CINCO

Integração e a Integral Definida

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

$$\frac{\int_b^a f(x)\,dx}{b-a}$$

Antidiferenciação, a operação inversa da diferenciação, é tratada nas duas primeiras secções deste capítulo, como preparação para seu uso na integração. Na Secção 5.3 usamos antidiferenciação para resolver *equações diferenciais com variáveis separáveis*, introduzindo aplicações ao movimento retilíneo.

Definimos a área de uma região plana na Secção 5.4, como um novo tipo de limite, e na Secção 5.5, é apresentada a definição de uma *integral definida* em termos desse limite. As Secções 5.6 e 5.7 são dedicadas a teoremas que dão as propriedades das integrais definidas. Essas propriedades são usadas na Secção 5.8 para provar os *teoremas fundamentais do Cálculo* que nos possibilitam avaliar a integral definida através do cálculo da antiderivada. Na Secção 5.9 aplicamos esse poderoso recurso para calcular áreas de regiões planas.

Na última secção do capítulo discutimos métodos numéricos para determinar um valor aproximado de uma integral definida. Os cálculos exigidos nesses processos são feitos facilmente por meio de calculadoras programáveis e computadores.

5.1 ANTIDIFERENCIAÇÃO

Você já está familiarizado com *operações inversas*. Adição e subtração, multiplicação e divisão são operações inversas, bem como potenciação e radiciação. Nesta secção, vamos desenvolver a operação inversa da diferenciação chamada de *antidiferenciação*. Vamos começar introduzindo a *antiderivada*.

5.1.1 DEFINIÇÃO Uma função F será chamada de **antiderivada** de uma função f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se F for definida por

$$F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$$

então, $F'(x) = 12x^2 + 2x$. Assim, se f for a função definida por

$$f(x) = 12x^2 + 2x$$

logo, afirmamos que f é a derivada de F e que F é uma antiderivada de f. Se G for a função definida por

$$G(x) = 4x^3 + x^2 - 17$$

então, G também será uma antiderivada de f, pois $G'(x) = 12x^2 + 2x$. Na realidade, toda função cujos valores funcionais são dados por $4x^3 + x^2 + C$, onde C é uma constante qualquer, é uma antiderivada de f. ◀

Em geral, se uma função F for antiderivada de uma função f num intervalo I e se a função G for definida por

$$G(x) = F(x) + C$$

onde C é uma constante arbitrária, então

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

e G também será uma antiderivada de f no intervalo I.

Passaremos, agora, a demonstrar que se F for qualquer antiderivada particular de f num intervalo I, então toda antiderivada de f em I será dada por $F(x) + C$, onde C é uma constante arbitrária. Necessitaremos primeiro de um teorema preliminar.

5.1.2 TEOREMA Se f e g forem duas funções, tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo x no intervalo I, então haverá uma constante K, tal que

$$f(x) = g(x) + K \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

Prova Seja h a função definida em I por

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

assim sendo, para todo x em I,

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Mas, por hipótese, $f'(x) = g'(x)$ para todo x em I. Logo,

$$h'(x) = 0 \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

Assim, o Teorema 4.3.3 aplica-se à função h e existe uma constante K, tal que

$$h(x) = K \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

Substituindo $h(x)$ por $f(x) - g(x)$, obtemos

$$f(x) = g(x) + K \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

e o teorema está provado. ■

O próximo teorema segue, imediatamente, do Teorema 5.1.2.

5.1.3 TEOREMA Se F for uma antiderivada particular de f em um intervalo I, então toda antiderivada de f em I será dada por

$$F(x) + C \tag{1}$$

onde C é uma constante arbitrária e todas as antiderivadas de f em I poderão ser obtidas de (1), atribuindo-se certos valores a C.

Prova Suponha que G represente qualquer antiderivada de f em I; então

$$G'(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \text{ em } I \tag{2}$$

Como F é uma antiderivada particular de f em I,

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \text{ em } I \tag{3}$$

De (2) e (3), segue que

$$G'(x) = F'(x) \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

Logo, pelo Teorema 5.1.2, existe uma constante K, tal que

$$G(x) = F(x) + K \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

Como G representa qualquer antiderivada de f em I, segue que toda antiderivada de f pode ser obtida de $F(x) + C$, onde C é uma constante arbitrária. Assim, está provado o teorema. ■

Antidiferenciação é o processo de encontrar o conjunto de todas as antiderivadas de uma dada função. O símbolo $\int$ denota a operação de antidiferenciação e escrevemos

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \tag{4}$$

onde

$$F'(x) = f(x)$$

e

$$d(F(x)) = f(x)\, dx \tag{5}$$

Leibniz introduziu a convenção de escrever a diferencial de uma função após o símbolo de antidiferenciação. A vantagem dessa notação ficará evidente quando calcularmos antiderivadas, mudando a variável na Secção 5.2. De (4) e (5) podemos escrever

$$\boxed{\int d(F(x)) = F(x) + C}$$

Essa fórmula será usada para obter fórmulas de antidiferenciação nas secções a seguir; ela estabelece que quando antidiferenciamos a diferencial de uma função, obtemos a própria função mais uma constante arbitrária. Assim, podemos considerar que o símbolo de antidiferenciação $\int$ significa a operação inversa da operação denotada por d para o cálculo da diferencial.

Se $\{F(x) + C\}$ for o conjunto de todas as funções cuja diferencial é $f(x)\,dx$, também será o conjunto de todas as funções cujas derivadas são $f(x)$. Assim sendo, a antidiferenciação é considerada como a operação de encontrar o conjunto de todas as funções, tendo uma dada derivada.

Como a antidiferenciação é a operação inversa da diferenciação, os teoremas sobre antidiferenciação podem ser obtidos dos teoremas sobre diferenciação. Assim sendo, os teoremas a seguir podem ser provados a partir dos teoremas correspondentes da diferenciação.

5.1.4 TEOREMA

$$\int dx = x + C$$

5.1.5 TEOREMA

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

onde a é uma constante.

O Teorema 5.1.5 estabelece que para determinar uma antiderivada de uma constante vezes uma função, achamos primeiro uma antiderivada da função, multiplicando-a, em seguida, pela constante.

5.1.6 TEOREMA Se f_1 e f_2 estão definidas no mesmo intervalo, então

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$$

O Teorema 5.1.6 estabelece que para determinar uma antiderivada da soma de duas funções, achamos primeiro a antiderivada de cada uma das funções separadamente e então, somamos os resultados, ficando subentendido que ambas as funções estão definidas no mesmo intervalo. O Teorema 5.1.6 pode ser estendido a um número qualquer, finito, de funções. Combinando o Teorema 5.1.6 com o Teorema 5.1.5, temos o teorema a seguir.

5.1.7 TEOREMA Se $f_1, f_2, \ldots, f_n$ estão definidas no mesmo intervalo,

$$\int [c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x)]\,dx$$

$$= c_1\int f_1(x)\,dx + c_2\int f_2(x)\,dx + \ldots + c_n\int f_n(x)\,dx$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são constantes.

5.1.8 TEOREMA Se n for um número racional,

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Prova

$$D_x\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1}$$
$$= x^n$$

■

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Aplicando o Teorema 5.1.8 para valores específicos de n, temos

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1/3}\,dx = \frac{x^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C = \tfrac{3}{4}x^{4/3} + C$$

◀

A ilustração a seguir mostra como os Teoremas 5.1.4 até 5.1.8 são usados para antidiferenciar.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3**

$$\int (3x+5)\,dx = \int 3x\,dx + \int 5\,dx \qquad \text{(pelo Teorema 5.1.6)}$$
$$= 3\int x\,dx + 5\int dx \qquad \text{(pelo Teorema 5.1.5)}$$
$$= 3\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + 5(x + C_2) \qquad \text{(pelos Teoremas 5.1.8 e 5.1.4)}$$
$$= \tfrac{3}{2}x^2 + 5x + (3C_1 + 5C_2)$$

Como $3C_1 + 5C_2$ é uma constante arbitrária, ela pode ser denotada por C; assim, o resultado pode ser escrito como

$$\tfrac{3}{2}x^2 + 5x + C$$

Pode-se conferir a resposta calculando sua derivada.

$$D_x(\tfrac{3}{2}x^2 + 5x + C) = 3x + 5$$

◀

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int (5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7)\,dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int (5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7)\,dx &= 5\int x^4\,dx - 8\int x^3\,dx + 9\int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 7\int dx \\ &= 5\cdot\frac{x^5}{5} - 8\cdot\frac{x^4}{4} + 9\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 7x + C \\ &= x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)dx &= \int x^{1/2}(x + x^{-1})\,dx \\ &= \int (x^{3/2} + x^{-1/2})\,dx \\ &= \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C \\ &= \tfrac{2}{5}x^{5/2} + 2x^{1/2} + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \frac{5t^2 + 7}{t^{4/3}}\,dt$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \frac{5t^2 + 7}{t^{4/3}}\,dt &= 5\int \frac{t^2}{t^{4/3}}\,dt + 7\int \frac{1}{t^{4/3}}\,dt \\ &= 5\int t^{2/3}\,dt + 7\int t^{-4/3}\,dt \\ &= 5\left(\frac{t^{5/3}}{\frac{5}{3}}\right) + 7\left(\frac{t^{-1/3}}{-\frac{1}{3}}\right) + C \\ &= 5(\tfrac{3}{5}t^{5/3}) + 7(-3t^{-1/3}) + C \\ &= 3t^{5/3} - \frac{21}{t^{1/3}} + C\end{aligned}$$

Os teoremas para a antiderivada das funções seno e co-seno seguem imediatamente dos teoremas correspondentes para diferenciação.

5.1.9 TEOREMA $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

Prova $D_x(-\cos x) = -(-\operatorname{sen} x)$
$= \operatorname{sen} x$ ∎

5.1.10 TEOREMA $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

Prova $D_x(\operatorname{sen} x) = \cos x$ ∎

Os teoremas a seguir são conseqüências dos teoremas para as derivadas das funções tangente, co-tangente, secante e co-secante. As demonstrações também são imediatas, obtidas com o cálculo da derivada do segundo membro das fórmulas.

5.1.11 TEOREMA $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$

5.1.12 TEOREMA $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$

5.1.13 TEOREMA $\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C$

5.1.14 TEOREMA $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int (3 \sec x \operatorname{tg} x - 5 \operatorname{cosec}^2 x)\,dx$$

Solução Aplicamos os Teoremas 5.1.13 e 5.1.12.

$$\begin{aligned}\int (3 \sec x \operatorname{tg} x - 5 \operatorname{cosec}^2 x)\,dx &= 3\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx - 5\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx \\ &= 3 \sec x - 5(-\operatorname{cotg} x) + C \\ &= 3 \sec x + 5 \operatorname{cotg} x + C\end{aligned}$$

As identidades trigonométricas são freqüentemente usadas quando calculamos antiderivadas envolvendo funções trigonométricas. As oito identidades fundamentais a seguir são cruciais:

$\operatorname{sen} x \operatorname{cosec} x = 1$ $\quad \cos x \sec x = 1$ $\quad \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\quad \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$ $\quad \operatorname{cotg}^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int \frac{2 \operatorname{cotg} x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} dx$$

Solução

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2 \operatorname{cotg} x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} dx \\
&= 2 \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \operatorname{cotg} x \, dx - 3 \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} dx \\
&= 2 \int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx - 3 \int \operatorname{sen} x \, dx \\
&= 2(-\operatorname{cosec} x) - 3(-\cos x) + C \qquad \text{(dos Teoremas 5.1.14 e 5.1.9)} \\
&= -2 \operatorname{cosec} x + 3 \cos x + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x + 4) \, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}
&\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x + 4) \, dx \\
&= \int [(\sec^2 x - 1) + (\operatorname{cosec}^2 x - 1) + 4] \, dx \\
&= \int \sec^2 x \, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx + 2 \int dx \\
&= \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + 2x + C \qquad \text{(dos Teoremas 5.1.11 e 5.1.12)}
\end{aligned}$$

Freqüentemente, em aplicações envolvendo antidiferenciação, desejamos encontrar uma antiderivada específica que satisfaça determinadas condições chamadas **inicial** ou **lateral**, conforme elas ocorrem no ponto inicial ou para os pontos extremos do intervalo de definição da variável.* Por exemplo, se uma equação envolvendo $\frac{dy}{dx}$ for dada, bem como a condição inicial de que $y = y_1$ quando $x = x_1$, então depois que o conjunto de todas as antiderivadas for encontrado, se x e y forem substituídos por x_1 e y_1, iremos determinar um valor específico da constante arbitrária C. Com esse valor de C, uma determinada antiderivada é obtida.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Suponha que desejemos encontrar uma determinada função $y(x)$ satisfazendo a equação

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

(ou seja, uma antiderivada da função $f(x) = 2x$)
e a condição inicial de que $y = 6$ quando $x = 2$. Da fórmula

$$y = \int 2x \, dx \quad \text{temos} \quad y = x^2 + C \tag{6}$$

* **N. do T.**: As condições iniciais são também conhecidas como condições de Cauchy, e as condições laterais como condições de contorno, de fronteira ou de extremos.

Em (6), substituímos x por 2 e y por 6, obtendo

$$6 = 4 + C$$
$$C = 2$$

Quando esse valor de C é substituído em (6), obtemos

$$y = x^2 + 2$$

que dá a antiderivada desejada. ◀

EXEMPLO 7 Em qualquer ponto (x, y) de uma determinada curva, a reta tangente tem uma inclinação igual a $4x - 5$. Se a curva contém o ponto (3, 7), ache sua equação.

Solução Como a inclinação da reta tangente a uma curva em qualquer ponto (x, y) é o valor da derivada nesse ponto, temos

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 5$$
$$y = \int (4x - 5)\, dx$$
$$y = 4\left(\frac{x^2}{2}\right) - 5x + C$$
$$y = 2x^2 - 5x + C \tag{7}$$

A Equação (7) representa uma *família* de curvas. Como queremos determinar uma certa curva dessa família que contenha o ponto (3, 7), substituímos x por 3 e y por 7 em (7), obtendo

$$7 = 2(9) - 5(3) + C$$
$$7 = 18 - 15 + C$$
$$C = 4$$

Substituindo C por 4 em (7), iremos obter a equação da curva pedida, que é

$$y = 2x^2 - 5x + 4$$

Na Secção 3.4 introduzimos as funções custo marginal e rendimento marginal, da economia. Elas são as derivadas primeiras, C' e R' da função custo total C e da função rendimento total R, respectivamente. Assim, C e R podem ser obtidas de C' e R' por antidiferenciação. Ao determinarmos a função C de C', a constante arbitrária pode ser avaliada se conhecermos o custo geral (isto é, o custo quando nenhuma unidade é produzida) ou o custo da produção de um número específico de unidades da mercadoria. Como em geral é verdade que a função rendimento total é zero quando o número de unidades produzidas é zero, esse fato pode ser usado para avaliar a constante arbitrária quando determinamos a função R de R'.

EXEMPLO 8 A função custo marginal C' é dada por

$$C'(x) = 4x - 8$$

quando $C(x)$ é o custo total da produção de x unidades. Se o custo da produção de 5 unidades for \$ 20, ache a função custo total.

Solução Como $C'(x) = 4x - 8$

$$C(x) = \int (4x - 8)\, dx$$
$$= 2x^2 - 8x + k$$

Como $C(5) = 20$, obtemos $k = 10$. Logo,

$$C(x) = 2x^2 - 8x + 10$$

Observe que como o custo marginal deve ser não-negativo, $4x - 8 \geqslant 0$ ou, de modo equivalente, $x \geqslant 2$. Portanto, o domínio de C é $[2, +\infty)$; lembre-se que embora x represente o número de unidades de uma mercadoria, supomos que x seja um número real para dar os requisitos de continuidade para as funções C e C'.

EXERCÍCIOS 5.1

Nos Exercícios de 1 a 36, faça a antidiferenciação. Nos Exercícios de 1 a 8, de 15 a 18 e de 31 a 34, verifique o resultado, calculando a derivada de sua resposta.

1. $\int 3x^4\, dx$
2. $\int 2x^7\, dx$
3. $\int \frac{1}{x^3}\, dx$
4. $\int \frac{3}{t^5}\, dt$
5. $\int 5u^{3/2}\, du$
6. $\int 10\sqrt[3]{x^2}\, dx$
7. $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\, dx$
8. $\int \frac{3}{\sqrt{y}}\, dy$
9. $\int 6t^2\sqrt[3]{t}\, dt$
10. $\int 7x^3\sqrt{x}\, dx$
11. $\int (4x^3 + x^2)\, dx$
12. $\int (3u^5 - 2u^3)\, du$
13. $\int y^3(2y^2 - 3)\, dy$
14. $\int x^4(5 - x^2)\, dx$
15. $\int (3 - 2t + t^2)\, dt$
16. $\int (4x^3 - 3x^2 + 6x - 1)\, dx$
17. $\int (8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 5)\, dx$
18. $\int (2 + 3x^2 - 8x^3)\, dx$
19. $\int \sqrt{x}(x + 1)\, dx$
20. $\int (ax^2 + bx + c)\, dx$
21. $\int (x^{3/2} - x)\, dx$
22. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$
23. $\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right) dx$
24. $\int \left(3 - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2}\right) dx$
25. $\int \frac{x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x}}\, dx$
26. $\int \frac{y^4 + 2y^2 - 1}{\sqrt{y}}\, dy$
27. $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$
28. $\int \frac{27t^3 - 1}{\sqrt[3]{t}}\, dt$
29. $\int (3 \operatorname{sen} t - 2\cos t)\, dt$
30. $\int (5\cos x - 4 \operatorname{sen} x)\, dx$
31. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$
32. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$
33. $\int (4 \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x + 2\sec^2 x)\, dx$
34. $\int (3 \operatorname{cosec}^2 t - 5 \sec t \operatorname{tg} t)\, dt$
35. $\int (2 \operatorname{cotg}^2 \theta - 3 \operatorname{tg}^2 \theta)\, d\theta$
36. $\int \frac{3 \operatorname{tg} \theta - 4\cos^2 \theta}{\cos \theta}\, d\theta$
37. O ponto (3, 2) está numa curva e em qualquer ponto (x, y) sobre a curva a inclinação da reta tangente é igual a $2x - 3$. Ache uma equação da curva.
38. A inclinação da reta tangente num ponto qualquer (x, y) de uma curva é $3\sqrt{x}$. Se o ponto (9, 4) está na curva, ache uma equação para ela.
39. Os pontos $(-1, 3)$ e $(0, 2)$ estão numa curva e em qualquer ponto (x, y) da curva $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 4x$. Ache uma equação da curva. (Sugestão: faça $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx}$ e obtenha uma equação envolvendo y', x e uma constante arbitrária C_1. Dessa equação, obtenha uma outra envolvendo y, x, C_1 e C_2. Usando as condições, calcule C_1 e C_2.)

40. Uma equação da reta tangente à curva no ponto (1, 3) é $y = x + 2$. Se em qualquer ponto (x, y) da curva $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$, ache uma equação da curva. Veja a sugestão para o Exercício 39.

41. Em qualquer ponto (x, y) de uma curva, $\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - x^2$ e uma equação da reta tangente à curva no ponto (1, 1) é $y = 2 - x$. Ache uma equação da curva. Veja a sugestão dada no Exercício 39.

42. Em qualquer ponto (x, y) de uma curva, $\frac{d^3y}{dx^3} = 2$ e (1, 3) é um ponto de inflexão no qual a inclinação da tangente de inflexão é -2. Ache uma equação da curva.

43. A função custo marginal é dada por $C'(x) = 3x^2 + 8x + 4$, e o custo geral é \$ 6. Ache a função custo total.

44. Uma empresa determinou que a função custo marginal para a produção de certa mercadoria é dada por $C'(x) = 125 + 10x + \frac{1}{9}x^2$, onde $C(x)$ é o custo total da produção de x unidades da mercadoria. Se o custo geral for de \$ 250, qual será o custo da produção de 15 unidades?

45. A função custo marginal é definida por $C'(x) = 6x$, onde $C(x)$ é o número de centenas de unidades monetárias no custo total de x centenas de unidades de certa mercadoria. Se o custo de 200 unidades for \$ 2000, ache (a) a função custo total e (b) o custo geral.

46. A função rendimento marginal para uma certa mercadoria é $R'(x) = 12 - 3x$. Se x unidades forem demandadas quando p unidades monetárias for o preço unitário, ache (a) a função rendimento total e (b) uma equação envolvendo p e x (a equação de demanda).

47. Para um determinado artigo, a função rendimento marginal é dada por $R'(x) = 15 - 4x$. Se x unidades forem demandadas quando p unidades monetárias for o preço por unidade, ache (a) a função rendimento total e (b) uma equação envolvendo p e x (a equação de demanda).

48. A eficiência de um operário é dada por uma porcentagem. Por exemplo, se a eficiência do trabalhador num dado intervalo de tempo for de 70%, então ele está trabalhando com 70% de todo o seu potencial. Suponha que E% seja a sua eficiência t horas após começar a trabalhar e que a taxa segundo a qual E está variando é $(35 - 8t)$%, a cada hora. Se a eficiência após 3 h de trabalho for de 81%, ache a sua eficiência após trabalhar (a) 4 h e (b) 8 h.

49. O volume de água num tanque é $V\ \text{m}^3$ quando a profundidade da água é h m. Se a taxa de variação de V em relação a h for $\pi(4h^2 + 12h + 9)$, ache o volume de água no tanque quando a profundidade for de 3 m.

50. Um colecionador de arte comprou uma pintura por \$ 1.000 de um artista cujos trabalhos aumentam de valor em relação ao tempo, de acordo com a fórmula $\frac{dV}{dt} = 5t^{3/2} + 10t + 50$, onde V é o valor estimado de uma pintura t anos após sua compra. Se essa fórmula for válida pelos próximos 6 anos, qual o valor previsto para a pintura daqui a quatro anos?

51. Seja $f(x) = 1$ para todo x em $(-1, 1)$ e seja

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Então $f'(x) = 0$ para todo x em $(-1, 1)$ e $g'(x) = 0$, onde quer que exista g' em $(-1, 1)$. Mas, $f(x) \neq g(x) + K$ para x em $(-1, 1)$. Por que o Teorema 5.1.2 não é válido?

52. Seja

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$$

e $F(x) = |x|$. Mostre que $F'(x) = f(x)$ se $x \neq 0$. F é uma antiderivada de f em $(-\infty, +\infty)$? Explique.

53. Seja $f(x) = |x|$ e F definida por

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$$

Mostre que F é uma antiderivada de f em $(-\infty, +\infty)$.

54. Seja

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$$

Mostre que U não tem uma antiderivada em $(-\infty, +\infty)$. (*Sugestão*: suponha que U tenha uma antiderivada F em $(-\infty, +\infty)$ e uma contradição será obtida se mostrarmos, então, que pelo teorema do valor médio existe um número k, tal que $F(x) = x + k$ se $x > 0$ e $F(x) = k$ se $x < 0$.)

5.2 ALGUMAS TÉCNICAS DE ANTIDIFERENCIAÇÃO

Muitas antiderivadas não podem ser encontradas diretamente com a aplicação dos teoremas da Secção 5.1. E então, faz-se necessário aprender certas técnicas que podem ser usadas no cálculo de tais antiderivadas. Nesta secção discutiremos técnicas que requerem a *regra da cadeia para a antidiferenciação* e aquelas que envolvem uma mudança de variável.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Para diferenciar $\frac{1}{10}(1 + x^2)^{10}$ aplicamos a regra da cadeia para a diferenciação e obtemos

$$D_x[\tfrac{1}{10}(1 + x^2)^{10}] = (1 + x^2)^9(2x)$$

Suponha que desejamos antidiferenciar $(1 + x^2)^9(2x)$. Então, precisamos calcular

$$\int (1 + x^2)^9(2x\,dx) \tag{1}$$

Para chegarmos a um procedimento que possa ser usado em tal situação, seja

$$g(x) = 1 + x^2 \qquad g'(x)\,dx = 2x\,dx \tag{2}$$

Então, (1) pode ser escrito como

$$\int [g(x)]^9[g'(x)\,dx] \tag{3}$$

Do Teorema 5.1.8,

$$\int u^9\,du = \tfrac{1}{10}u^{10} + C \tag{4}$$

Observe que (3) é da mesma forma que o primeiro membro de (4). Assim,

$$\int [g(x)]^9[g'(x)\,dx] = \tfrac{1}{10}[g(x)]^{10} + C$$

e com $g(x)$ e $g'(x)\,dx$ dados em (2), temos

$$\int (1 + x^2)^9(2x\,dx) = \tfrac{1}{10}(1 + x^2)^{10} + C$$

◄

A justificativa do procedimento usado para obter o resultado da Ilustração 1 é dada pelo teorema a seguir, que é análogo à regra da cadeia para diferenciação, sendo chamado de *regra da cadeia para antidiferenciação.*

5.2.1 TEOREMA A Regra da Cadeia para a Antidiferenciação

Seja g uma função diferenciável e seja o intervalo I a imagem de g. Suponha que f seja uma função definida em I e que F seja uma antiderivada de f em I. Então,

$$\int f(g(x))[g'(x)\,dx] = F(g(x)) + C$$

Prova Por hipótese,

$$F'(g(x)) = f(g(x)) \tag{5}$$

Pela regra da cadeia para diferenciação,

$$D_x[F(g(x))] = F'(g(x))[g'(x)]$$

Substituindo (5) nessa equação, obtemos

$$D_x[F(g(x))] = f(g(x))[g'(x)]$$

Da qual segue que

$$\int f(g(x))[g'(x)\,dx] = F(g(x)) + C$$

que é o que queríamos provar. ■

Como um caso particular do Teorema 5.2.1, a partir do Teorema 5.1.8, temos a fórmula da potência generalizada para antiderivadas, que enunciaremos a seguir.

5.2.2 TEOREMA

Se g for uma função diferenciável e se n for um número racional,

$$\int [g(x)]^n[g'(x)\,dx] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \sqrt{3x+4}\,dx$$

Solução Para aplicar o Teorema 5.2.2, escrevemos primeiro

$$\int \sqrt{3x+4}\,dx = \int (3x+4)^{1/2}\,dx$$

Observamos que, se

$$g(x) = 3x + 4 \quad \text{então} \quad g'(x)\,dx = 3\,dx \tag{6}$$

Logo, precisamos de um fator de 3 que acompanhe dx para dar $g'(x)\,dx$. Assim sendo, escrevemos

$$\int (3x+4)^{1/2}\,dx = \int (3x+4)^{1/2}\tfrac{1}{3}(3\,dx)$$
$$= \tfrac{1}{3}\int (3x+4)^{1/2}(3\,dx)$$

Do Teorema 5.2.2, com $g(x)$ e $g'(x)\,dx$ dados por (6), temos

$$\frac{1}{3}\int (3x+4)^{1/2}(3\,dx) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+4)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \tfrac{2}{9}(3x+4)^{3/2} + C$$

EXEMPLO 2 Ache

$$\int x^2(5+2x^3)^8\,dx$$

Solução Observe que, se

$$g(x) = 5 + 2x^3 \quad \text{então} \quad g'(x)\,dx = 6x^2\,dx \tag{7}$$

Como

$$\int x^2(5+2x^3)^8\,dx = \int (5+2x^3)^8(x^2\,dx)$$

precisamos de um fator 6 que acompanhe $x^2\,dx$ para obter $g'(x)\,dx$. Assim, escrevemos

$$\int x^2(5+2x^3)^8\,dx = \tfrac{1}{6}\int (5+2x^3)^8(6x^2\,dx)$$

Aplicando o Teorema 5.2.2 com $g(x)$ e $g'(x)\,dx$ dado em (7), obtemos

$$\frac{1}{6}\int (5+2x^3)^8(6x^2\,dx) = \frac{1}{6}\cdot\frac{(5+2x^3)^9}{9} + C$$
$$= \tfrac{1}{54}(5+2x^3)^9 + C$$

A regra da cadeia para a antidiferenciação (Teorema 5.2.1) é

$$\int f(g(x))[g'(x)\,dx] = F(g(x)) + C$$

onde F é uma antiderivada de f. Se nessa fórmula f for a função co-seno, então F será a função seno e teremos

$$\int \cos(g(x))[g'(x)\,dx] = \operatorname{sen}(g(x)) + C \tag{8}$$

Vamos usar essa fórmula no próximo exemplo.

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int x \cos x^2\, dx$$

Solução Se

$$g(x) = x^2 \quad \text{então} \quad g'(x)\, dx = 2x\, dx \tag{9}$$

Como

$$\int x \cos x^2\, dx = \int (\cos x^2)(x\, dx)$$

precisamos de um fator de 2 acompanhando $x\, dx$ para obter $g'(x)\, dx$. Assim, escrevemos

$$\int x \cos x^2\, dx = \tfrac{1}{2} \int (\cos x^2)(2x\, dx)$$

Aplicando (8) com $g(x)$ e $g'(x)\, dx$ dados por (9), iremos obter

$$\tfrac{1}{2} \int (\cos x^2)(2x\, dx) = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + C$$

Os detalhes das soluções dos Exemplos 1, 2 e 3 podem ser simplificados, não estabelecendo especificamente $g(x)$ e $g'(x)\, dx$. A solução do Exemplo 1, então, toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{3x+4}\, dx &= \frac{1}{3} \int (3x+4)^{1/2}(3\, dx)\\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+4)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C\\ &= \tfrac{2}{9}(3x+4)^{3/2} + C\end{aligned}$$

A solução do Exemplo 2 pode ser obtida por

$$\begin{aligned}\int x^2(5+2x^3)^8\, dx &= \frac{1}{6} \int (5+2x^3)^8(6x^2\, dx)\\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{(5+2x^3)^9}{9} + C\\ &= \tfrac{1}{54}(5+2x^3)^9 + C\end{aligned}$$

e a solução do Exemplo 3 pode ser simplificada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\int x \cos x^2\, dx &= \tfrac{1}{2} \int (\cos x^2)(2x\, dx)\\ &= \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int \frac{4x^2\, dx}{(1-8x^3)^4}$$

Solução Como $d(1 - 8x^3) = -24x^2\,dx$, escrevemos

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2\,dx}{(1-8x^3)^4} &= 4\int (1-8x^3)^{-4}(x^2\,dx)\\ &= 4\left(-\frac{1}{24}\right)\int (1-8x^3)^{-4}(-24x^2\,dx)\\ &= -\frac{1}{6}\cdot\frac{(1-8x^3)^{-3}}{-3}+C\\ &= \frac{1}{18(1-8x^3)^3}+C\end{aligned}$$

Os resultados de cada um dos exemplos acima podem ser verificados através do cálculo da derivada da resposta.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** No Exemplo 2 tínhamos

$$\int x^2(5+2x^3)^8\,dx = \tfrac{1}{54}(5+2x^3)^9 + C$$

Verificando por diferenciação, obtemos

$$\begin{aligned}D_x[\tfrac{1}{54}(5+2x^3)^9] &= \tfrac{1}{54}\cdot 9(5+2x^3)^8(6x^2)\\ &= x^2(5+2x^3)^8\end{aligned}$$ ◀

Algumas vezes é possível calcular uma antiderivada após efetuarmos a mudança de uma variável, conforme mostra o exemplo a seguir.

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$$

Solução Seja

$$u = 1 + x \qquad du = dx \qquad x = u - 1$$

Temos

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+x}\,dx &= \int (u-1)^2u^{1/2}\,du\\ &= \int (u^2-2u+1)u^{1/2}\,du\\ &= \int u^{5/2}\,du - 2\int u^{3/2}\,du + \int u^{1/2}\,du\\ &= \frac{u^{7/2}}{\frac{7}{2}} - 2\cdot\frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C\\ &= \tfrac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \tfrac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Um método alternativo para a solução do Exemplo 5 é tomar

$$v = \sqrt{1+x} \qquad v^2 = 1 + x$$

$$x = v^2 - 1 \qquad dx = 2v\,dv$$

O cálculo, então, é feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\int x^2 \sqrt{1+x}\, dx &= \int (v^2-1)^2 \cdot v \cdot (2v\, dv)\\ &= 2\int v^6\, dv - 4\int v^4\, dv + 2\int v^2\, dv\\ &= \tfrac{2}{7}v^7 - \tfrac{4}{5}v^5 + \tfrac{2}{3}v^3 + C\\ &= \tfrac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \tfrac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Verificando por diferenciação, obtemos

$$\begin{aligned}&D_x[\tfrac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \tfrac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2}]\\ &\quad = (1+x)^{5/2} - 2(1+x)^{3/2} + (1+x)^{1/2}\\ &\quad = (1+x)^{1/2}[(1+x)^2 - 2(1+x) + 1]\\ &\quad = (1+x)^{1/2}[1 + 2x + x^2 - 2 - 2x + 1]\\ &\quad = x^2\sqrt{1+x}\end{aligned}$$

◀

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

Solução Seja

$$u = \sqrt{x} \qquad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} &= 2\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx\right)\\ &= 2\int \operatorname{sen} u\, du\\ &= -2\cos u + C\\ &= -2\cos\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 7 Calcule

$$\int \operatorname{sen} x\sqrt{1-\cos x}\, dx$$

Solução Seja

$$u = 1 - \cos x \qquad du = \operatorname{sen} x\, dx$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x\sqrt{1-\cos x}\, dx &= \int u^{1/2}\, du\\ &= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C\\ &= \tfrac{2}{3}(1-\cos x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 8 Calcule $\int \operatorname{tg} x \sec^2 x\, dx$ por dois métodos: (a) seja $u = tg\ x$; (b) seja $v = \sec x$; (c) Explique a diferença nas respostas de (a) e de (b).

Solução

(a) Se $u = \operatorname{tg} x$, então $du = \sec^2 x\, dx$. Temos

$$\int \operatorname{tg} x \sec^2 x\, dx = \int u\, du$$
$$= \frac{u^2}{2} + C$$
$$= \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + C$$

(b) Se $v = \sec x$, então $dv = \sec x \operatorname{tg} x\, dx$. Assim,

$$\int \operatorname{tg} x \sec^2 x\, dx = \int \sec x(\sec x \operatorname{tg} x\, dx)$$
$$= \int v\, dv$$
$$= \frac{v^2}{2} + C$$
$$= \tfrac{1}{2} \sec^2 x + C$$

(c) Como $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, as funções definidas por $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x$ e $\frac{1}{2} \sec^2 x$ diferem por uma constante e, assim sendo, cada uma serve como antiderivada de $\operatorname{tg} x \sec^2 x$. Além disso, podemos escrever

$$\tfrac{1}{2} \sec^2 x + C = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x + 1) + C$$
$$= \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \tfrac{1}{2} + C$$
$$= \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + K \qquad \text{onde } K = \tfrac{1}{2} + C$$

EXEMPLO 9 Um ferimento está cicatrizando de tal forma que t dias a partir de segunda-feira, a área da ferida decresce a uma taxa de $-3(t + 2)^{-2}$ cm² por dia. Se na terça-feira a área do ferimento fora 2 cm², (a) qual teria sido a sua área na segunda-feira e (b) qual a área prevista na sexta-feira, se o ferimento continuar a cicatrizar na mesma taxa?

Solução Seja A cm² a área do ferimento t dias desde segunda-feira. Então,

$$\frac{dA}{dt} = -3(t + 2)^{-2}$$

$$A = -3 \int (t + 2)^{-2}\, dt$$

Como $d(t + 2) = dt$, obtemos

$$A = -3 \cdot \frac{(t + 2)^{-1}}{-1} + C$$

$$A = \frac{3}{t + 2} + C \tag{10}$$

Como na terça-feira a área do ferimento foi 2 cm², sabemos que quando $t = 1$ então $A = 2$. Substituindo esses valores em (10), obtemos

$$2 = 1 + C$$
$$C = 1$$

Logo, de (10),

$$A = \frac{3}{t+2} + 1 \tag{11}$$

(a) Na segunda-feira $t = 0$. Seja A_0 o valor de A quando $t = 0$. De (11),

$$A_0 = \tfrac{3}{2} + 1$$
$$= \tfrac{5}{2}$$

Assim, na segunda-feira, a área do ferimento era 2,5 cm².

(b) Na sexta-feira, $t = 4$. Seja A_4 o valor de A quando $t = 4$. De (11),

$$A_4 = \tfrac{3}{6} + 1$$
$$= \tfrac{3}{2}$$

Logo, na sexta-feira a área prevista do ferimento será de 1,5 cm².

EXERCÍCIOS 5.2

Nos Exercícios de 1 a 52, efetue a antidiferenciação.

1. $\int \sqrt{1-4y}\, dy$
2. $\int \sqrt[3]{3x-4}\, dx$
3. $\int \sqrt[3]{6-2x}\, dx$
4. $\int \sqrt{5r+1}\, dr$
5. $\int x\sqrt{x^2-9}\, dx$
6. $\int 3x\sqrt{4-x^2}\, dx$
7. $\int x^2(x^3-1)^{10}\, dx$
8. $\int x(2x^2+1)^6\, dx$
9. $\int 5x\sqrt[3]{(9-4x^2)^2}\, dx$
10. $\int \frac{x\, dx}{(x^2+1)^3}$
11. $\int \frac{y^3\, dy}{(1-2y^4)^5}$
12. $\int \frac{s\, ds}{\sqrt{3s^2+1}}$
13. $\int (x^2-4x+4)^{4/3}\, dx$
14. $\int x^4\sqrt{3x^5-5}\, dx$
15. $\int x\sqrt{x+2}\, dx$
16. $\int \frac{t\, dt}{\sqrt{t+3}}$
17. $\int \frac{2r\, dr}{(1-r)^7}$
18. $\int x^3(2-x^2)^{12}\, dx$
19. $\int \sqrt{3-2x}\, x^2\, dx$
20. $\int (x^3+3)^{1/4}x^5\, dx$
21. $\int \cos 4\theta\, d\theta$
22. $\int \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}x\, dx$
23. $\int 6x^2 \operatorname{sen} x^3\, dx$
24. $\int \tfrac{1}{2}t \cos 4t^2\, dt$
25. $\int \sec^2 5x\, dx$
26. $\int \operatorname{cosec}^2 2\theta\, d\theta$
27. $\int y \operatorname{cosec} 3y^2 \operatorname{cotg} 3y^2\, dy$
28. $\int r^2 \sec^2 r^3\, dr$
29. $\int \cos x(2+\operatorname{sen} x)^5\, dx$
30. $\int \frac{4 \operatorname{sen} x\, dx}{(1+\cos x)^2}$
31. $\int \sqrt{1+\frac{1}{3x}}\,\frac{dx}{x^2}$
32. $\int \sqrt{\frac{1}{t}-1}\,\frac{dt}{t^2}$
33. $\int 2 \operatorname{sen} x \sqrt[3]{1+\cos x}\, dx$
34. $\int \operatorname{sen} 2x\sqrt{2-\cos 2x}\, dx$
35. $\int \cos^2 t \operatorname{sen} t\, dt$
36. $\int \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta\, d\theta$
37. $\int (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} 2x)^2\, dx$
38. $\int \frac{\frac{1}{2}\cos \frac{1}{4}x}{\sqrt{\operatorname{sen} \frac{1}{4}x}}\, dx$
39. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{1-2\operatorname{sen} 3x}}\, dx$
40. $\int \frac{\sec^2 3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$
41. $\int \frac{(x^2+2x)\, dx}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}$
42. $\int x(x^2+1)\sqrt{4-2x^2-x^4}\, dx$
43. $\int \frac{x(3x^2+1)\, dx}{(3x^4+2x^2+1)^2}$
44. $\int \sqrt{3+s}(s+1)^2\, ds$
45. $\int \frac{(y+3)\, dy}{(3-y)^{2/3}}$
46. $\int (2t^2+1)^{1/3}t^3\, dt$
47. $\int \frac{(r^{1/3}+2)^4\, dr}{\sqrt[3]{r^2}}$
48. $\int \left(t+\frac{1}{t}\right)^{3/2}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)dt$
49. $\int \frac{x^3\, dx}{(x^2+4)^{3/2}}$
50. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-2x^2}}$
51. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\cos x)\, dx$
52. $\int \sec x \operatorname{tg} x \cos(\sec x)\, dx$

53. Calcule $\int (2x + 1)^3\, dx$ por dois métodos: (a) expandindo $(2x + 1)^3$ pelo teorema do binômio; (b) tomando $u = 2x + 1$. (c) Explique a diferença entre as respostas de (a) e (b).

54. Calcule $\int x(x^2 + 2)^2\, dx$ por dois métodos: (a) expandindo $(x^2 + 2)^2$ e multiplicando o resultado por x; (b) tomando $u = x^2 + 2$. (c) Explique a diferença entre as respostas de (a) e (b).

55. Calcule $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}}\, dx$ por dois métodos: (a) expandindo $(\sqrt{x} - 1)^2$ e multiplicando o resultado por $x^{-1/2}$; (b) tomando $u = \sqrt{x} - 1$. (c) Explique a diferença entre as respostas de (a) e (b).

56. Calcule $\int \sqrt{x - 1}\, x^2\, dx$ por dois métodos: (a) tomando $u = x - 1$; (b) tomando $v = \sqrt{x - 1}$.

57. Calcule $\int 2 \operatorname{sen} x \cos x\, dx$ por três métodos: (a) tomando $u = \operatorname{sen} x$; (b) tomando $u = \cos x$; (c) usando a identidade $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$. (d) Explique a diferença entre as respostas de (a), (b) e (c).

58. Calcule $\int \operatorname{cosec}^2 x \operatorname{cotg} x\, dx$ por dois métodos: (a) tomando $u = \operatorname{cotg} x$; (b) tomando $v = \operatorname{cosec} x$. (c) Explique a diferença entre as respostas de (a) e (b).

59. A função custo marginal para um determinado artigo é dada por $C'(x) = 3(5x + 4)^{-1/2}$. Se o custo geral for \$ 10, ache a função custo total.

60. Para uma certa mercadoria, a função custo marginal é dada por $C'(x) = 3\sqrt{2x + 4}$. Se o custo geral for zero, determine a função custo total.

61. Se x unidades forem demandadas quando p for o preço unitário, ache uma equação envolvendo p e x (a equação de demanda) de uma mercadoria para a qual a função rendimento marginal é dada por $R'(x) = 4 + 10(x + 5)^{-2}$.

62. A função rendimento marginal para uma certa mercadoria é dada por $R'(x) = ab(x + b)^{-2} - c$. Ache (a) a função rendimento total e (b) uma equação envolvendo p e x (a equação de demanda), onde x unidades são demandadas quando p unidades monetárias for o preço unitário.

63. Se q coulombs for a carga de eletricidade recebida por um condensador de um circuíto elétrico de i ampères em t s, então $i = \frac{dq}{dt}$. Se $i = 5 \operatorname{sen} 60\, t$ e $q = 0$ quando $t = \frac{\pi}{2}$, ache a carga positiva máxima no condensador.

64. Faça o Exercício 63 se $i = 4 \cos 120t$ e $q = 0$ quando $t = 0$.

65. O custo de certa peça de maquinaria é \$ 700 e seu valor é depreciado com o tempo, de acordo com a fórmula $\frac{dV}{dt} = -500\,(t + 1)^{-2}$, onde V é seu valor t anos após a compra. Qual o valor da peça três anos após sua compra?

66. O volume de um balão cresce de acordo com a fórmula $\frac{dV}{dt} = \sqrt{t + 1} + \frac{2}{3}t$, onde V cm^3 é o seu volume em t s. Se $V = 33$ quando $t = 3$, ache (a) uma fórmula para V em termos de t; (b) o volume do balão em 8 s.

67. Durante os primeiros 10 dias de dezembro, a célula de uma planta cresceu de tal forma que t dias após o 1º de dezembro o volume da célula estava crescendo a uma taxa de $(12 - t)^{-2}$ μm^3 por dia. Se em 3 de dezembro o volume da célula era de 3 μm^3, qual seria o volume esperado no dia 8 de dezembro?

68. O volume de água em um tanque é V m^3 quando a profundidade é h m. Se a taxa de variação de V em relação a h for dada por $\frac{dV}{dh} = \pi(2h + 3)^2$, ache o volume de água no tanque quando a profundidade for 3 m.

5.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MOVIMENTO RETILÍNEO

Uma equação contendo derivadas é chamada de **equação diferencial**. Alguns exemplos simples de equações diferenciais são

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{3y^3} \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x + 3 \tag{3}$$

A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação. Logo, (1) e (2) são equações diferenciais de primeira ordem e (3) é de segunda ordem. O tipo mais simples de equação diferencial é a equação de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

da qual (1) é um exemplo. Escrevendo-a com diferenciais, temos

$$dy = f(x)\,dx \tag{4}$$

Outro tipo de equação diferencial de primeira ordem é da forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

A equação (2) é um exemplo desse tipo. Se essa equação for escrita com diferenciais, temos

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx \tag{5}$$

Em ambos (4) e (5), o primeiro membro envolve somente a variável y, enquanto que o segundo membro, somente a variável x. Assim, as variáveis estão separadas e dizemos que elas são **equações diferenciais com variáveis separáveis.**

Considere a equação (4), que é

$$dy = f(x)\,dx$$

Para resolver essa equação, precisamos encontrar todas as funções G para as quais $y = G(x)$, tais que a equação esteja satisfeita. Assim, se F for uma antiderivada de f, todas as funções G serão definidas por $G(x) = F(x) + C$, onde C é uma constante arbitrária. Isto é, se

$$\begin{aligned} d(G(x)) &= d(F(x) + C) \\ &= f(x)\,dx \end{aligned}$$

então, o que chamamos de **solução completa** de (4) é dada por

$$y = F(x) + C$$

Essa equação representa uma família de funções dependendo de uma constante arbitrária C, sendo chamada de **família dependente de um parâmetro.** Os gráficos dessas funções formam uma família de curvas no plano dependente de um parâmetro e, por um ponto (x_1, y_1) qualquer do plano, passa uma única curva da família.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Queremos encontrar uma solução completa da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{6}$$

Separamos as variáveis, escrevendo a equação com diferenciais como

$$dy = 2x\,dx$$

Antidiferenciamos ambos os lados da equação e obtemos

$$\int dy = \int 2x\,dx$$

$$y + C_1 = x^2 + C_2$$

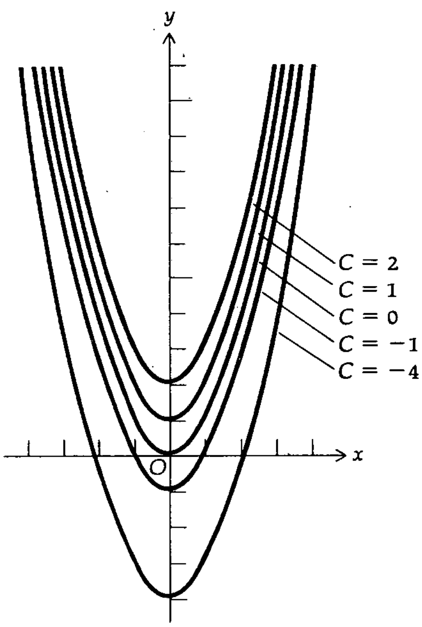


FIGURA 1

Como $C_2 - C_1$ é uma constante arbitrária se C_2 e C_1 forem arbitrárias, podemos substituir $C_2 - C_1$ por C, obtendo então

$$y = x^2 + C \tag{7}$$

que é a solução completa da equação diferencial (6).

A equação (7) representa uma família de funções dependentes de um parâmetro. A Figura 1 mostra esboços dos gráficos das funções correspondentes a $C = -4$, $C = -1$, $C = 0$, $C = 1$ e $C = 2$. ◀

Consideremos (5), que é

$$h(y)\, dy = g(x)\, dx$$

Se antiderivarmos ambos os membros da equação, escreveremos

$$\int h(y)\, dy = \int g(x)\, dx$$

Se H for uma antiderivada de h, e G for uma antiderivada de g, a solução completa de (5) será dada por

$$H(y) = G(x) + C$$

EXEMPLO 1 Ache a solução completa da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{3y^3}$$

Solução Se escrevermos a equação dada com diferenciais, teremos

$$3y^3\, dy = 2x^2\, dx$$

e as variáveis estarão separadas. Antidiferenciando ambos os membros da equação, obtemos

$$\int 3y^3\, dy = \int 2x^2\, dx$$

$$\frac{3y^4}{4} = \frac{2x^3}{3} + \frac{C}{12}$$

$$9y^4 = 8x^3 + C$$

que é a solução completa.

Primeiro, a constante arbitrária foi escrita como $C/12$; assim, multiplicando ambos os membros da equação por 12, a constante arbitrária torna-se C.

Na ilustração a seguir mostramos como obter uma solução para uma equação diferencial de primeira ordem, quando as condições iniciais são dadas.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Para encontrar a solução da equação diferencial (6), satisfazendo a condição inicial de que $y = 6$ quando $x = 2$, substituímos esses valores em (7) e resolvemos em C, obtendo $6 = 4 + C$ ou $C = 2$. Substuindo esse valor de C em (7), obtemos

$$y = x^2 + 2$$

que é a solução desejada. ◀

A equação (3) é exemplo de um tipo particular de equação de segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

Duas antidiferenciações sucessivas são necessárias para resolvê-la, e duas constantes arbitrárias ocorrem na solução completa. Assim sendo, a sua solução completa representa uma **família de funções dependente de dois parâmetros** e seus gráficos formam uma família de curvas dependente de dois parâmetros no plano. Os exemplos a seguir mostram como obter a solução completa de uma equação desse tipo.

EXEMPLO 2 Ache a solução completa da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x + 3$$

Solução Como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

tomando $y' = \dfrac{dy}{dx}$, podemos escrever a equação dada como

$$\frac{dy'}{dx} = 4x + 3$$

Assim, com diferenciais, temos

$$dy' = (4x + 3)\, dx$$

Antidiferenciando, obtemos

$$\int dy' = \int (4x + 3)\, dx$$
$$y' = 2x^2 + 3x + C_1$$

Como $y' = \dfrac{dy}{dx}$, fazemos essa substituição na expressão acima resultando que

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + 3x + C_1$$
$$dy = (2x^2 + 3x + C_1)\, dx$$
$$\int dy = \int (2x^2 + 3x + C_1)\, dx$$
$$y = \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

que é a solução completa.

EXEMPLO 3 Ache uma solução da equação diferencial do Exemplo 2 para a qual $y = 2$ e $y' = 3$ quando $x = 1$.

Solução Como $y' = 2x^2 + 3x + C_1$, substituímos y' por -3 e x por 1, obtendo $-3 = 2 + 3 + C_1$, ou $C_1 = -8$. Substituindo esse valor de C_1 na solução completa, obtemos

$$y = \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 8x + C_2$$

Como $y = 2$ quando $x = 1$, substituímos esses valores na equação acima obtendo $2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 8 + C_2$, da qual temos que $C_2 = \frac{47}{6}$. A solução particular desejada é, então,

$$y = \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 8x + \tfrac{47}{6}$$

Vimos nas Secções 3.4 e 3.10 que se considerarmos o movimento de uma partícula ao longo de uma linha reta, quando é dada uma equação de movimento, $s = f(t)$, então a velocidade e a aceleração instantâneas poderão ser determinadas pelas expressões:

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

Assim sendo, se nos for dado v ou a como uma função de t, bem como condições laterais e/ou condições iniciais, é possível determinar a equação de movimento resolvendo uma equação diferencial. Esse procedimento está ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4 Uma partícula move-se ao longo de uma linha reta; em t s, s cm é a distância da partícula à origem, v cm/s é a sua velocidade e a cm/s^2 é a sua aceleração. Se

$$a = 2t - 1$$

e $v = 3$ e $s = 4$ quando $t = 1$, expresse v e s como funções de t.

Solução Como $a = \dfrac{dv}{dt}$, temos a equação diferencial

$$\frac{dv}{dt} = 2t - 1$$

$$dv = (2t - 1)\,dt$$

$$\int dv = \int (2t - 1)\,dt$$

$$v = t^2 - t + C_1 \tag{8}$$

Substituindo $v = 3$ e $t = 1$ em (8), temos

$$3 = 1 - 1 + C_1$$

$$C_1 = 3$$

Substituindo esse valor de C_1 em (8), obtemos

$$v = t^2 - t + 3$$

que expressa v como uma função de t. Agora, tomando $v = \dfrac{ds}{dt}$ nessa equação, temos

$$\frac{ds}{dt} = t^2 - t + 3$$

$$ds = (t^2 - t + 3)\, dt$$

$$\int ds = \int (t^2 - t + 3)\, dt$$

$$s = \tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2 + 3t + C_2 \qquad (9)$$

Substituímos em (9) $s = 4$ e $t = 1$, obtendo

$$4 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + 3 + C_2$$

$$C_2 = \tfrac{7}{6}$$

Assim, substituindo C_2 por $\frac{7}{6}$ em (9) expressamos s como uma função de t:

$$s = \tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2 + 3t + \tfrac{7}{6}$$

EXEMPLO 5 Uma partícula move-se sobre uma linha reta onde v cm/s é a velocidade da partícula em t s e

$$v = \cos 2\pi t$$

Se a direção positiva estiver à direita da origem e a partícula estiver a 5 cm à direita da origem, no início do movimento, ache a posição $\frac{1}{3}$ s depois.

Solução Seja s cm a distância orientada da partícula a partir da origem em t s. Como $v = \dfrac{ds}{dt}$,

$$\frac{ds}{dt} = \cos 2\pi t$$

$$ds = \cos 2\pi t\, dt$$

$$\int ds = \int \cos 2\pi t\, dt$$

$$s = \frac{1}{2\pi} \int \cos 2\pi t (2\pi\, dt)$$

$$s = \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi t + C$$

Como $s = 5$ quando $t = 0$,

$$5 = \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} 0 + C$$

$$C = 5$$

Logo, a equação de movimento é

$$s = \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi t + 5$$

Seja $s = \bar{s}$ quando $t = \frac{1}{3}$. Então,

$$\begin{aligned}\bar{s} &= \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi + 5\\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 5\\ &\approx 5{,}14\end{aligned}$$

Assim, a partícula está a 5,14 cm à direita da origem, $\frac{1}{3}$ s após o início do movimento.

Se um objeto se move livremente numa reta vertical e está sendo puxado em direção à terra pela força da gravidade, a aceleração devido à *gravidade*, denotada por g m/s², varia com a distância do objeto ao centro da Terra. Entretanto, para pequenas variações da distância, a aceleração, devido à gravidade é quase constante e um valor aproximado de g, se o objeto estiver próximo ao nível do mar, será 10 m/s².

EXEMPLO 6 Uma pedra é atirada verticalmente para cima, partindo do solo, com uma velocidade inicial de 20 m/s. Se a única força considerada for aquela atribuída à aceleração devido à gravidade, ache (a) quanto tempo levará para a pedra atingir o chão (b) a velocidade com que a pedra atinge o chão e (c) qual a altura máxima atingida pela pedra.

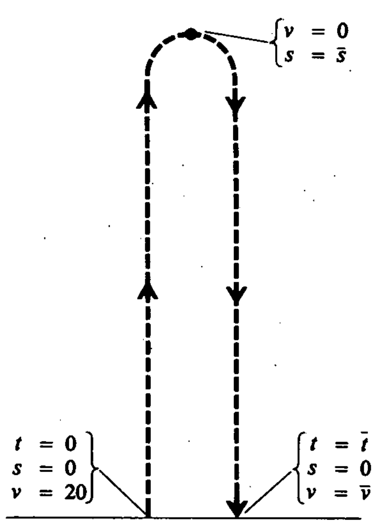


FIGURA 2

Tabela 1

t	s	v
0	0	20
	$\bar{s}$	0
$\bar{t}$	0	$\bar{v}$

Solução O movimento da pedra está ilustrado na Figura 2. A direção positiva é para cima.

Seja t s o tempo decorrido desde o lançamento da pedra, s m a distância percorrida pela pedra em t s, v m/s a velocidade da pedra em t s e $|v|$ m/s a velocidade escalar da pedra em t s.

Quando a pedra atinge o chão, $s = 0$. Sejam $\bar{t}$ e $\bar{v}$ os valores de t e v quando $s = 0$ e $t \neq 0$. A pedra está em seu ponto mais alto quando $v = 0$. Seja $\bar{s}$ o valor de s quando $v = 0$. A Tabela 1 mostra as condições laterais. Como a única aceleração presente é a da gravidade, a qual é vertical e dirigida para baixo, a aceleração tem um valor constante que tomaremos como sendo de -10 m/s². Uma vez que a aceleração é dada por $\frac{dv}{dt}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -10\\ dv &= -10\,dt\\ \int dv &= -10\int dt\\ v &= -10t + C_1\end{aligned}$$

Mas $v = 20$ quando $t = 0$ e, substituindo esses valores na equação acima, iremos obter $C_1 = 20$. Logo,

$$v = -10t + 20 \qquad (10)$$

Como $v = \dfrac{ds}{dt}$,

$$\frac{ds}{dt} = -10t + 20$$

$$ds = (-10t + 20)\,dt$$

$$\int ds = \int (-10t + 20)\,dt$$

$$s = -5t^2 + 20t + C_2$$

Com $s = 0$ quando $t = 0$, então $C_2 = 0$; portanto, da equação acima resulta

$$s = -5t^2 + 20t \qquad (11)$$

(a) Em (11) substituímos t por $\bar{t}$ e s por 0, obtendo

$$0 = -5\bar{t}(\bar{t} - 4)$$

donde concluímos que $\bar{t} = 0$ ou $\bar{t} = 4$. O valor 0, contudo, ocorre quando a pedra é atirada para cima; assim sendo, a pedra leva 4 s para chegar ao chão.

(b) Para obter $\bar{v}$ usamos (10), substituindo t por 4 e v por $\bar{v}$:

$$\bar{v} = -10(4) + 20$$
$$= -20$$

Assim, $|\bar{v}| = 20$ e a pedra chega ao solo com uma velocidade escalar de 20 m/s.

(c) Para encontrar $\bar{s}$ procuramos primeiro o valor de t para o qual $v = 0$. De (10), $t = 2$ quando $v = 0$. Substituindo em (11) t por 2 e s por $\bar{s}$, obtemos

$$\bar{s} = -5 \cdot (4) + 20(2)$$
$$= 20$$

Portanto, a pedra irá atingir 20 m de altura.

EXERCÍCIOS 5.3

Nos Exercícios de 1 a 14, ache a solução completa da equação diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 4x - 5$
2. $\dfrac{dy}{dx} = 6 - 3x^2$
3. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x - 7$
4. $\dfrac{ds}{dt} = 5\sqrt{s}$
5. $\dfrac{dy}{dx} = 3xy^2$
6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{y} - y}$
7. $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{3v\sqrt{1 + u^2}}{u}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2\sqrt{x^3 - 3}}{y^2}$
9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 y}$
10. $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{\cos 2v}{\operatorname{sen} 3u}$
11. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 5x^2 + 1$
12. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{2x - 3}$
13. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \operatorname{sen} 3t + \cos 3t$
14. $\dfrac{d^2u}{dv^2} = \operatorname{tg} v \sec^2 v$

Nos Exercícios de 15 a 20, ache a solução da equação diferencial dada, determinada pelas condições iniciais.

15. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 2x - 4$; $y = -6$ quando $x = 3$

16. $\dfrac{dy}{dx} = (x + 1)(x + 2)$; $y = -\frac{3}{2}$ quando $x = -3$

17. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 2y}$; $y = \frac{1}{3}\pi$ quando $x = \frac{1}{2}\pi$

18. $\dfrac{ds}{dt} = \cos \frac{1}{2}t$; $s = 3$ quando $t = \frac{1}{3}\pi$

19. $\dfrac{d^2u}{dv^2} = 4(1 + 3v)^2$; $u = -1$ e $\dfrac{du}{dv} = -2$ quando $v = -1$

20. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{3}{x^4}$; $y = \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{dy}{dx} = -1$ quando $x = 1$

Nos Exercícios de 21 a 32, uma partícula move-se ao longo de uma linha reta, em t s, *s é a distância orientada da partícula até a origem,* v m/s *é a sua velocidade e* a m/s² *é a sua aceleração.* $\left(\text{Sugestão para os Exercícios de 29 a 32: } a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{ds}\dfrac{ds}{dt} = v\dfrac{dv}{ds}.\right)$

21. $v = \sqrt{2t + 4}$; $s = 0$ quando $t = 0$. Expresse s em termos de t.

22. $v = 4 - t$; $s = 0$ quando $t = 2$. Expresse s em termos de t.

23. $a = 5 - 2t$; $v = 2$ e $s = 0$ quando $t = 0$. Expresse v e s em termos de t.

24. $a = 17$; $v = 0$ e $s = 0$ quando $t = 0$. Expresse v e s em termos de t.

25. $a = t^2 + 2t$; $s = 1$ quando $t = 0$ e $s = -3$ quando $t = 2$. Expresse v e s em termos de t.

26. $a = 3t - t^2$; $v = \frac{7}{6}$ e $s = 1$ quando $t = 1$. Expresse v e s em termos de t.

27. $a = -4\sqrt{2}\cos(2t - \frac{1}{4}\pi)$; $v = 2$ e $s = 1$ quando $t = 0$. Expresse v e s em termos de t.

28. $a = 18 \operatorname{sen} 3t$; $v = -6$ e $s = 4$ quando $t = 0$. Expresse v e s em termos de t.

29. $a = 800$; $v = 20$ quando $s = 1$. Ache uma equação envolvendo v e s.

30. $a = 500$; $v = 10$ quando $s = 5$. Ache uma equação envolvendo v e s.

31. $a = 5s + 2$; $v = 4$ quando $s = 2$. Ache uma equação envolvendo v e s.

32. $a = 2s + 1$; $v = 2$ quando $s = 1$. Ache uma equação envolvendo v e s.

Nos Exercícios de 33 a 40, a única força considerada é aquela decorrente da aceleração da gravidade, que tomaremos como sendo 10 m/s², vertical e dirigida para baixo.

33. Uma pedra é atirada verticalmente para cima, partindo do solo, com uma velocidade inicial de 20 m/s. (a) Quanto tempo irá decorrer até que a pedra retorne ao solo? (b) Com que velocidade escalar ela atinge o solo? (c) Por quanto tempo a pedra continuará subindo? (d) Qual a altura máxima atingida pela pedra?

34. Uma pedra é atirada para cima, partindo do solo, com uma velocidade inicial de 25 m/s. (a) Quanto tempo irá decorrer até que ela retorne ao solo? (b) Qual a velocidade escalar quando ela atinge o solo?

35. Uma bola cai do topo do monumento a Washington que tem 165 m de altura. (a) Quanto tempo irá decorrer até ela atingir o solo? (b) Qual a velocidade escalar quando ela chegar ao solo?

36. Uma pedra é atirada verticalmente para cima, partindo do solo, com uma velocidade inicial de 15 m/s. (a) Por quanto tempo ela subirá? (b) Qual a altura máxima atingida pela pedra?

37. Uma mulher derruba o seu binóculo estando num balão a 150 m do solo, que está subindo com uma velocidade de 10 m/s. (a) Quanto tempo irá decorrer até o binóculo atingir o solo e qual a velocidade escalar dele no momento do impacto?

38. Uma bola é atirada de uma janela que está a 25 m do solo, com uma velocidade inicial de -20 m/s. (a) Quando a bola atinge o solo? (b) Com que velocidade escalar ela irá atingir o solo?

39. Uma bola é atirada verticalmente para cima, com uma velocidade inicial de 40 m/s, de um ponto a 20 m do solo. (a) Se v m/s for a velocidade da bola quando estiver a s m do ponto inicial, expresse v em termos de s. (b) Qual a velocidade da bola quando ela estiver a 36 m do solo e ainda subindo? (*Sugestão*: veja a sugestão dada para os Exercícios de 29 a 32.)

40. Uma pedra é atirada verticalmente para cima, do telhado de uma casa com 20 m de altura, com uma velocidade inicial de 15 m/s. (a) Depois de quanto tempo ela atingirá a altura máxima e (b) qual será essa altura? (c) Quanto tempo irá decorrer até que a pedra na descida passe pelo telhado da casa e (d) qual a sua velocidade nesse instante? (e) Quanto tempo irá decorrer para que ela atinja o solo e (f) qual a sua velocidade então?

41. Uma partícula move-se ao longo de uma linha reta de tal forma que se v cm/s for a velocidade da partícula em t s, então $v = \operatorname{sen} \pi t$, onde a direção positiva é à direita da origem. Se a partícula estiver na origem no início do movimento, ache a sua posição $\frac{2}{3}$ s depois.

42. Se uma bola rola pelo chão com uma velocidade de 6 m/s e se a velocidade decresce a uma taxa de 1,8 m/s², devido ao atrito, qual a distância percorrida pela bola?

43. Se um motorista deseja que a velocidade escalar de seu carro aumente de 40 km/h para 100 km/h, enquanto percorre uma distância de 200 m, que aceleração constante ele deve manter?

44. Que aceleração negativa constante irá possibilitar a um motorista diminuir a velocidade escalar de seu carro de 120 km/h para 60 km/h, enquanto percorre uma distância de 100 m?

45. Um carro a 100 km/h é freiado e isto o leva a uma aceleração negativa constante de 8 m/s². (a) Depois de quanto tempo o carro irá parar? (b) Qual a distância percorrida até a parada?

46. Uma bola começa a subir em um plano inclinado com uma velocidade inicial de 1,5 m/s. Se há uma aceleração para baixo de 1,2 m/s^2, até onde a bola subirá no plano antes de começar a descer?

47. Se os freios dão uma aceleração negativa constante ao carro de 8 m/s^2, qual deverá ser a velocidade escalar máxima do carro, para que ele pare 25 m depois da freiada?

48. Um bloco de gelo desliza por uma rampa com uma aceleração de 3m/s^2. A rampa tem 36 m e leva 4 s para o gelo atingir a base. (a) Qual a velocidade inicial do gelo? (b) Qual a velocidade escalar do gelo após percorrer 12 m da rampa? (c) Quanto tempo leva para o gelo percorrer 12 m?

49. A equação $x^2 = 4ay$ representa uma família de parábolas a um parâmetro. Ache uma equação de uma outra família de curvas a um parâmetro, tal que em todo ponto (x, y) haja uma curva de cada família passando por ele e as retas tangentes às duas curvas nesse ponto sejam perpendiculares. (*Sugestão*: mostre primeiro que a inclinação da reta tangente num ponto (x, y), que não está no eixo y, da família de parábolas dada é $2y/x$.)

50. Resolva o Exercício 49, se a família a um parâmetro tiver a equação $x^3 + y^3 = a^3$.

5.4 ÁREA

Você provavelmente já tenha uma idéia intuitiva do que entendemos por *área* de certas figuras geométricas. É a medida que, de alguma forma, indica o tamanho da região encerrada pela figura. A área de um retângulo é o produto de seu comprimento pela largura e a área de um triângulo é a metade do produto do comprimento da base pela altura.

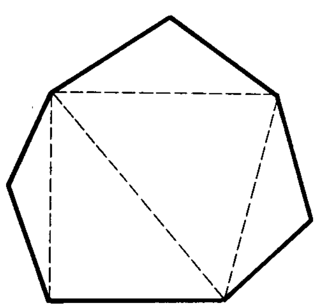


FIGURA 1

A área de um polígono pode ser definida como a soma das áreas dos triângulos nos quais ela pode ser decomposta e podemos provar que a área assim obtida independe de como o polígono é decomposto em triângulos (veja a Figura 1). Entretanto, como definir a área de uma região plana se ela for limitada por uma curva? Nesta secção vamos dar a definição da área de tal região e na Secção 5.5 ela será usada para motivar a definição de *integral definida.*

O tratamento que vamos dar ao conceito de área envolve somas com muitas parcelas e para facilitar o seu cálculo vamos introduzir a notação chamada de **somatória**. Essa notação envolve o uso do símbolo $\sum$, a letra sigma maiúscula do alfabeto grego. Alguns exemplos do uso de somatória são dados na ilustração a seguir.

► **ILUSTRAÇÃO 1**

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$\sum_{i=-2}^{2} (3i + 2) = [3(-2) + 2] + [3(-1) + 2] + [3 \cdot 0 + 2] + [3 \cdot 1 + 2] + [3 \cdot 2 + 2]$$
$$= (-4) + (-1) + 2 + 5 + 8$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

$$\sum_{k=3}^{8} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$ ◄

A seguir, vamos dar a definição formal de somatória.

5.4.1 DEFINIÇÃO

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \ldots + F(n-1) + F(n)$$

onde m e n são inteiros, e $m \leqslant n$.

O segundo membro da equação consiste em uma soma de $(n - m + 1)$ termos, o primeiro dos quais é obtido substituindo i por m em $F(i)$, o segundo substituindo i por $m + 1$ em $F(i)$ e assim por diante, até que o último termo seja obtido substituindo i por n em $F(i)$.

O número m é chamado de **limite inferior** da somatória, enquanto que n é chamado de **limite superior**. O símbolo i é chamado de **índice da somatória**. É um índice "mudo"; qualquer letra pode ser usada para o mesmo propósito. Por exemplo,

$$\sum_{k=3}^{5} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2$$

é equivalente a

$$\sum_{i=3}^{5} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Da Definição 5.4.1,

$$\sum_{i=3}^{6} \frac{i^2}{i+1} = \frac{3^2}{3+1} + \frac{4^2}{4+1} + \frac{5^2}{5+1} + \frac{6^2}{6+1}$$ ◀

Algumas vezes os termos de uma soma envolvem subscritos, conforme mostra a próxima ilustração.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3**

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

$$\sum_{k=4}^{9} kb_k = 4b_4 + 5b_5 + 6b_6 + 7b_7 + 8b_8 + 9b_9$$

$$\sum_{i=1}^{5} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + f(x_4)\,\Delta x + f(x_5)\,\Delta x$$ ◀

Os teoremas a seguir, envolvendo somatória, são úteis para o cálculo e podem ser facilmente provados.

5.4.2 TEOREMA

$\sum_{i=1}^{n} c = cn$, onde c é qualquer constante.

Prova

$$\sum_{i=1}^{n} c = c + c + \ldots + c \qquad (n \text{ termos})$$
$$= cn$$ ■

5.4.3 TEOREMA

$\sum_{i=1}^{n} c \cdot F(i) = c \sum_{i=1}^{n} F(i)$, onde c é qualquer constante.

Prova

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} c \cdot F(i) &= c \cdot F(1) + c \cdot F(2) + c \cdot F(3) + \ldots + c \cdot F(n)\\ &= c[F(1) + F(2) + F(3) + \ldots + F(n)]\\ &= c \sum_{i=1}^{n} F(i)\end{aligned}$$ ■

5.4.4 TEOREMA

$$\sum_{i=1}^{n} [F(i) + G(i)] = \sum_{i=1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i)$$

A demonstração será deixada como exercício (veja o Exercício 59). O Teorema 5.4.4 pode ser aplicado à soma de um número qualquer de funções.

5.4.5 TEOREMA

$$\sum_{i=a}^{b} F(i) = \sum_{i=a+c}^{b+c} F(i-c) \qquad (1)$$

e

$$\sum_{i=a}^{b} F(i) = \sum_{i=a-c}^{b-c} F(i+c) \qquad (2)$$

A demonstração do Teorema 5.4.5 será deixada como exercício (veja o Exercício 60). A ilustração a seguir mostra a aplicação desse teorema.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Da fórmula (1) do Teorema 5.4.5,

$$\sum_{i=3}^{10} F(i) = \sum_{i=5}^{12} F(i-2) \quad \text{e} \quad \sum_{i=6}^{11} i^2 = \sum_{i=7}^{12} (i-1)^2$$

Da fórmula (2) do Teorema 5.4.5,

$$\sum_{i=3}^{10} F(i) = \sum_{i=1}^{8} F(i+2) \quad \text{e} \quad \sum_{i=6}^{11} i^2 = \sum_{i=1}^{6} (i+5)^2$$ ◀

5.4.6 TEOREMA

$$\sum_{i=1}^{n} [F(i) - F(i-1)] = F(n) - F(0)$$

Prova

$$\sum_{i=1}^{n} [F(i) - F(i-1)] = \sum_{i=1}^{n} F(i) - \sum_{i=1}^{n} F(i-1)$$

No segundo membro da fórmula acima escrevemos a primeira somatória de uma outra forma e aplicamos a expressão (2) do Teorema 5.4.5 com $c = 1$ à segunda somatória. Então,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} [F(i) - F(i-1)] &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} F(i) + F(n)\right) - \sum_{i=1-1}^{n-1} F[(i+1)-1]\\ &= \sum_{i=1}^{n-1} F(i) + F(n) - \sum_{i=0}^{n-1} F(i)\\ &= \sum_{i=1}^{n-1} F(i) + F(n) - \left(F(0) + \sum_{i=1}^{n-1} F(i)\right)\\ &= F(n) - F(0)\end{aligned}$$ ■

EXEMPLO 1 Calcule

$$\sum_{i=1}^{n} (4^i - 4^{i-1})$$

Solução Do Teorema 5.4.6, onde $F(i) = 4^i$, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (4^i - 4^{i-1}) &= 4^n - 4^0 \\ &= 4^n - 1\end{aligned}$$

No teorema a seguir, existem quatro fórmulas úteis ao cálculo com somatória. Elas estão numeradas para referências futuras.

5.4.7 TEOREMA Se n for um inteiro positivo, então

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(Fórmula 1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{(Fórmula 2)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \text{(Fórmula 3)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} \qquad \text{(Fórmula 4)}$$

Prova Vamos demonstrar a Fórmula 1.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} i = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$$

Somando os primeiros membros de ambas, teremos

$$2\sum_{i=1}^{n} i$$

e se os segundos membros forem somados termo a termo, cada um tendo o valor $(n + 1)$, obteremos n termos. Assim,

$$\begin{aligned}2\sum_{i=1}^{n} i &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) \qquad n \text{ termos} \\ &= n(n+1)\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

que é a Fórmula 1. Tanto a Fórmula 1, como as demais podem ser provadas por indução matemática. Vamos fazer a demonstração da Fórmula 2 por indução matemática. A prova consiste em duas partes e uma conclusão.

Parte 1: Vamos primeiro verificar a Fórmula 2 para $n = 1$. Se $n = 1$, então o primeiro membro da Fórmula 2 será

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1$$

e o segundo membro será

$$\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$
$$= 1$$

Desse modo, a Fórmula 2 é válida, quando $n = 1$.

Parte 2: Vamos supor que a Fórmula 2 seja válida para $n = k$, onde k é um inteiro positivo; isto é, suponhamos

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \tag{3}$$

Com essa hipótese, queremos provar que a fórmula também é válida quando $n = k + 1$, isto é, queremos provar

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6} \tag{4}$$

Quando $n = k + 1$, temos

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \qquad \text{(aplicando (3))}$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

que é (4).

Conclusão: Da parte 1, sabemos que a Fórmula 2 é válida para $n = 1$. Por isso, segue da parte 2 que ela é válida para $n = 1 + 1$, ou 2; como é válida para $n = 2$, é também válida para $n = 2 + 1$, ou 3; e assim por diante. Pelo princípio da indução matemática, a fórmula é válida para todos os valores inteiros positivos de n. ■

As demonstrações das Fórmulas 3 e 4 serão deixadas como exercício (veja os Exercícios de 53 a 58).

EXEMPLO 2 Calcule

$$\sum_{i=1}^{n} i(3i-2)$$

Solução

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i(3i-2) &= \sum_{i=1}^{n} (3i^2-2i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (3i^2) + \sum_{i=1}^{n} (-2i) \qquad \text{(pelo Teorema 5.4.4)} \\
&= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i \qquad \text{(pelo Teorema 5.4.3)} \\
&= 3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(pelas Fórmulas 2 e 1)} \\
&= \frac{2n^3+3n^2+n-2n^2-2n}{2} \\
&= \frac{2n^3+n^2-n}{2}
\end{aligned}$$

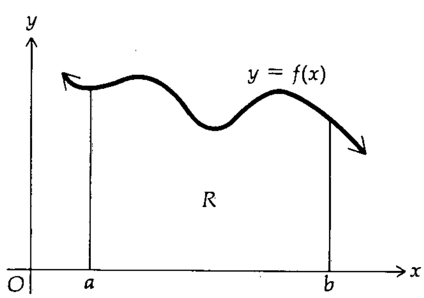


FIGURA 2

Antes de discutir a área de uma região plana, queremos indicar por que a terminologia "*medida* da área" é usada. A palavra *medida* refere-se a um número (sem unidades incluídas). Por exemplo, se a área for 20 cm², diremos que a medida da área em centímetros quadrados é 20. Quando a palavra *medição* for aplicada, devemos incluir as unidades. Assim, a medição da área de um triângulo é 20 cm².

Considere agora uma região R no plano, conforme mostra a Figura 2. A região R é limitada pelo eixo dos x, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pela curva tendo equação $y = f(x)$, onde f é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Para simplificar, vamos tomar $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Queremos atribuir à medida da área de R um número A, usando um processo de limite semelhante ao usado para definir a área de um círculo: a área de um círculo é definida como o limite das áreas dos polígonos regulares inscritos quando o número de lados cresce indefinidamente. Vemos intuitivamente que qualquer que seja o número escolhido para representar A, esse número deverá ser, no mínimo, tão grande quanto a medida da área de qualquer região poligonal contida em R e não deverá ser maior do que a medida da área de qualquer região poligonal contendo R.

Vamos definir primeiro uma região poligonal contida em R. Dividimos o intervalo fechado $[a, b]$ em n subintervalos. Para simplificar, vamos tomar cada um desses subintervalos como tendo o mesmo comprimento, digamos, Δx. Logo, $\Delta x = (b - a)/n$. Vamos denotar os extremos desses subintervalos por x_0, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, onde $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x, \ldots, x_i = a + i\Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x$, $x_n = b$. Seja $[x_{i-1}, x_i]$ o i-ésimo subintervalo. Como f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, ela é contínua em cada um dos subintervalos. Pelo teorema do valor extremo, existe um número em cada subintervalo para o qual f tem um valor mínimo absoluto. No i-ésimo subintervalo, seja c_i esse número, assim $f(c_i)$ será o valor mínimo absoluto de f no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Considere n retângulos, cada um com um comprimento de Δx unidades e uma altura $f(c_i)$ unidades (veja a Figura 3). Sejam S_n unidades quadradas a soma das áreas desses n retângulos; então

$$S_n = f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + \ldots + f(c_i)\,\Delta x + \ldots + f(c_n)\,\Delta x$$

ou, com somátoria,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \tag{5}$$

A somatória do segundo membro de (5) dá a soma das medidas das áreas dos n retângulos inscritos. Assim, não importa como A seja definido, ele deve ser tal que

$$A \geqslant S_n$$

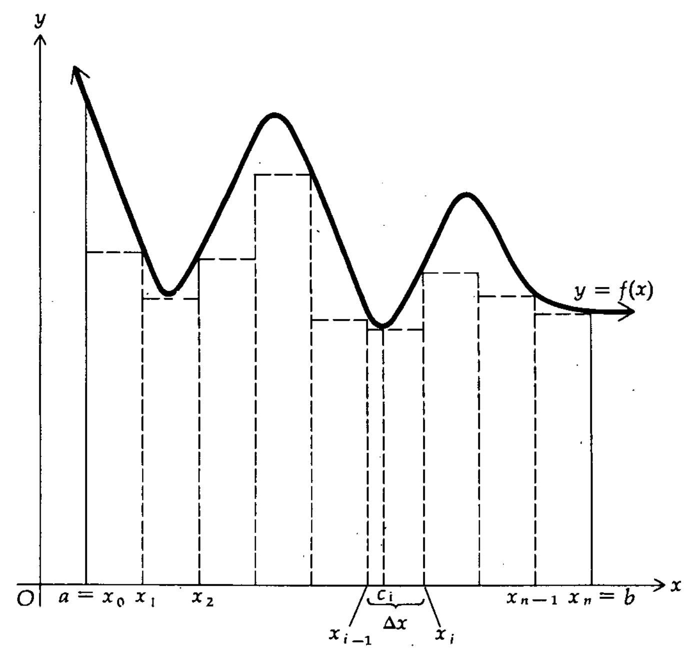


FIGURA 3

Na Figura 3, a região sombreada tem uma área de S_n unidades quadradas. Vamos fazer agora n crescer. Especificamente, multiplicamos n por 2; então, o número de retângulos vai dobrar, enquanto que o comprimento de cada retângulo será reduzido à metade. Isso está ilustrado na Figura 4, mostrando o dobro de retângulos da Figura 3. Comparando as duas figuras, vemos que a área sombreada na Figura 4 parece aproximar-se melhor da região R do que a da Figura 3. Assim, a soma das medidas das áreas dos retângulos na Figura 4 está mais próxima do número que desejamos para representar a medida da área de R.

Enquanto n cresce, os valores de S_n encontrados pela fórmula (5) aumentam, e valores sucessivos de S_n diferem um do outro por quantidades que se tornam

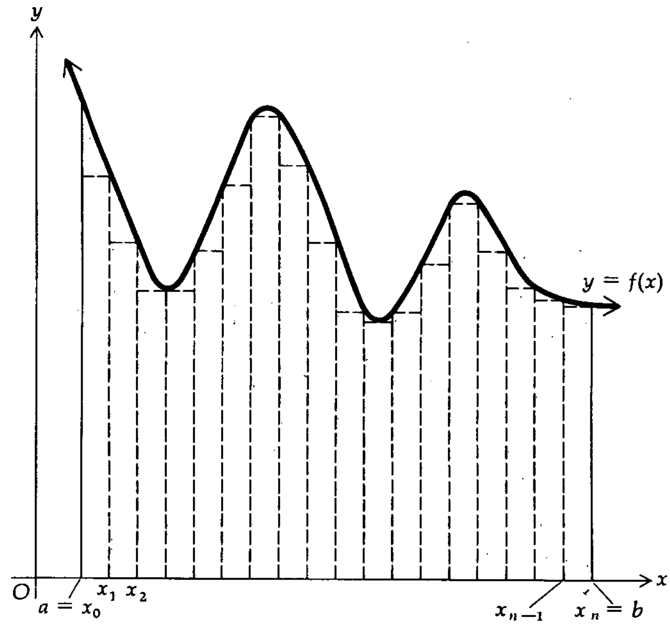


FIGURA 4

arbitrariamente pequenas. Isto é provado em Cálculo Avançado por um teorema que afirma que se f for contínua em $[a, b]$, então quando n cresce indefinidamente, os valores de S_n dados por (5) tendem a um limite. É esse limite que iremos tomar como a definição de medida da área da região R.

5.4.8 DEFINIÇÃO

Suponha que a função f seja contínua no intevalo fechado $[a, b]$ com $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$ e seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$. Vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, cada um com comprimento $\Delta x = (b - a)/n$ e vamos denotar o i-ésimo subintervalo por $[x_{i-1}, x_i]$. Então se $f(c_i)$ for o valor funcional mínimo absoluto no i-ésimo subintervalo, a medida da área da região R será dada por

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x \tag{6}$$

A igualdade (6) significa que para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N > 0$ tal que se n for um inteiro positivo e se

$$n > N \text{ então } \left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x - A \right| < \epsilon$$

Podíamos ter considerado retângulos circunscritos ao invés de retângulos inscritos. Nesse caso, tomamos como medida das alturas dos retângulos o valor máximo absoluto de f em cada subintervalo. A existência desse valor máximo absoluto de f em cada subintervalo é garantida pelo teorema do valor extremo. As somas correspondentes das medidas das áreas dos retângulos circunscritos são, no mínimo, tão grandes quanto a medida da área da região R e pode ser mostrado que o limite dessas somas quando n cresce indefinidamente é exatamente igual ao limite da soma das medidas das áreas dos retângulos inscritos. Prova-se isto também em Cálculo Avançado. Assim sendo, poderíamos definir a medida da área da região R por

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\,\Delta x \tag{7}$$

onde $f(d_i)$ é o valor máximo absoluto de f em $[x_{i-1}, x_i]$.

A medida da altura do retângulo no i-ésimo subintervalo realmente pode ser tomada como o valor funcional em qualquer número daquele subintervalo, e o limite da soma das medidas das áreas dos retângulos continua o mesmo, não importanto quais os números selecionados. Na Secção 5.5 estendemos a definição de medida da área de uma região como o limite de tal soma.

EXEMPLO 3 Ache a área da região limitada pela curva $y = x^2$, o eixo x e a reta $x = 3$, tomando retângulos inscritos.

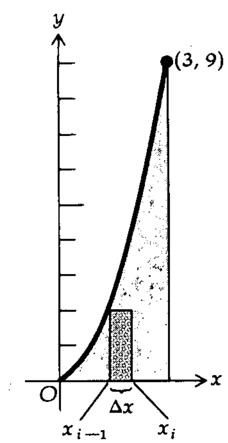


FIGURA 5

Solução A Figura 5 mostra a região o i-ésimo retângulo inscrito. Aplicamos a Definição 5.4.8. Dividimos o intervalo fechado $[0, 3]$ em n subintervalos, cada um com comprimento Δx: $x_0 = 0$, $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2\Delta x$, ..., $x_i = i\Delta x$, ..., $x_{n-1} = (n-1)\Delta x$, $x_n = 3$.

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} \qquad f(x) = x^2$$

$$= \frac{3}{n}$$

Como f é crescente em $[0, 3]$, o valor mínimo absoluto de f no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é $f(x_{i-1})$. Logo, de (6),

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x \tag{8}$$

Como $x_{i-1} = (i-1)\Delta x$ e $f(x) = x^2$,

$$f(x_{i-1}) = [(i-1)\,\Delta x]^2$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2(\Delta x)^3$$

Mas $\Delta x = 3/n$, assim,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \frac{27}{n^3}$$

$$= \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2$$

$$= \frac{27}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

e usando as Fórmulas 2 e 1 e o Teorema 5.4.2, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x = \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n\right]$$

$$= \frac{27}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n-6n^2-6n+6n}{6}$$

$$= \frac{9}{2}\cdot\frac{2n^2-3n+1}{n^2}$$

Então, de (8),

$$A = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{9}{2}\cdot\frac{2n^2-3n+1}{n^2}\right]$$

$$= \frac{9}{2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \tfrac{9}{2}(2-0+0)$$

$$= 9$$

Assim, a área da região é 9 unidades quadradas.

EXEMPLO 4 Ache a área da região no Exemplo 3, tomando retângulos circunscritos.

Solução Com retângulos circunscritos, a medida da altura do i-ésimo retângulo é o valor máximo absoluto de f no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, que é $f(x_i)$. De (7),

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \tag{9}$$

Como $x_i = i\Delta x$, então $f(x_i) = (i\Delta x)^2$, e assim

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} i^2(\Delta x)^3$$

$$= \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \frac{9}{2}\cdot\frac{2n^2+3n+1}{n^2}$$

Logo, da igualdade (9),

$$A = \lim_{n\to+\infty}\frac{9}{2}\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 9 \qquad \text{(como no Exemplo 3)}$$

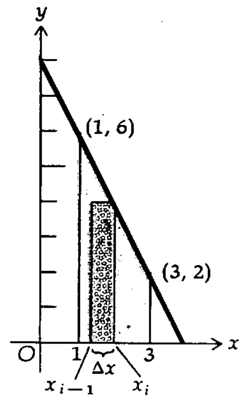


FIGURA 6

EXEMPLO 5 Ache a área do trapézio limitado pelas retas $x = 1$ e $x = 3$, pelo eixo x e pela reta $2x + y = 8$. Tome retângulos inscritos.

Solução A região e o i-ésimo retângulo inscrito estão na Figura 6. O intervalo fechado $[1, 3]$ é dividido em n subintervalos, cada um com comprimento Δx: $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \Delta x$, $x_2 = 1 + 2\Delta x$, ..., $x_i = 1 + i\Delta x$, ..., $x_{n-1} = 1 + (n - 1)\Delta x$, $x_n = 3$.

$$\Delta x = \frac{3-1}{n}$$
$$= \frac{2}{n}$$

Resolvendo em y a equação da reta, obtemos $y = -2x + 8$. Logo, $f(x) = -2x + 8$ e como f é decrescente em $[1, 3]$, o valor mínimo absoluto de f no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é $f(x_i)$. Como $x_i = 1 + i\Delta x$ e $f(x) = -2x + 8$, então $f(x_i) = -2(1 + i\Delta x) + 8$, isto é, $f(x_i) = 6 - 2i\Delta x$. De (6),

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} (6 - 2i\,\Delta x)\,\Delta x$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} [6\,\Delta x - 2i(\Delta x)^2]$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[6\left(\frac{2}{n}\right) - 2i\left(\frac{2}{n}\right)^2\right]$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{12}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\right]$$

Do Teorema 5.4.2 e da Fórmula 1,

$$A = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{12}{n} \cdot n - \frac{8}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right]$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \left(8 - \frac{4}{n}\right)$$
$$= 8$$

Assim, a área é 8 unidades quadradas. Usando a fórmula de Geometria Plana para a área do trapézio, $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$, onde h, b_1 e b_2 são, respectivamente, o número de unidades nos comprimentos da altura e das duas bases, obtemos $A = \frac{1}{2}(2)(6 + 2)$; isto é, $A = 8$, o que está de acordo com o resultado acima.

EXERCÍCIOS 5.4

Nos Exercícios de 1 a 12, ache a soma dada.

1. $\sum_{i=1}^{6} (3i - 2)$
2. $\sum_{i=1}^{20} (5i + 4)$
3. $\sum_{i=1}^{7} (i^2 + 1)$
4. $\sum_{i=1}^{7} (i + 1)^2$
5. $\sum_{i=1}^{10} (i - 1)^3$
6. $\sum_{i=1}^{10} (i^3 - 1)$

7. $\sum_{i=2}^{5} \frac{i}{i-1}$

8. $\sum_{j=3}^{6} \frac{2}{j(j-2)}$

9. $\sum_{i=-2}^{3} 2^i$

10. $\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{1+i^2}$

11. $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

12. $\sum_{k=-2}^{3} \frac{k}{k+3}$

Nos Exercícios de 13 a 20, calcule a soma indicada, usando os Teoremas 5.4.2 até 5.4.7.

13. $\sum_{i=1}^{25} 2i(i-1)$

14. $\sum_{i=1}^{20} 3i(i^2+2)$

15. $\sum_{k=1}^{n} (2^k - 2^{k-1})$

16. $\sum_{i=1}^{n} (10^{i+1} - 10^i)$

17. $\sum_{k=1}^{100} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]$

18. $\sum_{i=1}^{n} 2i(1+i^2)$

19. $\sum_{i=1}^{n} 4i^2(i-2)$

20. $\sum_{k=1}^{n} [(3^{-k} - 3^k)^2 - (3^{k-1} + 3^{-k-1})^2]$

Nos Exercícios de 21 a 36, use o método desta secção para calcular a área da região dada; use retângulos inscritos ou circunscritos, conforme indicado. Para cada exercício, faça uma figura mostrando a região e o i-ésimo retângulo.

21. A região limitada por $y = x^2$, o eixo x e a reta $x = 2$; retângulos inscritos.
22. A região do Exercício 21; retângulos circunscritos.
23. A região limitada por $y = 2x$, o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 4$; retângulos circunscritos.
24. A região do Exercício 23; retângulos inscritos.
25. A região acima do eixo x e à direita da reta $x = 1$, limitada pelo eixo x, a reta $x = 1$ e a curva $y = 4 - x^2$; retângulos inscritos.
26. A região do Exercício 25; retângulos circunscritos.
27. A região à esquerda da reta $x = 1$, limitada pela curva e as retas do Exercício 25; retângulos circunscritos.
28. A região do Exercício 27; retângulos inscritos.
29. A região limitada por $y = 3x^4$, pelo eixo x e pela reta $x = 1$; retângulos inscritos.
30. A região do Exercício 29; retângulos circunscritos.
31. A região limitada por $y = x^3$, eixo x e as retas $x = -1$ e $x = 2$; retângulos inscritos.
32. A região do Exercício 31; retângulos circunscritos.
33. A região limitada por $y = x^3 + x$, o eixo x e as retas $x = -2$ e $x = 1$; retângulos circunscritos.
34. A região do Exercício 33; retângulos inscritos.
35. A região limitada por $y = mx$, com $m > 0$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$, com $b > a > 0$; retângulos circunscritos.
36. A região do Exercício 35; retângulos inscritos.
37. Use o método desta secção para encontrar a área de um trapézio isósceles cujas bases têm medidas b_1 e b_2 e cuja altura tem medida h.
38. O gráfico de $y = 4 - |x|$ e o eixo x de $x = -4$ até $x = 4$ formam um triângulo. Use o método desta secção para encontrar sua área.

Nos Exercícios de 39 a 44, ache a área da região, tomando como medida da altura do i-ésimo retângulo $f(m_i)$, onde m_i é o ponto médio do i-ésimo subintervalo. (Sugestão: $m_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$.)

39. A região do Exemplo 3.
40. A região do Exercício 21.
41. A região do Exercício 23.
42. A região do Exercício 25.
43. A região do Exercício 27.
44. A região do Exercício 29.

Nos Exercícios de 45 a 52, uma função f e os números n, a e b são dados. Aproxime até quatro casas decimais a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$ fazendo o seguinte: divida o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de Δx unidades de igual comprimento e use uma calculadora para determinar a soma das áreas de n retângulos inscritos ou circunscritos (como indicado), cada um com Δx unidades de largura.

45. $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 3$, $n = 10$, retângulos inscritos.
46. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = 1$, $b = 2$, $n = 12$, retângulos circunscritos.
47. $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 3$, $n = 10$, retângulos circunscritos.
48. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = 1$, $b = 2$, $n = 12$, retângulos inscritos.
49. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \frac{1}{6}\pi$, $b = \frac{5}{6}\pi$, $n = 8$, retângulos circunscritos.
50. $f(x) = \cos x$, $a = 0$, $b = \frac{1}{2}\pi$, $n = 6$, retângulos inscritos.
51. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \frac{1}{6}\pi$, $b = \frac{5}{6}\pi$, $n = 8$, retângulos inscritos.
52. $f(x) = \cos x$, $a = 0$, $b = \frac{1}{2}\pi$, $n = 6$, retângulos circunscritos.
53. Prove a Fórmula 2 do Teorema 5.4.7 sem indução matemática. (*Sugestão:* $i^3 - (i-1)^3 = 3i^2 - 3i + 1$; assim, $\sum_{i=1}^{n} [i^3 - (i-1)^3] = \sum_{i=1}^{n} (3i^2 - 3i + 1)$. No primeiro membro dessa equação use o Teorema 5.4.6; no segundo membro, use os Teoremas 5.4.2, 5.4.3 e 5.4.4 e a Fórmula 1.)
54. Prove a Fórmula 3 do Teorema 5.4.7. (*Sugestão:* $i^4 - (i-1)^4 = 4i^3 - 6i^2 + 4i - 1$, e use um método similar ao do Exercício 53.)
55. Prove a Fórmula 4 do Teorema 5.4.7. (Veja as sugestões para os Exercícios 53 e 54.)
56. Prove a Fórmula 1 do Teorema 5.4.7 por indução matemática.
57. Prove a Fórmula 3 do Teorema 5.4.7 por indução matemática.
58. Prove a Fórmula 4 do Teorema 5.4.7 por indução matemática.
59. Prove o Teorema 5.4.4.
60. Prove o Teorema 5.4.5.

5.5 A INTEGRAL DEFINIDA

Na Secção 5.4, a medida da área de uma região foi definida como sendo o seguinte limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x \tag{1}$$

Para chegarmos a essa definição, dividimos o intervalo fechado $[a, b]$ em subintervalos de igual comprimento e então tomamos c_i como sendo o ponto do i-ésimo subintervalo no qual f tem um valor mínimo absoluto. Também restringimos os valores funcionais a serem não-negativos em $[a, b]$ e além disso exigimos que f fosse contínua em $[a, b]$.

O limite em (1) é um caso particular de um novo tipo de processo de limite que nos leva à definição de *integral definida*. Vamos discutir agora esse "novo tipo de limite".

Seja f a função definida no intervalo fechado $[a, b]$. Vamos dividir esse intervalo em n subintervalos, escolhendo qualquer dos $(n - 1)$ pontos intermediários entre a e b. Sejam $x_0 = a$ e $x_n = b$ e $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ os pontos intermediários, de tal forma que

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$$

Os pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ não são necessariamente eqüidistantes. Seja $\Delta_1 x$ o comprimento do primeiro subintervalo, de tal forma que $\Delta_1 x = x_1 - x_0$; seja $\Delta_2 x$ o comprimento do segundo subintervalo tal que $\Delta_2 x = x_2 - x_1$; e assim por diante, de forma que o comprimento do i-ésimo subintervalo seja $\Delta_i x$, e

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

Um conjunto de todos esses subintervalos do intervalo $[a, b]$ é chamado uma **partição** do intervalo $[a, b]$. Seja Δ tal partição. A Figura 1 ilustra essa partição Δ de $[a, b]$.

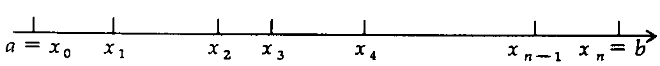


FIGURA 1

A partição Δ contém n subintervalos. Um deles é o maior; pode existir mais de um desses subintervalos. O comprimento do maior subintervalo da partição Δ, chamado **norma** da partição, é denotado por $\|\Delta\|$.

Vamos escolher um ponto em cada subintervalo da partição Δ: seja ξ_1 o ponto escolhido em $[x_0, x_1]$ de tal forma que $x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1$. Tomemos ξ_2 como o ponto escolhido em $[x_1, x_2]$, de tal forma que $x_1 \leqslant \xi_2 \leqslant x_2$ e assim por diante, de forma que ξ_i seja o ponto escolhido em $[x_{i-1}, x_i]$ e $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$. Formamos, então, a soma

$$f(\xi_1)\,\Delta_1 x + f(\xi_2)\,\Delta_2 x + \ldots + f(\xi_i)\,\Delta_i x + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta_n x$$

ou

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

Tal soma é denominada **soma de Riemann**, assim chamada pelo matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866).

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Suponha que $f(x) = 10 - x^2$, com $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 3$. Vamos achar a soma de Riemann para a função f em $[\frac{1}{4}, 3]$ para a partição Δ: $x_0 = \frac{1}{4}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1\frac{1}{2}$, $x_3 = 1\frac{3}{4}$, $x_4 = 2\frac{1}{4}$, $x_5 = 3$ e $\xi_1 = \frac{1}{2}$, $\xi_2 = 1\frac{1}{4}$, $\xi_3 = 1\frac{3}{4}$, $\xi_4 = 2$, $\xi_5 = 2\frac{3}{4}$.

A Figura 2 mostra um esboço do gráfico de f em $[\frac{1}{4}, 3]$ e os cinco retângulos cujas áreas são os termos da soma de Riemann.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\,\Delta_i x &= f(\xi_1)\,\Delta_1 x + f(\xi_2)\,\Delta_2 x + f(\xi_3)\,\Delta_3 x + f(\xi_4)\,\Delta_4 x + f(\xi_5)\,\Delta_5 x\\ &= f(\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{5}{4})(1\tfrac{1}{2}-1) + f(\tfrac{7}{4})(1\tfrac{3}{4}-1\tfrac{1}{2}) + f(2)(2\tfrac{1}{4}-1\tfrac{3}{4}) + f(\tfrac{11}{4})(3-2\tfrac{1}{4})\\ &= (9\tfrac{3}{4})(\tfrac{3}{4}) + (8\tfrac{7}{16})(\tfrac{1}{2}) + (6\tfrac{15}{16})(\tfrac{1}{4}) + (6)(\tfrac{1}{2}) + (2\tfrac{7}{16})(\tfrac{3}{4})\\ &= 18\tfrac{3}{32}\end{aligned}$$

A norma de Δ é o comprimento do maior subintervalo. Logo $\|\Delta\| = \frac{3}{4}$. ◀

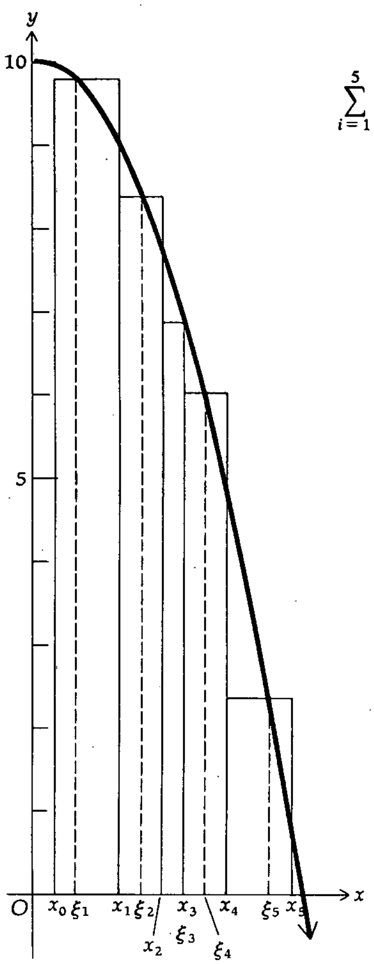


FIGURA 2

Como os valores funcionais $f(x)$ não estão restritos aos valores não-negativos, alguns dos $f(\xi_i)$ podem ser negativos. Em tal caso, a interpretação geométrica da soma de Riemann é a soma das medidas das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x com os negativos das medidas das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x. Essa situação está ilustrada na Figura 3. Aqui

$$\sum_{i=1}^{10} f(\xi_i)\,\Delta_i x = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + A_6 + A_7 - A_8 - A_9 - A_{10}$$

pois $f(\xi_3)$, $f(\xi_4)$, $f(\xi_5)$, $f(\xi_8)$, $f(\xi_9)$ e $f(\xi_{10})$ são números negativos.

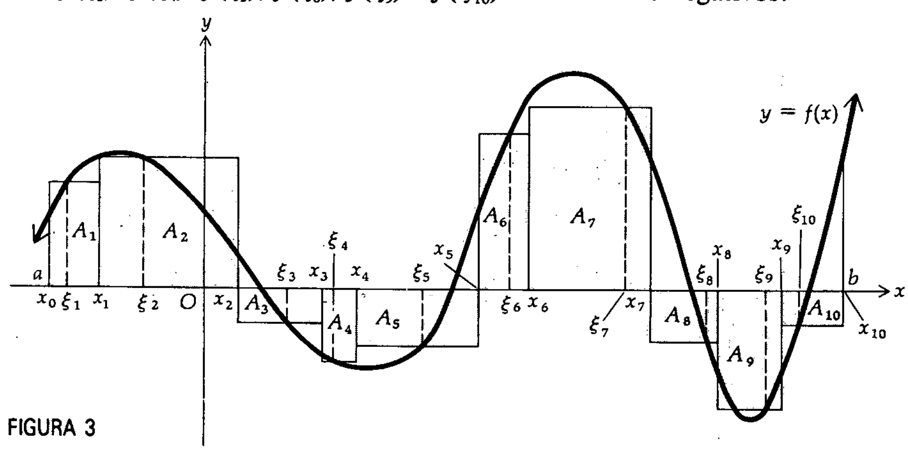


FIGURA 3

Seja f uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a, b]$. Suponha que exista um número L tal que $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x - L\right|$ possa ser tão pequeno quanto desejarmos para todas as partições Δ que tenham normas suficientemente pequenas, e para qualquer ξ_i, no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Neste caso, f é chamada de *integrável* em $[a, b]$.

5.5.1 DEFINIÇÃO Seja f uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a, b]$. Então, f será **integrável** em $[a, b]$ se existir um número L satisfazendo a seguinte condição: para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que toda partição Δ para a qual $\|\Delta\| < \delta$, com ξ_i no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, temos

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x - L\right| < \epsilon \tag{2}$$

Nessas condições, escrevemos

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x = L \tag{3}$$

Essa definição estabelece que, para uma dada função f definida no intervalo fechado $[a, b]$, podemos tornar os valores das somas de Riemann tão próximos de L quanto desejarmos, tomando as normas $\|\Delta\|$ de todas as partições Δ de $[a, b]$ suficientemente pequenas para todas as escolhas possíveis dos números ξ_i para os quais $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

O processo de limite dado por (3) é diferente daquele que foi discutido no Capítulo 2. Na Definição 5.5.1, o número L em (3) existe se para todo $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que para toda partição Δ com $\|\Delta\| < \delta$ e para todo ξ_i no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, então a desigualdade (2) será válida.

Na Definição 2.1.1 tínhamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{4}$$

se para todo $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon.$$

No processo de limite (3) para um dado $\delta > 0$, existe uma infinidade de partições Δ com norma $\|\Delta\| < \delta$. Isto é análogo ao fato de que no processo de limite (4), para um dado $\delta > 0$, existe uma infinidade de valores de x para os quais $0 < |x - a| < \delta$. Mas, no processo de limite (3), para cada partição Δ existe uma infinidade de escolhas de ξ_i. É nesse aspecto que os dois processos de limite diferem.

O Teorema 2.1.2, provado na Secção Suplementar 2.9, estabelece que se o número L no processo de limite (4) existir, então será único. De modo similar, podemos mostrar que se existir um número L satisfazendo a Definição 5.5.1, então ele será único. Agora podemos definir a *integral definida*.

5.5.2 DEFINIÇÃO Se f for uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$, então a **integral definida** de f de a até b, denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$, será dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x \tag{5}$$

se o limite existir.

Note que a afirmação "a função f é integrável no intervalo fechado $[a, b]$" é sinônima da afirmação "a integral definida de f de a até b existe".

Na notação de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ é chamada de **integrando**, a de **limite inferior** e b de **limite superior**. O símbolo $\int$ é chamado de **sinal de de integração.** O sinal de integração lembra um S maiúsculo, o que é apropriado, pois a integral definida é o limite de uma soma. O símbolo é o mesmo que foi usado para indicar a operação de antidiferenciação. A razão para o emprego do mesmo símbolo encontra-se no Teorema 5.8.2, chamado de segundo teorema fundamental do Cálculo, que possibilita calcular a integral definida através da determinação de uma antiderivada (também chamada de **integral indefinida**).

A seguinte questão surge agora: sob que condições existe um número L satisfazendo a Definição 5.5.2, ou seja, sob que condições uma função é integrável? Uma resposta a essa questão é dada pelo próximo teorema.

5.5.3 TEOREMA Se uma função for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então ela será integrável em $[a, b]$.

A demonstração desse teorema foge ao contexto deste livro, sendo encontrada em qualquer texto de Cálculo Avançado. A condição de que f seja contínua em $[a, b]$, apesar de ser suficiente para garantir a integrabilidade de f em $[a, b]$, não é necessária à existência de $\int_a^b f(x)\,dx$. Isto é, se f for contínua em $[a, b]$, então o Teorema 5.5.3 irá nos assegurar de que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe; contudo, há funções que são descontínuas, embora sejam integráveis em um intervalo fechado. Tal função é dada no Exemplo 2, no final desta secção.

No começo desta secção estabelecemos que o limite usado na Definição 5.4.8 para definir a medida da área de uma região é um caso particular do limite usado na Definição 5.5.2, para definir a integral definida. Na discussão sobre área, o intervalo $[a, b]$ foi dividido em n subintervalos de igual comprimento. Tal partição do intervalo $[a, b]$ é chamada de **partição regular**. Se Δx for o comprimento de cada subintervalo em uma partição regular, então cada $\Delta_i x = \Delta x$ e a norma da partição será Δx. Fazendo essas substituições em (5), temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x \tag{6}$$

Além disso,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad n = \frac{b-a}{\Delta x}$$

Assim,

$$\lim_{n \to +\infty} \Delta x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x \to 0} n = +\infty$$

A razão de $\lim_{\Delta x \to 0} n = +\infty$ é que $b > a$ e Δx tende a zero através de valores positivos (pois $\Delta x > 0$). Desses limites concluímos que

$$\Delta x \to 0 \quad \text{é equivalente a} \quad n \to +\infty$$

Assim, temos da expressão em (6) e dessa afirmativa

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x \tag{7}$$

Deve ser lembrado que ξ_i pode ser qualquer ponto no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Comparando o limite usado na Definição 5.4.8, que dá a medida da área de uma região, com o limite do segundo membro de (7), temos no primeiro caso

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \tag{8}$$

onde $f(c_i)$ é o valor funcional mínimo absoluto em $[x_{i-1}, x_i]$. No segundo caso, temos

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x \tag{9}$$

onde ξ_i é qualquer número em $[x_{i-1}, x_i]$.

Como a função f é contínua em $[a, b]$, pelo Teorema 5.5.3, $\int_a^b f(x)\,dx$ existe; logo, essa integral definida é o limite de todas as somas de Riemann de f em $[a, b]$, inclusive aquelas que aparecem em (8) e (9). Por causa disso, vamos redefinir a área de uma região de uma forma mais geral.

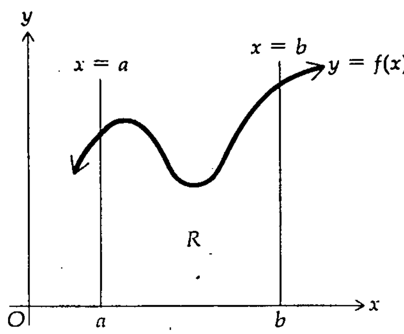


FIGURA 4

5.5.4 DEFINIÇÃO Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Então, a medida A da área da região R é dada por

$$A = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

$$\Leftrightarrow A = \int_a^b f(x)\, dx$$

Essa definição estabelece que se $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$, a integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ poderá ser interpretada geometricamente como a medida da área da região R mostrada na Figura 4.

A relação (7) pode ser usada para encontrarmos o valor exato de uma integral definida, conforme é ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 1 Ache o valor exato da integral definida $\int_1^3 x^2\, dx$. Interprete geometricamente o resultado.

Solução Considere uma partição regular do intervalo fechado $[1, 3]$ em n subintervalos. Então $\Delta x = 2/n$.

Se escolhermos ξ_i como o extremo direito de cada subintervalo, teremos:

$$\xi_1 = 1 + \frac{2}{n}, \xi_2 = 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right), \xi_3 = 1 + 3\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, \xi_i = 1 + i\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, \xi_n = 1 + n\left(\frac{2}{n}\right)$$

Como $f(x) = x^2$,

$$f(\xi_i) = \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2 = \left(\frac{n + 2i}{n}\right)^2$$

Logo, usando (7) e aplicando os teoremas da Secção 5.4, teremos

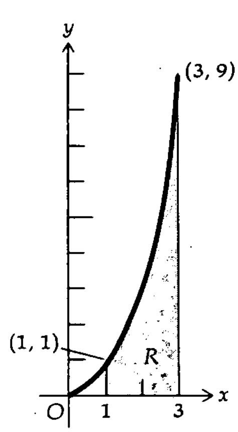


FIGURA 5

$$\begin{aligned}
\int_1^3 x^2\, dx &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n + 2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (n^2 + 4ni + 4i^2) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^3}\left[n^2 \sum_{i=1}^{n} 1 + 4n \sum_{i=1}^{n} i + 4 \sum_{i=1}^{n} i^2\right] \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^3}\left[n^2 n + 4n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^3}\left[n^3 + 2n^3 + 2n^2 + \frac{2n(2n^2 + 3n + 1)}{3}\right] \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left[6 + \frac{4}{n} + \frac{8n^2 + 12n + 4}{3n^2}\right]
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[6 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right]$$
$$= 6 + 0 + \tfrac{8}{3} + 0 + 0$$
$$= \tfrac{26}{3}$$

Vamos interpretar geometricamente o resultado. Como $x^2 \geqslant 0$ para todo x em $[1, 3]$, a região limitada pela curva $y = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 3$ tem $\frac{26}{3}$ unidades quadradas de área.(*) A região está mostrada na Figura 5.

Na Definição 5.5.2 o intervalo fechado $[a, b]$ é dado e assim supomos que $a < b$. Para considerar a integral definida de uma função f de a até b onde $a > b$ ou $a = b$, temos as definições a seguir.

5.5.5 DEFINIÇÃO Se $a > b$, então

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

se $\int_b^a f(x)dx$ existir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** No Exemplo 1 mostramos que $\int_1^3 x^2\,dx = \frac{26}{3}$. Logo, da Definição 5.5.5,

$$\int_3^1 x^2\,dx = -\int_1^3 x^2\,dx = -\tfrac{26}{3}$$ ◀

5.5.6 DEFINIÇÃO Se $f(a)$ existe, então

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Da definição 5.5.6,

$$\int_1^1 x^2\,dx = 0$$ ◀

Como afirmamos anteriormente, uma função pode ser integrável em um intervalo fechado, apesar de ser descontínua nele. Tal situação ocorre no exemplo a seguir.

EXEMPLO 2 Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Seja $[a, b]$ qualquer intervalo para o qual $a < 0 < b$. Mostre que f é descontínua em $[a, b]$ e, ainda assim, integrável em $[a, b]$.

Solução Como $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, mas $f(0) = 1$, f é descontínua em 0 e, portanto, descontínua em $[a, b]$.

---

* **N. do T.:** As unidades de área são unidades de comprimento ao quadrado e, por isso, são também chamadas de unidades quadradas.

Para provar que f é integrável em $[a, b]$, vamos mostrar que a Definição 5.5.1 está satisfeita. Consideremos as somas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)\, \Delta_i x$$

Se nenhum dos números $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ for nulo, então a soma de Riemann será zero. Vamos supor que $\xi_j = 0$. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x = 1 \cdot \Delta_j x$$

Em qualquer um dos casos,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x \right| \leqslant \|\Delta\|$$

Logo,

$$\text{se } \|\Delta\| < \epsilon \quad \text{então} \quad \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x - 0 \right| < \epsilon$$

Comparando o resultado acima com a Definição 5.5.1 onde $\delta = \epsilon$ e $L = 0$, vemos que f é integrável em $[a, b]$.

Observe que a função f do Exemplo 2 tem um número finito (somente 1) de descontinuidades em $[a, b]$ e $|f(x)| \leqslant 1$ para todo x em $[a, b]$. Essa função f pertence ao conjunto das funções que são integráveis em um intervalo fechado. Outras três funções desse conjunto estão nos Exercícios 36 - 38.

EXERCÍCIOS 5.5

Nos Exercícios de 1 a 9, ache a soma de Reimann para a função no intervalo, usando a partição Δ dada e os valores de ξ_i dados. Faça um esboço do gráfico da função no intervalo dado e mostre os retângulos cujas medidas de área são os termos da soma de Riemann. (Veja a Ilustração 1 e 2 Figura 2.)

1. $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 3$; para Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1\frac{1}{4}$, $x_3 = 2\frac{1}{4}$, $x_4 = 3$; $\xi_1 = \frac{1}{4}$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 1\frac{1}{2}$, $\xi_4 = 2\frac{1}{2}$
2. $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 3$; para Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = 1\frac{1}{4}$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2\frac{3}{4}$, $x_5 = 3$; $\xi_1 = \frac{1}{2}$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 1\frac{3}{4}$, $\xi_4 = 2\frac{1}{4}$, $\xi_5 = 2\frac{3}{4}$
3. $f(x) = 1/x$, $1 \leqslant x \leqslant 3$; para Δ: $x_0 = 1$, $x_1 = 1\frac{2}{3}$, $x_2 = 2\frac{1}{4}$, $x_3 = 2\frac{2}{3}$, $x_4 = 3$; $\xi_1 = 1\frac{1}{4}$, $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 2\frac{1}{2}$, $\xi_4 = 2\frac{3}{4}$
4. $f(x) = x^3$, $-1 \leqslant x \leqslant 2$; para Δ: $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1\frac{1}{4}$, $x_5 = 2$; $\xi_1 = -\frac{1}{2}$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = \frac{2}{3}$, $\xi_4 = 1$, $\xi_5 = 1\frac{1}{2}$
5. $f(x) = x^2 - x + 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; para Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 0{,}7$, $x_4 = 1$; $\xi_1 = 0{,}1$, $\xi_2 = 0{,}4$, $\xi_3 = 0{,}6$, $\xi_4 = 0{,}9$
6. $f(x) = 1/(x + 2)$, $-1 \leqslant x \leqslant 3$; para Δ: $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 1\frac{1}{4}$, $x_5 = 2$, $x_6 = 2\frac{1}{4}$, $x_7 = 2\frac{3}{4}$, $x_8 = 3$; $\xi_1 = -\frac{3}{4}$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = \frac{1}{4}$, $\xi_4 = 1$, $\xi_5 = 1\frac{1}{2}$, $\xi_6 = 2$, $\xi_7 = 2\frac{1}{2}$, $\xi_8 = 3$
7. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; para Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}\pi$, $x_2 = \frac{1}{2}\pi$, $x_3 = \frac{2}{3}\pi$, $x_4 = \frac{3}{4}\pi$, $x_5 = \pi$; $\xi_1 = \frac{1}{6}\pi$, $\xi_2 = \frac{1}{3}\pi$, $\xi_3 = \frac{1}{2}\pi$, $\xi_4 = \frac{3}{4}\pi$, $\xi_5 = \frac{5}{6}\pi$.
8. $f(x) = 3 \cos \frac{1}{2}x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$; para Δ: $x_0 = -\pi$, $x_1 = -\frac{1}{2}\pi$, $x_2 = -\frac{1}{3}\pi$, $x_3 = \frac{1}{3}\pi$, $x_4 = \frac{7}{12}\pi$, $x_5 = \pi$; $\xi_1 = -\frac{2}{3}\pi$, $\xi_2 = -\frac{1}{3}\pi$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = \frac{1}{2}\pi$, $\xi_5 = \frac{2}{3}\pi$
9. $f(x) = [\![x]\!] + 2$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$; para Δ: $x_0 = -3$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$; $\xi_1 = -2{,}5$, $\xi_2 = -0{,}5$, $\xi_3 = 1$, $\xi_4 = 2{,}5$

Nos Exercícios de 10 a 18, ache o valor exato da integral definida. Use o método do Exemplo 1 desta secção.

10. $\int_2^7 3x\, dx$
11. $\int_0^2 x^2\, dx$
12. $\int_2^4 x^2\, dx$
13. $\int_1^2 x^3\, dx$
14. $\int_0^5 (x^3 - 1)\, dx$
15. $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5)\, dx$
16. $\int_0^4 (x^2 + x - 6)\, dx$
17. $\int_{-2}^2 (x^3 + 1)\, dx$
18. $\int_{-2}^1 x^4\, dx$

Nos Exercícios de 19 a 28, ache a área exata da região da seguinte forma: (a) expresse a medida da área como o limite de uma soma de Riemann com partições regulares, (b) expresse esse li-

mite com a notação de integral definida; (c) calcule a integral definida pelo método desta secção e faça uma escolha adequada de ξ_i. Desenhe uma figura mostrando a região.

19. Limitada pela reta $y = 2x - 1$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 5$.
20. Limitada pela reta $y = 2x - 6$, pelo eixo x e pelas retas $x = 4$ e $x = 7$.
21. Limitada pela reta $y = -3x + 2$, pelo eixo x e pelas retas $x = -5$ e $x = -1$.
22. Limitada pela reta $y = 3x + 2$, pelo eixo x e pelas retas $x = -4$ e $x = -1$.
23. Limitada pela curva $y = 4 - x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 2$.
24. Limitada pela curva $y = (x + 3)^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = -3$ e $x = 0$.
25. Limitada pela curva $y = 12 - x - x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = -3$ e $x = 2$.
26. Limitada pela curva $y = 10 + x - x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = -2$ e $x = 3$.
27. Limitada pela curva $y = x^3 - 4$, pelo eixo x e pelas retas $x = -2$ e $x = -1$.
28. Limitada pela curva $y = 6x + x^2 - x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 3$.

Nos Exercícios de 29 a 32, dê o valor aproximado da integral definida, usando uma calculadora para determinar, até quatro casas decimais, a soma de Riemann correspondente, com uma partição regular de n subintervalos e ξ_i como o extremo esquerdo ou direito (conforme estiver indicado) de cada subintervalo.

29. $\int_2^5 \frac{1}{x^2}\,dx$, $n = 9$, ξ_i é o extremo direito.
30. $\int_3^4 \frac{1}{x}\,dx$, $n = 10$, ξ_i é o extremo esquerdo.
31. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x\,dx$, $n = 8$, ξ_i é o extremo esquerdo.
32. $\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg} x\,dx$, $n = 6$, ξ_i é o extremo direito.
33. Expresse como uma integral definida: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^3}$. (*Sugestão*: considere a função f para a qual $f(x) = x^2$.)
34. Expresse como uma integral definida: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$. (*Sugestão*: considere a função f para a qual $f(x) = \frac{1}{x}$ em $[1, 2]$.)
35. Expresse como uma integral definida: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n}{(i+n)^2}$. (*Sugestão*: considere a função f para a qual $f(x) = \frac{1}{x^2}$ em $[1, 2]$.)
36. Seja $[a, b]$ qualquer intervalo tal que $a < 0 < b$. Prove que mesmo que a função escada unitária (Exercício 24 nos Exercícios 2.3) seja descontínua em $[a, b]$, ela será integrável nesse intervalo e $\int_a^b u(x)dx = b$.
37. Prove que a função sinal é descontínua em $[-1, 1]$ e mesmo assim é integrável nesse intervalo. Mostre também que $\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\,dx = 0$.
38. Prove que a função maior inteiro é descontínua em $[0, \frac{3}{2}]$ e mesmo assim é integrável nesse intervalo. Mostre também que $\int_0^{3/2} [\![x]\!]\,dx = \frac{1}{2}$.

5.6 PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA

O cálculo de uma integral definida a partir da definição, determinando realmente o limite de uma soma conforme fizemos na Secção 5.5, em geral é muito trabalhoso e, freqüentemente, impossível. Para estabelecer um método mais simples, precisamos desenvolver antes algumas propriedades da integral definida. Em primeiro lugar precisamos dos teoremas a seguir, sobre as somas de Riemann.

5.6.1 TEOREMA Se Δ for qualquer partição do intervalo fechado $[a, b]$, então

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b - a$$

Prova

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \Delta_i x - (b-a) &= (b-a) - (b-a)\\ &= 0\end{aligned}$$

Logo, para todo $\epsilon > 0$, qualquer escolha de $\delta > 0$ garante que

$$\text{se } \|\Delta\| < \delta \text{ então } \left|\sum_{i=1}^{n} \Delta_i x - (b-a)\right| < \epsilon$$

Assim, pela Definição 5.5.1.

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b - a$$ ■

5.6.2 TEOREMA Se f for definida no intervalo fechado $[a, b]$, e se

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

existe, onde Δ é qualquer partição de $[a, b]$, então se k for uma constante qualquer,

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\, \Delta_i x = k \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

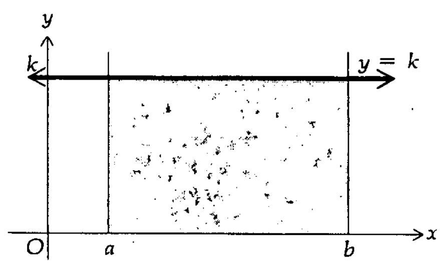


FIGURA 1

A demonstração desse teorema será deixada como exercício (veja o Exercício 43).

► **ILUSTRAÇÃO 1** Consulte a Figura 1. Se $k > 0$, a integral definida $\int_a^b k\, dx$ dará a medida da área da região sombreada, que é um retângulo cujas dimensões são k unidades e $(b - a)$ unidades. Este fato é uma interpretação geométrica do teorema a seguir, quando $k > 0$. ◄

5.6.3 TEOREMA Se k for qualquer constante, então

$$\int_a^b k\, dx = k(b - a)$$

Prova Pela Definição 5.5.2,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

Se $f(x) = k$ para todo x em $[a, b]$, temos dessa equação

$$\int_a^b k\, dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\, \Delta_i x$$

$$= k \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x \qquad \text{(pelo Teorema 5.6.2)}$$

$$= k(b - a) \qquad \text{(pelo Teorema 5.6.1)}$$ ■

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int_{-3}^{5} 4\, dx$$

Solução Aplicamos o Teorema 5.6.3.

$$\int_{-3}^{5} 4\, dx = 4[5 - (-3)]$$
$$= 4(8)$$
$$= 32$$

5.6.4 TEOREMA Se a função f for integrável no intervalo fechado $[a, b]$ e se k for uma constante qualquer, então

$$\int_a^b kf(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$

Prova Como f é integrável em $[a, b]$, $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$ existe; assim, pelo Teorema 5.6.2,

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta_i x = k \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

Logo,

$$\int_a^b kf(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$

■

Note a semelhança entre o teorema a seguir e o Teorema 4 (2.2.4), relativo ao limite da soma de duas funções. Note também a semelhança entre as demonstrações de ambos os teoremas.

5.6.5 TEOREMA Se as funções f e g forem integráveis em $[a, b]$, então $f + g$ será integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

Prova As funções f e g são integráveis em $[a, b]$; seja então

$$\int_a^b f(x)\, dx = M \quad \text{e} \quad \int_a^b g(x)\, dx = N$$

Para provar que $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e que $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = M + N$, precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todas as partições Δ e para todo ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$, se $\|\Delta\| < \delta$, então

$$\left| \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\, \Delta_i x - (M + N) \right| < \epsilon$$

Como

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x \quad \text{e} \quad N = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x$$

segue que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ e um $\delta_2 > 0$ tais que para todas as partições Δ e para qualquer ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$ se $\|\Delta\| < \delta_1$ e $\|\Delta\| < \delta_2$, então

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x - M \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left| \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x - N \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Logo, se $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, então para qualquer $\epsilon > 0$, para todas as partições Δ e para qualquer ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$, se $\|\Delta\| < \delta$,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x - M \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x - N \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad (1)$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x - M \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x - N \right) \right|$$
$$\leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x - M \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x - N \right| \qquad (2)$$

Das desigualdades (1) e (2), temos

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta_i x\right) - (M + N)\right| < \epsilon \qquad (3)$$

Do Teorema 5.4.4,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta_i x = \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\,\Delta_i x$$

Assim, substituindo essa igualdade em (3) podemos concluir que para todo $\epsilon > 0$, para todas as partições Δ e para qualquer ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$, se $\|\Delta\| < \delta$ onde $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, então

$$\left|\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\,\Delta_i x - (M + N)\right| < \epsilon$$

Isso prova que $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e que

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

O sinal mais (+) do enunciado do Teorema 5.6.5 pode ser substituído por um sinal menos (−), como resultado da aplicação do Teorema 5.6.4, onde $k = -1$.

O Teorema 5.6.5 pode ser estendido a qualquer número de funções. Isto é, se as funções $f_1, f_2, \ldots, f_n$ forem todas integráveis em $[a, b]$, então $(f_1 \pm f_2 \pm \ldots \pm f_n)$ será integrável em $[a, b]$ e

$$\boxed{\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)\,dx}$$

EXEMPLO 2 Use o resultado do Exemplo 1, Secção 5.5 e o fato de que $\int_1^3 x\,dx = 4$ para calcular $\int_1^3 (3x^2 - 5x + 2)\,dx$.

Solução No Exemplo 1, Secção 5.5, tínhamos o resultado

$$\int_1^3 x^2\,dx = \tfrac{26}{3}$$

Das propriedades da integral definida,

$$\begin{aligned}\int_1^3 (3x^2 - 5x + 2)\,dx &= \int_1^3 3x^2\,dx - \int_1^3 5x\,dx + \int_1^3 2\,dx \\ &= 3\int_1^3 x^2\,dx - 5\int_1^3 x\,dx + 2(3-1) \\ &= 3(\tfrac{26}{3}) - 5(4) + 4 \\ &= 26 - 20 + 4 \\ &= 10\end{aligned}$$

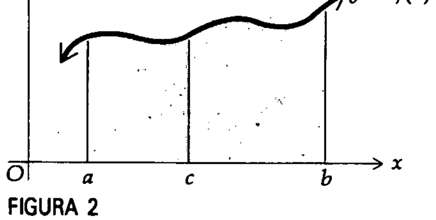


FIGURA 2

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Uma interpretação geométrica do Teorema 5.6.6, a seguir é mostrada na Figura 2, onde $f(x) \geqslant 0$. Para todo x em $[a, b]$, a medida da área da região limitada pela curva $y = f(x)$ e o eixo x de a até b é igual à soma das medidas das áreas das regiões de a até c e de c até b. ◀

5.6.6 TEOREMA Se a função f for integrável nos intervalos fechados $[a, b]$, $[a, c]$ e $[c, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

onde $a < c < b$.

Prova Seja Δ uma partição de $[a, b]$. Vamos formar a partição Δ' de $[a, b]$ como segue. Se c for um dos pontos da partição Δ (isto é, $c = x_i$ para algum i), então Δ' será igual a Δ. Se c não for um dos pontos da partição Δ, mas estiver contido no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, então a partição Δ' terá como pontos todos os pontos da partição Δ e mais o ponto c. Logo, os subintervalos da partição Δ' serão os mesmos de Δ, com exceção do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de Δ que fica dividido em $[x_{i-1}, c]$ e $[c, x_i]$.

Se $\|\Delta'\|$ for a norma de Δ' e se $\|\Delta\|$ for a norma de Δ, então

$$\|\Delta'\| \leqslant \|\Delta\|$$

Se na partição Δ' o intervalo $[a, c]$ for dividido em r subintervalos e o intervalo $[c, b]$ for dividido em $(n - r)$ subintervalos, então a parte da partição Δ' de a até c dará uma soma de Riemann da forma

$$\sum_{i=1}^{r} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

e a outra parte da partição Δ', de c até b, dá a soma de Riemann da forma

$$\sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

Usando a definição de integral definida e as propriedades da somatória, temos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x \\ &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \left[\sum_{i=1}^{r} f(\xi_i)\,\Delta_i x + \sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x\right] \\ &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{r} f(\xi_i)\,\Delta_i x + \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x\end{aligned}$$

Como $0 < \|\Delta'\| \leqslant \|\Delta\|$, podemos substituir $\|\Delta\| \to 0$ por $\|\Delta'\| \to 0$, dando

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta'\|\to 0} \sum_{i=1}^{r} f(\xi_i)\,\Delta_i x + \lim_{\|\Delta'\|\to 0} \sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

Aplicando a definição de integral definida ao segundo membro da expressão acima, teremos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

O resultado do Teorema 5.6.6 é verdadeiro para qualquer ordenação dos números a, b e c. Isto será enunciado como um outro teorema.

5.6.7 TEOREMA Se f for integrável num intervalo fechado contendo os números a, b e c, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{4}$$

não importando a ordem de a, b e c.

Prova Se a, b e c forem distintos, existirão seis maneiras possíveis de ordenação desses números: $a < b < c$, $a < c < b$, $b < a < c$, $b < c < a$, $c < a < b$, e $c < b < a$. A segunda ordem, $a < c < b$, é o Teorema 5.6.6. Vamos usá-lo para provar que (4) é válida para outras ordenações.

Suponha que $a < b < c$; então, do Teorema 5.6.6, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \tag{5}$$

Da Definição 5.5.5,

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx$$

Substituindo-a em (5), obtemos

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Assim,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

que é o resultado desejado.

As demonstrações para as quatro outras ordenações são semelhantes e serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios de 44 a 47).

Há também a possibilidade de que dois dos três números sejam iguais; por exemplo, $a = c < b$. Então

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx &= \int_a^a f(x)\,dx \\ &= 0 \quad \text{(pela Definição 5.5.6)}\end{aligned}$$

Também, como $a = c$,

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Logo,

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = 0 + \int_a^b f(x)\,dx$$

que é o resultado desejado. ■

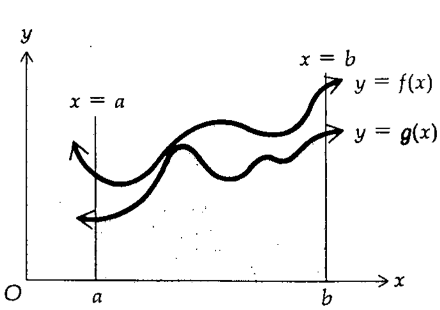


FIGURA 3

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Na Figura 3, $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. A integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ dá a medida da área da região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$; $\int_a^b g(x)\,dx$ dá a medida da área da região limitada pela curva $y = g(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Na figura, vemos que a primeira área é maior do que a segunda. Temos a interpretação geométrica do teorema a seguir, quando $f(x)$ e $g(x)$ são não-negativas em $[a, b]$.

5.6.8 TEOREMA Se as funções f e g forem integráveis no intervalo fechado $[a, b]$ e se $f(x) \geqslant g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant \int_a^b g(x)\, dx$$

Prova Como f e g são integráveis em $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\, dx$ e $\int_a^b g(x)\, dx$, ambas existem. Logo,

$$\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b [-g(x)]\, dx \quad \text{(pelo Teorema 5.6.4)}$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \qquad \text{(pelo Teorema 5.6.5)}$$

Seja h a função definida por

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Então $h(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$, pois $f(x) \geqslant g(x)$ para todo x em $[a, b]$.

Queremos provar que $\int_a^b h(x) \geqslant 0$. Como

$$\int_a^b h(x)\, dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\, \Delta_i x$$

vamos supor que

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\, \Delta_i x = L < 0 \tag{6}$$

Então, pela Definição 5.5.1, com $\epsilon = -L$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } \|\Delta\| < \delta, \text{ então } \left| \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\, \Delta_i x - L \right| < -L \tag{7}$$

Mas como

$$\sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\, \Delta_i x - L \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\, \Delta_i x - L \right|$$

de (7), temos que

$$\text{se } \|\Delta\| < \delta, \text{ então } \sum_{=1}^{n} h(\xi_i)\, \Delta_i x - L < -L$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{se } \|\Delta\| < \delta, \text{ então } \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\, \Delta_i x < 0$$

Mas essa afirmativa é impossível, pois $h(\xi_i)$ é sempre não-negativo e $\Delta_i x > 0$; assim, temos uma contradição à nossa hipótese (6). Assim sendo, (6) é falsa e

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\, \Delta_i x \geqslant 0$$

$$\int_a^b h(x) \geqslant 0$$

Como $h(x) = f(x) - g(x)$, segue que

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \geqslant 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

■

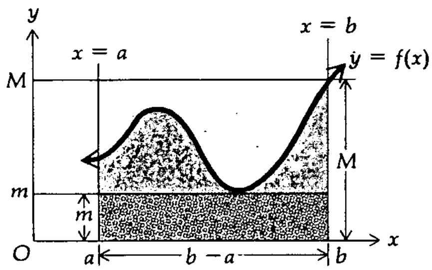


FIGURA 4

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Na Figura 4, $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$, m e M são, respectivamente, os valores mínimo e máximo absolutos de f em $[a, b]$. A integral $\int_a^b f(x)\,dx$ dá a medida da área da região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Essa área é maior do que a do retângulo, cujas dimensões são m e $(b - a)$ e menor do que a do retângulo cujas dimensões são M e $(b - a)$. Assim, temos a interpretação geométrica do próximo teorema se $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. ◀

5.6.9 TEOREMA Vamos supor que a função f seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se m e M forem, respectivamente, os valores mínimo e máximo absolutos de f em $[a, b]$, ou seja

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad \text{para } a \leqslant x \leqslant b$$

então,

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$

Prova Como f é contínua em $[a, b]$, o teorema do valor extremo garante a existência de m e de M.

Pelo Teorema 5.6.3,

$$\int_a^b m\,dx = m(b - a) \tag{8}$$

e

$$\int_a^b M\,dx = M(b - a) \tag{9}$$

Como f é contínua em $[a, b]$, segue do Teorema 5.5.3 que f é integrável em $[a, b]$. Então, como $f(x) \geqslant m$ para todo x em $[a, b]$, temos do Teorema 5.6.8

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b m\,dx$$

e de (8), segue que

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant m(b - a) \tag{10}$$

Da mesma forma, como $M \geqslant f(x)$ para todo x em $[a, b]$, segue do Teorema 5.6.8 que

$$\int_a^b M\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx$$

e de (9), segue que

$$M(b-a) \geqslant \int_a^b f(x)\,dx$$

Combinando essa desigualdade com (10), temos

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a) \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 3 Aplique o Teorema 5.6.9 para encontrar um intervalo fechado contendo o valor de $\int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx$. Use os resultados do Exemplo 1, Secção 4.4.

Solução Se

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

do Exemplo 1, Secção 4.4, f tem um valor mínimo relativo de 1 em $x = 3$ e um valor máximo relativo de 5 em $x = 1$. $f(\frac{1}{2}) = \frac{33}{8}$ e $f(4) = 5$. Logo, o valor mínimo de f em $[\frac{1}{2}, 4]$ é 1 e o valor máximo é 5. Tomando $m = 1$ e $M = 5$ no Teorema 5.6.9, segue que

$$1(4-\tfrac{1}{2}) \leqslant \int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx \leqslant 5(4-\tfrac{1}{2})$$

$$\tfrac{7}{2} \leqslant \int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx \leqslant \tfrac{35}{2}$$

Logo, o intervalo fechado $[\frac{7}{2}, \frac{35}{2}]$ contém os valores da integral definida. No Exemplo 2, Secção 5.8, mostramos que o valor exato da integral definida é $\frac{679}{64}$.

EXEMPLO 4 Aplique o Teorema 5.6.9 para encontrar um intervalo fechado contendo o valor de $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$.

Solução Se $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, então

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

Para x em $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, $f'(x) = 0$ se $x = \frac{\pi}{2}$. Como $f'(x) > 0$ quando $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ e $f'(x) < 0$ quando $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, segue que f tem um valor máximo relativo em $\frac{\pi}{2}$, e $f(\frac{\pi}{2}) = 1$. Além disso, $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}/\sqrt{2} \approx 0{,}841$ e $f(\frac{3\pi}{4}) \approx 0{,}841$. Assim, em $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ o valor mínimo absoluto de f é 0,841 e o valor máximo absoluto é 1. Assim, com $m = 0{,}841$ e $M = 1$ no Teorema 5.6.9,

$$0{,}841[\tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{1}{4}\pi] \leqslant \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx \leqslant 1[\tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{1}{4}\pi]$$

$$0{,}420\pi \leqslant \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx \leqslant 0{,}5\pi$$

$$1{,}32 \leqslant \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx \leqslant 1{,}57$$

O valor da integral definida está, portanto, no intervalo fechado [1,32, 1,57].

EXERCÍCIOS 5.6

Nos Exercícios de 1 a 6, calcule a integral definida.

1. $\int_2^5 4\,dx$ **2.** $\int_{-3}^4 7\,dx$ **3.** $\int_{-2}^2 \sqrt{5}\,dx$

4. $\int_5^{-1} 6\,dx$ **5.** $\int_{-5}^{-10} dx$ **6.** $\int_3^3 dx$

Nos Exercícios de 7 a 18, calcule a integral definida usando os resultados:

$$\int_{-1}^2 x^2\,dx = 3 \qquad \int_{-1}^2 x\,dx = \tfrac{3}{2} \qquad \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = 2$$

$$\int_0^\pi \cos x\,dx = 0 \qquad \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\pi$$

7. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 4x + 5)\,dx$ **8.** $\int_{-1}^2 (8 - x^2)\,dx$

9. $\int_{-1}^2 (2 - 5x + \frac{1}{2}x^2)\,dx$ **10.** $\int_{-1}^2 (3x^2 - 4x - 1)\,dx$

11. $\int_2^{-1} (2x + 1)^2\,dx$ **12.** $\int_{-1}^2 (5x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2})\,dx$

13. $\int_{-1}^2 (x - 1)(2x + 3)\,dx$ **14.** $\int_2^{-1} 3x(x - 4)\,dx$

15. $\int_0^\pi (2\operatorname{sen} x + 3\cos x + 1)\,dx$ **16.** $\int_0^\pi 3\cos^2 x\,dx$

17. $\int_0^\pi (\cos x + 4)^2\,dx$ **18.** $\int_\pi^0 (\operatorname{sen} x - 2)^2\,dx$

Nos Exercícios de 19 a 34, aplique o Teorema 5.6.9 para encontrar um intervalo fechado contendo o valor da integral definida dada.

19. $\int_3^7 2x\,dx$ **20.** $\int_2^5 3x\,dx$ **21.** $\int_0^4 x^2\,dx$ **22.** $\int_{-2}^1 x^3\,dx$

23. $\int_{-3}^6 \sqrt{3 + x}\,dx$ **24.** $\int_{-2}^1 (x + 1)^{2/3}\,dx$

25. $\int_{-4}^0 (x^4 - 8x^2 + 16)\,dx$ **26.** $\int_{-1}^4 (x^4 - 8x^2 + 16)\,dx$

27. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{sen} x\,dx$ **28.** $\int_{-\pi/3}^{2\pi/3} \cos x\,dx$

29. $\int_1^4 |x - 2|\,dx$ **30.** $\int_{-1}^2 \sqrt{x^2 + 5}\,dx$

31. $\int_{-1}^2 \frac{x}{x + 2}\,dx$ **32.** $\int_{-5}^2 \frac{x + 5}{x - 3}\,dx$

33. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4\cos^3 x - 9\cos x)\,dx$ **34.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\operatorname{sen}^3 x\,dx$

Nos Exercícios de 35 a 38, use o Teorema 5.6.8 para determinar quais dos símbolos $\geqslant$ ou $\leqslant$ devem ser inseridos onde indicado.

35. $\int_{-1}^3 (2x^2 - 4)\,dx$ _____ $\int_{-1}^3 (x^2 - 6)\,dx$

36. $\int_4^5 \sqrt{6 - x}\,dx$ _____ $\int_4^5 \sqrt{x - 2}\,dx$

37. $\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \operatorname{sen}^2 x\,dx$ _____ $\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \cos^2 x\,dx$

38. $\int_0^{\pi/4} \cos x\,dx$ _____ $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x\,dx$

39. Mostre que se f for contínua em $[-3, 4]$, então

$$\int_3^{-1} f(x)\,dx + \int_4^3 f(x)\,dx + \int_{-3}^4 f(x)\,dx + \int_{-1}^{-3} f(x)\,dx = 0$$

40. Se f for contínua em $[-1, 2]$, então

$$\int_{-1}^2 f(x)\,dx + \int_2^0 f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{-1} f(x)\,dx = 0$$

41. Mostre que $\int_0^1 x\,dx \geqslant \int_0^1 x^2\,dx$, mas $\int_1^2 x\,dx \leqslant \int_1^2 x^2\,dx$, sem calcular as integrais definidas.

42. Se f for contínua em $[a, b]$, prove que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(*Sugestão*: $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.)

43. Prove o teorema 5.6.2.

Nos Exercícios de 44 a 49, prove que o Teorema 5.6.7 é válido para a ordenação dada de a, b e c; em cada caso, use o Teorema 5.6.6.

44. $b < a < c$ **45.** $b < c < a$ **46.** $c < a < b$

47. $c < b < a$ **48.** $a < c = b$ **49.** $a = b < c$

5.7 O TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

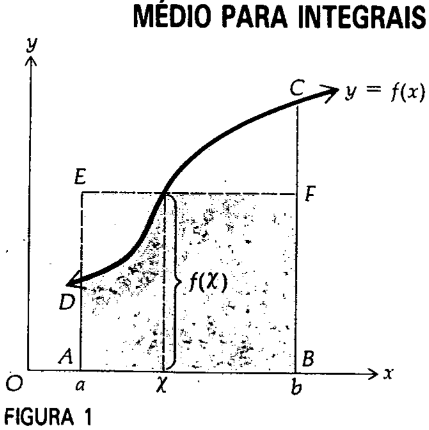


FIGURA 1

Continuaremos a tratar das propriedades da integral definida nesta secção, com o *teorema do valor médio para integrais*. Esse teorema é relevante na prova do primeiro teorema fundamental do Cálculo (Teorema 5.8.1), que é importante, pois leva-nos a um método para avaliar integrais definidas. Começamos com uma ilustração que dá uma interpretação geométrica do teorema do valor médio para integrais.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Considere $f(x) \geqslant 0$ para todos os valores de x em $[a, b]$. Então, $\int_a^b f(x)\,dx$ dá a medida da área da região limitada pela curva cuja equação é $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Veja a Figura 1. O teorema do valor médio para integrais estabelece que existe um número χ em $[a, b]$ tal que a área do retângulo $AEFB$ com altura $f(\chi)$ unidades e comprimento $(b - a)$ unidades seja igual à área da região $ADCB$. ◄

5.7.1 TEOREMA Teorema do Valor Médio para Integrais

Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, existe um número χ em $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\chi)(b - a)$$

Prova Como f é contínua em $[a, b]$, do teorema do valor extremo, f tem valores máximo e mínimo absolutos em $[a, b]$.

Seja m o valor mínimo absoluto ocorrendo em $x = x_m$. Assim,

$$f(x_m) = m \qquad a \leqslant x_m \leqslant b \tag{1}$$

Seja M o valor máximo absoluto ocorrendo em $x = x_M$. Assim,

$$f(x_M) = M \qquad a \leqslant x_M \leqslant b \tag{2}$$

Temos, então,

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad \text{para todo } x \text{ em } [a, b]$$

Do Teorema 5.6.9, segue que

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$

Dividindo por $(b - a)$ e observando que $b - a$ é positivo, pois $b > a$, obtemos

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} \leqslant M$$

Mas de (1) e (2), $m = f(x_m)$ e $M = f(x_M)$, assim temos

$$f(x_m) \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} \leqslant f(x_M)$$

Dessa igualdade e do teorema do valor médio existe algum número χ num intervalo fechado contendo x_m e x_M, tal que

$$f(\chi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(\chi)(b - a) \qquad a \leqslant \chi \leqslant b \qquad \blacksquare$$

O valor de χ no Teorema 5.7.1 não é necessariamente único. O teorema não dá um método para o cálculo de χ, mas estabelece que um valor de χ existe e esse fato é usado para provar outros teoremas. Em alguns casos podemos achar o valor de χ garantido pelo teorema, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 1 Ache o valor de χ tal que $\int_1^3 f(x)\,dx = f(\chi)(3 - 1)$ se $f(x) = x^2$. Use o resultado do Exemplo 1 da Secção 5.5.

Solução No Exemplo 1 da Secção 5.5, obtivemos

$$\int_1^3 x^2\,dx = \tfrac{26}{3}$$

Logo, queremos encontrar χ, tal que

$$f(\chi)\cdot(2) = \tfrac{26}{3}$$

Isto é,

$$\chi^2 = \tfrac{13}{3}$$

$$\chi = \pm\tfrac{1}{3}\sqrt{39}$$

Rejeitamos $-\frac{1}{3}\sqrt{39}$, pois não está no intervalo [1, 3], e temos

$$\int_1^3 f(x)\,dx = f(\tfrac{1}{3}\sqrt{39})(3-1)$$

O valor $f(\chi)$ dado pelo Teorema 5.7.1 é chamado de *valor médio* (ou *valor intermediário*) de f no intervalo $[a, b]$. É uma generalização da média aritmética de um conjunto finito de números. Isto é, se $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ for um conjunto de n números, então a média aritmética será dada por

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

Para generalizar essa definição, consideramos uma partição regular do intervalo fechado $[a, b]$, que é dividido em n subintervalos de igual comprimento $\Delta x = (b-a)/n$. Seja ξ_i qualquer ponto no i-ésimo subintervalo. Formamos a soma:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)}{n} \tag{3}$$

Esse quociente corresponde à média aritmética de n números. Como $\Delta x = (b-a)/n$, temos

$$n = \frac{b-a}{\Delta x} \tag{4}$$

Substituindo (4) em (3), obtemos

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)}{\dfrac{b-a}{\Delta x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x}{b-a}$$

Tomando o limite quando $n \to +\infty$ (ou $\Delta x \to 0$) temos, se o limite existir,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x}{b-a} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Isso nos leva à definição a seguir.

5.7.2 DEFINIÇÃO Se a função f for integrável no intervalo fechado $[a, b]$, o **valor médio** de f em $[a, b]$ será

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

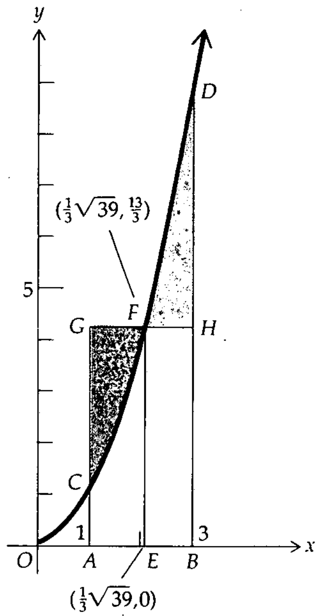


FIGURA 2

EXEMPLO 2 (a) Se $f(x) = x^2$, ache o valor médio de f no intervalo $[1, 3]$. (b) Interprete geometricamente o resultado da parte (a).

Solução

(a) No Exemplo 1, Secção 5.5, obtivemos

$$\int_1^3 x^2\, dx = \tfrac{26}{3}$$

Assim, se V.M. for o valor médio de f em $[1, 3]$, teremos

$$\text{V.M.} = \frac{\frac{26}{3}}{3 - 1} = \tfrac{13}{3}$$

(b) No Exemplo 1 encontramos para essa função

$$f(\tfrac{1}{3}\sqrt{39}) = \tfrac{13}{3}$$

Logo, o valor médio de f ocorre em $\frac{1}{3}\sqrt{39}$. Na Figura 2 há um esboço do gráfico de f em $[1, 3]$ e o segmento de reta do ponto $E(\frac{1}{3}\sqrt{39}, 0)$ sobre o eixo x ao ponto $F(\frac{1}{3}\sqrt{39}, \frac{13}{3})$ no gráfico de f. A área do retângulo *AGHB* tendo altura $\frac{13}{3}$ e comprimento 2 é igual à área da região *ACDB*. Conseqüentemente, a área da região sombreada *CGF* é igual à área da região sombreada *FDH*.

Uma aplicação do valor médio de uma função ocorre em Física e Engenharia, em conexão com o conceito de centro de massa. Esse assunto será discutido no Capítulo 6.

EXERCÍCIOS 5.7

Nos Exercícios de 1 a 8, ache o valor de χ que satisfaz o teorema do valor médio para integrais. Para os valores da integral definida, use o resultado do exercício indicado nos Exercícios 5.5. Faça uma figura ilustrando a aplicação do teorema.

1. $\int_0^2 x^2\, dx$; Exercício 11
2. $\int_2^4 x^2\, dx$; Exercício 12
3. $\int_1^2 x^3\, dx$; Exercício 13
4. $\int_0^5 (x^3 - 1)\, dx$; Exercício 14
5. $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5)\, dx$; Exercício 15
6. $\int_0^4 (x^2 + x - 6)\, dx$; Exercício 16
7. $\int_{-2}^2 (x^3 + 1)\, dx$; Exercício 17
8. $\int_{-2}^1 x^4\, dx$; Exercício 18

Nos Exercícios de 9 a 12, use o teorema do valor médio para integrais, para provar a desigualdade.

9. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4}\, dx \leqslant \frac{1}{2}$
10. $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{1}{x^2 + 6}\, dx \leqslant 1$
11. $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos x^2\, dx \leqslant \frac{\pi}{3}$
12. $\int_0^\pi \operatorname{sen}\sqrt{x}\, dx \leqslant \pi$

Nos Exercícios de 13 a 16, use o teorema do valor médio para integrais e o Teorema 5.6.8 para provar a desigualdade.

13. $\displaystyle 0 \leqslant \int_2^5 \frac{1}{x^3 + 1}\, dx \leqslant \frac{1}{3}$
14. $\displaystyle 0 \leqslant \int_5^9 \frac{1}{\sqrt{x - 1}}\, dx \leqslant 2$
15. $0 \leqslant \int_0^2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi x\, dx \leqslant 2$
16. $0 \leqslant \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi x \leqslant 1$
17. Dado que $\int_{-1}^2 x\, dx = \frac{3}{2}$, ache o valor médio da função identidade no intervalo $[-1, 2]$. Ache também o valor de x no qual ocorre o valor médio. Dê uma interpretação geométrica dos resultados.
18. Ache o valor médio da função f definida por $f(x) = x^2$ no intervalo $[-1, 2]$, dado que $\int_{-1}^2 x^2\, dx = 3$. Ache também o valor de x no qual ocorre o valor médio. Dê uma interpretação geométrica dos resultados.
19. Dado que $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx = 2$, ache o valor médio da função seno no intervalo $[0, \pi]$. Ache também o menor valor de x onde ocorre o valor médio. Dê uma interpretação geométrica dos resultados.

20. Ache o valor médio da função f definida por $f(x) = \sec^2 x$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$, dado que $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \, dx = 1$. Ache também o valor de x onde ocorre o valor médio. Dê uma interpretação geométrica dos resultados.
21. Suponha que uma bola saia do repouso e após t s sua velocidade seja v m/s. Desprezando a resistência do ar, expresse v em termos de t como $v = f(t)$ e ache o valor médio de f em $[0, 2]$. (*Sugestão*: ache o valor da integral definida interpretando-a como a medida da área da região contida num triângulo.)
22. Ache o valor médio da função f definida por $f(x) = \sqrt{49 - x^2}$ no intervalo $[0, 7]$. Faça uma figura. (*Sugestão*: ache o valor da integral definida, interpretando-a como a medida da área da região encerrada por um quarto de círculo.)
23. Ache o valor médio da função f definida por $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ no intervalo $[-4, 4]$. Faça uma figura. (*Sugestão*: ache o valor da integral definida, interpretando-a como a região encerrada por um semicírculo.)
24. Suponha que f seja integrável em $[-4, 7]$. Se o valor médio de f no intervalo $[-4, 7]$ for $\frac{17}{4}$, ache $\int_{-4}^{7} f(x) \, dx$.
25. Se f for contínua em $[a, b]$ e $\int_a^b f(x) \, dx = 0$, prove que existe pelo menos um número c em $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.
26. O seguinte teorema é uma generalização do Teorema do valor médio para integrais: se f e g forem contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e $g(x) > 0$ para todo x no intervalo aberto (a, b), então existirá um número χ em $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(\chi) \int_a^b g(x) \, dx$$

Prove esse teorema por um método semelhante ao do Teorema 5.7.1: obtenha a desigualdade $m \leqslant f(x) \leqslant M$ e então conclua que $mg(x) \leqslant f(x)\,g(x) \leqslant Mg(x)$; aplique o Teorema 5.6.8 e prossiga como na demonstração do Teorema 5.7.1.
27. Mostre que se $g(x) = 1$, o teorema do Exercício 26 torna-se o teorema do valor médio para integrais.

Nos Exercícios de 28 a 32, use o teorema do Exercício 26 para provar a desigualdade.

28. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x \, dx}{x^3 + 2} < \int_0^4 x \, dx$

29. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2 + 4}} < \int_{-1}^1 x^2 \, dx$

30. $\displaystyle\int_0^\pi x \operatorname{sen} x \, dx \leqslant \int_0^\pi x \, dx$

31. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{sen}^2 \pi x \cos \pi x \, dx \leqslant \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi x \, dx$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \cos x}{x^2 + 1} \, dx \leqslant \int_0^1 x \, dx$

5.8 OS TEOREMAS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO

Historicamente, os conceitos básicos da integral definida foram usados pelos antigos gregos, principalmente Arquimedes (287—212 A.C.), há mais de 2000 anos, muito antes da formulação do cálculo diferencial.

No século dezessete, quase simultaneamente mas trabalhando independentemente, Newton e Leibniz mostraram como o Cálculo poderia ser usado para se encontrar a área de uma região limitada por uma curva ou um conjunto de curvas, determinando uma integral definida por antidiferenciação. O procedimento envolve o que é conhecido como os *teoremas fundamentais do Cálculo*. Antes de enunciar e prová-los, vamos discutir as integrais definidas com um limite superior variável.

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Então o valor da integral definida $\int_a^b f(x) \, dx$ depende somente da função f e dos números a e b, não do símbolo x usado aqui como variável independente. No Exemplo 1, Secção 5.5, encontramos o valor de $\int_1^3 x^2 \, dx$, que é $\frac{26}{3}$. Qualquer outro símbolo poderia ter sido usado no lugar de x; por exemplo,

$$\int_1^3 t^2 \, dt = \frac{26}{3} \qquad \int_1^3 u^2 \, du = \frac{26}{3} \qquad \int_1^3 r^2 \, dr = \frac{26}{3}$$

Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então, pelo Teorema 5.5.3 a integral definida $\int_a^b f(t) \, dt$ existe. Vamos primeiramente estabelecer que se uma integral definida existir, então ela será um único número. Se x for um número em $[a, b]$, então f será contínua em $[a, x]$, pois é contínua em $[a, b]$. Conseqüentemente, $\int_a^x f(t) \, dt$ existe e é um número cujo valor depende de x. Logo, $\int_a^x f(t) \, dt$ define uma função F tendo como seu domínio todos os números no intervalo fechado $[a, b]$ e cujo valor funcional em qualquer número x de $[a, b]$ é dado por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \tag{1}$$

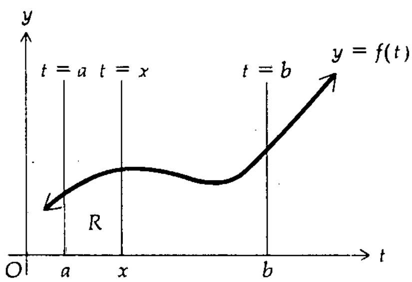


FIGURA 1

Segundo a convenção notacional, se os limites de uma integral definida forem variáveis, deverão ser usados símbolos diferentes para esses limites e para a variável independente no integrando. Assim, em (1), como x é o limite superior, usamos a letra t como a variável independente no integrando.

Se, na expressão (1), $f(t) \geqslant 0$ para todos os valores de t em $[a, b]$, então os valores funcionais de $F(x)$ poderão ser interpretados geometricamente com a medida da área da região limitada pela curva cuja equação é $y = f(t)$, pelo eixo t e pelas retas $t = a$ e $t = x$. (Veja a Figura 1). Note que $F(a) = \int_a^a f(t)\, dt$, o que pela Definição 5.5.6 é igual a 0.

Vamos agora enunciar e provar um teorema importante que dá a derivada da função F definida como uma integral definida tendo um limite superior variável. Esse teorema é chamado de *primeiro teorema fundamental do Cálculo*.

5.8.1 TEOREMA
Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja x qualquer número em $[a, b]$. Se F for a função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

então,

$$F'(x) = f(x) \tag{2}$$

(Se $x = a$, a derivada em (2) pode ser a derivada à direita e se $x = b$, a derivada em (2) pode ser a derivada à esquerda.)

Prova Considere dois números x_1 e $x_1 + \Delta x$ em $[a, b]$. Então

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t)\, dt$$

e

$$F(x_1 + \Delta x) = \int_a^{x_1+\Delta x} f(t)\, dt$$

então,

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_a^{x_1+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^{x_1} f(t)\, dt \tag{3}$$

Pelo Teorema 5.6.7,

$$\int_a^{x_1} f(t)\, dt + \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\, dt = \int_a^{x_1+\Delta x} f(t)\, dt$$

$$\int_a^{x_1+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^{x_1} f(t)\, dt = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\, dt$$

Substituindo essa igualdade em (3), obtemos

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\, dt \tag{4}$$

Pelo teorema do valor médio para integrais (5.7.1) existe um número χ no intervalo fechado limitado por x_1 e $x_1 + \Delta x$ tal que

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\, dt = f(\chi)\, \Delta x$$

Dessa relação e de (4), obtemos

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = f(\chi)\,\Delta x$$

$$\frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = f(\chi)$$

Tomando o limite quando Δx tende a zero, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\chi) \tag{5}$$

O primeiro membro de (5) é $F'(x_1)$. Para determinar $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\chi)$, lembre que χ está no intervalo fechado limitado por x_1 e $x_1 + \Delta x$, e como

$$\lim_{\Delta x \to 0} x_1 = x_1 \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x \to 0} (x_1 + \Delta x) = x_1$$

segue do teorema do "Sanduíche" (2.8.1) que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \chi = x_1$. Assim, temos $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\chi) = \lim\limits_{\chi \to x_1} f(\chi)$. Como f é contínua em x_1, $\lim\limits_{\chi \to x_1} f(\chi) = f(x_1)$; assim $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\chi) = f(x_1)$ e de (5) temos que

$$F'(x_1) = f(x_1) \tag{6}$$

Se a função f não estiver definida para valores de x menores do que a, mas for contínua à direita de a, então na argumentação acima, se $x_1 = a$ em (5), Δx precisa tender a 0 pela direita. Assim, o primeiro membro de (6) será $F'_+(x_1)$. Analogamente, se f não estiver definida para valores de x maiores do que b, mas for contínua à esquerda de b, então se $x_1 = b$ em (5), Δx deve tender a zero pela esquerda. Logo, teremos $F'_-(x_1)$ no primeiro membro de (6).

Como x_1 é um número qualquer em $[a, b]$, a igualdade (6) estabelece o que queríamos provar.

O Teorema 5.8.1 estabelece que a integral definida $\int_a^x f(t)\,dt$, com limite superior variável x, é uma antiderivada de f.

A equação (2) do teorema pode ser escrita da seguinte forma, substituindo $F'(x)$ por $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)} \tag{7}$$

EXEMPLO 1 Calcule as seguintes derivadas:

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^3+1}\,dt$ (b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\,dt$

Solução

(a) De (7) com $f(t) = \dfrac{1}{t^3+1}$, temos

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t^3+1}\,dt = \frac{1}{x^3+1}$$

(b) Usamos a regra da cadeia com $u = x^2$, e temos

$$\frac{d}{dx}\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\, dt = \frac{d}{du}\int_3^{u} \sqrt{\cos t}\, dt \cdot \frac{du}{dx}$$

De (7) com $f(t) = \sqrt{\cos t}$ e como $\dfrac{du}{dx} = 2x$, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\, dt &= \sqrt{\cos u}\,(2x)\\ &= 2x\sqrt{\cos x^2}\end{aligned}$$

Vamos usar agora o Teorema 5.8.1 para provar o *segundo teorema fundamental do Cálculo.*

5.8.2 TEOREMA Segundo Teorema Fundamental do Cálculo

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja g uma função tal que

$$g'(x) = f(x) \tag{8}$$

para todo x em $[a, b]$. Então,

$$\int_a^b f(t)\, dt = g(b) - g(a)$$

(Se $x = a$, a derivada em (8) pode ser uma derivada à direita, e se $x = b$, a derivada em (8) pode ser uma derivada à esquerda.)

Prova Se f for contínua em todos os números em $[a, b]$, sabemos do Teorema 5.8.1 que a integral definida $\int_a^x f(t)\, dt$, com o limite superior variável x, define uma função F cuja derivada em $[a, b]$ é f. Como, por hipótese, $g'(x) = f(x)$, segue do Teorema 5.1.2 que

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt + k$$

onde k é uma constante. Tomando $x = b$ e $x = a$, sucessivamente, nessa equação, obtemos

$$g(b) = \int_a^b f(t)\, dt + k \tag{9}$$

e

$$g(a) = \int_a^a f(t)\, dt + k \tag{10}$$

De (9) e (10),

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^a f(t)\, dt$$

Mas, pela Definição 5.5.6, $\int_a^a f(t)\, dt = 0$; assim

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\, dt$$

que é o que queríamos provar.

Se f não estiver definida para valores de x maiores do que b, mas for contínua à esquerda de b, a derivada em (8) será a derivada à esquerda, e teremos $g'_{-}(b) = F'_{-}(b)$, de onde segue (9). Da mesma forma, se f não estiver definida para valores de x menores do que a, mas for contínua à direita de a, então a derivada em (8) será a derivada à direita e teremos $g'_{+}(a) = F'_{+}(a)$, de onde segue (10). ■

Estamos agora em posição de encontrar o valor exato de uma integral definida, aplicando o Teorema 5.8.2. Quando aplicarmos esse teorema, usaremos a notação

$$[g(b) - g(a)] \quad \text{por} \quad g(x)\Big]_a^b$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos aplicar o segundo teorema fundamental do Cálculo para determinar

$$\int_1^3 x^2\, dx$$

Aqui $f(x) = x^2$. Uma antiderivada de x^2 é $\frac{1}{3}x^3$. Daí escolhemos

$$g(x) = \frac{x^3}{3}$$

Logo, do Teorema 5.8.2,

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^2\, dx &= \frac{x^3}{3}\Big]_1^3 \\ &= 9 - \tfrac{1}{3} \\ &= \tfrac{26}{3}\end{aligned}$$

Compare esse resultado com o do Exemplo 1, Secção 5.5. ◀

Devido à conexão entre integrais definidas e antiderivadas, usamos o sinal de integral $\int$ para a notação $\int f(x)\, dx$ de antiderivada. Vamos dispensar agora a terminologia de antiderivadas e antidiferenciação e começaremos a chamar $\int f(x)\, dx$ de **integral indefinida**. O processo de cálculo de uma integral indefinida ou definida é chamado de **integração**.

Deve ser enfatizada a diferença entre uma integral indefinida e definida. A primeira, $\int f(x)\, dx$, foi estabelecida como sendo uma função g tal que sua derivada $D_x[g(x)] = f(x)$. Por outro lado, a segunda $\int_a^b f(x)\, dx$, é um número cujo valor depende da função f e dos números a e b e foi definida como o limite de uma soma de Riemann. A definição de integral definida não faz nenhuma referência à diferenciação.

A integral indefinida envolve uma constante arbitrária; por exemplo,

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C$$

A constante arbitrária C é chamada de **constante de integração**. Ao aplicar o segundo teorema fundamental do Cálculo não é preciso incluir a constante arbitrária C na expressão de $g(x)$, pois o teorema permite-nos escolher *qualquer* antiderivada, inclusive aquela para a qual $C = 0$.

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx &= \int_{1/2}^{4} x^3\,dx - 6\int_{1/2}^{4} x^2\,dx + 9\int_{1/2}^{4} x\,dx + \int_{1/2}^{4} dx\\ &= \frac{x^4}{4} - 6\cdot\frac{x^3}{3} + 9\cdot\frac{x^2}{2} + x\Big]_{1/2}^{4}\\ &= (64 - 128 + 72 + 4) - (\tfrac{1}{64} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{8} + \tfrac{1}{2})\\ &= \tfrac{679}{64}\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int_{-1}^{1} (x^{4/3} + 4x^{1/3})\,dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (x^{4/3} + 4x^{1/3})\,dx &= \tfrac{3}{7}x^{7/3} + 4\cdot\tfrac{3}{4}x^{4/3}\Big]_{-1}^{1}\\ &= \tfrac{3}{7} + 3 - (-\tfrac{3}{7} + 3)\\ &= \tfrac{6}{7}\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int_0^2 2x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int_0^2 2x^2\sqrt{x^3+1}\,dx &= \frac{2}{3}\int_0^2 \sqrt{x^3+1}\,(3x^2\,dx)\\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{(x^3+1)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_0^2\\ &= \tfrac{4}{9}(8+1)^{3/2} - \tfrac{4}{9}(0+1)^{3/2}\\ &= \tfrac{4}{9}(27-1)\\ &= \tfrac{104}{9}\end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx$$

Solução Para calcular a integral indefinida $\int x\sqrt{1+x}\,dx$, seja

$$u = \sqrt{1+x} \qquad u^2 = 1 + x \qquad x = u^2 - 1 \qquad dx = 2u\,du$$

Substituindo, teremos

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x}\,dx &= \int (u^2-1)u(2u\,du)\\ &= 2\int (u^4-u^2)\,du\\ &= \tfrac{2}{5}u^5-\tfrac{2}{3}u^3+C\\ &= \tfrac{2}{5}(1+x)^{5/2}-\tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2}+C\end{aligned}$$

Logo, a integral definida

$$\begin{aligned}\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx &= \tfrac{2}{5}(1+x)^{5/2}-\tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big]_0^3\\ &= \tfrac{2}{5}(4)^{5/2}-\tfrac{2}{3}(4)^{3/2}-\tfrac{2}{5}(1)^{5/2}+\tfrac{2}{3}(1)^{3/2}\\ &= \tfrac{64}{5}-\tfrac{16}{3}-\tfrac{2}{5}+\tfrac{2}{3}\\ &= \tfrac{116}{15}\end{aligned}$$

Outro método para calcular a integral definida do Exemplo 5 é o fornecido por uma fórmula que decorre dos Teoremas 5.8.2 e 5.2.1 (a regra da cadeia para antidiferenciação). Desses teoremas, se F for uma antiderivada de f,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b$$

$$\Leftrightarrow\quad \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a))$$

Assim,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du} \tag{11}$$

Para aplicar (11), mude as variáveis na integral dada, tomando $u = g(x)$. Logo, $du = g'(x)\,dx$. Mude, então, os limites em x de integração a e b pelos limites de integração em u, que são $g(a)$ e $g(b)$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Para calcular a integral do Exemplo 5, seja $u = \sqrt{1+x}$, $x = u^2 - 1$ e $dx = 2u\,du$. Além disso, quando $x = 0$, $u = 1$ e quando $x = 3$, $u = 2$. Assim, de (11), temos

$$\begin{aligned}\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx &= 2\int_1^2 (u^4-u^2)\,du\\ &= \tfrac{2}{5}u^5-\tfrac{2}{3}u^3\Big]_1^2\\ &= \tfrac{64}{5}-\tfrac{16}{3}-\tfrac{2}{5}+\tfrac{2}{3}\\ &= \tfrac{116}{15}\end{aligned}$$ ◀

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^3\, x \cos x\, dx$$

Solução Seja

$$u = \text{sen}\, x \qquad du = \cos x\, dx$$

Quando $x = 0$, $u = 0$; quando $x = \frac{\pi}{2}$, $u = 1$. Portanto,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx = \int_0^1 u^3 \, du$$
$$= \frac{u^4}{4}\Big]_0^1$$
$$= \frac{1}{4}$$

EXEMPLO 7 Calcule

$$\int_{-3}^{4} |x + 2| \, dx$$

Solução

$$|x + 2| = \begin{cases} -x - 2 & \text{se} \quad x \leqslant -2 \\ x + 2 & \text{se} \quad -2 \leqslant x \end{cases}$$

Do Teorema 5.6.7,

$$\int_{-3}^{4} |x + 2| \, dx = \int_{-3}^{-2} (-x - 2) \, dx + \int_{-2}^{4} (x + 2) \, dx$$
$$= \left[-\frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{4}$$
$$= [(-2 + 4) - (-\tfrac{9}{2} + 6)] + [(8 + 8) - (2 - 4)]$$
$$= \tfrac{1}{2} + 18$$
$$= \tfrac{37}{2}$$

EXEMPLO 8 Dada $f(x) = \sec^2 x$. Ache o valor médio de f no intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Solução Seja V.M. o valor médio de f em $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Da Definição 5.7.2,

$$\text{V.M.} = \frac{1}{\frac{1}{4}\pi - (-\frac{1}{4}\pi)} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x \, dx$$
$$= \frac{2}{\pi} \left[\operatorname{tg} x \right]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$
$$= \frac{2}{\pi} [1 - (-1)]$$
$$= \frac{4}{\pi}$$

EXERCÍCIOS 5.8

Nos Exercícios de 1 a 36, calcule a integral definida.

1. $\int_0^3 (3x^2 - 4x + 1) \, dx$
2. $\int_0^4 (x^3 - x^2 + 1) \, dx$
3. $\int_3^6 (x^2 - 2x) \, dx$
4. $\int_{-1}^3 (3x^2 + 5x - 1) \, dx$
5. $\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x^2} \, dx$
6. $\int_{-3}^5 (y^3 - 4y) \, dy$

7. $\int_0^1 \frac{z}{(z^2+1)^3}\,dz$

8. $\int_1^4 \sqrt{x}(2+x)\,dx$

9. $\int_1^{10} \sqrt{5x-1}\,dx$

10. $\int_0^{\sqrt{5}} t\sqrt{t^2+1}\,dt$

11. $\int_{-2}^{0} 3w\sqrt{4-w^2}\,dw$

12. $\int_{-1}^{3} \frac{dy}{(y+2)^3}$

13. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x\,dx$

14. $\int_0^{\pi} \cos \frac{1}{2}x\,dx$

15. $\int_1^2 t^2\sqrt{t^3+1}\,dx$

16. $\int_1^3 \frac{x\,dx}{(3x^2-1)^3}$

17. $\int_0^1 \frac{(y^2+2y)\,dy}{\sqrt[3]{y^3+3y^2+4}}$

18. $\int_2^4 \frac{w^4-w}{w^3}\,dw$

19. $\int_0^{15} \frac{w\,dw}{(1+w)^{3/4}}$

20. $\int_4^5 x^2\sqrt{x-4}\,dx$

21. $\int_{-2}^{5} |x-3|\,dx$

22. $\int_{-4}^{4} |x-2|\,dx$

23. $\int_{-1}^{1} \sqrt{|x|-x}\,dx$

24. $\int_{-3}^{3} \sqrt{3+|x|}\,dx$

25. $\int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}\,dx$

26. $\int_{-2}^{1} (x+1)\sqrt{x+3}\,dx$

27. $\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}\,dx$
(*Sugestão*: divida o numerador pelo denominador.)

28. $\int_1^4 \frac{x^5-x}{3x^3}\,dx$

29. $\int_1^{64} \left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt[3]{t}\right)dt$

30. $\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+x\sqrt{x}}\,dx$

31. $\int_1^2 \frac{x^3+2x^2+x+2}{(x+1)^2}\,dx$

32. $\int_{-3}^{2} \frac{3x^3-24x^2+48x+5}{x^2-8x+16}\,dx$
(*Sugestão*: nos Exercícios 31 e 32, divida o numerador pelo denominador.)

33. $\int_0^1 \operatorname{sen} \pi x \cos \pi x\,dx$

34. $\int_0^{1/2} \sec^2 \frac{1}{2}\pi t \operatorname{tg} \frac{1}{2}\pi t\,dt$

35. $\int_{\pi/8}^{\pi/4} 3\operatorname{cosec}^2 2x\,dx$

36. $\int_0^{\pi/6} (\operatorname{sen} 2x + \cos 3x)\,dx$

Nos Exercícios de 37 a 46, calcule a derivada.

37. $\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{4+t^6}\,dt$

38. $\frac{d}{dx}\int_2^x \frac{1}{t^4+4}\,dt$

39. $\frac{d}{dx}\int_x^3 \sqrt{\operatorname{sen} t}\,dt$

40. $\frac{d}{dx}\int_x^3 \sqrt{1+t^4}\,dt$

41. $\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} \frac{1}{3+t^2}\,dt$

42. $\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} \cos(t^2+1)\,dt$

43. $\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}\,dt$

44. $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$

45. $\frac{d}{dx}\int_2^{\operatorname{tg} x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

46. $\frac{d}{dx}\int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2}\,dt$

Nos Exercícios de 47 a 50, ache o valor médio da função f no intervalo [a, b]. Nos Exercícios 47 e 48, ache o valor de x onde ocorre o valor médio de f e faça um esboço.

47. $f(x) = 9 - x^2$; $[a, b] = [0, 3]$
48. $f(x) = 8x - x^2$; $[a, b] = [0, 4]$
49. $f(x) = 3x\sqrt{x^2-16}$; $[a, b] = [4, 5]$
50. $f(x) = x^2\sqrt{x-3}$; $[a, b] = [7, 12]$

51. Num circuito elétrico, suponha que a força eletromotriz seja E volts em t s e que $E = 2 \operatorname{sen} 3t$. Ache o valor médio de E de $t = 0$ a $t = \frac{\pi}{3}$.

52. Para o circuito elétrico do Exercício 51, ache a raiz quadrada do valor médio de E^2 de $t = 0$ a $t = \frac{\pi}{3}$. (*Sugestão*: use a identidade $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.)

53. Uma bola cai do repouso e após t s sua velocidade é v m/s. Desprezando a resistência do ar, mostre que a velocidade média durante o primeiro $\frac{1}{2}T$ s é um terço da velocidade durante o $\frac{1}{2}T$ s seguinte.

54. Uma pedra é atirada para baixo com uma velocidade inicial de v_0 m/s. Despreze a resistência do ar. (a) Mostre que se v m/s for a velocidade da pedra após cair s m, então $v = \sqrt{v_0^2 + 2gs}$. (b) Ache a velocidade média nos primeiros 30 m de queda, se a velocidade inicial for 15 m/s.(Tome $g = 10$ e a direção positiva para baixo.)

55. Ache $\int_4^{16}\left[D_x \int_5^x (2\sqrt{t}-1)\,dt\right]dx$.

56. Seja f uma função cuja derivada f' é contínua em $[a, b]$. Ache o valor médio da inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $[a, b]$ e dê uma interpretação geométrica do resultado.

5.9 ÁREA DE UMA REGIÃO PLANA

Na Secção 5.4 definimos a área de uma região plana como o limite de uma soma de Riemann, e na Secção 5.5 aprendemos que tal limite é uma integral definida. Agora que dispomos de técnicas para calcular integrais definidas, consideraremos mais problemas envolvendo áreas de regiões planas.

Nos exemplos a seguir expresse primeiro a medida da área procurada como o limite de uma soma de Riemann para reforçar o procedimento de construção dessas somas, pensando em futuras aplicações.

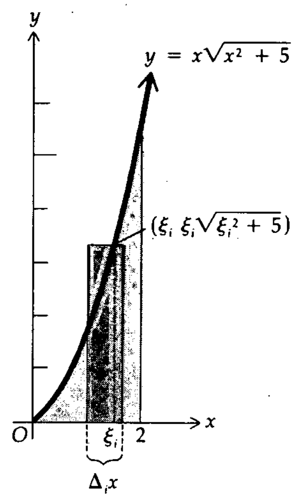


FIGURA 1

EXEMPLO 1 Ache a área da região no primeiro quadrante, limitada pela curva

$$y = x\sqrt{x^2+5}$$

pelo eixo x e pela reta $x = 2$. Faça um esboço.

Solução Veja a Figura 1, que mostra a região, bem como um dos elementos de área retangular.

Tomamos uma partição do intervalo $[0, 2]$. O comprimento do i-ésimo retângulo é $\Delta_i x$ e a altura é $\xi_i\sqrt{\xi_i^2+5}$ unidades, onde ξ_i é qualquer número no i-ésimo subintervalo. Logo, a medida da área do elemento retangular é $\xi_i\sqrt{\xi_i^2+5}\ \Delta_i x$. A soma das medidas das áreas de n de tais retângulos é

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i\sqrt{\xi_i^{\,2}+5}\ \Delta_i x$$

que é uma soma de Riemann. O limite dessa soma quando $\|\Delta\|$ tende a zero dá a medida procurada da área. O limite de uma soma de Riemann é uma integral definida que calculamos pelo segundo teorema fundamental do Cálculo. Seja A unidades quadradas a área da região. Então,

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\sqrt{\xi_i^{\,2}+5}\ \Delta_i x \\
&= \int_0^2 x\sqrt{x^2+5}\,dx \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{x^2+5}\,(2x\,dx) \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}(x^2+5)^{3/2}\Big]_0^2 \\
&= \tfrac{1}{3}[(9)^{3/2}-(5)^{3/2}] \\
&= \tfrac{1}{3}(27-5\sqrt{5}) \\
&\approx 5{,}27
\end{aligned}$$

Assim sendo, a área é $\frac{1}{3}(27 - 5\sqrt{5})$ unidades quadradas ou, aproximadamente, 5,27 unidades quadradas.

Até então consideramos a área de uma região para a qual os valores funcionais são não-negativos em $[a, b]$. Suponhamos agora que $f(x) < 0$ para todo x em $[a, b]$. Então, cada $f(\xi_i)$ é um número negativo; assim, definimos o número de unidades quadradas da região limitada por $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ como

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [-f(\xi_i)]\ \Delta_i x$$

o que é igual a

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$

EXEMPLO 2 Ache a área da região limitada pela curva

$$y = x^2 - 4x$$

pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 3$.

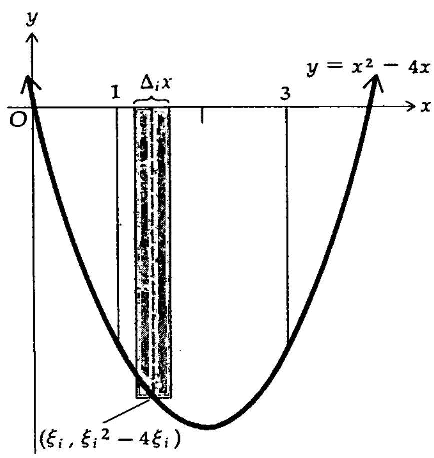


FIGURA 2

Solução A Figura 2 ilustra a região e um elemento de área retangular.

Vamos tomar uma partição do intervalo [1, 3]; o comprimento do i-ésimo retângulo é $\Delta_i x$. Como $x^2 - 4x < 0$ em [1, 3], a altura do i-ésimo retângulo é $-(\xi_i^2 - 4\xi_i) = 4\xi_i - \xi_i^2$. Logo, a soma das medidas das áreas de n retângulos é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} (4\xi_i - \xi_i^2)\, \Delta_i x$$

A medida desejada da área é dada pelo limite dessa soma quando $\|\Delta\|$ tende a 0; assim, se A unidades quadradas for a área da região,

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (4\xi_i - \xi_i^2)\, \Delta_i x \\ &= \int_1^3 (4x - x^2)\, dx \\ &= 2x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 \Big]_1^3 \\ &= \tfrac{22}{3} \end{aligned}$$

Então, a área da região é $\frac{22}{3}$ unidades quadradas.

EXEMPLO 3 Ache a área da região limitada pela curva

$$y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 2$.

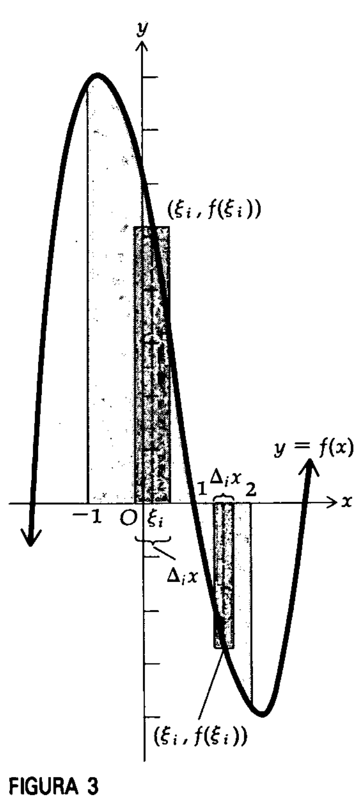


FIGURA 3

Solução A região está na Figura 3. Seja

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Como $f(x) \geqslant 0$ quando x está no intervalo fechado $[-1, 1]$ e $f(x) \leqslant 0$ quando x está no intervalo fechado [1, 2], separamos a região em duas partes. Seja A_1 o número de unidades quadradas na área da região quando x estiver em $[-1, 1]$ e seja A_2 o número de unidades quadradas na área da região quando x estiver em [1, 2]. Então,

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x \\ &= \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\, dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A_2 &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [-f(\xi_i)]\, \Delta_i x \\ &= \int_1^2 -(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\, dx \end{aligned}$$

Se A unidades quadradas forem a área de toda a região, então

$$\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 \\
&= \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\,dx - \int_{1}^{2} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\,dx \\
&= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 6x\right]_{-1}^{1} - \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 6x\right]_{1}^{2} \\
&= [(\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{2} + 6) - (\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{2} - 6)] - [(4 - \tfrac{16}{3} - 10 + 12) - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{2} + 6)] \\
&= \tfrac{32}{3} - (-\tfrac{29}{12}) \\
&= \tfrac{157}{12}
\end{aligned}$$

A área da região é, portanto, $\frac{157}{12}$ unidades quadradas.

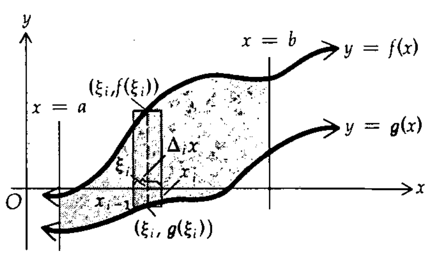


FIGURA 4

Consideremos duas funções f e g contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e tais que $f(x) \geqslant g(x)$ para todos x em $[a, b]$. Queremos encontrar a área da região limitada por duas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Tal situação está mostrada na Figura 4.

Tome uma partição do intervalo $[a, b]$, com o i-ésimo subintervalo tendo um comprimento $\Delta_i x$. Em cada subintervalo, escolha um ponto ξ_i. Considere o retângulo tendo altura $[f(\xi_i) - g(\xi_i)]$ unidades e comprimento $\Delta_i x$ unidades. Um retângulo é mostrado na Figura 4. Há n de tais retângulos, cada um associado a um subintervalo. A soma das medidas das áreas desses n retângulos é dada pela seguinte soma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\,\Delta_i x$$

Esta soma é uma aproximação do que intuitivamente pensamos ser o número representando a "medida da área" da região. Quanto menor o valor de $\|\Delta\|$, melhor será a aproximação. Se A unidades quadradas for a área da região, definimos

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\,\Delta_i x \qquad (1)$$

Como f e g são contínuas em $[a, b]$, assim também será $f - g$; logo, o limite em (1) existe e é igual à integral definida.

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

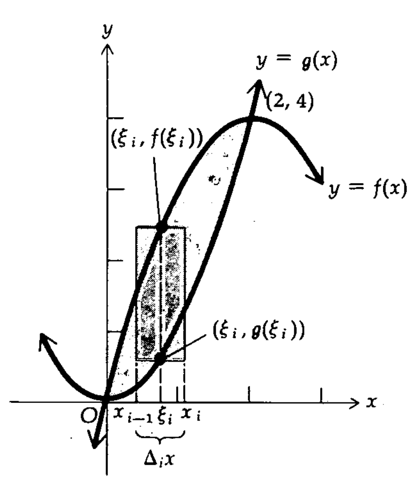


FIGURA 5

EXEMPLO 4 Ache a área da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

Solução Para encontrar os pontos de intersecção das duas curvas resolvemos simultaneamente as equações e obtemos os pontos (0, 0) e (2, 4). A região está na Figura 5.

Seja

$$f(x) = -x^2 + 4x \qquad g(x) = x^2$$

Logo, no intervalo [0, 2] a curva $y = f(x)$ está acima da curva $y = g(x)$. Traçamos um elemento de área retangular tendo $[f(\xi_i) - g(\xi_i)]$ unidades de altura e $\Delta_i x$ unidades de comprimento. Então, a medida da área desse retângulo é dada por $[f(\xi_i) - g(\xi_i)]\,\Delta_i x$. A soma das medidas das áreas de n desses retângulos é dada pela soma de Riemann.

$$\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\,\Delta_i x$$

Se A unidades quadradas for a área da região, então

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\,\Delta_i x$$

e o limite da soma de Riemann será uma integral definida. Logo,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 [f(x) - g(x)]\,dx \\ &= \int_0^2 [(-x^2 + 4x) - x^2]\,dx \\ &= \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\,dx \\ &= \left[-\tfrac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 \\ &= -\tfrac{16}{3} + 8 - 0 \\ &= \tfrac{8}{3} \end{aligned}$$

A área da região é $\frac{8}{3}$ unidades quadradas.

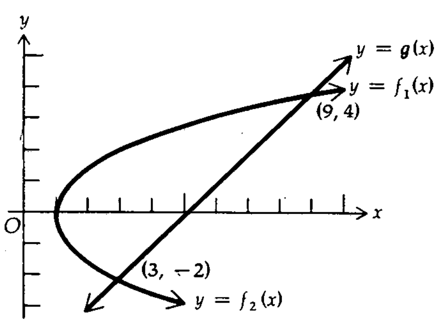


FIGURA 6

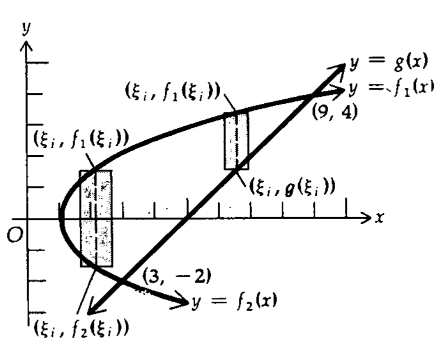


FIGURA 7

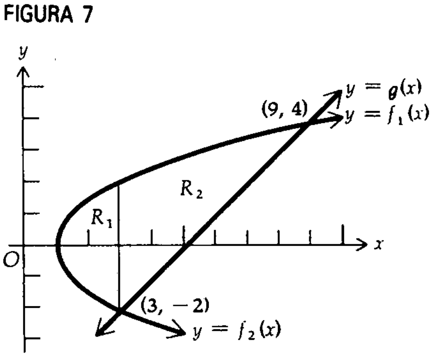


FIGURA 8

EXEMPLO 5 Ache a área da região limitada pela parábola $y^2 = 2x - 2$ e pela reta $y = x - 5$.

Solução As duas curvas interceptam-se nos pontos (3, −2) e (9, 4). A região está mostrada na Figura 6.

A equação $y^2 = 2x - 2$ é equivalente às equações

$$y = \sqrt{2x - 2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{2x - 2}$$

e da primeira equação obtemos a metade superior da parábola, enquanto que da segunda equação resulta a outra metade da parábola. Se pusermos $f_1(x) = \sqrt{2x - 2}$ e $f_2(x) = -\sqrt{2x - 2}$, a equação da metade superior da parábola será $y = f_1(x)$, enquanto que $y = f_2(x)$ é a equação da outra parte. Se pusermos $g(x) = x - 5$, a equação da reta será $y = g(x)$.

Na Figura 7 vemos dois elementos retangulares de área. Cada retângulo tem a base superior na curva $y = f_1(x)$. Como a base inferior do primeiro retângulo está na curva $y = f_2(x)$, a altura será $[f_1(\xi_i) - f_2(\xi_i)]$ unidades. Como a base inferior do segundo retângulo está sobre a curva $y = g(x)$, sua altura será $[f_1(\xi_i) - g(\xi_i)]$ unidades. Se desejarmos resolver esse problema usando elementos verticais e retangulares de área, precisamos dividir a região em duas regiões separadas, por exemplo, R_1 e R_2 onde R_1 é a região limitada pelas curvas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ e pela reta $x = 3$, onde R_2 é a região limitada pelas curvas $y = f_1(x)$ e $y = g(x)$ e pela reta $x = 3$ (veja a Figura 8).

Se A_1 for o número de unidades quadradas da área da região R_1, temos

$$\begin{aligned}
A_1 &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f_1(\xi_i) - f_2(\xi_i)]\, \Delta_i x \\
&= \int_1^3 [f_1(x) - f_2(x)]\, dx \\
&= \int_1^3 [\sqrt{2x-2} + \sqrt{2x-2}]\, dx \\
&= 2\int_1^3 \sqrt{2x-2}\, dx \\
&= \tfrac{2}{3}(2x-2)^{3/2}\Big]_1^3 \\
&= \tfrac{16}{3}
\end{aligned}$$

Se A_2 for o número de unidades quadradas da área da região R_2, temos

$$\begin{aligned}
A_2 &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f_1(\xi_i) - g(\xi_i)]\, \Delta_i x \\
&= \int_3^9 [f_1(x) - g(x)]\, dx \\
&= \int_3^9 [\sqrt{2x-2} - (x-5)]\, dx \\
&= \Big[\tfrac{1}{3}(2x-2)^{3/2} - \tfrac{1}{2}x^2 + 5x\Big]_3^9 \\
&= [\tfrac{64}{3} - \tfrac{81}{2} + 45] - [\tfrac{8}{3} - \tfrac{9}{2} + 15] \\
&= \tfrac{38}{3}
\end{aligned}$$

Logo, $A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{38}{3}$. Assim, a área de toda a região é 18 unidades quadradas.

EXEMPLO 6 Ache a área da região do Exemplo 5, tomando elementos de área retangulares horizontais.

Solução A Figura 9 ilustra a região com um elemento de área retangular horizontal.

Se nas equações da parábola e da reta resolvermos em x,

$$x = \tfrac{1}{2}(y^2 + 2) \qquad x = y + 5$$

Tomando $\phi(y) = \frac{1}{2}(y^2 + 2)$ e $\lambda(y) = y + 5$, a equação da parábola pode ser escrita como $x = \phi(y)$ e a da reta como $x = \lambda(y)$. Considere o intervalo fechado $[-2, 4]$ no eixo y e tome a partição desse intervalo. O i-ésimo subintervalo terá um comprimento de $\Delta_i y$. No i-ésimo subintervalo $[y_i - 1, y_i]$, escolha um ponto ξ_i. Então, o comprimento do i-ésimo elemento retangular é $[\lambda(\xi_i) - \phi(\xi_i)]$ unidades e a largura é $\Delta_i y$ unidades. A medida da área da região pode ser aproximada pela soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [\lambda(\xi_i) - \phi(\xi_i)]\, \Delta_i y$$

Se A unidades quadradas for a área da região, então

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [\lambda(\xi_i) - \phi(\xi_i)]\, \Delta_i y$$

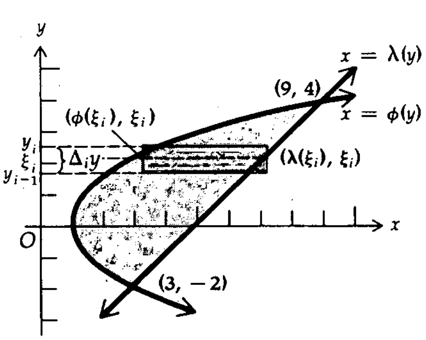


FIGURA 9

Como λ e ϕ são contínuas em $[-2, 4]$, então $\lambda - \phi$ também será, e o limite da soma de Riemann é uma integral definida:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{4} [\lambda(y) - \phi(y)]\, dy \\
&= \int_{-2}^{4} [(y+5) - \tfrac{1}{2}(y^2+2)]\, dy \\
&= \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{4} (-y^2 + 2y + 8)\, dy \\
&= \tfrac{1}{2}\Big[-\tfrac{1}{3}y^3 + y^2 + 8y\Big]_{-2}^{4} \\
&= \tfrac{1}{2}[(-\tfrac{64}{3} + 16 + 32) - (\tfrac{8}{3} + 4 - 16)] \\
&= 18
\end{aligned}$$

Comparando as soluções nos Exemplos 5 e 6, vemos que no primeiro caso temos que calcular duas integrais definidas, enquanto que no segundo caso há somente uma. Em geral, se possível, devemos escolher elementos de área retangulares de forma a obter uma única integral definida. O seguinte exemplo ilustra uma situação onde são necessárias duas integrais definidas.

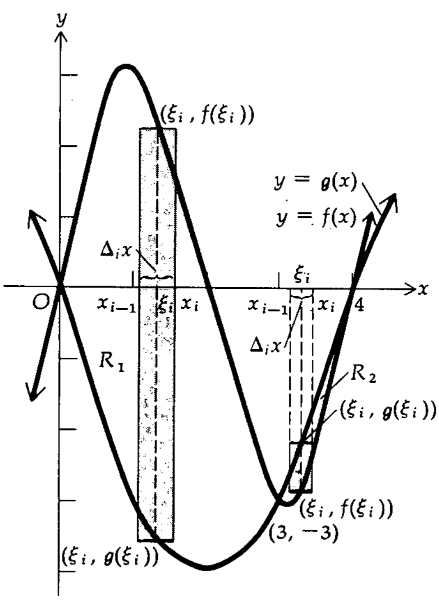


FIGURA 10

EXEMPLO 7 Ache a área da região limitada pelas curvas $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e $y = x^2 - 4x$.

Solução Os pontos de intersecção das duas curvas são $(0, 0)$, $(3, -3)$ e $(4, 0)$. A região está na Figura 10.

Seja

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \qquad g(x) = x^2 - 4x$$

No intervalo $[0, 3]$, a curva $y = f(x)$ está acima da curva $y = g(x)$, e no intervalo $[3, 4]$, a curva $y = g(x)$ está acima da curva $y = f(x)$. Dessa forma, a região precisa ser dividida em duas regiões separadas R_1 e R_2, onde R_1 é a região limitada pelas curvas no intervalo $[0, 3]$ e R_2 é a região limitada pelas curvas no intervalo $[3, 4]$. Se A_1 unidades quadradas for a área de R_1 e A_2 unidades quadradas for a área de R_2,

$$A_1 = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\, \Delta_i x \qquad A_2 = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [g(\xi_i) - f(\xi_i)]\, \Delta_i x$$

assim sendo,

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 &= \int_0^3 [(x^3 - 6x^2 + 8x) - (x^2 - 4x)]\, dx + \int_3^4 [(x^2 - 4x) - (x^3 - 6x^2 + 8x)]\, dx \\
&= \int_0^3 (x^3 - 7x^2 + 12x)\, dx + \int_3^4 (-x^3 + 7x^2 - 12x)\, dx \\
&= \Big[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{7}{3}x^3 + 6x^2\Big]_0^3 + \Big[-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{7}{3}x^3 - 6x^2\Big]_3^4 \\
&= \tfrac{45}{4} + \tfrac{7}{12} \\
&= \tfrac{71}{6}
\end{aligned}$$

Logo, a área pedida é $\frac{71}{6}$ unidades quadradas.

EXERCÍCIOS 5.9

Nos Exercícios de 1 a 38 ache a área limitada pelas curvas dadas. Em cada problema, faça o seguinte: (a) desenhe uma figura mostrando a região e um elemento de área retangular; (b) expresse a área da região como o limite de uma soma de Riemann; (c) ache o limite na parte (b), calculando uma integral definida pelo segundo teorema fundamental do Cálculo.

1. $y = 4 - x^2$; eixo x
2. $y = x^2 - 2x + 3$; eixo x; $x = -2$; $x = 1$
3. $y = 4x - x^2$; eixo x; $x = 1$; $x = 3$
4. $y = 6 - x - x^2$; eixo x
5. $y = \sqrt{x+1}$; eixo x; eixo y; $x = 8$
6. $y = \dfrac{1}{x^2} - x$; eixo x; $x = 2$; $x = 3$
7. $y = x^2 + x - 12$; eixo x
8. $y = x^2 - 6x + 5$; eixo x
9. $y = \operatorname{sen} x$; eixo x; $x = \frac{1}{3}\pi$; $x = \frac{2}{3}\pi$
10. $y = \cos x$; eixo x; eixo y; $x = \frac{1}{6}\pi$
11. $y = \sec^2 x$; eixo x; eixo y; $x = \frac{1}{4}\pi$
12. $y = \operatorname{cosec}^2 x$; eixo x; $x = \frac{1}{4}\pi$; $x = \frac{1}{3}\pi$
13. $x^2 = -y$; $y = -4$
14. $y^2 = -x$; $x = -2$; $x = -4$
15. $x^2 + y + 4 = 0$; $y = -8$. Tome os elementos de área perpendiculares ao eixo y.
16. A mesma região do Exercício 15. Tome os elementos de área paralelos ao eixo y.
17. $x^2 - y + 1 = 0$; $x - y + 1 = 0$. Tome os elementos de área perpendiculares ao eixo x.
18. A mesma região do Exercício 17. Tome os elementos de área paralelos ao eixo x.
19. $x^3 = 2y^2$; $x = 0$; $y = -2$
20. $y^3 = 4x$; $x = 0$; $y = -2$
21. $y = 2 - x^2$; $y = -x$
22. $y = x^2$; $y = x^4$
23. $y^2 = x - 1$; $x = 3$
24. $y = x^2$; $x^2 = 18 - y$
25. $y = \sqrt{x}$; $y = x^3$
26. $x = 4 - y^2$; $x = 4 - 4y$
27. $y^3 = x^2$; $x - 3y + 4 = 0$
28. $xy^2 = y^2 - 1$; $x = 1$; $y = 1$; $y = 4$
29. $x = y^2 - 2$; $x = 6 - y^2$
30. $x = y^2 - y$; $x = y - y^2$
31. $y = 2x^3 - 3x^2 - 9x$; $y = x^3 - 2x^2 - 3x$
32. $3y = x^3 - 2x^2 - 15x$; $y = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$
33. $y = x^3 + 3x^2 + 2x$; $y = 2x^2 + 4x$
34. $y = |x - 1| + 3$; $y = 0$; $x = -2$; $x = 4$
35. $y = \cos x - \operatorname{sen} x$; $x = 0$; $y = 0$
36. $y = \operatorname{sen} x$; $y = -\operatorname{sen} x$; $x = -\frac{1}{2}\pi$; $x = \frac{1}{2}\pi$
37. $y = |x|$; $y = x^2 - 1$; $x = -1$; $x = 1$
38. $y = |x + 1| + |x|$; $y = 0$; $x = -2$; $x = 3$

39. Ache, por integração, a área do triângulo tendo vértices $(5, 1)$, $(1, 3)$, e $(-1, -2)$.
40. Ache, por integração, a área do triângulo tendo vértices $(3, 4)$, $(2, 0)$, e $(0,1)$.
41. Ache a área da região limitada pela reta $x = 4$ e pela curva $x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0$. (*Sugestão*: resolva a equação cúbica em y em termos de x e expresse y como duas funções de x.)
42. Ache a área da região limitada pelas três curvas $y = x^2$, $x = y^3$, e $x + y = 2$.
43. Ache a área da região limitada pelas três curvas $y = x^2$, $y = 8 - x^2$, e $4x - y + 12 = 0$.
44. Ache, por integração, a área do trapézio tendo vértices $(-1, -1)$, $(2, 2)$, $(6, 2)$ e $(7, -1)$.
45. Ache a área da região limitada pela curva $y = \operatorname{sen} x$, pela reta $y = 1$, e pelo eixo y à direita do eixo y.
46. Ache a área da região limitada pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ entre dois pontos de intersecção consecutivos.
47. Ache a área da região limitada pela curva $y = \operatorname{tg}^2 x$, pelo eixo x e pela reta $x = \frac{1}{4}\pi$.
48. Ache a área da região acima da parábola $x^2 = 4py$ e dentro do triângulo formado pelo eixo x e pelas retas $y = x + 8p$ e $y = -x + 8p$.
49. Ache a área da região limitada pelas parábolas $y^2 = 4px$ e $x^2 = 4py$.
50. Ache a taxa de variação da medida da área do Exercício 48 em relação a p quando $p = \frac{3}{8}$.
51. Ache a taxa de variação da medida da área do Exercício 49 em relação a p quando $p = 3$.
52. Determine m de tal forma que a região acima da reta $y = mx$ e abaixo da parábola $y = 2x - x^2$ tenha uma área de 36 unidades quadradas.
53. Determine m de tal forma que a região acima da curva $y = mx^2 (m > 0)$, à direita do eixo y e abaixo da reta $y = m$ tenha uma área de K unidades quadradas, onde $K > 0$.
54. Se A unidades quadradas for a área da região limitada pela parábola $y^2 = 4x$ e pela reta $y = mx (m > 0)$, ache a taxa de variação de A em relação a m.

5.10 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Quando aplicamos o segundo teorema fundamental do Cálculo para avaliar uma integral definida, é necessário obter uma integral indefinida. Na Secção 5.8 calculamos a integral indefinida com as técnicas apresentadas nas Secções 5.1 e 5.2. Embora você vá aprender métodos adicionais para a obtenção de integrais indefinidas no Capítulo 9, ainda restarão algumas funções para as quais uma integral definida não pode ser calculada com exatidão, se forem usadas funções elementares. Exemplos de tais integrais definidas são

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx \qquad \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x^2\, dx$$

Outros exemplos encontram-se nos exercícios. Nessa Secção vamos aprender dois métodos para calcular um valor aproximado de uma integral definida de uma função que é contínua num intervalo fechado. Esses métodos freqüentemente dão uma precisão razoavelmente boa e variações deles são usadas para o cálculo de integrais definidas em computadores e calculadoras programáveis. O primeiro método é conhecido como *regra do trapézio*.

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. A integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ é o limite de uma soma de Riemann; isto é

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

A interpretação geométrica da soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

é que ela é igual à soma das medidas das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x, mais o negativo da medida das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x (veja a Figura 3 da Secção 5.5).

Para aproximar a medida da área de uma região usaremos trapézios em vez de retângulos. Vamos também usar partições regulares e valores funcionais em pontos igualmente espaçados.

Assim, para a integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos cada um com comprimento $\Delta x = (b - a)/n$. Obtemos os seguintes pontos $(n + 1)$: $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x$, ..., $x_i = a + i\Delta x$, ..., $x_{n-1} = a + (n - 1)\Delta x$, $x_n = b$. Então, a integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ pode ser expressa como a soma de n integrais definidas da seguinte maneira:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx + \ldots + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\, dx \qquad (1)$$

Para interpretar (1) geometricamente, consulte a Figura 1, na qual $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$; contudo, (1) é válida para toda função contínua em $[a, b]$.

Então, a integral $\int_a^{x_1} f(x)\, dx$ é a medida da área da região limitada pelo eixo x, pelas retas $x = a$ e $x = x_1$, e pela parte da curva de P_0 a P_1. Esta integral

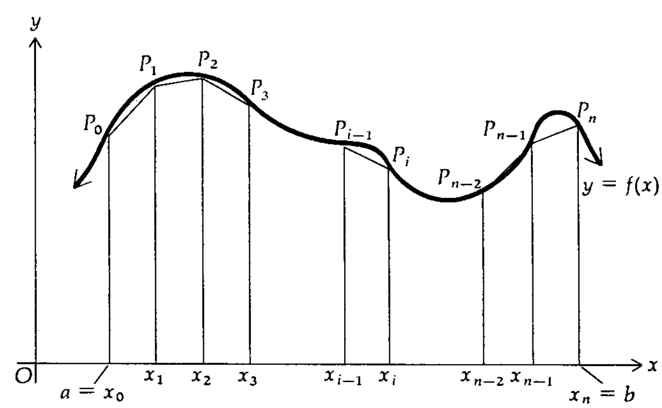


FIGURA 1

pode ser aproximada pela medida da área do trapézio formado pelas retas $x = a$, $x = x_1$, P_0P_1 e pelo eixo x. Por uma fórmula da Geometria, a medida da área desse trapézio é

$$\tfrac{1}{2}[f(x_0) + f(x_1)]\,\Delta x$$

Analogamente, as demais integrais do segundo membro de (1) podem ser aproximadas pela medida da área de um trapézio. Para a i-ésima integral,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\,\Delta x$$

Assim sendo, se usarmos essa expressão para cada uma das integrais do segundo membro de (1), teremos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{2}[f(x_0) + f(x_1)]\,\Delta x + \tfrac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]\,\Delta x + \ldots + \tfrac{1}{2}[f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})]\,\Delta x + \tfrac{1}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,\Delta x$$

Logo,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{2}\Delta x[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Essa fórmula é conhecida como a *regra do trapézio* e vamos enunciá-la formalmente no teorema a seguir.

5.10.1 TEOREMA
A Regra do Trapézio

Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e os números $a = x_0$, $x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ formarem uma partição regular de $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

EXEMPLO 1 Ache uma aproximação para

$$\int_0^3 \frac{dx}{16 + x^2}$$

usando a regra do trapézio com $n = 6$. Expresse o resultado com três casas decimais.

Solução Como $[a, b] = [0, 3]$ e $n = 6$,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \frac{b-a}{2n} = \frac{3-0}{12}$$
$$= \frac{3-0}{6} \qquad\qquad = 0{,}25$$
$$= 0{,}5$$

Logo,

$$\int_0^3 \frac{dx}{16 + x^2} \approx 0{,}25[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + 2f(x_5) + f(x_6)]$$

onde $f(x) = 1/(16 + x^2)$. O cálculo da soma entre colchetes acima está na Tabela 1, cujos valores podem ser obtidos usando uma calculadora. Assim,

$$\int_0^3 \frac{dx}{16 + x^2} \approx (0{,}25)(0{,}6427) \approx 0{,}1607 \approx 0{,}161$$

Tabela 1

i	x_i	$f(x_i)$	k_i	$k_i \cdot f(x_i)$
0	0	0,0625	1	0,0625
1	0,5	0,0615	2	0,1230
2	1	0,0588	2	0,1176
3	1,5	0,0548	2	0,1096
4	2	0,0500	2	0,1000
5	2,5	0,0450	2	0,0900
6	3	0,0400	1	0,0400

$$\sum_{i=0}^{6} k_i f(x_i) = 0{,}6427$$

Para obter um valor exato dessa integral definida é necessária uma técnica que você aprenderá na Secção 8.3. O valor exato até quatro casas decimais é 0,1609.

Para considerar a precisão da aproximação de uma integral definida pela regra do trapézio, devemos ter em mente dois tipos de erros. Um deles é cometido quando aproximamos o gráfico da função por segmentos de retas. O termo **erro de truncamento** é usado para denominá-lo. O outro tipo de erro, que é inevitável, é o chamado **erro de arredondamento**. Ele surge porque números com finitas casas decimais são usados para aproximar números reais. À medida que o valor de n (número de subintervalos) aumenta, a precisão de aproximação da área da região por áreas de trapézios é maior, assim o erro de truncamento é reduzido. Porém, à medida que aumenta n, são necessários mais cálculos, o que acarreta um aumento no erro de arredondamento. Através de métodos de *análise numérica* é possível, num dado problema, determinar o valor de n que minimiza os erros combinados. Obviamente, o erro de arredondamento é afetado pela maneira como são realizados os cálculos. O erro de truncamento pode ser estimado por um teorema. Provamos primeiro que quando Δx tende a zero e n aumenta indefinidamente, o limite da aproximação pela regra do trapézio é o valor exato da integral definida. Seja

$$T = \tfrac{1}{2}\Delta x[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Então,

$$T = [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]\,\Delta x + \tfrac{1}{2}[f(x_0) - f(x_n)]\,\Delta x$$

$$\Leftrightarrow \quad T = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \tfrac{1}{2}[f(a) - f(b)]\,\Delta x$$

Logo, se $n \to +\infty$ e $\Delta x \to 0$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} T = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{1}{2}[f(a) - f(b)]\,\Delta x$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + 0$$

Assim, podemos tornar a diferença entre T e o valor da integral definida tão pequena quanto desejarmos, tomando n suficientemente grande (e, em conseqüência Δx suficientemente pequeno).

O teorema a seguir, provado em análise numérica, fornece um método para estimar o erro de truncamento cometido quando usamos a regra do trapézio. Vamos denotar o erro de truncamento por ϵ_T.

5.10.2 TEOREMA Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e f' e f'' ambas existem em $[a, b]$. Se

$$\epsilon_T = \int_a^b f(x)\,dx - T$$

onde T é o valor aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$ encontrado pela regra do trapézio, então existe algum número η em $[a, b]$ tal que

$$\epsilon_T = -\tfrac{1}{12}(b - a)\,f''(\eta)\,(\Delta x)^2 \qquad (2)$$

EXEMPLO 2 Ache um intervalo em que se situa o erro de truncamento no resultado do Exemplo 1.

Solução Encontramos primeiro os valores máximo e mínimo absolutos de $f''(x)$ em $[0, 3]$.

$$f(x) = (16 + x^2)^{-1}$$

$$f'(x) = -2x(16 + x^2)^{-2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^2(16 + x^2)^{-3} - 2(16 + x^2)^{-2} \\ &= (6x^2 - 32)(16 + x^2)^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -6x(6x^2 - 32)(16 + x^2)^{-4} + 12x(16 + x^2)^{-3} \\ &= 24x(16 - x^2)(16 + x^2)^{-4} \end{aligned}$$

Como $f'''(x) > 0$ para todo x no intervalo aberto $(0, 3)$, então f'' é crescente no intervalo aberto $(0, 3)$. Logo, o valor mínimo absoluto de f'' em $[0, 3]$ é $f''(0)$, e o valor máximo absoluto de f'' em $[0, 3]$ é $f''(3)$.

$$f''(0) = -\frac{1}{128} \qquad f''(3) = \frac{22}{15.625}$$

Tomando $\eta = 0$ no segundo membro de (2), obtemos

$$-\frac{3}{12}\left(-\frac{1}{128}\right)\frac{1}{4} = \frac{1}{2.048}$$

Tomando $\eta = 3$ no segundo membro de (2), obtemos

$$-\frac{3}{12}\left(\frac{22}{15.625}\right)\frac{1}{4} = -\frac{11}{125.000}$$

Assim, sendo ϵ_T o erro de truncamento no resultado do Exemplo 1, encontramos

$$-\frac{11}{125.000} \leqslant \epsilon_T \leqslant \frac{1}{2.048}$$

$$-0{,}0001 \leqslant \epsilon_T \leqslant 0{,}0005$$

Se no Teorema 5.10.2 $f(x) = mx + b$, então $f''(x) = 0$ para todo x. Logo $\epsilon_T = 0$; assim, pela regra do trapézio temos o valor exato da integral definida de uma função linear.

Outro método para aproximar o valor de uma integral definida é dado pela **regra de Simpson** (chamada algumas vezes de *regra parabólica*), em homenagem ao matemático britânico Thomas Simpson (1710-1761). Para uma dada partição do intervalo fechado $[a, b]$, a regra de Simpson dá usualmente uma melhor aproximação do que a regra do trapézio. Na regra do trapézio, pontos sucessivos no gráfico de $y = f(x)$ são conectados por segmentos de reta, enquanto que na regra de Simpson os pontos são conectados por segmentos de parábolas. Antes de desenvolver a regra de Simpson, vamos enunciar e demonstrar um teorema que será necessário.

5.10.3 TEOREMA Se $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ forem três pontos não-colineares sobre a parábola com a equação $y = Ax^2 + Bx + C$, onde $y_0 \geqslant 0$, $y_1 \geqslant 0$ e $y_2 \geqslant 0$, $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 + 2h$, então a medida da área da região limitada pela parábola, pelo eixo x e pelas retas $x = x_0$ e $x = x_2$ será dada por

$$\tfrac{1}{3}h\,(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

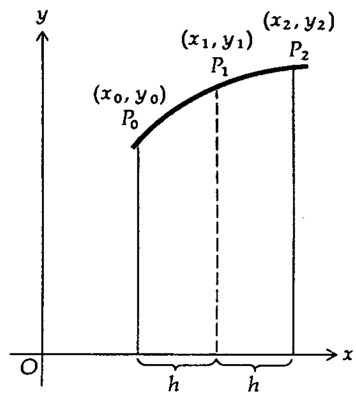


FIGURA 2

Prova A parábola cuja equação é $y = Ax^2 + Bx + C$ tem um eixo vertical. Veja a Figura 2, que mostra a região limitada pela parábola, pelo eixo x e pelas retas $x = x_0$ e $x = x_2$.

Como P_0, P_1 e P_2 são pontos sobre a parábola, suas coordenadas satisfazem a equação da parábola. Assim, quando substituímos x_1 por $x_0 + h$ e x_2 por $x_0 + 2h$, temos

$$y_0 = Ax_0^2 + Bx_0 + C$$

$$\begin{aligned} y_1 &= A(x_0 + h)^2 + B(x_0 + h) + C \\ &= A(x_0^2 + 2hx_0 + h^2) + B(x_0 + h) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= A(x_0 + 2h)^2 + B(x_0 + 2h) + C \\ &= A(x_0^2 + 4hx_0 + 4h^2) + B(x_0 + 2h) + C \end{aligned}$$

Logo,

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = A(6x_0^2 + 12hx_0 + 8h^2) + B(6x_0 + 6h) + 6C \tag{3}$$

Agora, se K unidades quadradas for a área da região, então K poderá ser calculado como o limite de uma soma de Riemann e teremos

$$\begin{aligned} K &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (A\xi_i^2 + B\xi_i + C)\,\Delta x \\ &= \int_{x_0}^{x_0+2h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx \\ &= \tfrac{1}{3}Ax^3 + \tfrac{1}{2}Bx^2 + Cx\Big]_{x_0}^{x_0+2h} \\ &= \tfrac{1}{3}A(x_0 + 2h)^3 + \tfrac{1}{2}B(x_0 + 2h)^2 + C(x_0 + 2h) - (\tfrac{1}{3}Ax_0^3 + \tfrac{1}{2}Bx_0^2 + Cx_0) \\ &= \tfrac{1}{3}h[A(6x_0^2 + 12hx_0 + 8h^2) + B(6x_0 + 6h) + 6C] \end{aligned}$$

Substituindo, de (3), nessa expressão, para K obtemos

$$K = \tfrac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

■

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Consideremos uma partição regular do intervalo $[a, b]$ com n subintervalos, onde n é par. O comprimento de cada subintervalo é dado por $\Delta x = (b - a)/n$. Vamos denotar os pontos sobre a curva $y = f(x)$, cujas abscissas são os pontos da partição $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$,..., $P_n(x_n, y_n)$; veja a Figura 3, onde $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$.

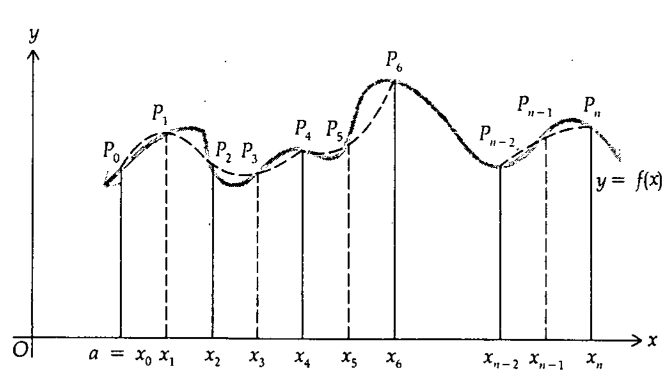


FIGURA 3

Aproximamos o segmento da curva $y = f(x)$ de P_0 a P_2 pelo segmento da parábola com eixo vertical e passando pelos pontos P_0, P_1 e P_2. Então, pelo Teorema 5.10.3, a medida da área da região limitada por essa parábola, pelo eixo x e pelas retas $x = x_0$ e $x = x_2$ com $h = \Delta x$, é dada por

$$\tfrac{1}{3}\Delta x(y_0 + 4y_1 + y_2) \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Analogamente, aproximamos o segmento da curva $y = f(x)$ de P_2 a P_4 pelo segmento da parábola com eixo vertical e que passa pelos pontos P_2, P_3 e P_4. A medida da área da região limitada por essa parábola, pelo eixo x e pelas retas $x = x_2$ e $x = x_4$ é dada por

$$\tfrac{1}{3}\Delta x(y_2 + 4y_3 + y_4) \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

Esse processo continua até que se obtenha $\frac{1}{2}n$ de tais regiões e que a medida da área da última região seja dada por

$$\tfrac{1}{3}\Delta x(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

A soma das medidas das áreas dessas regiões aproxima a medida da área da região limitada pela curva cuja equação é $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. A medida da área dessa região é dada pela integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. Então, temos uma aproximação da integral definida.

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \ldots\\ &\quad + \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_{n-4}) + 4f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})] + \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde $\Delta x = (b - a)/n$.

Essa fórmula é conhecida como *regra de Simpson*. Seu enunciado formal será dado no próximo teorema.

5.10.4 TEOREMA Regra de Simpson

Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, n for um inteiro par e os números $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ formarem uma partição regular de $[a, b]$, então

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\,[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots\\ + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1} + f(x_n)]\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Use a regra de Simpson com $n = 4$ para aproximar o valor de

$$\int_0^2 \frac{dx}{x+1}$$

Solução Aplicando a regra de Simpson com $n = 4$, temos

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{b-a}{n} & \frac{b-a}{3n} &= \frac{1-0}{3(4)}\\ &= \frac{1-0}{4} & &= \tfrac{1}{12}\\ &= \tfrac{1}{4}\end{aligned}$$

Tabela 2

i	x_i	$f(x_i)$	k_i	$k_i \cdot f(x_i)$
0	0	1,00000	1	1,00000
1	0,25	0,80000	4	3,20000
2	0,5	0,66667	2	1,33334
3	0,75	0,57143	4	2,28572
4	1	0,50000	1	0,50000
				$\sum_{i=0}^{4} k_i f(x_i) = 8,31906$

Logo, se $f(x) = 1/(x + 1)$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \tfrac{1}{12}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

Os resultados da expressão entre colchetes no segundo membro, obtidos com uma calculadora, estão na Tabela 2. Portanto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \frac{1}{12}(8,31906)$$

$$\approx 0,69325^+$$

Arredondando o resultado para quatro decimais, obtemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx 0,6933$$

Na Secção 7.1 você aprenderá a calcular o valor exato dessa integral definida com aproximação de até quatro casas decimais, que é 0,6931. Nossa aproximação coincide com o valor exato nas primeiras três casas e o erro de aproximação é $-0,0002$.

Ao aplicar a regra de Simpson, quanto maior tomarmos o valor de n, menor será o valor de Δx e assim, geometricamente parece evidente que menor será o erro de truncamento da aproximação, pois a parábola, passando por três pontos de uma curva que estão próximos um do outro, está próxima da curva em todo subintervalo de comprimento $2\Delta x$.

O teorema a seguir provado em análise numérica, apresenta um método para determinar o erro de truncamento ao aplicar a regra de Simpson. Esse erro será denotado por ϵ_S.

5.10.5 TEOREMA Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e f', f'', f''' e $f^{(iv)}$ todas existem em $[a, b]$. Se

$$\epsilon_S = \int_a^b f(x)\,dx - S$$

onde S é o valor aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$ encontrado pela regra de Simpson, então existe algum número η em $[a, b]$ tal que

$$\epsilon_S = -\tfrac{1}{180}(b - a)\,f^{(iv)}(\eta)(\Delta x)^4 \tag{4}$$

EXEMPLO 4 Ache um intervalo em que se situa o erro de truncamento no Exemplo 3.

Solução

$$f(x) = (x + 1)^{-1}$$
$$f'(x) = -1(x + 1)^{-2}$$
$$f''(x) = 2(x + 1)^{-3}$$
$$f'''(x) = -6(x + 1)^{-4}$$
$$f^{(iv)}(x) = 24(x + 1)^{-5}$$
$$f^{(v)}(x) = -120(x + 1)^{-6}$$

Como $f^{(v)}(x) < 0$ para todo x em $[0, 1]$, $f^{(iv)}$ é decrescente em $[0, 1]$. Assim o valor mínimo absoluto de $f^{(iv)}$ está no extremo direito 1, e o valor máximo absoluto de $f^{(iv)}$ em $[0, 1]$ está no extremo esquerdo 0.

$$f^{(iv)}(0) = 24 \quad \text{e} \quad f^{(iv)}(1) = \tfrac{3}{4}$$

Substituindo no segundo membro de (4) η por 0, obtemos

$$-\tfrac{1}{180}(b-a)f^{(iv)}(0)(\Delta x)^4 = -\tfrac{1}{180}(24)(\tfrac{1}{4})^4$$
$$\approx -0{,}00052$$

Substituindo no segundo membro de (4) η por 1, obtemos

$$-\frac{1}{180}(b-a)f^{(iv)}(1)(\Delta x)^4 = -\frac{1}{180}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4$$
$$\approx -0{,}00002$$

Assim,

$$-0{,}00052 \leqslant \epsilon_S \leqslant -0{,}00002$$

Essa desigualdade está de acordo com a discussão do Exemplo 3, com respeito ao erro na aproximação de $\int_0^1 dx/(x+1)$ pela regra de Simpson, pois $-0{,}00052 < -0{,}002 < -0{,}00002$.

Se $f(x)$ for um polinômio de grau três ou menos, então $f^{(iv)}(x) \equiv 0$ e, portanto, $\epsilon_S = 0$. Em outras palavras, a regra de Simpson dá um resultado exato para um polinômio do terceiro grau ou menor. Essa afirmativa é geometricamente óbvia se $f(x)$ for do segundo ou do primeiro grau, pois no primeiro caso o gráfico de $y = f(x)$ é uma parábola e no segundo, é uma reta.

Os métodos numéricos podem ser aplicados para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$, mesmo quando não conhecemos uma fórmula para $f(x)$, contanto que, é claro, tenhamos acesso a alguns valores de função. Tais valores são, muitas vezes, obtidos experimentalmente. O exemplo a seguir envolve essa situação.

EXEMPLO 5 Uma partícula movendo-se ao longo de uma reta horizontal tem uma velocidade de $v(t)$ m/s em t s. A Tabela 3 apresenta valores de $v(t)$ para intervalos de tempo de $\frac{1}{2}$ s, num período de 4 s. Use esses valores e a regra de Simpson para determinar a distância aproximada que a partícula percorre durante 4 s.

Tabela 3

t	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$v(t)$	0	0,15	0,35	0,55	0,78	1,02	1,27	1,57	1,90

Solução O número de metros que a partícula viaja durante 4 s é $\int_0^4 v(t)\,dt$. Da regra de Simpson com $n = 8$, temos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \frac{b-a}{3n} = \frac{4-0}{24}$$
$$= \frac{4-0}{8} \qquad = \frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{2}$$

Portanto,

$$\int_0^4 v(t)\,dt \approx \tfrac{1}{6}\,[v(0)+4v(1)+2v(2)+4v(3)+2v(4)+4v(5)+2v(6)+4v(7)+v(8)]$$
$$= \tfrac{1}{6}\,[0+4(0{,}15)+2(0{,}35)+4(0{,}55)+2(0{,}78)+4(1{,}02)+2(1{,}27)+4(1{,}57)+1{,}90]$$
$$\approx \tfrac{1}{6}\,[19{,}86]$$
$$= 3{,}31$$

Assim, a partícula percorre aproximadamente 3,31 m durante 4 s.

EXERCÍCIOS 5.10

Nos Exercícios de 1 a 12, calcule o valor aproximado da integral definida dada pela regra do trapézio com o valor de n indicado. Expresse o resultado com três casas decimais. Nos Exercícios de 1 a 4, ache o valor exato da integral definida e compare-o com a aproximação.

1. $\int_0^2 x^3\,dx;\ n = 4$ **2.** $\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\,dx;\ n = 8$

3. $\int_0^\pi \cos x\,dx;\ n = 4$ **4.** $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx;\ n = 6$

5. $\int_1^2 \dfrac{dx}{x};\ n = 5$ **6.** $\int_2^{10} \dfrac{dx}{1 + x};\ n = 8$

7. $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x^2}};\ n = 5$ **8.** $\int_2^3 \sqrt{1 + x^2}\,dx;\ n = 6$

9. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx;\ n = 6$ **10.** $\int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx;\ n = 4$

11. $\int_0^2 \sqrt{1 + x^4}\,dx;\ n = 6$ **12.** $\int_0^\pi \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + x}\,dx;\ n = 6$

Nos Exercícios de 13 a 18, ache um intervalo em que se situa o erro de truncamento na aproximação do exercício indicado.

13. Exercício 1 **14.** Exercício 4 **15.** Exercício 3
16. Exercício 6 **17.** Exercício 5 **18.** Exercício 8

19. Aproxime $\int_0^2 x^3\,dx$ com três casas decimais pela regra de Simpson, com $n = 4$. Compare o resultado com aquele obtido no Exercício 1, e observe que a regra de Simpson leva a resultados mais precisos do que a regra do trapézio com o mesmo número de subintervalos.

20. Aproxime $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ com três casas decimais pela regra de Simpson, com $n = 6$. Compare o resultado com aquele obtido no Exercício 4 e observe que a regra de Simpson leva a resultados mais precisos do que a regra do trapézio com o mesmo número de subintervalos.

Nos Exercícios de 21 a 24, aproxime a integral definida pela regra de Simpson com o valor indicado de n. Expresse o resultado com três casas decimais.

21. $\int_{-1}^0 \dfrac{dx}{1 - x};\ n = 4$ **22.** $\int_{-1/2}^0 \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}};\ n = 4$

23. $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^2 + x + 1};\ n = 4$ **24.** $\int_1^2 \dfrac{dx}{x + 1};\ n = 8$

Nos Exercícios de 25 a 28, ache limitantes para o erro de truncamento na aproximação do exercício indicado.

25. Exercício 19 **26.** Exercício 20
27. Exercício 21 **28.** Exercício 24

Cada uma das integrais definidas nos Exercícios de 29 a 34 não pode ser calculada exatamente em termos das funções elementares. Use a regra de Simpson com o valor indicado de n, para encontrar um valor aproximado da integral definida dada. Expresse o resultado com três casas decimais.

29. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx;\ n = 6$ **30.** $\int_0^2 \sqrt{1 + x^4}\,dx;\ n = 6$

31. $\int_1^{1,8} \sqrt{1 + x^3}\,dx;\ n = 4$ **32.** $\int_0^1 \sqrt[3]{1 - x^2}\,dx;\ n = 4$

33. $\int_0^2 \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x^3}};\ n = 8$ **34.** $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx;\ n = 6$

35. Mostre que o valor exato da integral $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$ é π, interpretando-a como a medida da área de uma região. Aproxime a área integral definida pela regra do trapézio com $n = 8$. Dê o resultado com três casas decimais e compare o valor assim obtido com o valor exato.

36. Mostre que o valor exato da integral $\int_0^1 4\sqrt{1 - x^2}\,dx$ é π interpretando-a como a medida da área de uma região. Use a regra de Simpson com $n = 6$ para obter uma aproximação do valor da integral definida com três casas decimais. Compare os resultados.

Nos Exercícios 37 e 38, os valores das funções f(x) foram obtidos experimentalmente. Com a hipótese de que f é contínua em [0, 4], *aproxime* $\int_0^4 f(x)\,dx$ *por (a) a regra do trapézio e (b) a regra de Simpson.*

37.

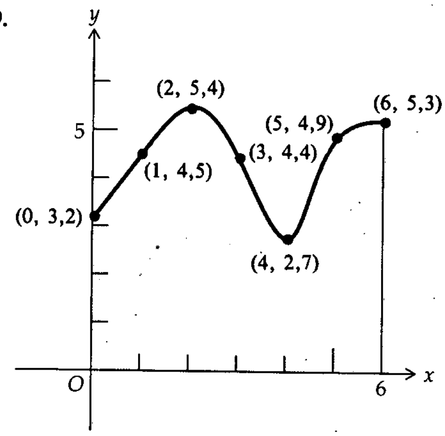
x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
$f(x)$	3,25	4,17	4,60	3,84	3,59	4,23	4,01	3,96	3,75

38.

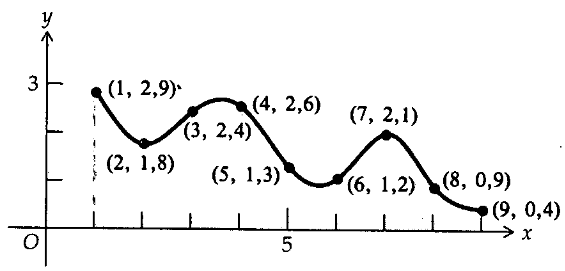
x	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0
$f(x)$	8,4	8,1	7,9	7,5	7,6	7,2	6,8	6,3	6,5	6,0	5,7

Nos Exercícios 39 e 40, use a regra de Simpson para aproximar a área da região sombreada na figura.

39.



40.



41. Uma mulher levou 10 min para dirigir de sua casa ao supermercado. A cada intervalo de 1 min ela olhava o velocímetro, e suas leituras são dadas na tabela a seguir, onde $v(t)$ quilômetros por hora foi a leitura t min depois que ela saiu de casa. Use a regra de Simpson para aproximar a distância da casa da mulher até o supermercado.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v(t)$	0	30	33	41	38	32	42	45	41	37	22

42. A forma de um estacionamento é irregular e o comprimento do terreno de oeste a leste é 240 m. No extremo oeste do terreno a largura é de 150 m e no extremo leste é de 175 m. Em 40, 80, 120, 160 e 200 m do extremo oeste, as larguras são 154, 158, 165, 163 e 172 m, respectivamente. Use a regra de Simpson para aproximar a área do estacionamento.

43. Ache a área da região limitada pelo laço da curva cuja equação é $y^2 = 8x^2 - x^5$. Calcule a integral definida pela regra de Simpson com $n = 8$ e expresse o resultado com três casas decimais.

44. Aplique a regra de Simpson para a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, onde $f(x)$ é um polinômio de terceiro grau, para provar a **fórmula prismoidal:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Nos Exercícios de 45 a 48, calcule a integral definida por dois métodos: (a) use a fórmula prismoidal dada no Exercício 44; (b) use o segundo teorema fundamental do Cálculo.

45. $\int_1^3 (4x^3 - 3x^2 + 1)\,dx$ **46.** $\int_2^6 (2x^3 - 2x - 3)\,dx$

47. $\int_{-1}^5 (x^3 + 3x^2 - 2x - 6)\,dx$ **48.** $\int_{-2}^2 (x^3 + x^2 - 4x - 2)\,dx$

49. Suponha que f seja uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Sejam T e S os valores aproximados de $\int_a^b f(x)\,dx$ pelas regras do trapézio e de Simpson, respectivamente, usando para ambas a mesma partição do intervalo $[a, b]$. Mostre que

$$S = \tfrac{2}{3}[T + \Delta x(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + \ldots + f(x_{n-1}))]$$

onde n é par.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 5

Nos Exercícios de 1 a 24, execute a antidiferenciação, isto é, calcule a integral indefinida.

1. $\int (2x^3 - x^2 + 3)\,dx$ **2.** $\int (5x^4 + 3x - 1)\,dx$

3. $\int (4y + 6\sqrt{y})\,dy$ **4.** $\int 3z^{-2}\,dz$

5. $\int \operatorname{sen} 3t\,dt$ **6.** $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{w}}{\sqrt{w}}\,dw$

7. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx$ **8.** $\int \sqrt{x}(1 + x^2)\,dx$

9. $\int \left(\frac{2}{x^4} - \frac{5}{x^2}\right)dx$ **10.** $\int \left(\sqrt[3]{t} - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)dt$

11. $\int 5x(2 + 3x^2)^8\,dx$ **12.** $\int x^4\sqrt{x^5 - 1}\,dx$

13. $\int \left(\sqrt{3x} + \frac{1}{\sqrt{5x}}\right)dx$ **14.** $\int \sqrt[3]{7w + 3}\,dw$

15. $\int \frac{x^3 + x}{(x^4 + 2x^2)^7}\,dx$ **16.** $\int (x^3 + x)\sqrt{x^2 + 3}\,dx$

17. $\int \frac{s}{\sqrt{2s + 3}}\,ds$ **18.** $\int t \sec^2 t^2\,dt$

19. $\int \operatorname{tg}^2 3\theta\,d\theta$ **20.** $\int (3\operatorname{cotg}^2 2x - 2\operatorname{cosec}^2 3x)\,dx$

21. $\int \frac{5\cos^2 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos x}\,dx$ **22.** $\int \operatorname{sen}^3 2\theta \operatorname{cotg} 2\theta\,d\theta$

23. $\int \sqrt{4x + 3}\,(x^2 + 1)\,dx$ **24.** $\int \left(\frac{x^3 + 2}{x^3}\right)\sqrt{x - \frac{1}{x^2}}\,dx$

Nos Exercícios de 25 a 28, ache o valor exato da integral definida usando a definição; não use o teorema fundamental do Cálculo.

25. $\int_0^2 (3x^2 - 1)\,dx$
26. $\int_0^1 (2x^2 + 4x + 1)\,dx$
27. $\int_{-2}^1 (x^3 + 2x)\,dx$
28. $\int_{-1}^3 (x^2 - 1)^2\,dx$

Nos Exercícios de 29 a 38, calcule a integral definida, usando o segundo teorema fundamental do Cálculo.

29. $\int_{-2}^2 (t^3 - 3t)\,dt$
30. $\displaystyle\int_1^5 \frac{dy}{\sqrt{2y-1}}$
31. $\displaystyle\int_2^3 \frac{12x\,dx}{(x^2-1)^2}$
32. $\int_{-5}^5 2x\sqrt[3]{x^2+2}\,dx$
33. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\operatorname{sen} 2\theta\,d\theta}{\cos^2 2\theta}$
34. $\int_{\pi/3}^{\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t \cos \frac{1}{2}t\,dt$
35. $\displaystyle\int_{-1}^7 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x+2}}$
36. $\displaystyle\int_1^2 \frac{y\,dy}{\sqrt{5-y}}$
37. $\int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x + \sec^2 \frac{1}{2}x)\,dx$
38. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 - \cos\theta)\operatorname{cosec}^2\theta\,d\theta$

Nos Exercícios de 39 a 42, ache a solução completa da equação diferencial dada.

39. $x^2y\dfrac{dy}{dx} = (y^2-1)^2$
40. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 30x$
41. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{2x-1}$
42. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x\sqrt{1-y^2}}{y\sqrt{2x^2+1}}$

43. Calcule $\int (x^3 + 1)^2x^2\,dx$ por dois métodos: (a) tome $u = x^3 + 1$; (b) calcule primeiro $(x^3 + 1)^2$. Compare os resultados e explique a diferença na aparência das respostas obtidas em (a) e (b).

44. Calcule $\int (x^4)^6 4x^3\,dx$ como $\int u^6\,du$ e como $\int 4x^{27}\,dx$, e compare os resultados.

45. A inclinação da reta tangente num ponto (x, y) de uma curva é $10 - 4x$ e o ponto $(1, -1)$ está na curva. Ache uma equação da curva.

46. A função custo marginal para determinada mercadoria é dada por $C'(x) = 6x - 17$. Se o custo de produção de 2 unidades for \$25, ache a função custo total.

47. A função rendimento marginal para certo artigo é dada por $R'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 10x + 12$. Ache (a) a função rendimento total e (b) uma equação envolvendo p e x (a equação de demanda) onde x unidades são demandadas quando p for o preço por unidade.

48. A matrícula em certa universidade vem crescendo a uma taxa de $1.000\,(t + 1)^{-1/2}$ estudantes por ano desde 1985. Se a matrícula em 1988 foi de 10.000, (a) qual foi a matrícula em 1985 e (b) qual será a matrícula em 1993 se é esperado que ela cresça à mesma taxa?

49. O volume de um balão está crescendo de acordo com a fórmula $\dfrac{dV}{dt} = \sqrt{t+1} + \frac{2}{3}t$, onde V cm³ é o volume do balão em t s. Se $V = 33$ quando $t = 3$, ache (a) a fórmula para V em termos de t; (b) o volume do balão em 8 s.

50. Suponha que determinada empresa estime o crescimento de sua receita devido às vendas pela fórmula $\dfrac{dS}{dt} = 2(t-1)^{2/3}$, onde S milhões é a receita bruta das vendas daqui a t anos. Se a receita bruta das vendas do ano corrente for de 8 milhões, qual deverá ser a receita bruta esperada daqui a 2 anos?

51. É 31 de julho e um tumor vem crescendo dentro do corpo de uma pessoa de tal forma que t dias desde 1º de julho o volume do tumor estará aumentando a uma taxa de $\frac{1}{100}(t + 6)^{1/2}$ cm³ por dia. Se o volume do tumor em 4 de julho era de 0,20 cm³, qual será o volume hoje?

52. Depois de pesquisar, certo fabricante determinou que se x unidades de um dado artigo forem produzidas por dia, o custo marginal será dado por $C'(x) = 0{,}3x - 11$ onde $C(x)$ é o custo total da produção de x unidades. Se o preço de venda do artigo for fixado em \$19 por unidade e o custo geral for \$100 por dia, ache o lucro máximo diário que poderá ser obtido.

53. Um fabricante de brinquedos tem um novo brinquedo para lançar no mercado e deseja determinar o preço de venda para o brinquedo, tal que o lucro total seja máximo. Pela análise do preço e da demanda de outro brinquedo similar, ele previu que se x brinquedos forem demandados quando p for preço unitário, então $\dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{p^2}{30.000}$, e a demanda deverá ser 1.800 quando o preço for \$10. Se $C(x)$ for o custo total da produção de x brinquedos, então $C(x) = x + 7.500$. Ache o preço que deverá ser fixado para que o lucro do fabricante seja máximo.

Nos Exercícios 54 e 55 uma partícula move-se em linha reta, s cm é a distância orientada da partícula à origem em t s, v cm/s é a velocidade da partícula em t s e a cm/s² é a sua aceleração em t s.

54. $a = 3t + 4$; $v = 5$ e $s = 0$, quando $t = 0$. Expresse v e s em termos de t.

55. $a = 6 \cos 2t$; $v = 3$ e $s = 4$, quando $t = \frac{\pi}{2}$. Expresse v e s em termos de t.

56. Desprezando a resistência do ar, se um objeto cai de um avião a uma altura de 9.000 m acima do nível do mar, quanto tempo levará para o objeto atingir a água?

57. Suponha que uma bala seja disparada verticalmente para baixo pelo avião mencionado no Exercício 56, com uma velocidade na boca da arma de 750 m/s. Desprezando a resistência do ar, quanto tempo levará para a bala atingir a água?

58. Uma bola é atirada verticalmente para cima do telhado de uma casa, 19 m acima do solo, com uma velocidade inicial de 14 m/s. (a) Quanto tempo levará para a bola atingir a altura máxima, e (b) qual será a altura máxima? (c) Quanto tempo levará para a bola atingir o solo e (d) com que velocidade ela o atingirá?

59. Suponha que a bola do Exercício 58 seja atirada para baixo com uma velocidade inicial de 14 m/s. (a) Quanto tempo irá decorrer até a bola atingir o solo e (b) com que velocidade ela o atingirá?

60. Suponha que a bola do Exercício 58 caia de cima da casa. (a) Quanto tempo irá decorrer até ela atingir o solo e (b) com que velocidade ela o atingirá?

Nos Exercícios 61 e 62, ache as somas.

61. $\sum_{i=1}^{100} 2i(i^3 - 1)$ **62.** $\sum_{i=1}^{41} (\sqrt[3]{3i - 1} - \sqrt[3]{3i + 2})$

63. Prove que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$, e verifique a fórmula para $n = 1$, 2 e 3.

64. Expresse como uma integral definida e calcule:

$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} (8\sqrt{i}/n^{3/2})$ (*Sugestão:* considere a função f tal que $f(x) = \sqrt{x}$).

65. Mostre que cada uma das desigualdades é válida:

(a) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x-3} \geqslant \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$; (b) $\int_1^2 \frac{dx}{x} \geqslant \int_1^2 \frac{dx}{x-3}$;

(c) $\int_4^5 \frac{dx}{x-3} \geqslant \int_4^5 \frac{dx}{x}$.

66. Se

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \leqslant x < c \\ k & \text{se } x = c \\ 1 & \text{se } c < x \leqslant b \end{cases}$$

prove que f é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = b - c$, não importando o valor de k.

Nos Exercícios 67 e 68, aplique o Teorema 5.6.9 para achar um intervalo fechado contendo o valor da integral definida dada.

67. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos t}\,dt$ **68.** $\int_{-2}^{1} \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 + 1}\,dx$

Nos Exercícios 69 e 70, calcule a integral definida.

69. $\int_{-3}^{3} |x - 2|^3\,dx$ **70.** $\int_{-2}^{2} x|x - 3|\,dx$

Nos Exercícios de 71 a 74, calcule a derivada.

71. $\frac{d}{dx}\int_x^4 (3t^2 - 4)^{3/2}\,dt$ **72.** $\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} \frac{4}{1 + t^2}\,dt$

73. $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \frac{1}{t}\,dt \quad x > 0$

74. $\frac{d}{dx}\int_1^{\sec x} \sqrt{t^2 - 1}\,dt \quad 0 < x < \frac{1}{2}\pi$

75. Ache o valor médio da função co-seno no intervalo fechado $[a, a + 2\pi]$.

76. Interprete o teorema do valor médio para integrais (5.7.1), em termos do valor de uma função média.

77. Se $f(x) = x^2\sqrt{x - 3}$, ache o valor médio de f em $[7, 12]$.

78. (a) Ache o valor médio da função f definida por $f(x) = 1/x^2$ no intervalo $[1, r]$. (b) Se A for o valor médio encontrado na parte (a), ache $\lim_{r \to +\infty} A$.

79. Um corpo cai do repouso e percorre uma distância de s m antes de atingir o solo. Se a única força agindo sobre ele é a da gravidade, o que lhe dá uma aceleração de g m/s^2 em direção ao solo, mostre que o valor médio da velocidade expresso como uma função da distância, enquanto ele percorre essa distância, é $\frac{2}{3}\sqrt{2gs}$ m/s e que essa velocidade média é dois terços da velocidade final.

80. Suponha que uma bola caia do repouso e que t s depois, sua distância orientada do ponto de partida seja s m e sua velocidade seja v m/s. Desprezando a resistência do ar, quando $t = t_1$, $s = s_1$ e $v = v_1$, (a) expresse v como uma função de t quando $v = f(t)$ e ache o valor médio de f em $[0, t_1]$. (b) Expresse v como uma função de s quando $v = h(s)$ e ache o valor médio de h em $[0, s_1]$. (c) Escreva os resultados das partes (a) e (b) em termos de t_1 e determine qual velocidade média é maior.

Nos Exercícios de 81 a 88, ache a área da região limitada pelas curvas e retas dadas. Faça uma figura mostrando a região e um elemento retangular da área. Expresse a medida da área como o limite de uma soma de Riemann e depois com a notação de integral definida. Calcule a integral definida pelo segundo teorema fundamental do Cálculo.

81. $y = 9 - x^2$; eixo x; eixo y; $x = 3$

82. $y = 3\cos\frac{1}{2}x$; eixo x; $x = -\frac{1}{2}\pi$; $x = \frac{1}{2}\pi$

83. $y = 2\sqrt{x - 1}$; *eixo* x; $x = 5$; $x = 17$

84. $y = 16 - x^2$; eixo x

85. $y = x\sqrt{x + 5}$; eixo x, $x = -1$; $x = 4$

86. $y = \frac{4}{x^2} - x$; eixo x; $x = -2$; $x = -1$

87. $x^2 + y - 5 = 0$; $y = -4$.

88. $y = x^2 - 7x$; eixo x; $x = 2$; $x = 4$

89. Ache a área da região limitada pelas curvas $x = y^2$ e $x = y^3$.

90. Ache a área da região limitada pelas curvas $y = \operatorname{sen} 2x$ e $y = \operatorname{sen} x$ de $x = 0$ até $x = \frac{\pi}{3}$.

91. Ache a área da região limitada pelas curvas $y = \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x$ de $x = \frac{1}{4}\pi$ até $x = \frac{5}{4}\pi$.

92. Ache a área da região limitada pelo laço da curva $y^2 = x^2(4 - x)$.

93. Ache a área da região no primeiro quadrante limitada pelo eixo y e pelas curvas $y = \sec^2 x$ e $y = 2\operatorname{tg}^2 x$.

94. Um automóvel rodando a uma velocidade constante de 80 km/h por uma estrada reta não obedece a um sinal de parada. Se 3 s mais tarde o carro da polícia rodoviária estacionado no sinal de parada parte com uma aceleração constante de 3 m/s^2, quanto tempo irá levar para alcançar o automóvel e a que distância isto irá ocorrer? Determine também a velocidade do carro da polícia quando ele ultrapassar o automóvel.

95. Suponha que num dado dia, numa certa cidade, a temperatura fahrenheit seja $f(t)$ graus, t horas depois da meia-noite e

$$f(t) = 60 - 15\operatorname{sen}\tfrac{1}{12}\pi(8 - t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 24$$

(a) Faça um esboço do gráfico de f. Ache a temperatura à (b) meia-noite; (c) 8 da manhã; (d) meio-dia; (e) 2 da tarde e (f) 6 da tarde. (g) Ache a temperatura média entre 8 da manhã e 6 da tarde. (Para reduzir graus fahrenheit a centígrados subtraia 32 e multiplique por 5/9. (N.T).)

96. Se n for um inteiro positivo, prove que $\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\pi$.

Nos Exercícios 97 e 98, ache um valor aproximado para a integral, usando a regra do trapézio com $n = 4$. Expresse o resultado até três casas decimais.

97. $\int_0^2 \sqrt{1 + x^2}\, dx$

98. $\int_1^{9/5} \sqrt{1 + x^3}\, dx$

Nos Exercícios 99 e 100, ache um valor aproximado para a integral do exercício indicado, usando a regra de Simpson com $n = 4$. Expresse o resultado até três casas decimais.

99. Exercício 97

100. Exercício 98

101. Ache um valor aproximado da seguinte integral, até três casas decimais, por dois métodos: (a) use a regra do trapézio com $n = 4$; (b) use a regra de Simpson com $n = 4$:

$$\int_{1/10}^{1/2} \frac{\cos x}{x}\, dx$$

102. Os fatores funcionais de $f(x)$ na tabela a seguir foram obtidos experimentalmente com a hipótese de que f é contínua em [1, 3], aproxime $\int_1^3 f(x)\, dx$ pela (a) regra do trapézio e (b) regra de Simpson.

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$f(x)$	5,2	5,7	5,8	6,3	6,1	6,4	6,0	6,5	6,8	6,7	6,4

103. Calcule $\int_0^\pi \left|\cos x + \frac{1}{2}\right| dx$.

104. Formule um exemplo de uma função descontínua para a qual o teorema do valor médio para integrais (a) não se aplica e (b) se aplica.

Nos Exercícios 105 e 106, use o segundo teorema fundamental do Cálculo para calcular a integral definida. Então, encontre o valor de χ que satisfaça o teorema do valor médio para integrais.

105. $\int_0^3 (x^2 + 1)\, dx$

106. $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$

107. Seja f contínua em $[a, b]$ e $\int_a^b f(t)\, dt \neq 0$. Mostre que para qualquer k em (0, 1) haverá um número c em (a, b) tal que $\int_a^c f(t)\, dx = k \int_a^b f(t)\, dt$. (*Sugestão:* considere a função F para a qual $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \Big/ \int_a^b f(t)\, dt$, e aplique o teorema do valor intermediário.)

108. Dada $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t}\, dt$ e $x > 0$. Prove que F é uma função constante, mostrando que $F'(x) = 0$. (*Sugestão:* use o primeiro teorema fundamental do Cálculo (5.9.1) após escrever a integral dada como a diferença de duas integrais.)

109. Se $f(x) = x + |x - 1|$ e

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$$

mostre que F é uma antiderivada de f em $(-\infty, +\infty)$.

110. Seja f e g duas funções tais que para todo x em $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = -f(x)$. Depois, suponha que $f(0) = 0$ e $g(0) = 1$. Prove que

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$$

(*Sugestão:* considere as funções F e G onde $F(x) = [f(x)]^2$ e $G(x) = -[g(x)]^2$, e mostre que $F'(x) = G'(x)$ para todo x.)

111. Dada a integral $\int_d^{d+6} (x^2 + bx + c)\, dx$, onde b, c e d são constantes. Suponha que essa integral seja aproximada pela regra do trapézio com $n = k$. (a) Mostre que o erro na aproximação é exatamente $-36/k^2$. (b) Qual é o menor valor de k tal que a aproximação seja exata até uma casa decimal?