

CAPÍTULO 4			
VALORES EXTREMOS DAS FUNÇÕES, TÉCNICAS DE CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS E A DIFERENCIAL	4.1	Valor Funcional Máximo e Mínimo	217
	4.2	Aplicações Envolvendo Extremos Absolutos num Intervalo Fechado	224
	4.3	Teorema de Rolle e Teorema do Valor Médio	230
	4.4	Funções Crescentes e Decrescentes e o Teste da Derivada Primeira	236
	4.5	Concavidade e Pontos de Inflexão	241
	4.6	O Teste da Derivada Segunda para Extremos Relativos	249
	4.7	Traçando um Esboço do Gráfico de uma Função	254
	4.8	Tratamento Adicional dos Extremos Absolutos e Aplicações	260
	4.9	A Diferencial	269
	4.10	Solução Numérica de Equações pelo Método de Newton (Suplementar)	277
		<i>Exercícios de Revisão</i>	282
CAPÍTULO 5			
INTEGRAÇÃO E A INTEGRAL DEFINIDA	5.1	Antidiferenciação	286
	5.2	Algumas Técnicas de Antidiferenciação	295
	5.3	Equações Diferenciais e Movimento Retilíneo	303
	5.4	Área	312
	5.5	A Integral Definida	324
	5.6	Propriedades da Integral Definida	331
	5.7	O Teorema do Valor Médio para Integrais	340
	5.8	Os Teoremas Fundamentais do Cálculo	344
	5.9	Área de uma Região Plana	352
	5.10	Integração Numérica	359
		<i>Exercícios de Revisão</i>	369
CAPÍTULO 6			
APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA	6.1	Volumes de Sólidos por Cortes, Discos e Anéis Circulares	374
	6.2	Volumes de Sólidos por Invólucros Cilíndricos	383
	6.3	Comprimento de Arco do Gráfico de uma Função	388
	6.4	Centro de Massa de uma Barra	394
	6.5	Centróide de uma Região Plana	400
	6.6	Trabalho	407
	6.7	Pressão Líquida (Suplementar)	413
		<i>Exercícios de Revisão</i>	418
CAPÍTULO 7			
FUNÇÕES INVERSAS, LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS	7.1	Funções Inversas	422
	7.2	Teoremas da Função Inversa e a Derivada da Inversa de uma Função	431
	7.3	A Função Logarítmica Natural	439
	7.4	Diferenciação Logarítmica e Integrais que Resultam na Função Logarítmica Natural	449
	7.5	A Função Exponencial Natural	455
	7.6	Outras Funções Exponenciais e Logarítmicas	463

SEIS

Aplicações da Integral Definida

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$W = 9810\pi \int_{0.5}^{1.5} [f(x)]^2 x dx$$

As possibilidades de aplicação do Cálculo Integral em Geometria, Física e Engenharia são demonstradas neste Capítulo.

Nas Secções 6.1 e 6.2 aplicamos a integral definida para calcular os volumes de vários tipos de sólidos. Usamos *cortes*, *discos* e *anéis circulares* na Secção 6.1 e *invólucros cilíndricos* na Secção 6.2. Mostramos na Secção 6.3 como a integral definida pode ser usada para calcular o *comprimento de arco* do gráfico de uma função entre dois pontos.

As aplicações físicas de integração aparecem nas outras quatro secções. Determinamos *centros de massa de barras* na Secção 6.4 e *centros de massa de regiões planas* na Secção 6.5. O *trabalho* realizado por uma força variável atuando sobre um objeto é calculado na Secção 6.6. A Secção Suplementar 6.7 trata

da aplicação de integrais definidas para determinar a força causada pela *pressão líquida*, tal como a pressão da água contra o lado de um recipiente.

6.1 VOLUMES DE SÓLIDOS POR CORTES, DISCOS E ANÉIS CIRCULARES

A definição de área de uma região plana nos levou à definição da integral definida. No desenvolvimento, usamos a fórmula para a área de um retângulo, da Geometria Plana. Usamos um processo similar para obter volumes de determinados tipos de sólidos. Um deles é um *cilindro reto*. Note que neste capítulo um cilindro é considerado sólido, enquanto que mais adiante, no Capítulo 15, definimos um cilindro como uma superfície.

Um sólido será um **cilindro reto** se for limitado por duas regiões planas congruentes R_1 e R_2 , situadas em planos paralelos e por uma superfície lateral gerada por um segmento de reta, tendo seus extremos sobre os limites de R_1 e R_2 , que se move de modo que seja sempre perpendicular aos planos de R_1 e R_2 . A Figura 1 mostra um cilindro reto. A altura do cilindro é a distância perpendicular entre os planos de R_1 e R_2 e a base é R_1 ou R_2 . Se a base do cilindro reto for uma região encerrada por um retângulo, teremos um **paralelepípedo retangular**, que aparece na Figura 2, e se a base for uma região encerrada por um círculo, temos um **cilindro circular reto**, como mostra a Figura 3.

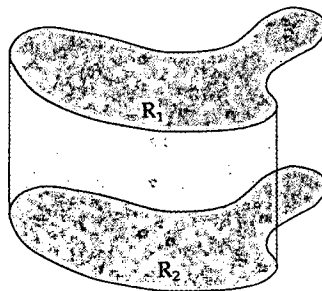


FIGURA 1

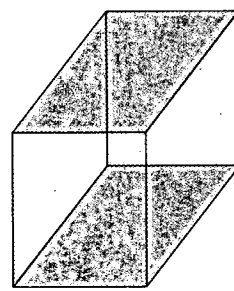


FIGURA 2

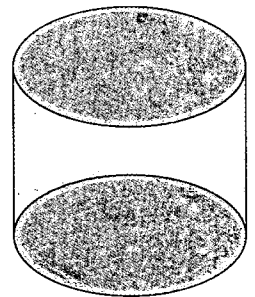


FIGURA 3

Se a área da base de um cilindro reto for A unidades quadradas e a altura for h unidades, então, da geometria dos sólidos, se V unidades cúbicas for o volume

$$V = Ah$$

Usaremos essa fórmula para obter um método de calcular a medida do volume de um sólido para o qual a área de qualquer seção plana (uma região plana formada pela intersecção de um plano com o sólido) que é perpendicular a um eixo, seja uma função da distância perpendicular da seção plana de um ponto fixo sobre o eixo. A Figura 4 mostra tal sólido S que se situa entre planos perpendiculares ao eixo x em a e b . Seja $A(x)$ unidades quadradas a área da seção plana de S que é perpendicular ao eixo x em x . Exigimos que A seja contínua em $[a, b]$.

Seja Δ uma partição do intervalo fechado $[a, b]$, dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Existem, então, n subintervalos da forma $[x_{i-1}, x_i]$, onde $i = 1, 2, \dots, n$, sendo $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do i -ésimo subintervalo. Escolhemos qualquer número ξ_i com $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, em cada subintervalo, e construímos os cilindros retos com $\Delta_i x$ unidades de altura e a área das seções planas igual a $A(\xi_i)$ unidades quadradas. A Figura 5 mostra o i -ésimo cilindro reto, que cha-

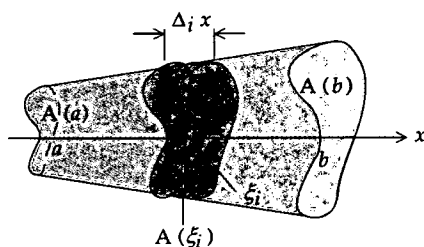


FIGURA 4

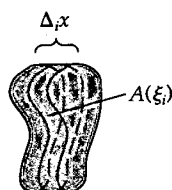


FIGURA 5

maremos de elemento de volume. Se $\Delta_i V$ unidades cúbicas for o volume do i -ésimo elemento, então

$$\Delta_i V = A(\xi_i) \Delta_i x$$

A soma das medidas dos volumes de n elementos é

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i V = \sum_{i=1}^n A(\xi_i) \Delta_i x \quad (1)$$

que é a soma de Riemann. Essa soma é uma aproximação do que intuitivamente pensamos ser o número de unidades cúbicas no volume do sólido. Quanto menor tomarmos a norma $\|\Delta\|$ da partição, maior será n e mais perto estaremos da aproximação do número V que queremos designar para a medida do volume. Portanto, definimos V como o limite da soma de Riemann em (1) quando $\|\Delta\|$ aproxima-se de zero. Esse limite existe, pois A é contínua em $[a, b]$. Temos, então, a definição a seguir.

6.1.1 DEFINIÇÃO

Seja S um sólido tal que S esteja entre planos perpendiculares ao eixo x em a e b . Se a medida da área da secção plana de S no plano perpendicular ao eixo x em x for dada por $A(x)$, onde A é contínua em $[a, b]$, então a medida do volume de S será dada por

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(\xi_i) \Delta_i x \\ &= \int_a^b A(x) dx \end{aligned}$$

A terminologia **corte** é usada quando aplicamos a Definição 6.1.1 para encontrar o volume de um sólido. O processo é similar a cortar um pão em fatias bem finas, de modo que todas elas juntas componham um pão inteiro. Na ilustração a seguir mostramos que a Definição 6.1.1 é consistente com a fórmula da geometria dos sólidos para o volume de um cilindro circular reto.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Na Figura 6 há um cilindro circular reto que tem h unidades de altura e r unidades de raio da base, sendo os eixos coordenados escolhidos de modo que a origem esteja no centro de uma base e a altura seja medida ao longo do eixo positivo x . Uma secção plana a uma distância de x unidades a partir da origem tem uma área de $A(x)$ unidades quadradas, onde

$$A(x) = \pi r^2$$

Um elemento de volume, mostrado na Figura 6, é um cilindro reto cuja área da base é $A(\xi_i)$ unidades quadradas e uma espessura de $\Delta_i x$ unidades. Assim, se V unidades cúbicas for o volume do cilindro circular reto.

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(\xi_i) \Delta_i x \\ &= \int_0^h A(x) dx \\ &= \int_0^h \pi r^2 dx \\ &= \pi r^2 x \Big|_0^h \\ &= \pi r^2 h \end{aligned}$$

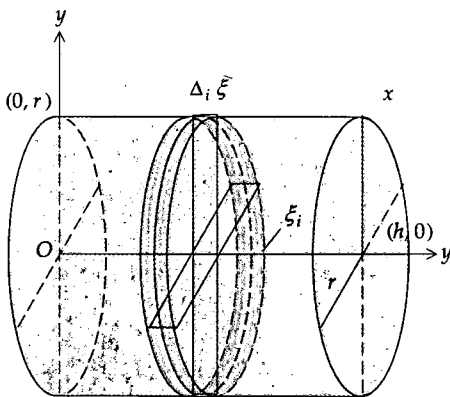


FIGURA 6

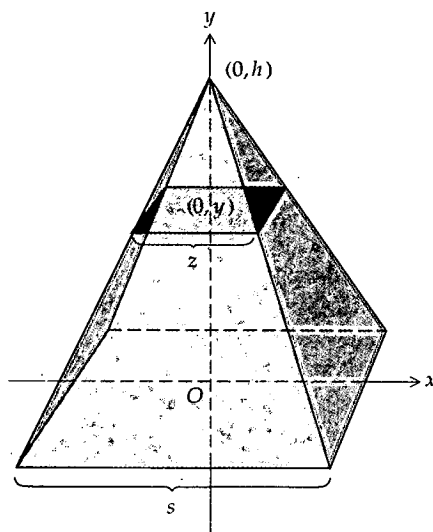


FIGURA 7

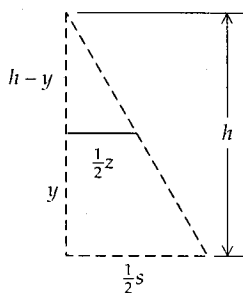


FIGURA 8

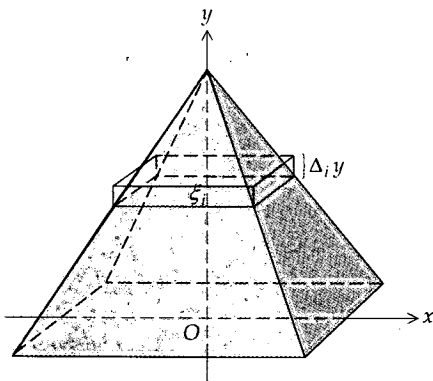


FIGURA 9

Na Definição 6.1.1 substituímos x por y . Em tal situação, S é um sólido situado entre planos desenhados perpendicularmente ao eixo y em c e d , e a medida da área da secção plana de S , traçada perpendicularmente ao eixo y em y é dada por $A(y)$, onde A é contínua em $[c, d]$. Então, a medida do volume de S é dada por

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(\xi_i) \Delta_i y \\ &= \int_c^d A(y) dy \end{aligned}$$

EXEMPLO 1 Use um corte para achar o volume de uma pirâmide reta cuja altura é h unidades e cuja base é um quadrado com s unidades de lado.

Solução A Figura 7 mostra uma pirâmide reta e os eixos coordenados escolhidos, de modo que o centro da base esteja na origem e a altura seja medida ao longo do lado positivo do eixo y . A secção plana da pirâmide traçada perpendicularmente ao eixo y em $(0, y)$ é um quadrado. Se o comprimento de um lado desse quadrado for z unidades, então, pelos triângulos similares (veja a Figura 8)

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}z}{h-y} &= \frac{\frac{1}{2}s}{h} \\ z &= \frac{s}{h}(h-y) \end{aligned}$$

Portanto, se $A(y)$ unidades quadradas for a área da secção plana

$$A(y) = \frac{s^2}{h^2} (h-y)^2$$

A Figura 9 mostra um elemento de volume que é um cilindro reto de área $A(\xi_i)$ unidades quadradas e uma espessura de $\Delta_i y$ unidades. Assim, se V unidades cúbicas for o volume da pirâmide reta

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(\xi_i) \Delta_i y \\ &= \int_0^h A(y) dy \\ &= \int_0^h \frac{s^2}{h^2} (h-y)^2 dy \\ &= \frac{s^2}{h^2} \left[-\frac{(h-y)^3}{3} \right]_0^h \\ &= \frac{s^2}{h^2} \left[0 + \frac{h^3}{3} \right] \\ &= \frac{1}{3} s^2 h \end{aligned}$$

Agora mostramos como a Definição 6.1.1 pode ser aplicada para encontramos o volume de um **sólido de revolução** que é um sólido obtido com a rotação de uma região num plano em torno de uma reta no plano, chamada de **eixo de revolução**, o qual pode ou não interceptar a região. Por exemplo, se a região

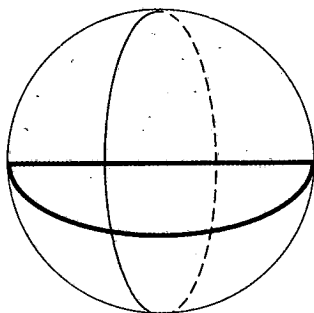


FIGURA 10

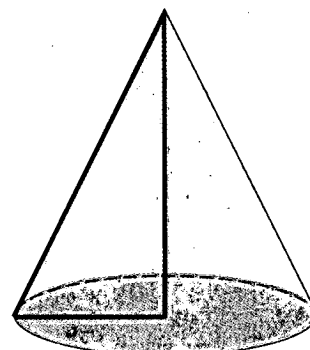


FIGURA 11

limitada por um semi-círculo e seu diâmetro for girada em torno do diâmetro, uma esfera será descrita (veja a Figura 10). Um cone circular reto é gerado se a região limitada por um triângulo retângulo for girada em torno de um de seus catetos (veja a Figura 11).

Consideremos, em primeiro lugar, o caso em que o eixo de revolução é uma fronteira da região que gira. Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. A Figura 12 mostra a região R e o i -ésimo retângulo. Quando o i -ésimo retângulo é girado em torno do eixo x , obtemos um elemento de volume que é um disco cuja base é um círculo de raio $f(\xi_i)$ unidades e cuja altura é $\Delta_i x$ unidades, como é mostrado na Figura 13. Se $\Delta_i V$ unidades cúbicas for o volume desse disco,

$$\Delta_i V = \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x$$

Como temos n retângulos, iremos obter n discos circulares dessa forma, e a soma das medidas dos volumes desses n discos circulares será

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i V = \sum_{i=1}^n \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x$$

Essa é uma soma de Riemann da forma (1) onde $A(\xi_i) = \pi [f(\xi_i)]^2$. Portanto, se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução, segue da Definição 6.1.1 que V será o limite dessa soma de Riemann quando $\|\Delta\|$ aproximar-se de zero. Esse limite existe, pois f^2 é contínua em $[a, b]$, já que supusemos que f seja contínua nesse número. Temos então o teorema a seguir.

6.1.2 TEOREMA

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Se S for o sólido de revolução obtido pela rotação efetuada, em torno do eixo x , da região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, e se V for o número de unidades cúbicas no volume de S , então

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x \\ &= \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \end{aligned}$$

► **ILUSTRAÇÃO 2** Vamos encontrar o volume do sólido de revolução gerado quando a região limitada pela curva $y = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$

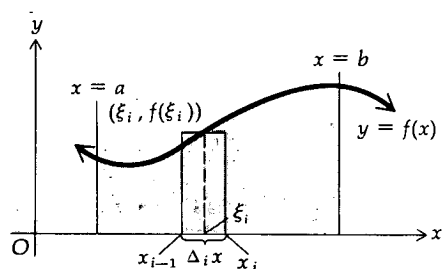


FIGURA 12

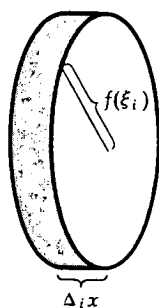


FIGURA 13

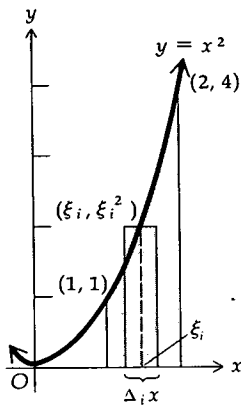


FIGURA 14

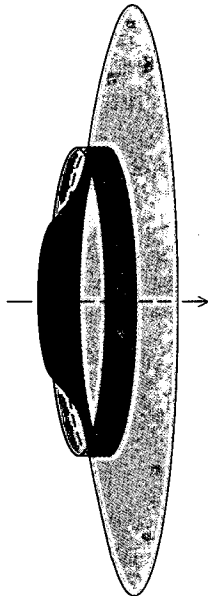


FIGURA 15

e $x = 2$ for rotacionada em torno do eixo x . Consulte a Figura 14, que mostra a região e um elemento retangular de área. A Figura 15 mostra um elemento de volume e o sólido de revolução. A medida do volume do disco circular é dada por

$$\begin{aligned} \Delta_i V &= \pi(\xi_i^2)^2 \Delta_i x \\ &= \pi \xi_i^4 \Delta_i x \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi \xi_i^4 \Delta_i x \\ &= \pi \int_1^2 x^4 dx \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{31}{5} \pi \end{aligned}$$

Logo, o volume do sólido de revolução é $\frac{31}{5}\pi$ unidades cúbicas. ◀

Um teorema análogo ao Teorema 6.1.2 aplica-se quando tanto o eixo de revolução quanto o limite de uma região rotacionada forem o eixo y ou qualquer reta paralela ao eixo x ou ao eixo y .

EXEMPLO 2 Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $x = 1$, da região limitada pela curva

$$(x - 1)^2 = 20 - 4y$$

e pelas retas $x = 1$, $y = 1$ e $y = 3$ e à direita de $x = 1$.

Solução A região, bem como um elemento retangular de área, estão na Figura 16. Um elemento de volume e o sólido de revolução aparecem na Figura 17.

Vamos resolver em x a equação da curva, obtendo

$$x = \sqrt{20 - 4y} + 1$$

Seja $g(y) = \sqrt{20 - 4y} + 1$. Tomamos uma partição do intervalo $[1, 3]$ no eixo y .

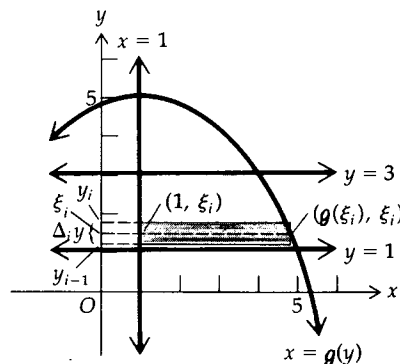


FIGURA 16

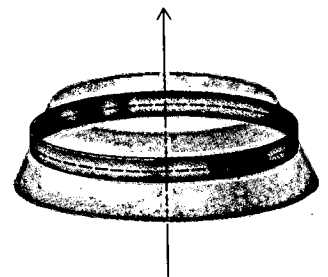


FIGURA 17

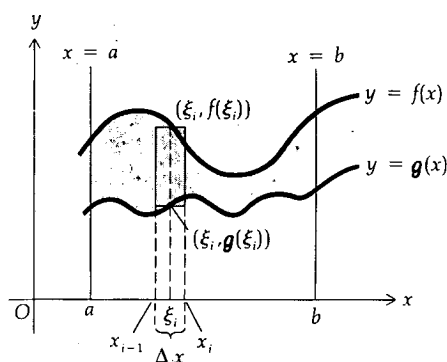


FIGURA 18

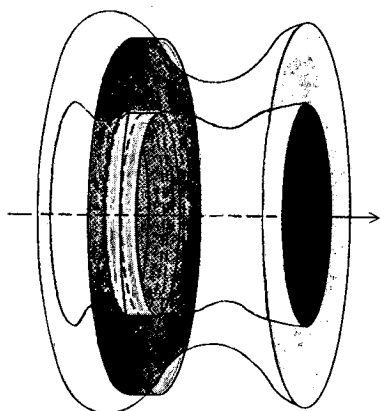


FIGURA 19

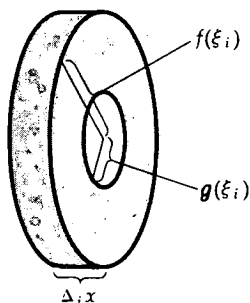


FIGURA 20

Então, se $\Delta_i V$ unidades cúbicas for o volume do i -ésimo disco circular,

$$\begin{aligned}\Delta_i V &= \pi[g(\xi_i) - 1]^2 \Delta_i y \\ &= \pi[(\sqrt{20 - 4\xi_i} + 1) - 1]^2 \Delta_i y \\ &= \pi(20 - 4\xi_i) \Delta_i y\end{aligned}$$

Se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução,

$$\begin{aligned}V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi(20 - 4\xi_i) \Delta_i y \\ &= \pi \int_1^3 (20 - 4y) dy \\ &= \pi [20y - 2y^2]_1^3 \\ &= \pi[(60 - 18) - (20 - 2)] \\ &= 24\pi\end{aligned}$$

O volume do sólido de revolução é, portanto, 24π unidades cúbicas.

Suponha, agora, que o eixo de revolução não esteja na fronteira da região a ser rotacionada. Sejam f e g duas funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Seja R a região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$. A região R e o i -ésimo retângulo são mostrados na Figura 18, e o sólido de revolução aparece na Figura 19. Quando o i -ésimo retângulo gira em torno do eixo x , um anel circular (ou arruela) é obtido, conforme mostra a Figura 20. O número que dá a diferença das medidas das áreas das duas regiões circulares é $\pi[f(\xi_i)]^2 - \pi[g(\xi_i)]^2$ e a espessura é $\Delta_i x$ unidades. Logo, a medida do volume do anel circular é dada por:

$$\Delta_i V = \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \Delta_i x$$

A soma das medidas dos volumes dos n anéis circulares formados pela rotação dos n elementos retangulares de área em torno do eixo x é

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i V = \sum_{i=1}^n \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \Delta_i x$$

Essa é a soma de Riemann da forma (1) onde $A(\xi_i) = \pi[f(\xi_i)]^2 - \pi[g(\xi_i)]^2$. Da Definição 6.1.1, o número de unidades cúbicas no volume do sólido de revolução é definido como sendo o limite dessa soma de Riemann, quando $\|\Delta\|$ tende a zero. O limite existe desde que $f^2 - g^2$ seja contínua em $[a, b]$, pois f e g são contínuas nesse intervalo. Temos, então, o teorema a seguir.

6.1.3 TEOREMA

Sejam f e g funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Então, se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução gerado com a rotação, em torno do eixo x , da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$,

$$\begin{aligned}V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \Delta_i x \\ &= \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx\end{aligned}$$

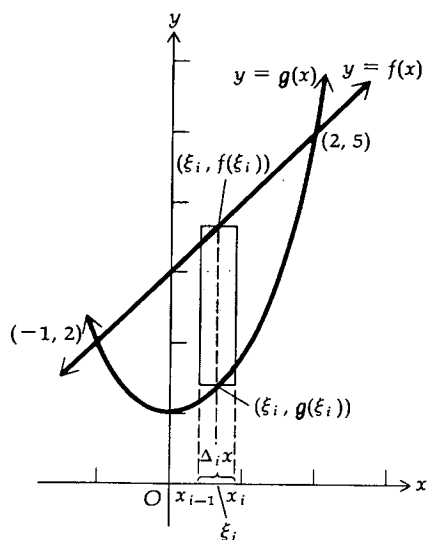


FIGURA 21

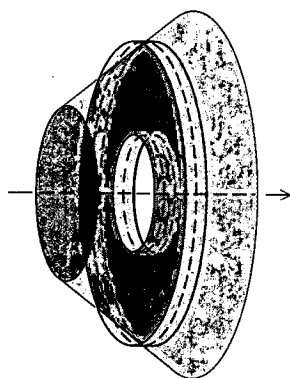


FIGURA 22

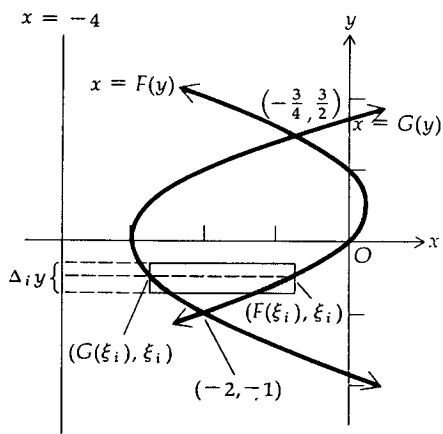


FIGURA 23

Como antes, uma definição similar aplica-se quando o eixo de revolução for o eixo y ou qualquer reta paralela aos eixos x ou y .

EXEMPLO 3 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x , da região limitada pela parábola $y = x^2 + 1$ e pela reta $y = x + 3$.

Solução Os pontos de intersecção são $(-1, 2)$ e $(2, 5)$. A Figura 21 mostra a região e um elemento de área retangular. Um elemento de volume e o sólido de revolução estão na Figura 22.

Se $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x^2 + 1$, a medida do volume do anel circular é

$$\Delta_i V = \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \Delta_i x$$

Se V unidades cúbicas for o volume do sólido, então

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \Delta_i x \\ &= \pi \int_{-1}^2 ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx \\ &= \pi \int_{-1}^2 [(x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2] dx \\ &= \pi \int_{-1}^2 [-x^4 - x^2 + 6x + 8] dx \\ &= \pi \left[-\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x \right]_{-1}^2 \\ &= \left[\left(-\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 12 + 16 \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3 - 8 \right) \right] \\ &= \frac{117}{5} \pi \end{aligned}$$

Logo, o volume do sólido de revolução é $\frac{117}{5}\pi$ unidades cúbicas.

EXEMPLO 4 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = -4$, da região limitada pelas parábolas $x = y - y^2$ e $x = y^2 - 3$.

Solução As curvas interceptam-se nos pontos $(-2, -1)$ e $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$. A região, bem como um elemento de área retangular, estão na Figura 23. A Figura 24 mostra o sólido de revolução, e também um elemento de volume, que é um anel circular.

Seja $F(y) = y - y^2$ e $G(y) = y^2 - 3$. O número de unidades cúbicas no volume do anel circular é

$$\Delta_i V = \pi([4 + F(\xi_i)]^2 - [4 + G(\xi_i)]^2) \Delta_i y$$

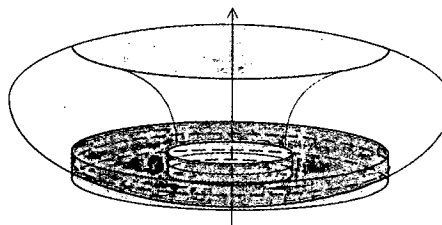


FIGURA 24

Assim,

$$\begin{aligned}
 V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi([4 + F(\xi_i)]^2 - [4 + G(\xi_i)]^2) \Delta_i y \\
 &= \pi \int_{-1}^{3/2} [(4 + y - y^2)^2 - (4 + y^2 - 3)^2] dy \\
 &= \pi \int_{-1}^{3/2} (-2y^3 - 9y^2 + 8y + 15) dy \\
 &= \pi \left[-\frac{1}{2}y^4 - 3y^3 + 4y^2 + 15y \right]_{-1}^{3/2} \\
 &= \frac{875}{32}\pi
 \end{aligned}$$

O volume do sólido de revolução é, então, $\frac{875}{32}\pi$ unidades cúbicas.

Como vimos, o cálculo de volumes por discos e anéis circulares constitui um caso particular do cálculo de volumes por corte. Agora daremos outro exemplo para achar um volume, através de um corte.

EXEMPLO 5 Uma cunha é tirada de um cilindro circular reto com um raio de r cm por dois planos, um perpendicular ao eixo x do cilindro e o outro interceptando o primeiro ao longo de um diâmetro da secção plana circular, a um ângulo cuja medida é 60° . Ache o volume da cunha.

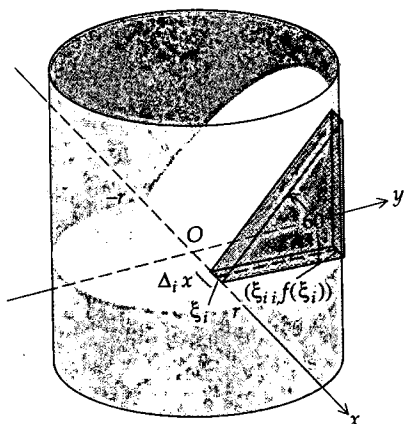


FIGURA 25

Solução A cunha está na Figura 25. O plano xy é tomado como o plano perpendicular ao eixo do cilindro, e a origem está no ponto de perpendicularidade. Uma equação da secção plana circular é, então, $x^2 + y^2 = r^2$. Toda secção plana da cunha perpendicular ao eixo x é um triângulo retângulo. Um elemento de volume é um cilindro reto, com $\Delta_i x$ cm de altura e a área da base dada por $\frac{1}{2}\sqrt{3}[f(\xi_i)]^2$ cm², onde $f(x)$ é obtido ao resolvermos a equação do círculo em y , tomando $y = f(x)$. Logo, temos $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Assim, se V cm³ for o volume da cunha,

$$\begin{aligned}
 V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\sqrt{3}(r^2 - \xi_i^2) \Delta_i x \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-r}^r \\
 &= \frac{2}{3}\sqrt{3}r^3
 \end{aligned}$$

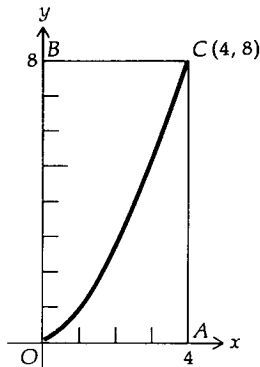
Logo, o volume da cunha é $\frac{2}{3}\sqrt{3}r^3$ cm³.

EXERCÍCIOS 6.1

1. Deduza a fórmula para o volume de uma esfera de raio r unidades por meio de um corte.
2. Deduza a fórmula para o volume de um cone circular reto com h unidades de altura e a unidades de raio da base, usando um corte.
3. Ache o volume do sólido de revolução gerado quando a região limitada pela curva $y = x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 2$ é rotacionada em torno do eixo x .
4. Ache o volume do sólido de revolução gerado quando a região limitada pela curva $y = x^2 + 1$, pelo eixo x e pelas retas $x = 2$ e $x = 3$ for rotacionada em torno do eixo x .

Nos Exercícios de 5 a 12, ache o volume do sólido de revolução descrito quando a região dada da figura for rotacionada em torno da reta indicada. Uma equação da curva na figura é $y^2 = x^3$.

5. OAC em torno do eixo x .
6. OAC em torno da reta AC .
7. OAC em torno da reta BC .
8. OAC em torno do eixo y .
9. OBC em torno do eixo y .
10. OBC em torno da reta BC .
11. OBC em torno da reta AC .
12. OBC em torno do eixo x .



Nos Exercícios de 13 a 16, ache o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno da reta indicada, da região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$, pelo eixo x e pela reta $x = 4$.

13. a reta $x = 4$
14. o eixo x
15. o eixo y
16. a reta $y = 2$
17. Deduza a fórmula para o volume de uma esfera, rotacionando a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ e pelo eixo x em torno do eixo x .
18. Deduza a fórmula para o volume de um cone circular reto com h unidades de altura e a unidades de raio da base, rotacionando a região limitada pelo triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.
19. Deduza a fórmula para o volume do tronco de um cone circular reto, rotacionando o segmento de reta de $(0, b)$ a (h, a) em torno do eixo x .
20. Ache, por meio de um corte, o volume do tetraedro com três faces mutuamente perpendiculares e três arestas mutuamente perpendiculares, cujos comprimentos são 3; 4 e 7 cm.
21. A região limitada pela curva $y = \sec x$, pelo eixo x , pelo eixo y e pela reta $x = \frac{\pi}{4}$ gira em torno do eixo x . Ache o volume do sólido gerado.
22. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = \operatorname{cosec} x$, pelo eixo x , e pelas retas $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{\pi}{3}$ em torno do eixo x .
23. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada por um arco da curva do seno em torno do eixo x . (Sugestão: use a identidade $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.)
24. A região limitada pelo eixo y e pelas curvas $y = \sin x$ e $y = \cos x$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ é girada em torno do eixo x . Ache o volume do sólido gerado. (Sugestão: use as seguintes identidades: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ e $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.)
25. Ache o volume do sólido gerado se a região do Exercício 23 girar em torno da reta $y = 1$.
26. Ache o volume do sólido gerado se a região do Exercício 24 girar em torno da reta $y = 1$.
27. A região limitada pela curva $y = \cotg x$, pela reta $x = \frac{1}{6}\pi$, e pelo eixo x é girada em torno do eixo x . Ache o volume do sólido gerado.
28. A região limitada pela curva $y = \tg x$, a reta $x = \frac{1}{3}\pi$ e o eixo x é rotacionada em torno do eixo x . Ache o volume do sólido gerado.
29. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = -4$, da região limitada por aquela reta e pela parábola $x = 4 + 6y + 2y^2$.
30. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x , da região limitada pela parábola $y^2 = 4x$ e pela reta $y = x$.
31. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = 4$, da região do Exercício 30.
32. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada pela reta que passa por $(1, 3)$ e $(3, 7)$ e pelas retas $y = 3$, $y = 7$ e $x = 0$.
33. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = -3$, da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 1 + x - x^2$.
34. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x , da região limitada pelo laço da curva cuja equação é $2y^2 = x(x^2 - 4)$.
35. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x , da região limitada pelo laço da curva cuja equação é $x^2y^2 = (x^2 - 9)(1 - x^2)$.
36. Um tanque de óleo na forma de uma esfera tem um diâmetro de 18 m. Quanto óleo o tanque contém se a profundidade do óleo é de 7 m?
37. Um parabolóide de revolução é obtido fazendo girar a parábola $y^2 = 4px$ em torno do eixo x . Ache o volume limitado por um parabolóide de revolução e um plano perpendicular a seu eixo, se o plano estiver a 10 cm do vértice e se a secção plana de intersecção for um círculo com um raio de 6 cm.
38. A região do primeiro quadrante, limitada pela curva $y = \sec x$, pelo eixo y e pela reta $y = 2$ faz uma rotação em torno do eixo x . Ache o volume do sólido gerado.
39. A região limitada pela curva $y = \operatorname{cosec} x$ e pelas retas $y = 2$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$ é girada em torno do eixo x . Ache o volume do sólido gerado.
40. A região no primeiro quadrante, limitada pelos eixos coordenados, pela reta $y = 1$ e pela curva $y = \cotg x$, faz uma rotação em torno do eixo x . Ache o volume do sólido gerado.
41. Um sólido de revolução é formado pela rotação, em torno do eixo x , da região limitada pela curva $y = \sqrt{2x + 4}$, pelo eixo x , pelo eixo y , e pela reta $x = c$ ($c > 0$). Para que valor de c o volume será de 12π unidades cúbicas?
42. A base de um sólido é a região encerrada por um círculo com 2 unidades de raio. Ache o volume do sólido se todas as secções planas perpendiculares a um diâmetro fixo da base forem quadrados.
43. A base de um sólido é a região encerrada por um círculo com 7 cm de raio. Ache o volume do sólido, se todas as secções planas perpendiculares a um diâmetro fixo da base forem triângulos equiláteros.

44. A base de um sólido é a região encerrada por um círculo com um raio de 4 cm, e cada secção plana perpendicular a um diâmetro fixo da base é um triângulo isósceles com 10 cm de altura e uma corda do círculo como base. Ache o volume do sólido.
45. A base de um sólido é a região do Exercício 43. Ache o volume do sólido se todas as secções planas perpendiculares a um diâmetro fixo da base forem triângulos isósceles de altura igual à distância da secção plana do centro do círculo. O lado do triângulo situado na base do sólido não é um dos lados de igual comprimento.
46. A base de um sólido é a região encerrada por um círculo com um raio de r unidades, e todas as secções planas perpendiculares a um diâmetro fixo da base são triângulos retângulos isósceles, com a hipotenusa no plano da base. Ache o volume do sólido.
47. Resolva o Exercício 46, se os triângulos retângulos isósceles tiverem um dos catetos no plano da base.
48. Dois cilindros circulares retos, cada um tendo um raio de r unidades, têm seus eixos interceptando-se em ângulos retos. Ache o volume do sólido comum aos dois cilindros.
49. Uma cunha é cortada de um sólido com a forma de um cilindro circular reto, o qual tem um raio de r cm, por um plano através de um diâmetro da base e inclinado em relação ao plano da base segundo um ângulo cuja medida é 45° . Ache o volume da cunha.
50. Uma cunha é cortada de um sólido com a forma de um cone circular reto tendo um raio da base com 5 cm e uma altura de 20 cm, por dois planos contendo o eixo do cone. O ângulo entre os planos tem uma medida de 30° . Ache o volume da cunha.

6.2 VOLUMES DE SÓLIDOS POR INVÓLUCROS CILÍNDRICOS

Na secção precedente encontramos o volume de um sólido de revolução, tomando elementos retangulares de área perpendiculares ao eixo de revolução e o elemento de volume era um disco circular ou um anel circular. Para alguns sólidos de revolução esse método pode não ser viável. Por exemplo, suponha que desejemos encontrar o volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada pelo gráfico de $y = 3x - x^3$, pelo eixo y e pela reta $y = 2$. A Figura 1 mostra a região. Se um elemento de área for perpendicular ao eixo y , como mostra a figura, o elemento de volume será um disco circular e para determinar o volume do sólido de revolução usamos uma integral da forma $\int_0^2 A(y) dy$. Mas para obter uma fórmula para $A(y)$ é necessário resolver a equação cúbica $y = 3x - x^3$ para x em termos de y , a qual é muito trabalhosa. Logo, discutiremos agora um procedimento alternativo para calcular o volume de um sólido de revolução, que é mais fácil de aplicar nesta e em outras situações.

O método envolve tomar elementos retangulares de área, paralelos ao eixo de revolução. Então, quando um elemento de área for rotacionado em torno do eixo de revolução, obteremos um **invólucro cilíndrico**, ou seja, um sólido contido entre dois cilindros, com o mesmo centro e eixo. Tal invólucro cilíndrico está na Figura 2.

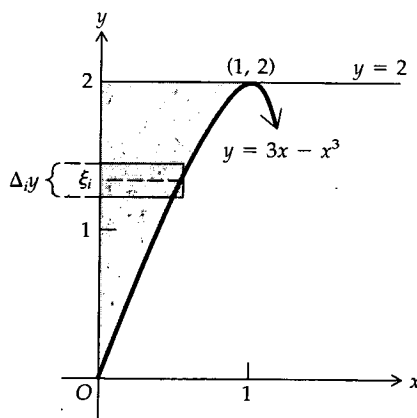


FIGURA 1

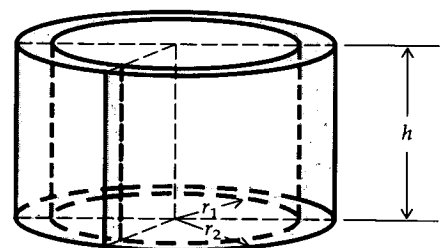


FIGURA 2

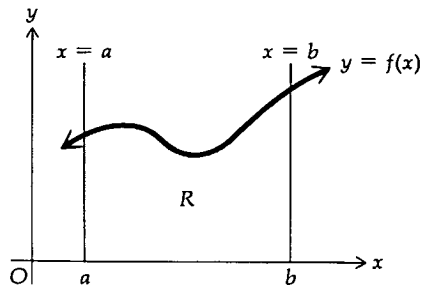


FIGURA 3

Se o invólucro cilíndrico tiver um raio interno com r_1 unidades, um raio externo com r_2 unidades e uma altura com h unidades, então o seu volume de V unidades cúbicas será dado por

$$V = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h \quad (1)$$

Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Além disso, suponha que $a \geq 0$. Tal região é ilustrada na Figura 3. Se R girar em torno do eixo y , um sólido de revolução S será gerado. Tal sólido é mostrado na Figura 4. Para encontrar o volume S quando os elementos de área são tomados paralelamente ao eixo y , prosseguimos da seguinte maneira:

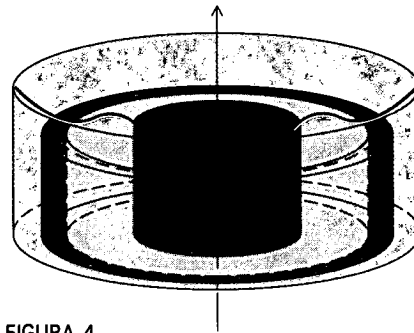


FIGURA 4

Seja Δ uma partição do intervalo fechado $[a, b]$, dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Seja m_i o ponto médio do i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Temos, então, que $m_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$. Considere o retângulo tendo altura $f(m_i)$ unidades e comprimento $\Delta_i x$ unidades. Se esse retângulo girar em torno do eixo y , um invólucro cilíndrico será obtido. A Figura 4 mostra o invólucro cilíndrico gerado pelo elemento retangular de área.

Se $\Delta_i V$ der a medida do volume desse invólucro cilíndrico, temos, da fórmula (1), onde $r_1 = x_{i-1}$, $r_2 = x_i$ e $h = f(m_i)$,

$$\Delta_i V = \pi x_i^2 f(m_i) - \pi x_{i-1}^2 f(m_i)$$

$$\Delta_i V = \pi(x_i^2 - x_{i-1}^2) f(m_i)$$

$$\Delta_i V = \pi(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1}) f(m_i)$$

Como $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ e como $x_i + x_{i-1} = 2m_i$, então dessa equação,

$$\Delta_i V = 2\pi m_i f(m_i) \Delta_i x$$

Se n elementos retangulares de área girarem em torno do eixo y , serão obtidos n invólucros cilíndricos. A soma das medidas dos volumes é

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i V = \sum_{i=1}^n 2\pi m_i f(m_i) \Delta_i x$$

que é uma soma de Riemann. O limite dessa soma quando $\|\Delta\|$ aproxima-se de zero existe, pois se f for contínua em $[a, b]$, então, a função com valores $2\pi x f(x)$ também será. O limite é a integral definida $\int_a^b 2\pi x f(x) dx$, e dá o volume do sólido de revolução. Esse resultado é resumido no teorema a seguir.

6.2.1 TEOREMA

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, onde $a \geq 0$. Suponha que $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Se R for a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, se S for o sólido de revolução obtido pela sua rotação R em torno do eixo y e se V unidades cúbicas for o volume de S , então

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi m_i f(m_i) \Delta_i x \\ &= 2\pi \int_a^b x f(x) dx \end{aligned}$$

Enquanto a validade do Teorema 6.2.1 deveria parecer plausível, tendo em vista a discussão que precedeu o seu enunciado; uma prova requer que mostremos que o mesmo volume seja obtido pelo método do disco do Teorema 6.1.2. No artigo de fevereiro de 1984 da *American Mathematical Monthly* (Vol. 91, n.º 2) Charles A. Cable da Allegheny College apresentou uma prova usando a integração por partes (discutida na Secção 9.1).

A fórmula para a medida do volume do invólucro cilíndrico é facilmente lembrada, notando que $2\pi m_i$, $f(m_i)$ e $\Delta_i x$ são, respectivamente, os números que dão as medidas da circunferência do círculo tendo por raio a média entre os raios interno e externo do invólucro, a altura e a espessura do invólucro. Assim, o volume do invólucro é

$$2\pi(\text{raio médio})(\text{altura})(\text{espessura})$$

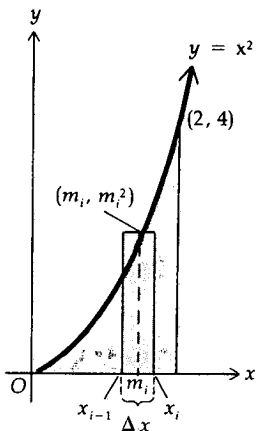


FIGURA 5

EXEMPLO 1 A região limitada pela curva $y = x^2$, pelo eixo x e pela reta $x = 2$ gira em torno do eixo y . Ache o volume do sólido gerado. Tome os elementos de área paralelos ao eixo de revolução.

Solução A Figura 5 mostra a região e um elemento de área retangular. A Figura 6 mostra o sólido de revolução e o invólucro cilíndrico obtido, ao girar o elemento de área retangular em torno do eixo y .

O elemento de volume é um invólucro cilíndrico cuja medida de volume é

$$\begin{aligned} \Delta_i V &= 2\pi m_i (m_i^2) \Delta_i x \\ &= 2\pi m_i^3 \Delta_i x \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi m_i^3 \Delta_i x \\ &= 2\pi \int_0^2 x^3 dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

Logo, o volume do sólido de revolução é 8π unidades cúbicas.

No exemplo a seguir, calculamos o volume do sólido de revolução discutido no início desta secção.

EXEMPLO 2 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada pelo gráfico de $y = 3x - x^3$, pelo eixo y e pela reta $y = 2$.

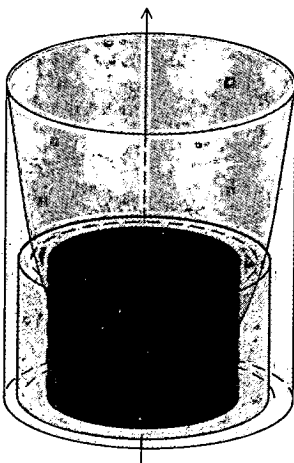


FIGURA 6

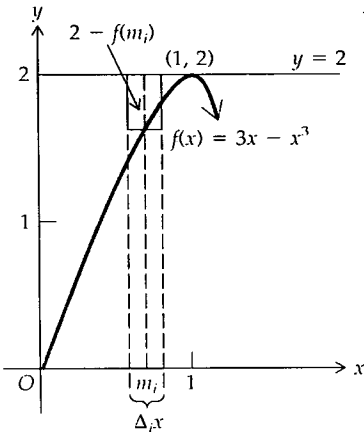


FIGURA 7

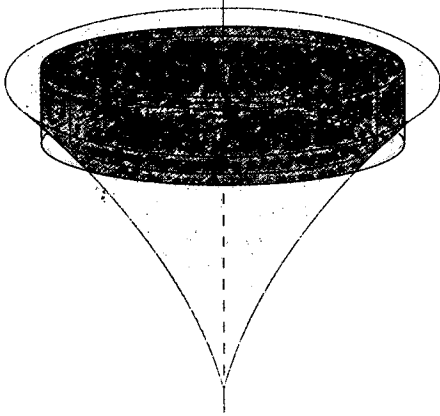


FIGURA 8

Solução Seja $f(x) = 3x - x^3$. A Figura 7 mostra a região e um elemento retangular de área paralelo ao eixo y . O sólido de revolução e um elemento de volume do invólucro cilíndrico aparecem na Figura 8. O raio médio do invólucro cilíndrico é m_i unidades, a altura é $[2 - f(m_i)]$ unidades e a espessura é $\Delta_i x$ unidades. Portanto, se $\Delta_i V$ unidades cúbicas for o volume do invólucro,

$$\Delta_i V = 2\pi m_i [2 - f(m_i)] \Delta_i x$$

Assim, se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução,

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi m_i [2 - f(m_i)] \Delta_i x \\ &= 2\pi \int_0^1 x [2 - f(x)] dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x (2 - 3x + x^3) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (2x - 3x^2 + x^4) dx \\ &= 2\pi \left[x^2 - x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left(1 - 1 + \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{2}{5}\pi \end{aligned}$$

Portanto, o volume é $\frac{2}{5}\pi$ unidades cúbicas.

EXEMPLO 3 A região limitada pela curva $y = x^2$ e pelas retas $y = 1$, $x = 2$ gira em torno da reta $y = -3$. Ache o volume do sólido gerado, tomando elementos de área retangulares, paralelos ao eixo de revolução.

Solução A região e um elemento retangular de área são ilustrados na Figura 9.

A equação da curva é $y = x^2$. Resolvendo em x obtemos $x = \pm\sqrt{y}$. Como $x > 0$ para a região dada, $x = \sqrt{y}$.

O sólido de revolução, bem como um elemento de volume do invólucro cilíndrico, são mostrados na Figura 10. O raio externo do invólucro cilíndrico é $(y_i + 3)$ unidades e o raio interno é $(y_{i-1} + 3)$ unidades. Assim, a média entre o raio interno e o externo é $(m_i + 3)$ unidades. Como a altura e a espessura do invólucro cilíndrico são, respectivamente, $(2 - \sqrt{m_i})$ e $\Delta_i y$ unidades,

$$\Delta_i V = 2\pi(m_i + 3)(2 - \sqrt{m_i}) \Delta_i y$$

Logo, se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução,

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi(m_i + 3)(2 - \sqrt{m_i}) \Delta_i y \\ &= \int_1^4 2\pi(y + 3)(2 - \sqrt{y}) dy \\ &= 2\pi \int_1^4 (-y^{3/2} + 2y - 3y^{1/2} + 6) dy \\ &= 2\pi \left[-\frac{2}{5}y^{5/2} + y^2 - 2y^{3/2} + 6y \right]_1^4 \\ &= \frac{66}{5}\pi \end{aligned}$$

Portanto, o volume é $\frac{66}{5}\pi$ unidades cúbicas.

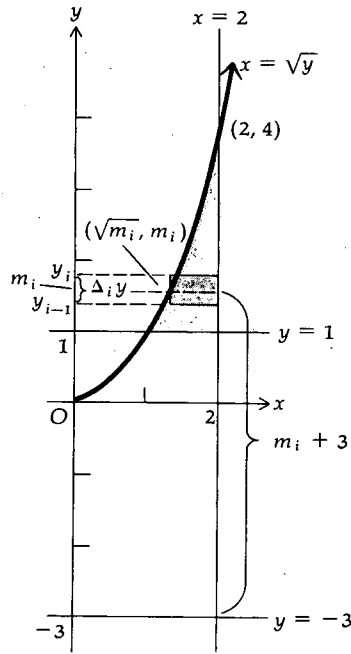


FIGURA 9

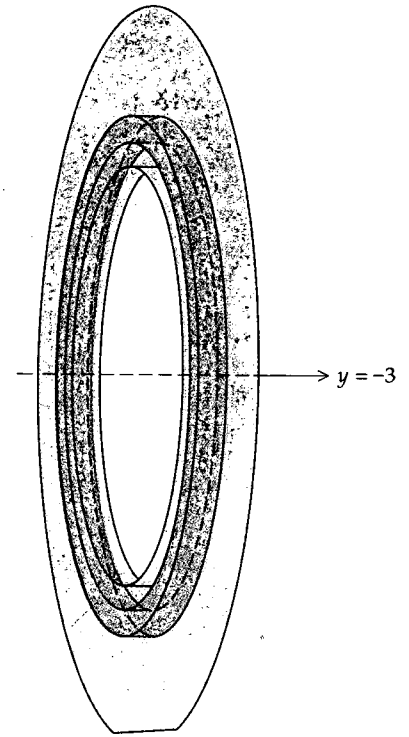
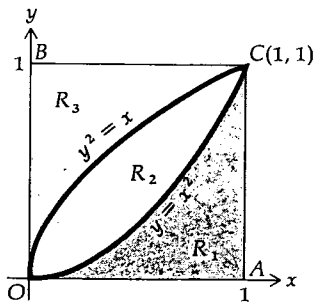


FIGURA 10

EXERCÍCIOS 6.2

1 — 12. Resolva os Exercícios de 5 a 16 da Secção 6.1 pelo método do invólucro cilíndrico.

Na Figura abaixo, a região limitada pelo eixo x , pela reta $x = 1$ e pela curva $y = x^2$ é denotada por R_1 ; a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y^2 = x$ é denotada por R_2 ; a região limitada pelo eixo y , pela reta $y = 1$ e pela curva $y^2 = x$ é denotada por R_3 . Nos Exercícios de 13 a 20, ache o volume do sólido gerado pela rotação da região indicada em torno da reta dada.



- 13. R_1 gira em torno do eixo y ; os elementos retangulares são paralelos ao eixo de revolução.
- 14. Igual ao Exercício 13, mas os elementos retangulares são perpendiculares ao eixo de revolução.

- 15. R_2 gira em torno do eixo x ; os elementos retangulares são paralelos ao eixo de revolução.
- 16. O mesmo que o Exercício 15, mas os elementos retangulares são perpendiculares ao eixo de revolução.
- 17. R_3 gira em torno da reta $y = 2$; os elementos retangulares são paralelos ao eixo de revolução.
- 18. O mesmo que o Exercício 17, mas os elementos retangulares são perpendiculares ao eixo de revolução.
- 19. R_2 gira em torno da reta $x = -2$; os elementos retangulares são paralelos ao eixo de revolução.
- 20. O mesmo que o Exercício 19, mas os elementos retangulares são perpendiculares ao eixo de revolução.

Nos Exercícios de 21 a 24, a região é limitada pelas curvas $x = y^2 - 2$ e $x = 6 - y^2$ gira em torno do eixo indicado. Ache o volume do sólido gerado.

- 21. o eixo x
- 22. o eixo y
- 23. a reta $x = 2$
- 24. a reta $y = 2$
- 25. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela parábola $y^2 = 4px$ ($p > 0$) e pela reta $x = p$ em torno do eixo $x = p$.
- 26. Ache o volume do sólido gerado se a região do Exercício 25 for rotacionada em torno do eixo y .

27. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada pelo gráfico de $y = 3x - x^3$, pelo eixo x e pela reta $x = 1$.
28. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 27 em torno da reta $x = 1$.
29. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exemplo 2 em torno da reta $x = 1$.
30. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada pelo gráfico de $y = 4x - \frac{1}{8}x^4$, pelo eixo x e pela reta $x = 2$.
31. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 30 em torno da reta $x = 2$.
32. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pelo gráfico de $y = 4x - \frac{1}{8}x^4$, pelo eixo y e pela reta $y = 6$ em torno da reta $x = 2$.
33. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 32 em torno do eixo y .
34. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pelas curvas $y = x^3$ e $x = y^3$ em torno do eixo x . Tome os elementos retangulares de área paralelos ao eixo de revolução.
35. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada por aquela reta e pela parábola $x^2 = 4y$ em torno da reta $y = 1$. Tome os elementos retangulares de área paralelos ao eixo de revolução.
36. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ em torno do eixo y .
37. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = \sin x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ e $x = \sqrt{\pi}$ em torno do eixo y .
38. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região no primeiro quadrante limitada pela curva $y = \cos x^2$ e pelos eixos coordenados, em torno do eixo y .
39. A região no primeiro quadrante, limitada pela curva $x = \cos y^2$, pelo eixo y , e pelo eixo x , onde $0 \leq x \leq 1$ gira em torno do eixo x . Ache o volume do sólido gerado.
40. Um buraco com 2 cm de raio é feito através de um sólido esférico com 6 cm de raio e o eixo do buraco é um diâmetro da esfera. Ache o volume da parte que sobra da esfera.
41. Um buraco com $2\sqrt{3}$ cm de raio é feito através do centro de um sólido esférico com 4 cm de raio. Ache o volume da parte do sólido que foi cortada fora.
42. Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo y , da região limitada pelo gráfico de $y = |x - 3|$, e pelas retas $x = 1$, $x = 5$ e $y = 0$. Tome os elementos de área retangulares paralelos ao eixo de revolução.
43. Um sólido de revolução é formado quando a região limitada pela curva $y = \sqrt[3]{x}$, pelo eixo x e pela reta $x = c$ ($c > 0$) gira em torno do eixo y . Tome os elementos de área retangulares paralelos ao eixo de revolução e determine o valor de c que irá dar um volume de 12π unidades cúbicas.
44. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região fora da curva $y = x^2$ e entre as retas $y = 2x - 1$ e $y = x + 2$ em torno do eixo y .

6.3 COMPRIMENTO DE ARCO DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Outra aplicação geométrica da integral definida é feita no cálculo do comprimento de arco do gráfico de uma função. Quando tratamos de áreas e volumes, usamos as expressões “medidas da área” e “medidas do volume” para indicar um número sem quaisquer unidades de medida incluídas. Em nossa discussão sobre comprimento do arco usaremos a palavra “comprimento”, em vez de “medida do comprimento”. Deve ser entendido, então, que o comprimento de um arco é um número puro, isto é, sem unidades de medidas.

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Considere o gráfico dessa função definida pela relação $y = f(x)$, cujo esboço está na Figura 1. A parte da curva do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$ é chamada de *arco*. Queremos atribuir ao arco um número o qual pensamos intuitivamente ser o seu comprimento. Se o arco for um segmento de reta do ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2) , da fórmula da distância entre dois pontos sabemos que seu comprimento será dado por $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Vamos usar essa fórmula para definir, em geral, o comprimento de um arco. Lembre-se, da Geometria, que a circunferência de um círculo é definida como o limite dos perímetros de polígonos regulares inscritos no círculo. Para outras curvas, procedemos de forma análoga.

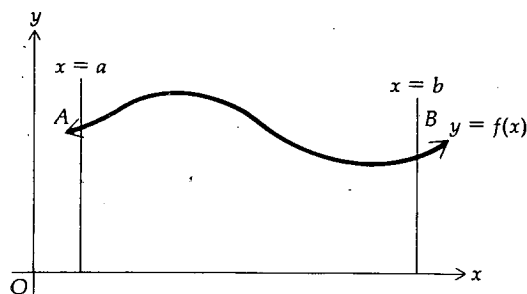


FIGURA 1

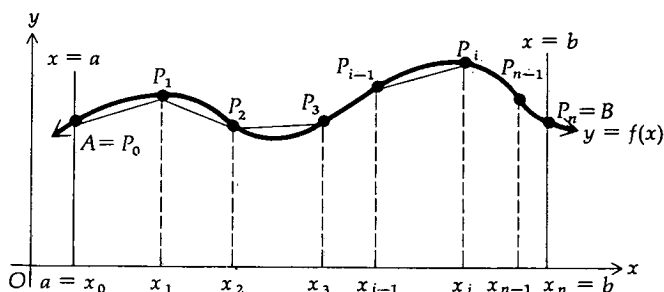


FIGURA 2

Seja Δ uma partição do intervalo fechado $[a, b]$ formada ao dividirmos o intervalo em n subintervalos, escolhendo $(n - 1)$ números intermediários entre a e b . Sejam $x_0 = a$ e $x_n = b$ e x_1, x_2, \dots, x_{n-1} números intermediários, de tal forma que $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$. Então, o i -ésimo subintervalo será $[x_{i-1}, x_i]$; seu comprimento denotado por $\Delta_i x$ será $x_i - x_{i-1}$, onde $i = 1, 2, \dots, n$. Então, se $\|\Delta\|$ for a norma da partição Δ , cada $\Delta_i x \leq \|\Delta\|$.

Associado a cada ponto $(x_i, 0)$ no eixo x está um ponto $P_i(x_i, f(x_i))$ sobre a curva. Trace um segmento de reta de cada ponto P_{i-1} ao próximo ponto P_i , conforme mostra a Figura 2. O comprimento do segmento de reta de P_{i-1} a P_i é denotado por $|\overline{P_{i-1}P_i}|$, sendo dado pela fórmula

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad (1)$$

A soma dos comprimentos desses segmentos de reta é

$$|\overline{P_0P_1}| + |\overline{P_1P_2}| + |\overline{P_2P_3}| + \dots + |\overline{P_{i-1}P_i}| + \dots + |\overline{P_{n-1}P_n}|$$

que pode ser escrita como

$$\sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}| \quad (2)$$

Parece plausível que se n for suficientemente grande, a soma em (2) estará “próxima” do que intuitivamente pensamos ser o comprimento do arco AB . Assim, definimos o comprimento do arco como sendo o limite da soma (2) quando a norma de Δ tende a zero, e nesse caso n cresce sem limitação. Temos, então, a definição a seguir.

6.3.1 DEFINIÇÃO

Suponhamos que a função f seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Além disso, suponhamos que exista um número L tendo as seguintes propriedades:

Para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para toda partição Δ do intervalo $[a, b]$ seja verdade que

$$\text{se } \|\Delta\| < \delta \text{ então } \left| \sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}| - L \right| < \epsilon$$

Assim, escrevemos

$$L = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}| \quad (3)$$

e L é chamado de **comprimento do arco** da curva $y = f(x)$ do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$.

Se o limite em (3) existir, dizemos que o arco é **retificável**.

Vamos deduzir uma fórmula para encontrar o comprimento L de um arco retificável. A dedução exige que a derivada de f seja contínua em $[a, b]$; dizemos que tal função é **suave** em $[a, b]$.

Consulte a Figura 3. Se P_{i-1} , tiver coordenadas (x_{i-1}, y_{i-1}) e P_i tiver coordenadas (x_i, y_i) , então o comprimento da corda $P_{i-1}P_i$ será dado pela fórmula (1).

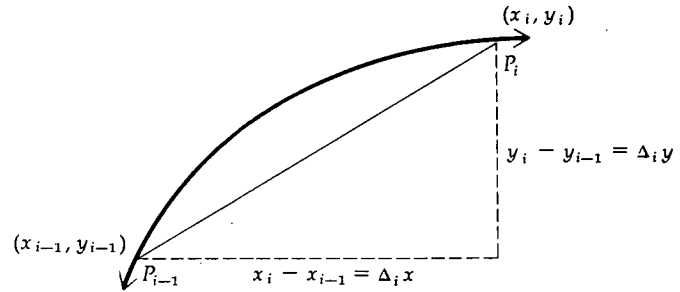


FIGURA 3

Tomando $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ e $y_i - y_{i-1} = \Delta_i y$, temos

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2}$$

ou, equivalentemente, como $\Delta_i x \neq 0$,

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2} (\Delta_i x) \quad (4)$$

Como exigimos que f' seja contínua em $[a, b]$, as hipóteses do teorema do valor médio (4.3.2) estão satisfeitas por f ; assim, existe um número z_i no intervalo aberto (x_{i-1}, x_i) tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(z_i)(x_i - x_{i-1})$$

Como $\Delta_i y = f(x_i) - f(x_{i-1})$ e $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, da equação acima, teremos

$$\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x} = f'(z_i)$$

Substituindo essa equação em (4), obtemos

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2} \Delta_i x$$

Para cada i de 1 até n , existe uma expressão dessa forma, tal que

$$\sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2} \Delta_i x$$

Tomando o limite de ambos os membros dessa expressão quando $\|\Delta\|$ tende a zero, obtemos

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2} \Delta_i x \quad (5)$$

se o limite existir.

Para mostrar que o limite do segundo membro de (5) existe, seja F a função definida por

$$F(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

Como estamos impondo que f' seja contínua em $[a, b]$, F será contínua em $[a, b]$. Como $x_{i-1} < z_i < x_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$, no lado direito de (5), temos o limite de uma soma de Riemann que é uma integral definida. Portanto, de (5)

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

De (3), o primeiro membro é L ; portanto

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Dessa forma, provamos o teorema a seguir.

6.3.2 TEOREMA

Se a função f e sua derivada f' forem contínuas no intervalo fechado $[a, b]$, então o comprimento do arco da curva $y = f(x)$ do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(b, f(b))$ será dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Temos também o teorema a seguir, que dá o comprimento do arco de uma curva quando x é expressa como uma função de y .

6.3.3 TEOREMA

Se a função g e sua derivada g' forem contínuas no intervalo fechado $[c, d]$, então o comprimento do arco da curva $x = g(y)$ do ponto $(g(c), c)$ ao ponto $(g(d), d)$ será dado por

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$$

A demonstração do Teorema 6.3.3 é idêntica àquela do Teorema 6.3.2; basta trocarmos x por y e f por g .

A integral definida obtida quando aplicamos os Teoremas 6.3.2 ou 6.3.3, é freqüentemente difícil de calcular. Como nossas técnicas de integração limitam-se à integração de potências e a algumas funções trigonométricas, encontraremos apenas as equações de curvas para as quais podemos calcular as integrais definidas resultantes e achar o comprimento de um arco.

EXEMPLO 1 Ache o comprimento do arco da curva $y = x^{2/3}$ do ponto $(1, 1)$ a $(8, 4)$, usando o Teorema 6.3.2.

Solução Veja a Figura 4. Como $f(x) = x^{2/3}$, $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. Do Teorema 6.3.2,

$$\begin{aligned} L &= \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{2/3}}} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{x^{1/3}} dx \end{aligned}$$

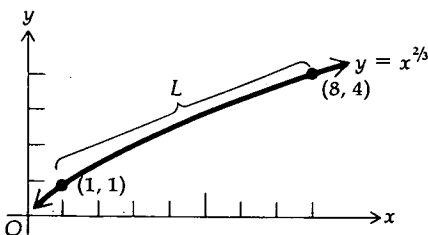


FIGURA 4

Para calcular essa integral definida, seja $u = 9x^{2/3} + 4$; então, $du = 6x^{-1/3} dx$. Quando $x = 1$, $u = 13$ e quando $x = 8$, $u = 40$. Logo,

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{18} \int_{13}^{40} u^{1/2} du \\ &= \frac{1}{18} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{13}^{40} \\ &= \frac{1}{27} (40^{3/2} - 13^{3/2}) \\ &\approx 7,6 \end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Ache o comprimento de arco no Exemplo 1, usando o Teorema 6.3.3.

Solução Como $y = x^{2/3}$ e $x > 0$, resolvemos em x obtendo $x = y^{3/2}$. Vamos tomar $g(y) = y^{3/2}$ e teremos $g'(y) = \frac{3}{2}y^{1/2}$. Então, do Teorema 6.3.3,

$$\begin{aligned} L &= \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}y} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{4 + 9y} dy \\ &= \frac{1}{18} \left[\frac{2}{3} (4 + 9y)^{3/2} \right]_1^4 \\ &= \frac{1}{27} (40^{3/2} - 13^{3/2}) \\ &\approx 7,6 \end{aligned}$$

Usando a notação de Leibniz para derivadas, as fórmulas dos Teoremas 6.3.2 e 6.3.3 podem ser escritas como

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \text{ e } L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \quad (6)$$

Introduziremos agora a *função comprimento de arco* e a diferencial do comprimento de arco, a qual fornece um recurso mnemônico para que essas fórmulas sejam lembradas.

Se f' for contínua em $[a, b]$, a integral definida $\int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$ será uma função de x , e ela dará o comprimento do arco da curva $y = f(x)$ do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(x, f(x))$, onde x é qualquer número no intervalo fechado $[a, b]$. Seja $s(x)$ o comprimento desse arco; assim, s é uma **função comprimento de arco** e

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$$

Do Teorema 5.8.1,

$$s'(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

ou, como $s'(x) = ds/dx$ e $f'(x) = dy/dx$,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Multiplicando a equação por dx , obtemos

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (7)$$

Da mesma forma, para o comprimento do arco da curva $x = g(y)$ de $(g(c), c)$ a $(g(y), y)$,

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \quad (8)$$

Observe que ds (a diferencial do comprimento de arco) é o integrando nas fórmulas (6). Elevando os dois membros ao quadrado de (7) ou de (8) resulta

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (9)$$

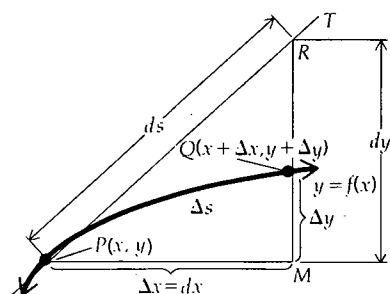


FIGURA 5

Dessa equação temos a interpretação geométrica de ds , que está na Figura 5. Na figura, a reta T é tangente à curva $y = f(x)$ no ponto P . $|PM| = \Delta x = dx$; $|MQ| = \Delta y$; $|MR| = dy$; $|PR| = ds$; o comprimento do arco PQ é Δs . A Figura 5 fornece uma maneira fácil de lembrarmos (9), da qual as fórmulas (6) podem ser obtidas.

EXERCÍCIOS 6.3

- Calcule o comprimento do segmento da reta $y = 3x$ do ponto $(1, 3)$ ao ponto $(2, 6)$ por três métodos: (a) use a fórmula da distância; (b) use o Teorema 6.3.2; (c) use o Teorema 6.3.3.
- Calcule o comprimento do segmento da reta $x + 3y = 4$ do ponto $(-2, 2)$ ao ponto $(4, 0)$ por três métodos: (a) use a fórmula da distância; (b) use o Teorema 6.3.2; (c) use o Teorema 6.3.3.
- Calcule o comprimento do segmento da reta $4x + 9y = 36$ entre os seus interceptos x e y por três métodos: (a) use o Teorema de Pitágoras; (b) use o Teorema 6.3.2; (c) use o Teorema 6.3.3.
- Siga as instruções do Exercício 3 para a reta $5x - 2y = 10$.
- Ache o comprimento do arco da curva $9y^2 = 4x^3$ da origem ao ponto $(3, 2\sqrt{3})$.
- Ache o comprimento do arco da curva $x^2 = (2y + 3)^3$ de $(1, -1)$ a $(7\sqrt{7}, 2)$.
- Ache o comprimento do arco da curva $8y = x^4 + 2x^{-2}$ do ponto onde $x = 1$ ao ponto onde $x = 2$.
- Use o Teorema 6.3.2 para encontrar o comprimento do arco da curva $y^3 = 8x^2$ do ponto $(1, 2)$ ao ponto $(27, 18)$.
- Resolva o Exercício 8 usando o Teorema 6.3.3.
- Ache o comprimento do arco da curva $y = \frac{2}{3}(x - 5)^{3/2}$ do ponto onde $x = 6$ ao ponto onde $x = 8$.
- Ache o comprimento do arco da curva $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ do ponto onde $x = 0$ ao ponto onde $x = 3$.
- Ache o comprimento do arco da curva $6xy = y^4 + 3$ do ponto onde $y = 1$ ao ponto onde $y = 2$.
- Ache o comprimento do arco da curva $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3x - 1)$ do ponto onde $x = 1$ ao ponto onde $x = 4$.
- Ache o comprimento do arco da curva $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^{-1}$ do ponto $(2, \frac{19}{12})$ ao ponto $(5, \frac{314}{15})$.
- Ache o comprimento do arco da curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ no primeiro quadrante, do ponto onde $x = \frac{1}{8}$ ao ponto onde $x = 1$.
- Ache o comprimento do arco da curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (a é uma constante, $a > 1$) no primeiro quadrante do ponto onde $x = 1$ ao ponto onde $x = a$.
- Ache o comprimento do arco da curva $(x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} = 1$ no primeiro quadrante, do ponto onde $x = \frac{1}{8}a$ ao ponto onde $x = a$.
- Ache o comprimento da curva $9y^2 = x^2(2x + 3)$ no segundo quadrante, do ponto onde $x = -1$ ao ponto onde $x = 0$.
- Ache o comprimento da curva $9y^2 = x(x - 3)^2$ no primeiro quadrante, do ponto onde $x = 1$ ao ponto onde $x = 3$.
- Ache o comprimento da curva $9y^2 = 4(1 + x^2)^3$ no primeiro quadrante, do ponto onde $x = 0$ ao ponto onde $x = 2\sqrt{2}$.
- Se $f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos t} dt$, ache o comprimento do arco do gráfico de f do ponto onde $x = 0$ ao ponto onde $x = \frac{1}{2}\pi$. (Sugestão: use a identidade $\cos^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$ e o Teorema 5.8.1.)
- Se $f(x) = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt$, ache o comprimento do arco do gráfico de f do ponto onde $x = 0$ ao ponto onde $x = \frac{1}{2}\pi$. (Sugestão: use a do Exercício 21 e a identidade $\sin x = \cos(\frac{1}{2}\pi - x)$.)

Nos Exercícios de 23 a 26, use a regra de Simpson com $n = 8$ para aproximar até quatro casas decimais o comprimento de arco.

- O arco da curva seno, da origem ao ponto $(\pi, 0)$.
- O arco da curva co-seno, da origem ao ponto $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$.
- O arco da curva $y = \frac{1}{3}x^3$ da origem ao ponto $(1, \frac{1}{3})$.
- O arco da curva $y = \operatorname{tg} x$ da origem ao ponto $(\frac{1}{4}\pi, 1)$.

6.4 CENTRO DE MASSA DE UMA BARRA

Na Secção 5.7 aprendemos que se uma função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, o valor médio de f em $[a, b]$ será dado por

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$

Uma aplicação importante do valor médio de uma função ocorre em Física, associada ao conceito de *centro de massa*.

Para chegar a uma definição de *massa*, considere uma partícula que é colocada em movimento ao longo de um eixo por uma força exercida sobre ela. Suponha que todas as velocidades sejam pequenas, comparadas com a velocidade da luz. Assim, enquanto a força age sobre a partícula, a velocidade dela é crescente, isto é, a partícula é acelerada. A razão entre a força e a aceleração é constante e independe da magnitude da força, e a essa constante chamamos de **massa** da partícula. Logo, se a força for F unidades, a aceleração for a unidades e a massa, m unidades, então

$$M = \frac{F}{a}$$

Vamos medir a força, a massa e a aceleração em unidades do sistema métrico. Discutiremos essas unidades.

O sistema métrico, que foi adotado oficialmente por todos os países com exceção dos Estados Unidos, é o Sistema Internacional de Unidades, que abreviaremos SI, do francês *Système International d'Unités*. No SI a unidade de massa é o quilograma (kg) e a unidade de aceleração é 1 metro por segundo ao quadrado (m/s^2). A unidade de força é 1 *newton* (N), sendo aquela força que, aplicada a 1 kg, resulta numa aceleração de 1 m/s^2 .

► **ILUSTRAÇÃO 1** Uma partícula de massa 6 kg está sujeita a uma força horizontal de 3 N. Obtemos a aceleração da partícula dividindo a força pela massa e, portanto,

$$\frac{3\text{N}}{6 \text{ kg}} = 0,5 \text{ m/s}^2$$

Em símbolos, se M kg for a massa, F N for a força e $a \text{ m/s}^2$ for a aceleração, então como $a = F/M$, $F = 3$ e $M = 6$, $a = 0,5$. ◀

No sistema SI, a aceleração da gravidade próximo da superfície da Terra é aproximadamente $9,81 \text{ m/s}^2$. Se M kg for a massa de um objeto e F N for a força exercida no objeto devido à gravidade perto da superfície da Terra, então

$$F = 9,81 M$$

Outro sistema métrico é o centímetro-grama-segundo, abreviado como CGS, onde a unidade de massa é o grama e $1 \text{ g} = 0,001 \text{ kg}$. A unidade de aceleração no CGS é 1 cm/s^2 . Logo, a unidade de força é aquela que dá a uma unidade de massa 1 g uma aceleração de 1 cm/s^2 . Essa força é chamada 1 *dina*. Como

$$1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g} \quad \text{e} \quad 1 \text{ m/s}^2 = 10^2 \text{ cm/s}^2$$

então,

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dinas}$$

Um resumo das unidades no sistema métrico está na Tabela 1.

Tabela 1

Sistema de Unidades	Força	Massa	Aceleração
SI	newton (N)	quilograma (kg)	m/s^2
CGS	dina	grama (g)	cm/s^2

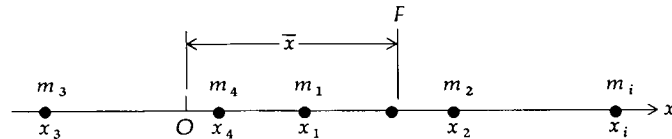


FIGURA 1

Considere agora uma barra horizontal, com peso e espessura desprezíveis, colocada sobre o eixo x . Na barra está um sistema de n partículas, localizadas nos pontos x_1, x_2, \dots, x_n . A i -ésima partícula ($i = 1, 2, \dots, n$) está a uma distância orientada x_i da origem e sua massa é m_i kg. Veja a Figura 1. O

número de quilogramas na massa total do sistema é $\sum_{i=1}^n m_i$. Definimos o

número de quilogramas-metros no *momento de massa* da i -ésima partícula em relação à origem como $m_i x_i$. O **momento de massa** do sistema é definido como a soma dos momentos de massa de todas as partículas. Logo, se M_0 kg-m for o momento de massa do sistema em relação à origem, então

$$M_0 = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

Queremos encontrar um ponto \bar{x} tal que se toda a massa do sistema estivesse concentrada nele, o seu momento de massa em relação à origem, seria igual ao momento de massa do sistema em relação à origem. Então, \bar{x} deve satisfazer à equação

$$\bar{x} \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

(1)

O ponto \bar{x} é chamado de **centro de massa** do sistema, sendo o ponto onde o sistema estará em equilíbrio. A posição do centro de massa é independente da posição da origem; isto é, a localização do centro de massa relativamente à posição das partículas não se altera se mudarmos a origem. O centro de massa é importante, pois o comportamento de todo um sistema de partículas pode ser descrito pelo comportamento do centro de massa do sistema.

EXEMPLO 1 Dadas quatro partículas com massas 2, 3, 1 e 5 kg localizadas no eixo x em pontos com as coordenadas 5, 2, -3 e -4 , respectivamente, onde a distância é medida em metros, ache o centro de massa desse sistema.

Solução Se \bar{x} for a coordenada do centro de massa, temos da fórmula (1)

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{2(5) + 3(2) + (1)(-3) + 5(-4)}{2 + 3 + 1 + 5} \\ &= -\frac{7}{11}\end{aligned}$$

Assim, o centro de massa está a $\frac{7}{11}$ m à esquerda da origem.

Vamos estender a discussão precedente a uma barra rígida horizontal, tendo a massa continuamente distribuída. Dizemos que a barra é **homogênea** se ela tiver uma densidade linear constante, isto é, se sua massa for diretamente proporcional a seu comprimento. Em outras palavras, se um segmento da barra cujo comprimento é $\Delta_i x$ m tiver uma massa de $\Delta_i m$ kg e $\Delta_i m = k \Delta_i x$, então a barra será homogênea. O número k é uma constante e k kg/m é chamada **densidade linear** da barra.

Vamos supor que tenhamos uma barra não-homogênea, em tal caso a densidade linear varia ao longo da barra. Seja L m o comprimento da barra e vamos colocá-la sobre o eixo x , de tal forma que o extremo esquerdo da barra esteja na origem, enquanto que o extremo direito está em L . Veja a Figura 2.

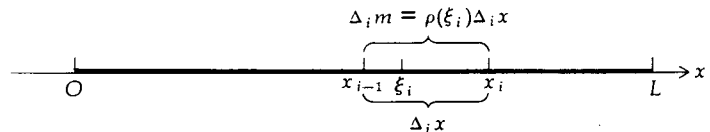


FIGURA 2

A densidade linear num ponto qualquer x da barra é $\rho(x)$ kg/m, onde ρ é contínua em $[0, L]$. Para encontrar a massa total da barra vamos considerar uma partição Δ do intervalo fechado $[0, L]$ em n subintervalos. O i -ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ e seu comprimento é $\Delta_i x$ m. Se ξ_i for um ponto qualquer em $[x_{i-1}, x_i]$, uma aproximação da massa da parte da barra contida no i -ésimo subintervalo será $\Delta_i m$ kg, onde

$$\Delta_i m = \rho(\xi_i) \Delta_i x$$

O número de quilogramas na massa total da barra é aproximado por

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i m = \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \Delta_i x$$

Quanto menor tomarmos a norma da partição Δ , mais próxima estará a soma de Riemann do que intuitivamente pensamos ser a medida da massa da barra, e assim, definimos a medida da massa como o limite da soma de Riemann.

6.4.1 DEFINIÇÃO

Uma barra de comprimento L m tem seu extremo esquerdo na origem. Se $\rho(x)$ kg/m for a densidade linear no ponto x m da origem, onde ρ é contínua em $[0, L]$, então a massa total da barra será M kg, onde

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \Delta_i x \\ &= \int_0^L \rho(x) dx \end{aligned} \quad (2)$$

Na Definição 6.4.1, se a distância for medida em centímetros e a massa em gramas, então a densidade será medida em gramas por centímetro.

EXEMPLO 2 A densidade linear em um ponto qualquer de uma barra de 4 m varia diretamente com a distância a um ponto externo da barra, situado na mesma reta que ela e a 2 m de um extremo, onde a densidade é 5 kg/m. Ache a massa total da barra.

Solução A Figura 3 mostra a barra colocada sobre o eixo x . Se $\rho(x)$ for o número de quilogramas por metro na densidade da barra em um ponto a x m do externo com maior densidade, então

$$\rho(x) = c(6 - x)$$



FIGURA 3

onde c é uma constante de proporcionalidade. Como $\rho(4) = 5$, então $5 = 2c$ ou $\rho = \frac{5}{2}$. Logo, $\rho(x) = \frac{5}{2}(6 - x)$. Assim sendo, se M kg for a massa total da barra, temos da Definição 6.4.1

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{5}{2}(6 - \xi_i) \Delta_i x \\ &= \int_0^4 \frac{5}{2}(6 - x) dx \\ &= \frac{5}{2} \left[6x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 \\ &= 40 \end{aligned}$$

Assim, a massa total da barra é 40 kg.

Vamos definir o centro de massa da barra da Definição 6.4.1. Precisamos, contudo, definir primeiro o momento de massa da barra em relação à origem.

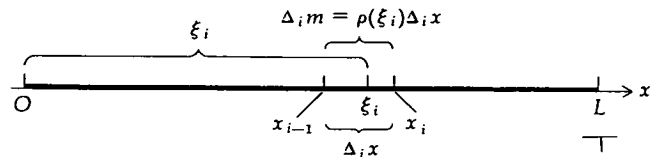


FIGURA 4

Como anteriormente, vamos colocar a barra sobre o eixo x com o extremo esquerdo na origem e o direito em L . Veja a Figura 4. Seja Δ uma partição de $[0, L]$ em n subintervalos, com o i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tendo $\Delta_i x$ m. Se ξ_i for um ponto qualquer em $[x_{i-1}, x_i]$, uma aproximação do momento de massa em relação à origem da parte da barra contida no i -ésimo subintervalo será $\xi_i \Delta_i m$ kg-m, onde $\Delta_i m = \rho(\xi_i) \Delta_i x$. O número de quilogramas-metros no momento de massa de toda a barra é aproximado por

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \Delta_i m = \sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i) \Delta_i x$$

Quanto menor tomarmos a norma da partição Δ , mais próxima estará a soma de Riemann do que intuitivamente pensamos ser a medida do momento de massa de toda a barra em relação à origem. Temos, então, a definição a seguir.

6.4.2 DEFINIÇÃO

Uma barra com L m de comprimento tem seu extremo esquerdo na origem e $\rho(x)$ kg/m é a densidade linear no ponto a x m da origem, onde ρ é contínua em $[0, L]$. O momento de massa da barra em relação à origem é M_0 kg-m, onde

$$\begin{aligned} M_0 &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i) \Delta_i x \\ &= \int_0^L x \rho(x) dx \end{aligned} \quad (3)$$

O centro de massa da barra está em um ponto \bar{x} tal que se M kg for a massa total da barra, $\bar{x}M = M_0$. Assim, de (2) e de (3),

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \rho(x) dx}{\int_0^L \rho(x) dx} \quad (4)$$

EXEMPLO 3 Ache o centro de massa da barra dada no Exemplo 2.

Solução No Exemplo 2, $M = 40$. De (4) com $\rho(x) = \frac{5}{2}(6 - x)$,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int_0^4 \frac{5}{2} x (6 - x) dx}{40} \\ &= \frac{1}{16} \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Logo, o centro de massa está a $\frac{5}{3}$ m do extremo com maior densidade.

► **ILUSTRAÇÃO 2** Se uma barra tem uma densidade uniforme de k kg/m, onde k é uma constante, então de (4),

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\int_0^L xk \, dx}{\int_0^L k \, dx} \\ &= \frac{\left. \frac{kx^2}{2} \right|_0^L}{\left. kx \right|_0^L} \\ &= \frac{\frac{kL^2}{2}}{kL} \\ &= \frac{L}{2}\end{aligned}$$

Assim, o centro de massa está no centro da barra, conforme era de se esperar. ◀

EXERCÍCIOS 6.4

Nos Exercícios de 1 a 4, uma partícula se move sobre uma reta horizontal. Ache a força exercida na partícula se ela tiver a massa e a aceleração dadas.

1. A massa é 50 g; a aceleração é 5 cm/s².
2. A massa é 10 kg; a aceleração é 6 m/s².
3. A massa é 80 g; a aceleração é 50 cm/s².
4. A massa é 22 kg; a aceleração é 4 m/s².

Nos Exercícios de 5 a 8, uma partícula está sujeita à força horizontal dada e a massa ou a aceleração da partícula é dada. Ache a outra quantidade.

5. A força é de 6 N; a massa é 4 kg.
6. A força é de 32 dinas; a massa é 8 g.
7. A força é de 24 N; a aceleração é 9 m/s².
8. A força é de 700 dinas; a aceleração é 80 cm/s².

Nos Exercícios de 9 a 12, é dado um sistema de partículas sobre o eixo x . O número de quilogramas na massa de cada partícula e a coordenada de sua posição são dados. A distância é medida em metros. Ache o centro de massa de cada sistema.

9. $m_1 = 5$ em 2; $m_2 = 6$ em 3; $m_3 = 4$ em 5; $m_4 = 3$ em 8
10. $m_1 = 2$ em -4; $m_2 = 8$ em -1; $m_3 = 4$ em 2; $m_4 = 2$ em 3
11. $m_1 = 2$ em -3; $m_2 = 4$ em -2; $m_3 = 20$ em 4; $m_4 = 10$ em 6; $m_5 = 30$ em 9
12. $m_1 = 5$ em -7; $m_2 = 3$ em -2; $m_3 = 5$ em 0; $m_4 = 1$ em 2; $m_5 = 8$ em 10

Nos Exercícios de 13 a 21 ache a massa total da barra dada e o seu centro de massa.

13. O comprimento da barra é 6 m e a densidade linear da barra em um ponto a x m de um extremo é $(2x + 3)$ kg/m.

14. O comprimento da barra é 20 cm e a densidade linear da barra em um ponto a x cm de um extremo é $(3x + 2)$ g/cm.
15. O comprimento da barra é 9 mm e a densidade linear da barra em um ponto a x mm de um extremo é $(4x + 1)$ g/mm.
16. O comprimento da barra é 3 m e a densidade linear da barra em um ponto a x m de um extremo é $(5 + 2x)$ kg/m.
17. O comprimento da barra é 12 cm e a densidade linear da barra em um ponto é uma função linear da medida da distância ao extremo esquerdo da barra. A densidade linear no extremo esquerdo é 3 g/cm e no extremo direito é 4 g/cm.
18. O comprimento da barra é 10 m e a medida da densidade linear em um ponto é uma função linear da medida da distância do ponto ao extremo esquerdo da barra. A densidade linear no extremo esquerdo é 2 kg/m e no extremo direito é de 3 kg/m.
19. A medida da densidade linear em qualquer ponto de uma barra com 6 m varia diretamente com a distância do ponto a um ponto externo na reta suporte da barra e a 4 m de um extremo, onde a densidade é 3 kg/m.
20. Uma barra tem 10 cm e a medida da densidade linear em um ponto é uma função linear da medida da distância ao centro da barra. A densidade linear em cada extremo da barra é 5 g/cm e no centro da barra ela é $3\frac{1}{2}$ g/cm.
21. A medida da densidade linear em um ponto de uma barra varia diretamente com a terceira potência da medida da distância do ponto a um extremo. O comprimento da barra é de 4 m e a densidade linear no centro é de 2 kg/m.
22. A densidade linear em um ponto de uma barra de 5 m varia diretamente com a distância do ponto a um ponto externo à barra sobre a sua reta suporte e a 2 m de um extremo, onde a densidade é K kg/m. Ache K se a massa total da barra for 135 kg.

23. A densidade linear em qualquer ponto de uma barra com 3 m varia diretamente com a distância de um ponto a um ponto externo a ela, sobre a sua reta suporte e a 1 m de um extremo onde a densidade é 2 kg/m. Se a massa total da barra for 15 kg, ache o centro de massa da barra.
24. A medida da densidade linear em um ponto de uma barra varia diretamente com a quarta potência da medida da distância do ponto a um extremo. O comprimento da barra é de 2 m e a densidade linear é 2 kg/m no centro. Se a massa total da barra for $\frac{64}{5}$ kg, ache o centro de massa da barra.
25. Uma barra tem L cm de comprimento e o centro de massa da barra está num ponto a $\frac{3}{4}L$ do extremo esquerdo. Se a medida da densidade linear num ponto for proporcional a uma potência da medida da distância do ponto ao extremo esquerdo e a densidade linear no extremo direito for 20 g/cm, ache a densidade linear num ponto a x cm do extremo esquerdo. A massa é em gramas.
26. A massa total de uma barra com L m de comprimento é M kg e a medida da densidade linear num ponto a x m do extremo esquerdo é proporcional à medida da distância do ponto ao extremo direito. Mostre que a densidade linear em um ponto da barra a x m do extremo esquerdo é $2M(L - x)/L^2$ kg/m.
27. Uma barra tem 6 m de comprimento e sua massa é de 24 kg. Se a medida da densidade linear em qualquer ponto da barra varia diretamente com o quadrado da distância do ponto a um extremo, ache o maior valor da densidade linear.

6.5 CENTRÓIDE DE UMA REGIÃO PLANA

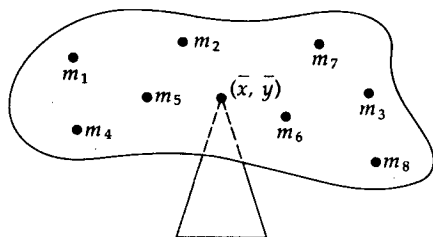


FIGURA 1

Sejam as massas de n partículas localizadas nos pontos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) do plano xy medidas por m_1, m_2, \dots, m_n ; vamos analisar o problema de encontrar o centro de massa desse sistema. Podemos imaginar as partículas sobre uma folha de peso e espessura desprezíveis e podemos supor que cada partícula tenha sua posição exatamente em um ponto. O centro de massa é o ponto onde a folha estará em equilíbrio. Consulte a Figura 1, que mostra oito partículas colocadas numa folha. A i -ésima partícula na figura será denotada por m_i que é a medida de sua massa. A folha estará em equilíbrio sobre um ponto de apoio localizado em seu centro de massa, denotado por (\bar{x}, \bar{y}) . Para determinar o centro de massa precisamos primeiro definir o momento de massa de um sistema de partículas em relação a um eixo.

Suponhamos uma partícula a uma distância de d m de um eixo com uma massa de m kg. Se M_1 kg-m for o momento de massa da partícula em relação ao eixo, então

$$M_1 = md \quad (1)$$

Se a i -ésima partícula tendo massa m_i kg estiver localizada no ponto (x_i, y_i) , sua distância ao eixo y será x_i m; assim, da fórmula (1), o momento de massa dessa partícula em relação ao eixo y é $m_i x_i$ kg-m. Analogamente, o momento de massa da partícula em relação ao eixo x é $m_i y_i$ kg-m. O momento do sistema de n partículas em relação ao eixo y é M_y kg-m, onde

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

e o momento do sistema em relação ao eixo x é M_x kg-m, onde

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

A massa total do sistema é M kg, onde

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

O centro de massa do sistema está no ponto (\bar{x}, \bar{y}) , onde

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

O ponto (\bar{x}, \bar{y}) pode ser interceptado como o ponto tal que, se a massa total M kg do sistema estiver concentrada nele, o seu momento de massa em relação ao eixo y , M_y kg-m, seria determinado por $M_y = M\bar{x}$, e seu momento de massa em relação ao eixo x , M_x kg-m, seria determinado por $M_x = M\bar{y}$.

EXEMPLO 1 Ache o centro de massa de quatro partículas tendo massas 2, 6, 4 e 1 kg localizadas nos pontos $(5, -2)$, $(-2, 1)$, $(0, 3)$ e $(4, -1)$, respectivamente.

Solução

$$\begin{aligned} M_y &= \sum_{i=1}^4 m_i x_i & M_x &= \sum_{i=1}^4 m_i y_i \\ &= 2(5) + 6(-2) + 4(0) + 1(4) & &= 2(-2) + 6(1) + 4(3) + 1(-1) \\ &= 2 & &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^4 m_i \\ &= 2 + 6 + 4 + 1 = 13 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{M} & \bar{y} &= \frac{M_x}{M} \\ &= \frac{2}{13} & &= \frac{13}{13} \\ & & &= 1 \end{aligned}$$

O centro de massa está em $(\frac{2}{13}, 1)$.

Consideremos agora folhas finas com massa distribuída continuamente, por exemplo, folhas de papel ou de latão. Trataremos tais folhas como sendo bidimensionais e chamaremos tal região plana de *lâmina*. Nesta secção vamos restringir nossa discussão às lâminas homogêneas, isto é, lâminas com densidade superficial de massa(*) constante. Lâminas com densidade superficial de massa variável serão consideradas no Capítulo 18, em conexão com as aplicações de integrais múltiplas.

Suponhamos uma lâmina homogênea com área A m² e com massa M kg. Então, se densidade de massa por unidade de área for a constante k kg/m², $M = kA$. Se a lâmina homogênea for um retângulo, o seu centro de massa será definido como o centro do retângulo. Vamos usar essa definição para generalizá-la para lâminas homogêneas mais gerais.

Seja L a lâmina homogênea cuja densidade de massa por unidade de área é a constante k kg/m², limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas

*N. do T.: A densidade superficial de massa é uma função do ponto sobre a lâmina. Essa densidade é dita constante quando tem o mesmo valor para cada ponto da lâmina.

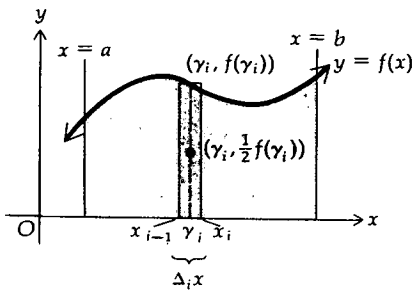


FIGURA 2

$x = a$ e $x = b$. A função f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Veja a Figura 2. Seja Δ uma partição do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos. O i -ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ e $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. O ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$ é γ_i . Associada a cada subintervalo existe uma lâmina retangular cujo comprimento, altura e densidade superficial de massa são dados por $\Delta_i x$ m, $f(\gamma_i)$ m e k kg/m², respectivamente, e cujo centro de massa está no ponto $(\gamma_i, \frac{1}{2} f(\gamma_i))$. A área da lâmina retangular é $f(\gamma_i) \Delta_i x$ m²; logo, $kf(\gamma_i) \Delta_i x$ kg é sua massa. Conseqüentemente, se $\Delta_i M_y$ kg-m é o momento de massa desse elemento retangular em relação ao eixo y ,

$$\Delta_i M_y = \gamma_i k f(\gamma_i) \Delta_i x$$

A soma das medidas dos momentos de massa de n de tais lâminas retangulares em relação ao eixo y é dada pela soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n k \gamma_i f(\gamma_i) \Delta_i x$$

Definimos o *momento de massa de L em relação ao eixo y* como o limite dessa soma de Riemann quando $\|\Delta\| \rightarrow 0$. Isto está formalmente estabelecido na Definição 6.5.1.

Da mesma forma, se $\Delta_i M_x$ kg-m for o momento de massa da i -ésima lâmina retangular em relação ao eixo x ,

$$\Delta_i M_x = \frac{1}{2} f(\gamma_i) k f(\gamma_i) \Delta_i x$$

e a soma das medidas dos momentos de massa de n de tais lâminas retangulares em relação ao eixo x é dada pela soma de Riemann.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} k [f(\gamma_i)]^2 \Delta_i x$$

O limite dessa soma de Riemann quando $\|\Delta\| \rightarrow 0$ está estabelecido na Definição 6.5.1 como o *momento de massa de L em relação ao eixo x* .

A massa da i -ésima lâmina retangular $kf(\gamma_i) \Delta_i x$ kg; então, a soma das medidas das massas de n lâminas retangulares é dada por

$$\sum_{i=1}^n k f(\gamma_i) \Delta_i x$$

Na Definição 6.5.1, o limite dessa soma de Riemann está estabelecido como a *massa total de L* .

6.5.1 DEFINIÇÃO

Seja L a lâmina homogênea cuja densidade superficial de massa é a constante k kg/m², a qual é limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. A função f é contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Se M_y kg-m for o momento de massa da lâmina L , em relação ao eixo y , então

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \gamma_i f(\gamma_i) \Delta_i x \\ &= k \int_a^b x f(x) dx \end{aligned}$$

Se M_x kg-m for o momento de massa da lâmina L em relação ao eixo x , então

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} k [f(\gamma_i)]^2 \Delta_i x$$

$$= \frac{1}{2} k \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Se M kg for a massa total da lâmina L , então

$$M = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k f(\gamma_i) \Delta_i x$$

$$= k \int_a^b f(x) dx$$

Se (\bar{x}, \bar{y}) for o centro de massa da lâmina L , então

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} \quad (2)$$

Substituindo as expressões para M_x , M_y e M em (2), teremos

$$\bar{x} = \frac{k \int_a^b x f(x) dx}{k \int_a^b f(x) dx} \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} k \int_a^b [f(x)]^2 dx}{k \int_a^b f(x) dx}$$

Dividindo ambos o numerador e o denominador por k , teremos

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

Nessas fórmulas o denominador é o número de unidades quadradas na área da região; desta forma, expressamos um problema físico em termos de um problema geométrico. Isto é, \bar{x} e \bar{y} podem ser considerados como a abscissa e a ordenada médias, respectivamente, de uma região geométrica. Nesse caso, \bar{x} e \bar{y} dependem somente da região, e não da massa da lâmina. Assim sendo, vamos nos referir ao centro de massa de uma região plana, em vez de falarmos em centro de massa de uma lâmina homogênea. Nesse caso, o centro de massa será chamado de *centróide* da região. Em vez de momentos de massa, vamos considerar momentos da região.

6.5.2 DEFINIÇÃO

Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. A função f é contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Se M_x denotar o momento de R em relação ao eixo x e M_y denotar o momento de R em relação ao eixo y , então

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(\gamma_i)]^2 \Delta_i x \quad M_y = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i f(\gamma_i) \Delta_i x$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad = \int_a^b x f(x) dx$$

Se (\bar{x}, \bar{y}) for o **centróide** da região plana R cuja área é A unidades quadradas e M_x e M_y forem definidos como acima,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A}$$

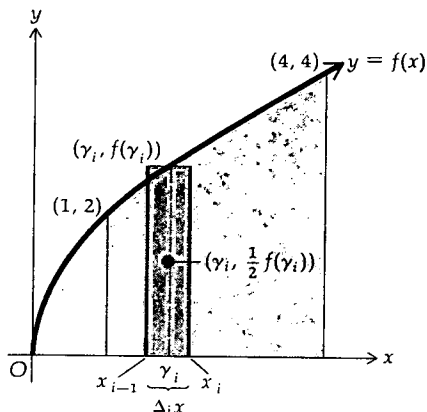


FIGURA 3

EXEMPLO 2 Ache o centróide da região no primeiro quadrante limitada pela curva $y^2 = 4x$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$.

Solução Seja $f(x) = 2x^{1/2}$. A equação da curva é, então, $y = f(x)$. A Figura 3 mostra a região, bem como o i -ésimo elemento retangular. O centróide do retângulo está em $(\gamma_i, \frac{1}{2}f(\gamma_i))$. A área A unidades quadradas da região é dada por

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\gamma_i) \Delta_i x \\ &= \int_1^4 f(x) dx \\ &= \int_1^4 2x^{1/2} dx \\ &= \left. \frac{4}{3} x^{3/2} \right|_1^4 \\ &= \frac{28}{3} \end{aligned}$$

Agora vamos calcular M_y e M_x .

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i f(\gamma_i) \Delta_i x & M_x &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f(\gamma_i) \cdot f(\gamma_i) \Delta_i x \\ &= \int_1^4 x f(x) dx & &= \frac{1}{2} \int_1^4 [f(x)]^2 dx \\ &= \int_1^4 x(2x^{1/2}) dx & &= \frac{1}{2} \int_1^4 4x dx \\ &= 2 \int_1^4 x^{3/2} dx & &= \left. x^2 \right|_1^4 \\ &= \left. \frac{4}{5} x^{5/2} \right|_1^4 & &= 15 \\ &= \frac{124}{5} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{A} & \bar{y} &= \frac{M_x}{A} \\ &= \frac{\frac{124}{5}}{\frac{28}{3}} & &= \frac{15}{\frac{28}{3}} \\ &= \frac{93}{35} & &= \frac{45}{28} \end{aligned}$$

Assim, o centróide está no ponto $(\frac{93}{35}, \frac{45}{28})$.

No exemplo a seguir, a região é limitada por duas curvas, ao invés de uma e um eixo coordenado. O método para encontrarmos o centróide é o mesmo, mas as equações para M_x e M_y dependem das equações que definem as duas curvas. O procedimento a ser seguido está no exemplo.

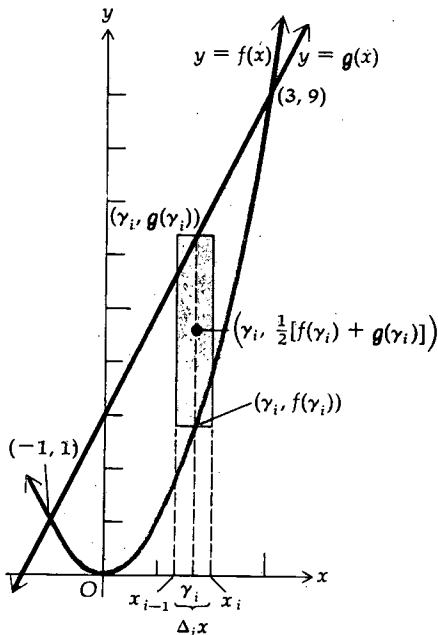


FIGURA 4

EXEMPLO 3 Ache o centróide da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 2x + 3$.

Solução Os pontos de intersecção das duas curvas são $(-1, 1)$ e $(3, 9)$. A região está na Figura 4; bem como o i -ésimo elemento retangular.

Seja $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x + 3$. O centróide do i -ésimo elemento retangular está no ponto $(\gamma_i, \frac{1}{2}[f(\gamma_i) + g(\gamma_i)])$, onde γ_i é o ponto médio do i -ésimo sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A medida da área da região é dada por

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [g(\gamma_i) - f(\gamma_i)] \Delta_i x \\ &= \int_{-1}^3 [g(x) - f(x)] dx \\ &= \int_{-1}^3 [2x + 3 - x^2] dx \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Vamos calcular M_y e M_x .

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i [g(\gamma_i) - f(\gamma_i)] \Delta_i x \\ &= \int_{-1}^3 x [g(x) - f(x)] dx \\ &= \int_{-1}^3 x [2x + 3 - x^2] dx \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [g(\gamma_i) + f(\gamma_i)] [g(\gamma_i) - f(\gamma_i)] \Delta_i x \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^3 [g(x) + f(x)] [g(x) - f(x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^3 [2x + 3 + x^2] [2x + 3 - x^2] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^3 [4x^2 + 12x + 9 - x^4] dx \\ &= \frac{544}{15} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{A} & \bar{y} &= \frac{M_x}{A} \\ &= \frac{\frac{32}{3}}{\frac{32}{3}} & &= \frac{\frac{544}{15}}{\frac{32}{3}} \\ &= 1 & &= \frac{17}{5} \end{aligned}$$

Assim sendo, o centróide está no ponto $(1, \frac{17}{5})$.

6.5.3 TEOREMA

Se a região plana R tiver a reta L como um eixo de simetria, o centróide de R estará em L .

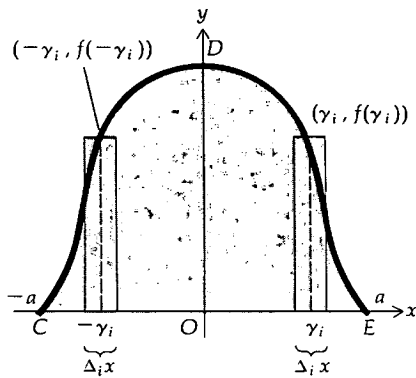


FIGURA 5

Prova Escolha os eixos coordenados de tal forma que L esteja sobre o eixo y e a origem esteja em R . A Figura 5 ilustra um exemplo desta situação. Na figura, R é a região CDE , C é o ponto $(-a, 0)$, E é $(a, 0)$ e a equação da curva CDE é $y = f(x)$.

Consideremos uma partição do intervalo $[0, a]$. Seja γ_i o ponto médio do i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. O momento em relação ao eixo y do elemento retangular com altura $f(\gamma_i)$ e comprimento $\Delta_i x$ é $\gamma_i [f(\gamma_i) \Delta_i x]$. Dada a simetria, para uma partição similar do intervalo $[-a, 0]$ existe um elemento correspondente tendo $-\gamma_i f(\gamma_i) \Delta_i x$ como seu momento em relação ao eixo y . A soma desses dois momentos é 0; logo $M_y = 0$. Como $\bar{x} = M_y/A$, concluímos que $\bar{x} = 0$. Assim o centróide da região R está no eixo y e isso é o que queríamos provar. ■

Com a aplicação do Teorema 6.5.3 torna-se mais simples encontrar o centróide de uma região plana que pode, assim, ser dividida em regiões com eixos de simetria.

EXEMPLO 4 Ache o centróide da região limitada pelo semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$ e pelo eixo x .

Solução A região está na Figura 6.

Como o eixo y é um eixo de simetria, o centróide está sobre o eixo y ; assim, $\bar{x} = 0$.

O momento da região em relação ao eixo x é dado por

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [\sqrt{4 - \gamma_i^2}]^2 \Delta_i x \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 (4 - x^2) dx \\ &= 4x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^2 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

A área da região é 2π unidades quadradas; assim,

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\frac{16}{3}}{2\pi} \\ &= \frac{8}{3\pi} \end{aligned}$$

O centróide está no ponto $(0, \frac{8}{3\pi})$.

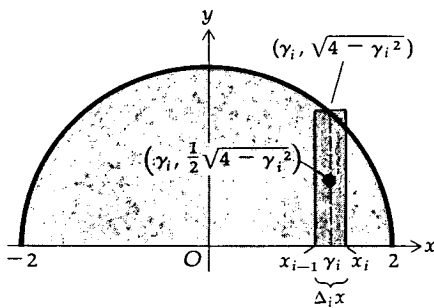


FIGURA 6

EXERCÍCIOS 6.5

1. Ache o centro de massa de três partículas tendo massas de 1, 2 e 3 kg e localizadas nos pontos $(-1, 3)$, $(2, 1)$ e $(3, -1)$, respectivamente.
2. Ache o centro de massa das quatro partículas tendo massas de 2, 3, 3 e 4 kg e localizadas nos pontos $(-1, -2)$, $(1, 3)$, $(0, 5)$ e $(2, 1)$, respectivamente.
3. A coordenada y do centro de massa de quatro partículas é 5. As partículas têm massas 2, 5, 4 e m kg e estão localizadas nos pontos $(3, 2)$, $(-1, 0)$, $(0, 20)$ e $(2, -2)$, respectivamente. Ache m .

4. Ache o centro de massa de três partículas tendo massas de 3, 7 e 2 kg localizadas nos pontos (2, 3), (-1, 4) e (0, 2), respectivamente.
5. Ache o centro de massa de três partículas de igual massa localizadas em (4, -2), (-3, 0) e (1, 5).
6. Prove que o centro de massa de três partículas com igual massa num plano está no ponto de intersecção das medianas do triângulo cujos vértices são os pontos onde estão as partículas.

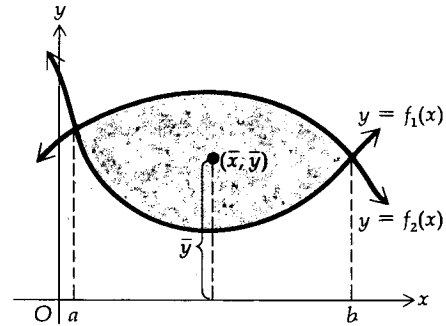
Nos Exercícios de 7 a 14, ache o centróide da região com os contornos indicados.

7. A parábola $y = 4 - x^2$ e o eixo x .
8. A parábola $x = 2y - y^2$ e o eixo y .
9. A parábola $y = x^2$ e a reta $y = 4$.
10. A parábola $y^2 = 4x$, o eixo y e a reta $y = 4$.
11. As curvas $y = x^3$ e $y = 4x$ no primeiro quadrante.
12. As retas $y = 2x + 1$, $x + y = 7$, e $x = 8$.
13. As curvas $y = x^2 - 4$ e $y = 2x - x^2$.
14. As curvas $y = x^2$ e $y = x^3$.
15. Ache o centro de massa da lâmina limitada pela parábola $2y^2 = 18 - 3x$, pelo eixo y , se a densidade superficial de massa em qualquer ponto (x, y) for $\sqrt{6 - x}$ kg/m².
16. Resolva o Exercício 15 se a densidade superficial de massa em qualquer ponto (x, y) for x kg/m².
17. Se o centróide da região limitada pela parábola $y^2 = 4px$ e pela reta $x = a$ estiver no ponto $(p, 0)$, ache o valor de a .
18. Prove que a distância do centróide de um triângulo a qualquer lado do triângulo é igual a um terço da altura daquele lado.
19. Seja R a região limitada pelas curvas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ (veja a figura). Se A for a medida da área de R e \bar{y} for a ordenada do centróide de R , prove que a medida do volume V do sólido de revolução obtidos ao girarmos R em torno do eixo x é dada por $V = 2\pi\bar{y}A$. Enunciando esta igualdade temos que:

Se uma região plana girar em torno de um reta em seu plano que não corta a região, então, a medida do volume do sólido

de revolução gerado será igual ao produto da medida da área da região pela medida da distância percorrida pelo centróide da região.

O enunciado acima é conhecido como o *teorema de Pappus* para volumes de sólidos de revolução.



20. Use o teorema de Pappus para encontrar o volume do toro (da forma de uma câmara de ar) gerado com a revolução de um círculo com um raio de r unidades em torno de uma reta em seu plano, a uma distância de b unidades de seu centro, onde $b > r$.
21. Use o teorema de Pappus para encontrar o centróide da região limitada por um semicírculo e seu diâmetro.
22. Use o teorema de Pappus para encontrar o volume de uma esfera com um raio de r unidades.
23. Use o teorema de Pappus para encontrar o volume de um cone circular reto com raio da base r unidades e altura h unidades.
24. Seja R a região limitada pelo semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e o eixo x . Use o teorema de Pappus para encontrar o momento de R em relação à reta $y = -r$.
25. Se R for a região do Exercício 24, use o teorema de Pappus para encontrar o volume do sólido de revolução gerado com a revolução de R em torno da reta $x - y = r$. (Sugestão: use o resultado do Exercício 4.6 nos Exercícios 4.8.)
26. Dê um exemplo para mostrar que o centróide de uma região plana não é necessariamente um ponto dentro da região.

6.6 TRABALHO

O *trabalho* realizado por uma força atuando sobre um objeto é definido em Física como sendo “a intensidade da força vezes o deslocamento”. Por exemplo, suponha que um objeto se mova ao longo do eixo x , de um ponto a até um ponto b e sobre o objeto esteja agindo uma força de F newtons na direção do movimento. Então, se o deslocamento for medido em metros, $(b - a)$ será o número de metros no deslocamento. Se W for o número de unidades do trabalho realizado pela força, W será definido por

$$W = F(b - a) \quad (1)$$

► **ILUSTRAÇÃO 1** Se W for o trabalho necessário para levantar uma massa de 70 kg a uma altura de 3 m, então

$$W = 70 \cdot 3 = 210$$

onde a aceleração foi considerada igual a 1. ◀

A unidade de medida do trabalho depende das unidades de força e distância. No sistema métrico, se a unidade de massa for medida em quilogramas e a distância for medida em metros, então a unidade de força será o *newton* e a unidade de trabalho será um newton-metro que é chamado de *joule* (J). Se a unidade de massa for o grama e a distância for medida em centímetros, então a unidade de força será a *dina* e a unidade de trabalho, uma dina-centímetro, será chamada de *erg*. Para conversão, 1 newton é 10^5 dinas e 1 joule é 10^7 ergs. No sistema inglês, onde a força é medida em libras e a distância em pés, o trabalho é medido em pés-libras.

O exemplo a seguir mostra o cálculo do trabalho.

► **ILUSTRAÇÃO 2** Queremos encontrar o trabalho realizado ao levantar uma pedra com 8 kg de massa a uma altura de 4 m. Usamos a fórmula $F = Ma$, onde F newtons (N) é a força requerida para dar à massa de M kg uma aceleração de a m/s². A força, neste caso, é a força da gravidade e a aceleração é a da gravidade, que é 9,81 m/s². A massa é 8 kg. Logo, $M = 8$ e $a = 9,81$ e

$$\begin{aligned} F &= 8(9,81) \\ &= 78,48 \end{aligned}$$

Assim, queremos encontrar o trabalho realizado por uma força de 78,48 N e um deslocamento de 4 m. Se W J for o trabalho,

$$\begin{aligned} W &= (78,48)(4) \\ &= 313,92 \end{aligned}$$

Logo, o trabalho realizado é de 313,92 J. ◀

Vamos considerar agora o trabalho realizado por uma força atuando, ao longo de uma reta, na direção e sentido do deslocamento. Queremos definir o que entendemos pelo termo “trabalho” neste caso.

Suponhamos que f seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e $f(x)$ unidades seja a força que age na direção do movimento sobre um objeto, quando ele se move para a direita, ao longo do eixo x , de um ponto a para um ponto b . Seja Δ uma partição do intervalo fechado $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

O i -ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$; e se x_{i-1} está próximo de x_i , a força é quase constante nesse subintervalo. Se supusermos que a força será constante no i -ésimo subintervalo e se ξ_i for um ponto qualquer tal que $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, então, se $\Delta_i W$ for o número de unidades do trabalho realizado sobre o objeto quando ele se move do ponto x_{i-1} ao ponto x_i , da fórmula (1) temos que

$$\Delta_i W = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Substituindo $x_i - x_{i-1}$ por $\Delta_i x$ temos

$$\begin{aligned} \Delta_i W &= f(\xi_i) \Delta_i x \\ \sum_{i=1}^n \Delta_i W &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x \end{aligned}$$

Quanto menor tomarmos a norma da partição Δ , maior será n e mais perto estará a soma de Riemann do que intuitivamente pensamos ser a medida do trabalho total realizado. Então, vamos definir a medida do trabalho total como o limite da soma de Riemann.

6.6.1 DEFINIÇÃO

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e $f(x)$ o número de unidades na força que age sobre um objeto situado no ponto x do eixo x . Então, se W unidades for o **trabalho** realizado pela força quando o objeto se move de a até b ,

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x \\ &= \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

EXEMPLO 1 Uma partícula se move ao longo do eixo x sob a ação de uma força de $f(x)$ N, quando a partícula está a x m da origem. Se $f(x) = x^2 + 4$, ache o trabalho realizado quando a partícula se move do ponto onde $x = 2$ ao ponto onde $x = 4$.

Solução Tomamos uma partição do intervalo fechado $[2, 4]$. Se W N-m for o trabalho realizado quando a partícula se move do ponto onde $x = 2$ ao ponto onde $x = 4$, então, pela Definição 6.6.1,

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x \\ &= \int_2^4 f(x) dx \\ &= \int_2^4 (x^2 + 4) dx \\ &= \left. \frac{x^3}{3} + 4x \right|_2^4 \\ &= \frac{64}{3} + 16 - \left(\frac{8}{3} + 8 \right) \\ &= 26\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Logo, o trabalho realizado é $26\frac{2}{3}$ N-m.

No exemplo a seguir, usamos a **lei de Hooke**, a qual estabelece que se uma mola for esticada x unidades além do seu comprimento natural, ela tende a voltar ao normal, exercendo uma força igual a kx unidades, onde k é uma constante que depende do material empregado na fabricação da mola, de seu tamanho e das unidades mecânicas empregadas.

EXEMPLO 2 Uma mola tem um comprimento natural de 14 cm. Se uma força de 500 dinas é requerida para mantê-la esticada 2 cm além de seu tamanho natural, qual o trabalho realizado para esticá-la do seu comprimento natural até 18 cm?

Solução Coloque a mola ao longo do eixo x , com a origem no ponto onde começa o estiramento. Veja a Figura 1. Seja $f(x)$ o número de dinas na força que

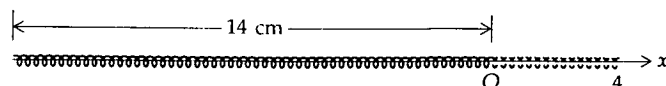


FIGURA 1

age sobre a mola para esticá-la x cm além do seu comprimento natural. Então, pela lei de Hooke,

$$f(x) = kx$$

Como $f(2) = 500$, temos

$$\begin{aligned} 500 &= k \cdot 2 \\ k &= 250 \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x) = 250x$$

Como a mola está sendo esticada de 14 para 18 cm, considere uma partição do intervalo fechado $[0, 4]$ sobre o eixo x . Seja $\Delta_i x$ cm o comprimento do i -ésimo subintervalo e seja ξ_i um ponto qualquer no i -ésimo subintervalo. Se W ergs (dina-centímetros) for o trabalho realizado para esticar a mola do seu comprimento natural de 14 cm até o comprimento de 18 cm, então

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x \\ &= \int_0^4 f(x) dx \\ &= \int_0^4 250x dx \\ &= \left. \frac{250}{2} x^2 \right]_0^4 \\ &= 2.000 \end{aligned}$$

Logo, o trabalho realizado para esticar a mola é de 2.000 ergs.

Nos Exemplos 3 e 4 estamos interessados no peso da água. No sistema internacional a densidade de massa da água é 1.000 kg/m^3 e a aceleração da gravidade é $9,81 \text{ m/s}^2$. Portanto, a densidade do peso da água é $(1.000)(9,81) \text{ N/m}^3 = 9.810 \text{ N/m}^3$.

EXEMPLO 3 Um reservatório de água com a forma de um cone circular reto invertido tem 2 m de diâmetro no topo e 1,5 m de profundidade. Se a superfície da água estiver 0,5 m abaixo do topo do reservatório, ache o trabalho realizado ao se bombear a água para o topo do tanque.

Solução Consulte a Figura 2. O eixo x positivo foi escolhido apontando para baixo, pois o movimento é vertical. Tomamos a origem no topo do reservatório. Vamos considerar uma partição do intervalo fechado $[0,5, 1,5]$ no eixo x e seja ξ_i um ponto qualquer no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Um elemento de volume é um disco circular com espessura $\Delta_i x$ m e raio $f(\xi_i)$ m, onde f é determinada por uma equação da reta que passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(1,5, 0)$, com a forma $y = f(x)$. O número de metros cúbicos no volume desse elemento é dado por $\pi [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x$. Sendo o peso de 1 m^3 de água igual a 9.810 N , o peso do elemento será $9.810\pi [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x \text{ N}$, o qual é a força que atua sobre o elemento. Se x_{i-1} estiver próximo de x_i , então a distância percorrida pelo elemento será de aproximadamente ξ_i m. Assim, o trabalho realizado para bombear esse elemento ao topo do reservatório será de aproximadamente

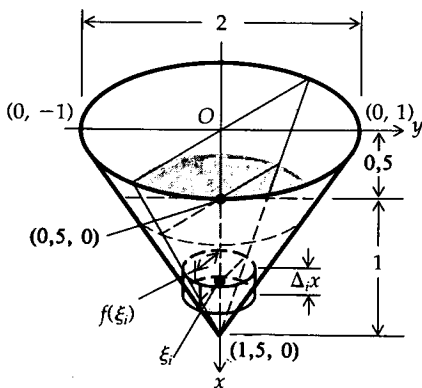


FIGURA 2

$(9.810\pi [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x)$ J. Assim, se W for o número de joules do trabalho total realizado,

$$\begin{aligned} W &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 9.810\pi [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x \\ &= 9.810\pi \int_{0,5}^{1,5} [f(x)]^2 x \, dx \end{aligned}$$

Para determinar $f(x)$ vamos encontrar uma equação da reta que passe pelos pontos $(0, 1)$ e $(1,5, 0)$, usando a forma intercepta:

$$y = \frac{0 - 1}{1,5 - 0}x + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 1$$

Logo, $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$ e

$$\begin{aligned} W &= 9.810\pi \int_{0,5}^{1,5} \left(-\frac{2}{3}x + 1\right)^2 x \, dx \\ &= 9.810\pi \int_{0,5}^{1,5} \left(\frac{4}{9}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + x\right) dx \\ &= 9.810\pi \left[\frac{1}{9}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{0,5}^{1,5} \\ &= 1.090\pi \end{aligned}$$

Assim, o trabalho realizado é de 1.090π J.

EXEMPLO 4 Uma caixa d'água está sendo içada. Enquanto sobe há um vazamento constante de $0,18 \text{ m}^3$ a cada metro percorrido. Se o peso da caixa for de 900 kg e se originalmente ela contém 27 m^3 de água, ache o trabalho realizado quando a caixa atingir 6 metros de altura.

Solução Veja a Figura 3. A origem O foi colocada no ponto de partida na base da caixa e o eixo x é vertical e orientado para cima segundo a direção e o sentido do movimento a partir de O . Consideremos uma partição do intervalo fechado $[0, 6]$ no eixo x . Seja ξ_i um ponto qualquer no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Quando a base da caixa estiver em ξ_i , haverá na caixa $(27 - 0,18 \xi_i) \text{ m}^3$ de água. Supondo que o peso de 1 m^3 de água é de aproximadamente 1.050 N , então o peso da caixa e seu conteúdo em ξ_i será $[900 + 1.050 (27 - 0,18 \xi_i)]$ ou, equivalentemente, $(29.250 - 189 \xi_i) \text{ N}$, que é a força que age sobre a caixa. O trabalho realizado ao içar a caixa através do i -ésimo subintervalo é de aproximadamente $(29.250 - 189 \xi_i) \Delta_i x$ joules. O termo "aproximadamente" foi usado pois estamos supondo a quantidade de água na caixa em todo o subintervalo. Se W joules for o trabalho total realizado ao elevar a caixa até os 6 m ,

$$\begin{aligned} W &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (29.250 - 189 \xi_i) \Delta_i x \\ &= \int_0^6 (29.250 - 189x) \, dx \\ &= 29.250x - \frac{189}{2}x^2 \Big|_0^6 \\ &= 172.098 \end{aligned}$$

Assim, o trabalho realizado é de 172.098 joules.

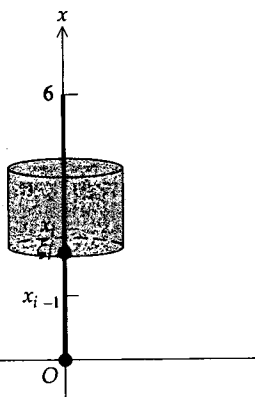


FIGURA 3

EXERCÍCIOS 6.6

Nos Exercícios 1 e 2, uma partícula se move ao longo do eixo x sob a ação de uma força de $f(x)$ N quando a partícula está a x m da origem. Ache o trabalho realizado quando a partícula se move do ponto onde $x = a$ até o ponto onde $x = b$.

1. $f(x) = (2x + 1)^2$; $a = 1$; $b = 3$

2. $f(x) = x^2\sqrt{x^3 + 1}$; $a = 0$; $b = 2$

Nos Exercícios 3 e 4, uma partícula se move ao longo do eixo x sob a ação de uma força de $f(x)$ dinas, quando a partícula está a x cm da origem. Ache o trabalho realizado quando a partícula se move do ponto onde $x = a$ até o ponto onde $x = b$.

3. $f(x) = x\sqrt{x + 1}$; $a = 3$; $b = 8$

4. $f(x) = (4x - 1)^2$; $a = 1$; $b = 4$

5. Um objeto se move ao longo do eixo x sob a ação de uma força de $f(x)$ dinas quando o objeto está a x cm da origem. Se 96 ergs for o trabalho realizado ao mover o objeto da origem até o ponto onde $x = K$ e $f(x) = 2x - 3$, ache K se $K > 0$.
6. Resolva o Exercício 5, se 90 ergs for o trabalho realizado e $f(x) = 4x - 3$.
7. Uma mola tem um comprimento natural de 8 cm. Se uma força de 20 dinas estica a mola em $\frac{1}{2}$ cm a mais, ache o trabalho realizado ao esticar a mola de 8 para 11 cm.
8. Uma mola tem um comprimento natural de 10 cm e uma força de 30 dinas a estica até $11\frac{1}{2}$ cm. (a) Ache o trabalho realizado ao esticar a mola de 10 para 12 cm. (b) Ache o trabalho realizado ao esticar a mola de 12 para 14 cm.
9. Uma força de 8 N estica uma mola, cujo comprimento natural é 4 m, em 50 cm. Ache o trabalho realizado ao esticar a mola de seu comprimento natural até 5 m.
10. Uma força de 500 dinas estica uma mola de seu comprimento natural de 20 cm, até um comprimento de 24 cm. Ache o trabalho realizado ao esticar a mola de seu comprimento natural até 28 cm.
11. Uma mola tem um comprimento natural de 12 cm. Uma força de 600 dinas comprime a mola para 10 cm. Ache o trabalho realizado ao comprimir a mola de 12 para 9 cm. A lei de Hooke é válida para compressão, da mesma forma que para extensão.
12. Uma mola tem um comprimento natural de 6 cm. Uma força de 1.200 dinas a comprime para $5\frac{1}{2}$ cm. Ache o trabalho realizado ao comprimir a mola de 6 para $4\frac{1}{2}$ cm.
13. Um tanque cheio com água tem a forma de um paralelepípedo retangular com 5 m de profundidade por 15 m de largura e por 25 m de comprimento. Ache o trabalho necessário para bombear a água no tanque a um nível de 1 m acima da superfície do tanque.
14. Uma tina cheia de água tem 10 m de comprimento e sua seção transversal tem a forma de um triângulo isósceles com 2 m de largura em cima e 2 m de altura. Qual o trabalho realizado para se bombear a água para fora da tina, por cima da borda do tanque?
15. Um tanque com a forma de um hemisfério está colocado de forma que a borda seja uma região circular de raio 6 m e tem água com uma profundidade de 4 m. Ache o trabalho realizado ao se bombear a água para a borda do tanque.
16. Um tanque cilíndrico circular reto com uma profundidade de 360 cm e um raio de 120 cm está cheio até a metade, com óleo pesando $1,2$ g/cm³. Ache o trabalho realizado para se bombear o óleo a uma altura de 180 cm acima do tanque.
17. Uma corda com 60 m e pesando 6 kg/m está pendurada verticalmente na parede de um poço. Se um peso de 45 kg for levantado pela corda, ache o trabalho realizado ao se puxar a corda e o peso para cima do poço.
18. Um balde com 20 kg contém 60 kg de areia e é pendurado no extremo de uma corrente com 100 m e com 10 kg que está dependurada à beira de um poço profundo. Ache o trabalho realizado ao levantar o balde até a beira do poço.
19. Resolva o Exercício 18, se a areia está vazando do balde a uma taxa constante e se no momento em que o balde chega à beira do poço, toda a areia vazou dele.
20. Enquanto um saco de farinha está sendo levantado a uma altura de 3 m, a farinha vaza segundo uma taxa tal que o número de quilos perdidos seja diretamente proporcional à raiz quadrada da distância percorrida. Se o saco continha originalmente 27 kg de farinha e se perde um total de 5 kg ao percorrer os 3 m ache o trabalho realizado para se levantar o saco.
21. Um tanque cilíndrico circular reto com uma profundidade de 10 m e um raio de 5 m está cheio de água até a metade. Ache o trabalho necessário para que a água seja bombeada até a borda do tanque.
22. Um tanque na forma de um cone circular reto invertido tem 8 m de diâmetro na borda e 10 m de profundidade. Se o tanque estiver cheio de água até uma altura de 9 m, ache o trabalho realizado ao bombear a água até a sua borda.
23. Se o tanque do Exercício 22 estiver cheio até uma altura de 8 m, com óleo pesando 950 kg/m³, ache o trabalho realizado para que o óleo seja bombeado até a borda. (*Sugestão*: o número de newtons da força necessária para erguer um elemento é o produto do número de quilogramas de massa (o mesmo que o número de quilogramas de peso) e $9,81$, o número de metros por segundo ao quadrado na aceleração devido à gravidade.)
24. Se, no Exercício 22, somente a metade da água deve ser bombeada para cima do tanque, ache o trabalho.
25. Um motor com 1 cavalo motor (hp) pode fazer 8.250 N de trabalho por segundo. Se um motor com 0,1 hp for usado para bombear água de um tanque cheio com a forma de um paralelepípedo retangular com 6 m de profundidade, 6 m de largura e 18 m de comprimento para um ponto 15 m acima da borda do tanque, quanto tempo irá levar?
26. Um meteorito está a a km do centro da Terra e cai sobre a sua superfície. A força da gravidade é inversamente proporcional ao quadrado da distância de um corpo ao centro da

Terra: Ache o trabalho realizado pela gravidade se a massa do meteorito for w kg. Seja R km o raio da Terra e g m/s² a aceleração da gravidade.

27. Um tanque tem a forma de um paralelepípedo retangular com 6 m de profundidade, 4 m de largura e 2 m de comprimento e está cheio de óleo pesando 50 kg/m³. Quando um terço do trabalho necessário para bombear o óleo para a borda do

tanque foi realizado, ache o quanto baixou a superfície de óleo.

28. Um tanque cilíndrico com 3 m de altura e 1,5 m de raio está sobre uma plataforma a 15 m de altura. Ache a profundidade da água quando foi a metade do trabalho necessário para encher o tanque realizada através de um cano que vai do nível do solo à base do tanque.

6.7 PRESSÃO LÍQUIDA (Suplementar)

A integral definida também é aplicada em Física para encontrarmos a força decorrente da pressão líquida sobre uma placa submersa no líquido ou a pressão exercida pelo líquido sobre as paredes laterais do recipiente que o contém. Vamos supor inicialmente que uma placa plana seja colocada horizontalmente no recipiente com o líquido. O peso do líquido exerce uma força sobre a placa. A força por unidade quadrada de área exercida pelo líquido sobre a placa é chamada de **pressão** do líquido.

Seja ρ a densidade de massa do líquido e h m a profundidade de um ponto abaixo da superfície do líquido. Se P N/m² for a pressão exercida pelo líquido num ponto, então

$$P = \rho gh \quad (1)$$

onde g é a medida da aceleração da gravidade.

Se A m² for a área de uma placa plana que está submersa horizontalmente em um líquido e F N for a força exercida pela pressão do líquido na face superior da placa, então

$$F = PA$$

Substituindo (1) na expressão acima, obtemos

$$F = \rho ghA$$

De (1) segue que o tamanho do recipiente não interfere na pressão líquida. Por exemplo, a uma profundidade de 2 m numa piscina cheia com água salgada, a pressão será a mesma que numa profundidade de 2 m no oceano, supondo que a densidade seja a mesma.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Uma folha de latão com 2 m \times 4 m é submersa num tanque com água a uma profundidade de 3 m. Se P N/m² for a pressão exercida pela água num ponto da face superior da folha,

$$P = 3\rho g$$

A área da folha é 8 m². Assim se F N for a força exercida pela pressão líquida na face superior da folha,

$$F = 8P$$

Substituindo P por $3\rho g$, obtemos

$$F = 24\rho g$$

Tomando $g = 9,81$ e $\rho = 1.000$ temos $g\rho = 9.810$. Então, $F = 235.440$ N. Logo, a força decorrente da pressão da água sobre a superfície superior da folha é de 235.440 N. ◀

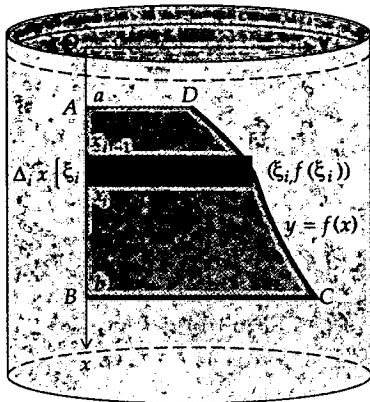


FIGURA 1

Vamos supor agora que a placa seja submersa verticalmente no líquido. Então, em pontos da placa em profundidades diferentes a pressão, calculada por (1), será diferente e maior embaixo da placa do que em cima dela. Vamos, na seqüência, definir a força causada pela pressão líquida quando a placa estiver submersa verticalmente no líquido. Usaremos o princípio de Pascal. Em qualquer ponto de um líquido, a pressão será a mesma em todas as direções.

Na Figura 1, seja $ABCD$ a região limitada pelo eixo x , pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pela curva $y = f(x)$, onde a função f é contínua e $f(x) \geq 0$ no intervalo fechado $[a, b]$. Vamos tomar os eixos coordenados de tal forma que o eixo y esteja ao longo da superfície do líquido. O eixo x será tomado na vertical, apontando para baixo. O comprimento da placa em x m de profundidade é dado por $f(x)$ m.

Seja Δ uma partição do intervalo fechado $[a, b]$ que divide o intervalo em n subintervalos. Tome um ponto ξ_i no i -ésimo subintervalo com $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Trace n retângulos horizontais. O i -ésimo retângulo tem um comprimento de $f(\xi_i)$ m e uma largura de $\Delta_i x$ m (veja a Figura 1).

Se girarmos cada elemento retangular de um ângulo de 90° , cada elemento transformar-se-á numa placa submersa no líquido a uma profundidade de ξ_i m, abaixo da superfície do líquido e perpendicular à região $ABCD$. Então, a força sobre o i -ésimo elemento retangular é dada por $\rho g \xi_i f(\xi_i) \Delta_i x$ N. Uma aproximação de F , o número de N da força total na placa vertical, é dada por

$$\sum_{i=1}^n \rho g \xi_i f(\xi_i) \Delta_i x$$

que é uma soma de Riemann. Quanto menor tomarmos $\|\Delta\|$, maior será n e melhor será a aproximação dada pela soma de Riemann do que entendemos ser a medida da força total. Temos, então, a definição a seguir.

6.7.1 DEFINIÇÃO

Suponhamos que uma placa seja submersa verticalmente em um líquido com densidade de massa ρ . O comprimento da placa a uma profundidade de x unidades abaixo da superfície do líquido é $f(x)$ unidades, onde f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Então F , o número de newtons da força causada pela pressão líquida na placa, é dado por

$$F = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho g \xi_i f(\xi_i) \Delta_i x = \int_a^b \rho g x f(x) dx \tag{2}$$

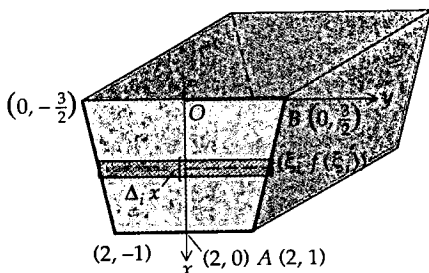


FIGURA 2

EXEMPLO 1 Uma tina com uma seção transversal trapezoidal está cheia de água. Se o trapézio tiver 3 m de largura em cima, 2 m embaixo e 2 m de profundidade, ache a força total decorrente da pressão em um extremo da tina.

Solução A Figura 2 apresenta um extremo da tina e um elemento retangular de área. Uma equação da reta AB é $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x$, $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x$. Se girarmos o elemento retangular em 90° , a força sobre o elemento será dada por $2\rho g \xi_i f(\xi_i) \Delta_i x$ N. Se F for o número de newtons na força total sobre o

lado da tina,

$$\begin{aligned}
 F &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\rho g \xi_i f(\xi_i) \Delta_i x \\
 &= 2\rho g \int_0^2 x f(x) dx \\
 &= 2\rho g \int_0^2 x \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}x\right) dx \\
 &= 2\rho g \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3 \right]_0^2 \\
 &= \frac{14}{3}\rho g
 \end{aligned}$$

Tomando $\rho g = 9.810 \text{ N/m}^3$, determinamos que a força total é de 45.780 N.

EXEMPLO 2 Os extremos de uma tina são regiões semicirculares, cada uma com um raio de 2 m. Ache a força causada pela pressão líquida sobre um extremo, se a tina estiver cheia de água.

Solução A Figura 3 mostra um extremo da tina e um elemento retangular de área. Uma equação do semicírculo é $x^2 + y^2 = 4$. Resolvendo em y , obtemos $y = \sqrt{4 - x^2}$. A força sobre o elemento retangular é dada por $2\rho g \xi_i \sqrt{4 - \xi_i^2} \Delta_i x$. Assim, se F N for a força total num extremo da tira,

$$\begin{aligned}
 F &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\rho g \xi_i \sqrt{4 - \xi_i^2} \Delta_i x \\
 &= 2\rho g \int_0^2 x \sqrt{4 - x^2} dx \\
 &= -\frac{2}{3}\rho g (4 - x^2)^{3/2} \Big|_0^2 \\
 &= \frac{16}{3}\rho g
 \end{aligned}$$

Com $\rho g = 9.810 \text{ N/m}^3$, a força total é de 52.320 N.

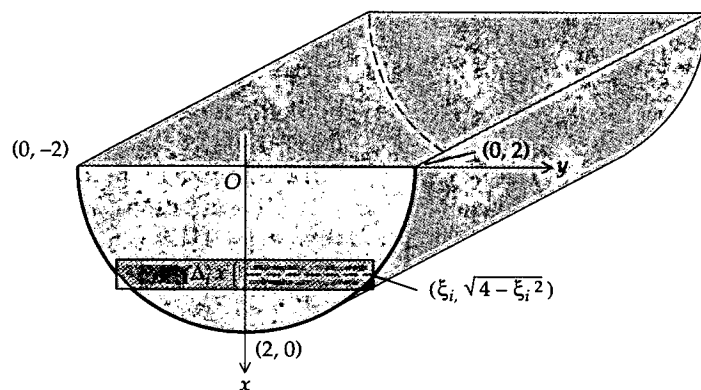


FIGURA 3

Existe uma relação útil entre a força causada pela pressão líquida sobre uma região plana e a localização do centróide da região. Consulte a Figura 1 onde $ABCD$ é a região limitada pelo eixo x , pelas retas $x = a$ e $x = b$, e pela curva $y = f(x)$, em que f é contínua e $f(x) \geq 0$ no intervalo fechado $[a, b]$. Vamos considerar $ABCD$ como uma placa vertical imersa em um líquido tendo densi-

dade de massa ρ . Se FN for a força decorrente da pressão do líquido sobre a placa vertical, de (2), segue que

$$F = \rho g \int_a^b xf(x) dx \quad (3)$$

Se \bar{x} for a abscissa do centróide da região $ABCD$, então $\bar{x} = M_y/A$. Como

$$M_y = \int_a^b xf(x) dx,$$

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xf(x) dx}{A}$$

$$\int_a^b xf(x) dx = \bar{x}A$$

Substituindo essa expressão em (3), obtemos

$$F = \rho g \bar{x}A \quad (4)$$

De (4), segue que a força total decorrente da pressão do líquido contra uma região vertical plana é igual à força que agiria sobre uma região horizontal, a uma profundidade de \bar{x} unidades abaixo da superfície do líquido.

► **ILUSTRAÇÃO 2** Consideremos uma tina cheia de água, tendo por extremidades regiões semicirculares, cada uma com um raio de 2 m. Usando o resultado do Exemplo 4 da Seção 6.5, verificamos que o centróide da região está a uma profundidade de $8/(3\pi)$ m. Logo, usando (4) vemos que se FN for a força num extremo da tina,

$$\begin{aligned} F &= \rho g \frac{8}{3\pi} \cdot 2\pi \\ &= \frac{16}{3} \rho g \end{aligned}$$

O que está de acordo com o resultado encontrado no Exemplo 2. ◀

Para várias regiões planas, o seu centróide pode ser encontrado em uma tabela. Quando ambos, a área da região e o seu centróide, puderem ser obtidos diretamente, (4) será fácil de aplicar, sendo usada em tais casos pelos engenheiros para encontrar a força causada pela pressão do líquido.

No exemplo a seguir, usaremos unidades do SI, onde $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ e para água $\rho = 1.000$; assim, $\rho g = 9.810$.

EXEMPLO 3 Um recipiente com a forma de um cilindro circular reto, tendo um raio da base com 3 m, está sobre o seu lado na base de um tanque cheio de água. A profundidade do tanque é de 13 m. Ache a força total sobre um extremo do recipiente, devido à pressão da água.

Solução A Figura 4 mostra um extremo do recipiente no tanque e um elemento de área. O sistema de coordenadas foi escolhido de tal forma que a origem esteja no centro do círculo. Uma equação do círculo é $x^2 + y^2 = 9$. Resolvendo em x , obtemos $x = \sqrt{9 - y^2}$. A força sobre o elemento retangular é dada por

$$\rho g(10 - \xi_i)[2\sqrt{9 - \xi_i^2}] \Delta_i y$$

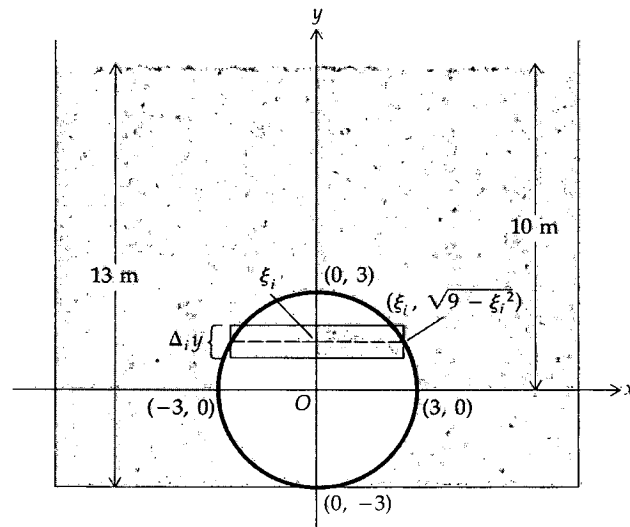


FIGURA 4

Assim, se F N for a força total num extremo do recipiente,

$$\begin{aligned} F &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho g (10 - \zeta_i) [2\sqrt{9 - \xi_i^2}] \Delta_i y \\ &= 2\rho g \int_{-3}^3 (10 - y) \sqrt{9 - y^2} dy \end{aligned}$$

Como $\rho g = 9.810$, temos

$$F = 196.200 \int_{-3}^3 \sqrt{9 - y^2} dy - 19.620 \int_{-3}^3 y \sqrt{9 - y^2} dy \quad (5)$$

Para o cálculo de $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - y^2} dy$, faz-se necessária uma técnica da integração que será aprendida na Secção 9.4. No momento, determinamos o seu valor, considerando-a como a medida da área da região encerrada por um semi-círculo de raio 3. Portanto,

$$\int_{-3}^3 \sqrt{9 - y^2} dy = \frac{9}{2}\pi$$

Substituindo esse valor em (5) e calculando a segunda integral, temos

$$\begin{aligned} F &= 196.200 \left(\frac{9}{2}\pi\right) + 19.620 \left[\frac{1}{3}(9 - y^2)^{3/2}\right]_{-3}^3 \\ &= 882.900\pi \end{aligned}$$

Assim sendo, a força total é 882.900π N.

EXERCÍCIOS 6.7

1. Uma placa retangular é submersa verticalmente em um tanque, de forma que o lado de cima esteja na superfície da água. Se o comprimento da placa for de 10 cm e a profundidade for de 8 cm, ache a força devido à pressão do líquido sobre um lado da placa.
2. Uma placa quadrada com 1 m de lado é submersa verticalmente num tanque com água e seu centro está a 0,6 m abaixo da superfície. Ache a força decorrente da pressão do líquido sobre um lado da placa.

3. Resolva o Exercício 2, se o centro da placa estiver a 1 m abaixo da superfície.
4. Uma placa com a forma de um triângulo retângulo isósceles é submersa verticalmente num tanque com água, com um cateto na superfície. Os catetos medem 6 cm cada. Ache a força decorrente da pressão do líquido sobre um lado da placa.
5. Um tanque retangular cheio de água tem 60 cm de largura e 46 cm de profundidade. Ache a força decorrente da pressão do líquido sobre um extremo do tanque.
6. Os extremos de uma tina são triângulos equiláteros com lados que medem 60 cm. Se a água na tina tiver 30 cm de profundidade, ache a força devido à pressão do líquido em um extremo.
7. A face da comporta de uma barragem tem a forma de um triângulo isósceles com 4 m de largura no topo e 3 m de altura. Se a parte superior da comporta está 15 m abaixo da superfície da água, ache a força total devido à pressão da água sobre a comporta.
8. A face da comporta de uma barragem é vertical e tem a forma de um trapézio isósceles com 3 m no topo, 4 m na base e 3 m de altura. Se a base superior está a 20 m abaixo da superfície da água, ache a força total devido à pressão da água sobre a comporta.
9. A face de um reservatório é vertical e tem a forma de um triângulo isósceles com 250 m de largura no topo e 100 m de altura no centro. Se a água está com 10 m de profundidade no centro, ache a força total sobre o reservatório devido à pressão da água.
10. Um tanque de óleo tem a forma de um cilindro circular reto com 4 m de diâmetro e seu eixo é horizontal. Se o tanque estiver cheio até a metade com óleo cuja densidade volumétrica de massa é 750 kg/m^3 , ache a força total num extremo, devido à pressão do líquido.
11. Um tanque de óleo tem a forma de um cilindro circular reto com um raio de r m e seu eixo é horizontal. Se o tanque estiver cheio de óleo com uma densidade de 750 kg/m^3 , ache r , se a força total em uma extremidade do tanque decorrente da pressão for 80.000 N .
12. Resolva o Exercício 4 usando (4).
13. Resolva o Exercício 5 usando (4).
14. Resolva o Exercício 6 usando (4).
15. A face de um reservatório adjacente à água é vertical e tem a forma de um trapézio isósceles com 90 m no topo e 60 m na base e uma altura de 20 m. Use (4), para encontrar a força total decorrente da pressão da água na face do reservatório.
16. Uma placa semicircular com um raio de 3 m está submersa verticalmente num tanque de água com o diâmetro na superfície. Use (4) para encontrar a força total decorrente da pressão da água sobre um lado da placa.
17. Ache o momento em torno da base mais baixa do trapézio da força do Exercício 15.
18. Uma placa com a forma da região limitada pela parábola $x^2 = 6y$ e pela reta $2y = 3$ é colocada num tanque com água com o vértice para baixo e a reta na superfície da água. Ache a força total decorrente da pressão da água sobre um lado da placa, se a distância for medida em metros.
19. Um tanque cilíndrico está cheio até a metade com gasolina cuja densidade é 721 kg/m^3 . Se o eixo é horizontal e o diâmetro é de 6 m, ache a força decorrente da pressão do líquido sobre um extremo.
20. Se o extremo de um reservatório de água tiver a forma de um retângulo e o reservatório estiver cheio, mostre que a medida da força em decorrência da pressão da água sobre o extremo é o produto da medida da área do extremo pela medida da força em seu centro geométrico.
21. A base de uma piscina é um plano inclinado. A piscina tem 2 m de profundidade em um extremo e 8 m no outro. Se a largura da piscina for 25 m e o comprimento for 40 m, ache a força total em decorrência da pressão da água no fundo.
22. A face de um reservatório adjacente à água é inclinada 45° em relação à vertical. A face é um retângulo com 80 m de comprimento e um lado inclinado de 40 m. Se o reservatório está cheio, ache a força total sobre a face, em decorrência da pressão da água.
23. A face de um reservatório adjacente à água é inclinada 30° em relação à vertical. A face é um retângulo com 50 m de comprimento e um lado inclinado com 30 m. Se o reservatório está cheio, ache a força total sobre a face em decorrência da pressão da água.
24. Resolva o Exercício 23 no caso em que a face do reservatório é um trapézio isósceles com 120 m de base maior no topo e 80 m de base menor e a distância entre as bases é de 40 m.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 6

1. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x da região limitada pela curva $y = x^4$, a reta $x = 1$ e o eixo x .
2. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 1 em torno do eixo y .
3. A região limitada pela curva $y = \sqrt{\sin x}$, pela reta $x = \frac{1}{2}\pi$ e pelo eixo x gira em torno do eixo x . Ache o volume do sólido gerado.
4. A região limitada pela curva $x = \sqrt{\cos y}$, pela reta $y = \frac{1}{6}\pi$ e pelo eixo y , onde $\frac{1}{6}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$, gira em torno do eixo y . Ache o volume do sólido gerado.
5. A região limitada pela curva $y = x \operatorname{cosec} x$, pelo eixo x e pelas retas $x = \frac{1}{4}\pi$ e $x = \frac{1}{2}\pi$ gira em torno do eixo x . Ache o volume do sólido gerado.
6. A região no primeiro quadrante, limitada pelas curvas $x = y^2$ e $x = y^4$ gira em torno do eixo y . Ache o volume do sólido gerado.
7. Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo y da região limitada pela parábola $x = y^2 + 2$ e pela reta $x = y + 8$.
8. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela parábola $y^2 = x$, pelo eixo x e pela reta $x = 4$ em

- torno da reta $x = 4$. Tome os elementos de área paralelos ao eixo de revolução.
9. A base de um sólido é a região limitada pela parábola $y^2 = 8x$ e a reta $x = 8$. Ache o volume do sólido, se toda secção plana perpendicular ao eixo da base for um quadrado.
 10. A base do sólido é a região encerrada por um círculo tendo um raio de r unidades, e toda a secção plana perpendicular a um diâmetro fixo da base é um quadrado cuja diagonal é uma corda do círculo. Ache o volume do sólido descrito.
 11. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = |x - 2|$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$ em torno do eixo x .
 12. Use integração para encontrar o volume de um segmento de uma esfera, se ela tiver um raio de r unidades e se a altura do segmento for h unidades.
 13. Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $y = -1$ da região acima do eixo x limitada pela reta $2y = x + 3$ e pelas curvas $y^2 + x = 0$, $y^2 - 4x = 0$ de $x = -1$ a $x = 1$.
 14. Ache o comprimento do arco da curva $ay^2 = x^3$ da origem ao ponto $(4a, 8a)$.
 15. Ache o comprimento do arco da curva $6y^2 = x(x - 2)^2$ do ponto $(2, 0)$ ao ponto $(8, 4\sqrt{3})$.
 16. Uma esfera de raio 10 cm é interceptada por dois planos paralelos do mesmo lado do centro da esfera. A distância do centro da esfera a um dos planos é 1 cm e a distância entre os planos é 6 cm. Ache o volume da porção sólida da esfera entre os dois planos.
 17. Resolva o Exercício 16, se os dois planos estiverem em lados opostos em relação ao centro da esfera, mas todos os demais permanecerem os mesmos.
 18. Um sólido é formado pela rotação em torno do eixo y , da região limitada pela curva $y^3 = x$, pelo eixo x e pela reta $x = c$, onde $c > 0$. Para que valores de c o volume do sólido é de 12π unidades cúbicas?
 19. Ache o comprimento do arco da curva $9x^{2/3} + 4y^{2/3} = 36$ no segundo quadrante do ponto onde $x = -1$ ao ponto onde $x = -\frac{1}{8}$.
 20. Ache o comprimento do arco da curva $3y = (x^2 - 2)^{3/2}$ do ponto onde $x = 3$ ao ponto onde $x = 6$.
 21. Três partículas com massas 4, 2 e 7 kg estão no eixo x , nos pontos com coordenadas -5 , 4 e 2 respectivamente, onde a distância é medida em metros. Ache o centro de massa do sistema.
 22. Três partículas tendo massas 5, 2 e 8 g estão localizadas, respectivamente, nos pontos $(-1, 3)$, $(2, -1)$ e $(5, 2)$. Ache o centro de massa sendo a distância medida em cm.
 23. Ache as coordenadas do centro de massa de quatro partículas com igual massa localizadas nos pontos $(3, 0)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$ e $(-1, 2)$.
 24. Três partículas, com igual massa, estão localizadas sobre o eixo x em pontos tendo coordenadas -4 , 1 e 5, onde a distância é medida em metros. Ache as coordenadas do centro de massa do sistema.
 25. O comprimento de uma barra é 8 m e a densidade linear da barra num ponto $2x$ m do extremo esquerdo é $2\sqrt{x+1}$ kg/m. Ache a massa total da barra e seu centro de massa.
 26. O comprimento de uma barra é de 4 m e a densidade linear da barra num ponto a x m do extremo esquerdo é $(3x + 1)$ kg/m. Ache a massa total da barra e o centro de massa.
 27. Ache o centróide da região no primeiro quadrante, limitada pelos eixos coordenados e pela parábola $y = 9 - x^2$.
 28. Ache o centróide da região limitada pela parábola $y^2 = x$ e pela reta $y = x - 2$.
 29. Ache o centróide da região limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$.
 30. Ache o centróide da região limitada acima pela parábola $4x^2 = 36 - 9y$ e abaixo pelo eixo x .
 31. Use o teorema de Pappus para encontrar o volume da esfera de raio 4 m.
 32. Use o teorema de Pappus para encontrar o volume de um cone circular reto com 2 m de raio da base e 3 m de altura.
 33. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada pelo gráfico de $y = 2x - \frac{1}{6}x^3$, pelo eixo x e pela reta $x = 2$.
 34. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = 2$, da região do Exercício 33.
 35. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = 3$, da região limitada por aquela reta, pelo eixo x e pelo gráfico $y = 9x - \frac{1}{12}x^4$.
 36. Uma força de 2205,0 N é necessária para comprimir uma mola de 25 cm até 22 cm. Ache o trabalho realizado ao comprimir a mola até 20 cm.
 37. Uma força de 600 dinas estica uma mola de seu comprimento natural de 30 cm até 35 cm. Ache o trabalho realizado ao esticar a mola de seu comprimento natural até 40 cm.
 38. Uma tina cheia de água tem 2 m de comprimento e sua secção transversal tem a forma de um semicírculo com um diâmetro de 0,6 m no topo. Qual o trabalho necessário para bombear a água da tina pela borda?
 39. Um cabo com 20 m e com uma densidade linear de massa de 2 kg/m está dependurado na vertical. Ache o trabalho feito ao levantar todo o cabo.
 40. O trabalho necessário para esticar uma mola de 22 cm até 25 cm é $\frac{3}{2}$ vezes o trabalho necessário para esticar a mola de 20 para 22 cm. Qual o comprimento natural da mola?
 41. Um tanque cheio de água tem a forma de um paralelepípedo retangular com 30 m de comprimento, 15 m de largura e uma profundidade de 4 m. Ache o trabalho necessário para bombear a água no tanque a um nível de 50 cm acima da borda do tanque.
 42. Um tanque com a forma de um hemisfério, tendo um diâmetro de 10 m, está cheio com água até uma profundidade de 3 m. Ache o trabalho realizado ao bombear a água até a borda do tanque.
 43. Um tanque com a forma de um hemisfério tem sobre si um cilindro circular reto. O raio de ambos, o hemisfério e o cilindro, é 4 m e a altura do cilindro é de 8 m. Se o tanque estiver cheio de água, ache o trabalho necessário para esvaziar o tanque bombeando a água através de uma abertura na borda do tanque. Tome a aceleração da gravidade como sendo 10 m/s^2 .

44. Um recipiente tem a forma e as dimensões de um sólido de revolução descrito pela rotação da região no primeiro quadrante, limitada pela parábola $x^2 = 4py$, pelo eixo y e pela reta $y = p$, em torno do eixo y . Se o recipiente estiver cheio de água, ache o trabalho realizado para se bombear toda a água até um ponto $3p$ m acima da borda do recipiente. Tome a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 .
45. A superfície de um tanque é igual a de um parabolóide de revolução obtido girando-se a parábola $y = x^2$ em torno do eixo y . O vértice da parábola está na base do tanque, que tem $3,6$ m de altura. Se o tanque estiver cheio com água até 2 m de profundidade, ache o trabalho realizado para bombear a água para fora do tanque, pela borda de cima. Tome a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 .
46. Uma cunha é cortada de um cilindro circular reto com um raio de r unidades por dois planos, um perpendicular ao eixo do cilindro e o outro interceptando o primeiro ao longo de um diâmetro da secção plana circular com um ângulo de 30° . Ache o volume da cunha.
47. A torre de uma igreja tem 30 m de altura e toda secção horizontal plana é um quadrado, sendo o comprimento dos lados igual à um décimo da distância da secção plana ao topo da torre. Ache o volume da torre.
48. Ache, pelo corte, o volume de um tetraedro com três faces mutuamente perpendiculares e três arestas mutuamente perpendiculares cujos comprimentos são a , b e c unidades.
49. A região limitada por um pentágono com vértices em $(-4, 4)$, $(-2, 0)$, $(0, 8)$, $(2, 0)$ e $(4, 4)$ gira em torno do eixo x . Ache o volume do sólido gerado.
50. A região limitada pelas curvas $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{cotg} x$ e pelo eixo x , onde $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$, gira em torno do eixo x . Ache o volume do sólido obtido.
51. A região de $x = 0$ a $x = \frac{1}{2}\pi$ limitada pela curva $y = \operatorname{sen} x$, pela reta $y = 1$ e pelo eixo y gira em torno do eixo x . Ache o volume do sólido gerado. (*Sugestão*: use a identidade $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.)
52. Se $f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos t} dt$, ache o comprimento do arco do gráfico de f do ponto onde $x = \frac{1}{3}\pi$ ao ponto onde $x = \frac{1}{2}\pi$. (*Sugestão*: use a identidade $\cos^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$ e o Teorema 5.8.1).

Os Exercícios de 53 a 56 pertencem à Secção Suplementar 6.7.

53. Uma placa tem a forma da região limitada pela parábola $x^2 = 6y$ e pela reta $2y = 3$ e é colocada num tanque com água tendo o seu vértice voltado para baixo e a reta na superfície da água. Ache a força decorrente da pressão da água sobre um lado da placa se a distância for medida em metros.
54. A face de um dique adjacente à água está inclinada 45° em relação à vertical. A face é um retângulo com 80 m de largura e 40 m no lado inclinado. Se o dique estiver cheio de água, ache a força total na face devido à pressão da água.
55. Um tanque cilíndrico está cheio de gasolina com uma densidade de 641 kg/m^3 . Se o eixo do cilindro for horizontal e o diâmetro for de 8 m, ache a força total sobre um extremo devido à pressão do líquido.
56. Uma placa semicircular com um raio de 4 m é submersa verticalmente em um tanque com água com o seu diâmetro na superfície. Use a fórmula (4) da Secção 6.7 para encontrar a força devido à pressão da água sobre um lado da placa.