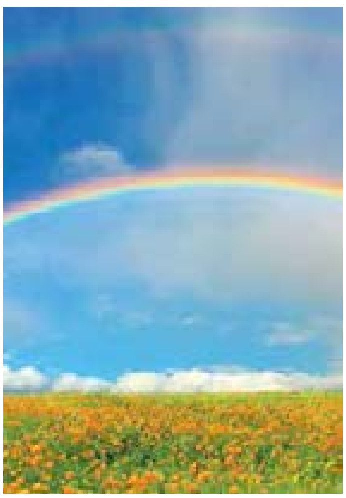
Sumário



Apêndices

A Números, Desigualdades e Valores Absolutos

O cálculo baseia-se no sistema de números reais. Começamos com os **inteiros**:

$$\ldots, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots$$

Então, construímos os **números racionais**, que são as razões de inteiros. Assim, qualquer número racional r pode ser expresso como

$$r = \frac{m}{n} \qquad \text{onde } m \text{ e } n \text{ são inteiros e } n \neq 0$$

Os exemplos são

$$\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{3}{7} \qquad 46 = \tfrac{46}{1} \qquad 0{,}17 = \tfrac{17}{100}$$

(Lembre-se de que a divisão 0 sempre é descartada, portanto expressões como $\frac{3}{0}$ e $\frac{0}{0}$ são indefinidas.) Alguns números reais, como $\sqrt{2}$, não podem ser expressos como a razão de números inteiros e são, portanto, chamados **números irracionais**. Pode ser mostrado, com variado grau de dificuldade, que os números a seguir são irracionais:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \text{sen } 1° \qquad \log_{10} 2$$

O conjunto de todos os números reais é geralmente denotado pelo símbolo $\mathbb{R}$. Quando usarmos a palavra *número* sem qualificativo, estaremos nos referindo a um "número real".

Todo número tem uma representação decimal. Se o número for racional, então a dízima correspondente é repetida indefinidamente (periódica). Por exemplo,

$$\tfrac{1}{2} = 0{,}5000\ldots = 0{,}5\overline{0} \qquad\qquad \tfrac{2}{3} = 0{,}66666\ldots = 0{,}\overline{6}$$

$$\tfrac{157}{495} = 0{,}317171717\ldots = 0{,}3\overline{17} \qquad\qquad \tfrac{9}{7} = 1{,}285714285714\ldots = 1{,}\overline{285714}$$

(A barra indica que a sequência de dígitos se repete indefinidamente.) Caso contrário, se o número for irracional, a dízima não será repetitiva:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095\ldots \qquad\qquad \pi = 3{,}141592653589793\ldots$$

Ao pararmos a expansão decimal de qualquer número em uma certa casa decimal, obtemos uma aproximação dele. Por exemplo, podemos escrever

$$\pi \approx 3{,}14159265$$

onde o símbolo $\approx$ deve ser lido como "é aproximadamente igual a". Quanto mais casas decimais forem mantidas, melhor será a aproximação obtida.

Os números reais podem ser representados por pontos sobre uma reta, como na Figura 1. A direção positiva (à direita) é indicada por uma flecha. Escolhemos um ponto de referência arbitrário, O, denominado **origem**, que corresponde ao número real 0. Dada qualquer unidade conveniente de medida, cada número positivo x é representado pelo ponto da reta que está a x unidades de distância, à direita, da origem e cada número negativo $-x$ é representado pelo ponto sobre a reta que está a x unidades de distância, à esquerda, da origem. Assim, todo número real é representado por um ponto sobre a reta, e todo ponto P sobre a reta corresponde a um único número real. O número real associado ao ponto P é chamado **coordenada** de P, e a reta é dita então **reta coordenada**, ou **reta dos números reais**, ou simplesmente **reta real**. Frequentemente, identificamos o ponto com sua coordenada e pensamos em um número como um ponto na reta real.

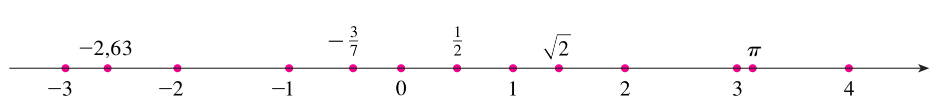


FIGURA 1

Os números reais são ordenados. Dizemos que *a é menor que b* e escrevemos $a < b$ se $b - a$ for um número positivo. Geometricamente, isso significa que a está à esquerda de b sobre a reta real. (De maneira equivalente, dizemos que *b é maior que a* e escrevemos $b > a$.) O símbolo $a \leqslant b$ (ou $b \geqslant a$) significa que $a < b$ ou $a = b$ e deve ser lido como "a é menor ou igual a b". Por exemplo, são verdadeiras as seguintes desigualdades:

$$7 < 7{,}4 < 7{,}5 \qquad -3 > -\pi \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad \sqrt{2} \leqslant 2 \qquad 2 \leqslant 2$$

A seguir, vamos precisar usar a *notação de conjunto*. Um **conjunto** é uma coleção de objetos, chamados **elementos** do conjunto. Se S for um conjunto, a notação $a \in S$ significa que a é um elemento de S, e $a \notin S$ significa que a não é um elemento de S. Por exemplo, se Z representa o conjunto dos inteiros, então $-3 \in Z$, mas $\pi \notin Z$. Se S e T forem conjuntos, então sua **união**, $S \cup T$, é o conjunto que consiste em todos os elementos que estão em S ou T (ou ambos, S e T). A **intersecção** de S e T é o conjunto $S \cap T$ consistindo em todos os elementos que estão em S e em T. Em outras palavras, $S \cap T$ é a parte comum de S e T. O conjunto vazio, denotado por $\varnothing$, é o conjunto que não contém nenhum elemento.

Alguns conjuntos podem ser descritos listando-se seus elementos entre chaves. Por exemplo, o conjunto A consistindo em todos os inteiros positivos menores que 7 pode ser escrito como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Podemos também descrever A na *notação construtiva de conjuntos* como

$$A = \{x \mid x \text{ é um inteiro e } 0 < x < 7\}$$

que deve ser lido "A é o conjunto dos x tal que x é um inteiro e $0 < x < 7$".

Intervalos

Certos conjuntos de números reais, denominados **intervalos**, ocorrem frequentemente no cálculo e correspondem geometricamente a segmentos de reta. Por exemplo, se $a < b$, o **intervalo aberto** de a até b consiste em todos os números entre a e b e é denotado pelo símbolo (a, b). Usando a notação construtiva de conjuntos, podemos escrever

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

Observe que as extremidades do intervalo, isto é, a e b, estão excluídas. Isso é indicado pelos parênteses ( ) e pelas bolinhas vazias na Figura 2. O **intervalo fechado** de a até b é o conjunto

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

Aqui, as extremidades do intervalo estão incluídas. Isso é indicado pelos colchetes [ ] e pelas bolinhas cheias na Figura 3. Também é possível incluir somente uma extremidade em um intervalo, conforme mostrado na Tabela 1.

FIGURA 2
Intervalo aberto (a, b)

FIGURA 3
Intervalo fechado $[a, b]$

1 Tabela de Intervalos

Notação	Descrição do conjunto	Ilustração
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b
$[a, b]$	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	a b
$[a, b)$	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$	a b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$	a b
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	a
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geqslant a\}$	a
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leqslant b\}$	b
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais)	

A Tabela 1 dá uma lista dos nove tipos possíveis de intervalos. Em todos os casos, sempre presumimos que $a < b$.

É necessário também considerar intervalos infinitos, como

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$$

Isso não significa que ∞ ("infinito") seja um número. A notação (a, ∞) representa o conjunto de todos os números maiores que a; dessa forma, o símbolo ∞ indica que o intervalo se estende indefinidamente na direção positiva.

Desigualdades

Quando trabalhar com desigualdades, observe as seguintes regras:

2 Regras para Desigualdades

1. Se $a < b$, então $a + c < b + c$.
2. Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$.
3. Se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$.
4. Se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$.
5. Se $0 < a < b$, então $1/a > 1/b$.

A Regra 1 diz que podemos adicionar qualquer número a ambos os lados de uma desigualdade e a Regra 2 diz que duas desigualdades podem ser adicionadas. Porém, devemos ter cuidado com a multiplicação. A Regra 3 diz que podemos multiplicar ambos os lados de uma desigualdade por um *número* positivo, mas a Regra 4 diz que se multiplicarmos ambos os lados de uma desigualdade por um número negativo, então inverteremos o sentido da desigualdade. Por exemplo, se tomarmos a desigualdade $3 < 5$ e multiplicar por 2, obtemos $6 < 10$, mas se multiplicarmos por -2, obtemos $-6 > -10$. Por fim, a Regra 5 diz que se tomarmos recíprocos, então inverteremos o sentido de uma desigualdade (desde que os números sejam positivos).

EXEMPLO 1 Resolva a inequação $1 + x < 7x + 5$.

SOLUÇÃO A desigualdade dada é satisfeita por alguns valores de x, mas não por outros. *Resolver* uma inequação significa determinar o conjunto dos números x para os quais a desigualdade é verdadeira. Isto é conhecido como *conjunto solução*.

Primeiro, subtraímos 1 de cada lado da desigualdade (usando a Regra 1 com $c = -1$):

$$x < 7x + 4$$

Então subtraímos $7x$ de ambos os lados (Regra 1 com $c = -7x$):

$$-6x < 4$$

Vamos dividir agora ambos os lados por -6 (Regra 4 com $c = -\frac{1}{6}$):

$$x > -\tfrac{4}{6} = -\tfrac{2}{3}$$

Esses passos podem ser todos invertidos; dessa forma, o conjunto solução consiste em todos os números maiores que $-\frac{2}{3}$. Em outras palavras, a solução da inequação é o intervalo $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$.

EXEMPLO 2 Resolva as inequações $4 \leqslant 3x - 2 < 13$.

SOLUÇÃO Aqui o conjunto solução consiste em todos os valores de x que satisfazem a ambas as desigualdades. Usando as regras dadas em $\boxed{2}$, vemos que as seguintes desigualdades são equivalentes:

$$4 \leqslant 3x - 2 < 13$$

$$6 \leqslant 3x < 15 \qquad \text{(adicione 2)}$$

$$2 \leqslant x < 5 \qquad \text{(divida por 3)}$$

Portanto, o conjunto solução é [2, 5).

EXEMPLO 3 Resolva a inequação $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$.

SOLUÇÃO Primeiro vamos fatorar o lado esquerdo:

$$(x - 2)(x - 3) \leqslant 0$$

Sabemos que a equação correspondente $(x - 2)(x - 3) = 0$ tem as soluções 2 e 3. Os números 2 e 3 dividem o eixo real em três intervalos:

$$(-\infty, 2) \qquad (2, 3) \qquad (3, \infty)$$

Em cada um desses intervalos, determinamos os sinais dos fatores. Por exemplo,

$$x \in (-\infty, 2) \quad \Rightarrow \quad x < 2 \quad \Rightarrow \quad x - 2 < 0$$

Vamos então registrar esses sinais na seguinte tabela:

Intervalo	$x - 2$	$x - 3$	$(x - 2)(x - 3)$
$x < 2$	$-$	$-$	$+$
$2 < x < 3$	$+$	$-$	$-$
$x > 3$	$+$	$+$	$+$

Outro método para obter a informação da tabela é usar *valores-teste*. Por exemplo, se usarmos o valor-teste $x = 1$ para o intervalo $(-\infty, 2)$, então, substituindo em $x^2 - 5x + 6$, obtemos

$$1^2 - 5(1) + 6 = 2$$

O polinômio $x^2 - 5x + 6$ não muda de sinal dentro de cada um dos três intervalos; logo, concluímos que é positivo em $(-\infty, 2)$.

Então, vemos a partir da tabela que $(x - 2)(x - 3)$ é negativo quando $2 < x < 3$. Assim, a solução da inequação $(x - 2)(x - 3) \leqslant 0$ é

$$\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\} = [2, 3].$$

Observe que incluímos as extremidades 2 e 3, pois estávamos procurando os valores de x tais que o produto fosse negativo ou zero. A solução está ilustrada na Figura 5.

O método visual de resolver o Exemplo 3 é usar uma ferramenta gráfica para esboçar a parábola $y = x^2 - 5x + 6$ (como na Figura 4) e observar que a curva está sobre ou abaixo do eixo x quando $2 \leqslant x \leqslant 3$.

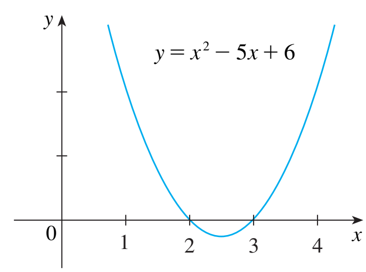


FIGURA 4

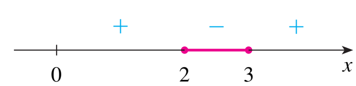


FIGURA 5

EXEMPLO 4 Resolva $x^3 + 3x^2 > 4x$.

SOLUÇÃO Primeiro deixamos todos os termos não nulos de um lado do sinal de desigualdade e então fatoramos a expressão resultante:

$$x^3 + 3x^2 - 4x > 0 \qquad \text{ou} \qquad x(x - 1)(x + 4) > 0$$

Como no Exemplo 3, resolvemos a equação correspondente $x(x - 1)(x + 4) = 0$ e usamos as soluções $x = -4$, $x = 0$ e $x = 1$ para dividir a reta real nos quatro intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, \infty)$. Em cada intervalo o produto mantém um sinal constante, conforme mostra a tabela:

Intervalo	x	$x - 1$	$x + 4$	$x(x - 1)(x + 4)$
$x < -4$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-4 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$
$0 < x < 1$	$+$	$-$	$+$	$-$
$x > 1$	$+$	$+$	$+$	$+$

FIGURA 6

Vemos a partir da tabela que o conjunto solução é

$$\{x \mid -4 < x < 0 \text{ ou } x > 1\} = (-4, 0) \cup (1, \infty)$$

A solução está ilustrada na Figura 6.

Valor Absoluto

O **valor absoluto** de um número a, denotado por $|a|$, é a distância de a até 0 na reta real. Como distâncias são sempre positivas ou nulas, temos

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a.$$

Por exemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

Em geral, temos

Lembre-se de que se a for negativo, então $-a$ será positivo.

3
$$\boxed{\begin{aligned} |a| &= a && \text{se } a \geqslant 0 \\ |a| &= -a && \text{se } a < 0 \end{aligned}}$$

EXEMPLO 5 Expresse $|3x - 2|$ sem usar o símbolo de valor absoluto.

SOLUÇÃO

$$|3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } 3x - 2 \geqslant 0 \\ -(3x - 2) & \text{se } 3x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x \geqslant \frac{2}{3} \\ 2 - 3x & \text{se } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Lembre-se de que o símbolo $\sqrt{}$ significa "raiz quadrada positiva de". Então $\sqrt{r} = s$ significa $s^2 = r$ e $s \geqslant 0$. Portanto, a equação $\sqrt{a^2} = a$ não é sempre verdadeira. Só é verdadeira quando $a \geqslant 0$. Se $a < 0$, então $-a > 0$, portanto obtemos $\sqrt{a^2} = -a$. Em vista de $\boxed{3}$, temos então a equação

4
$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

que é verdadeira para todos os valores de a.

As sugestões para as demonstrações das propriedades a seguir serão dadas nos exercícios.

5 **Propriedades dos Valores Absolutos** Suponhamos que a e b sejam números reais quaisquer e n um inteiro. Então

1. $|ab| = |a||b|$ **2.** $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$ **3.** $|a^n| = |a|^n$

Para resolver as equações e as inequações envolvendo valores absolutos, é frequentemente muito útil usar as seguintes afirmações.

6 Suponha $a > 0$. Então

4. $|x| = a$ se e somente se $x = \pm a$
5. $|x| < a$ se e somente se $-a < x < a$
6. $|x| > a$ se e somente se $x > a$ ou $x < -a$

Por exemplo, a desigualdade $|x| < a$ diz que a distância de x à origem é menor que a, e você pode ver a partir da Figura 7 que isso é verdadeiro se e somente se x estiver entre $-a$ e a.

Se a e b forem números reais quaisquer, então a distância entre a e b é o valor absoluto da diferença, isto é, $|a - b|$, que também é igual a $|b - a|$. (Veja a Figura 8.)

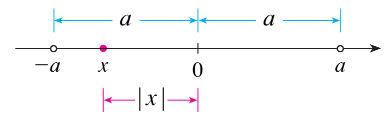


FIGURA 7

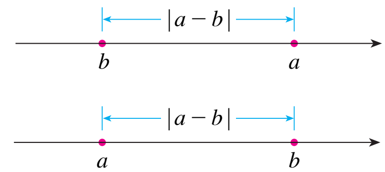


FIGURA 8
Comprimento de um segmento de reta $= |a - b|$

EXEMPLO 6 Resolva $|2x - 5| = 3$.

SOLUÇÃO Pela Propriedade 4 de $\boxed{6}$, $|2x - 5| = 3$ é equivalente a

$$2x - 5 = 3 \qquad \text{ou} \qquad 2x - 5 = -3$$

Logo, $2x = 8$ ou $2x = 2$. Assim, $x = 4$ ou $x = 1$.

EXEMPLO 7 Resolva $|x - 5| < 2$.

SOLUÇÃO 1 Pela Propriedade 5 de $\boxed{6}$, $|x - 5| < 2$ é equivalente a

$$-2 < x - 5 < 2$$

Assim, adicionando 5 a cada lado, temos

$$3 < x < 7$$

e o conjunto solução é o intervalo (3, 7).

SOLUÇÃO 2 Geometricamente, o conjunto solução consiste em todos os números x cuja distância de 5 é menor que 2. Pela Figura 9, vemos que este é o intervalo (3,7).

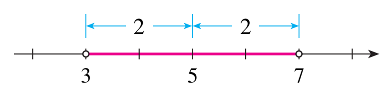


FIGURA 9

EXEMPLO 8 Resolva $|3x + 2| \geqslant 4$.

SOLUÇÃO Pelas Propriedades 4 e 6 de $\boxed{6}$, $|3x + 2| \geqslant 4$ é equivalente a

$$3x + 2 \geqslant 4 \qquad \text{ou} \qquad 3x + 2 \leqslant -4$$

No primeiro caso $3x \geqslant 2$, o que resulta em $x \geqslant \frac{2}{3}$. No segundo caso $3x \leqslant -6$, o que resulta em $x \leqslant -2$. Logo, o conjunto solução é

$$\left\{x \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant \tfrac{2}{3}\right\} = (-\infty, -2] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \infty\right)$$

Outra propriedade importante do valor absoluto, denominada Desigualdade Triangular, é frequentemente usada não apenas no cálculo, mas em geral em toda a matemática.

$\boxed{7}$ **A Desigualdade Triangular** Se a e b forem quaisquer números reais, então

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

Observe que se os números a e b forem ambos positivos ou negativos, então os dois lados na Desigualdade Triangular serão realmente iguais. Mas se a e b tiverem sinais opostos, o lado esquerdo envolve uma subtração, ao passo que o lado direito, não. Isso faz com que a Desigualdade Triangular pareça razoável, mas podemos demonstrá-la da forma a seguir.

Observe que

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$$

é sempre verdadeira, pois a é igual a $|a|$ ou $-|a|$. A afirmação correspondente a b é

$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|$$

Somando-se essas desigualdades, obtemos

$$-\big(|a| + |b|\big) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

Se aplicarmos agora as Propriedades 4 e 5 (com x substituído por $a + b$ e a por $|a| + |b|$), obteremos

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

que é o que queríamos mostrar.

EXEMPLO 9 Se $|x - 4| < 0{,}1$ e $|y - 7| < 0{,}2$, use a Desigualdade Triangular para estimar $|(x + y) - 11|$.

SOLUÇÃO A fim de usarmos a informação fornecida, utilizamos a Desigualdade Triangular com $a = x - 4$ e $b = y - 7$:

$$\begin{aligned} |(x + y) - 11| &= |(x - 4) + (y - 7)| \\ &\leqslant |x - 4| + |y - 7| \\ &< 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3 \end{aligned}$$

Logo, $$|(x + y) - 11| < 0{,}3$$

A Exercícios

1–12 Reescreva a expressão sem usar o símbolo de valor absoluto.

1. $|5 - 23|$

2. $|5| - |-23|$

3. $|-\pi|$

4. $|\pi - 2|$

5. $|\sqrt{5} - 5|$

6. $||-2| - |-3||$

7. $|x - 2|$ se $x < 2$

8. $|x - 2|$ se $x > 2$

9. $|x + 1|$

10. $|2x - 1|$

11. $|x^2 + 1|$

12. $|1 - 2x^2|$

13–38 Resolva a inequação em termos de intervalos e represente o conjunto solução na reta real.

13. $2x + 7 > 3$

14. $3x - 11 < 4$

15. $1 - x \leqslant 2$

16. $4 - 3x \geqslant 6$

17. $2x + 1 < 5x - 8$

18. $1 + 5x > 5 - 3x$

19. $-1 < 2x - 5 < 7$

20. $1 < 3x + 4 \leqslant 16$

21. $0 \leqslant 1 - x < 1$

22. $-5 \leqslant 3 - 2x \leqslant 9$

23. $4x < 2x + 1 \leqslant 3x + 2$

24. $2x - 3 < x + 4 < 3x - 2$

25. $(x - 1)(x - 2) > 0$

26. $(2x + 3)(x - 1) \leqslant 0$

27. $2x^2 + x \leqslant 1$

28. $x^2 < 2x + 8$

29. $x^2 + x + 1 > 0$

30. $x^2 + x > 1$

31. $x^2 < 3$

32. $x^2 \geqslant 5$

33. $x^3 - x^2 \leqslant 0$

34. $(x + 1)(x - 2)(x + 3) \geqslant 0$

35. $x^3 > x$

36. $x^3 + 3x < 4x^2$

37. $\dfrac{1}{x} < 4$

38. $-3 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$

39. A relação entre as escalas de temperatura Celsius e Fahrenheit é dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, onde C é a temperatura em graus Celsius e F é a temperatura em graus Fahrenheit. Qual é o intervalo sobre a escala Celsius correspondente à temperatura no intervalo $50 \leqslant F \leqslant 95$?

40. Use a relação entre C e F dada no Exercício 39 para determinar o intervalo na escala Fahrenheit correspondente à temperatura no intervalo $20 \leqslant C \leqslant 30$.

41. À medida que sobe, o ar seco se expande, e ao fazer isso se resfria a uma taxa de cerca de 1 ºC para cada 100 m de subida, até cerca de 12 km.

(a) Se a temperatura do solo for de 20 ºC, escreva uma fórmula para a temperatura a uma altura h.

(b) Que variação de temperatura você pode esperar se um avião decola e atinge uma altura máxima de 5 km?

42. Se uma bola for atirada para cima do topo de um edifício com 30 m de altura com velocidade inicial de 10 m/s, então a altura h acima do solo t segundos mais tarde será

$$h = 30 + 10t - 5t^2$$

Durante que intervalo de tempo a bola estará no mínimo a 15 m acima do solo?

43–46 Resolva a equação para x.

43. $|2x| = 3$

44. $|3x + 5| = 1$

45. $|x + 3| = |2x + 1|$

46. $\left|\dfrac{2x - 1}{x + 1}\right| = 3$

47–56 Resolva a inequação.

47. $|x| < 3$

48. $|x| \geqslant 3$

49. $|x - 4| < 1$

50. $|x - 6| < 0{,}1$

51. $|x + 5| \geqslant 2$

52. $|x + 1| \geqslant 3$

53. $|2x - 3| \leqslant 0{,}4$

54. $|5x - 2| < 6$

55. $1 \leqslant |x| \leqslant 4$

56. $0 < |x - 5| < \frac{1}{2}$

57–58 Isole x, supondo que a, b e c sejam constantes positivas.

57. $a(bx - c) \geqslant bc$

58. $a \leqslant bx + c < 2a$

59–60 Isole x, supondo que a, b e c sejam constantes negativas.

59. $ax + b < c$

60. $\dfrac{ax + b}{c} \leqslant b$

61. Suponha que $|x - 2| < 0{,}01$ e $|y - 3| < 0{,}04$. Use a Desigualdade Triangular para mostrar que $|(x + y) - 5| < 0{,}05$.

62. Mostre que se $|x + 3| < \frac{1}{2}$, então $|4x + 13| < 3$.

63. Mostre que se $a < b$, então $a < \dfrac{a + b}{2} < b$.

64. Use a Regra 3 para comprovar a Regra 5 de $\boxed{2}$.

65. Demonstre que $|ab| = |a||b|$. [*Dica:* Use a Equação 4.]

66. Demonstre que $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

67. Mostre que se $0 < a < b$, então $a^2 < b^2$.

68. Demonstre que $|x - y| \geqslant |x| - |y|$. [*Dica:* Use a Desigualdade Triangular com $a = x - y$ e $b = y$.]

69. Mostre que a soma, a diferença e o produto dos números racionais são números racionais.

70. (a) A soma de dois números irracionais é sempre irracional?
(b) O produto de dois números irracionais é sempre irracional?

B Geometria Analítica e Retas

Da mesma forma que os pontos sobre uma reta podem ser identificados com números reais atribuindo-se a eles coordenadas, conforme descrito no Apêndice A, também os pontos no plano podem ser identificados com pares ordenados de números reais. Vamos começar desenhando duas retas coordenadas perpendiculares que se interceptam na origem O de cada reta. Geralmente uma reta é horizontal com direção positiva para a direita e é chamada reta x; a outra reta é vertical com direção positiva para cima e é denominada reta y.

Qualquer ponto P no plano pode ser localizado por um par ordenado de números exclusivos como a seguir. Desenhe as retas pelo ponto P perpendiculares aos eixos x e y. Essas retas interceptam os eixos nos pontos com as coordenadas a e b como mostrado na Figura 1. Então ao ponto P é atribuído o par ordenado (a, b). O primeiro número a é chamado de **coordenada *x*** (ou **abscissa**) do P; o segundo número b é chamado de coordenada ***y*** (ou **ordenada**) de P. Dizemos que P é o ponto com as coordenadas (a, b) e denotamos o ponto pelo símbolo $P(a, b)$. Na Figura 2 estão vários pontos com suas coordenadas.

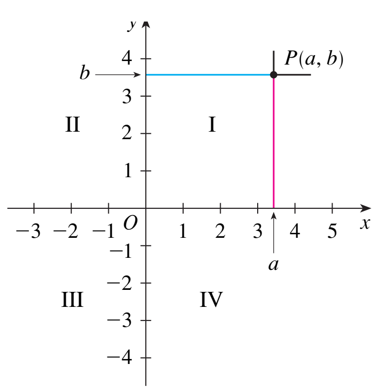


FIGURA 1

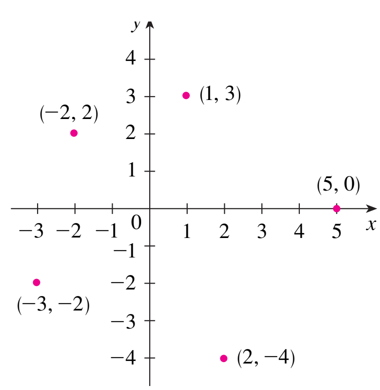


FIGURA 2

Ao revertermos o processo anterior, podemos começar com um par ordenado (a, b) e chegar ao ponto correspondente P. Muitas vezes, identificamos o ponto com o par ordenado (a, b) e nos referimos ao "ponto (a, b)". [Embora a notação usada para um intervalo aberto (a, b) seja a mesma usada para o ponto (a, b), você será capaz de distinguir pelo contexto qual o significado desejado.]

Esse sistema de coordenadas é dito **sistema coordenado retangular** ou **sistema de coordenadas cartesianas**, em homenagem ao matemático René Descartes (1596-1650), embora outro francês, Pierre Fermat (1601-1665), tenha inventado os princípios da geometria analítica ao mesmo tempo que Descartes. O plano fornecido por esse sistema de coordenadas, denominado **plano coordenado** ou **cartesiano**, é denotado por $\mathbb{R}^2$.

Os eixos x e y são chamados **eixos coordendos** e dividem o plano cartesiano em quatro quadrantes denotados por I, II, III, e IV na Figura 1. Observe que o primeiro quadrante consiste nos pontos com coordenadas x e y positivas

EXEMPLO 1 Descreva e esboce as regiões dadas pelos seguintes conjuntos.

(a) $\{(x, y) \mid x \geqslant 0\}$ (b) $\{(x, y) \mid y = 1\}$ (c) $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$

SOLUÇÃO

(a) Os pontos cujas coordenadas x são 0 ou são positivas estão situados no eixo y ou à direita dele, como indicado pela região sombreada da Figura 3(a).

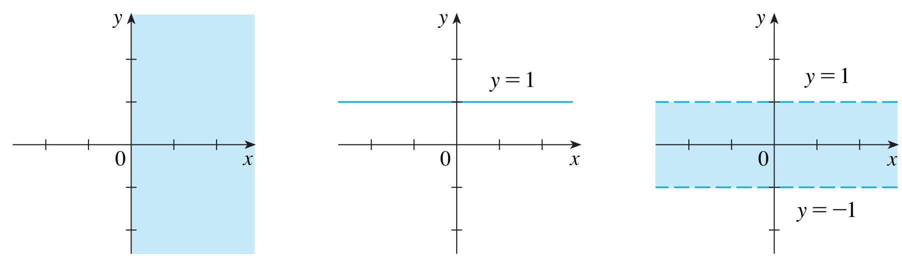


FIGURA 3 (a) $x \geqslant 0$ (b) $y = 1$ (c) $|y| < 1$

(b) O conjunto de todos os pontos com coordenada y igual a 1 é uma reta horizontal uma unidade acima do eixo x [veja a Figura 3(b)].

(c) Lembre-se, do Apêndice A, de que

$$|y| < 1 \qquad \text{se e somente se} \qquad -1 < y < 1$$

A região dada consiste naqueles pontos do plano cuja coordenada y está entre -1 e 1. Assim, a região consiste em todos os pontos que estão entre (mas não sobre) as retas horizontais $y = 1$ e $y = -1$. [Essas retas estão mostradas como retas tracejadas na Figura 3(c) para indicar que os pontos sobre essas retas não estão no conjunto.]

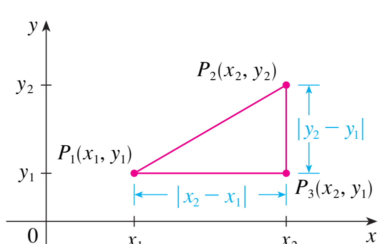


FIGURA 4

Lembre-se, a partir do Apêndice A, de que a distância entre os pontos a e b sobre o eixo real é $|a - b| = |b - a|$. Portanto, a distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_3(x_2, y_1)$ sobre uma linha horizontal deve ser $|x_2 - x_1|$ e a distância entre $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_2, y_1)$ sobre uma linha vertical deve ser $|y_2 - y_1|$. (Veja a Figura 4.)

Para encontrarmos a distância $|P_1P_2|$ entre dois pontos quaisquer $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, observamos que o triângulo $P_1P_2P_3$ na Figura 4 é retângulo e, portanto, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$|P_1P_2| = \sqrt{|P_1P_3|^2 + |P_2P_3|^2} = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1 **Fórmula de Distância** A distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EXEMPLO 2 A distância entre $(1, -2)$ e $(5, 3)$ é

$$\sqrt{(5 - 1)^2 + [3 - (-2)]^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

Retas

Desejamos encontrar uma equação para uma dada reta L; essa equação é satisfeita pelas coordenadas dos pontos em L e por nenhum outro ponto. Para encontrarmos a equação de L, usamos sua *inclinação*, que é uma medida do grau de declividade da reta.

> **2 Definição** A **inclinação** (ou coeficiente angular) de uma reta não vertical que passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é
>
> $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
>
> A inclinação de uma reta vertical não está definida.

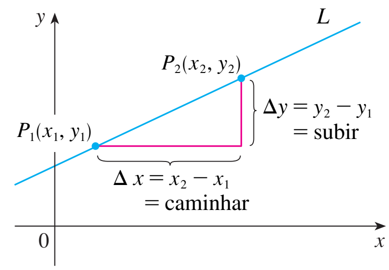


FIGURA 5

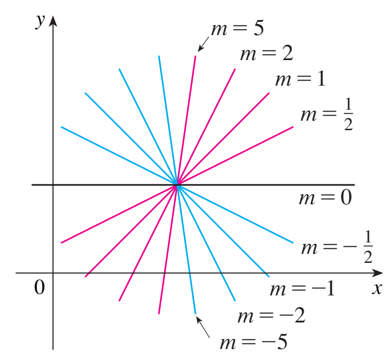


FIGURA 6

Assim, a inclinação de uma reta é a razão da variação em y, Δy, e da variação em x, Δx. (Veja a Figura 5.) A inclinação é, portanto, a taxa de variação de y com relação a x. O fato de tratar-se de uma reta significa que a taxa de variação é constante.

A Figura 6 mostra várias retas acompanhadas de suas inclinações. Observe que as retas com inclinação positiva inclinam-se para cima à direita, enquanto as retas com inclinação negativa inclinam-se para baixo à direita. Observe também que as retas mais íngremes são aquelas para as quais o valor absoluto da inclinação é maior, e que uma reta horizontal tem inclinação zero.

Agora determinemos uma equação da reta que passa por um determinado ponto $P_1(x_1, y_1)$ e tem inclinação m. Um ponto $P(x, y)$ com $x \neq x_1$ está nesta reta se e somente se a inclinação da reta por P_1 e P for igual a m; isto é,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Essa equação pode ser reescrita na forma

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

e observamos que essa equação também é satisfeita quando $x = x_1$ e $y = y_1$. Portanto, ela é uma equação da reta dada.

> **3 Equação de uma Reta na Forma Ponto-Inclinação** Uma equação da reta passando pelo ponto $P_1(x_1, y_1)$ e tendo inclinação m é
>
> $$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EXEMPLO 3 Determine uma equação da reta por $(1, -7)$ com inclinação $-\frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO Usando $\boxed{3}$ com $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ e $y_1 = -7$, obtemos uma equação da reta como

$$y + 7 = -\tfrac{1}{2}(x - 1)$$

que pode ser reescrita como

$$2y + 14 = -x + 1 \qquad \text{ou} \qquad x + 2y + 13 = 0$$

EXEMPLO 4 Determine uma equação da reta que passa pelos pontos $(-1, 2)$ e $(3, -4)$.

SOLUÇÃO Pela Definição 2, a inclinação da reta é

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{3}{2}$$

Usando a forma ponto-inclinação com $x_1 = -1$ e $y_1 = 2$, obtemos

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1)$$

que se simplifica para $\quad 3x + 2y = 1$

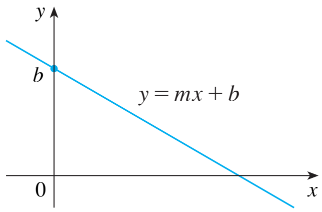


FIGURA 7

Suponha que uma reta não vertical tenha inclinação m e intersecção com o eixo y igual a b. (Veja a Figura 7.) Isso significa que ela intercepta o eixo y no ponto $(0, b)$, logo, a equação da reta na forma ponto-inclinação, com $x_1 = 0$ e $y_1 = b$, torna-se

$$y - b = m(x - 0)$$

Isso pode ser simplificado como a seguir.

4 Equação de uma Reta na Forma Inclinação-Intersecção com o Eixo Uma equação da reta com inclinação m e intersecção com o eixo y em b é

$$y = mx + b.$$

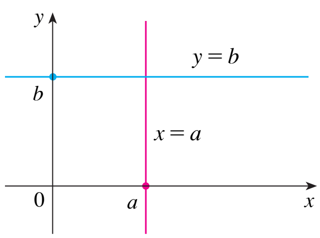


FIGURA 8

Em particular, se a reta for horizontal, sua inclinação é $m = 0$, logo sua equação é $y = b$, onde b é a intersecção com o eixo y. (Veja a Figura 8.) Uma reta vertical não tem uma inclinação, mas podemos escrever sua equação como $x = a$, onde a é a intersecção com o eixo x, pois a coordenada x de todo ponto sobre a reta é a.

Observe que a equação de toda reta pode ser escrita na forma

5 $$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

porque uma reta vertical tem a equação $x = a$ ou $x - a = 0$ ($A = 1, B = 0, C = -a$) e uma reta não vertical tem a equação $y = mx + b$ ou $-mx + y - b = 0$ ($A = -m$, $B = 1$, $C = -b$). Reciprocamente, se começarmos com uma equação geral de primeiro grau, isto é, uma equação da forma $\boxed{5}$, onde A, B e C são constantes e A e B não são ambos 0, então podemos mostrar que ela é a equação de uma reta. Se $B = 0$, a equação torna-se $Ax + C = 0$ ou $x = -C/A$, que representa uma reta vertical com intersecção com o eixo x em $-C/A$. Se $B \neq 0$, a equação pode ser reescrita isolando-se y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

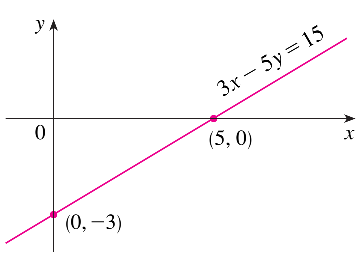


FIGURA 9

e reconhecemos isso como a equação de uma reta na forma inclinação-intersecção com o eixo ($m = -A/B$, $b = -C/B$). Portanto, uma equação da forma $\boxed{5}$ é chamada **equação linear** ou **equação geral de uma reta**. Para resumirmos, nos referimos frequentemente "à reta $Ax + By + C = 0$" em vez de "à reta cuja é $Ax + By + C = 0$".

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico da função $3x - 5y = 15$.

SOLUÇÃO Uma vez que a equação é linear, seu gráfico é uma reta. Para desenharmos o gráfico, podemos simplesmente determinar dois pontos sobre a reta. É fácil determinar as intersecções com os eixos. Substituindo $y = 0$ (a equação do eixo x) na equação dada, obtemos $3x = 15$, portanto $x = 5$ é a intersecção com o eixo x. Substituindo $x = 0$ na equação, vemos que a intersecção com o eixo y é -3. Isso nos permite esboçar o gráfico na Figura 9.

EXEMPLO 6 Represente graficamente a inequação $x + 2y > 5$.

SOLUÇÃO Devemos esboçar o gráfico do conjunto $\{(x, y) \mid x + 2y > 5\}$ e começamos ao isolar y na desigualdade:

$$x + 2y > 5$$

$$2y > -x + 5$$

$$y > -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}$$

Compare essa desigualdade com a equação $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, que representa uma reta com inclinação $-\frac{1}{2}$ e intersecção com o eixo y igual a $\frac{5}{2}$. Observamos que inequação em questão consiste nos pontos cuja coordenada y é *maior* do que aquela sobre a reta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Assim, a representação gráfica é a da região que se situa *acima* da reta, conforme ilustrado na Figura 10.

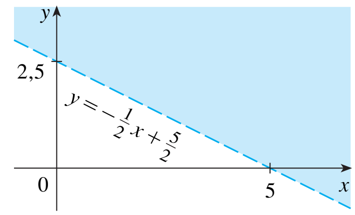


FIGURA 10

Retas Paralelas e Perpendiculares

As inclinações podem ser usadas para mostrar que as retas são paralelas ou perpendiculares. Os fatos a seguir são comprovados, por exemplo, em *Precalculus: Mathematics for Calculus*, 6ª edição de Stewart, Redlin e Watson (Belmont, CA, 2012).

6 Retas Paralelas e Perpendiculares

1. Duas retas não verticais são paralelas se e somente se tiverem a mesma inclinação.
2. Duas retas com inclinações m_1 e m_2 são perpendiculares se e somente se $m_1m_2 = -1$; isto é, suas inclinações são recíprocas opostas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

EXEMPLO 7 Determine uma equação da reta que passa pelo ponto (5, 2) e que é paralela à reta $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUÇÃO A reta dada pode ser escrita na forma

$$y = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6}$$

que está na forma inclinação-intersecção com o eixo com $m = -\frac{2}{3}$. As retas paralelas têm a mesma inclinação, logo, a reta pedida tem a inclinação $-\frac{2}{3}$ e sua equação na forma ponto-inclinação é

$$y - 2 = -\tfrac{2}{3}(x - 5)$$

Podemos reescrever essa equação como $2x + 3y = 16$.

EXEMPLO 8 Mostre que as retas $2x + 3y = 1$ e $6x - 4y - 1 = 0$ são perpendiculares.

SOLUÇÃO As equações podem ser escritas como

$$y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}$$

de onde vemos que as inclinações são

$$m_1 = -\tfrac{2}{3} \qquad \text{e} \qquad m_2 = \tfrac{3}{2}$$

Como $m_1m_2 = -1$, as retas são perpendiculares.

B Exercícios

1–6 Determine a distância entre os dois pontos.

1. (1, 1), (4, 5)
2. (1, −3), (5, 7)
3. (6, −2), (−1, 3)
4. (1, −6), (−1, −3)
5. (2, 5), (4, −7)
6. (a, b), (b, a)

7–10 Determine a inclinação da reta que passa por P e Q.

7. $P(1, 5)$, $Q(4, 11)$
8. $P(-1, 6)$, $Q(4, -3)$
9. $P(-3, 3)$, $Q(-1, -6)$
10. $P(-1, -4)$, $Q(6, 0)$

11. Mostre que o triângulo com vértices $A(0, 2)$, $B(-3, -1)$ e $C(-4, 3)$ é isósceles.

12. (a) Mostre que o triângulo com vértices $A(6, -7)$, $B(11, -3)$ e $C(2, -2)$ é um triângulo retângulo usando a recíproca do Teorema de Pitágoras.
(b) Use as inclinações para mostrar que ABC é um triângulo retângulo.
(c) Determine a área do triângulo.

13. Mostre que os pontos $(-2, 9)$, $(4, 6)$, $(1, 0)$ e $(-5, 3)$ são os vértices de um quadrado.

14. (a) Mostre que os pontos $A(-1, 3)$, $B(3, 11)$ e $C(5, 15)$ são colineares (pertencem à mesma reta) mostrando que $|AB| + |BC| = |AC|$.
(b) Use as inclinações para mostrar que A, B, e C são colineares.

15. Mostre que $A(1,1)$, $B(7, 4)$, $C(5, 10)$ e $D(-1, 7)$ são vértices de um paralelogramo.

16. Mostre que $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $C(10, 8)$ e $D(0, 6)$ são vértices de um retângulo.

17–20 Esboce o gráfico da equação.

17. $x = 3$

18. $y = -2$

19. $xy = 0$

20. $|y| = 1$

21–36 Ache uma equação da reta que satisfaça as condições dadas.

21. Passa pelo ponto $(2, -3)$, inclinação 6

22. Passa pelo ponto $(-1, 4)$, inclinação -3

23. Passa pelo ponto $(1, 7)$, inclinação $\frac{2}{3}$

24. Passa pelo ponto $(-3, -5)$, inclinação $-\frac{7}{2}$

25. Passa pelos pontos $(2, 1)$ e $(1, 6)$

26. Passa pelos pontos $(-1, -2)$ e $(4, 3)$

27. Inclinação 3, intersecção com o eixo y igual a -2

28. Inclinação $\frac{2}{5}$, intersecção com o eixo y igual a 4

29. Intersecção com o eixo x igual a 1, intersecção com o eixo y igual a -3

30. Intersecção com o eixo x igual a -8, intersecção com o eixo y igual a 6

31. Passa pelo ponto $(4, 5)$, paralela ao eixo x

32. Passa pelo ponto $(4, 5)$, paralela ao eixo y

33. Passa pelo ponto $(1, -6)$, paralela à reta $x + 2y = 6$

34. Intersecção com o eixo y igual a 6, paralela à reta $2x + 3y + 4 = 0$

35. Por $(-1, -2)$, perpendicular à reta $2x + 5y + 8 = 0$

36. Por $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$, perpendicular à reta $4x - 8y = 1$

37–42 Ache a inclinação e a intersecção da reta e faça o esboço de seu gráfico.

37. $x + 3y = 0$

38. $2x - 5y = 0$

39. $y = -2$

40. $2x - 3y + 6 = 0$

41. $3x - 4y = 12$

42. $4x + 5y = 10$

43–52 Esboce a região no plano xy.

43. $\{(x, y) \mid x < 0\}$

44. $\{(x, y) \mid y > 0\}$

45. $\{(x, y) \mid xy < 0\}$

46. $\{(x, y) \mid x \geqslant 1 \text{ e } y < 3\}$

47. $\{(x, y) \mid |x| \leqslant 2\}$

48. $\{(x, y) \mid |x| < 3 \text{ e } |y| < 2\}$

49. $\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4 \text{ e } x \leqslant 2\}$

50. $\{(x, y) \mid y > 2x - 1\}$

51. $\{(x, y) \mid 1 + x \leqslant y \leqslant 1 - 2x\}$

52. $\{(x, y) \mid -x \leqslant y < \frac{1}{2}(x + 3)\}$

53. Ache um ponto sobre o eixo y que seja equidistante de $(5, -5)$ e $(1, 1)$.

54. Mostre que o ponto médio do segmento de reta de $P_1(x_1, y_1)$ até $P_2(x_2, y_2)$ é

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

55. Encontre o ponto médio do segmento de reta que une os pontos dados.
(a) $(1, 3)$ e $(7, 15)$ (b) $(-1, 6)$ e $(8, -12)$

56. Determine os comprimentos das medianas do triângulo com vértices $A(1, 0)$, $B(3, 6)$ e $C(8, 2)$. (A mediana é um segmento de reta de um vértice até o ponto médio do lado oposto.)

57. Mostre que as retas $2x - y = 4$ e $6x - 2y = 10$ não são paralelas e ache o seu ponto de intersecção.

58. Mostre que as retas $3x - 5y + 19 = 0$ e $10x + 6y - 50 = 0$ são perpendiculares e ache o seu ponto de intersecção.

59. Ache uma equação da mediatriz do segmento de reta com extremidades nos pontos $A(1, 4)$ e $B(7, -2)$.

60. (a) Encontre as equações dos lados do triângulo com vértices $P(1, 0)$, $Q(3, 4)$ e $R(-1, 6)$.
(b) Ache equações para as medianas desse triângulo. Onde elas se interceptam?

61. (a) Mostre que as intersecções com os eixos x e y de uma reta são os números a e b diferentes de zero, então a equação da reta pode ser colocada na forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Esta equação é chamada a **forma a partir das duas intersecções** da equação de uma reta.
(b) Use a parte (a) para encontrar a equação da reta cuja intersecção com o eixo x é 6 e cuja intersecção com o eixo y é -8.

62. Kelly parte de Winnipeg às 14 h e dirige a uma velocidade constante para oeste na rodovia Trans-Canadá. Ela passa por Brandon, a 210 km de Winnipeg, às 16 h.
(a) Expresse a distância percorrida em termos do tempo decorrido.
(b) Trace o gráfico da equação na parte (a).
(c) Qual a inclinação desta reta? O que ela representa?

C Gráficos das Equações de Segundo Grau

No Apêndice B vimos que uma equação $Ax + By + C = 0$, de primeiro grau ou linear, representa uma reta. Nesta seção vamos discutir as equações do segundo grau, tais como

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad y = x^2 + 1 \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad x^2 - y^2 = 1$$

que representam uma circunferência, uma parábola, uma elipse e uma hipérbole, respectivamente.

O gráfico de tais equações em x e y é o conjunto de todos os pontos (x, y) que satisfazem aquela equação; ele dá uma representação visual da equação. Reciprocamente, dada uma curva no plano xy, podemos ter de achar uma equação que a represente, isto é, uma equação satisfeita pelas coordenadas dos pontos na curva e por nenhum outro ponto. Esta é a outra metade dos princípios básicos da geometria analítica conforme formulada por Descartes e Fermat. A ideia é que se uma curva geométrica pode ser representada por uma equação algébrica, então as regras da álgebra podem ser usadas para analisar o problema geométrico.

Circunferências

Como um exemplo desse tipo de problema, vamos determinar uma equação da circunferência com raio r e centro (h, k). Por definição, a circunferência é o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ cuja distância do centro $C(h, k)$ é r. (Veja a Figura 1.) Logo, P está sobre a circunferência se e somente se $|PC| = r$. Da fórmula de distância, temos

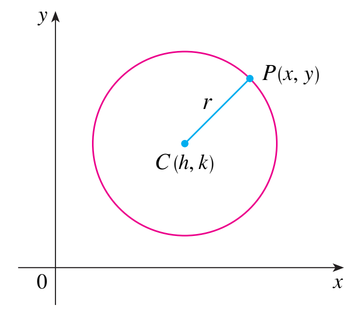


FIGURA 1

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

ou, de maneira equivalente, elevando ao quadrado ambos os membros, obtemos

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Esta é a equação desejada.

> $\boxed{1}$ **Equação da Circunferência** Uma equação da circunferência com centro (h, k) e raio r é
>
> $$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
>
> Em particular, se o centro for a origem $(0, 0)$, a equação será
>
> $$x^2 + y^2 = r^2$$

EXEMPLO 1 Ache uma equação da circunferência com raio 3 e centro $(2, -5)$.

SOLUÇÃO Da Equação 1 com $r = 3$, $h = 2$ e $k = -5$, obtemos

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$$

EXEMPLO 2 Esboce o gráfico da equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$ mostrando primeiro que ela representa uma circunferência e então encontrando seu centro e raio.

SOLUÇÃO Vamos primeiro agrupar os termos em x e y da seguinte forma:

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 6y) = -7$$

Então, completando o quadrado dentro de cada parêntese e somando as constantes apropriadas (os quadrados da metade dos coeficientes de x e y) a ambos os lados da equação, temos:

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -7 + 1 + 9$$

ou

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 3$$

Comparando essa equação com a equação padrão da circunferência $\boxed{1}$, vemos que $h = -1$, $k = 3$ e $r = \sqrt{3}$, assim, a equação dada representa uma circunferência com centro $(-1, 3)$ e raio $\sqrt{3}$. Ela está esboçada na Figura 2.

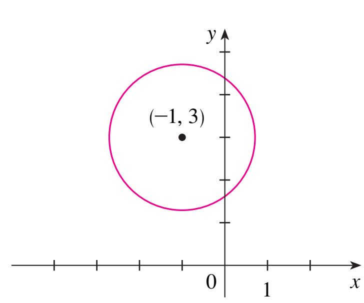


FIGURA 2
$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$

Parábolas

As propriedades geométricas das parábolas serão revisadas na Seção 10.5. Aqui, consideraremos uma parábola como um gráfico de uma equação da forma $y = ax^2 + bx + c$.

EXEMPLO 3 Esboce o gráfico da parábola $y = x^2$.

SOLUÇÃO Vamos fazer uma tabela de valores, marcar os pontos e depois juntá-los por uma curva suave para obter o gráfico da Figura 3.

x	$y = x^2$
0	0
$\pm \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

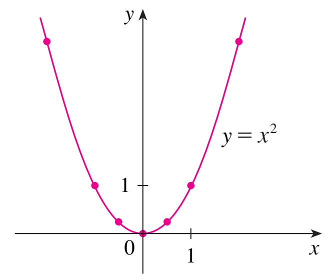


FIGURA 3

A Figura 4 mostra os gráficos de diversas parábolas com equações da forma $y = ax^2$ para diversos valores do número a. Em cada caso o *vértice*, o ponto onde a parábola muda de direção, é a origem. Vemos que a parábola $y = ax^2$ abre-se para cima se $a > 0$ e para baixo se $a < 0$ (como na Figura 5).

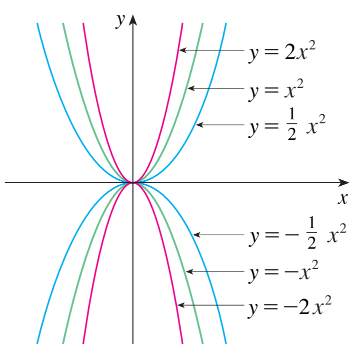
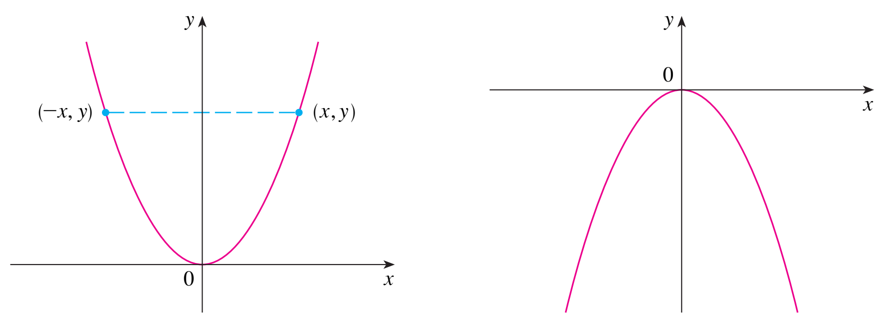


FIGURA 4



(a) $y = ax^2,\ a > 0$

(b) $y = ax^2,\ a < 0$

FIGURA 5

Observe que se (x, y) satisfaz $y = ax^2$, então $(-x, y)$ também o cumpre. Isso corresponde ao fato geométrico de que, se a metade direita do gráfico for refletida em torno do eixo y, obteremos a metade esquerda do gráfico. Dizemos que o gráfico é **simétrico em relação ao eixo y**.

O gráfico de uma equação é simétrico em relação ao eixo y se a equação ficar invariante quando substituirmos x por $-x$.

Se trocarmos x e y na equação $y = ax^2$, teremos $x = ay^2$, que também representa uma parábola. (Trocar x e y significa fazer uma reflexão em torno da reta bissetriz $y = x$.) A parábola $x = ay^2$ abre para a direita se $a > 0$ e para a esquerda se $a < 0$. (Veja a Figura 6.) Dessa vez a parábola é simétrica em relação ao eixo x, pois se (x, y) satisfizer a equação $x = ay^2$, então o mesmo acontece com $(x, -y)$.

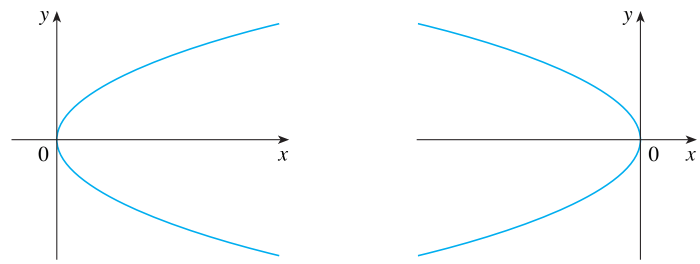


FIGURA 6 (a) $x = ay^2,\ a > 0$ (b) $x = ay^2,\ a < 0$

> O gráfico de uma equação é simétrico em relação ao eixo x se a equação ficar invariante quando substituirmos y por $-y$.

EXEMPLO 4 Esboce a região limitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta $y = x - 2$.

SOLUÇÃO Primeiro encontramos os pontos da intersecção, resolvendo as duas equações. Substituindo $x = y + 2$ na equação $x = y^2$, obtemos $y + 2 = y^2$, o que resulta em

$$0 = y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1)$$

Logo, $y = 2$ ou -1. Assim, os pontos de intersecção são $(4, 2)$ e $(1, -1)$ e, passando por esses dois pontos, traçamos a reta $y = x - 2$. Esboçamos então a parábola $x = y^2$ lembrando-nos da Figura 6(a) e fazendo com que a parábola passe pelos pontos $(4, 2)$ e $(1, -1)$. A região delimitada por $x = y^2$ e $y = x - 2$ significa a região finita cuja fronteira é formada por essas curvas. Ela está esboçada na Figura 7.

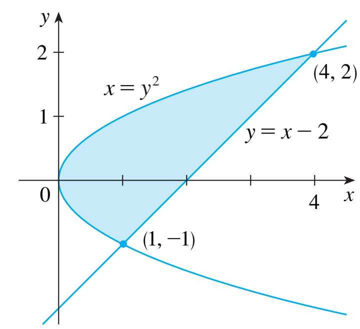


FIGURA 7

Elipses

A curva com a equação

2 $$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

onde a e b são números positivos é chamada **elipse** na posição-padrão. (As propriedades geométricas serão discutidas na Seção 10.5.) Observe que a Equação 2 fica invariante se x for substituído por $-x$ ou y por $-y$; dessa forma, a elipse é simétrica em relação aos eixos. Como uma ajuda no esboço da elipse, vamos determinar suas intersecções com os eixos.

> As **intersecções com o eixo** x de um gráfico são as coordenadas x dos pontos onde ele intercepta o eixo x. Eles são encontrados fazendo-se $y = 0$ na equação do gráfico.
>
> As **intersecções com o eixo** y de um gráfico são as coordenadas y dos pontos onde ele intercepta o eixo y. Eles são encontrados fazendo-se $x = 0$ na equação do gráfico.

Se fizermos $y = 0$ na Equação 2, obteremos $x^2 = a^2$ e, dessa forma, as intersecções com o eixo x são $\pm a$. Fazendo $x = 0$, obteremos $y^2 = b^2$; assim, as intersecções com o eixo y são $\pm b$. Usando essa informação, junto com a simetria, fazemos o esboço da elipse na Figura 8. Se $a = b$, a elipse é uma circunferência com raio a.

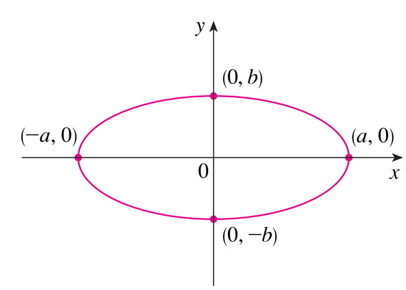


FIGURA 8
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico de $9x^2 + 16y^2 = 144$.

SOLUÇÃO Dividimos ambos os lados da equação por 144:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

A equação está agora na forma padrão para uma elipse $\boxed{2}$, e assim temos $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$ e $b = 3$. As intersecções com o eixo x são ± 4; e as intersecções com o eixo y são ± 3. O gráfico está esboçado na Figura 9.

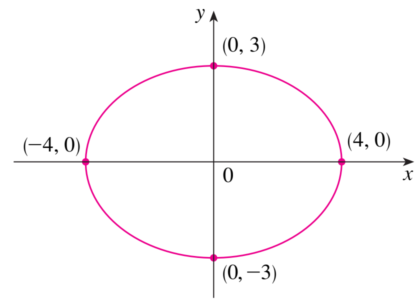


FIGURA 9
$9x^2 + 16y^2 = 144$

Hipérboles

A curva com a equação

3
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

é denominada **hipérbole** na posição padrão. Novamente, a Equação 3 fica invariante quando x é substituído por $-x$ ou y é substituído por $-y$; dessa forma, a hipérbole é simétrica em relação aos eixos. Para encontrarmos as intersecções com o eixo x, fazemos $y = 0$ e obtemos $x^2 = a^2$ e $x = \pm a$. Mas, se colocarmos $x = 0$ na Equação 3, teremos $y^2 = -b^2$, o que é impossível; dessa forma, não existe intersecção com o eixo y. Na verdade, da Equação 3 obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$$

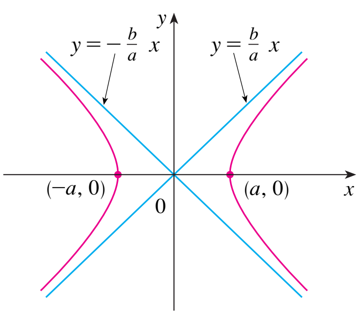


FIGURA 10
A hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

o que demonstra que $x^2 \geqslant a^2$ e, portanto, $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant a$. Assim, temos $x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a$. Isso significa que a hipérbole consiste em duas partes, chamadas *ramos*. Ela está esboçada na Figura 10.

Quando desenhamos uma hipérbole é útil traçar primeiro as *assíntotas*, que são as retas $y = (b/a)x$ e $y = -(b/a)x$ mostradas na Figura 10. Ambos os ramos da hipérbole tendem para as assíntotas; isto é, ficam arbitrariamente perto das assíntotas. Isso envolve a ideia de limite, como discutido no Capítulo 2 (veja também o Exercício 73 na Seção 4.5).

Trocando os papéis de x e y, obtemos uma equação da forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

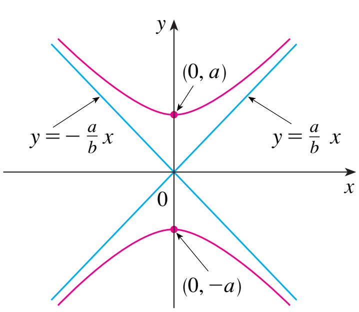


FIGURA 11
A hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

que também representa uma hipérbole e está esboçada na Figura 11.

EXEMPLO 6 Esboce a curva $9x^2 - 4y^2 = 36$.

SOLUÇÃO Dividindo ambos os lados por 36, obtemos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

que é a equação de uma hipérbole na forma padrão (Equação 3). Visto que $a^2 = 4$, as intersecções com o eixo x são ± 2. Como $b^2 = 9$, temos $b = 3$ e as assíntotas são $y = \pm\left(\frac{3}{2}\right)x$. A hipérbole está esboçada na Figura 12.

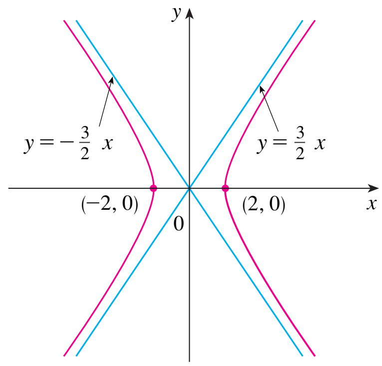


FIGURA 12
A hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$

Se $b = a$, a hipérbole tem a equação $x^2 - y^2 = a^2$ (ou $y^2 - x^2 = a^2$) e é chamada *hipérbole equilátera* [veja a Figura 13(a)]. Suas assíntotas são $y = \pm x$, que são perpendiculares. Girando-se uma hipérbole equilátera em 45º, as assíntotas tornam-se os eixos x e y, e pode-se mostrar que a nova equação da hipérbole é $xy = k$, onde k é uma constante [veja a Figura 13(b)].

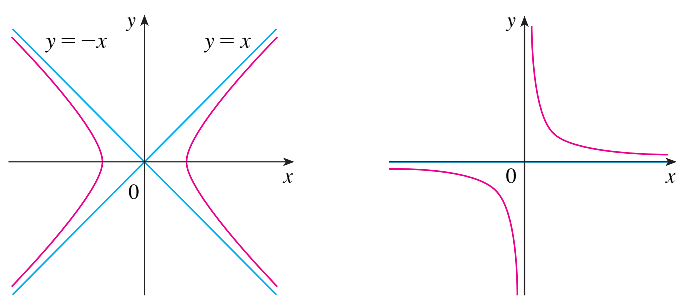


FIGURA 13
Hipérboles equiláteras

(a) $x^2 - y^2 = a^2$

(b) $xy = k$ $(k > 0)$

Cônicas Deslocadas

Lembre-se de que uma equação da circunferência com centro na origem e raio r é $x^2 + y^2 = r^2$, mas se o centro for o ponto (h, k), então a equação da circunferência fica

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Analogamente, se tomarmos a elipse com a equação

4 $$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

e a transladarmos de forma que se seu centro esteja no ponto (h, k), então sua equação fica

5 $$\boxed{\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1}$$

(Veja a Figura 14.)

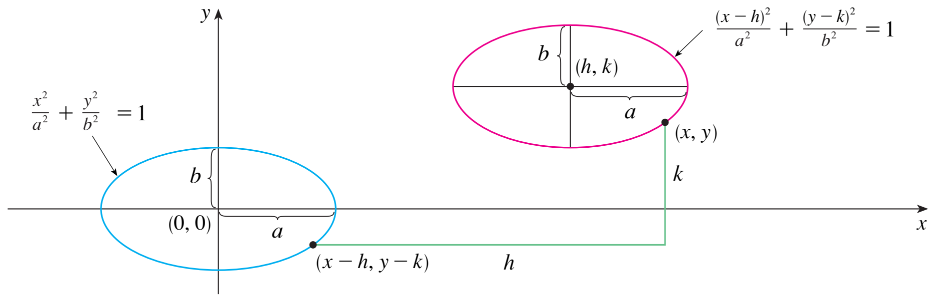


FIGURA 14

Observe que ao transladarmos a elipse, substituímos x por $x - h$ e y por $y - k$ na Equação 4 para obter a Equação 5. Usando o mesmo procedimento, deslocamos a parábola $y = ax^2$ de forma que seu vértice (a origem) torna-se o ponto (h, k), como na Figura 15. Substituindo x por $x - h$ e y por $y - k$, vemos que a nova equação é

$$y - k = a(x - h)^2 \qquad \text{ou} \qquad y = a(x - h)^2 + k$$

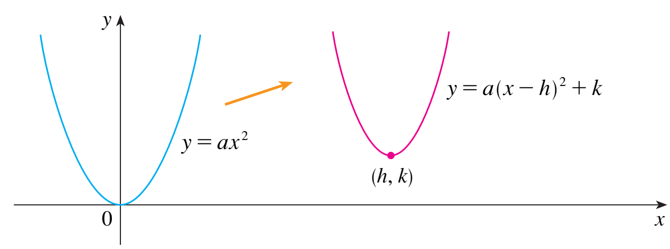


FIGURA 15

EXEMPLO 7 Esboce o gráfico da equação $y = 2x^2 - 4x + 1$.

SOLUÇÃO Primeiro vamos completar os quadrados:

$$y = 2(x^2 - 2x) + 1 = 2(x - 1)^2 - 1$$

Nessa forma vemos que a equação representa a parábola obtida deslocando-se $y = 2x^2$ tal que seu vértice seja o ponto $(1, -1)$. O gráfico está esboçado na Figura 16.

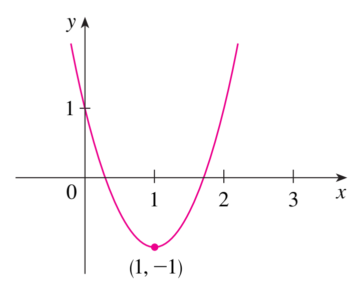


FIGURA 16
$y = 2x^2 - 4x + 1$

EXEMPLO 8 Esboce a curva $x = 1 - y^2$.

SOLUÇÃO Dessa vez começamos com a parábola $x = -y^2$ (como na Figura 6 com $a = -1$) e deslocamos uma unidade para a direita para obter o gráfico de $x = 1 - y^2$. (Veja a Figura 17.)

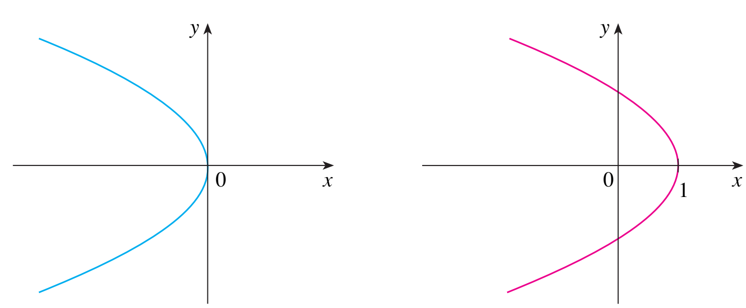


FIGURA 17 (a) $x = -y^2$ (b) $x = 1 - y^2$

C Exercícios

1–4 Determine uma equação de uma circunferência que satisfaça as condições dadas.

1. Centro $(3, -1)$, raio 5

2. Centro $(-2, -8)$, raio 10

3. Centro na origem, passa por $(4, 7)$

4. Centro $(-1, 5)$, passa por $(-4, -6)$

5–9 Mostre que a equação representa uma circunferência e determine o centro e o raio.

5. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

6. $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$

7. $x^2 + y^2 + x = 0$

8. $16x^2 + 16y^2 + 8x + 32y + 1 = 0$

9. $2x^2 + 2y^2 - x + y = 1$

10. Que condições nos coeficiente a, b e c fazem com que a equação $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ represente uma circunferência? Quando a condição for satisfeita, determine o centro e o raio da circunferência.

11–32 Identifique o tipo de curva e esboce o gráfico. Não marque os pontos. Somente use os gráficos-padrão dados nas Figuras 5, 6, 8, 10 e 11 e desloque se for necessário.

11. $y = -x^2$

12. $y^2 - x^2 = 1$

13. $x^2 + 4y^2 = 16$

14. $x = -2y^2$

15. $16x^2 - 25y^2 = 400$

16. $25x^2 + 4y^2 = 100$

17. $4x^2 + y^2 = 1$

18. $y = x^2 + 2$

19. $x = y^2 - 1$

20. $9x^2 - 25y^2 = 225$

21. $9y^2 - x^2 = 9$

22. $2x^2 + 5y^2 = 10$

23. $xy = 4$

24. $y = x^2 + 2x$

25. $9(x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 36$

26. $16x^2 + 9y^2 - 36y = 108$

27. $y = x^2 - 6x + 13$

28. $x^2 - y^2 - 4x + 3 = 0$

29. $x = 4 - y^2$

30. $y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$

31. $x^2 + 4y^2 - 6x + 5 = 0$

32. $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$

33–34 Esboce a região delimitada pelas curvas.

33. $y = 3x, \quad y = x^2$

34. $y = 4 - x^2, \quad x - 2y = 2$

35. Determine uma equação da parábola com vértice $(1, -1)$ que passe pelos pontos $(-1, 3)$ e $(3, 3)$.

36. Encontre uma equação da elipse com centro na origem que passe pelos pontos $\left(1, -10\sqrt{2}/3\right)$ e $\left(-2, 5\sqrt{5}/3\right)$.

37–40 Esboce o gráfico do conjunto.

37. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

38. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

39. $\{(x, y) \mid y \geqslant x^2 - 1\}$

40. $\{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \leqslant 4\}$

D Trigonometria

Ângulos

Os ângulos podem ser medidos em graus ou radianos (abreviado por rad). O ângulo dado por uma revolução completa tem 360º, que é o mesmo que 2π rad. Portanto,

1 $$\boxed{\pi \text{ rad} = 180^\circ}$$

e

2 $$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57{,}3^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0{,}017 \text{ rad}$$

EXEMPLO 1

(a) Encontre a medida do radiano de 60º. (b) Expresse $5\pi/4$ rad em graus.

SOLUÇÃO

(a) Da Equação 1 ou 2 vemos que, para converter de graus para radianos, multiplicamos por $\pi/180$. Portanto,

$$60^\circ = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

(b) Para convertermos de radianos para graus multiplicamos por $180/\pi$. Logo,

$$\frac{5\pi}{4}\text{ rad} = \frac{5\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 225°$$

Em cálculo, usamos o radiano como medida dos ângulos, exceto quando explicitamente indicada outra unidade. A tabela a seguir fornece a correspondência entre medidas em graus e em radianos de alguns ângulos comuns.

Graus	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

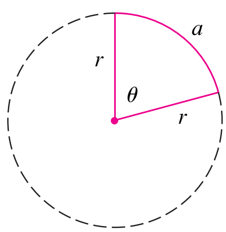


FIGURA 1

A Figura 1 mostra um setor de um círculo com ângulo central θ e raio r subtendendo um arco com comprimento a. Como o comprimento do arco é proporcional ao tamanho do ângulo, e como todo o círculo tem circunferência $2\pi r$ e ângulo central 2π, temos

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{a}{2\pi r}$$

Isolando θ e a nessa equação, obtemos

3 $$\boxed{\theta = \frac{a}{r}} \qquad \boxed{a = r\theta}$$

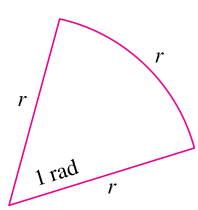


FIGURA 2

Lembre que essas equações são válidas somente quando θ é medido em radianos.

Em particular, fazendo $a = r$ na Equação 3, vemos que um ângulo de 1 rad é um ângulo subtendido no centro de um círculo por um arco com comprimento igual ao raio do círculo (veja a Figura 2).

EXEMPLO 2

(a) Se o raio de um círculo for 5 cm, qual o ângulo subtendido por um arco de 6 cm?

(b) Se um círculo tem raio 3 cm, qual é o comprimento de um arco subtendido por um ângulo central de $3\pi/8$ rad?

SOLUÇÃO

(a) Usando a Equação 3 com $a = 6$ e $r = 5$, vemos que o ângulo é

$$\theta = \tfrac{6}{5} = 1{,}2\text{ rad}$$

(b) Com $r = 3$ cm e $\theta = 3\pi/8$ rad, o comprimento de arco é

$$a = r\theta = 3\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{9\pi}{8}\text{ cm}$$

A **posição padrão** de um ângulo ocorre quando colocamos seu vértice na origem do sistema de coordenadas e seu lado inicial sobre o eixo x positivo, como na Figura 3. Um ângulo **positivo** é obtido girando-se o lado inicial no sentido anti-horário até que ele coincida com o lado final; da mesma forma, ângulos **negativos** são obtidos girando-se no sentido horário, como na Figura 4.

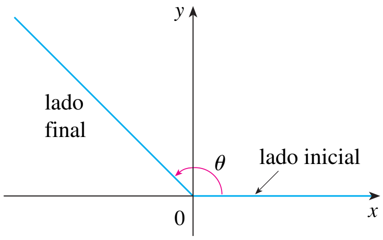


FIGURA 3 $\theta \geqslant 0$

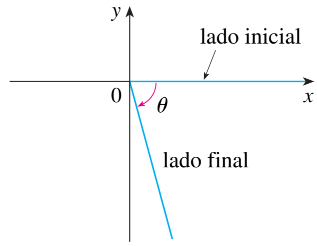


FIGURA 4 $\theta < 0$

A Figura 5 mostra vários exemplos de ângulos em posição padrão. Observe que ângulos diferentes podem ter o mesmo lado final. Por exemplo, os ângulos $3\pi/4$, $-5\pi/4$ e $11\pi/4$ têm os mesmos lados inicial e final, pois

$$\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4} \qquad \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$$

e 2π rad representa uma revolução completa.

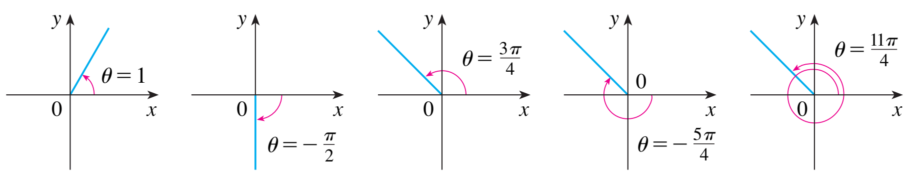


FIGURA 5
Ângulos na posição padrão

As Funções Trigonométricas

Para um ângulo agudo θ as seis funções trigonométricas são definidas como razões de comprimento de lados de um triângulo retângulo como segue (veja a Figura 6).

4

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \text{cossec}\,\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{adj}}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{op}}{\text{adj}} \qquad \text{cotg}\,\theta = \frac{\text{adj}}{\text{op}}$$

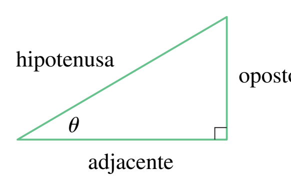


FIGURA 6

Essa definição não se aplica aos ângulos obtusos ou negativos, de modo que, para um ângulo geral θ na posição padrão, tomamos $P(x, y)$ como um ponto qualquer sobre o lado final de θ e r como a distância $|OP|$, como na Figura 7. Então, definimos

5

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} \qquad \text{cossec}\,\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x} \qquad \text{cotg}\,\theta = \frac{x}{y}$$

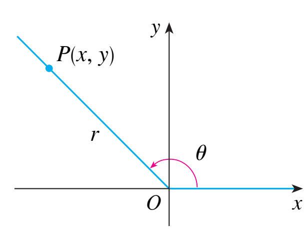


FIGURA 7

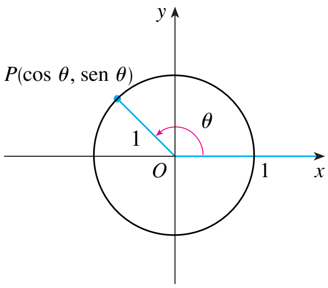


FIGURA 8

Se colocarmos $r = 1$ na Definição 5 e desenharmos um círculo unitário com centro na origem e rotularmos θ como na Figura 8, então as coordenadas de P serão $(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$.

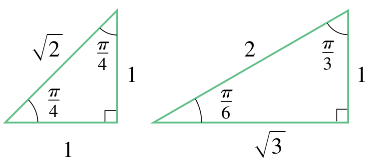


FIGURA 9

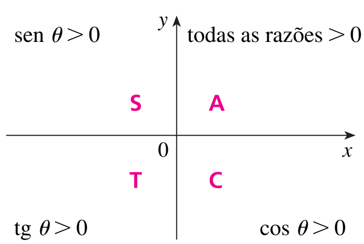


FIGURA 10

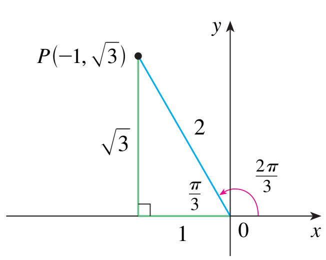


FIGURA 11

Como a divisão por 0 não é definida, tg θ e sec θ são indefinidas quando $x = 0$ e cossec θ e cotg θ são indefinidas quando $y = 0$. Observe que as definições em $\boxed{4}$ e $\boxed{5}$ são consistentes quando θ é um ângulo agudo.

Se θ for um número, a convenção é que sen θ significa o seno do ângulo, cuja medida em *radianos* é θ. Por exemplo, a expressão sen 3 implica que estamos tratando com um ângulo de 3 rad. Ao determinarmos uma aproximação na calculadora para esse número, devemos nos lembrar de colocar a calculadora no modo radiano, e então obteremos

$$\text{sen}\, 3 \approx 0{,}14112$$

Para conhecermos o seno do ângulo 3º, escrevemos sen 3° e, com nossa calculadora no modo grau, encontramos que

$$\text{sen}\, 3^\circ \approx 0{,}05234$$

As razões trigonométricas exatas para certos ângulos podem ser lidas dos triângulos da Figura 9. Por exemplo,

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Os sinais das funções trigonométricas para ângulos em cada um dos quatro quadrantes podem ser lembrados pela regra mostrada na Figura 10 "All Students Take Calculus".

EXEMPLO 3 Encontre as razões trigonométricas exatas para $\theta = 2\pi/3$.

SOLUÇÃO Da Figura 11 vemos que um ponto sobre a reta final para $\theta = 2\pi/3$ é $P(-1, \sqrt{3})$. Portanto, tomando

$$x = -1 \qquad y = \sqrt{3} \qquad r = 2$$

nas definições das razões trigonométricas, temos

$$\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \text{tg}\,\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\text{cossec}\,\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec\frac{2\pi}{3} = -2 \qquad \text{cotg}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

A tabela a seguir fornece alguns valores de sen θ e cos θ encontrados pelo método do Exemplo 3.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

EXEMPLO 4 Se $\cos\theta = \frac{2}{5}$ e $0 < \theta < \pi/2$, determine as outras cinco funções trigonométricas de θ.

SOLUÇÃO Como $\cos\theta = \frac{2}{5}$, podemos tomar a hipotenusa como tendo comprimento igual a 5 e o lado adjacente como tendo comprimento igual a 2 na Figura 12. Se o lado oposto tem comprimento x, então o Teorema de Pitágoras fornece $x^2 + 4 = 25$ e, portanto, $x^2 = 21, x = \sqrt{21}$. Podemos agora usar o diagrama para escrever as outras cinco funções trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{21}}{5} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\operatorname{cossec}\theta = \frac{5}{\sqrt{21}} \qquad \sec\theta = \frac{5}{2} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

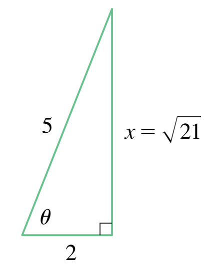


FIGURA 12

EXEMPLO 5 Use uma calculadora para aproximar o valor de x na Figura 13.

SOLUÇÃO Do diagrama vemos que

$$\operatorname{tg} 40° = \frac{16}{x}$$

Logo,
$$x = \frac{16}{\operatorname{tg} 40°} \approx 19{,}07$$

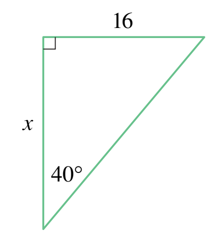


FIGURA 13

Identidades Trigonométricas

Uma identidade trigonométrica é uma relação entre as funções trigonométricas. As mais elementares são dadas a seguir, e são consequências imediatas das definições das funções trigonométricas.

6
$$\operatorname{cossec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Para a próxima identidade, voltemos à Figura 7. A fórmula da distância (ou, de maneira equivalente, o Teorema de Pitágoras) nos diz que $x^2 + y^2 = r^2$. Portanto,

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Demonstramos, portanto, uma das mais úteis identidades da trigonometria:

7
$$\boxed{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

Se agora dividirmos ambos os lados da Equação 7 por $\cos^2\theta$ e usarmos as Equações 6, obteremos

8
$$\boxed{\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta}$$

Analogamente, se dividirmos ambos os lados da Equação 7 por $\operatorname{sen}^2\theta$, obteremos

9
$$\boxed{1 + \operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cossec}^2\theta}$$

As identidades

10a
$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

10b
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

As funções ímpares e as funções pares são discutidas na Seção 1.1.

indicam que seno e cosseno são funções, respectivamente, ímpar e par. Elas são facilmente demonstradas desenhando um diagrama mostrando θ e $-\theta$ na posição padrão (veja o Exercício 39).

Uma vez que os ângulos θ e $\theta + 2\pi$ têm o mesmo lado final, temos

11 $$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

Essas identidades revelam que as funções seno e cosseno são periódicas com período 2π.

As identidades trigonométricas restantes são todas consequências de duas identidades básicas chamadas **fórmulas da adição**:

12a $$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

12b $$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

As demonstrações dessas fórmulas de adição estão resumidas nos Exercícios 85, 86 e 87.

Substituindo y por $-y$ nas Equações 12a e 12b e usando as Equações 10a e 10b, obtemos as seguintes **fórmulas de subtração**:

13a $$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

13b $$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

Então, dividindo as fórmulas nas Equações 12 ou 13, obtemos as fórmulas correspondentes para $\operatorname{tg}(x \pm y)$:

14a $$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

14b $$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

Se fizermos $y = x$ nas fórmulas de adição $\boxed{12}$, obteremos as **fórmulas dos ângulos duplos**:

15a $$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

15b $$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Então, usando a identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, obtemos a seguinte forma alternativa das fórmulas dos ângulos duplos para $\cos 2x$:

16a $$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

16b $$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Se agora isolarmos $\cos^2 x$ e $\operatorname{sen}^2 x$ nestas equações, obteremos as seguintes **fórmulas do ângulo-metade**, que são úteis em cálculo integral:

17a $$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

17b $$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Finalmente, enunciamos as **fórmulas do produto** que podem ser deduzidas das Equações 12 e 13:

18a	$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)]$
18b	$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$
18c	$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

Há muitas outras identidades trigonométricas, mas as aqui enunciadas são algumas das mais usadas no cálculo. Se você se esquecer alguma das identidades 13-18, lembre-se de que elas podem ser deduzidas das Equações 12a e 12b.

EXEMPLO 6 Determine todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ tal que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x$.

SOLUÇÃO Usando a fórmula do ângulo duplo (15a), reescrevemos a equação dada como

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{sen} x(1 - 2\cos x) = 0$$

Portanto, há duas possibilidades:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= 0 & \qquad \text{ou} \qquad 1 - 2\cos x &= 0 \\ x &= 0, \pi, 2\pi & \cos x &= \tfrac{1}{2} \\ & & x &= \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

A equação dada tem cinco soluções: 0, $\pi/3$, π, $5\pi/3$ e 2π.

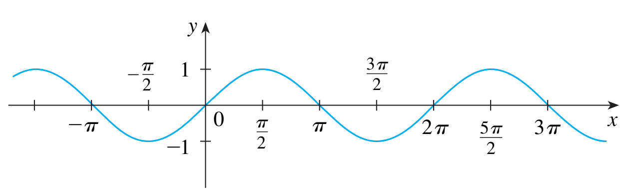
Gráficos das Funções Trigonométricas

O gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, mostrado na Figura 14(a), é obtido desenhando-se os pontos para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ e então usando-se a periodicidade da função (da Equação 11) para completar o gráfico. Observe que os zeros da função seno ocorrem em múltiplos inteiros de π, isto é,

$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{sempre que } x = n\pi, \qquad \text{com } n \text{ um número inteiro.}$$

Em virtude da identidade

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$

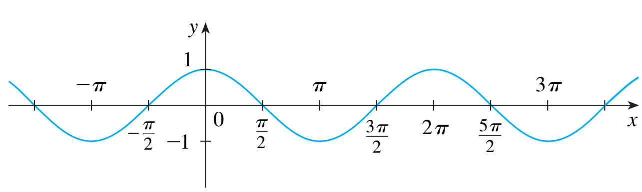
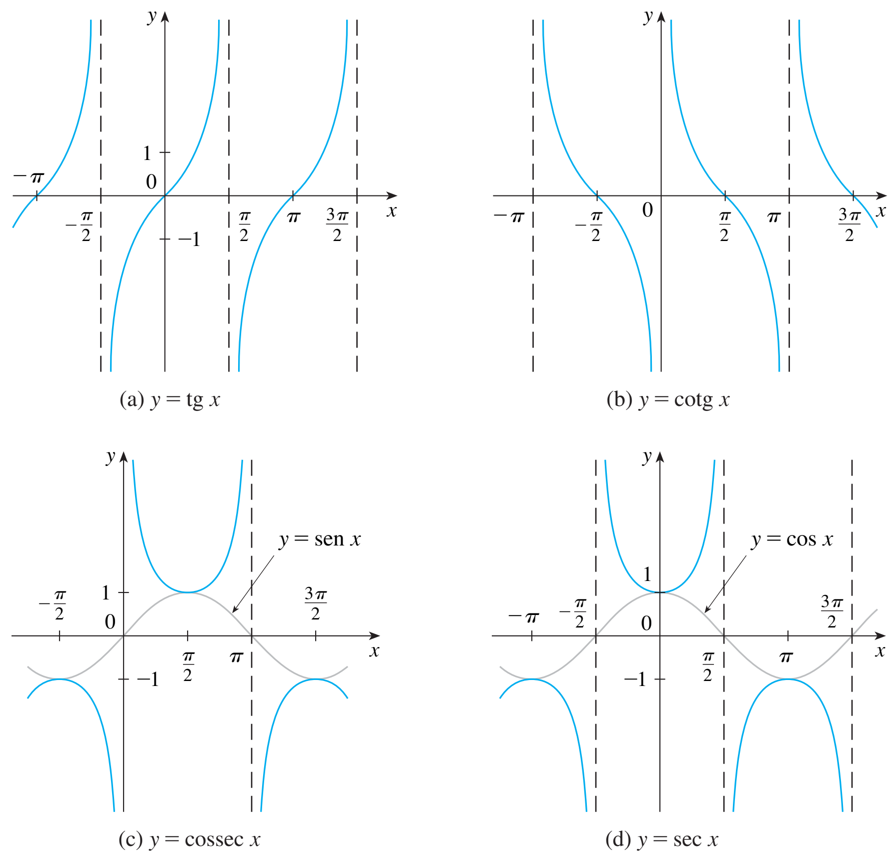


FIGURA 14 (b) $g(x) = \cos x$

(que pode ser verificada usando-se a Equação 12a), o gráfico do cosseno é obtido deslocando-se em $\pi/2$ para a esquerda o gráfico do seno [veja a Figura 14(b)]. Observe que tanto para a função seno quanto para a função cosseno o domínio é $(-\infty, \infty)$, e a imagem é o intervalo fechado $[-1, 1]$. Dessa forma, para todos os valores de x, temos

$$\boxed{-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

Os gráficos das quatro funções trigonométricas restantes estão mostrados na Figura 15, e seus domínios estão ali indicados. Observe que a tangente e a cotangente têm a mesma imagem $(-\infty, \infty)$, enquanto a cossecante e a secante têm a imagem $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Todas as funções são periódicas: tangente e cotangente têm período π, ao passo que cossecante e secante possuem período 2π.



(a) $y = \operatorname{tg} x$

(b) $y = \operatorname{cotg} x$

FIGURA 15

(c) $y = \operatorname{cossec} x$

(d) $y = \sec x$

D Exercícios

1–6 Converta de graus para radianos.

1. 210°　**2.** 300°　**3.** 9°

4. −315°　**5.** 900°　**6.** 36°

7–12 Converta de radianos para graus.

7. 4π　**8.** $-\dfrac{7\pi}{2}$　**9.** $\dfrac{5\pi}{12}$

10. $\dfrac{8\pi}{3}$　**11.** $-\dfrac{3\pi}{8}$　**12.** 5

13. Determine o comprimento de um arco circular subtendido pelo ângulo de $\pi/12$ rad se o raio do círculo for de 36 cm.

14. Se um círculo tem raio de 10 cm, qual é o comprimento de arco subtendido pelo ângulo central de 72°?

15. Um círculo tem raio de 1,5m. Qual o ângulo subtendido no centro do círculo por um arco de 1 m de comprimento?

16. Determine o raio de um setor circular com ângulo $3\pi/4$ e comprimento de arco 6 cm.

17–22 Desenhe, na posição padrão, o ângulo cuja medida é dada.

17. 315°　**18.** −150°　**19.** $-\dfrac{3\pi}{4}$ rad

20. $\dfrac{7\pi}{3}$ rad **21.** 2 rad **22.** -3 rad

23–28 Determine as razões trigonométricas exatas para o ângulo cuja medida em radianos é dada.

23. $\dfrac{3\pi}{4}$ **24.** $\dfrac{4\pi}{3}$ **25.** $\dfrac{9\pi}{2}$

26. -5π **27.** $\dfrac{5\pi}{6}$ **28.** $\dfrac{11\pi}{4}$

29–34 Determine as demais razões trigonométricas.

29. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{5}, \quad 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

30. $\operatorname{tg}\alpha = 2, \quad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

31. $\sec\phi = -1{,}5, \quad \dfrac{\pi}{2} < \phi < \pi$

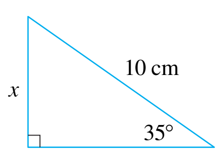
32. $\cos x = -\dfrac{1}{3}, \quad \pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$

33. $\operatorname{cotg}\beta = 3, \quad \pi < \beta < 2\pi$

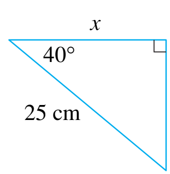
34. $\operatorname{cossec}\theta = -\dfrac{4}{3}, \quad \dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

35–38 Determine, com precisão de cinco casas decimais, o comprimento do lado chamado de x.

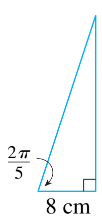
35.



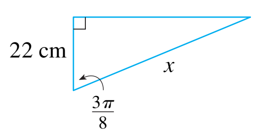
36.



37.



38.



39–41 Demonstre cada equação.

39. (a) Equação 10a (b) Equação 10b

40. (a) Equação 14a (b) Equação 14b

41. (a) Equação 18a (b) Equação 18b
(c) Equação 18c

42–58 Demonstre a identidade.

42. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

43. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ **44.** $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

45. $\operatorname{sen}\theta \, \operatorname{cotg}\theta = \cos\theta$

46. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

47. $\sec y - \cos y = \operatorname{tg} y \operatorname{sen} y$

48. $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{sen}^2\alpha$

49. $\operatorname{cotg}^2\theta + \sec^2\theta = \operatorname{tg}^2\theta + \operatorname{cossec}^2\theta$

50. $2 \operatorname{cossec} 2t = \sec t \operatorname{cossec} t$

51. $\operatorname{tg} 2\theta = \dfrac{2\operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta}$

52. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta} = 2\sec^2\theta$

53. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x + \cos x \cos 2x = \cos x$

54. $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}(x + y)\operatorname{sen}(x - y)$

55. $\dfrac{\operatorname{sen}\phi}{1 - \cos\phi} = \operatorname{cossec}\phi + \operatorname{cotg}\phi$

56. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{\cos x \cos y}$

57. $\operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen}\theta = 2 \operatorname{sen} 2\theta \cos\theta$

58. $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

59–64 Se $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e $\sec y = \frac{5}{4}$, onde x e y estão entre 0 e $\pi/2$, calcule a expressão.

59. $\operatorname{sen}(x + y)$ **60.** $\cos(x + y)$

61. $\cos(x - y)$ **62.** $\operatorname{sen}(x - y)$

63. $\operatorname{sen} 2y$ **64.** $\cos 2y$

65–72 Encontre todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfaçam a equação.

65. $2\cos x - 1 = 0$ **66.** $3\operatorname{cotg}^2 x = 1$

67. $2\operatorname{sen}^2 x = 1$ **68.** $|\operatorname{tg} x| = 1$

69. $\operatorname{sen} 2x = \cos x$ **70.** $2\cos x + \operatorname{sen} 2x = 0$

71. $\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$ **72.** $2 + \cos 2x = 3\cos x$

73–76 Determine todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfaçam a desigualdade.

73. $\operatorname{sen} x \leqslant \frac{1}{2}$ **74.** $2\cos x + 1 > 0$

75. $-1 < \operatorname{tg} x < 1$ **76.** $\operatorname{sen} x > \cos x$

77–82 Faça o gráfico da função começando com o gráfico das Figuras 14 e 15 e aplicando as transformações da Seção 1.3 quando apropriado.

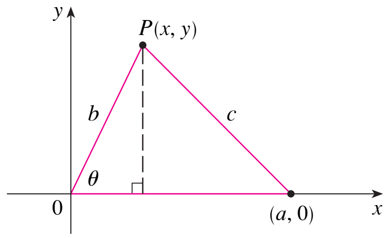
77. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ **78.** $y = \operatorname{tg} 2x$

79. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ **80.** $y = 1 + \sec x$

81. $y = |\operatorname{sen} x|$ **82.** $y = 2 + \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

83. Demonstre a **Lei dos Cossenos**: se um triângulo tiver lados com comprimentos a, b, c e θ for um ângulo entre os lados com comprimentos a e b, então

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

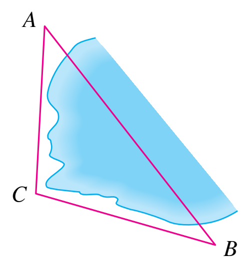


[*Dica:* Introduza um sistema de coordenadas de modo que θ esteja na posição padrão como na figura. Expresse x e y em termos de θ e use a fórmula de distância para calcular c.]

84. Para determinar a distância $|AB|$ sobre uma pequena enseada, um ponto C é colocado como na figura, e as seguintes medidas são registradas:

$$\angle C = 103^\circ \qquad |AC| = 820 \text{ m} \qquad |BC| = 910 \text{ m}$$

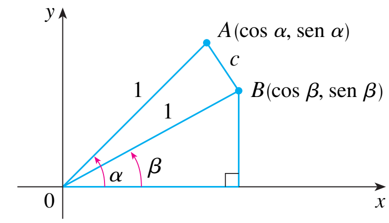
Use a Lei dos Cossenos do Exercício 83 para determinar a distância pedida.



85. Use a figura para demonstrar a fórmula da subtração

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \ \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \ \operatorname{sen}\beta$$

[*Dica:* Calcule c^2 de duas maneiras (usando a Lei dos Cossenos do Exercício 83 e também a fórmula da distância) e compare as duas expressões.]



86. Use a fórmula do Exercício 85 para demonstrar a fórmula da subtração para cosseno (12b).

87. Use a fórmula da adição para cosseno e as identidades

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

para demonstrar a fórmula da subtração (13a) para a função seno.

88. Mostre que a área de um triângulo com lados de comprimentos a e b e com o ângulo entre eles sendo θ é

$$A = \tfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\theta$$

89. Determine a área do triângulo ABC, correta até cinco casas decimais, se

$$|AB| = 10 \text{ cm} \qquad |BC| = 3 \text{ cm} \qquad \angle ABC = 107^\circ$$

E Notação de Somatória (ou Notação Sigma)

Uma maneira conveniente de escrever as somas usa a letra grega Σ (sigma maiúsculo, correspondente à nossa letra S) e é chamada **notação de somatória (ou notação sigma)**.

Isso nos diz para terminar com $i = n$.
Isso nos diz para somar.
Isso nos diz para começar com $i = m$.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

1 Definição Se $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ forem números reais e m e n inteiros tais que $m \leqslant n$, então

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Com a notação de função, a Definição 1 pode ser escrita como

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

Assim, o símbolo $\Sigma_{i=m}^{n}$ indica uma soma na qual a letra i (denominada **índice da somatória**) assume valores inteiros consecutivos começando em m e terminando em n, isto é, $m, m+1, \ldots, n$. Outras letras também podem ser usadas como índice da somatória.

EXEMPLO 1

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

(b) $\displaystyle\sum_{i=3}^{n} i = 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1) + n$

(c) $\sum_{j=0}^{5} 2^j = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 63$

(d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

(e) $\sum_{i=1}^{3} \frac{i-1}{i^2+3} = \frac{1-1}{1^2+3} + \frac{2-1}{2^2+3} + \frac{3-1}{3^2+3} = 0 + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} = \frac{13}{42}$

(f) $\sum_{i=1}^{4} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$

EXEMPLO 2 Escreva a soma $2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ na notação de somatória.

SOLUÇÃO Não há uma maneira única de escrever uma soma na notação somatória. Poderíamos escrever

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=2}^{n} i^3$$

ou

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)^3$$

ou

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)^3$$

O teorema a seguir apresenta três regras simples para se trabalhar com a notação sigma.

2 Teorema Se c for uma constante qualquer (isto é, não depender de i), então

(a) $\sum_{i=m}^{n} ca_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i$ (b) $\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$

(c) $\sum_{i=m}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i$

DEMONSTRAÇÃO Para vermos por que essas regras são verdadeiras, devemos escrever ambos os lados na forma expandida. A regra (a) é tão somente a propriedade distributiva dos números reais:

$$ca_m + ca_{m+1} + \cdots + ca_n = c(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)$$

A regra (b) segue das propriedades associativa e comutativa:

$$(a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \cdots + (a_n + b_n)$$
$$= (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n)$$

A regra (c) é demonstrada de modo análogo.

EXEMPLO 3 Encontre $\sum_{i=1}^{n} 1$.

SOLUÇÃO

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ termos}} = n$$

EXEMPLO 4 Demonstre a fórmula para a soma do n primeiros inteiros positivos:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

SOLUÇÃO Essa fórmula pode ser demonstrada por indução matemática ou pelo método a seguir, usado pelo matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855) quando ele tinha 10 anos de idade.

Escreva a soma S duas vezes, uma na ordem usual e a outra na ordem invertida:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n \\ S &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \end{aligned}$$

Somando-se verticalmente todas as colunas, obtemos

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)$$

Do lado direito existem n termos, cada um dos quais é $n + 1$; portanto,

$$2S = n(n+1) \qquad \text{ou} \qquad S = \frac{n(n+1)}{2}$$

EXEMPLO 5 Demonstre a fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

A maioria dos termos se cancela em pares

SOLUÇÃO 1 Seja S a soma desejada. Começamos com a *soma telescópica*:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} [(1+i)^3 - i^3] &= (\cancel{2^3} - 1^3) + (\cancel{3^3} - \cancel{2^3}) + (\cancel{4^3} - \cancel{3^3}) + \cdots + [(n+1)^3 - \cancel{n^3}] \\ &= (n+1)^3 - 1^3 = n^3 + 3n^2 + 3n. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando o Teorema 2 e os Exemplos 3 e 4, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} [(1+i)^3 - i^3] &= \sum_{i=1}^{n} [3i^2 + 3i + 1] = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= 3S + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n = 3S + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n \end{aligned}$$

Então temos

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n$$

Isolando S nessa equação, obtemos

$$3S = n^3 + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$

ou

$$S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Princípio de Indução Matemática
Seja S_n uma afirmativa envolvendo o inteiro positivo n. Suponha que

1. S_1 seja verdadeira.
2. Se S_k ifor verdadeira, então S_{k+1} é verdadeira.

Então S_n é verdadeira para todos inteiros positivos n.

SOLUÇÃO 2 Seja S_n a fórmula dada.

1. S_1 é verdadeira, pois $\quad 1^2 = \dfrac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$
2. Suponha que S_k seja verdadeira; isto é,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Então

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k+1)^2 &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \end{aligned}$$

$$= (k+1)\,\frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6}$$

$$= (k+1)\,\frac{2k^2 + 7k + 6}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

Logo, S_{k+1} é verdadeira.

Pelo Princípio da Indução Matemática, S_n é verdadeira para todo n.

Vamos agrupar os resultados dos Exemplos 3, 4 e 5 com um resultado similar para cubos (veja os Exercícios 37-40) como o Teorema 3. Essas fórmulas são necessárias para encontrar áreas e calcular integrais no Capítulo 5.

3 Teorema Seja c uma constante e n um inteiro positivo. Então

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = nc$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

EXEMPLO 6 Calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(4i^2 - 3)$.

SOLUÇÃO Usando os Teoremas 2 e 3, temos

$$\sum_{i=1}^{n} i(4i^2 - 3) = \sum_{i=1}^{n} (4i^3 - 3i) = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 3\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - 3\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)[2n(n+1) - 3]}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n^2 + 2n - 3)}{2}$$

EXEMPLO 7 Encontre $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1\right]$.

SOLUÇÃO

O tipo de cálculo do Exemplo 7 ocorre no Capítulo 5, quando calculamos áreas.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{3}{n^3}\,i^2 + \frac{3}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3}{n}\cdot n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) + 3\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) + 3 \right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 = 4$$

E Exercícios

1–10 Escreva a soma na forma expandida.

1. $\sum_{i=1}^{5} \sqrt{i}$

2. $\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$

3. $\sum_{i=4}^{6} 3^i$

4. $\sum_{i=4}^{6} i^3$

5. $\sum_{k=0}^{4} \frac{2k-1}{2k+1}$

6. $\sum_{k=5}^{8} x^k$

7. $\sum_{i=1}^{n} i^{10}$

8. $\sum_{j=n}^{n+3} j^2$

9. $\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j$

10. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x_i$

11–20 Escreva a soma na notação de somatória.

11. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10$

12. $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$

13. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{19}{20}$

14. $\frac{3}{7} + \frac{4}{8} + \frac{5}{9} + \frac{6}{10} + \cdots + \frac{23}{27}$

15. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$

16. $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$

17. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$

18. $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$

19. $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

20. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$

21–35 Determine o valor da soma.

21. $\sum_{i=4}^{8} (3i - 2)$

22. $\sum_{i=3}^{6} i(i+2)$

23. $\sum_{j=1}^{6} 3^{j+1}$

24. $\sum_{k=0}^{8} \cos k\pi$

25. $\sum_{n=1}^{20} (-1)^n$

26. $\sum_{i=1}^{100} 4$

27. $\sum_{i=0}^{4} (2^i + i^2)$

28. $\sum_{i=-2}^{4} 2^{3-i}$

29. $\sum_{i=1}^{n} 2i$

30. $\sum_{i=1}^{n} (2 - 5i)$

31. $\sum_{i=1}^{n} (i^2 + 3i + 4)$

32. $\sum_{i=1}^{n} (3 + 2i)^2$

33. $\sum_{i=1}^{n} (i+1)(i+2)$

34. $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$

35. $\sum_{i=1}^{n} (i^3 - i - 2)$

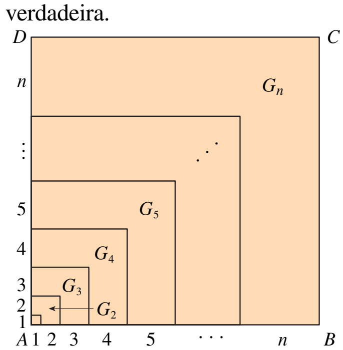
36. Determine o número n tal que $\sum_{i=1}^{n} i = 78$.

37. Demonstre a fórmula (b) do Teorema 3.

38. Demonstre a fórmula (e) do Teorema 3 usando indução matemática.

39. Demonstre a fórmula (e) do Teorema 3 usando um método similar àquele do Exemplo 5, Solução 1 [comece com $(1 + i)^4 - i^4$].

40. Demonstre a fórmula (e) do Teorema 3 usando o seguinte método publicado por Abu Bekr Mohammed ibn Alhusain Alkarchi por volta do ano 1010. A figura mostra um quadrado $ABCD$ cujos lados AB e AD foram divididos em segmentos com comprimentos $1, 2, 3, \ldots, n$. Dessa forma, o lado do quadrado tem comprimento $n(n+1)/2$, de modo que a área é $[n(n+1)/2]^2$. Porém a área também é a soma das áreas dos n "gnomons" $G_1, G_2, \ldots, G_n$ mostrados na figura. Demonstre que a área de G_i é i^3 e conclua que a fórmula (e) é verdadeira.



41. Calcule cada soma telescópica.

(a) $\sum_{i=1}^{n} [i^4 - (i-1)^4]$

(b) $\sum_{i=1}^{100} (5^i - 5^{i-1})$

(c) $\sum_{i=3}^{99} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$

(d) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})$

42. Demonstre a desigualdade triangular generalizada:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

43–46 Determine o limite.

43. $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \right)^2$

44. $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{i}{n} \right)^3 + 1 \right]$

45. $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \left[\left(\frac{2i}{n} \right)^3 + 5 \left(\frac{2i}{n} \right) \right]$

46. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left[\left(1+\frac{3i}{n}\right)^3-2\left(1+\frac{3i}{n}\right)\right]$

47. Demonstre a fórmula para a soma de um série geométrica finita com primeiro termo a e razão $r \neq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

48. Calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{2^{i-1}}$.

49. Calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i + 2^i)$.

50. Calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}(i + j)\right]$.

F Demostrações dos Teoremas

Neste apêndice apresentamos as demonstrações de vários teoremas que estão enunciados na parte principal do texto. As seções nas quais eles ocorrem estão indicadas na margem.

SEÇÃO 2.3

Propriedades dos Limites Suponha que c seja uma constante e que os limites

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

existam. Então

1. $\displaystyle\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M$
2. $\displaystyle\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = L - M$
3. $\displaystyle\lim_{x\to a}[cf(x)] = cL$
4. $\displaystyle\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = LM$
5. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ se $M \neq 0$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 4 Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x)g(x) - LM| < \varepsilon$$

A fim de conseguirmos termos que contenham $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$, adicionamos e subtraímos $Lg(x)$ como segue:

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM|\\ &= |[f(x) - L]g(x) + L[g(x) - M]|\\ &\leqslant |[f(x) - L]g(x)| + |L[g(x) - M]| \qquad \text{(Desigualdade Triangular)}\\ &= |f(x) - L||g(x)| + |L||g(x) - M|\end{aligned}$$

Queremos fazer cada um desses termos menores que $\varepsilon/2$.

Uma vez que $\lim_{x\to a} g(x) = M$, há um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_1, \quad \text{então} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)}.$$

Também, há um número $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_2$, então

$$|g(x) - M| < 1$$

e, portanto,

$$|g(x)| = |g(x) - M + M| \leqslant |g(x) - M| + |M| < 1 + |M|$$

Uma vez que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, há um número $\delta_3 > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_3 \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |M|)}$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Se $0 < |x - a| < \delta$, então temos $0 < |x - a| < \delta_1$, $0 < |x - a| < \delta_2$ e $0 < |x - a| < \delta_3$, portanto, podemos combinar as inequações para obter

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - LM| &\leqslant |f(x) - L|\,|g(x)| + |L|\,|g(x) - M| \\
&< \frac{\varepsilon}{2(1 + |M|)}(1 + |M|) + |L| \frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Isso mostra que $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = LM$.

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 3 Se tomarmos $g(x) = c$ na Propriedade 4, obteremos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} [cf(x)] &= \lim_{x \to a} [g(x)f(x)] = \lim_{x \to a} g(x) \cdot \lim_{x \to a} f(x) \\
&= \lim_{x \to a} c \cdot \lim_{x \to a} f(x) \\
&= c \lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{(pela Propriedade 7)}
\end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 2 Usando as Propriedades 1 e 3 com $c = -1$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x \to a} [f(x) + (-1)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} (-1)g(x) \\
&= \lim_{x \to a} f(x) + (-1) \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x).
\end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 5 Primeiro vamos mostrar que

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

Para fazer isso devemos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \varepsilon$$

Observe que
$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|M - g(x)|}{|Mg(x)|}$$

Sabemos que podemos tornar o numerador pequeno. Porém, também precisamos saber que o denominador não é pequeno quando x é próximo a a. Como $\lim_{x \to a} g(x) = M$, há um número $\delta_1 > 0$ tal que, se $0 < |x - a| < \delta_1$, temos

$$|g(x) - M| < \frac{|M|}{2}$$

e, portanto,
$$\begin{aligned}
|M| &= |M - g(x) + g(x)| \leqslant |M - g(x)| + |g(x)| \\
&< \frac{|M|}{2} + |g(x)|
\end{aligned}$$

Isso mostra que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1 \qquad \text{então} \qquad |g(x)| > \frac{|M|}{2}$$

Então, para esses valores de x,

$$\frac{1}{|Mg(x)|} = \frac{1}{|M|\,|g(x)|} < \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} = \frac{2}{M^2}$$

Além disso, há $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2 \qquad \text{então} \qquad |g(x) - M| < \frac{M^2}{2}\,\varepsilon$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, para $0 < |x - a| < \delta$, temos

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|M - g(x)|}{|Mg(x)|} < \frac{2}{M^2}\,\frac{M^2}{2}\,\varepsilon = \varepsilon$$

Segue que $\lim_{x \to a} 1/g(x) = 1/M$. Finalmente, usando a Propriedade 4, obtemos

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

2 Teorema Se $f(x) \leqslant g(x)$ para todo x em um intervalo aberto que contenha a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

então $L \leqslant M$.

DEMONSTRAÇÃO Usamos o método da demonstração por contradição. Suponha, se possível, que $L > M$. A propriedade 2 dos limites diz que

$$\lim_{x \to a} [g(x) - f(x)] = M - L$$

Portanto, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |[g(x) - f(x)] - (M - L)| < \varepsilon$$

Em particular, tomando $\varepsilon = L - M$ (observando que $L - M > 0$ por hipótese), temos um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |[g(x) - f(x)] - (M - L)| < L - M$$

Uma vez que $a \leqslant |a|$ para qualquer número a, temos

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad [g(x) - f(x)] - (M - L) < L - M$$

que se simplifica para

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad g(x) < f(x)$$

Mas isso contradiz o fato de que $f(x) \leqslant g(x)$. Assim, a desigualdade $L > M$ deve ser falsa. Portanto, $L \leqslant M$.

3 O Teorema do Confronto Se $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ para todo x em um intervalo aberto que contenha a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

Então $$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

DEMONSTRAÇÃO Considere $\varepsilon > 0$. Uma vez que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, há um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1 \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

ou seja,

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{então} \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Uma vez que $\lim_{x \to a} h(x) = L$, há um número $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{então} \quad |h(x) - L| < \varepsilon$$

ou seja,

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{então} \quad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Se $0 < |x - a| < \delta$, então $0 < |x - a| < \delta_1$ e $0 < |x - a| < \delta_2$, de modo que

$$L - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L + \varepsilon$$

Em particular, $$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

ou melhor, $|g(x) - L| < \varepsilon$. Portanto, $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

SEÇÃO 2.3

Teorema Se f for uma função contínua injetora definida em um intervalo (a, b), então sua função inversa f^{-1} também é contínua.

DEMONSTRAÇÃO Primeiro, mostramos que se f for tanto injetora quanto contínua em (a, b), então ela precisa ser ou crescente ou decrescente em (a, b). Se ela não fosse nem crescente nem decrescente, então existiriam números x_1, x_2 e x_3 em (a, b) com $x_1 < x_2 < x_3$ tais que $f(x_2)$ não está entre $f(x_1)$ e $f(x_3)$. Há duas possibilidades: ou (1) $f(x_3)$ está entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$ ou (2) $f(x_1)$ está entre $f(x_2)$ e $f(x_3)$. (Desenhe uma figura.) No caso (1), aplicamos o Teorema do Valor Intermediário à função contínua f para obter um número c entre x_1 e x_2 tal que $f(c) = f(x_3)$. No caso (2), o Teorema do Valor Intermediário dá um número c entre x_2 e x_3 tal que $f(c) = f(x_1)$. Em ambos os casos, contradissemos o fato de f ser injetora.

Vamos supor, para fixarmos uma situação, que f seja crescente em (a, b). Tomamos qualquer número y_0 no domínio de f^{-1} e fazemos $f^{-1}(y_0) = x_0$; ou seja, x_0 é o número em (a, b) tal que $f(x_0) = y_0$. Para mostrarmos que f^{-1} é contínua em y_0, tomamos qualquer $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ esteja contido no intervalo (a, b). Como f é crescente, ela leva os números no intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ nos números no intervalo $(f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ e f^{-1} inverte a correspondência. Se denotarmos por δ o menor dos números $\delta_1 = y_0 - f(x_0 - \varepsilon)$ e $\delta_2 = f(x_0 + \varepsilon) - y_0$, então o intervalo $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ está contido no intervalo $(f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ e assim é levado no intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ por f^{-1}. (Veja o diagrama de flechas na Figura 1.) Portanto, encontramos um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad |y - y_0| < \delta \quad \text{então} \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

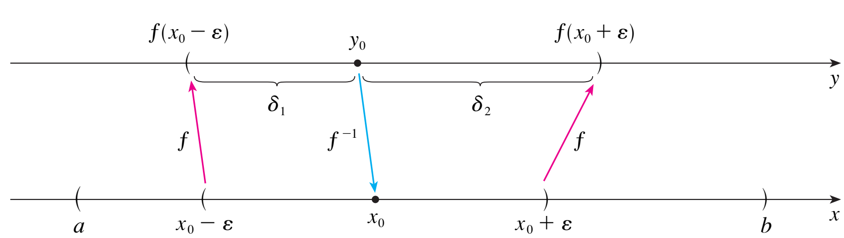


FIGURA 1

Isso mostra que $\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$ e, assim, f^{-1} é contínua em qualquer número y_0 em seu domínio.

8 **Teorema** Se f for contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b).$$

DEMONSTRAÇÃO Considere $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$$

Uma vez que f é contínua em b, temos

$$\lim_{y \to b} f(y) = f(b)$$

de modo que, há $\delta_1 > 0$ satisfazendo

$$\text{se} \qquad 0 < |y - b| < \delta_1 \qquad \text{então} \qquad |f(y) - f(b)| < \varepsilon$$

Uma vez que $\lim_{x \to a} g(x) = b$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |g(x) - b| < \delta_1$$

Combinando essas duas afirmações, vemos que sempre que $0 < |x - a| < \delta$, temos $|g(x) - b| < \delta_1$, que implica que $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$. Dessa forma, demonstramos que $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. ■

SEÇÃO 3.3

A demonstração do resultado a seguir foi prometida ao demonstrarmos que $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$.

> **Teorema** Se $0 < \theta < \pi/2$, então $\theta \leqslant \operatorname{tg} \theta$.

DEMONSTRAÇÃO A Figura 2 mostra um setor de um círculo com centro O, ângulo central θ e raio 1. Então

$$|AD| = |OA| \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta$$

Aproximamos o arco AB por um polígono inscrito que consiste em n segmentos de reta iguais e tomamos um segmento típico PQ. Estendemos os segmentos OP e OQ para encontrar AD nos pontos R e S. Então traçamos $RT \parallel PQ$ como na Figura 2. Observe que

$$\angle RTO = \angle PQO < 90°$$

e também $\angle RTS > 90°$. Portanto, temos

$$|PQ| < |RT| < |RS|$$

Se adicionarmos as n desigualdades semelhantes a essa, obtemos

$$L_n < |AD| = \operatorname{tg} \theta$$

onde L_n é o comprimento do polígono inscrito. Assim, pelo Teorema 2.3.2, temos

$$\lim_{n \to \infty} L_n \leqslant \operatorname{tg} \theta.$$

Mas o comprimento do arco foi definido na Equação 8.1.1 como o limite dos comprimentos dos polígonos inscritos, de modo que

$$\theta = \lim_{n \to \infty} L_n \leqslant \operatorname{tg} \theta \qquad ■$$

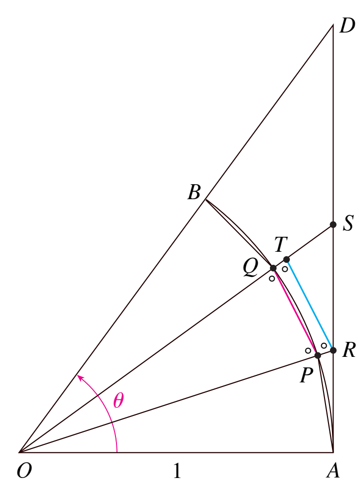


FIGURA 2

SEÇÃO 4.3

> **Teste da Concavidade**
> (a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.
> (b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

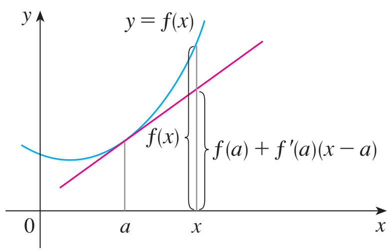


FIGURA 3

DEMONSTRAÇÃO DE (a) Seja a um número arbitrário em I. Devemos mostrar que a curva $y = f(x)$ está acima da reta tangente no ponto $(a, f(a))$. A equação dessa tangente é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Assim, devemos mostrar que

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

qualquer que seja $x \in I$ $(x \neq a)$. (Veja a Figura 3.)

Primeiro, assumimos o caso onde $x > a$. Aplicando o Teorema do Valor Médio a f no intervalo $[a, x]$, obtemos um número c com $a < c < x$, tal que

$$\boxed{1} \qquad f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$$

Uma vez que $f'' > 0$ em I, sabemos do Teste Crescente/Decrescente que f' é crescente em I. Logo, como $a < c$, temos

$$f'(a) < f'(c)$$

de modo que, multiplicando essa desigualdade pelo número positivo $x - a$, obtemos

$$\boxed{2} \qquad f'(a)(x - a) < f'(c)(x - a)$$

Somando agora $f(a)$ a ambos os lados dessa desigualdade, obtemos

$$f(a) + f'(a)(x - a) < f(a) + f'(c)(x - a)$$

Porém, da Equação 1 temos $f(x) = f(a) + f'(c)(x - a)$. Dessa forma, a desigualdade fica

$$\boxed{3} \qquad f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

que é o que queríamos demonstrar.

Para o caso onde $x < a$, temos $f'(c) < f'(a)$, mas a multiplicação pelo número negativo $x - a$ inverte o sinal da desigualdade; assim, obtemos $\boxed{2}$ e $\boxed{3}$ como anteriormente. ■

SEÇÃO 4.4

A fim de darmos a demonstração da Regra de L'Hôspital prometida precisamos, primeiro, de uma generalização do Teorema do Valor Médio. O nome do teorema a seguir é uma homenagem ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

$\boxed{1}$ **Teorema de Valor Médio de Cauchy** Suponhamos que as funções f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b), sendo $g'(x) \neq 0$ para todo x em (a, b). Então, existe um número c em (a, b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Observe que se considerarmos o caso especial no qual $g(x) = x$, então $g'(c) = 1$ e o Teorema 1 é exatamente o Teorema do Valor Médio Comum. Além disso, o Teorema 1 pode ser demonstrado de forma similar. Perceba que tudo o que devemos fazer é mudar a função h dada pela Equação 4.2.4 para a função

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

e então aplicar o Teorema de Rolle como anteriormente.

Regra de L'Hôspital Suponhamos que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞.) Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for ∞ ou $-\infty$).

DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DE L'HÔSPITAL Supomos que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Seja

$$L = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Devemos mostrar que $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = L$. Defina

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}$$

Então F é contínua em I, uma vez que f é contínua em $\{x \in I \mid x \neq a\}$ e

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 = F(a)$$

Do mesmo modo, G é contínua em I. Seja $x \in I$ com $x > a$. Então F e G são contínuas em $[a, x]$ e deriváveis em (a, x) e $G' \neq 0$ ali (uma vez que $F' = f'$ e $G' = g'$). Portanto, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe um número y tal que e $a < y < x$

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

Aqui, usamos o fato de que, por definição, $F(a) = 0$ e $G(a) = 0$. Agora, se deixamos $x \to a^+$, então $y \to a^+$ (uma vez que $a < y < x$), portanto

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{y \to a^+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y \to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L$$

Um argumento análogo mostra que o limite lateral à esquerda é também L. Portanto,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Isso prova a Regra de l'Hôspital para o caso onde a é finito.

Se a é infinito, consideramos $t = 1/x$. Então $t \to 0^+$ quando $x \to \infty$, assim temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} && \text{(pela Regra de l'Hôspital para } a \text{ finito)} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

SEÇÃO 11.8

Para demonstrarmos o Teorema 11.8.3, precisamos primeiro dos seguintes resultados.

Teorema

1. Se uma série de potências $\sum c_n x^n$ converge quando $x = b$ (onde $b \neq 0$), então ela converge sempre que $|x| < |b|$.
2. Se uma série de potências $\sum c_n x^n$ diverge, quando $x = d$ (onde $d \neq 0$), então ela diverge sempre que $|x| > |d|$.

DEMONSTRAÇÃO DE 1 Suponha que $\sum c_n b^n$ convirja. Então, pelo Teorema 11.2.6, temos $\lim_{n\to\infty} c_n b^n = 0$. De acordo com a Definição 11.1.2 com $\varepsilon = 1$, há um inteiro positivo N tal que $|c_n b^n| < 1$ sempre que $n \geqslant N$. Assim, para $n \geqslant N$, temos

$$|c_n x^n| = \left|\frac{c_n b^n x^n}{b^n}\right| = |c_n b^n| \left|\frac{x}{b}\right|^n < \left|\frac{x}{b}\right|^n$$

Se $|x| < |b|$, então $|x/b| < 1$, donde $\sum |x/b|^n$ é uma série geométrica convergente. Portanto, pelo Teste da Comparação, a série $\sum_{n=N}^{\infty} |c_n x^n|$ é convergente. Então a série $\sum c_n x^n$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente. ∎

DEMONSTRAÇÃO DE 2 Suponha que $\sum c_n d^n$ divirja. Se x for qualquer número real tal que $|x| > |d|$, então $\sum c_n x^n$ não pode convergir, pois, pela parte 1, a convergência de $\sum c_n x^n$ implicaria a convergência de $\sum c_n d^n$. Portanto, $\sum c_n x^n$ diverge sempre que $|x| > |d|$. ∎

Teorema Para uma série de potência $\sum c_n x^n$, há somente três possibilidades:

1. A série converge apenas quando $x = 0$.
2. A série converge para todo x.
3. Há um número positivo R tal que a série converge se $|x| < R$ e diverge se $|x| > R$.

DEMONSTRAÇÃO Suponha que nem o caso 1 nem o caso 2 sejam verdade. Então há números não nulos b e d tais que $\sum c_n x^n$ converge para $x = b$ e diverge para $x = d$. Portanto o conjunto $S = \{x \mid \sum c_n x^n \text{ converge}\}$ não é vazio. Pelo teorema precedente, a série diverge se $|x| > |d|$, de modo que $|x| \leqslant |d|$ para todo $x \in S$. Isso diz que $|d|$ é um limite superior para o conjunto S. Assim, pelo Axioma da Completude (veja a Seção 11.1), S tem um limite superior mínimo R. Se $|x| > R$, então $x \notin S$, portanto $\sum c_n x^n$ diverge. Se $|x| < R$, então $|x|$ não é um limite superior S e assim há $b \in S$ tal que $b > |x|$. Como $b \in S$, $\sum c_n b^n$ converge, de modo que pelo teorema precedente $\sum c_n x^n$ converge. ∎

$\boxed{3}$ **Teorema** Para uma série de potências $\sum c_n (x-a)^n$, há somente três possibilidades:

1. A série converge apenas quando $x = a$.
2. A série converge para todo x.
3. Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x - a| < R$ e diverge se $|x - a| > R$.

DEMONSTRAÇÃO Se fizermos a mudança de variáveis $u = x - a$, então a série de potências se torna $\sum c_n u^n$ e podemos aplicar o teorema anterior a esta série. No caso 3, temos convergência para $|u| < R$ e divergência para $|u| > R$. Assim, temos convergência para $|x - a| < R$ e divergência para $|x - a| > R$. ∎

SEÇÃO 14.3

Teorema de Clairaut Suponha que f esteja definida em um disco D que contenha o ponto (a, b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

DEMONSTRAÇÃO Para pequenos valores de h, $h \neq 0$, considere a diferença

$$\Delta(h) = [f(a + h, b + h) - f(a + h, b)] - [f(a, b + h) - f(a, b)]$$

Observe que, se fizermos $g(x) = f(x, b + h) - f(x, b)$, então

$$\Delta(h) = g(a + h) - g(a)$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c entre a e $a + h$ tal que

$$g(a + h) - g(a) = g'(c)h = h[f_x(c, b + h) - f_x(c, b)]$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio de novo, desta vez para f_x, obtemos um número d entre b e $b + h$ tal que

$$f_x(c, b + h) - f_x(c, b) = f_{xy}(c, d)h$$

Combinando essas equações, obtemos

$$\Delta(h) = h^2 f_{xy}(c, d)$$

Se $h \to 0$, então $(c, d) \to (a, b)$, de modo que a continuidade de f_{xy} em (a, b) fornece

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = \lim_{(c, d) \to (a, b)} f_{xy}(c, d) = f_{xy}(a, b)$$

Analogamente, escrevendo

$$\Delta(h) = [f(a + h, b + h) - f(a, b + h)] - [f(a + h, b) - f(a, b)]$$

e usando o Teorema do Valor Médio duas vezes e a continuidade de f_{yx} em (a, b), obtemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}(a, b)$$

Segue que $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

SEÇÃO 14.4

8 Teorema Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem perto de (a, b) e forem contínuas em (a, b), então f é derivável em (a, b).

DEMONSTRAÇÃO Seja

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

De acordo com (14.4.7), para demonstrar que f é derivável em (a, b), devemos mostrar que podemos escrever Δz na forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\, \Delta x + f_y(a, b)\, \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

onde ε_1 e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.
Observando a Figura 4, escrevemos

$$\boxed{1} \quad \Delta z = [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y)] + [f(a, b + \Delta y) - f(a, b)]$$

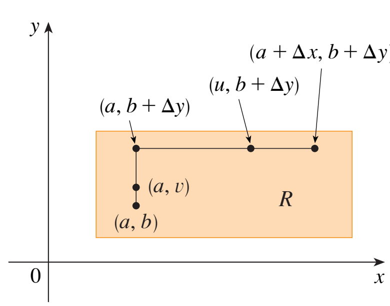


FIGURA 4

Observe que a função de uma única variável

$$g(x) = f(x, b + \Delta y)$$

está definida no intervalo $[a, a + \Delta x]$ e $g'(x) = f_x(x, b + \Delta y)$. Se aplicarmos o Teorema do Valor Médio a g, obtemos

$$g(a + \Delta x) - g(a) = g'(u)\,\Delta x$$

onde u é algum número entre a e $a + \Delta x$. Em termos de f, esta equação se torna

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y) = f_x(u, b + \Delta y)\,\Delta x$$

Isso nos dá uma expressão para a primeira parte do lado direito da Equação 1. Para a segunda parte, tomamos $h(y) = f(a, y)$. Então h é uma função de uma única variável definida no intervalo $[b, b + \Delta y]$ e $h'(y) = f_y(a, y)$. Uma segunda aplicação do Teorema do Valor Médio então dá

$$h(b + \Delta y) - h(b) = h'(v)\,\Delta y$$

em que v é algum número entre b e $b + \Delta y$. Em termos de f, isso se torna

$$f(a, b + \Delta y) - f(a, b) = f_y(a, v)\,\Delta y$$

Agora, substituímos essa expressão na Equação 1 e obtemos

$$\begin{aligned}\Delta z &= f_x(u, b + \Delta y)\,\Delta x + f_y(a, v)\,\Delta y \\ &= f_x(a, b)\,\Delta x + [f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)]\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y \\ &\qquad + [f_y(a, v) - f_y(a, b)]\,\Delta y \\ &= f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y\end{aligned}$$

onde
$$\varepsilon_1 = f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)$$

$$\varepsilon_2 = f_y(a, v) - f_y(a, b)$$

Como $(u, b + \Delta y) \to (a, b)$ e $(a, v) \to (a, b)$ quando $(\Delta x,\ \Delta y) \to (0, 0)$ e uma vez que f_x e f_y são contínuas em (a, b), vemos que $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x,\ \Delta y) \to (0, 0)$.

Portanto, f é derivável em (a, b).

G O Logaritmo Definido como uma Integral

Nosso tratamento das funções exponencial e logarítmica até agora fundamentou-se em nossa intuição, que é baseada na evidência numérica e visual. (Veja as Seções 1.5, 1.6 e 3.1.) Aqui, usaremos o Teorema Fundamental do Cálculo para dar um tratamento alternativo que fornece uma fundamentação mais sólida para estas funções.

Em vez de começarmos com a^x e definir $\log_a x$ como sua inversa, desta vez começamos pela definição de $\ln x$ como uma integral e então definimos a função exponencial como sua inversa. Você deve ter em mente que não usamos nenhuma de nossas definições e resultados prévios relativos a funções exponencial e logarítmica.

O Logaritmo Natural

Primeiro, definimos $\ln x$ como uma integral.

1 Definição A **função logaritmo natural** é a função definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad x > 0$$

A existência dessa função depende do fato de a integral de uma função contínua sempre existir. Se $x > 1$, então $\ln x$ pode ser interpretada geometricamente como a área sob a hipérbole $y = 1/t$ de $t = 1$ a $t = x$. (Veja a Figura 1.) Para $x = 1$, temos

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$$

Para $0 < x < 1$,
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt < 0$$

e assim $\ln x$ é o oposto da área mostrada na Figura 2.

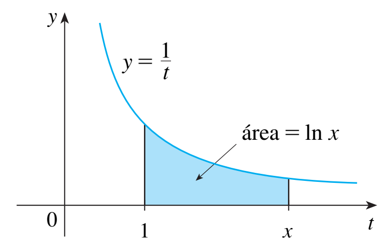


FIGURA 1

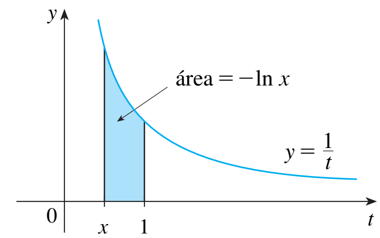


FIGURA 2

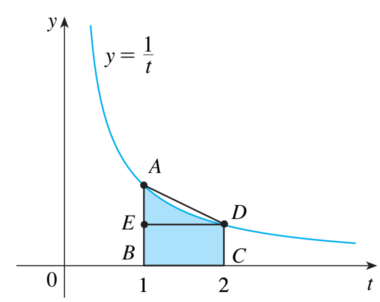


FIGURA 3

EXEMPLO 1

(a) Comparando áreas, mostre que $\frac{1}{2} < \ln 2 < \frac{3}{4}$.
(b) Use a Regra do Ponto Médio com $n = 10$ para estimar o valor de $\ln 2$.

SOLUÇÃO

(a) Podemos interpretar $\ln 2$ como a área sob a curva $y = 1/t$ de 1 a 2. Da Figura 3, vemos que esta área é maior que a área do retângulo $BCDE$ e menor que a área do trapézio $ABCD$. Assim, temos

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1 < \ln 2 < 1 \cdot \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\tfrac{1}{2} < \ln 2 < \tfrac{3}{4}$$

(b) Se usarmos a Regra do Ponto Médio com $f(t) = 1/t$, $n = 10$ e $\Delta t = 0{,}1$, obtemos

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \approx (0{,}1)[f(1{,}05) + f(1{,}15) + \cdots + f(1{,}95)]$$

$$= (0{,}1)\left(\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}15} + \cdots + \frac{1}{1{,}95}\right) \approx 0{,}693$$

Observe que a integral que define $\ln x$ é exatamente o tipo de integral discutida na parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo (veja a Seção 5.3). De fato, usando aquele teorema, temos

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

e, então,

2 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Agora, usamos esta regra de derivação para demonstrar as seguintes propriedades sobre a função logaritmo.

3 **Propriedades dos Logaritmos** Se x e y forem números positivos e r for um número racional, então

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ **2.** $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ **3.** $\ln(x^r) = r \ln x$

DEMONSTRAÇÃO

1. Seja $f(x) = \ln(ax)$, onde a é uma constante positiva. Então, usando a Equação 2 e a Regra da Cadeia, temos

$$f'(x) = \frac{1}{ax}\frac{d}{dx}(ax) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

Portanto, $f(x)$ e $\ln x$ têm a mesma derivada e devem então diferir por uma constante:

$$\ln(ax) = \ln x + C$$

Colocando $x = 1$ nesta equação, obtemos $\ln a = \ln 1 + C = 0 + C = C$. Logo,

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a$$

Se agora substituirmos a constante a por qualquer número y, temos

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

2. Usando a Propriedade 1 com $x = 1/y$, temos

$$\ln \frac{1}{y} + \ln y = \ln\left(\frac{1}{y} \cdot y\right) = \ln 1 = 0$$

e assim $$\ln \frac{1}{y} = -\ln y$$

Usando a Propriedade 1 novamente, temos

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln \frac{1}{y} = \ln x - \ln y$$

A demonstração da Propriedade 3 será deixada como exercício.

Para traçarmos o gráfico de $y = \ln x$, primeiro determinamos seus limites:

$\boxed{4}$ (a) $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$ (b) $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

DEMONSTRAÇÃO

(a) Usando a Propriedade 3 com $x = 2$ e $r = n$ (onde n é um inteiro positivo arbitrário), temos $\ln(2^n) = n \ln 2$. Agora $\ln 2 > 0$, portanto isso mostra que $\ln(2^n) \to \infty$ quando $n \to \infty$. Mas $\ln x$ é uma função crescente, já que sua derivada $1/x > 0$. Portanto $\ln x \to \infty$ quando $x \to \infty$.

(b) Se tomarmos $t = 1/x$, então $t \to \infty$ quando $x \to 0^+$. Logo, usando (a), temos

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{t \to \infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \to \infty} (-\ln t) = -\infty$$

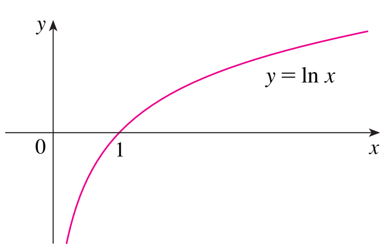


FIGURA 4

Se $y = \ln x$, $x > 0$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

o que mostra que $\ln x$ é crescente e côncava para baixo em $(0, \infty)$. Juntando esta informação com $\boxed{4}$, traçamos o gráfico de $y = \ln x$ na Figura 4.

Como $\ln 1 = 0$ e $\ln x$ é uma função contínua crescente que assume valores arbitrariamente grandes, o Teorema do Valor Intermediário mostra que existe um número no qual $\ln x$ assume o valor 1. (Veja a Figura 5.) Esse número importante é denotado por e.

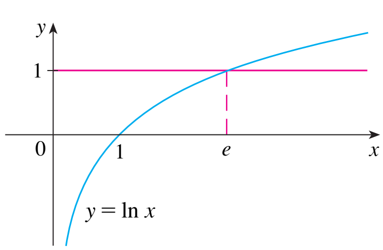


FIGURA 5

$\boxed{5}$ **Definição** e é o número tal que $\ln e = 1$.

Mostraremos (no Teorema 19) que esta definição é consistente com nossa definição prévia de e.

A Função Exponencial Natural

Como ln é uma função crescente, ela é injetora e, portanto, tem uma função inversa, que denotaremos por exp. Assim, de acordo com nossa definição de função inversa,

6 $$\exp(x) = y \iff \ln y = x$$

$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

e as equações de cancelamento são

7 $$\exp(\ln x) = x \quad \text{e} \quad \ln(\exp x) = x$$

$f^{-1}(f(x)) = x$
$f(f^{-1}(x)) = x$

Em particular, temos

$$\exp(0) = 1 \quad \text{já que} \quad \ln 1 = 0$$

$$\exp(1) = e \quad \text{já que} \quad \ln e = 1$$

O gráfico de $y = \exp x$ é obtido refletindo o gráfico de $y = \ln x$ em torno da reta $y = x$. (Veja a Figura 6.) O domínio da exp é a imagem de ln, ou seja, $(-\infty, \infty)$; a imagem de exp é o domínio de ln, ou seja, $(0, \infty)$.

Se r for qualquer número racional, então a terceira propriedade dos logaritmos dá

$$\ln(e^r) = r \ln e = r.$$

Portanto, por $\boxed{6}$,
$$\exp(r) = e^r$$

Logo, $\exp(x) = e^x$ sempre que x for um número racional. Isso nos leva a definir e^x, mesmo para valores irracionais de x, pela equação

$$e^x = \exp(x)$$

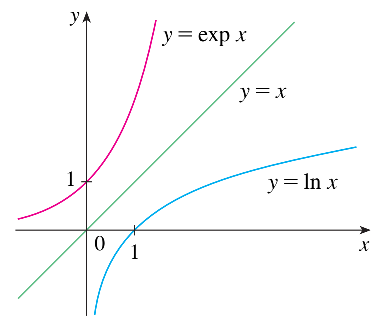


FIGURA 6

Em outras palavras, pelas razões apresentadas, definimos e^x como a função inversa de $\ln x$. Nesta notação, $\boxed{6}$ se torna

8 $$e^x = y \iff \ln y = x$$

e as equações de cancelamento $\boxed{7}$ são

9 $$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$

10 $$\ln(e^x) = x \qquad \text{para todo } x$$

A função exponencial natural $f(x) = e^x$ é uma das mais frequentes funções no cálculo e em suas aplicações, então é importante estar familiarizado com seu gráfico (Figura 7) e suas propriedades (que decorrem do fato de que ela é a inversa da função logarítmica natural).

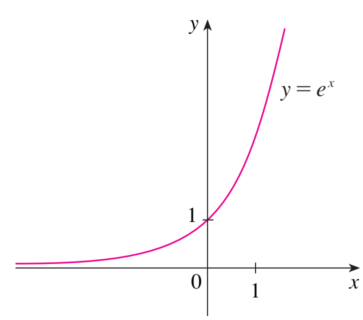


FIGURA 7
A função exponencial natural

Propriedades da Função Exponencial A função exponencial $f(x) = e^x$ é uma função contínua crescente com domínio $\mathbb{R}$ e imagem $(0, \infty)$. Assim, $e^x > 0$ para todo x. Temos também

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

Logo, o eixo x é uma assíntota horizontal de $f(x) = e^x$.

Verificamos agora que f tem as outras propriedades esperadas de uma função exponencial.

$\boxed{11}$ **Propriedades dos Expoentes** Se x e y forem números naturais e r for um racional, então

1. $e^{x+y} = e^x e^y$ **2.** $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ **3.** $(e^x)^r = e^{rx}$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 1 Usando a primeira propriedade dos logaritmos e a Equação 10, temos

$$\ln(e^x e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y = \ln(e^{x+y})$$

Como ln é uma função injetora, segue que $e^x e^y = e^{x+y}$.

As Propriedades 2 e 3 são demonstradas de modo análogo (veja os Exercícios 6 e 7). Como veremos em breve, a Propriedade 3 na realidade vale quando r é qualquer número real.

Demonstraremos agora a fórmula de derivação para e^x.

$\boxed{12}$ $$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$$

DEMONSTRAÇÃO A função $y = e^x$ é derivável porque ela é a inversa da função $y = \ln x$, que sabemos ser derivável, com derivada não nula. Para encontrarmos sua derivada, usamos o método da função inversa. Seja $y = e^x$. Então, $\ln y = x$ e, derivando essa última equação implicitamente com relação a x, obtemos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x$$

Funções Exponenciais Gerais

Se $a > 0$ e r for qualquer número racional, então, por $\boxed{9}$ e $\boxed{11}$,

$$a^r = (e^{\ln a})^r = e^{r \ln a}$$

Portanto, mesmo para um número irracional x, *definimos*

$\boxed{13}$ $$\boxed{a^x = e^{x \ln a}}$$

Assim, por exemplo,

$$2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln 2} \approx e^{1,20} \approx 3,32$$

A função $f(x) = a^x$ é chamada **função exponencial com base *a***. Observe que a^x é positivo para todo x porque e^x é positivo para todo x.

A Definição 13 nos permite estender uma das propriedades de logaritmos. Já sabemos que $\ln(a^r) = r \ln a$ a quando r é racional. Mas se agora permitimos que seja *qualquer* número real, temos, pela Definição 13,

$$\ln a^r = \ln(e^{r \ln a}) = r \ln a$$

Logo,

$\boxed{14}$ $$\ln a^r = r \ln a \qquad \text{para todo número real } r$$

As propriedades gerais dos expoentes seguem da Definição 13 com as propriedades dos expoentes para e^x.

15 Propriedades dos Expoentes Se x e y forem números reais e $a, b > 0$, então

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = a^x/a^y$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

DEMONSTRAÇÃO

1. Usando a Definição 13 e as propriedades dos expoentes para e^x, temos

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a} \\ &= e^{x\ln a} e^{y\ln a} = a^x a^y \end{aligned}$$

3. Usando a Equação 14, obtemos

$$(a^x)^y = e^{y\ln(a^x)} = e^{yx\ln a} = e^{xy\ln a} = a^{xy}$$

As demonstrações restantes são deixadas como exercícios.

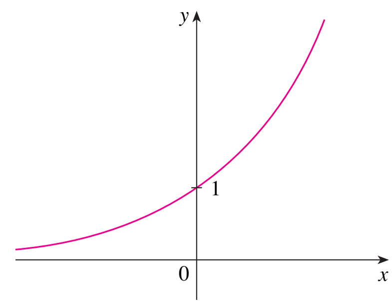
A fórmula de derivação para as funções exponenciais também é uma consequência da Definição 13:

16 $$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

DEMONSTRAÇÃO

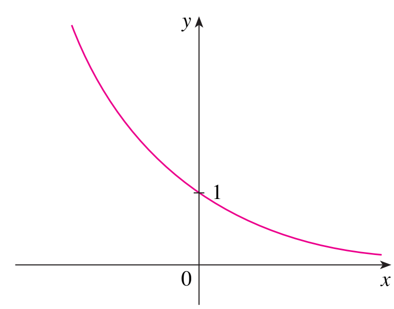
$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x\ln a}) = e^{x\ln a}\frac{d}{dx}(x\ln a) = a^x \ln a$$

Se $a > 1$, então $\ln a > 0$, donde $(d/dx)\, a^x = a^x \ln a > 0$, o que mostra que $y = a^x$ é crescente (veja a Figura 8). Se $0 < a < 1$, então $\ln a < 0$ e, portanto, $y = a^x$ é decrescente (veja a Figura 9).



$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$

FIGURA 8 $y = a^x$, $a > 1$



$\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$

FIGURA 9 $y = a^x$, $0 < a < 1$

Funções Logarítmicas Gerais

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, então $f(x) = a^x$ é uma função injetora. Sua função inversa é chamada **função logarítmica de base *a*** e é denotada por $\log_a$. Logo,

17 $$\boxed{\log_a x = y \iff a^y = x}$$

Em particular, vemos que

$$\log_e x = \ln x$$

As propriedades dos logaritmos são parecidas com as do logaritmo natural e podem ser deduzidas das propriedades dos expoentes (veja o Exercício 10).

Para derivar $y = \log_a x$, escrevemos a equação como $a^y = x$. Da Equação 14, temos $y \ln a = \ln x$. Portanto,

$$\log_a x = y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Como $\ln a$ é constante, podemos derivar da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x\ln a}$$

18
$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

O Número *e* Expresso Como um Limite

Nesta seção, definimos e como o número tal que $\ln e = 1$. O próximo teorema mostra que isto é o mesmo que o número e definido na Seção 3.1 (veja a Equação 3.6.5).

19
$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $f(x) = \ln x$. Então $f'(x) = 1/x$, logo $f'(1) = 1$. Porém, pela definição de derivada,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1 + x) - f(1)}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x) = \lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x}$$

Por causa de $f'(1) = 1$, temos

$$\lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x} = 1$$

Assim, pelo Teorema 2.5.8 e pela continuidade da função exponencial, temos

$$e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

G Exercícios

1. (a) Pela comparação de áreas, mostre que
$$\tfrac{1}{3} < \ln 1{,}5 < \tfrac{5}{12}$$
(b) Use a Regra do Ponto Médio com $n = 10$ para estimar $\ln 1{,}5$.

2. Com referência ao Exemplo 1.
(a) Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 1/t$ que seja paralela à reta secante AD.
(b) Use a parte (a) para mostrar que $\ln 2 > 0{,}66$.

3. (a) Pela comparação de áreas, mostre que
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n - 1}$$

4. (a) Comparando áreas, mostre que $\ln 2 < 1 < \ln 3$.
(b) Deduza que $2 < e < 3$.

5. Demonstre a terceira propriedade dos logaritmos. [*Dica:* Comece mostrando que ambos os lados da equação têm a mesma derivada.]

6. Demonstre a segunda propriedade dos expoentes para e^x [veja $\boxed{11}$].

7. Demonstre a terceira propriedade dos expoentes para e^x [veja $\boxed{11}$].

8. Demonstre a segunda propriedade dos expoentes [veja $\boxed{15}$].

9. Demonstre a quarta propriedade dos expoentes [veja $\boxed{15}$].

10. Deduza as seguintes propriedades dos logaritmos a partir de $\boxed{15}$:
(a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
(b) $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$
(c) $\log_a(x^y) = y \log_a x$

H Números Complexos

Um **número complexo** pode ser representado por uma expressão da forma $a + bi$, onde a e b são números reais e i é um símbolo com a propriedade de que $i^2 = -1$. O número complexo $a + bi$ também pode ser representado pelo par ordenado (a, b) e desenhado como um ponto em um plano (chamado de plano de Argand) como na Figura 1. Assim, o número complexo $i = 0 + 1 \cdot i$ é identificado com o ponto $(0, 1)$.

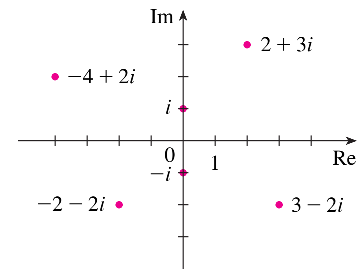


FIGURA 1
Números complexos como pontos no plano Argand

A **parte real** do número complexo $a + bi$ é o número real a e a **parte imaginária** é o número real b. Desse modo, a parte real de $4 - 3i$ é 4 e a parte imaginária é -3. Dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ são **iguais** se $a = c$ e $b = d$, isto é, se suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são iguais. No plano de Argand, o eixo horizontal é denominado eixo real, ao passo que o eixo vertical é chamado de eixo imaginário.

A soma e a diferença de dois números complexos são definidas pela soma ou subtração de suas partes reais e imaginárias:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Por exemplo,

$$(1 - i) + (4 + 7i) = (1 + 4) + (-1 + 7)i = 5 + 6i$$

O produto de dois números complexos é definido de forma que as propriedades comutativa e distributiva usuais sejam válidas:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= a(c + di) + (bi)(c + di)\\ &= ac + adi + bci + bdi^2\end{aligned}$$

Uma vez que $i^2 = -1$, isso se torna

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

EXEMPLO 1

$$\begin{aligned}(-1 + 3i)(2 - 5i) &= (-1)(2 - 5i) + 3i(2 - 5i)\\ &= -2 + 5i + 6i - 15(-1) = 13 + 11i\end{aligned}$$

A divisão entre números complexos se parece muito com a racionalização do denominador de uma expressão racional. Para um número complexo $z = a + bi$, definimos seu **complexo conjugado** como $\bar{z} = a - bi$. Para encontrarmos o quociente de dois números complexos, multiplicamos o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador.

EXEMPLO 2 Expresse o número $\dfrac{-1 + 3i}{2 + 5i}$ na forma $a + bi$.

SOLUÇÃO Multiplicamos o numerador e o denominador pelo complexo conjugado de $2 + 5i$, isto é, $2 - 5i$, e levamos em conta o resultado do Exemplo 1:

$$\frac{-1 + 3i}{2 + 5i} = \frac{-1 + 3i}{2 + 5i} \cdot \frac{2 - 5i}{2 - 5i} = \frac{13 + 11i}{2^2 + 5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i$$

A interpretação geométrica do complexo conjugado encontra-se na Figura 2: $\bar{z}$ é a reflexão de z no eixo real. Uma lista das propriedades do complexo conjugado é apresentada a seguir. As demonstrações seguem da definição e serão pedidas no Exercício 18.

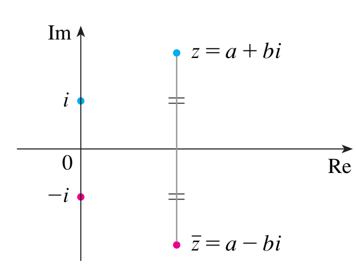


FIGURA 2

Propriedades dos Conjugados

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \qquad \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w} \qquad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$

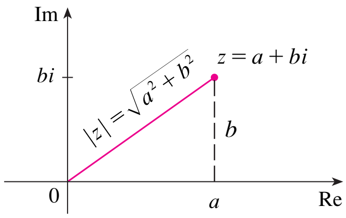


FIGURA 3

O **módulo**, ou **valor absoluto**, $|z|$ de um número complexo $z = a + bi$ é sua distância até a origem. Da Figura 3 vemos que se $z = a + bi$, então

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Observe que

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

e assim

$$\boxed{z\bar{z} = |z|^2}$$

Isso explica por que o processo de divisão no Exemplo 2 funciona em geral:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

Como $i^2 = -1$, podemos pensar em i como raiz quadrada de -1. Mas observe que nós também temos $(-i)^2 = i^2 = -1$ e, portanto, $-i$ também é uma raiz quadrada de -1. Dizemos que i é a **raiz quadrada principal** de -1 e escrevemos $\sqrt{-1} = i$. Em geral, se c é um número positivo, escrevemos

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}\, i$$

Com essa convenção, a dedução usual e a fórmula para as raízes de uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ são válidas mesmo que $b^2 - 4ac < 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EXEMPLO 3 Encontre as raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$.

SOLUÇÃO Usando a fórmula quadrática temos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

Observamos que as soluções da equação no Exemplo 3 são complexas conjugadas uma da outra. Em geral, as soluções de qualquer equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ com coeficientes reais a, b e c são sempre complexas conjugadas. (Se z é real, $\bar{z} = z$, z é sua própria conjugada.)

Vimos que se permitirmos números complexos como soluções, então toda equação quadrática tem solução. Mais geralmente, é verdade que toda equação polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

de grau no mínimo 1 tem solução entre os números complexos. Esse fato é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra e foi demonstrado por Gauss.

Forma Polar

Sabemos que qualquer número complexo $z = a + bi$ pode ser considerado como um ponto (a, b) e que esse ponto pode ser representado em coordenadas polares (r, θ) com $r \geqslant 0$. De fato,

$$a = r\cos\theta \qquad b = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

como na Figura 4. Portanto, temos

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)i$$

Assim, podemos escrever qualquer número complexo z na forma

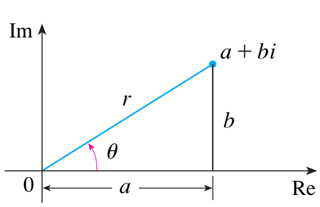


FIGURA 4

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}$$

onde $$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$$

O ângulo θ é chamado **argumento** de z e escrevemos $\theta = \arg(z)$. Observe que $\arg(z)$ não é único; quaisquer dois argumentos de z diferem entre si por um múltiplo inteiro de 2π.

EXEMPLO 4 Escreva os números a seguir na forma polar.

(a) $z = 1 + i$ (b) $w = \sqrt{3} - i$

SOLUÇÃO

(a) Temos $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e $\operatorname{tg}\theta = 1$, então podemos tomar $\theta = \pi/4$. Por conseguinte, a forma polar é

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

(b) Aqui temos $r = |w| = \sqrt{3 + 1} = 2$ e $\operatorname{tg}\theta = -1/\sqrt{3}$. Como w está no quarto quadrante, tomamos $\theta = -\pi/6$ e

$$w = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Os números z e w estão mostrados na Figura 5.

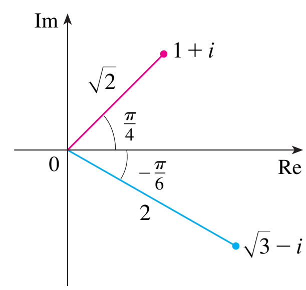


FIGURA 5

A forma polar dos números complexos nos dá uma nova perspectiva da multiplicação e da divisão. Sejam

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$$

dois números complexos escritos na forma polar. Então

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)] \end{aligned}$$

Portanto, usando as fórmulas de adição para seno e cosseno, temos

1 $$\boxed{z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]}$$

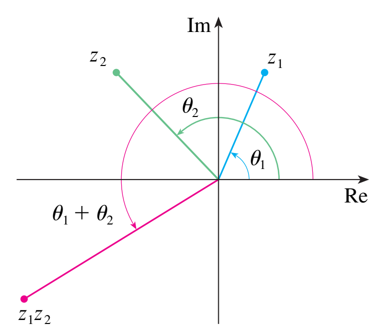


FIGURA 6

Essa fórmula nos diz que *para multiplicar dois números complexos, multiplicamos os módulos e somamos os argumentos* (veja a Figura 6).

Um argumento similar do uso de fórmulas de subtração para seno e cosseno mostra que, *para dividirmos dois números complexos, dividimos os módulos e subtraímos os argumentos*.

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \qquad z_2 \neq 0}$$

Em particular, tomando $z_1 = 1$ e $z_2 = z$ (e, portanto, $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \theta$), temos o seguinte, que está ilustrado na Figura 7.

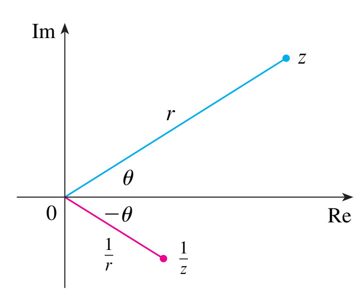


FIGURA 7

$$\boxed{\text{Se} \quad z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \quad \text{então} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)}$$

EXEMPLO 5 Encontre o produto dos números complexos $1 + i$ e $\sqrt{3} - i$ na forma polar.

SOLUÇÃO Do Exemplo 4, temos

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

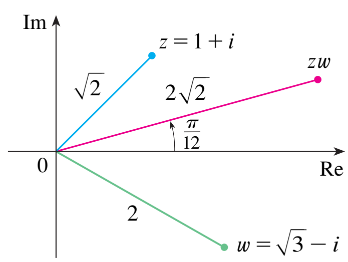


FIGURA 8

e

$$\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Portanto, pela Equação 1,

$$\begin{aligned}(1 + i)(\sqrt{3} - i) &= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

Isso está ilustrado na Figura 8.

O uso repetido da Fórmula 1 mostra como calcular as potências de um número complexo. Se

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

então

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$

e

$$z^3 = zz^2 = r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)$$

Em geral, obtemos o seguinte resultado, cujo nome é uma homenagem ao matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754).

2 **Teorema de De Moivre** Se $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ e n for um inteiro positivo, então

$$z^n = [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Isso nos diz que *para obtermos a n-ésima potência de um número complexo, elevamos à n-ésima potência o módulo e multiplicamos o argumento por n*.

EXEMPLO 6 Encontre $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$.

SOLUÇÃO Como $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i)$, segue do Exemplo 4(a) que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ tem a forma polar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Portanto, pelo Teorema de De Moivre,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{10\pi}{4}\right) \\ &= \frac{2^5}{2^{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}i\end{aligned}$$

O Teorema de De Moivre também pode ser usado para achar as n-ésimas raízes dos números complexos. Uma n-ésima raiz de um número complexo z é um número complexo w tal que

$$w^n = z$$

Escrevendo esses dois números na forma polar com

$$w = s(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi) \qquad \text{e} \qquad z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

e usando o Teorema de De Moivre, obtemos

$$s^n(\cos n\phi + i\,\mathrm{sen}\,n\phi) = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

A igualdade desses dois números complexos mostra que

$$s^n = r \qquad \text{ou} \qquad s = r^{1/n}$$

e

$$\cos n\phi = \cos\theta \qquad \text{e} \qquad \mathrm{sen}\,n\phi = \mathrm{sen}\,\theta$$

Do fato de que seno e cosseno têm período 2π segue que

$$n\phi = \theta + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Logo,

$$w = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Uma vez que essa expressão resulta em valores diferentes de w para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, temos o seguinte.

3 Raízes de um Número Complexo Seja $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e seja n um inteiro positivo. Então z tem as n raízes n-ésimas distintas

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

onde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Observe que cada uma das raízes n-ésimas de z tem módulo $|w_k| = r^{1/n}$. Assim, todas as raízes n-ésimas de z estão sobre a circunferência de raio $r^{1/n}$ no plano complexo. Também, uma vez que o argumento de cada uma das raízes n-ésimas excede o argumento da raiz anterior por $2\pi/n$, vemos que as raízes n-ésimas de z são igualmente espaçadas sobre essa circunferência.

EXEMPLO 7 Encontre as seis raízes sextas de $z = -8$ e represente-as no plano complexo.

SOLUÇÃO Na forma trigonométrica, $z = 8(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi)$. Aplicando a Equação 3 com $n = 6$, obtemos

$$w_k = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$$

Obtemos as seis raízes sextas de -8 fazendo $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ nesta fórmula:

$$w_0 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_1 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\,i$$

$$w_2 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_3 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

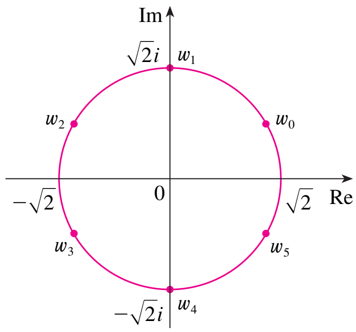


FIGURA 9
As seis raízes sextas de $z = -8$

$$w_4 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}\, i$$

$$w_5 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right)$$

Todos esses pontos estão sobre a circunferência de raio $\sqrt{2}$, como mostrado na Figura 9.

Exponenciais Complexas

Precisamos também dar um significado para a expressão e^z quando $z = x + iy$ for um número complexo. A teoria das séries infinitas desenvolvida no Capítulo 11, no Volume II, pode ser estendida para o caso onde os termos são números complexos. Usando a série de Taylor para e^x (11.10.11) como guia, definimos

4 $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

e resulta que essa função exponencial complexa tem as mesmas propriedades que a função exponencial real. Em particular, é verdade que

5 $$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

Se fizermos $z = iy$, onde y é um número real, na Equação 4, e usarmos o fato de que

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \ldots$$

obtemos

$$\begin{aligned}
e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots \\
&= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \cos y + i \operatorname{sen} y
\end{aligned}$$

Usamos aqui as séries de Taylor para $\cos y$ e $\operatorname{sen} y$ (Equações 11.10.16 e 11.10.15). O resultado é a famosa fórmula denominada **fórmula de Euler**:

6 $$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y}$$

Combinando a fórmula de Euler com a Equação 5, obtemos

7 $$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Poderíamos ter escrito o resultado do Exemplo 8(a) como

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Essa equação relaciona os números mais famosos de toda a matemática: 0, 1, e, i e π.

EXEMPLO 8 Calcule: (a) $e^{i\pi}$ (b) $e^{-1+i\pi/2}$

SOLUÇÃO

(a) Da Equação de Euler [6], temos

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1 + i(0) = -1$$

(b) Usando a Equação 7, obtemos

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}[0 + i(1)] = \frac{i}{e}$$

Finalmente, observamos que a equação de Euler nos fornece um meio mais fácil de demonstrar o Teorema de De Moivre:

$$[r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)$$

H Exercícios

1–14 Calcule a expressão e escreva sua resposta na forma $a + bi$.

1. $(5 - 6i) + (3 + 2i)$

2. $(4 - \frac{1}{2}i) - (9 + \frac{5}{2}i)$

3. $(2 + 5i)(4 - i)$

4. $(1 - 2i)(8 - 3i)$

5. $\overline{12 + 7i}$

6. $\overline{2i(\frac{1}{2} - i)}$

7. $\dfrac{1 + 4i}{3 + 2i}$

8. $\dfrac{3 + 2i}{1 - 4i}$

9. $\dfrac{1}{1 + i}$

10. $\dfrac{3}{4 - 3i}$

11. i^3

12. i^{100}

13. $\sqrt{-25}$

14. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

15–17 Determine o complexo conjugado e o módulo do número dado.

15. $12 - 5i$

16. $-1 + 2\sqrt{2}\,i$

17. $-4i$

18. Demonstre as seguintes propriedades dos números complexos:
(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
(c) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, onde n é um inteiro positivo
[*Dica:* Escreva $z = a + bi$, $w = c + di$.]

19–24 Determine todas as soluções da equação.

19. $4x^2 + 9 = 0$

20. $x^4 = 1$

21. $x^2 + 2x + 5 = 0$

22. $2x^2 - 2x + 1 = 0$

23. $z^2 + z + 2 = 0$

24. $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$

25-28 Escreva o número na forma polar com o argumento entre 0 e 2π.

25. $-3 + 3i$

26. $1 - \sqrt{3}\,i$

27. $3 + 4i$

28. $8i$

29–32 Determine a forma polar para zw, z/w e $1/z$ colocando primeiro z e w na forma polar.

29. $z = \sqrt{3} + i, \quad w = 1 + \sqrt{3}\,i$

30. $z = 4\sqrt{3} - 4i, \quad w = 8i$

31. $z = 2\sqrt{3} - 2i, \quad w = -1 + i$

32. $z = 4(\sqrt{3} + i), \quad w = -3 - 3i$

33–36 Determine as potências indicadas usando o Teorema de De Moivre.

33. $(1 + i)^{20}$

34. $(1 - \sqrt{3}\,i)^5$

35. $(2\sqrt{3} + 2i)^5$

36. $(1 - i)^8$

37–40 Determine as raízes indicadas. Represente as raízes no plano complexo.

37. As raízes oitavas de 1.

38. As quintas raízes de 32.

39. As raízes cúbicas de i.

40. As raízes cúbicas de $1 + i$.

41–46 Escreva o número na forma $a + bi$.

41. $e^{i\pi/2}$

42. $e^{2\pi i}$

43. $e^{i\pi/3}$

44. $e^{-i\pi}$

45. $e^{2+i\pi}$

46. $e^{\pi+i}$

47. Use o Teorema de De Moivre com $n = 3$ para expressar $\cos 3\theta$ e $\mathrm{sen}\,3\theta$ em termos de $\cos\theta$ e $\mathrm{sen}\,\theta$.

48. Use a fórmula de Euler para demonstrar as seguintes fórmulas para $\cos x$ e $\mathrm{sen}\,x$:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \mathrm{sen}\,x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

49. Se $u(x) = f(x) + ig(x)$ for uma função com valores complexos de uma variável real x e as partes real e imaginária $f(x)$ e $g(x)$ forem funções deriváveis de x, então a derivada de u está definida como $u'(x) = f'(x) + ig'(x)$. Associe isso à Equação 7 para demonstrar que $F(x) = e^{rx}$, então $F'(x) = re^{rx}$ quando $r = a + bi$ for um número complexo.

50. (a) Se u for uma função a valores complexos de uma variável real, sua integral indefinida $\int u(x)\,dx$ é uma primitiva de u. Calcule

$$\int e^{(1+i)x}\,dx$$

(b) Considerando a parte real e a imaginária da integral da parte (a), calcule as integrais reais

$$\int e^x \cos x\,dx \qquad \text{e} \qquad \int e^x\,\mathrm{sen}\,x\,dx$$

(c) Compare com o método usado no Exemplo 4 da Seção 7.1.