NOVE

Técnicas de Integração

$$\int e^x \cos x \, dx$$

$$\int \frac{dt}{t^3 + 3t^2}$$

$$\int \sqrt{\operatorname{tg} x} \, dx$$

O valor exato de uma integral definida pode ser calculado pelo segundo teorema fundamental do Cálculo, contanto que uma antiderivada (ou integral indefinida) do integrando possa ser encontrada. Alguns métodos para avaliar integrais indefinidas já foram dados, e outros serão apresentados neste capítulo.

Na Secção 9.1, discutimos as técnicas de integração amplamente usadas, chamadas de *integração por partes*, baseadas na fórmula para a derivada de um produto. As duas secções seguintes dizem respeito às integrais de potências das funções trigonométricas. Integrandos envolvendo potências do seno e do coseno aparecem na Secção 9.2 e aqueles contendo potências das outras quatro funções trigonométricas aparecem na Secção 9.3. Substituições trigonométricas são aplicadas na Secção 9.4 para simplificar integrandos envolvendo $\sqrt{a^2 - x^2}$,

$\sqrt{a^2 + x^2}$ e $\sqrt{x^2 - a^2}$. As frações parciais são usadas para integrar funções racionais nas Secções 9.5 e 9.6. Mais substituições para avaliar integrais indefinidas são dadas na Secção 9.7. Os integrandos naquela secção envolvem potências fracionárias de uma variável ou são potências racionais do seno e do coseno. Na Secção Suplementar 9.8 as funções hiperbólicas inversas são aplicadas na integração para dar novas formas de resultados obtidos anteriormente através de outros métodos.

Às vezes pode ser preferível fazer uso de uma tabela de integrais, em vez de efetuar uma integração complicada. Uma pequena tabela de integrais pode ser encontrada ao final deste volume e a Secção A.1 no apêndice dá instruções de como usá-la. Algumas vezes é necessário empregar técnicas de integração para expressar o integrando na forma em que ele aparece na tabela. Assim sendo, você deverá adquirir a capacidade de reconhecer qual a técnica a ser empregada numa dada integral. Além disso, é importante desenvolver habilidades de cálculo em todos os ramos da Matemática e os exercícios deste capítulo são uma boa oportunidade de treino. Por essas razões aconselhamos o uso das tabelas de integrais somente depois que você dominar a integração.

Na prática, não é sempre possível calcular uma integral definida através do cálculo de uma integral indefinida. Isto é, podemos ter uma integral definida que exista, mas o integrando não tem uma antiderivada que possa ser expressa em termos das funções elementares. Um exemplo de tal integral definida é

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}\, dt$$

Uma calculadora programável ou um computador utilizando os métodos numéricos discutidos na Secção 5.10 podem ser usados para aproximar o valor dessa integral definida. Outro procedimento é dado no Exemplo 2 da Secção 13.3, onde uma série infinita é usada.

As fórmulas de integração indefinida que foram dadas nos capítulos anteriores e que são usadas com maior freqüência são dadas abaixo e foram numeradas para referências posteriores.

1. $\int du = u + C$

2. $\int a\, du = au + C$ onde a é uma constante qualquer

3. $\int [f(u) + g(u)]\, du = \int f(u)\, du + \int g(u)\, du$

4. $\int u^n\, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$

5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln |u| + C$

6. $\int a^u\, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$ onde $a > 0$ e $a \neq 1$

7. $\int e^u\, du = e^u + C$

8. $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$

9. $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$

10. $\int \sec^2 u\, du = \operatorname{tg} u + C$

11. $\int \operatorname{cosec}^2 u\, du = -\operatorname{cotg} u + C$

12. $\int \sec u \operatorname{tg} u \, du = \sec u + C$

13. $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u \, du = -\operatorname{cosec} u + C$

14. $\int \operatorname{tg} u \, du = \ln|\sec u| + C$

15. $\int \operatorname{cotg} u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

16. $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

17. $\int \operatorname{cosec} u \, du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + C$

18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \dfrac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a > 0$

19. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \dfrac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a \neq 0$

20. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a} \sec^{-1} \dfrac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a > 0$

21. $\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$

22. $\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$

23. $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \operatorname{tgh} u + C$

24. $\int \operatorname{cosech}^2 u \, du = -\operatorname{cotgh} u + C$

25. $\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u \, du = -\operatorname{sech} u + C$

26. $\int \operatorname{cosech} u \operatorname{cotgh} u \, du = -\operatorname{cosech} u + C$

9.1 INTEGRAÇÃO POR PARTES

Da fórmula da derivada do produto de duas funções obtemos um método de integração muito útil chamado *integração por partes*. Se f e g forem funções diferenciáveis, então

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)g'(x) = D_x[f(x)g(x)] - g(x)f'(x)$$

Integrando ambos os membros, iremos obter

$$\int f(x)g'(x)\, dx = \int D_x[f(x)g(x)]\, dx - \int g(x)f'(x)\, dx$$

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx} \tag{1}$$

Chamaremos (1) de **fórmula de integração por partes**. Para propósitos de cálculo existe uma maneira mais conveniente de escrever essa fórmula, tomando

$$u = f(x) \quad \text{e} \quad v = g(x)$$

Então

$$du = f'(x)\, dx \quad \text{e} \quad dv = g'(x)\, dx$$

assim sendo, (1) torna-se

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \tag{2}$$

Essa fórmula expressa a integral $\int u\,dv$ em termos de uma outra integral, $\int v\,du$. Escolhendo adequadamente u e dv, pode ser mais fácil calcular a segunda integral do que a primeira. Quando escolhemos as substituições para u e dv, em geral pretendemos que dv seja o fator do integrando mais complicado que se possa integrar diretamente, e que u seja uma função cuja derivada seja uma função mais simples. A seguir estão exemplos e ilustrações mostrando o método.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Queremos calcular

$$\int x \ln x\,dx$$

Para determinar quais as substituições para u e dv, devemos ter em mente que para encontrar v precisamos saber integrar dv. Isso sugere que $dv = x\,dx$ e $u = \ln x$. Então,

$$v = \frac{x^2}{2} + C_1 \qquad \text{e} \qquad du = \frac{dx}{x}$$

Da fórmula (2)

$$\begin{aligned}\int x \ln x\,dx &= \ln x\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) - \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)\frac{dx}{x}\\ &= \frac{x^2}{2}\ln x + C_1 \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx - C_1\int\frac{dx}{x}\\ &= \frac{x^2}{2}\ln x + C_1\ln x - \frac{x^2}{4} - C_1 \ln x + C_2\\ &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C_2\end{aligned}$$ ◀

Na Ilustração 1, observe que a primeira constante de integração C_1 não aparece na resposta final. C_1 foi usada somente para mostrar que todas as escolhas de v da forma $\frac{1}{2}x^2 + C_1$ produzem o mesmo resultado para $\int x \ln x\,dx$. Essa situação vale em geral e provamos isso da seguinte forma: escrevendo $v + C_1$ na fórmula (2), teremos

$$\begin{aligned}\int u\,dv &= u(v + C_1) - \int (v + C_1)\,du\\ &= uv + C_1u - \int v\,du - C_1\int du\\ &= uv + C_1u - \int v\,du - C_1u\\ &= uv - \int v\,du\end{aligned}$$

Assim sendo, é desnecessário escrever C_1 quando calcularmos v a partir de dv.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A resposta na Ilustração 1 pode ser escrita como

$\frac{1}{2}x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + C$

Verificamos esse resultado calculando a derivada de um produto.

$$D_x\left[\frac{1}{2}x^2(\ln x - 1)\right] = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}x + x\ln x - \tfrac{1}{2}x$$
$$= x\ln x$$ ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Para calcular

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx$$

usamos integração por partes com $dv = xe^{x^2}\,dx$ e $u = x^2$. Então

$$v = \tfrac{1}{2}e^{x^2} \quad \text{e} \quad du = 2x\,dx$$

Da fórmula (2)

$$\int x^3e^{x^2}\,dx = x^2(\tfrac{1}{2}e^{x^2}) - \int(\tfrac{1}{2}e^{x^2})2x\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2e^{x^2} - \int xe^{x^2}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2e^{x^2} - \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C$$ ◀

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int x\cos x\,dx$$

Solução Seja $u = x$ e $dv = \cos x\,dx$. Então

$du = dx$ e $v = \text{sen}\,x$

Assim

$$\int x\cos x\,dx = x\,\text{sen}\,x - \int \text{sen}\,x\,dx$$
$$= x\,\text{sen}\,x + \cos x + C$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** No Exemplo 1, se em vez de nossas escolhas de u e dv conforme está acima, tivéssemos tomado

$$u = \cos x \quad \text{e} \quad dv = x\,dx$$

então

$$du = -\text{sen}\,x\,dx \quad \text{e} \quad v = \tfrac{1}{2}x^2$$

Assim

$$\int x\cos x\,dx = \frac{x^2}{2}\cos x + \frac{1}{2}\int x^2\,\text{sen}\,x\,dx$$

A integral do segundo membro é mais complicada do que a que tínhamos inicialmente, indicando assim que as escolhas feitas para u e dv não são boas. ◀

Pode acontecer que determinada integral exija repetidas aplicações da integração por partes. Isso está ilustrado no exemplo abaixo.

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int x^2 e^x \, dx$$

Solução Seja $u = x^2$ e $dv = e^x \, dx$. Então

$$du = 2x \, dx \qquad \text{e} \qquad v = e^x$$

Temos, então,

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$$

Vamos aplicar a integração por partes ao segundo membro. Seja $\bar{u} = x$ e $d\bar{v} = e^x \, dx$. Então,

$$d\bar{u} = dx \qquad \text{e} \qquad \bar{v} = e^x$$

Obtemos assim

$$\begin{aligned}\int x e^x \, dx &= x e^x - \int e^x \, dx \\ &= x e^x - e^x + \bar{C}\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x \, dx &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + \bar{C}) \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C \qquad \text{onde } C = -2\bar{C}\end{aligned}$$

A integração por partes é freqüentemente usada quando o integrando envolve logaritmos, funções trigonométricas inversas e produtos de funções.

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \operatorname{tg}^{-1} x \, dx$$

Solução Seja $u = \operatorname{tg}^{-1} x$ e $dv = dx$. Então

$$du = \frac{dx}{1 + x^2} \qquad \text{e} \qquad v = x$$

Assim

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^{-1} x \, dx &= x \operatorname{tg}^{-1} x - \int \frac{x \, dx}{1 + x^2} \\ &= x \operatorname{tg}^{-1} x - \tfrac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C\end{aligned}$$

Uma situação que ocorre às vezes quando estamos usando integração por partes é mostrada no Exemplo 4.

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

Solução Seja $u = e^x$ e $dv = \operatorname{sen} x \, dx$. Então

$$du = e^x \, dx \quad \text{e} \quad v = -\cos x$$

Logo,

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

A integral do segundo membro é semelhante à primeira integral, exceto que em vez de sen x temos cos x. Aplicamos a integração por partes novamente, sendo $\bar{u} = e^x$ e $d\bar{v} = \cos x \, dx$. Então,

$$d\bar{u} = e^x \, dx \quad \text{e} \quad \bar{v} = \operatorname{sen} x$$

Assim,

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \left(e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx\right)$$

Agora temos no segundo membro a mesma integral que no primeiro. Assim, se somarmos $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$ a ambos os membros da igualdade, teremos

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x + 2C$$

Observe que o segundo membro da igualdade acima tem uma constante arbitrária, pois no primeiro membro temos uma integral indefinida. Essa constante arbitrária foi escrita como $2C$; assim, quando dividirmos por 2 os membros da igualdade, a constante arbitrária na resposta será C. Assim, temos

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

Ao aplicarmos a integração por partes em uma dada integral, um determinado par de escolhas para u e dv pode funcionar, enquanto que outro par pode falhar. Vimos isso na Ilustração 4 e um outro caso ocorre na Ilustração 5.

► **ILUSTRAÇÃO 5** No Exemplo 4, na etapa em que tínhamos

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

se calcularmos a integral à direita tomando $\bar{u} = \cos x$ e $d\bar{v} = e^x \, dx$, temos

$$d\bar{u} = -\operatorname{sen} x \, dx \quad \text{e} \quad \bar{v} = e^x$$

Assim, iremos obter

$$\begin{aligned} \int e^x \operatorname{sen} x \, dx &= -e^x \cos x + \left(e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx\right) \\ &= \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \end{aligned}$$ ◄

Nos Exercícios 53 e 54 será pedido que você derive as seguintes fórmulas, onde a e n são números reais não-nulos.

$$\int e^{au} \operatorname{sen} nu\, du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2}(a \operatorname{sen} nu - n \cos nu) + C \tag{3}$$

$$\int e^{au} \cos nu\, du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2}(a \cos nu + n \operatorname{sen} nu) + C \tag{4}$$

Integrais da forma daquelas em (3) e (4) são freqüentes em problemas envolvendo circuitos elétricos como nos Exercícios 55-57, pertencentes à Secção Suplementar 7.8.

EXERCÍCIOS 9.1

Nos Exercícios de 1 a 24, calcule a integral indefinida.

1. $\int xe^{3x}\, dx$
2. $\int x \cos 2x\, dx$
3. $\int x \sec x \operatorname{tg} x\, dx$
4. $\int x\, 3^x\, dx$
5. $\int \ln x\, dx$
6. $\int \operatorname{sen}^{-1} w\, dw$
7. $\int (\ln x)^2\, dx$
8. $\int x \sec^2 x\, dx$
9. $\int x \operatorname{tg}^{-1} x\, dx$
10. $\int x^2 \ln x\, dx$
11. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\, dx$
12. $\int x^2 \operatorname{sen} 3x\, dx$
13. $\int \operatorname{sen} x \ln(\cos x)\, dx$
14. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$
15. $\int e^x \cos x\, dx$
16. $\int x^5 e^{x^2}\, dx$
17. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
18. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{e^x}\, dx$
19. $\int x^2 \operatorname{senh} x\, dx$
20. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^x}}\, dx$
21. $\int \frac{\operatorname{cotg}^{-1} \sqrt{z}}{\sqrt{z}}\, dz$
22. $\int \cos^{-1} 2x\, dx$
23. $\int \cos \sqrt{x}\, dx$
24. $\int \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{x}\, dx$

Nos Exercícios de 25 a 34, calcule a integral definida.

25. $\int_0^2 x^2 3^x\, dx$
26. $\int_{-1}^2 \ln(x + 2)\, dx$
27. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen} 3x \cos x\, dx$
28. $\int_0^{\pi^2/2} \cos \sqrt{2x}\, dx$
29. $\int_0^2 xe^{2x}\, dx$
30. $\int_{-\pi}^{\pi} z^2 \cos 2z\, dz$
31. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \operatorname{sen} 4x\, dx$
32. $\int_0^1 x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$
33. $\int_2^4 \sec^{-1} \sqrt{t}\, dt$
34. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} x \operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x\, dx$
35. Ache a área da região limitada pela curva $y = \ln x$, pelo eixo x e pela reta $x = e^2$.
36. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 35 em torno do eixo x.
37. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 35 em torno do eixo y.
38. Ache a área da região limitada pela curva $y = x \operatorname{cosec}^2 x$, pelo eixo x e pelas retas $x = \frac{1}{6}\pi$ e $x = \frac{1}{4}\pi$.
39. Ache a área da região limitada pela curva $y = 2xe^{-x/2}$, pelo eixo x e pela reta $x = 4$.
40. Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x da região do Exercício 39.
41. A densidade linear de uma barra num ponto a x m de um extremo é $2e^{-x}$ kg/m. Se a barra tiver 6 m de comprimento, ache a massa e o centro de massa da barra.
42. Ache o centróide da região limitada pela curva $y = e^x$, pelos eixos coordenados e pela reta $x = 3$.
43. Ache o centróide da região no primeiro quadrante, limitada pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ e pelo eixo y.
44. A região no primeiro quadrante, limitada pela curva $y = \cos x$ e pelas retas $y = 1$ e $x = \frac{\pi}{2}$, gira em torno da da reta $x = \frac{\pi}{2}$. Ache o volume do sólido gerado.
45. Um tanque cheio de água tem a forma de um sólido de revolução formado quando a região limitada pela curva $y = e^{-x}$, pelos eixos coordenados e pela reta $x = 4$ gira em torno do eixo x. Ache o trabalho realizado ao bombear toda a água para a borda do tanque. A distância é medida em metros. Tome o eixo x vertical e orientado para baixo.
46. Uma partícula move-se ao longo de uma reta sendo a distância da partícula a partir da origem em t s igual a s m. Se v m/s for a velocidade em t s, $s = 0$ quando $t = 0$, e $v \cdot s = t \operatorname{sen} t$, ache s em termos de t e também s quando $t = \frac{\pi}{2}$.
47. A função custo marginal é C' e $C'(x) = \ln x$, onde $x > 1$. Ache a função custo total se $C(x)$ for o custo total da produção de x unidades e $C(1) = 5$.
48. Um fabricante descobriu que se $100x$ unidades de uma mercadoria forem produzidas por semana, o custo marginal será determinado por $x2^{x/2}$, e o rendimento marginal será determinado por $8 \cdot 2^{-x/2}$, onde o custo de produção e o rendimento são em milhares. Se os custos fixados semanalmen-

te chegam a \$ 2.000, ache o lucro semanal máximo que poderá ser obtido.

49. (a) Deduza a seguinte fórmula, onde r é um número real qualquer.

$$\int x^r \ln x\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{r+1}}{r+1}\ln x - \dfrac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + C & \text{se } r \neq -1 \\ \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C & \text{se } r = -1 \end{cases}$$

(b) Use a fórmula da parte (a) para calcular $\int x^3 \ln x\, dx$.

50. (a) Deduza a seguinte fórmula, onde r e q são números reais quaisquer:

$$\int x^r(\ln x)^q\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{r+1}(\ln x)^q}{r+1} - \dfrac{q}{r+1}\displaystyle\int x^r(\ln x)^{q-1}\, dx & \text{se } r \neq -1 \\ \dfrac{(\ln x)^{q+1}}{q+1} + C & \text{se } r = -1 \text{ e } q \neq -1 \end{cases}$$

(b) Use a fórmula deduzida em (a) para calcular $\int x^4(\ln x)^2\, dx$

51. (a) Mostre que se $m \geqslant 2$ e m for inteiro,

$$\int \sec^m x\, dx = \frac{\sec^{m-2} x \operatorname{tg} x}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \sec^{m-2} x\, dx$$

(b) Use a fórmula da parte (a) para calcular $\int \sec^6 x\, dx$.

52. (a) Deduza a seguinte fórmula, onde r é qualquer número real:

$$\int x^r e^x\, dx = x^r e^x - r\int x^{r-1}e^x\, dx$$

(b) Use a fórmula derivada em (a) para encontrar $\int x^4 e^x\, dx$.

53. Deduza a fórmula (3).
54. Deduza a fórmula (4).

Os Exercícios de 55 a 57 referem-se à Secção Suplementar 7.8.

55. Um circuito elétrico tem uma força eletromotriz de 10 sen 10 t volts em t s e um resistor de 3 ohms, além de um indutor de 1 henry ligado em série. Se a corrente for i ampères em t s e $i = 0$, quando $t = 0$, encontre (a) i quando $t = 0{,}1$ e (b) i quando $t = 3$.
56. Um circuito elétrico tem uma força eletromotriz de 100 sen 200 t volts em t s e um resistor de 10 ohms, além de um indutor de 0,1 henry ligado em série. (a) Se a corrente for i ampères em t s e $i = 0$ quando $t = 0$, expresse i como uma função de t. (b) Dê um valor aproximado de i para valores maiores de t em termos de funções seno e co-seno.
57. Faça o Exercício 56 se o circuito elétrico tiver uma força eletromotriz de 120 sen $120\pi t$ volts e um resistor de 100 ohms; as demais condições são as mesmas.

9.2 INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS DE SENO E CO-SENO

Vamos considerar quatro casos de integrais indefinidas envolvendo potências de seno e co-seno, conforme as potências sejam pares ou ímpares.

Caso 1: $\int \operatorname{sen}^n u\, du$ ou $\int \cos^n u\, du$, onde n é um inteiro ímpar.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1**

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x(\cos x\, dx) \\ &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)(\cos x\, dx) \\ &= \int \cos x\, dx - \int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx \qquad (1)\end{aligned}$$

Para a segunda integral do lado direito de (1) observe que sendo $d(\operatorname{sen} x) = \cos x\, dx$, temos

$$\int \operatorname{sen}^2 x(\cos x\, dx) = \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C_1$$

Como a primeira integral do lado direito de (1) é sen $x + C_2$,

$$\int \cos^3 x\, dx = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$ ◀

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \operatorname{sen}^5 x \, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x \, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int \operatorname{sen} x \, dx - 2 \int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx + \int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= -\cos x + 2 \int \cos^2 x(-\operatorname{sen} x \, dx) - \int \cos^4 x(-\operatorname{sen} x \, dx) \\
&= -\cos x + \tfrac{2}{3} \cos^3 x - \tfrac{1}{5} \cos^5 x + C
\end{aligned}$$

Caso 2: $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \, dx$, onde pelo menos um dos expoentes é ímpar.

A solução desse caso é semelhante à do Caso 1.

► **ILUSTRAÇÃO 2**

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x(\operatorname{sen} x \, dx) \\
&= \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x(\operatorname{sen} x \, dx) \\
&= \int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx - \int \cos^6 x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= -\tfrac{1}{5} \cos^5 x + \tfrac{1}{7} \cos^7 x + C
\end{aligned}$$ ◄

Caso 3: $\int \operatorname{sen}^n u \, du$ e $\int \cos^n u \, du$, onde n é um inteiro par.

O método usado no Caso 1 e no Caso 2 não funciona neste caso. Usaremos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

► **ILUSTRAÇÃO 3**

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\
&= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C
\end{aligned}$$ ◄

Caso 4: $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \, dx$, ambos m e n são pares.

A solução deste caso é semelhante à do Caso 3.

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$$

Solução

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$$
$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x \, dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x \, dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x \, dx$$
$$= \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8}\int (1 - \operatorname{sen}^2 2x) \cos 2x \, dx$$
$$= \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} - \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{1}{8}\int \cos 2x \, dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x \, dx$$
$$= \frac{x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C$$
$$= \frac{x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} + C$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, dx$$

Solução Se usarmos a identidade $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$, teremos

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, dx = \frac{1}{16}\int \operatorname{sen}^4 2x \, dx$$
$$= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{64}\int dx - \frac{1}{32}\int \cos 4x \, dx + \frac{1}{64}\int \cos^2 4x \, dx$$
$$= \frac{x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{1}{64}\int \frac{1 + \cos 8x}{2} dx$$
$$= \frac{x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{x}{128} + \frac{\operatorname{sen} 8x}{1024} + C$$
$$= \frac{3x}{128} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{\operatorname{sen} 8x}{1024} + C$$

EXEMPLO 4 Ache o centróide da região no primeiro quadrante, à esquerda da reta $x = \frac{\pi}{2}$ e limitada pela curva $y = \text{sen}\, x$, pelo eixo x e pela reta $x = \frac{\pi}{2}$.

Solução Vamos usar os símbolos A, M_x, M_y, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ definidos na Secção 6.4. A região e o i-ésimo elemento retangular estão na Figura 1. Primeiro vamos calcular a área da região.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \text{sen}\, \gamma_i\, \Delta_i x \\ &= \int_0^{\pi/2} \text{sen}\, x\, dx \\ &= -\cos x \Big]_0^{\pi/2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Aplicamos a Definição 6.4.2 para calcular M_x e M_y. Para calcular M_y, usaremos integração por partes com $u = x$ e $dv = \text{sen}\, x\, dx$.

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[\text{sen}\, \gamma_i]^2\, \Delta_i x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\, x\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx \\ &= \tfrac{1}{4}\left[x - \tfrac{1}{2}\text{sen}\, 2x\right]_0^{\pi/2} \\ &= \tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{2}\pi] \\ &= \tfrac{1}{8}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\, \text{sen}\, \gamma_i\, \Delta_i x \\ &= \int_0^{\pi/2} x\, \text{sen}\, x\, dx \\ &= -x \cos x \Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx \\ &= -x \cos x + \text{sen}\, x \Big]_0^{\pi/2} \\ &= -\tfrac{1}{2}\pi \cos \tfrac{1}{2}\pi + \text{sen}\, \tfrac{1}{2}\pi \\ &= 1 \end{aligned}$$

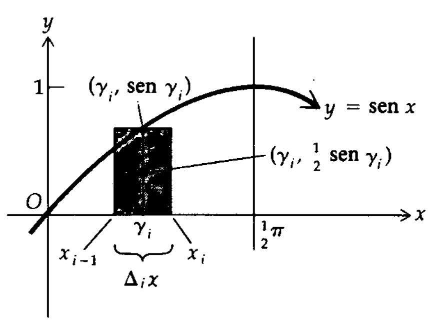


FIGURA 1

Logo,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{1}{8}\pi}{1} = \tfrac{1}{8}\pi$$

Assim, o centróide está no ponto $(1, \frac{1}{8}\pi)$.

O próximo exemplo envolve um outro tipo de integral contendo um produto de seno e co-seno.

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int \text{sen}\, 3x \cos 2x\, dx$$

Solução Vamos usar a seguinte identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen}(m - n)x + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen}(m + n)x$$

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x \, dx &= \int (\tfrac{1}{2} \operatorname{sen} x + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 5x) \, dx \\ &= \tfrac{1}{2} \int \operatorname{sen} x \, dx + \tfrac{1}{2} \int \operatorname{sen} 5x \, dx \\ &= -\tfrac{1}{2} \cos x - \tfrac{1}{10} \cos 5x + C\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 9.2

Nos Exercícios de 1 a 24, calcule a integral indefinida.

1. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x \, dx$
2. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos x \, dx$
3. $\int \cos^3 4x \operatorname{sen} 4x \, dx$
4. $\int \cos^6 \tfrac{1}{2}x \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}x \, dx$
5. $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$
6. $\int \operatorname{sen}^2 3x \, dx$
7. $\int \operatorname{sen}^4 z \, dz$
8. $\int \cos^5 x \, dx$
9. $\int \cos^2 \tfrac{1}{2}x \, dx$
10. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x \, dx$
11. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$
12. $\int \cos^6 x \, dx$
13. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$
14. $\int \operatorname{sen}^2 2t \cos^4 2t \, dt$
15. $\int \operatorname{sen}^2 3t \cos^2 3t \, dt$
16. $\int \sqrt{\cos z} \operatorname{sen}^3 z \, dz$
17. $\int \dfrac{\cos^3 3x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} 3x}} \, dx$
18. $\int \operatorname{sen}^3 \tfrac{1}{2}y \cos^2 \tfrac{1}{2}y \, dy$
19. $\int \cos 4x \cos 3x \, dx$
20. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 4x \, dx$
21. $\int \operatorname{sen} 3y \cos 5y \, dy$
22. $\int \cos t \cos 3t \, dt$
23. $\int (\operatorname{sen} 3t - \operatorname{sen} 2t)^2 \, dt$
24. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x \, dx$

Nos Exercícios de 25 a 32, calcule a integral definida.

25. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx$
26. $\int_0^1 \operatorname{sen}^3 \tfrac{1}{2}\pi t \, dt$
27. $\int_0^1 \operatorname{sen}^4 \tfrac{1}{2}\pi x \, dx$
28. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^3 t \cos^2 t \, dt$
29. $\int_0^1 \operatorname{sen}^2 \pi t \cos^2 \pi t \, dt$
30. $\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} 2x \cos 4x \, dx$
31. $\int_0^{\pi/8} \operatorname{sen} 3x \cos 5x \, dx$
32. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}x \cos^2 \tfrac{1}{2}x \, dx$
33. Calcule $\int 2 \operatorname{sen} x \cos x \, dx$ por três métodos: (a) fazendo a substituição $u = \operatorname{sen} x$; (b) fazendo a substituição $u = \cos x$; (c) usando a identidade de $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$. Explique a aparência diferente das respostas obtidas em (a), (b) e (c).
34. Se n for um inteiro positivo qualquer, prove que

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx \, dx = \tfrac{1}{2}\pi$$

35. Se n for um inteiro positivo ímpar, prove que

$$\int_0^{\pi} \cos^n x \, dx = 0$$

Nos Exercícios de 36 a 38, m e n são inteiros positivos; mostre que a fórmula dada é verdadeira.

36. $\int_{-1}^{1} \cos n\pi x \cos m\pi x \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}$
37. $\int_{-1}^{1} \cos n\pi x \operatorname{sen} m\pi x \, dx = 0$
38. $\int_{-1}^{1} \operatorname{sen} n\pi x \operatorname{sen} m\pi x \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}$
39. Ache a área da região limitada pela curva $y = \operatorname{sen}^2 x$ e pelo eixo x de $x = 0$ a $x = \pi$.
40. Ache o volume do sólido gerado pela rotação de um arco da senóide em torno do eixo x.
41. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 39 em torno do eixo x.
42. A região no primeiro quadrante limitada pela curva $y = \cos x$ e pelas retas $y = 1$ e $x = \frac{\pi}{2}$ gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.
43. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 39 em torno da reta $y = 1$.
44. A região limitada pelo eixo y e pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido de revolução gerado.
45. Ache o centróide da região de $x = 1$ a $x = \frac{\pi}{2}$, limitada pela curva $y = \cos x$ e pelo eixo x.
46. Ache o centróide da região descrita no Exercício 44.
47. Prove

$$\int \operatorname{sen}^n u \, du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \, du$$

se n for um inteiro positivo maior que 1.

48. Prove

$$\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$$

se n for um inteiro positivo maior que 1.

O Exercício 49 refere-se à Secção Suplementar 6.7.

49. A face de um dique tem a forma de um arco da curva $y = -100 \cos \frac{1}{200}\pi x$, $x \in [-100, 100]$, e a superfície da água chega até a borda do dique. Ache a força decorrente da pressão da água na face do dique se a distância for medida em metros.

9.3 INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS DA TANGENTE, CO-TANGENTE, SECANTE E CO-SECANTE

Vamos lembrar as seguintes fórmulas envolvendo tangente, co-tangente, secante e co-secante:

$$\int \operatorname{tg} u\, du = \ln|\sec u| + C \qquad \int \operatorname{cotg} u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C \qquad \int \operatorname{cosec} u\, du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + C$$

$$\int \sec^2 u\, du = \operatorname{tg} u + C \qquad \int \operatorname{cosec}^2 u\, du = -\operatorname{cotg} u + C$$

$$\int \sec u \operatorname{tg} u\, du = \sec u + C \qquad \int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\, du = -\operatorname{cosec} u + C$$

Com essas fórmulas e as identidades trigonométricas

$$1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$$

podemos calcular integrais da forma

$$\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u\, du \quad \text{e} \quad \int \operatorname{cotg}^m u \operatorname{cosec}^n u\, du \tag{1}$$

onde m e n são inteiros não-negativos.

► **ILUSTRAÇÃO 1**

(a)
$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^2 x\, dx &= \int (\sec^2 x - 1)\, dx\\ &= \int \sec^2 x\, dx - \int dx\\ &= \operatorname{tg} x - x + C\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx &= \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\, dx\\ &= \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx - \int dx\\ &= -\operatorname{cotg} x - x + C\end{aligned}$$
◄

Vamos distinguir agora os vários casos das integrais da forma (1).

Caso 1: $\int \operatorname{tg}^n u\, du$ ou $\int \operatorname{cotg}^n u\, du$ onde n é um inteiro positivo.
Escrevemos

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^n u &= \operatorname{tg}^{n-2} u \operatorname{tg}^2 u\\ &= \operatorname{tg}^{n-2} u(\sec^2 u - 1)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\operatorname{cotg}^n u &= \operatorname{cotg}^{n-2} u \operatorname{cotg}^2 u\\ &= \operatorname{cotg}^{n-2} u(\operatorname{cosec}^2 u - 1)\end{aligned}$$

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$$

Solução

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \int \operatorname{tg} x(\sec^2 x - 1)\, dx$$
$$= \int \operatorname{tg} x \sec^2 x\, dx - \int \operatorname{tg} x\, dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \operatorname{cotg}^4 3x\, dx$$

Solução

$$\int \operatorname{cotg}^4 3x\, dx = \int \operatorname{cotg}^2 3x(\operatorname{cosec}^2 3x - 1)\, dx$$
$$= \int \operatorname{cotg}^2 3x \operatorname{cosec}^2 3x\, dx - \int \operatorname{cotg}^2 3x\, dx$$
$$= \tfrac{1}{9}(-\operatorname{cotg}^3 3x) - \int (\operatorname{cosec}^2 3x - 1)\, dx$$
$$= -\tfrac{1}{9}\operatorname{cotg}^3 3x + \tfrac{1}{3}\operatorname{cotg} 3x + x + C$$

Caso 2: $\int \sec^n u\, du$ ou $\int \operatorname{cosec}^n u\, du$, onde n é um inteiro par positivo.

Escrevemos

$$\sec^n u = \sec^{n-2} u \sec^2 u \qquad \operatorname{cosec}^n u = \operatorname{cosec}^{n-2} u \operatorname{cosec}^2 u$$
$$= (\operatorname{tg}^2 u + 1)^{(n-2)/2} \sec^2 u \qquad = (\operatorname{cotg}^2 u + 1)^{(n-2)/2} \operatorname{cosec}^2 u$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \operatorname{cosec}^6 x\, dx$$

Solução

$$\int \operatorname{cosec}^6 x\, dx = \int (\operatorname{cotg}^2 x + 1)^2 \operatorname{cosec}^2 x\, dx$$
$$= \int \operatorname{cotg}^4 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx + 2\int \operatorname{cotg}^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx$$
$$= -\tfrac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x - \tfrac{2}{3}\operatorname{cotg}^3 x - \operatorname{cotg} x + C$$

Caso 3: $\int \sec^n u\, du$ ou $\int \operatorname{cosec}^n u\, du$, onde n é um inteiro ímpar positivo.

Para integrar portências ímpares de secante e co-secante, usaremos integração por partes. O procedimento está ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int \sec^3 x\, dx$$

Solução Seja $u = \sec x$ e $dv = \sec^2 x\, dx$. Então

$$du = \sec x \operatorname{tg} x\, dx \quad \text{e} \quad v = \operatorname{tg} x$$

Logo,

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x\, dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

Somando $\int \sec^3 x\, dx$ a ambos os membros, obtemos

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + 2C$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \tfrac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \tfrac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

Caso 4: $\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u\, du$ ou $\int \operatorname{cotg}^m u \operatorname{cosec}^n u\, du$, onde n é um inteiro par positivo.

Esse caso está ilustrado pelo exemplo a seguir.

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x\, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x\, dx &= \int \operatorname{tg}^5 x(\operatorname{tg}^2 x + 1)\sec^2 x\, dx\\ &= \int \operatorname{tg}^7 x \sec^2 x\, dx + \int \operatorname{tg}^5 x \sec^2 x\, dx\\ &= \tfrac{1}{8}\operatorname{tg}^8 x + \tfrac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x + C\end{aligned}$$

Caso 5: $\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u\, du$ ou $\int \operatorname{cotg}^m u \operatorname{cosec}^n u\, du$, onde m é um inteiro ímpar positivo.

O próximo exemplo ilustra esse caso.

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int \operatorname{tg}^5 x \sec^7 x\, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^5 x \sec^7 x\, dx &= \int \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x \sec x \operatorname{tg} x\, dx\\ &= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^6 x(\sec x \operatorname{tg} x\, dx)\\ &= \int \sec^{10} x(\sec x \operatorname{tg} x\, dx) - 2\int \sec^8 x(\sec x \operatorname{tg} x\, dx) + \int \sec^6 x(\sec x \operatorname{tg} x\, dx)\\ &= \tfrac{1}{11}\sec^{11} x - \tfrac{2}{9}\sec^9 x + \tfrac{1}{7}\sec^7 x + C\end{aligned}$$

Caso 6: $\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u\, du$ ou $\int \operatorname{cotg}^m u \operatorname{cosec}^n u\, du$, onde m é um inteiro par positivo e n é um inteiro ímpar positivo.

O integrando pode ser expresso em termos de potências ímpares de secante ou co-secante. Por exemplo,

$$\int \operatorname{tg}^2 x \sec^3 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x\, dx$$
$$= \int \sec^5 x\, dx - \int \sec^3 x\, dx$$

Para calcular cada uma dessas integrais usamos integração por partes, conforme foi indicado no Caso 3.

EXERCÍCIOS 9.3

Nos Exercícios de 1 a 30, calcule a integral indefinida.

1. $\int \operatorname{tg}^2 5x\, dx$
2. $\int \operatorname{cotg}^2 4t\, dt$
3. $\int x \operatorname{cotg}^2 2x^2\, dx$
4. $\int e^x \operatorname{tg}^2(e^x)\, dx$
5. $\int \operatorname{cotg}^3 t\, dt$
6. $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx$
7. $\int \operatorname{tg}^6 3x\, dx$
8. $\int \operatorname{cotg}^5 2x\, dx$
9. $\int \sec^4 x\, dx$
10. $\int \operatorname{cosec}^4 x\, dx$
11. $\int \operatorname{cosec}^3 x\, dx$
12. $\int \sec^5 x\, dx$
13. $\int e^x \operatorname{tg}^4(e^x)\, dx$
14. $\int \dfrac{\sec^4(\ln x)}{x}\, dx$
15. $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x\, dx$
16. $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^3 x\, dx$
17. $\int \operatorname{cotg}^2 3x \operatorname{cosec}^4 3x\, dx$
18. $\int (\sec 5x + \operatorname{cosec} 5x)^2\, dx$
19. $\int (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} 2x)^2\, dx$
20. $\int \dfrac{dx}{1 + \cos x}$
21. $\int \dfrac{2 \operatorname{sen} w - 1}{\cos^2 w}\, dw$
22. $\int \dfrac{\operatorname{tg}^3 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$
23. $\int \operatorname{tg}^5 3x\, dx$
24. $\int \dfrac{\operatorname{tg}^4 y}{\sec^5 y}\, dy$
25. $\int \dfrac{du}{1 + \sec \frac{1}{2}u}$
26. $\int \dfrac{\operatorname{cosec}^4 x}{\operatorname{cotg}^2 x}\, dx$
27. $\int \dfrac{\sec^3 x}{\operatorname{tg}^4 x}\, dx$
28. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^2 \pi x}{\cos^6 \pi x}\, dx$
29. $\int \dfrac{\operatorname{tg}^3(\ln x) \sec^6(\ln x)}{x}\, dx$
30. $\int \dfrac{\sec^4 w}{\sqrt{\operatorname{tg} w}}\, dw$

Nos Exercícios de 31 a 36, calcule a integral definida.

31. $\int_{\pi/16}^{\pi/12} \operatorname{tg}^3 4x\, dx$
32. $\int_{\pi/8}^{\pi/6} 3 \sec^4 2t\, dt$
33. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^6 x\, dx$
34. $\int_0^{\pi/3} \dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{\sec x}\, dx$
35. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \dfrac{\cos^4 t}{\operatorname{sen}^6 t}\, dt$
36. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{cotg}^3 w\, dw$
37. Ache a área da região limitada pela curva $y = \operatorname{tg}^2 x$, pelo eixo x e pela reta $x = \frac{1}{4}\pi$.
38. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = 3 \operatorname{cosec}^3 x$, pelo eixo x e pelas retas $x = \frac{1}{6}\pi$ e $x = \frac{1}{2}\pi$ em torno do eixo x.
39. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = \sec^2 x$, pelos eixos e pela reta $x = \frac{1}{4}\pi$ em torno do eixo x.
40. Prove: $\int \operatorname{cotg} x \operatorname{cosec}^n x\, dx = -\dfrac{\operatorname{cosec}^n x}{n} + C$, se $n \neq 0$.
41. Prove: $\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \dfrac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx$, se n for um inteiro positivo maior do que 1.
42. Deduza uma fórmula similar àquela do Exercício 40 para $\int \operatorname{tg} x \sec^n x\, dx$, se $n \neq 0$.
43. Deduza uma fórmula similar àquela do Exercício 41 para $\int \operatorname{cotg}^n x\, dx$, se n for um inteiro positivo maior do que 1.

9.4 INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Se o integrando contiver expressões do tipo $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$, ou $\sqrt{u^2 - a^2}$, onde $a > 0$, em geral é possível efetuar a integração através de uma substituição trigonométrica que levará a uma integral envolvendo funções trigonométricas. Vamos considerar cada forma como um caso separado.

Caso 1: O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, onde $a > 0$.

Vamos introduzir uma nova variável θ tomando $u = a \text{ sen } \theta$, onde

$$0 \leqslant \theta \leqslant \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{se } u \geqslant 0 \quad \text{e} \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqslant \theta < 0 \quad \text{se } u < 0$$

Então $du = a \cos \theta \, d\theta$, e

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \text{sen}^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \text{sen}^2 \theta)} \\ &= a\sqrt{\cos^2 \theta}\end{aligned}$$

Como $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$, $\cos \theta \geqslant 0$. Então $\sqrt{\cos^2 \theta} = \cos \theta$, e

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$$

Como $\text{sen } \theta = u/a$ e $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$,

$$\theta = \text{sen}^{-1} \frac{u}{a}$$

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} \, dx$$

Solução Seja $x = 3 \text{ sen } \theta$, onde $0 < \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$ se $x > 0$ e $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta < 0$ se $x < 0$. Então $dx = 3 \cos \theta \, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{9 - x^2} &= \sqrt{9 - 9 \text{ sen}^2 \theta} \\ &= 3\sqrt{\cos^2 \theta} \\ &= 3 \cos \theta\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} \, dx &= \int \frac{3 \cos \theta}{9 \text{ sen}^2 \theta} (3 \cos \theta \, d\theta) \\ &= \int \text{cotg}^2 \theta \, d\theta \\ &= \int (\text{cosec}^2 \theta - 1) \, d\theta \\ &= -\text{cotg } \theta - \theta + C\end{aligned}$$

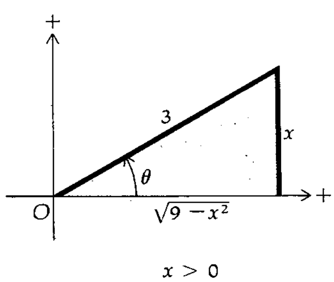


FIGURA 1

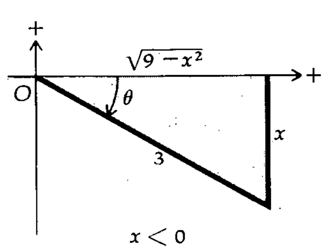


FIGURA 2

Como $\text{sen } \theta = \frac{1}{3}x$ e $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$, $\theta = \text{sen}^{-1} \frac{1}{3}x$. Para encontrar cotg θ, consulte as Figuras 1 (para $x > 0$) e 2 (para $x < 0$). Observe que em ambos os casos $\text{cotg } \theta = \sqrt{9 - x^2}/x$. Logo,

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} \, dx = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - \text{sen}^{-1} \frac{x}{3} + C$$

Caso 2: O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$, onde $a > 0$. Introduzimos uma nova variável θ fazendo $u = a \text{ tg } \theta$, onde

$$0 \leqslant \theta < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{se } u \geqslant 0 \quad \text{e} \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < 0 \quad \text{se } u < 0$$

Então $du = a \sec^2 \theta \, d\theta$, e

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + u^2} &= \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta} \\ &= a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \\ &= a\sqrt{\sec^2 \theta}\end{aligned}$$

Como $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$, $\sec \theta \geqslant 1$. Assim $\sqrt{\sec^2 \theta} = \sec \theta$, e

$$\sqrt{a^2 + u^2} = a \sec \theta$$

Como $\operatorname{tg} \theta = u/a$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$,

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{u}{a}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \sqrt{x^2 + 5}\, dx$$

Solução Substituímos $x = \sqrt{5} \operatorname{tg} \theta$, onde $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x \geqslant 0$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ se $x < 0$. Então $dx = \sqrt{5} \sec^2 \theta \, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 5} &= \sqrt{5 \operatorname{tg}^2 \theta + 5} \\ &= \sqrt{5}\sqrt{\sec^2 \theta} \\ &= \sqrt{5} \sec \theta\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 + 5}\, dx &= \int \sqrt{5} \sec \theta (\sqrt{5} \sec^2 \theta \, d\theta) \\ &= 5 \int \sec^3 \theta \, d\theta\end{aligned}$$

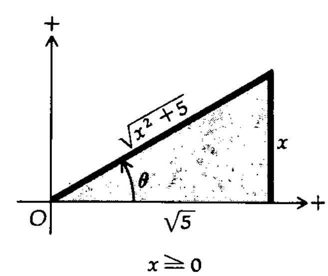


FIGURA 3

Usando o resultado do Exemplo 4 da Secção 9.3, temos

$$\int \sqrt{x^2 + 5}\, dx = \tfrac{5}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \tfrac{5}{2} \ln|\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C$$

Determinamos $\sec \theta$ das Figuras 3 (para $x \geqslant 0$) e 4 (para $x < 0$), onde $\operatorname{tg} \theta = x/\sqrt{5}$. Em ambos os casos vemos que $\sec \theta = \sqrt{x^2 + 5}/\sqrt{5}$. Logo,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 + 5}\, dx &= \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{5}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}} \right| + C \\ &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 5} + \tfrac{5}{2} \ln|\sqrt{x^2 + 5} + x| - \tfrac{5}{2} \ln \sqrt{5} + C \\ &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 5} + \tfrac{5}{2} \ln(\sqrt{x^2 + 5} + x) + C_1\end{aligned}$$

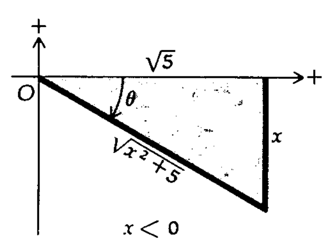


FIGURA 4

Observe que substituímos $-\frac{5}{2} \ln \sqrt{5} + C$ pela constante arbitrária C_1. Além disso, como $\sqrt{x^2 + 5} + x > 0$, retiramos as barras de valor absoluto.

Caso 3: O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{u^2 - a^2}$, onde $a > 0$. Introduzimos uma nova variável fazendo $u = a \sec \theta$, onde

$$0 \leqslant \theta < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{se } u \geqslant a \quad \text{e} \quad \pi \leqslant \theta < \tfrac{3}{2}\pi \quad \text{se } u \leqslant -a$$

Então $du = a \sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{u^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2\theta - a^2}\\ &= \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)}\\ &= a\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta}\end{aligned}$$

Como $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}\pi$ ou $\pi \leqslant \theta < \frac{3}{2}\pi$, $\operatorname{tg}\theta \geqslant 0$. Assim, $\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta} = \operatorname{tg}\theta$, e temos

$$\sqrt{u^2 - a^2} = a \operatorname{tg}\theta$$

Como $\sec\theta = u/a$ e θ está em $[0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$,

$$\theta = \sec^{-1}\frac{u}{a}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 9}}$$

Solução Seja $x = 3\sec\theta$, onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x > 3$ e $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ se $x < -3$. Então $dx = 3\sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 9} &= \sqrt{9\sec^2\theta - 9}\\ &= 3\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta}\\ &= 3\operatorname{tg}\theta\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 9}} &= \int \frac{3\sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta}{27\sec^3\theta \cdot 3\operatorname{tg}\theta}\\ &= \frac{1}{27}\int \cos^2\theta\, d\theta\\ &= \frac{1}{54}\int (1 + \cos 2\theta)\, d\theta\\ &= \frac{1}{54}(\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta) + C\\ &= \frac{1}{54}(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta) + C\end{aligned}$$

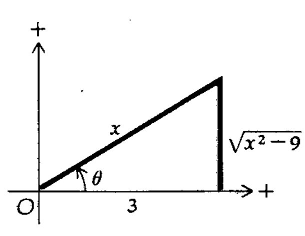


FIGURA 5

Como $\sec\theta = \frac{1}{3}x$ e θ está em $(0, \frac{1}{2}\pi) \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $\theta = \sec^{-1}\frac{1}{3}x$. Quando $x > 3$, $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, e obtemos $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ da Figura 5. Quando $x < -3$, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$, e obtemos $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ da Figura 6. Em ambos os casos $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{x^2 - 9}/x$ e $\cos\theta = 3/x$. Logo

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 9}} &= \frac{1}{54}\left(\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\cdot\frac{3}{x}\right) + C\\ &= \frac{1}{54}\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{18x^2} + C\end{aligned}$$

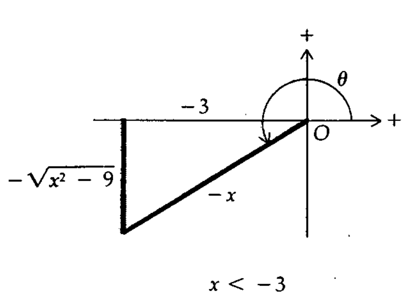


FIGURA 6

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$$

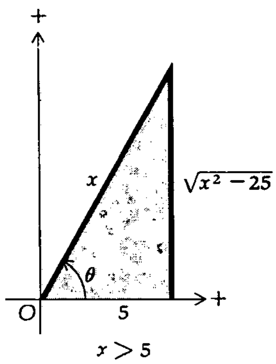


FIGURA 7

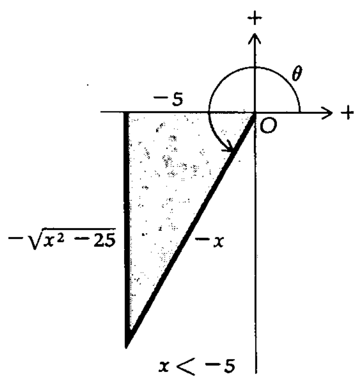


FIGURA 8

Solução Seja $x = 5 \sec \theta$, onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x > 5$ e $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ se $x < -5$. Então $dx = 5 \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 25} &= \sqrt{25 \sec^2 \theta - 25}\\ &= 5\sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta}\\ &= 5 \operatorname{tg} \theta\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} &= \int \frac{5 \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta}{5 \operatorname{tg} \theta}\\ &= \int \sec \theta \, d\theta\\ &= \ln|\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C\end{aligned}$$

Para encontrar $\operatorname{tg} \theta$, consulte a Figura 7 (para $x > 5$) e a Figura 8 (para $x < -5$). Em ambos os casos, $\sec \theta = \frac{1}{5}x$ e $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{5}\sqrt{x^2 - 25}$. Temos, então,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} &= \ln\left|\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{5}\right| + C\\ &= \ln|x + \sqrt{x^2 - 25}| - \ln 5 + C\\ &= \ln|x + \sqrt{x^2 - 25}| + C_1\end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int_1^2 \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}}$$

Solução Para calcular a integral indefinida $\int dx/(6 - x^2)^{3/2}$ fazemos a substituição $x = \sqrt{6} \operatorname{sen} \theta$. Nesse caso, podemos restringir θ ao intervalo $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, pois estamos calculando uma integral definida para a qual $x > 0$, uma vez que x está em $[1, 2]$. Assim, $x = \sqrt{6} \operatorname{sen} \theta$, $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, e $dx = \sqrt{6} \cos \theta \, d\theta$. Além disso,

$$\begin{aligned}(6 - x^2)^{3/2} &= (6 - 6 \operatorname{sen}^2 \theta)^{3/2}\\ &= 6\sqrt{6}(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)^{3/2}\\ &= 6\sqrt{6}(\cos^2 \theta)^{3/2}\\ &= 6\sqrt{6} \cos^3 \theta\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}} &= \int \frac{\sqrt{6} \cos \theta \, d\theta}{6\sqrt{6} \cos^3 \theta}\\ &= \frac{1}{6}\int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}\\ &= \frac{1}{6}\int \sec^2 \theta \, d\theta\\ &= \tfrac{1}{6} \operatorname{tg} \theta + C\end{aligned}$$

Encontramos tg θ da Figura 9, na qual sen $\theta = x/\sqrt{6}$ e $0 < \theta \frac{1}{2}\pi$. Assim, tg $\theta = x/\sqrt{6 - x^2}$, e portanto

$$\int \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{6\sqrt{6 - x^2}} + C$$

Logo,

$$\int_1^2 \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{6\sqrt{6 - x^2}}\Big]_1^2$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{5}}{30}$$

$$= \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{5}}{30}$$

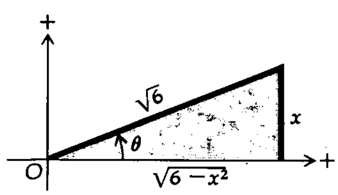


FIGURA 9

EXERCÍCIOS 9.4

Nos Exercícios de 1 a 24, calcule a integral indefinida.

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$
2. $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2}\, dx$
3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$
4. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 6}}$
5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}}$
6. $\int \sqrt{1 - u^2}\, du$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$
8. $\int \frac{dw}{w^2\sqrt{w^2 - 7}}$
9. $\int \frac{x^2\, dx}{(x^2 + 4)^2}$
10. $\int \frac{dx}{(4 + x^2)^{3/2}}$
11. $\int \frac{dx}{(4x^2 - 9)^{3/2}}$
12. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{16 + x^2}}$
13. $\int \frac{2\, dt}{t\sqrt{t^4 + 25}}$
14. $\int \frac{x^3\, dx}{(25 - x^2)^2}$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x + x^2}}$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$
17. $\int \frac{dx}{(5 - 4x - x^2)^{3/2}}$
18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 - 4}}$
19. $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{(4 - \text{tg}^2\, x)^{3/2}}$
20. $\int \frac{e^{-x}\, dx}{(9e^{-2x} + 1)^{3/2}}$
21. $\int \frac{\ln^3 w\, dw}{w\sqrt{\ln^2 w - 4}}$
22. $\int \frac{dz}{(z^2 - 6z + 18)^{3/2}}$
23. $\int \frac{e^t\, dt}{(e^{2t} + 8e^t + 7)^{3/2}}$
24. $\int \frac{\sqrt{16 - e^{2x}}}{e^x}\, dx$

Nos Exercícios de 25 a 32, calcule a integral definida.

25. $\int_0^2 \frac{x^3\, dx}{\sqrt{16 - x^2}}$
26. $\int_0^4 \frac{dx}{(16 + x^2)^{3/2}}$
27. $\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 9}}$
28. $\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{4 - x^2}}$
29. $\int_4^6 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4}}$
30. $\int_1^3 \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 + 3}}$
31. $\int_0^5 x^2\sqrt{25 - x^2}\, dx$
32. $\int_4^8 \frac{dw}{(w^2 - 4)^{3/2}}$
33. Use os métodos das secções anteriores (isto é, sem substituição trigonométrica) para calcular as integrais:
    (a) $\int \frac{3\, dx}{x\sqrt{4x^2 - 9}}$ (b) $\int \frac{5x\, dx}{\sqrt{3 - 2x^2}}$
34. Ache a área da região limitada pela curva $y = \sqrt{x^2 - 9}/x^2$, pelo eixo x e pela reta $x = 5$.
35. Ache o comprimento do arco da curva $y = \ln x$ entre $x = 1$ e $x = 3$.
36. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 34 em torno do eixo y.
37. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região à direita do eixo y, limitada pela curva $y = x\sqrt[4]{9 - x^2}$ e pelo eixo x, em torno do eixo x.
38. Ache o comprimento do arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.
39. Ache o centro de massa de uma barra com 8 cm se a densidade linear num ponto a x cm do extremo esquerdo é $\rho(x)$ g/cm onde $\rho(x) = \sqrt{x^2 + 36}$.
40. A densidade linear de uma barra num ponto a x m de um extremo é $\sqrt{9 + x^2}$ kg/m. Ache a massa e o centro de massa da barra, sabendo que ela tem 3 m.
41. Ache o centróide da região limitada pela curva $yx^2 = \sqrt{x^2 - 9}$, pelo eixo x e pela reta $x = 5$.

42. Use integração para obter πr^2 unidades de área para a área da região cercada por uma circunferência com r unidades de raio.

Os Exercícios de 43 a 45 referem-se à Secção Suplementar 6.7.

43. Uma tubulação horizontal cilíndrica tem um diâmetro interno de 4 m e tem uma extremidade fechada por um registro circular que se ajusta à tubulação. Se a tubulação contiver água até uma profundidade de 3 m, ache a força no registro, exercida pela pressão da água.

44. Uma comporta num canal de irrigação tem a forma de um segmento de círculo com 40 cm de raio. A parte superior da comporta é horizontal e 30 cm acima do ponto mais baixo. Se o nível da água estiver 20 cm acima da borda da comporta, ache a força sobre ela, exercida pela pressão da água.

45. Um tanque de automóvel tem a forma de um cilindro circular reto com 8 cm de raio, com um eixo horizontal. Ache a força total num extremo, quando a gasolina atingir 12 cm de profundidade, sabendo que a densidade da gasolina é ρ g/cm³.

9.5 INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS QUANDO O DENOMINADOR TEM SOMENTE FATORES LINEARES

Da definição de função racional, H será racional se $H(x) = P(x)/Q(x)$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios. Vimos previamente que se o grau do numerador não for menor do que o grau do denominador, temos uma fração imprópria e, nesse caso, dividimos o numerador pelo denominador até obter uma fração própria, isto é, uma fração cujo numerador tenha grau menor do que o grau do denominador. Por exemplo,

$$\frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4} = x^2 - 6 + \frac{3x - 23}{x^2 - 4}$$

Assim, se quisermos integrar

$$\int \frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4}\, dx$$

o problema se reduz a integrar

$$\int (x^2 - 6)\, dx + \int \frac{3x - 23}{x^2 - 4}\, dx$$

Em geral, então, estamos interessados em calcular integrais do tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

onde o grau de $P(x)$ é menor do que o grau de $Q(x)$.

Para fazer isso, em geral é necessário escrever $P(x)/Q(x)$ como a soma de *frações parciais*. Os denominadores das frações parciais são obtidos fatorando $Q(x)$ num produto de fatores lineares e quadráticos onde os fatores quadráticos não têm zeros reais. Algumas vezes pode ser difícil encontrar esses fatores de $Q(x)$; porém, um teorema de Álgebra Avançada estabelece que teoricamente isso sempre pode ser feito.

Após fatorar $Q(x)$ num produto de fatores lineares e quadráticos, o método de determinar as frações parciais irá depender da natureza desses fatores. Vamos considerar separadamente os vários casos. Os resultados de Álgebra Avançada, que não estão provados aqui, fornecem a forma da fração parcial em cada caso.

Caso 1: Os fatores de $Q(x)$ são todos lineares e nenhum é repetido. Isto é,

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\ldots(a_nx + b_n)$$

onde não existem dois fatores idênticos. Nesse caso escrevemos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \ldots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

onde A_1, A_2, ..., A_n são constantes a serem determinadas.

Observe que na igualdade acima, em vez de = usamos ≡ (que se lê idêntico), pois (1) é uma identidade.

A ilustração a seguir mostra como obter os valores de A_i.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Para calcular

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{x^3 - x^2 - 2x}$$

fatoramos o denominador obtendo

$$\frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x} \equiv \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}$$

Assim,

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \qquad (1)$$

Como (1) é uma identidade, deve ser válida para todo x exceto 0, 2 e -1. De (1),

$$x - 1 \equiv A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2) \qquad (2)$$

A igualdade (2) é uma identidade válida para todos os valores de x inclusive 0, 2 e -1. Queremos encontrar as constantes A, B e C. Substituindo x por 0 em (2), obtemos

$$-1 = -2A \quad \Leftrightarrow \quad A = \tfrac{1}{2}$$

Substituindo x por 2 em (2), obtemos

$$1 = 6B \quad \Leftrightarrow \quad B = \tfrac{1}{6}$$

Substituindo x por -1 em (2), obtemos

$$-2 = 3C \quad \Leftrightarrow \quad C = -\tfrac{2}{3}$$

Há um outro método para encontrar os valores de A, B e C. Se no segundo membro de (2) agruparmos os termos,

$$x - 1 \equiv (A + B + C)x^2 + (-A + B - 2C)x - 2A$$

Como temos uma identidade, os coeficientes do primeiro membro devem ser iguais aos coeficientes correspondentes do segundo membro. Assim,

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -A + B - 2C &= 1 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

Resolvendo essas equações simultaneamente, obtemos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{6}$, e $C = -\frac{2}{3}$. Substituindo esses valores em (1), teremos

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{-\frac{2}{3}}{x+1}$$

Assim, a integral dada pode ser expressa da seguinte forma:

$$\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1}$$
$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{6}\ln|x-2| - \tfrac{2}{3}\ln|x+1| + \tfrac{1}{6}\ln C$$
$$= \tfrac{1}{6}(3\ln|x| + \ln|x-2| - 4\ln|x+1| + \ln C)$$
$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{Cx^3(x-2)}{(x+1)^4}\right|$$ ◀

Caso 2: Os fatores de $Q(x)$ são todos lineares e alguns são repetidos.

Suponha que $(a_i x + b_i)$ seja um fator que se repete p vezes. Então, correspondendo a esse fator haverá a soma de p frações parciais

$$\frac{A_1}{(a_i x + b_i)^p} + \frac{A_2}{(a_i x + b_i)^{p-1}} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{(a_i x + b_i)^2} + \frac{A_p}{a_i x + b_i}$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_p$ são constantes a serem determinadas.

O Exemplo 1 a seguir ilustra esse caso e o método de determinar cada A_i.

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{(x^3-1)\,dx}{x^2(x-2)^3}$$

Solução A fração no integrando pode ser escrita como soma de frações parciais da seguinte forma:

$$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{x-2} \tag{3}$$

Multiplicando ambos os membros de (3) pelo mínimo múltiplo comum, teremos

$$x^3 - 1 \equiv A(x-2)^3 + Bx(x-2)^3 + Cx^2 + Dx^2(x-2) + Ex^2(x-2)^2 \tag{4}$$

Substituindo x por 2 em (4), obtemos

$$7 = 4C \quad \Leftrightarrow \quad C = \tfrac{7}{4}$$

Substituindo x por 0 em (4), obtemos

$$-1 = -8A \quad \Leftrightarrow \quad A = \tfrac{1}{8}$$

Substituímos esses valores de A e C em (4) e expandindo as potências dos binômios, teremos

$$x^3 - 1 \equiv \tfrac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + Bx(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + \tfrac{7}{4}x^2 + Dx^3 - 2Dx^2 + Ex^2(x^2 - 4x + 4)$$
$$x^3 - 1 \equiv (B+E)x^4 + (\tfrac{1}{8} - 6B + D - 4E)x^3 + (-\tfrac{3}{4} + 12B + \tfrac{7}{4} - 2D + 4E)x^2 + (\tfrac{3}{2} - 8B)x - 1$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de x, obtemos

$$B + E = 0$$
$$\tfrac{1}{8} - 6B + D - 4E = 1$$
$$-\tfrac{3}{4} + 12B + \tfrac{7}{4} - 2D + 4E = 0$$
$$\tfrac{3}{2} - 8B = 0$$

Resolvendo, obtemos

$$B = \tfrac{3}{16} \qquad D = \tfrac{5}{4} \qquad E = -\tfrac{3}{16}$$

Logo, de (3)

$$\frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3} \equiv \frac{\frac{1}{8}}{x^2} + \frac{\frac{3}{16}}{x} + \frac{\frac{7}{4}}{(x-2)^3} + \frac{\frac{5}{4}}{(x-2)^2} + \frac{-\frac{3}{16}}{x-2}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3}\,dx &= \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x} + \frac{7}{4}\int \frac{dx}{(x-2)^3} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x-2}\\ &= -\frac{1}{8x} + \frac{3}{16}\ln|x| - \frac{7}{8(x-2)^2} - \frac{5}{4(x-2)} - \frac{3}{16}\ln|x-2| + C\\ &= \frac{-11x^2 + 17x - 4}{8x(x-2)^2} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2}$$

Solução

$$\frac{1}{u^2 - a^2} \equiv \frac{A}{u-a} + \frac{B}{u+a}$$

Multiplicando por $(u - a)(u + a)$, obtemos

$$1 \equiv A(u + a) + B(u - a)$$

$$1 \equiv (A + B)u + Aa - Ba$$

Igualando os coeficientes, teremos

$$A + B = 0$$

$$Aa - Ba = 1$$

Resolvendo simultaneamente, obtemos

$$A = \frac{1}{2a} \qquad B = -\frac{1}{2a}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{u^2 - a^2} &= \frac{1}{2a}\int \frac{du}{u-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{du}{u+a}\\ &= \frac{1}{2a}\ln|u-a| - \frac{1}{2a}\ln|u+a| + C\\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C\end{aligned}$$

O tipo de integral do exemplo acima ocorre com uma freqüência tal que justifica ser dado como fórmula. Não é necessário memorizá-la pois trata-se de uma integração por frações parciais extremamente simples.

$$\boxed{\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C}$$

Se tivermos $\int du/(a^2 - u^2)$, escreveremos

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = -\int \frac{du}{u^2 - a^2}$$

$$= -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C$$

Essa integração será também dada como fórmula.

$$\boxed{\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C}$$

Na Secção 7.7 discutimos o crescimento exponencial que ocorre quando a taxa de crescimento de uma grandeza é proporcional à quantidade da grandeza existente num dado instante. Obtemos o modelo matemático

$$f(t) = Be^{kt} \tag{5}$$

onde k é uma constante positiva, B unidades representa a quantidade presente inicialmente e $f(t)$ unidades é o quanto existirá após t unidades de tempo, onde $f(t) \geqslant B$ para $t \geqslant 0$. Também foi discutido na Secção 7.7 o crescimento limitado, o qual ocorre quando uma grandeza cresce a uma taxa proporcional à diferença entre um número positivo fixo A e o seu tamanho. Um modelo matemático que descreve a situação é

$$f(t) = A - Be^{-kt} \tag{6}$$

onde B e k são constantes positivas e $A - B \leqslant f(t) < A$ para $t \geqslant 0$. As Figuras 1 e 2 apresentam esboços dos gráficos de (5) e (6), respectivamente.

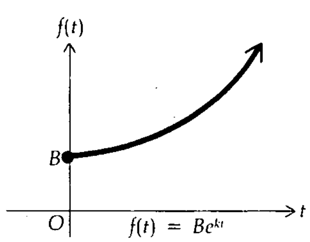


FIGURA 1

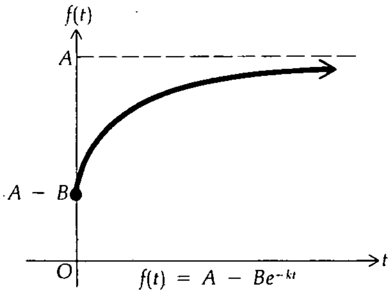


FIGURA 2

Considere agora o crescimento de uma população que é afetado pelo meio ambiente, o qual impõe uma limitação superior em seu tamanho. Por exemplo, espaço ou reprodução podem ser fatores limitados pelo meio ambiente. Em tais casos, o modelo matemático do tipo (5) não se aplica, pois a população não cresce além de um certo ponto. Um modelo que leva em conta os fatores ambientais é obtido quando uma quantidade está crescendo a uma taxa conjuntamente propocional a seu tamanho e à diferença entre um número A, positivo fixo, e seu tamanho. Assim, se y unidades for a quantidade de uma grandeza presente em t unidades de tempo,

$$\frac{dy}{dt} = ky(A - y) \tag{7}$$

onde k é uma constante positiva, e $0 < y < A$ para $t \geqslant 0$.

Para resolver (7) primeiro separamos as variáveis, obtendo

$$\frac{dy}{y(A - y)} = k\,dt$$

$$\int \frac{dy}{y(A - y)} = k \int dt \tag{8}$$

Escrevendo o integrando à esquerda como soma de frações parciais, teremos

$$\frac{1}{y(A-y)} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{A-y}\right)$$

Assim,

$$\int \frac{dy}{y(A-y)} = \frac{1}{A}\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{A-y}\right)dy$$
$$= \frac{1}{A}(\ln|y| - \ln|A-y|) + C_1$$

Logo, de (8), temos

$$\frac{1}{A}(\ln|y| - \ln|A-y|) = kt + C_2$$
$$\ln|A-y| - \ln|y| = -Akt - AC_2$$
$$\ln\left|\frac{A-y}{y}\right| = -Akt - AC_2$$
$$\left|\frac{A-y}{y}\right| = e^{-Akt}e^{-AC_2}$$

Como $0 < y < A$, $(A - y)/y > 0$. Assim sendo, podemos omitir as barras de valor absoluto. Com $B = e^{-AC_2}$ temos

$$A - y = Bye^{-Akt}$$
$$y(1 + Be^{-Akt}) = A$$
$$y = \frac{A}{1 + Be^{-Akt}} \tag{9}$$

Se tomarmos $y = f(t)$, então essa igualdade pode ser escrita como

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-Akt}} \qquad t \geqslant 0 \tag{10}$$

onde A, B e k são constantes positivas. Para fazer um esboço do gráfico de f, consideremos primeiro $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. De (10),

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \frac{A}{1 + B\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-Akt}}$$
$$= \frac{A}{1 + B \cdot 0}$$
$$= A$$

e $f(t)$ está tendendo a A através de valores menores que A. Logo, a reta $f(x)$ A é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Como $f(0) = \dfrac{A}{1+B}$, o gráfico

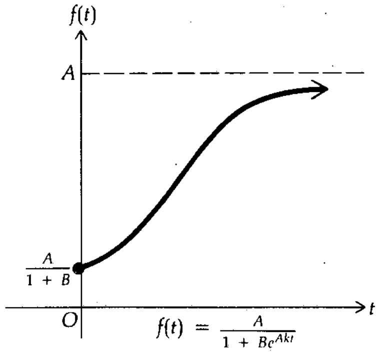


FIGURA 3

intercepta o eixo $f(t)$ em $\dfrac{A}{1 + B}$. No Exercício 38 você deverá mostrar que o gráfico de f tem um ponto de inflexão em $t = \dfrac{1}{Ak}$ ln B. Com essa informação fazemos um esboço do gráfico, conforme mostra a Figura 3. Ele é chamado de curva do *crescimento logístico*. Observe que quando d é pequeno, o gráfico é similar ao do crescimento exponencial da Figura 1; à medida que t cresce, a curva torna-se semelhante àquela do crescimento limitado da Figura 2.

Uma aplicação do crescimento logístico em Economia é dada pela divulgação de informações sobre um dado produto. O crescimento logístico é usado em Biologia para descrever o alastramento de uma doença e em Sociologia, para descrever a propagação de um boato ou rumor.

EXEMPLO 3 Em uma comunidade de 45.000 pessoas, a taxa de crescimento de uma epidemia de gripe é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que a contraíram e ao número de pessoas que não a contraíram. (a) Se 200 pessoas tiveram a gripe quando irrompeu a epidemia e 2.800 pessoas tiveram gripe 3 semanas depois, ache um modelo matemático que descreva a epidemia. Pelas estimativas, qual o número de pessoas que terá gripe (b) após 5 semanas e (c) após 10 semanas? (d) Se a epidemia continuar indefinidamente, quantas pessoas irão contraí-la?

Solução

(a) Se t semanas já se passaram desde que irrompeu a epidemia e y pessoas contraíram a gripe após as t semanas, então

$$\frac{dy}{dt} = ky(45.000 - y) \tag{11}$$

Tabela 1

t	0	3	5	10
y	200	2.800	y_5	y_{10}

onde k é uma constante e $0 < y < 45.000$ para todo $t \geqslant 0$. As condições laterais são dadas na Tabela 1, onde y_5 e y_{10} são o número de pessoas com gripe após 5 e 10 semanas, respectivamente.

A equação diferencial (11) tem a forma de (7) e sua solução geral é da forma de (9). Logo, a solução geral de (11) é

$$y = \frac{45.000}{1 + Be^{-45.000kt}} \tag{12}$$

Como $y = 200$ quando $t = 0$, de (12) temos

$$200 = \frac{45.000}{1 + Be^0}$$

$$1 + B = 225$$

$$B = 224$$

Substituindo esse valor de B em (12), obtemos

$$y = \frac{45.000}{1 + 224e^{-45.000kt}} \tag{13}$$

Quando $t = 3$, $y = 2.800$. Assim, de (13) temos

$$2.800 = \frac{45.000}{1 + 224e^{-135.000k}}$$

$$1 + 224e^{-135.000k} = \frac{45.000}{2.800}$$

$$1 + 224e^{-135.000k} = 16{,}0714$$

$$e^{-135.000k} = \frac{15{,}0714}{224}$$

$$-135.000k = \ln 0{,}0672830$$

$$k = -\frac{\ln 0{,}0672830}{135.000}$$

$$k = 0{,}0000199915$$

Substituindo esse valor de k em (13), obtemos

$$y = \frac{45.000}{1 + 224e^{-0{,}899616t}}$$

que é o modelo matemático pedido.

(b) Como $y = y_5$ quando $t = 5$,

$$y_5 = \frac{45.000}{1 + 244e^{-4{,}49808}}$$

$$= \frac{45.000}{1 + 224(0{,}0111303)}$$

$$= 12.882{,}2$$

(c) Como $y = y_{10}$ quando $t = 10$,

$$y_{10} = \frac{45.000}{1 + 224e^{-8{,}99616}}$$

$$= \frac{45.000}{1 + 224(0{,}000123885)}$$

$$= 43.785{,}0$$

Logo, 12.882 pessoas devem contrair a gripe após 5 semanas e 43.785 devem contraí-la após 10 semanas.

(d) Como

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{45.000}{1 + 224e^{-0{,}899616t}} = \frac{45.000}{1 + 224 \cdot 0}$$

$$= 45.000$$

toda a comunidade de 45.000 pessoas irá contrair a gripe se a epidemia continuar indefinidamente.

Em Química, a *lei de ação das massas* fornece uma aplicação de integração que nos leva ao uso de frações parciais. Sob certas condições, sabe-se que uma substância A reage com uma substância B para formar uma terceira substância C, de tal forma que a taxa de variação da quantidade C seja proporcional ao produto das quantidades de A e de B ainda presentes em qualquer tempo dado.

Suponhamos que existam inicialmente α g de A e β g de B e que r g de A combinem-se com s g de B para formar $(r + s)$ g de C. Se houver x g de C em t unidades de tempo, então C conterá $rx/(r + s)$ g de A e $sx/(r + s)$ g de B. O número de gramas da substância A que restou é $\alpha - rx/(r + s)$, e o número de gramas de B que restou é $\beta - sx/(r + s)$. Logo, a lei de ação de massas dá

$$\frac{dx}{dt} = K\left(\alpha - \frac{rx}{r + s}\right)\left(\beta - \frac{sx}{r + s}\right)$$

onde K é a constante de proporcionalidade. Essa equação pode ser escrita como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Krs}{(r + s)^2}\left(\frac{r + s}{r}\alpha - x\right)\left(\frac{r + s}{s}\beta - x\right)$$

Tomando

$$k = \frac{Krs}{(r + s)^2} \qquad a = \frac{r + s}{r}\alpha \qquad b = \frac{r + s}{s}\beta$$

essa igualdade torna-se

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x) \tag{14}$$

Podemos separar as variáveis em (14) e obter

$$\frac{dx}{(a - x)(b - x)} = k\,dt$$

Se $a = b$, então o primeiro membo da equação pode ser integrado usando a fórmula da potência. Se $a \neq b$, podemos usar frações parciais para a integração.

EXEMPLO 4 Uma reação química faz com que uma substância A combine-se com uma substância B para formar uma substância C, de acordo com a lei de ação de massas. Se na equação (14)$a = 8$, $b = 6$ e 2 g de substância C formaram-se em 10 min, quantos gramas de C terão se formado em 15 min?

Tabela 2

t	0	10	15
x	0	2	x_{15}

Solução Se x g da substância C formaram-se em t min, temos as condições laterais mostradas na Tabela 2, onde x_{15} g da substância C serão formados em 15 min. A equação (14) torna-se

$$\frac{dx}{dt} = k(8 - x)(6 - x)$$

Separando as variáveis, temos

$$\int \frac{dx}{(8 - x)(6 - x)} = k\int dt \tag{15}$$

Escrevendo o integrando como soma de frações parciais, iremos obter

$$\frac{1}{(8 - x)(6 - x)} \equiv \frac{A}{8 - x} + \frac{B}{6 - x}$$

$$1 \equiv A(6 - x) + B(8 - x)$$

Substituindo x por 6, obtemos $B = \frac{1}{2}$, e substituindo x por 8, obtemos $A = -\frac{1}{2}$. Assim sendo, (15) pode ser escrita como

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{8 - x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{6 - x} = k\int dt$$

Integrando, teremos

$$\tfrac{1}{2}\ln|8-x| - \tfrac{1}{2}\ln|6-x| + \tfrac{1}{2}\ln|C| = kt$$

$$\ln\left|\frac{6-x}{C(8-x)}\right| = -2kt$$

$$\frac{6-x}{8-x} = Ce^{-2kt}$$

Substituindo $x = 0$, $t = 0$, nesta equação, obtemos $C = \frac{3}{4}$. Logo,

$$\frac{6-x}{8-x} = \frac{3}{4}e^{-2kt} \qquad (16)$$

Substituindo $x = 2$, $t = 10$ em (16), teremos

$$\tfrac{4}{6} = \tfrac{3}{4}e^{-20k}$$

$$e^{-20k} = \tfrac{8}{9}$$

Substituindo $x = x_{15}$, $t = 15$ em (16), teremos

$$\frac{6-x_{15}}{8-x_{15}} = \frac{3}{4}e^{-30k}$$

$$4(6-x_{15}) = 3(e^{-20k})^{3/2}(8-x_{15})$$

$$24 - 4x_{15} = 3(\tfrac{8}{9})^{3/2}(8-x_{15})$$

$$24 - 4x_{15} = \frac{16\sqrt{2}}{9}(8-x_{15})$$

$$x_{15} = \frac{54-32\sqrt{2}}{9-4\sqrt{2}}$$

$$x_{15} \approx 2{,}6$$

Portanto, 2,6 g de substância C serão formados em 15 min.

EXERCÍCIOS 9.5

Nos Exercícios de 1 a 20, calcule a integral indefinida.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$
2. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2+x-6}$
3. $\displaystyle\int \frac{5x-2}{x^2-4}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{(4x-2)\,dx}{x^3-x^2-2x}$
5. $\displaystyle\int \frac{4w-11}{2w^2+7w-4}\,dw$
6. $\displaystyle\int \frac{9t^2-26t-5}{3t^2-5t-2}\,dt$
7. $\displaystyle\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{x^2-1}\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+3x^2}$
10. $\displaystyle\int \frac{x^2+4x-1}{x^3-x}\,dx$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+1)^2}$
12. $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}\,dx$
13. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x-7}{(2x+3)(x+1)^2}\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{dt}{(t+2)^2(t+1)}$
15. $\displaystyle\int \frac{3z+1}{(z^2-4)^2}\,dz$
16. $\displaystyle\int \frac{(5x^2-11x+5)\,dx}{x^3-4x^2+5x-2}$
17. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3-5x^2-4x+17}{x^3+x^2-5x+3}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{2x^4-2x+1}{2x^5-x^4}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{-24x^3+30x^2+52x+17}{9x^4-6x^3-11x^2+4x+4}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{dx}{16x^4-8x^2+1}$

Nos Exercícios de 21 a 28, calcule a integral definida.

21. $\int_1^2 \frac{x-3}{x^3+x^2}\,dx$

22. $\int_0^4 \frac{(x-2)\,dx}{2x^2+7x+3}$

23. $\int_1^3 \frac{x^2-4x+3}{x(x+1)^2}\,dx$

24. $\int_1^4 \frac{(2x^2+13x+18)\,dx}{x^3+6x^2+9x}$

25. $\int_1^2 \frac{5x^2-3x+18}{9x-x^3}\,dx$

26. $\int_0^1 \frac{(3x^2+7x)\,dx}{x^3+6x^2+11x+6}$

27. $\int_0^5 \frac{(x^2-3)\,dx}{x^3+4x^2+5x+2}$

28. $\int_0^4 \frac{x^2dx}{2x^3+9x^2+12x+4}$

29. Ache a área da região limitada pela curva $y = (x-1)/(x^2-5x+6)$, pelo eixo x e pelas retas $x = 4$ e $x = 6$.
30. Ache a área, no primeiro quadrante, da região limitada pela curva $(x+2)^2y = 4 - x$.
31. Ache o volume do sólido de revolução obtido quando a região do Exercício 29 gira em torno do eixo y.
32. Ache o volume do sólido de revolução obtido quando a região do Exercício 30 gira em torno do eixo x.
33. Ache o centróide da região limitada pela curva $y = (x-1)/(x^2-5x+6)$, pelo eixo x e pelas retas $x = 4$ e $x = 6$.
34. Ache o centróide da região, no primeiro quadrante, limitada pela curva $(x+2)^2y = 4 - x$.
35. Um dia em um campus universitário com 5.000 alunos, onde se esperava uma assembléia estudantil um aluno ouviu que certo estudante polêmico iria fazer, durante a assembléia, um discurso explosivo. Essa informação foi transmitida para amigos que, por sua vez, a transmitiram a outros. A taxa com que se espalhou essa informação é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que a ouviram e ao número de pessoas que não a ouviram. (a) Se após 10 min 144 pessoas ouviram a informação, ache o modelo matemático que descreve a divulgação da notícia. Quantas pessoas terão ouvido a notícia (b) após 15 min e (c) após 20 min? (d) Quantas pessoas eventualmente ouvirão a notícia?
36. Numa determinada cidade com população A, 20% dos habitantes ouviram pelo rádio a notícia de um escândalo político local. A taxa de disseminação da informação é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que a ouviram e ao número de pessoas que não a ouviram. Se após 1 hora 50% da população já sabe do escândalo, quanto tempo levará para que 80% da população tome conhecimento do fato?
37. Numa comunidade onde A pessoas são suscetíveis a um determinado vírus, a taxa de propagação do vírus é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que o contraíram e ao número de pessoas suscetíveis que não o contraíram. Se 10% dos suscetíveis contraíram o vírus inicialmente e 25% foram infectados após 3 semanas, qual a porcentagem dos suscetíveis que foram infectados após 6 semanas?
38. Mostre que o gráfico da função f definida por (10) tem um ponto de inflexão em $t = \frac{1}{Ak} \ln B$.
39. Um fabricante que começou a operar quatro anos atrás determinou que o rendimento das vendas vem crescendo estavelmente à taxa de $\frac{t^3+3t^2+6t+7}{t^2+3t+2}$ milhões por ano, onde t é o número de anos que a fábrica vem operando. Estima-se que o rendimento total das vendas continuará crescendo à mesma taxa nos próximos dois anos. Se o rendimento total do ano que acabou foi de \$ 6 milhões, qual será o rendimento total das vendas esperado daqui a um ano? Dê a resposta com precisão de \$ 100.
40. Uma partícula move-se ao longo de uma linha reta de tal forma que se v m/s for a velocidade após t s, então

$$v = \frac{t+3}{t^2+3t+2}$$

Ache a distância percorrida pela partícula desde o instante em que $t = 0$ ao instante em que $t = 2$.
41. Suponha, no Exemplo 4, que $a = 5$, $b = 4$ e 1 g de C seja formado em 5 min. Quantos gramas de C deverão ser formados em 10 min?
42. Suponha, no Exemplo 4, que $a = 6$, $b = 3$ e 1 g de C seja formado em 4 min. Quanto tempo irá decorrer para estarem formados 2 g de C?
43. Em qualquer instante, a taxa segundo a qual uma substância se dissolve é proporcional ao produto da quantidade presente em qualquer instante pela diferença entre a concentração da substância na solução naquele instante e a concentração da substância em uma solução saturada. Uma quantidade de material insolúvel é misturada com 40 g de sal, inicialmente. O sal é dissolvido num tanque com 20 litros de água. Se 5 g de sal dissolvem-se em 10 min e se a concentração de sal numa solução saturada for de 3 g/L, qual a quantidade de sal dissolvido em 20 min?

9.6 INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS QUANDO O DENOMINADOR CONTÉM FATORES QUADRÁTICOS

A discussão de integração de funções racionais por frações parciais continua com os dois casos onde o denominador contém fatores quadráticos *irredutíveis*. Lembre-se da Álgebra, que um fator $ax^2 + bx + c$ será irredutível se uma equação $ax^2 + bx + c = 0$ não tiver raízes reais, isto é, $b^2 - 4ac < 0$.

Caso 3: Os fatores de $Q(x)$ são lineares e quadráticos, e nenhum fator quadrático é repetido.

Correspondendo ao fator quadrático $ax^2 + bx + c$ no denominador, temos uma fração parcial da forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + C}$$

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{(x^2 - 2x - 3)\,dx}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)}$$

Solução A fração no integrando pode ser escrita como a seguinte soma de frações parciais:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} \equiv \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x - 1} \tag{1}$$

Multiplicando ambos os membros de (1) pelo mínimo denominador comum, teremos

$$x^2 - 2x - 3 \equiv (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 2x + 2) \tag{2}$$

Podemos calcular C substituindo x por 1 em (2) e obtendo

$$-4 = 5C \quad \Leftrightarrow \quad C = -\tfrac{4}{5}$$

Substituímos C por $-\frac{4}{5}$ em (2) e multiplicando o segundo membro, obtemos

$$x^2 - 2x - 3 \equiv (A - \tfrac{4}{5})x^2 + (B - A - \tfrac{8}{5})x + (-\tfrac{8}{5} - B)$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de x, teremos

$$A - \tfrac{4}{5} = 1$$

$$B - A - \tfrac{8}{5} = -2$$

$$-\tfrac{8}{5} - B = -3$$

Logo,

$$A = \tfrac{9}{5} \qquad B = \tfrac{7}{5}$$

Substituindo os valores de A, B e C em (1), teremos

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} \equiv \frac{\frac{9}{5}x + \frac{7}{5}}{x^2 + 2x + 2} + \frac{-\frac{4}{5}}{x - 1}$$

Assim,

$$\int \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)}\,dx$$

$$= \frac{9}{5}\int \frac{x\,dx}{x^2 + 2x + 2} + \frac{7}{5}\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x - 1} \tag{3}$$

Para integrar $\int (x\,dx)/(x^2 + 2x + 2)$ vemos que a diferencial do denominador é $2(x + 1)\,dx$; assim, se somarmos e subtrairmos 1 no numerador, iremos obter

$$\frac{9}{5}\int \frac{x\,dx}{x^2 + 2x + 2} = \frac{9}{5}\int \frac{(x + 1)\,dx}{x^2 + 2x + 2} - \frac{9}{5}\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

Substituindo essa desigualdade em (3) e combinando os termos, teremos

$$\int \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx$$

$$= \frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)\,dx}{x^2+2x+2} - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+2} - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-1} \tag{4}$$

$$= \frac{9}{10}\ln|x^2+2x+2| - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} - \frac{4}{5}\ln|x-1|$$

$$= \tfrac{9}{10}\ln|x^2+2x+2| - \tfrac{2}{5}\,\mathrm{tg}^{-1}(x+1) - \tfrac{8}{10}\ln|x-1| + \tfrac{1}{10}\ln C$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left|\frac{C(x^2+2x+2)^9}{(x-1)^8}\right| - \frac{2}{5}\,\mathrm{tg}^{-1}(x+1)$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** No Exemplo 1 podemos evitar algumas passagens, se, em vez de (1), expressarmos a fração original como

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2+2x+2)} \equiv \frac{D(2x+2)+E}{x^2+2x+2} + \frac{F}{x-1}$$

Nota: Escrevemos $D(2x + 2) + E$ em vez de $Ax + B$ pois

$2x + 2 = D_x(x^2 + 2x + 2)$

Então, resolvendo para D, E e F, obtemos

$D = \frac{9}{10}$ $\quad E = -\frac{2}{5}$ $\quad F = -\frac{4}{5}$

resultando diretamente (4). ◀

Caso 4: Os fatores de $Q(x)$ são lineares e quadráticos e alguns dos fatores quadráticos são repetidos.

Se $ax^2 + bx + c$ for um fator quadrático de $Q(x)$ que se repete p vezes, então, correspondendo ao fator $(ax^2 + bx + c)^p$, teremos a soma das p frações parciais:

$$\frac{A_1x + B_1}{(ax^2+bx+c)^p} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^{p-1}} + \dots + \frac{A_px+B_p}{ax^2+bx+c}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se o denominador contém o fator $(x^2 - 5x + 2)^3$, correspondendo a esse fator,

$$\frac{Ax+B}{(x^2-5x+2)^3} + \frac{Cx+D}{(x^2-5x+2)^2} + \frac{Ex+F}{x^2-5x+2}$$

ou, de forma mais conveniente,

$$\frac{A(2x-5)+B}{(x^2-5x+2)^3} + \frac{C(2x-5)+D}{(x^2-5x+2)^2} + \frac{E(2x-5)+F}{x^2-5x+2}$$ ◀

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{x(x^2-4x+5)^2}$$

Solução

$$\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B(2x-4)+C}{(x^2-4x+5)^2} + \frac{D(2x-4)+E}{x^2-4x+5}$$

Multiplicando ambos os membros dessa relação pelo mínimo denominador comum, teremos

$$x - 2 \equiv A(x^2 - 4x + 5)^2 + x(2Bx - 4B + C) + x(x^2 - 4x + 5)(2Dx - 4D + E) \quad (5)$$

$$x - 2 \equiv Ax^4 + 16Ax^2 + 25A - 8Ax^3 + 10Ax^2 - 40Ax + 2Bx^2 - 4Bx + Cx + 2Dx^4 - 12Dx^3 + Ex^3 + 26Dx^2 - 4Ex^2 - 20Dx + 5Ex$$

$$x - 2 \equiv (A + 2D)x^4 + (-8A - 12D + E)x^3 + (26A + 2B + 26D - 4E)x^2 + (-40A - 4B + C - 20D + 5E)x + 25A \quad (6)$$

O valor de A pode ser calculado de (5), substituindo x por 0. Se igualarmos os coeficientes em (6) e resolvermos simultaneamente as equações resultantes, iremos obter

$$A = -\tfrac{2}{25} \qquad B = \tfrac{1}{5} \qquad C = \tfrac{1}{5} \qquad D = \tfrac{1}{25} \qquad E = -\tfrac{4}{25}$$

Logo,

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{x(x^2-4x+5)^2} = -\frac{2}{25}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{5}\int \frac{(2x-4)\,dx}{(x^2-4x+5)^2} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2} + \frac{1}{25}\int \frac{(2x-4)\,dx}{x^2-4x+5} - \frac{4}{25}\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$$

$$= -\frac{2}{25}\ln|x| - \frac{1}{5(x^2-4x+5)} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{[(x^2-4x+4)+1]^2} + \frac{1}{25}\ln|x^2-4x+5| - \frac{4}{25}\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)+1} \quad (7)$$

Vamos calcular separadamente as integrais do terceiro e quinto termos do segundo membro de (7)

$$\int \frac{dx}{[(x^2-4x+4)+1]^2} = \int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2}$$

Seja $x - 2 = \operatorname{tg}\theta$, onde $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x \geqslant 2$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ se $x < 2$. Então $dx = \sec^2\theta\, d\theta$ e $(x-2)^2 + 1 = \operatorname{tg}^2\theta + 1$. Logo,

$$\int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(\operatorname{tg}^2\theta + 1)^2}$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^4\theta}$$

$$= \int \frac{d\theta}{\sec^2\theta}$$

$$= \int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C_1$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C_1$$

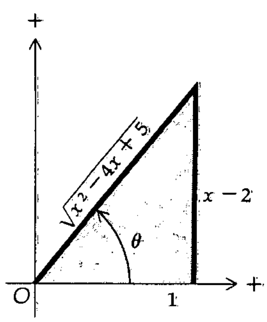
Como $\operatorname{tg}\theta = x - 2$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$, $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(x-2)$. Encontramos sen θ e cos θ das Figuras 1 (se $x \geqslant 2$) e 2 (se $x < 2$). Em ambos os casos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$$

Assim,

$$\int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}(x-2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}} + C_1$$

$$\int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}(x-2) + \frac{x-2}{2(x^2-4x+5)} + C_1 \tag{8}$$



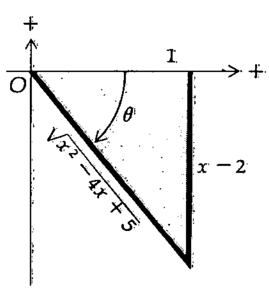
$x \geqslant 2$

FIGURA 1

Considerando agora a outra integral no segundo membro de (7), teremos

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)+1} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+1}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)+1} = \operatorname{tg}^{-1}(x-2) + C_2$$



$x < 2$

FIGURA 2

Substituindo essa relação e (8) em (7), teremos

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{x(x^2-4x+5)^2}$$

$$= -\frac{2}{25}\ln|x| - \frac{1}{5(x^2-4x+5)} + \frac{1}{10}\operatorname{tg}^{-1}(x-2) + \frac{x-2}{10(x^2-4x+5)}$$
$$+ \frac{1}{25}\ln|x^2-4x+5| - \frac{4}{25}\operatorname{tg}^{-1}(x-2) + C$$

$$= \frac{1}{25}\ln\left|\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right| - \frac{3}{50}\operatorname{tg}^{-1}(x-2) + \frac{x-4}{10(x^2-4x+5)} + C$$

EXERCÍCIOS 9.6

Nos Exercícios de 1 a 20, calcule a integral indefinida.

1. $\int \frac{dx}{2x^3+x}$
2. $\int \frac{(x+4)\,dx}{x(x^2+4)}$
3. $\int \frac{dx}{16x^4-1}$
4. $\int \frac{(x^2-4x-4)\,dx}{x^3-2x^2+4x-8}$
5. $\int \frac{(t^2+t+1)\,dt}{(2t+1)(t^2+1)}$
6. $\int \frac{3w^3+13w+4}{w^3+4w}\,dw$
7. $\int \frac{(x^2+x)\,dx}{x^3-x^2+x-1}$
8. $\int \frac{dx}{9x^4+x^2}$
9. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$
10. $\int \frac{(x+3)\,dx}{4x^4+4x^3+x^2}$
11. $\int \frac{(2x^2-x+2)\,dx}{x^5+2x^3+x}$
12. $\int \frac{(2x^3+9x)\,dx}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}$
13. $\int \frac{(5z^3-z^2+15z-10)\,dz}{(z^2-2z+5)^2}$
14. $\int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$
15. $\int \frac{(x^2+2x-1)\,dx}{27x^3-1}$
16. $\int \frac{e^{5x}\,dx}{(e^{2x}+1)^2}$
17. $\int \frac{18\,dx}{(4x^2+9)^2}$
18. $\int \frac{(2x^2+3x+2)\,dx}{x^3+4x^2+6x+4}$
19. $\int \frac{(\sec^2 x+1)\sec^2 x\,dx}{1+\operatorname{tg}^3 x}$
20. $\int \frac{(6w^4+4w^3+9w^2+24w+32)\,dw}{(w^3+8)(w^2+3)}$

Nos Exercícios de 21 a 29, calcule a integral definida.

21. $\int_1^4 \frac{(4+5x^2)\,dx}{x^3+4x}$
22. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^3+2x^2+x+2}$

23. $\displaystyle\int_3^4 \frac{(5x^3 - 4x)\,dx}{x^4 - 16}$

24. $\displaystyle\int_0^1 \frac{9\,dx}{8x^3 + 1}$

25. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^2\,dx}{(2x^2 + 2x + 1)^2}$

26. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{(x + 1)\,dx}{x^3 - 1}$

27. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x^2 + 3x + 3)\,dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$

28. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^3 x}$

29. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{12\,dt}{e^{2t} + 16}$

30. Use métodos anteriores a esta secção (isto é, sem frações parciais), para calcular as integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{(x^2 - 4x + 6)\,dx}{x^3 - 6x^2 + 18x}$ (b) $\displaystyle\int \frac{3x + 1}{(x + 2)^4}\,dx$

31. Ache a área da região limitada pela curva $y(x^2 + 1)^3 = x^3$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = 1$.

32. Ache a área da região limitada pela curva $y(x^3 + 8) = 4$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = 1$.

33. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região do Exercício 32.

34. Ache a abscissa do centróide da região do Exercício 32.

35. Uma partícula move-se ao longo de uma reta de forma que v cm/s seja a velocidade da partícula, decorridos t s; então

$$v = \frac{t^2 - t + 1}{(t + 2)^2(t^2 + 1)}$$

Ache a fórmula da distância percorrida pela partícula do instante $t = 0$ ao instante $t = t_1$.

9.7 OUTRAS SUBSTITUIÇÕES

Se um integrando envolver potências fracionárias de uma variável x, o integrando poderá ser simplificado pela substituição

$$x = z^n$$

onde n é o menor denominador comum entre os denominadores dos expoentes. Isso será ilustrado pelo exemplo a seguir.

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

Solução Seja $x = z^6$, então $dx = 6z^5\,dz$. Assim,

$$\int \frac{x^{1/2}\,dx}{1 + x^{1/3}} = \int \frac{z^3(6z^5\,dz)}{1 + z^2}$$

$$= 6\int \frac{z^8}{z^2 + 1}\,dz$$

Dividindo o numerador pelo denominador, teremos

$$\int \frac{x^{1/2}\,dx}{1 + x^{1/3}} = 6\int \left(z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{z^2 + 1}\right)dz$$

$$= 6(\tfrac{1}{7}z^7 - \tfrac{1}{5}z^5 + \tfrac{1}{3}z^3 - z + \operatorname{tg}^{-1} z) + C$$

$$= \tfrac{6}{7}x^{7/6} - \tfrac{6}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6\operatorname{tg}^{-1} x^{1/6} + C$$

Não há uma regra geral para determinar qual a substituição que irá resultar num integrando mais simples. O exemplo a seguir mostra outra situação onde racionalizamos o integrando dado.

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int x^5\sqrt{x^2 + 4}\,dx$$

Solução Seja $z = \sqrt{x^2 + 4}$. Então $z^2 = x_2 + 4$ e $2z\,dz = 2x\,dx$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int x^5\sqrt{x^2+4}\,dx &= \int (x^2)^2\sqrt{x^2+4}\,x\,dx \\
&= \int (z^2-4)^2 z(z\,dz) \\
&= \int (z^6 - 8z^4 + 16z^2)\,dz \\
&= \tfrac{1}{7}z^7 - \tfrac{8}{5}z^5 + \tfrac{16}{3}z^3 + C \\
&= \tfrac{1}{105}z^3[15z^4 - 168z^2 + 560] + C \\
&= \tfrac{1}{105}(x^2+4)^{3/2}[15(x^2+4)^2 - 168(x^2+4) + 560] + C \\
&= \tfrac{1}{105}(x^2+4)^{3/2}(15x^4 - 48x^2 + 128) + C
\end{aligned}$$

Se um integrando for uma função racional de sen x e cos x ele poderá ser reduzido a uma função racional de z pela substituição

$$z = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x$$

como será mostrado por um exemplo. Para obter as fórmulas de sen x e cos x em termos de z vamos usar as seguintes identidades: sen $2y = 2$ sen y cos y e cos $2y = 2\cos^2 y - 1$ com $y = \frac{1}{2}x$. Temos, então,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{2}x \\
&= 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}x \cos^2 \frac{1}{2}x}{\cos \frac{1}{2}x} \\
&= 2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x \cdot \frac{1}{\sec^2 \frac{1}{2}x} \\
&= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x} \\
&= \frac{2z}{1+z^2}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\cos x &= 2\cos^2 \tfrac{1}{2}x - 1 \\
&= \frac{2}{\sec^2 \frac{1}{2}x} - 1 \\
&= \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x} - 1 \\
&= \frac{2}{1+z^2} - 1 \\
&= \frac{1-z^2}{1+z^2}
\end{aligned}$$

Como $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$,

$$\begin{aligned}
dz &= \tfrac{1}{2}\sec^2 \tfrac{1}{2}x\,dx \\
&= \tfrac{1}{2}(1 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}x)\,dx
\end{aligned}$$

Assim,

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

Vamos estabelecer esses resultados sob a forma de teorema.

9.7.1 TEOREMA Se $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$, então

$$\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2} \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}$$

Solução Seja $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$. Então, das fórmulas do Teorema 9.7.1, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x + \cos x} &= \int \frac{\dfrac{2\,dz}{1+z^2}}{1 - \dfrac{2z}{1+z^2} + \dfrac{1-z^2}{1+z^2}} \\
&= 2\int \frac{dz}{(1+z^2) - 2z + (1-z^2)} \\
&= 2\int \frac{dz}{2 - 2z} \\
&= \int \frac{dz}{1-z} \\
&= -\ln|1 - z| + C \\
&= -\ln|1 - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x| + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Seja $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$, calcule

$$\int \sec x\, dx$$

Solução Com $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$ e as fórmulas do Teorema 9.7.1, temos que

$$\begin{aligned}
\int \sec x\, dx &= \int \frac{dx}{\cos x} \\
&= \int \frac{2\,dz}{1+z^2} \cdot \frac{1+z^2}{1-z^2} \\
&= 2\int \frac{dz}{1-z^2} \\
&= \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C \qquad \text{(Secção 9.5)} \\
&= \ln\left|\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}x}\right| + C
\end{aligned}$$

Podemos escrever o valor de $\int \sec x\, dx$ do Exemplo 4 de outra forma, tomando $1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ e usando a identidade trigonométrica

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

Assim,

$$\int \sec x\, dx = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi + \operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1 - \operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}x}\right| + C$$

$$\boxed{\int \sec x\, dx = \ln|\operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x)| + C} \qquad (1)$$

No Teorema 5.4.5 tínhamos a fórmula

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

obtida pela multiplicação do numerador e do denominador do integrando por $\sec x + \operatorname{tg} x$. Há ainda outra forma para $\int \sec x\, dx$ obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\int \sec x\, dx &= \int \frac{dx}{\cos x} \\
&= \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} \\
&= \int \frac{\cos x\, dx}{1 - \operatorname{sen}^2 x} \\
&= \int \frac{du}{1 - u^2} \qquad (\text{sendo } u = \operatorname{sen} x \text{ e } du = \cos x\, dx) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}\right|^{1/2} + C
\end{aligned}$$

Como $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ para todo x, $1 + \operatorname{sen} x$ e $1 - \operatorname{sen} x$ são não-negativos. Assim, as barras de valor absoluto podem ser removidas e teremos

$$\boxed{\int \sec x\, dx = \ln\sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}} + C} \qquad (2)$$

EXERCÍCIOS 9.7

Nos Exercícios de 1 a 31, calcule a integral indefinida.

1. $\int \frac{x\, dx}{3 + \sqrt{x}}$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - x}$

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + 4x}}$

4. $\int x(1 + x)^{2/3}\, dx$

5. $\int \frac{\sqrt{1 + x}}{1 - x}\, dx$

6. $\int \frac{dx}{3 + \sqrt{x + 2}}$

7. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x - 2}}$

8. $\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x} - \sqrt{x + 4}}$

10. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{5x^2 + 4}}$

11. $\int \frac{(2x^5 + 3x^2)\, dx}{\sqrt{1 + 2x^3}}$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}}$

13. $\int \frac{3\, dx}{8 + 7\cos x}$

14. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$

15. $\int \frac{3\, dx}{7 + 8\cos x}$

16. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \cos x + 2}$

17. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}$

18. $\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$

19. $\int \frac{dx}{3 - 5\operatorname{sen} x}$

20. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x - 1}$

21. $\int \frac{dx}{4\operatorname{sen} x - 3\cos x}$

22. $\int \frac{dx}{3\cos x - 2\operatorname{sen} x + 3}$

23. $\displaystyle\int \frac{8\,dx}{3\cos 2x + 1}$

24. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{3\cos x - 5}$

25. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{1 + 2\cos x}$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{sen}\,x - \text{tg}\,x}$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{cotg}\,x(6 + 7\cos 2x)}$

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{cotg}\,2x(1 - \cos 2x)}$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\,\text{sen}\,x + 2\cos x + 3}$

30. $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{6 + 4\sec x}$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}(1 + \sqrt[3]{x})^2}$

32. Calcule a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$ por dois métodos: (a) use a substituição $x = 1/z$; (b) use a substituição $\sqrt{x^2 + 2x - 1} = z - x$.

Nos Exercícios de 33 a 44, calcule a integral definida.

33. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$

34. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{x + 1}\,dx$

35. $\displaystyle\int_{1/2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x}(\sqrt{2x} + 9)}$

36. $\displaystyle\int_{16}^{18} \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x^3}}$

37. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5\,\text{sen}\,x + 3}$

38. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos 2x}$

39. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3\,dx}{2\,\text{sen}\,2x + 1}$

40. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{8\,dx}{\text{tg}\,x + 1}$

41. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/2} \frac{3\,dx}{2\cos x + 1}$

42. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}\,2x\,dx}{2 + \cos x}$

43. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}\,dx$

44. $\displaystyle\int_2^{11} \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^2 + 4}}$

45. Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$ por dois métodos: (a) tomando $x = z^2$; (b) escrevendo $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$ e tomando $u = \sqrt{x} - 1$

46. Use a substituição desta secção, $z = \text{tg}\,\frac{1}{2}x$ para mostrar que $\displaystyle\int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + C$.

47. Mostre que a fórmula (2) desta secção é equivalente à fórmula $\displaystyle\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \text{tg}\,x| + C$. (*Sugestão:* multiplique o numerador e denominador sob o radical por $(1 + \text{sen}\,x)$.)

48. Usando a substituição $z = \text{tg}\,\frac{1}{2}x$, prove que

$$\int \text{cosec}\,x\,dx = \ln\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} + C$$

49. Mostre que o resultado do Exercício 48 é equivalente à fórmula $\displaystyle\int \text{cosec}\,x\,dx = \ln|\text{cosec}\,x - \text{cotg}\,x| + C$. (*Sugestão*: use um método similar ao sugerido no Exercício 47.)

50. Calcule a integral

$$\int \frac{\text{tg}\,\frac{1}{2}x}{\text{sen}\,x}\,dx$$

por dois métodos: (a) tomando $z = \text{tg}\,\frac{1}{2}x$; (b) tomando $u = \frac{1}{2}x$ e obtendo uma integral envolvendo funções trigonométricas de u.

9.8 INTEGRAIS QUE RESULTAM EM FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS (*Suplementar*)

As funções hiperbólicas inversas podem ser aplicadas em integração e algumas vezes o seu uso abrevia consideravelmente os cálculos. Entretanto, esse procedimento não soluciona nenhum problema novo. Teremos somente novas formas de obter resultados.

Da fórmula (7) na Secção 8.5

$$D_x(\text{senh}^{-1}\,u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}\,D_x u$$

de onde obtemos a fórmula de integração

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \text{senh}^{-1}\,u + C$$

Se a fórmula (1) da Secção 8.5 for usada para expressar $\text{senh}^{-1}\,u$ como logaritmo natural, obteremos o teorema a seguir.

9.8.1 TEOREMA

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \text{senh}^{-1}\,u + C = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) + C$$

A fórmula (8) da Secção 8.5 é

$$D_x(\cosh^{-1}\,u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}}\,D_x u \qquad \text{onde } u > 1$$

de onde segue que

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \cosh^{-1} u + C \qquad \text{se } u > 1$$

Combinando esse resultado com a fórmula (2) da Secção 8.5, obtemos o teorema a seguir.

9.8.2 TEOREMA

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} &= \cosh^{-1} u + C \\ &= \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) + C \quad \text{se } u > 1\end{aligned}$$

As fórmulas (9) e (10) da Secção 8.5 são, respectivamente,

$$D_x(\text{tgh}^{-1} u) = \frac{1}{1 - u^2} D_x u \qquad \text{onde } |u| < 1$$

$$D_x(\text{cotgh}^{-1} u) = \frac{1}{1 - u^2} D_x u \qquad \text{onde } |u| > 1$$

Das duas fórmulas acima obtemos

$$\int \frac{du}{1 - u^2} = \begin{cases} \text{tgh}^{-1} u + C & \text{se } |u| < 1 \\ \text{cotgh}^{-1} u + C & \text{se } |u| > 1 \end{cases}$$

Com essa fórmula e com as fórmulas (3) e (4) da Secção 8.5 temos o próximo teorema.

9.8.3 TEOREMA

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{1 - u^2} &= \begin{cases} \text{tgh}^{-1} u + C & \text{se } |u| < 1 \\ \text{cotgh}^{-1} u + C & \text{se } |u| > 1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 + u}{1 - u}\right| + C \quad \text{se } u \neq 1\end{aligned}$$

Temos também as três fórmulas dadas no teorema a seguir.

9.8.4 TEOREMA

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} &= \text{senh}^{-1} \frac{u}{a} + C \\ &= \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C \quad \text{se } a > 0 \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} &= \cosh^{-1} \frac{u}{a} + C \\ &= \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C \quad \text{se } u > a > 0 \qquad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{a^2 - u^2} &= \begin{cases} \dfrac{1}{a} \text{tgh}^{-1} \dfrac{u}{a} + C & \text{se } |u| < a \\ \dfrac{1}{a} \text{cotgh}^{-1} \dfrac{u}{a} + C & \text{se } |u| > a \end{cases} \\ &= \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C \quad \text{se } u \neq a \text{ e } a \neq 0 \qquad (3)\end{aligned}$$

Prova Podemos provar as fórmulas encontrando as derivadas do segundo membro e obtendo o integrando, ou, ainda mais diretamente, usando uma substituição por função hiperbólica. A prova de (1), derivando o segundo membro, é a seguinte:

$$D_u\left(\operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2+1}}\cdot\frac{1}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{u^2+a^2}}\cdot\frac{1}{a}$$

e como $a > 0$, $\sqrt{a^2} = a$; assim,

$$D_u\left(\operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}$$

Para obter a representação com logaritmo natural usamos a fórmula (1) da Secção 8.5 e temos

$$\operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a} = \ln\left(\frac{u}{a}+\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{u}{a}+\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{a}\right)$$

$$= \ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) - \ln a$$

Logo,

$$\operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a} + C = \ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) - \ln a + C$$

$$= \ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C_1$$

onde $C_1 = C - \ln a$.

A demonstração de (2) por uma substituição por função hiperbólica usa a identidade $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$. Seja $u = a \cosh x$, onde $x > 0$; então $du = a \operatorname{senh} x\, dx$ e $x = \cosh^{-1}(u/a)$. Substituindo no integrando, obtemos

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \int \frac{a \operatorname{senh} x\, dx}{\sqrt{a^2\cosh^2 x - a^2}}$$

$$= \int \frac{a \operatorname{senh} x\, dx}{\sqrt{a^2}\sqrt{\cosh^2 x - 1}}$$

$$= \int \frac{a \operatorname{senh} x\, dx}{\sqrt{a^2}\sqrt{\operatorname{senh}^2 x}}$$

Como $a > 0$, $\sqrt{a^2} = a$. Além disso, como $x > 0$, $\operatorname{senh} x > 0$; Logo, $\sqrt{\operatorname{senh}^2 x} = \operatorname{senh} x$. Então,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \int \frac{a \operatorname{senh} x\, dx}{a \operatorname{senh} x}$$

$$= \int dx$$

$$= x + C$$

$$= \cosh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

A representação com logaritmo natural pode ser obtida de forma semelhante à que foi usada na fórmula (1). A demonstração da fórmula (3) será deixada como exercício (veja o Exercício 23). ■

As fórmulas dos Teoremas 9.8.1 até 9.8.4 dão uma representação alternativa da integral em questão. Ao calcular uma integral, na qual uma dessas fórmulas ocorre, a representação por função hiperbólica inversa pode ser mais fácil de usar e às vezes, menos incômoda para escrever. Observe que a forma com logaritmos naturais da fórmula (3) foi obtida na Secção 9.5, usando frações parciais.

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}}$$

Solução Vamos aplicar a fórmula (1), depois de completar o quadrado.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 6x + 9) + 4}} \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2 + 4}} \\
&= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C \\
&= \ln(x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 13}) + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int_6^{10} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}}$$

Solução De (2)

$$\begin{aligned}
\int_6^{10} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} &= \cosh^{-1} \frac{x}{5}\bigg]_6^{10} \\
&= \cosh^{-1} 2 - \cosh^{-1} 1{,}2
\end{aligned}$$

Com uma calculadora obtemos $\cosh^{-1} 2 \approx 1{,}32$ e $\cosh^{-} 1{,}2 \approx 0{,}62$. Assim,

$$\int_6^{10} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} \approx 0{,}70$$

Em vez de aplicar as fórmulas, as integrais com as formas daquelas dos Teoremas 9.8.1 até 9.8.4 podem ser obtidas usando uma substituição por função hiperbólica e procedendo de forma similar àquela usada para substituição trigonométrica.

EXEMPLO 3 Calcule a integral do Exemplo 1 sem usar uma fórmula, mas usando uma substituição por função hiperbólica.

Solução Na solução do Exemplo 1 a integral dada foi reescrita como

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}}$$

Se $x - 3 = 2 \operatorname{senh} u$, então $dx = 2 \cosh u\, du$ e $u = \operatorname{senh}^{-1} \frac{1}{2}(x-3)$. Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}} &= \int \frac{2\cosh u\, du}{\sqrt{4\operatorname{senh}^2 u + 4}} \\ &= \int \frac{2\cosh u\, du}{2\sqrt{\operatorname{senh}^2 u + 1}} \\ &= \int \frac{\cosh u\, du}{\sqrt{\cosh^2 u}} \\ &= \int \frac{\cosh u\, du}{\cosh u} \\ &= \int du \\ &= u + C \\ &= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C\end{aligned}$$

que está de acordo com o resultado do Exemplo 1.

EXERCÍCIOS 9.8

Nos Exercícios de 1 a 16, expresse a integral indefinida em termos de uma função hiperbólica inversa e como um logaritmo natural.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$
3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$
4. $\int \frac{dx}{25-x^2}$
5. $\int \frac{dx}{9x^2-16}$
6. $\int \frac{dx}{4e^x - e^{-x}}$
7. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$
9. $\int \frac{dt}{\sqrt{5-e^{-2t}}}$
10. $\int \frac{dw}{4w-w^2-3}$
11. $\int \frac{dx}{2-4x-x^2}$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2+9}}$
13. $\int \frac{dx}{x^2+10x+24}$
14. $\int \frac{dz}{\sqrt{9z^2-6z-8}}$
15. $\int \frac{3\,dw}{w\sqrt{4\ln^2 w+9}}$
16. $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{x^4+6x^2+5}}$

Nos Exercícios de 17 a 22, calcule a integral definida e expresse a resposta em termos de um logaritmo natural.

17. $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$
18. $\int_{-4}^{-3} \frac{dx}{1-x^2}$
19. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$
20. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$
21. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{9x^2-12x-5}}$
22. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}}$
23. Prove a fórmula (3) usando uma substituição por função hiperbólica.
24. Uma curva passa pelo ponto $(0, a)$, $a > 0$ e a inclinação em qualquer ponto é $\sqrt{y^2/a^2 - 1}$. Prove que a curva é uma catenária.
25. Um homem com um pára-quedas salta de um avião e quando o pára-quedas se abre, sua velocidade é de 60 m/s. Se v m/s for sua velocidade t s após a abertura do pára-quedas

$$\frac{324}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = 324 - v^2$$

Resolva essa equação diferencial para obter

$$t = \frac{18}{g}\left(\operatorname{cotgh}^{-1}\frac{v}{18} - \operatorname{cotgh}^{-1}\frac{5}{3}\right)$$

26. Mostre que $\operatorname{senh}^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$, usando uma substituição trigonométrica para calcular $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}}$.

27. A região limitada pela curva $y = (16 - x^2)^{-1/2}$, pelo eixo x e pelas retas $x = -2$ e $x = 3$ gira em torno do eixo x. Mostre que o volume do sólido gerado é $\frac{1}{4}\pi[\operatorname{tgh}^{-1} \frac{3}{4} - - \operatorname{tgh}^{-1} (-\frac{1}{2})]$.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 9 E REVISÃO DE INTEGRAÇÃO

Nos Exercícios de 1 a 62, calcule a integral indefinida.

1. $\int \operatorname{tg}^2 4x \cos^4 4x\, dx$
2. $\int \frac{5x^2 - 3}{x^3 - x}\, dx$
3. $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{4 - e^x}}$
4. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}}$
5. $\int \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{x}\, dx$
6. $\int \frac{dt}{t^4 + 1}$
7. $\int \cos^2 \frac{1}{3}x\, dx$
8. $\int \frac{\sqrt{x + 1} + 1}{\sqrt{x + 1} - 1}\, dx$
9. $\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3}\, dx$
10. $\int \frac{dy}{\sqrt{y} + 1}$
11. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\, dx$
12. $\int \cos \theta \cos 2\theta\, d\theta$
13. $\int \frac{dx}{x + x^{4/3}}$
14. $\int t\sqrt{2t - t^2}\, dt$
15. $\int (\sec 3x + \operatorname{cosec} 3x)^2\, dx$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$
17. $\int \frac{2t^3 + 11t + 8}{t^3 + 4t^2 + 4t}\, dt$
18. $\int x^3 e^{3x}\, dx$
19. $\int \frac{x^4 + 1}{x^4 - 1}\, dx$
20. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2}\, dx$
21. $\int \operatorname{sen}^4 3x \cos^2 3x\, dx$
22. $\int t \operatorname{sen}^2 2t\, dt$
23. $\int \frac{dr}{\sqrt{3 - 4r - r^2}}$
24. $\int \frac{4x^2 + x - 2}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}\, dx$
25. $\int x^3 \cos x^2\, dx$
26. $\int \frac{y\, dy}{9 + 16y^4}$
27. $\int e^{t/2} \cos 2t\, dt$
28. $\int \frac{du}{u^{5/8} - u^{1/8}}$
29. $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{4 + \operatorname{sen}^4 x}\, dx$
30. $\int \frac{\sqrt{w - a}}{w}\, dw,\ a > 0$
31. $\int \operatorname{sen}^5 nx\, dx$
32. $\int \frac{dx}{x \ln x(\ln x - 1)}$
33. $\int \operatorname{cosec}^5 x\, dx$
34. $\int \frac{dx}{5 + 4 \sec x}$
35. $\int \frac{2y^2 + 1}{y^3 - 6y^2 + 12y - 8}\, dy$
36. $\int \frac{x^5\, dx}{(x^2 - a^2)^3}$
37. $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1 + \cos^2 x}$
38. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$
39. $\int \sqrt{4t - t^2}\, dt$
40. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x + 3x^2}}$
41. $\int \frac{dx}{x^4 - x}$
42. $\int \frac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 1}\, dt$
43. $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{4 - 9e^{2x}}}$
44. $\int \frac{dx}{5 + 4 \cos 2x}$
45. $\int \operatorname{cotg}^2 3x \operatorname{cosec}^4 3x\, dx$
46. $\int \frac{\operatorname{cotg} x\, dx}{3 + 2 \operatorname{sen} x}$
47. $\int x^2 \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$
48. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x - 6 - x^2}}$
49. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - 2 \operatorname{cosec} x}$
50. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$
51. $\int \frac{\cos 3t\, dt}{\operatorname{sen} 3t\sqrt{\operatorname{sen}^2 3t - \frac{1}{4}}}$
52. $\int \frac{dx}{(x^2 + 6x + 34)^2}$
53. $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^4}\, dx$
54. $\int \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x\, dx$
55. $\int \frac{\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{2t}}{\sqrt{1 - 2t}}\, dt$
56. $\int \ln(x^2 + 1)\, dx$
57. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + \sqrt{x - 1}}}$
58. $\int \frac{dx}{2 + 2 \operatorname{sen} x + \cos x}$
59. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$
60. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}$
61. $\int x^n \ln x\, dx$
62. $\int \operatorname{tg}^n x \sec^4 x\, dx,\ n > 0$

Nos Exercícios de 63 a 94, calcule a integral definida.

63. $\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos x}\, dx$
64. $\int_{1/2}^{1} \sqrt{\frac{1 - x}{x}}\, dx$
65. $\int_1^2 \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + 4x^2}\, dx$
66. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$
67. $\int_0^2 \frac{t^3\, dt}{\sqrt{4 + t^2}}$
68. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t \cos^3 t\, dt$
69. $\int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2\, dx}{(16 - x^2)^{3/2}}$
70. $\int_0^1 \frac{xe^x\, dx}{(1 + x)^2}$

71. $\int_0^{\pi/4} \sec^4 x \, dx$

72. $\int_0^2 \frac{(1-x)\,dx}{x^2+3x+2}$

73. $\int_{\pi/12}^{\pi/8} \operatorname{cotg}^3 2y \, dy$

74. $\int_0^2 (2^x + x^2)\, dx$

75. $\int_a^{a/2} \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x^2}\, dx$

76. $\int_1^2 (\ln x)^2 \, dx$

77. $\int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{(2x^2-2x+1)\,dx}{x^3+x}$

78. $\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{2-x^2}}$

79. $\int_1^{10} \log_{10}\sqrt{ex}\, dx$

80. $\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x - \cos x|\, dx$

81. $\int_1^2 \frac{x+2}{(x+1)^2}\, dx$

82. $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x e^{x^2} \cos x^2 \, dx$

83. $\int_0^{\pi} |\cos^3 x|\, dx$

84. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\operatorname{tg}^5 x|\, dx$

85. $\int_0^{1/2} \frac{2x\,dx}{x^3-x^2-x+1}$

86. $\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\, dx$

87. $\int_0^{1/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-4x^4}}$

88. $\int_0^{\pi/12} \frac{dx}{\cos^4 3x}$

89. $\int_0^1 \sqrt{2y+y^2}\, dy$

90. $\int_0^4 \frac{x^2\,dx}{x^3+4x^2+5x+2}$

91. $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{12+13\cos t}$

92. $\int_0^3 \frac{dr}{(r+2)\sqrt{r+1}}$

93. $\int_0^{16} \sqrt{4-\sqrt{x}}\, dx$

94. $\int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}t}{1+\cos\frac{1}{2}t}\, dt$

95. A densidade linear de uma barra com 3 m de comprimento num ponto a x m de uma extremidade é ke^{-3x} kg/m. Encontre a massa e o centro de massa da barra.

96. Ache o centro de massa de uma barra com 4 m, se a densidade linear num ponto a x m do extremo esquerdo for $\sqrt{9+x^2}$ kg/m.

97. Ache o comprimento do arco da parábola $y^2 = 6x$ de $x = 6$ a $x = 12$.

98. Ache a área da região limitada pela curva $y = \operatorname{sen}^{-1} 2x$, pela reta $x = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ e pelo eixo x.

99. Ache a área da região limitada pelo laço da curva $x^2 = y^4(1-y^2)$.

100. Ache o comprimento do arco da curva $y = \ln x$ de $x = 1$ a $x = e$.

101. Ache o volume do sólido de revolução gerado ao girar em torno do eixo y a região limitada pela curva $y = \ln 2x$, pelo eixo x e pela reta $x = e$.

102. A região no primeiro quadrante, limitada pela curva $y = \frac{5-x}{(x+1)^2}$, pelo eixo x e pelo eixo y gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.

103. Duas substâncias químicas A e B reagem para formar a substância C e a taxa de variação da quantidade de C é proporcional ao produto das quantidades de A e B restantes em cada instante dado. Inicialmente, existem 60 g de A e 60 g de B. Para formar 5 g de C são necessários 3 g de A e 2 g de B. Após 1 h, foram formados 15 g de C. (a) Se x g de C são formados após t h, ache uma expressão para x em termos de t. (b) Ache a quantidade de C após 3 h.

104. Um tanque tem a forma de um sólido obtido ao girar a região limitada pela curva $y = \ln x$, pelo eixo x e pelas retas $x = e$ e $x = e^2$ em torno do eixo x. Se o tanque estiver cheio de água, qual o trabalho feito ao bombear toda a água até a borda do tanque? A distância é medida em metros. Tome o eixo x positivo vertical e orientado para baixo.

105. Ache o centróide da região do Exercício 99.

106. Ache o centróide da região limitada pelo laço da curva $y^2 = x^2 - x^3$.

107. Ache o centróide da região limitada pelo eixo y e pelas curvas $y = \operatorname{sen} x - \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x + \cos x$ de $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{2}$.

108. Ache o centróide da região no primeiro quadrante, limitada pelos eixos coordenados e pela curva $y = \cos x$.

109. Um lago pode ter no máximo 10.000 peixes, de forma que a taxa de crescimento dos peixes é conjuntamente proporcional ao número de peixes presentes e à diferença entre 10.000 e o número presente. O lago contém inicialmente 400 peixes e 6 semanas depois havia 3.000 peixes. (a) Quantos peixes existirão no lago após 8 semanas? (b) Quando é máxima a taxa de crescimento? Isto é, após quantas semanas o lago irá conter 5.000 peixes?

110. Em uma cidade com 12.000 pessoas, a taxa de crescimento de uma epidemia de gripe é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que tiveram a gripe e ao número de pessoas que não a contraíram. Cinco dias atrás 400 pessoas estavam com gripe e hoje 1.000 pessoas já foram contagiadas. (a) Qual o número esperado de pessoas com gripe amanhã? (b) Em quantos dias a epidemia estará se alastrando o mais rápido possível? Isto é, quando é que metade da população será contagiada?

Os Exercícios 111 e 112 referem-se à Secção Suplementar 6.7.

111. A extremidade vertical de um tanque de água tem 3 m de largura na borda e 2 m de profundidade, tendo a forma da região limitada pelo eixo x e pelo arco da curva $y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi x$. Se o tanque estiver cheio de água, ache a força exercida pela pressão da água na extremidade.

112. Uma tora tem a forma de uma região limitada por uma reta e um arco senóide. Se a tora for submersa verticalmente na água, de modo que a reta seja o limite inferior, 2 m abaixo da superfície da água, ache a força na tora, exercida pela pressão da água.

Os Exercícios 113 e 114 referem-se à Secção Suplementar 9.8. Obtenha o resultado por uma substituição da função hiperbólica.

113. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a^2}\operatorname{cotgh}\left(\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a}\right) + C, a > 0$

114. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\operatorname{senh}\left(\operatorname{tgh}^{-1}\frac{x}{a}\right) + C, a > 0$