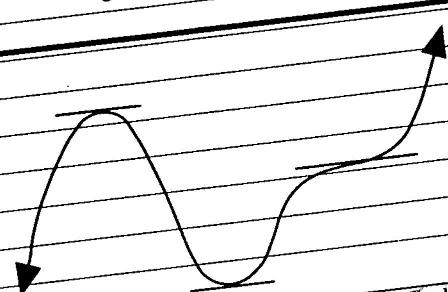
QUATRO

Valores Extremos das Funções, Técnicas de Construção de Gráficos e a Diferencial



A interpretação da derivada como a inclinação de uma reta tangente fornece-nos informações sobre o comportamento das funções, e assim, ela é usada em técnicas de gráficos de funções. As Secções 4.1 e 4.4–4.7 tratam dessa aplicação. Na Secção 4.1, definimos *valores extremos de funções* que são utilizados nas Secções 4.2 e 4.8 para resolver problemas envolvendo máximos e mínimos. Por exemplo, determinamos a maior viga retangular que pode ser cortada de uma dada tora cilíndrica, bem como as dimensões de uma caixa que requer a quantia mínima de material para um volume específico.

Um dos teoremas mais importantes em Cálculo é o *teorema do valor médio*, discutido na Secção 4.3. É usado para provar muitos teoremas de Cálculo Diferencial e Integral, bem como em outros assuntos, como a análise numérica. Na Secção 4.9 introduzimos o conceito de *diferencial*. A Secção Suplementar 4.10 é dedicada ao *Método de Newton*, uma aplicação da derivada a processos numéricos para arredondar soluções de equações.

4.1 VALOR FUNCIONAL MÁXIMO E MÍNIMO

Vimos que a interpretação geométrica de derivada de uma função é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em um ponto. Esse fato possibilitanos aplicar derivadas como recurso auxiliar no esboço de gráficos. Por exemplo, podemos usar a derivada para determinar os pontos onde a reta tangente é horizontal; esses são os pontos onde a derivada é zero. A derivada também pode ser usada para encontrarmos os intervalos nos quais a função está acima ou abaixo da reta tangente. Antes de empregar a derivada para fazer esboços de gráficos, precisamos de algumas definições e teoremas.

4.1.1 DEFINIÇÃO A função f terá um **valor máximo relativo** em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x nesse intervalo.

As Figuras 1 e 2 mostram o esboço de parte do gráfico de uma função, tendo um valor máximo relativo em c.

4.1.2 DEFINIÇÃO A função f terá um **valor mínimo relativo** em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \leqslant f(x)$ para todo x nesse intervalo.

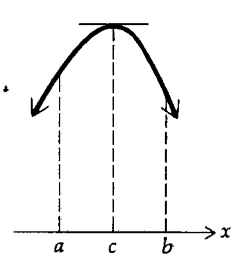


FIGURA 1

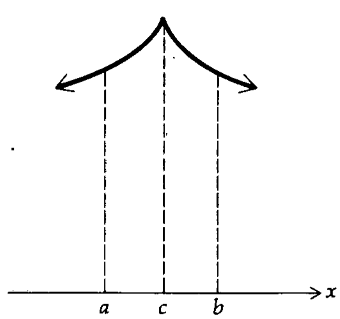


FIGURA 2

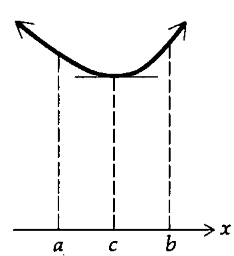


FIGURA 3

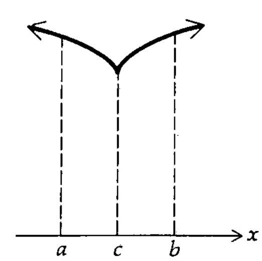


FIGURA 4

As Figuras 3 e 4 mostram o esboço de parte do gráfico de uma função, tendo um valor mínimo relativo em c.

Se a função f tiver um máximo relativo em c ou um mínimo relativo, então dizemos que f tem um **extremo relativo** em c.

O seguinte teorema será usado para localizar os valores possíveis de c para os quais existe um extremo relativo.

4.1.3 TEOREMA Se $f(x)$ foi definida para todos os valores de x no intervalo aberto (a, b) e se f tiver um extremo relativo em c, onde $a < c < b$, então $f'(c) = 0$, se $f'(c)$ existir.

A interpretação geométrica desse teorema é que se f tiver um extremo relativo em c, e se $f'(c)$ existir, então o gráfico de f precisará ter uma reta tangente horizontal no ponto onde $x = c$.

Para demonstrar o Teorema 4.1.3, usamos os Teoremas 2.10.3 e 2.10.4. Seria útil que você consultasse esses teoremas, bem como as Ilustrações 3 e 4 da Secção Suplementar 2.10 que apresentam suas respectivas interpretações geométricas.

Prova do Teorema 4.1.3 A demonstração será dada para o caso em que f tem um valor mínimo relativo em c.

Se $f'(x)$ existir, então

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{1}$$

Como f tem um valor mínimo relativo em c, pela Definição 4.1.2 existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - c| < \delta, \text{ então } f(x) - f(x) \geqslant 0$$

Se x tende a c pela direita, $x - c > 0$; logo

$$\text{se } 0 < x - c < \delta, \text{ então } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$$

Pelo Teorema 2.10.4, se o limite existir,

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \tag{2}$$

Da mesma forma, se x tende a c pela esquerda, $x - c < 0$ e, portanto,

$$\text{se } -\delta < x - c < 0, \text{ então } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$

assim, pelo Teorema 2.10.3, se o limite existir,

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0 \tag{3}$$

Como $f'(c)$ existe, os limites nas desigualdades (2) e (3) têm que ser iguais a $f'(c)$. Assim, de (2),

$$f'(c) \geqslant 0$$

e de (3),

$$f'(c) \leqslant 0$$

Como ambas as desigualdades são verdadeiras, concluímos que

$$f'(c) = 0$$

que era o que queríamos provar.

A demonstração no caso em que f tem um valor máximo relativo em c é similar e será proposta como um exercício (veja o Exercício 59). ■

Se f for uma função derivável em um intervalo aberto (a, b), então os únicos valores possíveis de x para os quais f pode ter um extremo relativo são aqueles em que $f'(x) = 0$; no entanto, $f'(x)$ pode ser igual a zero para um valor específico de x, sem que f possua um extremo relativo neste ponto. Em outras palavras, para funções deriváveis em um intervalo (a, b), a anulação da derivada em um ponto c é condição necessária mas **não** suficiente para que c seja um extremo relativo, e essa afirmação será comprovada pela ilustração a seguir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Consideremos a função f definida por

$$f(x) = (x - 1)^3$$

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 5. $f'(x) = 3(x - 1)^2$, e assim $f'(1) = 0$. Mas, $f(x) < 0$ se $x < 1$ e $f(x) > 0$ se $x > 1$. Assim, f não tem um extremo relativo em 1. ◀

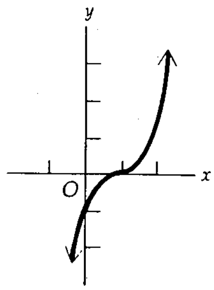


FIGURA 5

Uma função f pode ter um extremo relativo num número e f' pode não existir para este número. Isso é mostrado na Ilustração 2.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \leqslant 3 \\ 8 - x & \text{se } 3 < x \end{cases}$$

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 6. A função f tem um valor máximo relativo em 3. A derivada à esquerda em 3 é dada por $f'_-(3) = 2$, enquanto que a derivada à direita de 3 é dada por $f'_+(3) = -1$. Concluímos, então, que $f'(3)$ não existe. ◀

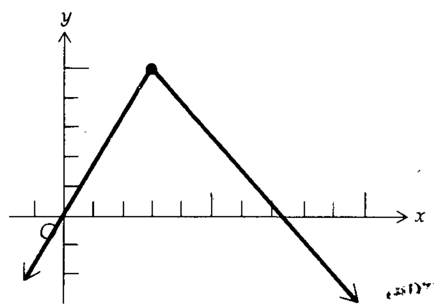


FIGURA 6

A Ilustração 2 demonstra por que a condição "$f'(c)$ existe" deve ser incluída nas hipóteses do Teorema 4.1.3.

É possível que uma função f possa ser definida num número c, onde $f'(c)$ não exista e ainda f pode não ter um extremo relativo nesse número. Tal função será ilustrada agora.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Seja a função f definida por

$$f(x) = x^{1/3}$$

O domínio de f é o conjunto de todos números reais.

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \qquad \text{se } x \neq 0$$

Além disso, $f'(0)$ não existe. A Figura 7 mostra um esboço do gráfico de f. A função não tem extremos relativos. ◀

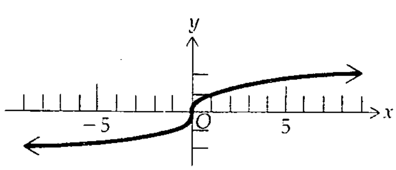


FIGURA 7

Em suma, se uma função f está definida em um número c, uma condição necessária à existência de um extremo relativo para f é que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não exista. Porém, essa condição não é suficiente.

4.1.4 DEFINIÇÃO Se c for um número no domínio da função f e se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existir, então c será chamado de **número crítico** de f.

Dessa definição e da discussão anterior, uma condição necessária (mas não suficiente) à existência de um extremo relativo em c é que c seja um número crítico.

EXEMPLO 1 Ache os números críticos da função f definida por

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$$

Solução

$$f'(x) = \tfrac{4}{3}x^{1/3} + \tfrac{4}{3}x^{-2/3}$$
$$= \tfrac{4}{3}x^{-2/3}(x + 1)$$
$$= \frac{4(x+1)}{3x^{2/3}}$$

Quando $x = -1$, $f'(x) = 0$ e quando $x = 0$, $f'(x)$ não existe. Ambos -1 e 0 estão no domínio de f; logo, os pontos críticos de f são -1 e 0.

EXEMPLO 2 Ache os números críticos da função g definida por

$$g(x) = \text{sen } x \cos x$$

Solução Como $\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x$,

$$g(x) = \tfrac{1}{2} \text{ sen } 2x$$
$$g'(x) = \tfrac{1}{2}(\cos 2x)2$$
$$= \cos 2x$$

Desde que $g'(x)$ exista para todo x, os únicos números críticos são aqueles para os quais $g'(x) = 0$. Como $\cos 2x = 0$, quando

$$2x = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \quad \text{onde } k \text{ é um inteiro qualquer}$$

os números críticos de g são $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

Um problema freqüente refere-se a uma função dada num certo intervalo, onde queremos encontrar o maior ou o menor valor da função. Esses intervalos podem ser fechados, abertos ou fechados num extremo e abertos no outro. O maior valor da função no intervalo é chamado de *valor máximo absoluto* e o menor valor da função no intervalo é chamado de *valor mínimo absoluto*. A seguir, são dadas as definições precisas.

4.1.5 DEFINIÇÃO A função f terá um **valor máximo absoluto num intervalo,** se existir algum número c no intervalo, tal que $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x no intervalo. Em tal caso, $f(c)$ será o valor máximo absoluto de f no intervalo.

4.1.6 DEFINIÇÃO A função f terá um **valor mínimo absoluto num intervalo,** se existir algum número c no intervalo, tal que $f(c) \leqslant f(x)$ para todo x no intervalo. Em tal caso, $f(c)$ será o valor mínimo absoluto de f no intervalo.

Um **extremo absoluto** de uma função num intervalo é um valor máximo absoluto ou um valor mínimo absoluto da função no intervalo. Uma função pode ou não ter um extremo absoluto num intervalo dado. Em cada uma das ilustrações a seguir, uma função e um intervalo são dados e determinamos os extremos absolutos da função no intervalo, quando existirem.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Suponha que f seja a função definida por

$$f(x) = 2x$$

Um esboço do gráfico de f em $[1, 4)$ está na Figura 8. A função f tem um valor mínimo absoluto de 2 em $[1, 4)$. Não há valor máximo absoluto de f em $[1, 4)$, pois $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 8$, mas $f(x)$ é sempre menor do que 8 no intervalo dado. ◀

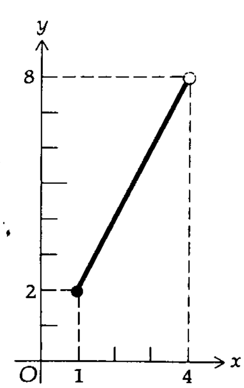


FIGURA 8

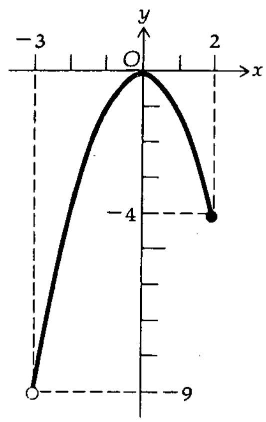


FIGURA 9

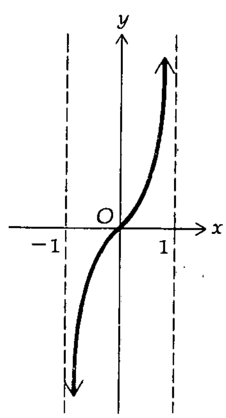


FIGURA 10

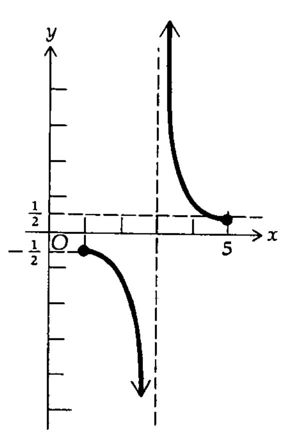


FIGURA 12

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Consideremos a função definida por

$$f(x) = -x^2$$

Um esboço do gráfico de f em $(-3, 2]$ está na Figura 9. A função f tem um valor máximo absoluto de 0 em $(-3, 2]$. Não há valor mínimo absoluto de f em $(-3, 2]$, pois $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -9$, mas $f(x)$ é sempre maior do que -9 no intervalo dado. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** A função f definida por

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

não possui nem valor máximo absoluto nem valor mínimo absoluto em $(-1, 1)$. Um esboço do gráfico de f em $(-1, 1)$ está na Figura 10. Observe que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$ ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 7** Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$$

Um esboço do gráfico de f em $[-5, 4]$ está na Figura 11. O valor máximo absoluto de f em $[-5, 4]$ ocorre em 1 e $f(1) = 2$; o valor mínimo absoluto de f em $[-5, 4]$ ocorre em -5 e $f(-5) = -4$. Note que f tem um valor máximo relativo em 1 e um valor mínimo relativo em 3. Observe também que 1 é um número crítico de f, pois $f'(1)$ não existe e 3 é um número crítico de f, já que $f'(3) = 0$. ◀

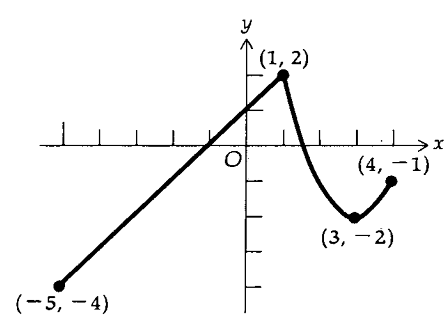


FIGURA 11

▶ **ILUSTRAÇÃO 8** A função f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x - 3}$$

não possui nem valor máximo nem valor mínimo absolutos em $[1, 5]$. Veja, na Figura 12, um esboço do gráfico de f. Como $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$, então, $f(x)$ pode se tornar menor do que qualquer número negativo, quando tomamos $3 - x > 0$, e menor do que um $\delta > 0$ adequado. Da mesma forma, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$; assim, $f(x)$ pode se tornar maior do que qualquer número positivo, quando tomamos $x - 3 > 0$ e menor do que um $\delta > 0$ adequado. ◀

Podemos falar de um extremo absoluto de uma função, mesmo que não seja especificado o intervalo. Em tal caso, estamos nos referindo ao extremo absoluto da função em todo o seu domínio.

4.1.7 DEFINIÇÃO $f(c)$ será o **valor máximo absoluto** da função f se c estiver no domínio de f e se $f(c) \geqslant f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

4.1.8 DEFINIÇÃO $f(c)$ será o **valor mínimo absoluto** da função f se c estiver no domínio de f e se $f(c) \leqslant f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

▶ **ILUSTRAÇÃO 9** O gráfico da função f definida por

$$f(x) = x^2 - 4x + 8$$

é uma parábola e o seu esboço está na Figura 13. O ponto mais baixo da parábola está em (2, 4) e a parábola abre-se para cima. A função tem um valor mínimo absoluto de 4 em 2. Não há valor máximo absoluto de f. ◀

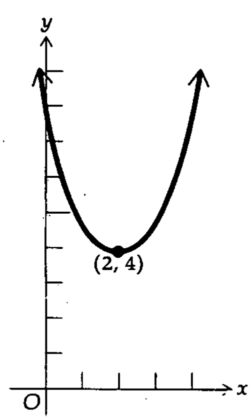


FIGURA 13

Consultando as Ilustrações 4-9, vemos que o único caso no qual existem ambos os valores absolutos máximo e mínimo da função é na Ilustração 7, onde a função é contínua no intervalo fechado $[-5, 4]$. Nas demais ilustrações, não temos um intervalo fechado, ou não temos uma função contínua. Se uma função for contínua num intervalo fechado, há um teorema, conhecido como *teorema do valor extremo*, o qual assegura que a função tem ambos os valores máximo e mínimo absolutos no intervalo. A demonstração desse teorema foge ao contexto deste livro. Você poderá encontrá-la num texto de Cálculo Avançado.

4.1.9 TEOREMA
Teorema do Valor Extremo

Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então f terá um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[a, b]$.

O Teorema 4.1.9 assegura que a continuidade de uma função em um intervalo fechado é condição suficiente para garantir que a função tenha no intervalo ambos os valores, máximo e mínimo, absolutos. A condição, contudo, não é necessária. Por exemplo, a função cujo gráfico está na Figura 14 tem um valor máximo absoluto em $x = c$ e um valor mínimo absoluto em $x = d$ e, no entanto, ela é descontínua no intervalo aberto $(-1, 1)$.

Um extremo absoluto de uma função contínua num intervalo fechado deve ser um extremo relativo, ou um valor de função num extremo do intervalo. Como uma condição necessária para que uma função tenha um extremo relativo num número c é que c seja um número crítico, o valor máximo absoluto e o valor mínimo absoluto de uma função contínua f num intervalo fechado $[a, b]$ podem ser determinados pelo seguinte procedimento:

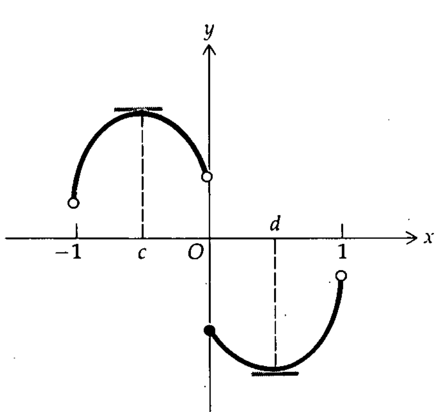


FIGURA 14

1. Ache os valores da função nos números críticos de f em (a, b).
2. Ache os valores de $f(a)$ e $f(b)$.
3. O maior dentre os valores das etapas 1 e 2 será o valor máximo absoluto e o menor será o valor mínimo absoluto.

Tabela 1

x	-2	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	-1	2	$\frac{22}{27}$	$\frac{7}{8}$

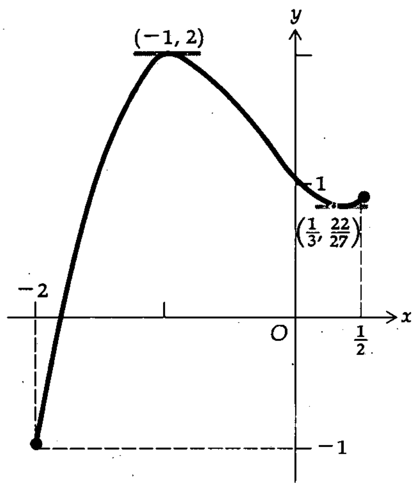


FIGURA 15

EXEMPLO 3 Ache os extremos absolutos de f em $[-2, \frac{1}{2}]$ se

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

Solução Como f é contínua em $[-2, \frac{1}{2}]$, o teorema do valor extremo pode ser aplicado. Para achar os números críticos de f, calculamos primeiro f':

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

Como $f'(x)$ existe para todos os números reais, os únicos números críticos de f serão os valores de x para os quais $f'(x) = 0$. Vamos tomar $f'(x) = 0$.

$$(3x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x = \tfrac{1}{3} \qquad x = -1$$

Os números críticos de f são -1 e $\frac{1}{3}$ e cada um deles está no intervalo fechado $[-2, \frac{1}{2}]$. Os valores da função nos números críticos e nos extremos do intervalo são dados na Tabela 1.

O valor máximo absoluto de f em $[-2, \frac{1}{2}]$ é, portanto, 2, o que ocorre em -1, e o valor mínimo absoluto de f em $[-2, \frac{1}{2}]$ é -1, que ocorre no extremo esquerdo -2. A Figura 15 mostra um esboço do gráfico de f em $[-2, \frac{1}{2}]$.

EXEMPLO 4 Ache os extremos absolutos de f em $[1, 5]$ se

$$f(x) = (x - 2)^{2/3}$$

Solução Como f é contínua em $[1, 5]$, o teorema do valor extremo pode ser aplicado

$$f'(x) = \frac{2}{3(x - 2)^{1/3}}$$

Não existe valor de x para a qual $f'(x) = 0$. Mas, como $f'(x)$ não existe em 2, concluímos que 2 é um número crítico de f; assim, os extremos absolutos ocorrem em 2 ou num dos extremos do intervalo. Os valores da função nesses números estão na Tabela 2.

Da tabela, concluímos que o valor mínimo absoluto de f em $[1, 5]$ é 0, ocorrendo em 2, e o valor máximo absoluto de f em $[1, 5]$ é $\sqrt[3]{9}$, ocorrendo em 5. Um esboço do gráfico dessa função em $[1, 5]$ está na Figura 16.

Tabela 2

x	1	2	5
$f(x)$	1	0	$\sqrt[3]{9}$

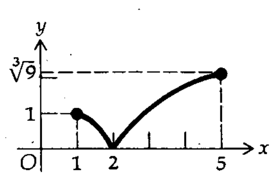


FIGURA 16

EXERCÍCIOS 4.1

Nos Exercícios de 1 a 20, ache os números críticos da função dada.

1. $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$
2. $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 16x + 1$
3. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$
4. $f(x) = x^{7/3} + x^{4/3} - 3x^{1/3}$
5. $g(x) = x^{6/5} - 12x^{1/5}$
6. $f(x) = x^4 + 11x^3 + 34x^2 + 15x - 2$

7. $f(t) = (t^2 - 4)^{2/3}$
8. $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{1/3}$
9. $h(x) = \dfrac{x-3}{x+7}$
10. $f(t) = t^{5/3} - 3t^{2/3}$
11. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$
12. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 5x + 4}$
13. $f(x) = \operatorname{sen}^2 3x$
14. $f(z) = \cos^2 4z$
15. $g(t) = \operatorname{sen} 2t \cos 2t$
16. $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 2x$
17. $f(x) = \operatorname{tg}^2 4x$
18. $g(x) = \sec^2 3x$
19. $G(x) = (x-2)^3(x+1)^2$
20. $F(x) = (5+x)^3(2-x)^2$

Nos Exercícios de 21 a 40, ache os extremos absolutos da função dada no intervalo indicado, se existirem, e determine os valores de x nos quais ocorrem os extremos absolutos. Faça um esboço do gráfico da função no intervalo.

21. $f(x) = 4 - 3x$; $(-1, 2]$
22. $f(x) = x^2 - 2x + 4$; $(-\infty, +\infty)$
23. $g(x) = \dfrac{1}{x}$; $[-2, 3]$
24. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $[2, 3)$
25. $f(x) = 2\cos x$; $[-\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$
26. $G(x) = -3 \operatorname{sen} x$; $[0, \frac{3}{4}\pi)$
27. $f(x) = \sqrt{3+x}$; $[-3, +\infty)$
28. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; $(-2, 2)$
29. $h(x) = \dfrac{4}{(x-3)^2}$; $[2, 5]$
30. $g(x) = \dfrac{3x}{9-x^2}$; $(-3, 2)$
31. $F(x) = |x-4| + 1$; $(0, 6)$
32. $f(x) = |4 - x^2|$; $(-\infty, +\infty)$
33. $g(x) = \sqrt{4+7x}$; $[0, 3)$
34. $F(x) = U(x) - U(x-1)$ onde $U(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$; $(-1, 1)$
35. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-5} & \text{se } x \neq 5 \\ 2 & \text{se } x = 5 \end{cases}$; $[3, 5]$
36. $f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{se } x \neq -1 \\ 3 & \text{se } x = -1 \end{cases}$; $[-2, 1]$
37. $f(x) = x - [\![x]\!]$; $(1, 3)$
38. $h(x) = 2x + [\![2x-1]\!]$; $(1, 2]$
39. $g(x) = \sec 3x$; $[-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi]$
40. $f(x) = \operatorname{tg} 2x$; $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{6}\pi]$

Nos Exercícios de 41 a 58, ache o valor máximo absoluto e o valor mínimo absoluto da função dada no intervalo indicado pelo método usado nos Exemplos 3 e 4 desta secção. Faça um esboço do gráfico da função no intervalo.

41. $g(x) = x^3 + 5x - 4$; $[-3, -1]$
42. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$; $[-4, 4]$
43. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$; $[-4, 0]$
44. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$; $[-3, 2]$
45. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$; $[0, 3]$
46. $g(x) = x^4 - 8x^2 + 16$; $[-1, 4]$
47. $f(t) = 2 \operatorname{sen} t$; $[-\pi, \pi]$
48. $f(w) = 3\cos 2w$; $[\frac{1}{6}\pi, \frac{3}{4}\pi]$
49. $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} 2x$; $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{6}\pi]$
50. $h(x) = 2\sec \frac{1}{2}x$; $[-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi]$
51. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$; $[-1, 2]$
52. $f(x) = \dfrac{x+5}{x-3}$; $[-5, 2]$
53. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$; $[0, 1]$
54. $f(x) = \begin{cases} 2x - 7 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - x^2 & \text{se } 2 < x \leqslant 4 \end{cases}$; $[-1, 4]$
55. $F(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{se } -3 \leqslant x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$; $[-3, 3]$
56. $G(x) = \begin{cases} 4 - (x+5)^2 & \text{se } -6 \leqslant x \leqslant -4 \\ 12 - (x+1)^2 & \text{se } -4 < x \leqslant 0 \end{cases}$; $[-6, 0]$
57. $f(x) = (x+1)^{2/3}$; $[-2, 1]$
58. $g(x) = 1 - (x-3)^{2/3}$; $[-5, 4]$
59. Prove o Teorema 4.1.3 para o caso em que f tem um valor máximo relativo em c.

4.2 APLICAÇÕES ENVOLVENDO EXTREMOS ABSOLUTOS NUM INTERVALO FECHADO

Vamos aplicar o teorema do valor extremo a alguns problemas nos quais a solução é um extremo absoluto de uma função num intervalo fechado. O teorema assegura a existência de ambos os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua num intervalo fechado. Na ilustração a seguir mostraremos o procedimento, considerando o problema discutido no Exemplo 4 da Secção 2.7.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas abertas a partir de pedaços de papelão com 12 cm² cortando quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Queremos encontrar o comprimento do lado do quadrado a ser cortado para obter uma caixa com o maior volume possível. A Figura 1 representa um dado pedaço de papelão e a Figura 2 representa a caixa. Mostramos no Exemplo 4 da Secção 2.7 que se x cm for o comprimento do lado do quadrado a ser cortado e $V(x)$ cm³ for o volume da caixa, então

$$V(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

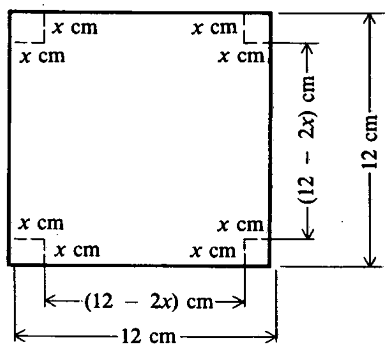


FIGURA 1

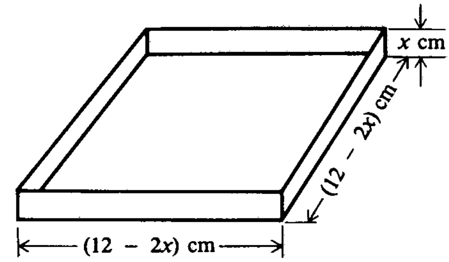


FIGURA 2

e o domínio de V será o intervalo fechado $[0, 6]$. Como V é contínua em $[0, 6]$, segue do teorema do valor extremo que V tem um valor máximo absoluto nesse intervalo. Sabemos também que esse valor máximo absoluto precisa ocorrer num número crítico de V ou num extremo do intervalo. Para encontrar os números críticos de V determinamos $V'(x)$ e então encontramos os valores de x para os quais $V'(x) = 0$ ou $V'(x)$ não existe.

$$V'(x) = 144 - 96x + 12x^2$$

$V'(x)$ existe para todos os valores de x. Se $V'(x) = 0$,

$$12(x^2 - 8x + 12) = 0$$

$$x = 6 \qquad x = 2$$

Os números críticos de V são 2 e 6, ambos pertencentes ao intervalo fechado $[0, 6]$. O valor máximo absoluto de V em $[0, 6]$ precisa ocorrer num número crítico ou num extremo do intervalo. Como $V(0) = 0$ e $V(6) = 0$, enquanto que $V(2) = 128$, o valor máximo absoluto de V em $[0, 6]$ é 128, ocorrendo quando $x = 2$.

Logo, o maior volume possível é de 128 cm³, obtido quando o comprimento do lado do quadrado a ser cortado é de 2 cm. ◀

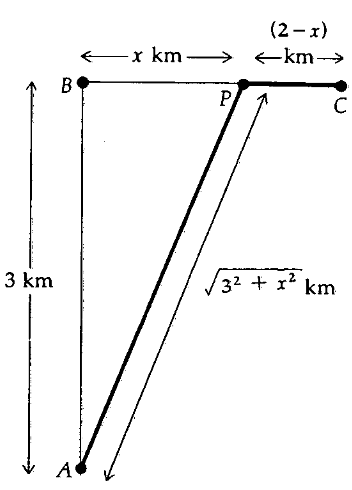


FIGURA 3

EXEMPLO 1 Os pontos A e B estão em lados opostos de um rio reto com 3 km de largura. O ponto C está na mesma margem que B, mas 2 km rio abaixo. Uma companhia telefônica deseja estender um cabo de A até C. Se o custo por quilômetro do cabo é 25% maior sob a água do que em terra, como deve ser estendido o cabo, de forma que o custo seja o menor para a companhia?

Solução Consulte a Figura 3. Seja P um ponto na mesma margem que B e C e entre B e C, de tal forma que o cabo será estendido de A para P e deste para C. Seja x km a distância de B até P. Logo, $(2 - x)$ quilômetros será a distância de P até C e $x \in [0, 2]$. Seja k o custo por quilômetro em terra e $\frac{5}{4}k$ o custo por quilômetro sob a água (k é uma constante). Se $C(x)$ for o custo total da ligação de A até P e de P até C, então

$$C(x) = \tfrac{5}{4}k\sqrt{3^2 + x^2} + k(2 - x)$$

Como C é contínua em $[0, 2]$, o teorema do valor extremo pode ser aplicado, assim, C tem ambos os valores, máximo e mínimo, absolutos, em $[0, 2]$. Queremos encontrar o valor mínimo absoluto.

$$C'(x) = \frac{5kx}{4\sqrt{9 + x^2}} - k$$

$C'(x)$ existe para todos os valores de x. Equacionando $C'(x) = 0$ e resolvendo em x, teremos

$$\frac{5kx}{4\sqrt{9 + x^2}} - k = 0$$

$$5x = 4\sqrt{9 + x^2} \qquad (1)$$

$$25x^2 = 16(9 + x^2)$$

$$9x^2 = 16 \cdot 9$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

O número -4 é uma raiz estranha de (1) e 4 não está no intervalo $[0, 2]$. Logo, não existem números críticos de C em $[0, 2]$. O valor mínimo absoluto de C em $[0, 2]$ deve, portanto, ocorrer num dos extremos do intervalo. Calculando $C(0)$ e $C(2)$, obtemos

$$C(0) = \tfrac{23}{4}k \qquad \text{e} \qquad C(2) = \tfrac{5}{4}k\sqrt{13}$$

Como $\frac{5}{4}\,k\,\sqrt{13} < \frac{23}{4}\,k$, o valor mínimo absoluto de C em $[0, 2]$ é $\frac{5}{4}\,k\,\sqrt{13}$, ocorrendo quando $x = 2$. Logo, para minimizar o custo do cabo, devemos estendê-lo diretamente de A até C sob a água.

EXEMPLO 2 Um campo retangular à margem de um rio deve ser cercado, com exceção do lado ao longo do rio. Se o custo do material for de \$12 por metro linear no lado paralelo ao rio e de \$8 por metro linear nos dois extremos, ache o campo de maior área possível que possa ser cercado com \$3600 de material.

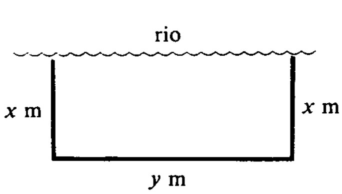


FIGURA 4

Solução Seja x m o comprimento de cada extremo do campo, y m o comprimento do lado paralelo ao rio e A m² a área do campo. Veja a Figura 4. Logo,

$$A = xy \qquad (2)$$

Como o custo do material em cada extremo é de \$8 por metro linear e o comprimento de cada extremo é de x m, o custo total da cerca para cada extremo será de \$$8x$. Analogamente, o custo total da cerca para o terceiro lado é de \$$12y$. Então,

$$8x + 8x + 12y = 3.600 \qquad (3)$$

Para expressar A em termos de uma única variável, resolvemos (3) obtendo y em termos de x e substituímos esse valor em (2), obtendo A como uma função de x, e

$$A(x) = x(300 - \tfrac{4}{3}x) \qquad (4)$$

De (3), se $y = 0$, $x = 225$ e se $x = 0$, $y = 300$. Como ambos, x e y, devem ser não-negativos, o valor de x que irá tornar A um máximo absoluto está no intervalo fechado $[0, 225]$. Como A é contínua no intervalo fechado $[0, 225]$, do teorema do valor extremo, A terá um valor máximo absoluto nesse intervalo. De (4),

$$A(x) = 300x - \tfrac{4}{3}x^2$$

$$A'(x) = 300 - \tfrac{8}{3}x$$

Como $A'(x)$ existe para todo x, os números críticos de A são encontrados ao equacionarmos $A'(x) = 0$, o que dá

$$x = 112\tfrac{1}{2}$$

O único número crítico de A é $112\frac{1}{2}$, que está no intervalo fechado $[0, 225]$. Assim, o valor máximo absoluto de A deve ocorrer em 0, $112\frac{1}{2}$ ou 225. Como $A(0) = 0$ e $A(225) = 0$, enquanto que $A(112\frac{1}{2}) = 16.875$, o valor máximo absoluto de A em $[0, 225]$ é 16.875, ocorrendo quando $x = 112\frac{1}{2}$ e $y = 150$ (obtido de (3), substituindo $112\frac{1}{2}$ por x).

Assim sendo, a maior área possível que poderá ser cercada com \$3.600 de material será 16.875 m², e isto acontece quando o lado paralelo ao rio tiver 150 m e os extremos tiverem, cada um, $112\frac{1}{2}$ m.

EXEMPLO 3 Ao planejar um restaurante, estima-se que se houver de 40 a 80 lugares, o lucro bruto diário será de \$16 por lugar. Se, contudo, o número de assentos for acima de 80 lugares, o lucro bruto diário por lugar decrescerá de \$0,08 vezes o número de lugares acima de 80. Qual deverá ser o número de assentos para que o lucro bruto diário seja máximo?

Solução Seja x o número de lugares e $P(x)$ o lucro bruto diário. $P(x)$ é obtido ao multiplicarmos por x o lucro por lugar. Quando $40 \leqslant x \leqslant 80$, o lucro por lugar será de \$16; assim, $P(x) = 16x$. Se contudo, $x > 80$, então o lucro por lugar será de $16 - 0{,}08\,(x - 80)$, dando assim $P(x) = x\,[16 - 0{,}08\,(x - 80)]$; isto é, $P(x) = 22{,}40x - 0{,}08x^2$. Assim,

$$P(x) = \begin{cases} 16x & \text{se} \quad 40 \leqslant x \leqslant 80 \\ 22{,}40x - 0{,}08x^2 & \text{se} \quad 80 < x \leqslant 280 \end{cases}$$

O limitante superior de 280 para x foi obtido notando que $22{,}40x - 0{,}08x^2 = 0$ quando $x = 280$ e quando $x > 280$, $22{,}40x - 0{,}08x^2$ é negativo.

Mesmo que x, por definição, seja um inteiro, para ter uma função contínua, vamos supor que x possa assumir todos os valores reais no intervalo $[40, 280]$. Há continuidade em 80, pois $P(80) = 1.280$ e

$$\lim_{x \to 80^-} P(x) = \lim_{x \to 80^-} 16x \qquad \lim_{x \to 80^+} P(x) = \lim_{x \to 80^+} (22{,}40x - 0{,}08x^2)$$

$$= 1.280 \qquad\qquad = 1.280$$

Assim, P é contínua no intervalo fechado $[40, 280]$ e o teorema do valor extremo garante um valor máximo absoluto de P nesse intervalo.

Quando $40 < x < 80$, $P'(x) = 16$; quando $80 < x < 280$, $P'(x) = 22{,}40 - 0{,}16x$. $P'(80)$ não existe, pois $P'_-(80) = 16$ e $P'_+(80) = 9{,}60$. Equacionando $P'(x) = 0$,

$$22{,}40 - 0{,}16x = 0$$

$$x = 140$$

Os números críticos de P são, então, 80 e 140. Vamos calcular $P(x)$ nos pontos extremos do intervalo [40, 280] e nos números críticos.

$$P(40) = 640 \qquad P(80) = 1.280 \qquad P(140) = 1.568 \qquad P(280) = 0$$

O valor máximo absoluto de P é, portanto, de 1.568, ocorrendo quando $x = 140$.

A capacidade de assentos deve ser de 140 lugares, o que dá um lucro bruto diário de \$1.568.

EXEMPLO 4 Ache as dimensões do cilindro circular reto de maior volume que possa ser inscrito num cone circular reto com um raio de 5 cm e 12 cm de altura.

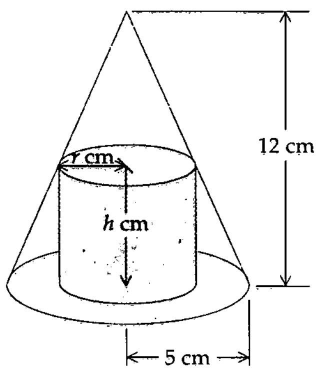


FIGURA 5

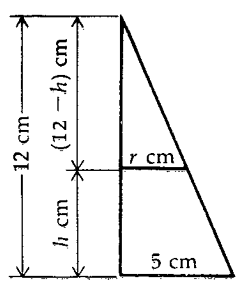


FIGURA 6

Solução Seja r cm o raio do cilindro, h cm sua altura e V cm³ o seu volume.

A Figura 5 ilustra o cilindro inscrito no cone e a Figura 6 mostra uma secção plana através do eixo do cone.

Se $r = 0$ e $h = 12$, temos um cilindro degenerado que é o eixo do cone. Se $r = 5$ e $h = 0$, também temos um cilindro degenerado, que é um diâmetro da base do cone. O número r está no intervalo fechado [0, 5] e h está no intervalo fechado [0, 12].

A fórmula a seguir expressa V em termos de r e h:

$$V = \pi r^2 h \tag{5}$$

Para expressar V em termos de uma única variável, precisamos de uma outra equação envolvendo r e h. Da Figura 6, usando semelhança de triângulos,

$$\frac{12-h}{r} = \frac{12}{5}$$

$$h = \frac{60-12r}{5} \tag{6}$$

Substituindo (6) na fórmula (5), iremos obter V como uma função de r e escrevemos

$$V(r) = \tfrac{12}{5}\pi(5r^2 - r^3) \qquad \text{com } r \text{ em } [0, 5] \tag{7}$$

Como V é contínua no intervalo fechado [0, 5], segue do teorema do valor extremo que V tem um valor máximo absoluto nesse intervalo. Os valores de r e h que acarretam esse valor máximo absoluto para V são os números que devem ser encontrados.

$$V'(r) = \tfrac{12}{5}\pi(10r - 3r^2)$$

Para encontrar os números críticos de V, equacionamos $V'(r) = 0$ e resolvemos em r:

$$r(10 - 3r) = 0$$

$$r = 0 \qquad r = \tfrac{10}{3}$$

Como $V'(r)$ existe para todos os valores de r, os únicos números críticos de V são 0 e $\frac{10}{3}$, ambos no intervalo fechado [0, 5]. O valor máximo absoluto de V em [0, 5] deve ocorrer em um dos números 0, $\frac{10}{3}$ ou 5. De (7), obtemos

$$V(0) = 0 \qquad V(\tfrac{10}{3}) = \tfrac{400}{9}\pi \qquad V(5) = 0$$

Logo, o valor máximo absoluto de V é $\frac{400}{9}\pi$, ocorrendo quando $r = \frac{10}{3}$. Quando $r = \frac{10}{3}$, de (6) decorre que $h = 4$.

Assim sendo, o maior volume do cilindro inscrito no cone dado é $\frac{400}{9}\pi$ cm^3 e teremos esse valor quando o raio for de $\frac{10}{3}$ cm e a altura for de 4 cm.

EXERCÍCIOS 4.2

Em alguns dos exercícios, a variável independente, por definição, pode representar um número inteiro não-negativo. Por exemplo, no Exercício 17, se x representar o número de estudantes, então x deverá ser um inteiro não-negativo. Para que haja continuidade em tais exercícios, requisito necessário para podermos aplicar o cálculo, permita que a variável independente seja um número real não-negativo.

1. Consulte o Exercício 41 da série de Exercícios 2.7. Um fabricante de latas sem tampas deseja usar folhas-de-flandres com dimensões de 8 cm por 15 cm, cortando quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Use o método desta secção para encontrar o comprimento do lado do quadrado a ser cortado, a fim de obter de cada folha-de-flandres uma caixa aberta, tendo o maior volume possível.

2. Consulte o Exercício 42, da série de Exercícios 2.7. Suponha que o fabricante do Exercício 1 faça as latas abertas de pedaços quadrados de flandres com k cm de lado. Determine o comprimento do quadrado a ser cortado, de tal forma que o volume da caixa seja um máximo.

3. Consulte o Exercício 43 da série de Exercícios 2.7. Ache as dimensões do maior campo retangular que pode ser fechado com 240 m de cerca.

4. Ache as dimensões do maior jardim retangular que pode ser fechado com 100 m de cerca.

5. Se um dos lados de um campo retangular for um rio, ache as dimensões do maior campo retangular que pode ser fechado usando 240 m de cerca para os outros três lados.

6. Consulte o Exercício 44 da série de Exercícios 2.7. Ache as dimensões do maior jardim retangular, de forma que uma casa limite um lado do jardim e 100 m de cerca sejam usados nos outros três lados.

7. Ache o número no intervalo $[0, 1]$, tal que a diferença entre o número e seu quadrado seja um máximo.

8. Ache o número no intervalo $[\frac{1}{3}, 2]$, tal que a soma do número com seu recíproco seja um máximo.

9. Ache a área do maior retângulo tendo dois vértices no eixo x e os dois outros vértices sobre a parábola $y = 9 - x^2$ acima do eixo x.

10. Ache a área do maior retângulo que possa ser inscrito numa circunferência dada de raio r.

11. Uma ilha está num ponto A, a 6 km do ponto mais próximo B, numa praia reta. Uma mulher na ilha deseja ir a um ponto C, a 9 km do ponto B. A mulher pode alugar um barco por \$15 o quilômetro e navegar até um ponto P entre B e C e então alugar um carro a um custo de \$12 por quilômetro e chegar a C por uma estrada reta. Ache o percurso mais barato de A até C.

12. Resolva o Exercício 11 se o ponto C estiver a 7 km de B.

13. Resolva o Exemplo 1 desta secção se o ponto C estiver a 6 km rio abaixo de B.

14. O Exemplo 1 e os Exercícios 11, 12 e 13 são casos particulares do seguinte problema geral. Seja

$$f(x) = u\sqrt{a^2 + x^2} + v(b - x).$$

onde x está em $[0, b]$ e $u > v > 0$. Mostre que para o valor mínimo absoluto de f ocorrer em um número do intervalo aberto $(0, b)$, a seguinte desigualdade deve estar satisfeita:

$$av < b\sqrt{u^2 - v^2}.$$

15. Se R m for o alcance de um projétil, então

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \tfrac{1}{2}\pi$$

onde v_0 m/s é a velocidade inicial, g m/s^2 é a aceleração da gravidade e θ é a medida em radianos do ângulo que a arma faz com a horizontal. Ache o valor de θ para que o alcance seja máximo.

16. Se um corpo com W kg de peso for arrastado ao longo de um piso horizontal por uma força com F kg de magnitude e segundo uma direção que faz um ângulo de θ rad. com o plano do piso, então F será dada pela equação

$$F = \frac{kW}{k \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

onde k é uma constante chamada de coeficiente de atrito e $0 < k < 1$. Se $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, ache $\cos \theta$ quando F for mínima.

17. Consulte o Exercício 39, da série de Exercícios 3.2. Uma excursão de uma escola que pode acomodar até 250 estudantes custará \$15 por estudante, se no máximo 150 fizerem a viagem, contudo, o custo por estudante será reduzido em \$0,05 para cada estudante que exceder 150, até que o custo seja de \$10 por estudante. Quantos estudantes devem fazer a excursão para que a escola receba a maior renda bruta?

18. Resolva o Exercício 17, se a redução por estudante que exceder 150 for de \$0,07.

19. Um clube privado cobra a anuidade de \$100 por membro, menos \$0,50 para cada membro acima de 600 e mais \$0,50 para cada membro abaixo de 600. Quantos membros darão ao clube um rendimento anual máximo?

20. Consulte o Exercício 40, da série de Exercícios 3.2. Um fabricante pode obter um luco de $20 em cada item, se forem produzidos por semana no máximo 800 itens. O lucro decresce $0,02 por item acima de 800. Quantos itens deverão ser produzidos por semana, para que ele obtenha um lucro máximo?

21. Laranjeiras na Califórnia produzem 600 laranjas por ano, se forem plantadas no máximo 20 árvores por acre (4 km^2). Cada árvore plantada a mais causa um decréscimo de 15 laranjas por pé. Quantas árvores devem ser plantadas por acre para se obter o maior número de laranjas?

22. Mostre que o maior retângulo tendo um perímetro dado de p unidades é um quadrado.

23. Ache as dimensões do cilindro circular reto de maior área de superfície lateral que possa ser inscrito numa esfera com um raio de 6 cm.

24. Ache as dimensões do cilindro circular reto de maior volume que possa ser inscrito numa esfera com um raio de 6 cm.

25. Para um pacote ser aceito por um determinado serviço de entrega de encomendas, a soma do comprimento e do perímetro da secção transversal não deve ser maior do que 100 cm. Se um pacote tiver o formato de uma caixa retangular com uma secção quadrada, ache as dimensões do pacote tendo o maior volume possível que possa ser despachado.

26. Dois produtos, A e B, são produzidos por determinada fábrica. Se C for o custo total de produção numa jornada de 8 horas por dia, então $C = 3x^2 + 42y$, onde x e y são o número de máquinas que são usadas para produzir A e B, respectivamente. Se durante a jornada de 8 horas tivermos 15 máquinas em funcionamento, determine quantas devem produzir A e quantas devem produzir B, para que o custo total seja mínimo.

27. Dado a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$, ache (a) a menor distância entre o ponto (4, 5) e um ponto na circunferência; (b) a maior distância entre o ponto (4, 5) e um ponto na circunferência.

28. Suponha que um peso deva ser mantido 10 m abaixo de uma reta horizontal AB por um fio com a forma de Y. Se os pontos A e B estão a uma distância de 8 m um do outro, qual o fio de menor comprimento que pode ser usado?

29. Suponha que a diminuição na pressão sangüínea de uma pessoa dependa de uma determinada droga que ela deverá tomar. Assim, se x mg da droga forem tomados, a queda na pressão sangüínea será uma função de x. Seja $f(x)$ esta função e

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2(k - x)$$

onde x está em $[0, k]$ e k é uma constante positiva. Determine o valor de x que cause o maior decréscimo na pressão sangüínea.

30. Durante a tosse há um decréscimo no raio da traquéia de uma pessoa. Suponha que o raio normal da traquéia seja R cm e que durante a tosse o raio seja de r cm, onde R é uma constante e r é uma variável. Podemos mostrar que a velocidade do ar através da traquéia é uma função de r e se $V(r)$ cm/s for essa velocidade, então

$$V(r) = kr^2(R - r)$$

onde k é uma constante positiva e r está em $[\frac{1}{2}R, R]$. Determine o raio da traquéia durante a tosse, para o qual a velocidade do ar através da traquéia seja máxima.

31. Numa determinada vila, a taxa segundo a qual um boato se espalha é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que ouviram o boato e ao número de pessoas que não ouviram. Mostre que o boato está sendo espalhado com velocidade máxima, quando a metade da população da cidade já o escutou.

32. Um determinado lago pode suportar até 14.000 peixes e a taxa de crescimento da população de peixes é conjuntamente proporcional ao número de peixes presentes e à diferença entre 14.000 e o número de peixes existentes. Qual deve ser o tamanho da população de peixes para que a taxa de crescimento seja máxima?

33. A resistência de uma viga retangular é conjuntamente proporcional à sua largura e ao quadrado de sua profundidade. Ache as dimensões da viga mais resistente que possa ser cortada de uma tora na forma de um cilindro circular reto com 72 cm de raio.

34. A rigidez de uma viga retangular é conjuntamente proporcional à sua largura e ao cubo de sua profundidade. Ache as dimensões da viga mais rígida que possa ser cortada de uma tora na forma de um cilindro circular reto com a cm de raio.

35. Um pedaço de arame com 10 m é cortado em duas partes. Uma delas é curvada na forma circular e a outra, na forma de um quadrado. Como dividir o fio, de tal forma que (a) a área combinada das duas figuras seja a menor possível; (b) a área combinada das duas figuras seja a maior possível?

36. Resolva o Exercício 35, se uma das partes for dobrada na forma de um triângulo equilátero, e a outra, na forma de um quadrado.

4.3 TEOREMA DE ROLLE E TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Ressaltamos a importância do teorema do valor médio na introdução deste capítulo. A demonstração do teorema do valor médio é baseada num caso particular, conhecido como *teorema de Rolle*, que discutiremos primeiro.

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, derivável no intervalo aberto (a, b) e tal que $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$. O matemático francês Michel Rolle (1652-1719) provou que se uma função satisfaz essas condições, existe pelo menos um número c entre a e b para o qual $f'(c) = 0$.

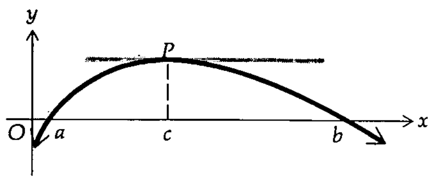


FIGURA 1

Vejamos qual o significado geométrico disto. A Figura 1 mostra um esboço do gráfico de uma função f que satisfaz as condições do parágrafo precedente. Vemos, intuitivamente, que existe pelo menos um ponto sobre a curva entre os pontos $(a, 0)$ e $(b, 0)$, onde a reta tangente é paralela ao eixo x; isto é, a inclinação da reta tangente é zero. Esta situação é ilustrada na Figura 1, no ponto P. Assim sendo, a abscissa de P é o c, tal que $f'(c) = 0$.

A função cujo gráfico está esboçado na Figura 1 não é derivável apenas no intervalo aberto (a, b); isso ocorre também nos extremos do intervalo. Mas, a condição de que f seja derivável nos extremos não é necessária, para que o gráfico tenha uma reta tangente horizontal em algum ponto no intervalo; a Figura 2 ilustra isso. Vemos, nessa figura, que a função não é derivável em a e b; contudo, existe uma reta tangente no ponto onde $x = c$ e c está entre a e b.

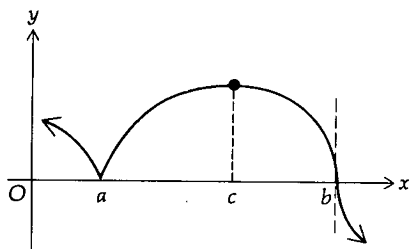


FIGURA 2

Entretanto, é necessário que a função seja contínua nos extremos do intervalo, para garantir a existência dessa tangente. A Figura 3 mostra um esboço do gráfico de uma função que é contínua no intervalo $[a, b)$, mas descontínua em b; a função é derivável no intervalo aberto (a, b), e os valores funcionais são zero em ambos os pontos, a e b. Não existe, contudo, nenhum ponto no qual o gráfico tenha uma reta tangente horizontal.

Vamos enunciar e provar agora o teorema de Rolle.

4.3.1 TEOREMA
Teorema de Rolle

Seja f uma função, tal que

(i) ela seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$;
(ii) ela seja derivável no intervalo aberto (a, b);
(iii) $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$.

Então existe um número c no intervalo aberto (a, b), tal que

$f'(c) = 0$.

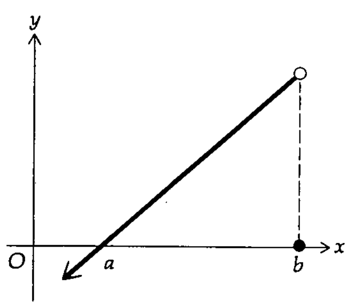


FIGURA 3

Prova Vamos considerar dois casos.

Caso 1: $f(x) = 0$ para todo x em $[a, b]$.

Então, $f'(x) = 0$ para todo x em (a, b); logo, qualquer número entre a e c pode ser tomado como c.

Caso 2: $f(x)$ não se anula para todos os valores de x no intervalo aberto (a, b).

Como f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, do teorema do valor extremo, f tem um valor máximo e um valor mínimo absolutos em $[a, b]$. De (iii), $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$. Além disso, $f(x)$ não é zero para todo x em (a, b). Logo, f terá um valor máximo absoluto positivo em algum c_1 de (a, b), ou um valor mínimo absoluto negativo em algum c_2 de (a, b), ou ambos. Assim, para $c = c_1$ ou $c = c_2$, conforme o caso, existe um extremo absoluto num ponto interior ao intervalo $[a, b]$. Logo, o extremo absoluto $f(c)$ é também um extremo relativo, e como por hipótese existe $f'(c)$, segue do Teorema 4.1.3 que $f'(c) = 0$. Isso prova o teorema. ■

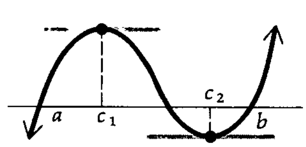


FIGURA 4

Pode existir mais de um número no intervalo aberto (a, b), para o qual a derivada de f seja zero. Isso é ilustrado geometricamente na Figura 4, onde a reta tangente é horizontal no ponto onde $x = c_1$ e também no ponto onde $x = c_2$; assim, ambos $f'(c_1) = 0$ e $f'(c_2) = 0$.

O inverso do teorema de Rolle não é verdadeiro. Isto é, não podemos concluir que se uma função f for tal que $f'(c) = 0$, como $a < c < b$, então serão verdadeiras as condições (i), (ii) e (iii). Veja o Exercício 32.

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x) = 4x^3 - 9x$$

comprove que as condições (i), (ii) e (iii) das hipóteses do teorema de Rolle estão satisfeitas em cada um dos seguintes intervalos: $[-\frac{3}{2}, 0]$, $[0, \frac{3}{2}]$ e $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. Ache então um valor de c em cada um desses intervalos para os quais $f'(c) = 0$.

Solução

$$f'(x) = 12x^2 - 9$$

Como $f'(x)$ existe para todos os valores de x, f é derivável em $(-\infty, +\infty)$. Assim, as condições (i) e (ii) do teorema de Rolle são válidas em qualquer intervalo. Para determinar em quais intervalos a condição (iii) se verifica, encontramos os valores de x para os quais $f(x) = 0$. Se $f(x) = 0$,

$$4x(x^2 - \tfrac{9}{4}) = 0$$

$$x = -\tfrac{3}{2} \qquad x = 0 \qquad x = \tfrac{3}{2}$$

Com $a = -\frac{3}{2}$ e $b = 0$ o teorema de Rolle é válido em $[-\frac{3}{2}, 0]$. Analogamente, o teorema de Rolle é válido em $[0, \frac{3}{2}]$ e $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

Para encontrar os valores adequados de c, equacionamos $f'(x) = 0$, obtendo

$$12x^2 - 9 = 0$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \qquad x = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Portanto, no intervalo $[-\frac{3}{2}, 0]$, uma escolha adequada para c é $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$. No intervalo $[0, \frac{3}{2}]$, tomamos $c = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, enquanto que no intervalo $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ temos duas possibilidades para c: $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ou $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Vamos aplicar agora o teorema de Rolle para provar o teorema do valor médio. Você deverá se familiarizar bem com o conteúdo deste teorema.

4.3.2 TEOREMA
Teorema do Valor Médio

Seja f uma função, tal que

(i) seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$;
(ii) seja derivável no intervalo aberto (a, b).

Então, existirá um número c no intervalo aberto (a, b), tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Antes de demonstrar o teorema, vamos interpretá-lo geometricamente. Num esboço do gráfico da função f, $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ é a inclinação do segmento de reta que liga os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$. O teorema do valor médio afirma que existe um ponto sobre a curva entre A e B, onde a reta tangente

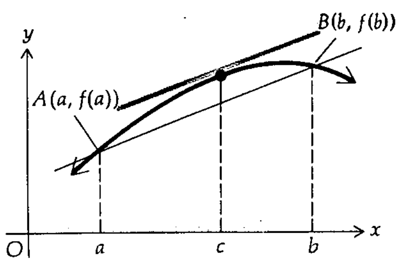


FIGURA 5

é paralela à reta secante por A e B; isto é, existe um número c em (a, b), tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Consulte a Figura 5.

Se tomarmos o eixo x coincidente com a reta secante AB, podemos observar que o teorema do valor médio é uma generalização do teorema de Rolle, o qual será usado em sua demonstração.

Prova do Teorema 4.3.2 Uma equação da reta que passa por A e B na Figura 5 é

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Seja, agora, $F(x)$ a medida da distância vertical entre o ponto $(x, f(x))$ do gráfico da função f e o ponto correspondente sobre a reta secante por A e B; então,

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a) \tag{1}$$

Vamos mostrar que a função F satisfaz as três condições da hipótese do teorema de Rolle.

A função F é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, pois é a soma de f com uma função polinomial linear, ambas as quais são contínuas no intervalo. Logo, a condição (i) está satisfeita por F. A condição (ii) está satisfeita por F, pois f é derivável em (a, b). De (1), segue que $F(a) = 0$ e $F(b) = 0$. Portanto, também a condição (iii) do teorema de Rolle está satisfeita por F.

Da conclusão do teorema de Rolle, temos que existe um c no intervalo aberto (a, b), tal que $F'(c) = 0$. Mas

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Assim,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Logo, existe um número c em (a, b), tal que

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

como queríamos demonstrar. ■

EXEMPLO 2 Dada

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$$

comprove que as hipóteses do teorema do valor médio estão satisfeitas para $a = 1$ e $b = 3$. Então, encontre todos os números c no intervalo aberto $(1, 3)$, tais que

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

Solução Como f é uma função polinomial, ela será contínua e derivável para todos os valores de x. Logo, as hipóteses do teorema do valor médio estão satisfeitas para todo a e b.

$$f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$$

$$f(1) = -7 \quad \text{e} \quad f(3) = -27$$

Logo,

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-27 - (-7)}{2}$$

$$= -10$$

Equacionando $f'(c) = -10$, obtemos

$$3c^2 - 10c - 3 = -10$$

$$3c^2 - 10c + 7 = 0$$

$$(3c - 7)(c - 1) = 0$$

$$c = \tfrac{7}{3} \qquad c = 1$$

Como 1 não está no intervalo aberto $(1, 3)$, o único valor possível para c é $\frac{7}{3}$.

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x) = x^{2/3}$$

faça um esboço do gráfico de f. Mostre que não existe nenhum número c no intervalo aberto $(-2, 2)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$$

Que condição dentre as hipóteses do teorema do valor médio não está satisfeita para f quando $a = -2$ e $b = 2$?

Solução Um esboço do gráfico f aparece na Figura 6.

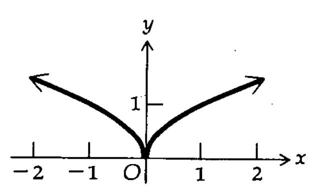


FIGURA 6

$$f'(x) = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$

Assim,

$$f'(c) = \frac{2}{3c^{1/3}}$$

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{4^{1/3} - 4^{1/3}}{4}$$

$$= 0$$

Não existe um número c para o qual $\dfrac{2}{3c^{1/3}} = 0$.

A função f é contínua no intervalo fechado $[-2, 2]$; contudo, f não é derivável no intervalo aberto $(-2, 2)$, pois $f'(0)$ não existe. Logo, a condição (ii) das hipóteses do teorema do valor médio não está satisfeita para f, quando $a = -2$ e $b = 2$.

Antes do enunciado do teorema do valor médio, indicamos que se trata de um dos mais importantes teoremas de cálculo, pois é usado na demonstração de muitos outros teoremas. Em tais casos, não é necessário encontrar o valor do número c garantido pelo teorema. O fato crucial do teorema é a existência do número c. Para indicar importância do teorema do valor médio, mostramos o seu uso na demonstração do teorema a seguir, que será necessário no Capítulo 5.

4.3.3 TEOREMA Se f for uma função tal que $f'(x) = 0$ para todos os valores de x num intervalo I, então f será constante em I.

Prova Suponha que f não seja constante no intervalo I. Então, existem dois números distintos, x_1 e x_2 em I, com $x_1 < x_2$, tais que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Como, por hipótese, $f'(x) = 0$ para todo x em I, então $f'(x) = 0$ para todo x no intervalo fechado $[x_1, x_2]$. Logo, f é derivável para todo x em $[x_1, x_2]$ e f é contínua em $[x_1, x_2]$. Portanto, a hipótese do teorema do valor médio está satisfeita, e então existe um número c, com $x_1 < c < x_2$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \tag{2}$$

Mas como $f'(x) = 0$ para todo x no intervalo $[x_1, x_2]$, então $f'(c) = 0$ e de (2) segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Mas supomos que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Temos, portanto, uma contradição e, assim sendo, f é constante em I. ■

Um outro teorema importante, em cuja demonstração é utilizado o teorema do valor médio, é o Teorema 4.4.3, dado na secção a seguir.

EXERCÍCIOS 4.3

Nos Exercícios de 1 a 4, comprove que as condições (i), (ii) e (iii) das hipóteses do teorema de Rolle estão satisfeitas pela função dada no intervalo indicado. Ache, então, um valor adequado de c que satisfaça a conclusão do teorema de Rolle.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $[1, 3]$
2. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$; $[1, 2]$
3. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$; $[0, \frac{1}{2}\pi]$
4. $f(x) = 3\cos^2 x$; $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$

Nos Exercícios de 5 a 10, comprove que as hipóteses do teorema do valor médio estão satisfeitas pela função dada no intervalo indicado. Ache, então, um valor adequado de c que satisfaça a conclusão do teorema do valor médio.

5. $f(x) = x^2 + 2x - 1$; $[0, 1]$
6. $f(x) = x^3 + x^2 - x$; $[-2, 1]$
7. $f(x) = x^{2/3}$; $[0, 1]$
8. $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$; $[0, \frac{1}{2}\pi]$
9. $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$; $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$
10. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 7}$; $[2, 6]$

Nos Exercícios de 11 a 16, (a) faça um esboço do gráfico da função no intervalo indicado; (b) teste as três condições (i), (ii) e (iii) das hipóteses do teorema de Rolle e determine quais entre elas são satisfeitas; e (c) se as três condições de (b) forem satisfeitas, determine um ponto no qual existe uma reta tangente horizontal.

11. $f(x) = x^{4/3} - 3x^{1/3}$; $[0, 3]$
12. $f(x) = x^{3/4} - 2x^{1/4}$; $[0, 4]$
13. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 3}$; $[-3, 4]$
14. $f(x) = \begin{cases} 3x + 6 & \text{se } x < 1 \\ x - 4 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$; $[-2, 4]$
15. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 1 \\ 5x - 8 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$; $[-2, \frac{8}{5}]$
16. $f(x) = 1 - |x|$; $[-1, 1]$

A interpretação geométrica do teorema do valor médio é que para um valor adequado de c no intervalo aberto (a, b), a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Nos Exercícios de 17 a 20, ache um valor de c que satisfaça a conclusão do teorema do valor médio, faça um esboço do gráfico no intervalo fechado [a, b] e coloque no gráfico as retas tangente e secante.

17. $f(x) = x^2$; $a = 3, b = 5$ **18.** $f(x) = x^2$; $a = 2, b = 4$
19. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $a = 0, b = \frac{1}{2}\pi$
20. $f(x) = 2 \cos x$; $a = \frac{1}{3}\pi, b = \frac{2}{3}\pi$

Para cada uma das funções dos Exercícios de 21 a 24, não existe um número c no intervalo aberto (a, b) que satisfaça a conclusão do teorema do valor médio. Em cada exercício, determine qual das hipóteses do teorema do valor médio não é satisfeita. Faça um esboço do gráfico de $y = f(x)$ e da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

21. $f(x) = \dfrac{4}{(x-3)^2}$; $a = 1, b = 6$

22. $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x-4}$; $a = 1, b = 2$

23. $f(x) = 3(x-4)^{2/3}$; $a = -4, b = 5$

24. $f(x) = \begin{Bmatrix} 2x+3 & \text{se } x < 3 \\ 15-2x & \text{se } 3 \leqslant x \end{Bmatrix}$; $a = -1, b = 5$

25. Se $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$, then $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$. Prove, pelo teorema de Rolle, que a equação a seguir tem pelo menos uma raiz real no intervalo aberto (0, 1):

$$4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0.$$

26. Prove, pelo teorema de Rolle, que a equação $x^3 + 2x + c = 0$, onde c é qualquer constante, não pode ter mais do que uma raiz real.

27. Use o teorema de Rolle para provar que a equação

$$4x^5 + 3x^3 + 3x - 2 = 0$$

tem exatamente uma raiz no intervalo (0, 1). (*Sugestão*: mostre primeiro que existe um número em (0, 1) que é a raiz da equação. Então, suponha que exista mais de uma raiz da equação em (0, 1) e mostre que isso leva a uma contradição.)

28. Suponha que $s = f(t)$ seja a equação do movimento de uma partícula sobre uma reta, onde f satisfaz as hipóteses do teorema do valor médio. Mostre que a conclusão do teorema do valor médio assegura que irá existir um certo instante em qualquer intervalo de tempo, no qual a velocidade instantânea será igual à velocidade média para aquele mesmo intervalo de tempo.

29. Se a equação do movimento do Exercício 28 for $s = t^2 - t + 4$ e $t \in [0, 3]$, ache o valor de t onde a velocidade instantânea é igual à velocidade média para o intervalo dado.

30. Se $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$, use o Teorema 4.3.3 para mostrar que $f(x) = 1$ para todo x em $[-2\pi, 2\pi]$.

31. Suponha que a função f seja contínua em $[a, b]$ e $f'(x) = 1$ para todo x em (a, b). Prove que $f(x) = x - a + f(a)$ para todo x em $[a, b]$.

32. O inverso do teorema de Rolle não é válido. Dê um exemplo de uma função para a qual a conclusão do teorema de Rolle é verdadeira e para a qual (a) a condição (i) não está satisfeita, mas as condições (ii) e (iii) estão; (b) a condição (ii) não está satisfeita, mas as condições (i) e (iii) estão; (c) a condição (iii) não está satisfeita, mas as condições (i) e (ii) estão. Faça um esboço do gráfico, mostrando a reta tangente horizontal em cada caso.

33. Use o teorema de Rolle para provar que se todo polinômio de quarto grau tiver no máximo quatro raízes reais, então todo polinômio do quinto grau terá no máximo cinco raízes reais. (*Sugestão*: suponha que um polinômio do quinto grau tenha seis raízes reais e mostre que isto leva a uma contradição.)

34. Use o método do Exercício 33 e a indução matemática para provar que um polinômio de grau n tem no máximo n raízes reais.

4.4 FUNÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTES E O TESTE DA DERIVADA PRIMEIRA

A Figura 1 representa um esboço do gráfico de uma função f para todo x no intervalo fechado $[x_1, x_7]$. Neste esboço, estamos supondo que f seja contínua em $[x_1, x_7]$. A figura mostra que quando um ponto se move ao longo da curva de A para B, os valores funcionais aumentam quando as abscissas aumentam, e que quando um ponto se move ao longo da curva de B para C, os valores funcionais decrescem, enquanto que as abscissas crescem. Dizemos, então, que f é *crescente* no intervalo fechado $[x_1, x_2]$ e é *decrescente* no intervalo fechado $[x_2, x_3]$. Seguem as definições precisas de funções crescentes e decrescentes num intervalo.

4.4.1 DEFINIÇÃO

Uma função f definida num intervalo será **crescente** naquele intervalo, se e somente se

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{sempre que} \quad x_1 < x_2$$

onde x_1 e x_2 são quaisquer números no intervalo.

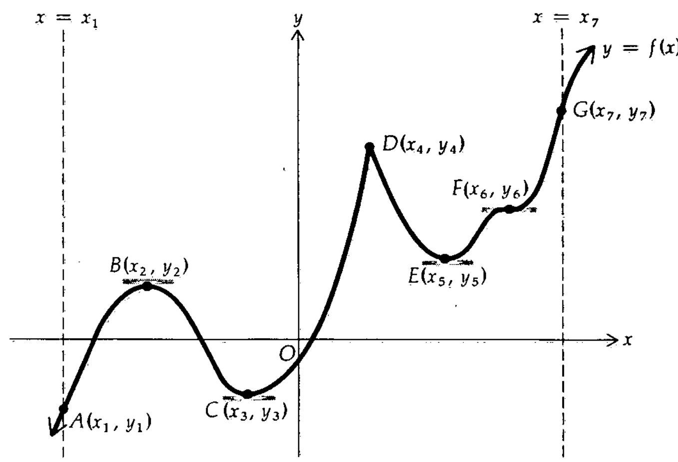


FIGURA 1

A funçao mostrada na Figura 1 é crescente nos seguintes intervalos fechados: $[x_1, x_2]$; $[x_3, x_4]$; $[x_5, x_6]$; $[x_6, x_7]$; $[x_5, x_7]$.

4.4.2 DEFINIÇÃO Uma função f definida num intervalo será **decrescente** naquele intervalo se e somente se

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{sempre que} \quad x_1 < x_2$$

onde x_1 e x_2 são quaisquer números no intervalo.

A função representada na Figura 1 é decrescente nos seguintes intervalos fechados: $[x_2, x_3]$; $[x_4, x_5]$.

Se uma função for crescente ou decrescente num dado intervalo, então dizemos que ela é **monótona** no intervalo.

Antes de enunciar um teorema que dá um teste para determinar se uma dada função é monótona* num intervalo, vejamos o que está acontecendo geometricamente. Consulte a Figura 1 e observe que quando a inclinação da reta tangente for positiva, a função será crescente e quando a inclinação da reta tangente for negativa, a função será decrescente. Como $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$, f é crescente quando $f'(x) > 0$ e decrescente quando $f'(x) < 0$. Também, como $f'(x)$ é a taxa de variação dos valores funcionais de $f(x)$ em relação a x, quando $f'(x) > 0$, os valores funcionais estão crescendo à medida que x cresce; e quando $f'(x) < 0$, os valores funcionais estão decrescendo à medida que x cresce.

4.4.3 TEOREMA Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b):

(i) se $f'(x) > 0$ para todo x em (a, b), então f será crescente em $[a, b]$;
(ii) se $f'(x) < 0$ para todo x em (a, b), então f será decrescente em $[a, b]$.

Prova de (i) Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em $[a, b]$, tais que $x_1 < x_2$. Então, f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2). Do teorema do valor médio, segue que existe um número c em (x_1, x_2), tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

***N. do T.:** Em alguns textos da literatura matemática em língua portuguesa é empregada a palavra *"monotônica"* para esse significado.

Como $x_1 < x_2$, então $x_2 - x_1 > 0$. Também, por hipótese, $f'(c) > 0$. Logo, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, e assim $f(x_2) > f(x_1)$. Mostramos que $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$, onde x_1 e x_2 são números quaisquer no intervalo $[a, b]$. Logo, pela Definição 4.4.1, segue que f é crescente em $[a, b]$.

A demonstração da parte (ii) é similar e será deixada como exercício (veja o Exercício 41). ■

Uma aplicação imediata do Teorema 4.4.3 é a demonstração do que conhecemos como **teste da derivada primeira para extremos relativos** de uma função.

4.4.4 TEOREMA Teste da Derivada Primeira para Extremos Relativos

Seja f uma função contínua em todos os pontos do intervalo aberto (a, b) contendo o número c e suponha que f' exista em todos os pontos de (a, b), exceto possivelmente em c:

(i) se $f'(x) > 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto tendo c como extremo direito, e se $f'(x) < 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto tendo c como extremo esquerdo, então f terá um valor máximo relativo em c;

(ii) se $f'(x) < 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto, tendo c como extremo direito, e se $f'(x) > 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto, tendo c como extremo esquerdo, então f terá um valor mínimo relativo em c.

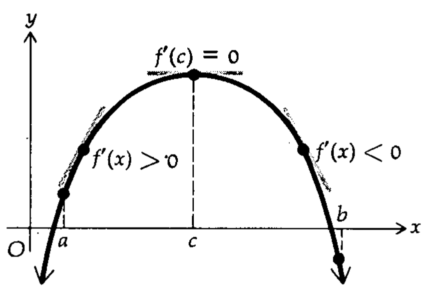


FIGURA 2

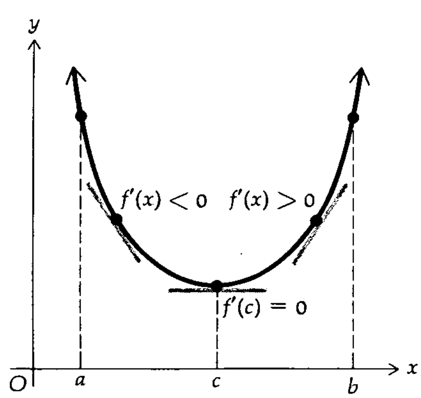


FIGURA 3

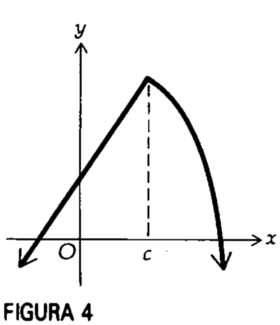


FIGURA 4

Prova de (i) Seja (d, c) (onde $d > a$) o intervalo tendo c como seu extremo direito, para o qual $f'(x) > 0$ para todo x no intervalo. Segue, do Teorema 4.4.3 (i), que f é crescente em $[d, c]$. Seja (c, e) (onde $e < b$) o intervalo tendo c como seu extremo esquerdo, para o qual $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo. Pelo Teorema 4.4.3 (ii), f é decrescente em $[c, e]$. Como f é crescente em $[d, c]$, segue da Definição 4.4.1 que se x_1 está em $[d, c]$ e $x_1 \neq c$, então $f(x_1) < f(c)$. Também, como f é decrescente em $[c, e]$, segue da Definição 4.4.2 que se x_2 está em $[c, e]$ e $x_2 \neq c$, então $f(c) > f(x_2)$. Logo, da Definição 4.1.1, f tem um valor máximo relativo em c.

A demonstração da parte (ii) é similar à demonstração da parte (i) e será deixada como um exercício (veja o Exercício 42). ■

O teste da derivada primeira para extremos relativos estabelece essencialmente que se f for contínua em c e $f'(x)$ mudar o sinal algébrico de positivo para negativo quando x cresce através de c, então f terá um valor máximo relativo em c, e se $f'(x)$ mudar o sinal algébrico de negativo para positivo enquanto x cresce através de c, então f terá um valor mínimo relativo em c.

As Figuras 2 e 3 ilustram as partes (i) e (ii), respectivamente, do Teorema 4.4.4, quando $f'(c)$ existe. A Figura 4 mostra um esboço do gráfico de uma função f que tem um valor máximo relativo num número c, mas $f'(c)$ não existe; contudo, $f'(x) > 0$ quando $x < c$ e $f'(x) < 0$ quando $x > c$. Na Figura 5 há um esboço do gráfico de uma função f para a qual c é um número crítico e $f'(x) < 0$ quando $x < c$ e $f'(x) < 0$ quando $x > c$; f não tem um extremo relativo em c.

As demais ilustrações do Teorema 4.4.4 aparecem na Figura 1. Em x_2 e x_4, a função tem um valor máximo relativo e em x_3 e x_5, a função tem um valor mínimo relativo; mesmo que x_6 seja um número crítico para a função, não há extremo relativo em x_6.

Em suma, para determinar os extremos relativos de f:

1. Ache $f'(x)$.
2. Ache os números críticos de f, isto é, os valores de x para os quais $f'(x) = 0$, ou para os quais $f'(x)$ não existe.
3. Aplique o teste da derivada primeira (Teorema 4.4.4).

Os exemplos a seguir ilustram esse procedimento.

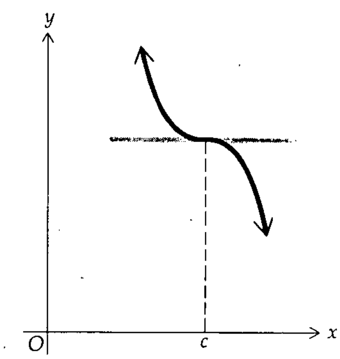


FIGURA 5

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

ache os extremos relativos de f, aplicando o teste da derivada primeira. Determine os valores de x nos quais ocorrem extremos relativos, bem como os intervalos nos quais f é crescente e aqueles onde f é decrescente. Faça um esboço do gráfico.

Solução

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$f'(x)$ existe para todos os valores de x. Equacione $f'(x) = 0$.

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$3(x - 3)(x - 1) = 0$$

$$x = 3 \qquad x = 1$$

Assim, os números críticos de f são 1 e 3. Para determinar se f tem um extremo relativo nesses números, aplicamos o teste da derivada primeira. Os resultados são resumidos na Tabela 1.

Tabela 1

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusão*
$x < 1$		$+$	f é crescente
$x = 1$	5	0	f tem um valor máximo relativo
$1 < x < 3$		$-$	f é decrescente
$x = 3$	1	0	f tem um valor mínimo relativo
$3 < x$		$+$	f é crescente

Segundo a tabela, 5 é um valor máximo relativo de f ocorrendo em $x = 1$, e 1 é um valor mínimo relativo de f, ocorrendo em $x = 3$. Um esboço do gráfico está na Figura 6.

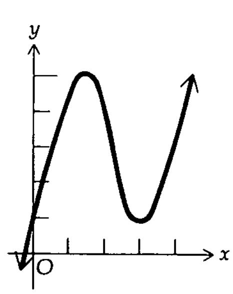


FIGURA 6

EXEMPLO 2 Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 3 \\ 8 - x & \text{se } 3 \leqslant x \end{cases}$$

ache os extremos relativos de f, aplicando o teste da derivada primeira. Determine os valores de x onde ocorrem extremos relativos, bem como os intervalos nos quais f é crescente e aqueles onde f é decrescente. Faça um esboço do gráfico.

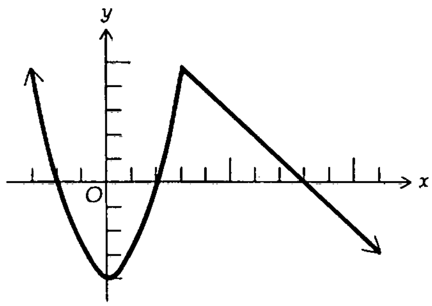


FIGURA 7

Solução Se $x < 3, f'(x) = 2x$. Se $x > 3, f'(x) = -1$. Como $f'_-(3) = 6$ e $f'_+(3) = -1$, $f'(3)$ não existe. Logo, 3 é um número crítico de f.

Como $f'(x) = 0$ se $x = 0$, segue que 0 é um número crítico de f. Aplicando o teste da derivada primeira, resumimos os resultados na Tabela 2. Um esboço do gráfico está na Figura 7.

Tabela 2

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusão*
$x < 0$		$-$	f é decrescente
$x = 0$	-4	0	f tem um valor mínimo relativo
$0 < x < 3$		$+$	f é crescente
$x = 3$	5	não existe	f tem um valor máximo relativo
$3 < x$		$-$	f é decrescente

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$$

ache os extremos relativos de f, determine os valores de x onde ocorrem extremos relativos e determine os intervalos nos quais f é crescente e aqueles onde f é decrescente. Faça um esboço do gráfico.

Solução

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{4}{3}x^{1/3} + \tfrac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \tfrac{4}{3}x^{-2/3}(x + 1) \end{aligned}$$

Como $f'(x)$ não existe quando $x = 0$ e $f'(x) = 0$ quando $x = -1$, os números críticos de f são -1 e 0. Vamos aplicar o teste da derivada primeira, cujos resultados estão resumidos na Tabela 3. Um esboço do gráfico está na Figura 8.

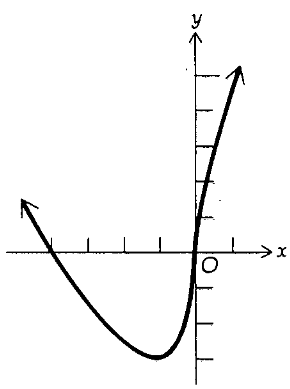


FIGURA 8

Tabela 3

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusão*
$x < -1$		$-$	f é decrescente
$x = -1$	-3	0	f tem um valor mínimo relativo
$-1 < x < 0$		$+$	f é crescente
$x = 0$	0	não existe	f não tem um extremo relativo em $x = 0$
$0 < x$		$+$	f é crescente

EXERCÍCIOS 4.4

Nos Exercícios de 1 a 40, faça o seguinte: (a) ache os extremos relativos de f pelo teste da derivada primeira; (b) determine os valores de x nos quais os extremos relativos ocorrem; (c) determine os intervalos nos quais f é crescente; (d) determine os intervalos nos quais f é decrescente; (e) faça um esboço do gráfico.

1. $f(x) = x^2 - 4x - 1$
2. $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$
3. $f(x) = x^3 - x^2 - x$
4. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$
5. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$
6. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$
7. $f(x) = 4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$
8. $f(x) = x^4 + 4x$
9. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$
10. $f(x) = 2 \cos 3x$
11. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + 1$
12. $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x - 2$
13. $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
14. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$
15. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$
16. $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2x}$
17. $f(x) = (1 - x)^2(1 + x)^3$
18. $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)^2$
19. $f(x) = 2x\sqrt{3 - x}$
20. $f(x) = x\sqrt{5 - x^2}$
21. $f(x) = x - 3x^{1/3}$
22. $f(x) = 4x - 6x^{2/3}$
23. $f(x) = 2 - 3(x - 4)^{2/3}$
24. $f(x) = 2 - (x - 1)^{1/3}$
25. $f(x) = x^{2/3} - x^{1/3}$
26. $f(x) = 3 \operatorname{cosec} 2x$
27. $f(x) = \frac{1}{2} \sec 4x$
28. $f(x) = x^{2/3}(x - 1)^2$

29. $f(x) = (x + 1)^{2/3}(x - 2)^{1/3}$ 30. $f(x) = \begin{cases} 5 - 2x & \text{se } x < 3 \\ 3x - 10 & \text{se } 3 \leqslant x \end{cases}$

31. $f(x) = \begin{cases} 2x + 9 & \text{se } x \leqslant -2 \\ x^2 + 1 & \text{se } -2 < x \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - (x + 7)^2} & \text{se } -12 \leqslant x \leqslant -3 \\ 12 - x^2 & \text{se } -3 < x \end{cases}$

33. $f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{se } x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{se } -1 \leqslant x < 2 \\ 7 - x & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 4 - (x + 5)^2 & \text{se } x < -4 \\ 12 - (x + 1)^2 & \text{se } -4 \leqslant x \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} (x + 9)^2 - 8 & \text{se } x < -7 \\ -\sqrt{25 - (x + 4)^2} & \text{se } -7 \leqslant x \leqslant 0 \\ (x - 2)^2 - 7 & \text{se } 0 < x \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} 12 - (x + 5)^2 & \text{se } x \leqslant -3 \\ 5 - x & \text{se } -3 < x \leqslant -1 \\ \sqrt{100 - (x - 7)^2} & \text{se } -1 < x \leqslant 17 \end{cases}$

37. $f(x) = x^{5/4} + 10x^{1/4}$ 38. $f(x) = (x - a)^{2/5} + 1$

39. $f(x) = x^{1/3}(x + 4)^{-2/3}$ 40. $f(x) = x^{5/3} - 10x^{2/3}$

41. Prove o Teorema 4.4.3(ii) 42. Prove o Teorema 4.4.4(ii)

43. Ache a e b, tais que a função definida por

$$f(x) = x^3 + ax^2 + b$$

tenha um extremo relativo em (2, 3).

44. Ache a, b e c, tais que a função definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

tenha um valor máximo relativo de 7 em 1, e que o gráfico de $y = f(x)$ passe pelo ponto $(2, -2)$.

45. Ache a, b, c e d, de tal forma que a função definida por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tenha extremos relativos em (1, 2) e (2, 3).

46. Dado que a função f é contínua para todos os valores de x, $f(3) = 2$, $f'(x) < 0$ se $x < 3$ e $f'(x) > 0$ se $x > 3$, faça um esboço de um possível gráfico de f em cada um dos seguintes casos, onde forem satisfeitas as condições adicionais: (a) f' é contínua em 3; (b) $f'(x) = -1$, se $x > 3$, e $f'(x) = 1$, se $x > 3$; (c) $\lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = 1$ e $f'(a) \neq f'(b)$, se $a \neq b$.

47. Dada $f(x) = x^p(1 - x)^q$, onde p e q são inteiros positivos maiores do que 1, prove cada uma das seguintes afirmativas: (a) se p for par, f terá um valor mínimo relativo em 0; (b) se q for par, f terá um valor mínimo relativo em 1; (c) f terá um valor máximo relativo em $p/(p + q)$, se p e q forem pares ou ímpares.

48. A função f é derivável no intervalo fechado $[a, b]$. Prove que se $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, então existirá um número c no intervalo aberto (a, b), tal que $f'(c) = 0$.

49. Se $f(x) = x^k$, onde k é um inteiro positivo ímpar, prove que f não tem extremos relativos.

50. Prove que se f for crescente em $[a, b]$ e se g for crescente em $[f(a), f(b)]$, então, se $g \circ f$ existir em $[a, b]$, $g \circ f$ será crescente em $[a, b]$.

51. A função f é crescente no intervalo I. Prove que (a) se $g(x) = -f(x)$, então g será decrescente em I; (b) se $h(x) = 1/f(x)$ e $f(x) > 0$ em I, então h será decrescente em I.

4.5 CONCAVIDADE E PONTOS DE INFLEXÃO

A Figura 1 mostra um esboço do gráfico de uma função f cujas derivadas primeira e segunda existem no intervalo fechado $[x_1, x_7]$. Como ambas f e f' são diferenciáveis nele, f e f' são contínuas em $[x_1, x_7]$.

Se considerarmos um ponto movendo-se ao longo do gráfico da Figura 1, de A para G, então a posição de P irá variar quando x crescer de x_1 até x_7. Quando P move-se ao longo do gráfico, de A para B, a inclinação da reta tangente ao gráfico é positiva e decrescente; isto é, a reta tangente está girando no sentido horário, e o gráfico está abaixo da reta tangente. Quando o ponto P está em B, a inclinação da reta tangente é zero e ainda é decrescente. Quando P move-se ao longo do gráfico, de B para C, a inclinação da reta tangente é

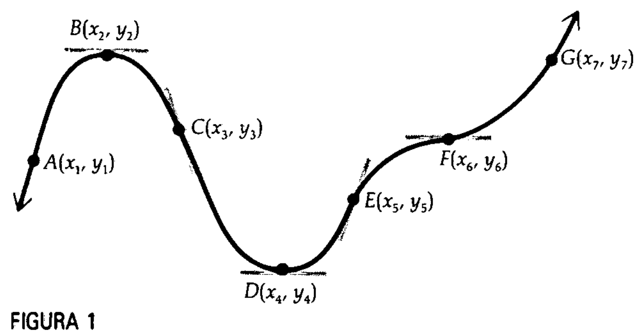


FIGURA 1

negativa e ainda é decrescente, a reta tangente ainda está girando no sentido horário e o gráfico está abaixo da reta tangente. Dizemos que o gráfico é *côncavo para baixo*, de A até C. Quando P se move ao longo do gráfico, de C para D, a inclinação da reta tangente é negativa e crescente; isto é, a reta tangente está girando no sentido anti-horário e o gráfico está acima de sua reta tangente. Em D, a inclinação da reta tangente é zero e ainda está crescendo. De D para E, a inclinação da reta tangente é positiva e crescente; a reta tangente continua girando no sentido anti-horário, e o gráfico está acima de sua reta tangente. Dizemos que o gráfico é *côncavo para cima* de C até E. O gráfico côncavo para baixo passa a ser côncavo para cima no ponto C, o qual é chamado de *ponto de inflexão*. Temos as seguintes definições:

4.5.1 DEFINIÇÃO O gráfico de uma função f será **côncavo para cima** no ponto $(c, f(c))$ se $f'(c)$ existir e se houver um intervalo aberto I contendo c, tal que para todos os valores de $x \neq c$ em I, o ponto $(x, f(x))$ do gráfico estará acima da reta tangente ao gráfico em $(c, f(c))$.

4.5.2 DEFINIÇÃO O gráfico de uma função f será **côncavo para baixo** no ponto $(c, f(c))$, se $f'(c)$ existir e se houver um intervalo aberto I contendo c, tal que para todos os valores de $x \neq c$ em I, o ponto $(x, f(x))$ do gráfico estará abaixo da reta tangente ao gráfico em $(c, f(c))$.

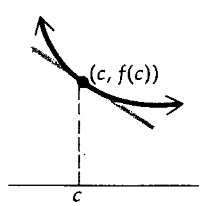


FIGURA 2

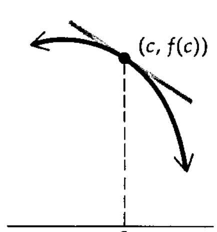


FIGURA 3

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** A Figura 2 mostra o esboço de parte do gráfico de uma função f que é côncava para cima no ponto $(c, f(c))$ e a Figura 3 mostra o esboço de parte do gráfico de uma função f que é côncava para baixo no ponto $(c, f(c))$. ◀

O gráfico da função f mostrado na Figura 1 é côncavo para baixo em todos os pontos $(x, f(x))$ para os quais x está num dos seguintes intervalos abertos: (x_1, x_3) ou (x_5, x_6). Da mesma forma, para x num dos intervalos abertos (x_3, x_5) ou (x_6, x_7), o gráfico da função f, na Figura 1, é côncavo para cima.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se f for a função definida por $f(x) = x^2$, então $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$. Assim, $f''(x) > 0$ para todo x. Além disso, o gráfico de f, na Figura 4, está acima de suas retas tangentes. Então, o gráfico de f é côncavo para cima, em todos os seus pontos.

Se g for a função definida por $g(x) = -x^2$, então $g'(x) = -2x$ e $g''(x) = -2$. Logo, $g''(x) < 0$ para todo x. Também, o gráfico de g, na Figura 5, está abaixo de suas retas tangentes. Logo, o gráfico de g é côncavo para baixo em todos os seus pontos. ◀

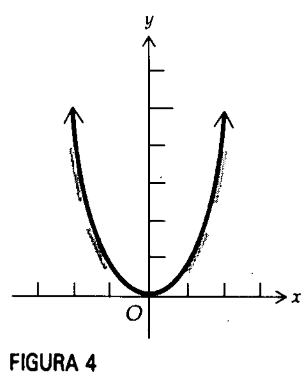


FIGURA 4

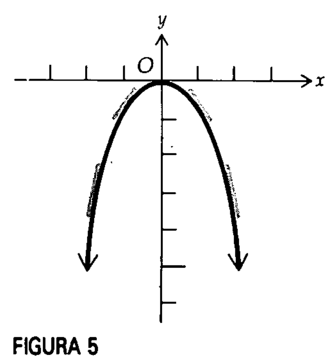


FIGURA 5

A função f da Ilustração 2 é tal que $f''(x) > 0$ para todo x, e o gráfico de f é côncavo para cima em toda parte. Para a função g da Ilustração 2, $g''(x) < 0$ para todo x, e o gráfico de g é côncavo para baixo em toda parte. Essas duas situações são casos especiais do teorema a seguir.

4.5.3 TEOREMA Seja f uma função diferenciável em algum intervalo aberto contendo c. Então,

(i) se $f''(c) > 0$, o gráfico de f é côncavo para cima em $(c, f(c))$;
(ii) se $f''(c) < 0$, o gráfico de f é côncavo para baixo em $(c, f(c))$.

Prova de (i)

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}$$

Como $f''(c) > 0$,

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0$$

Então, pelo Teorema 2.10.1, existe um intervalo aberto I contendo c, tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0 \tag{1}$$

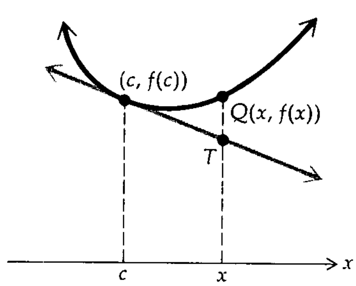


FIGURA 6

para todo $x \neq c$ em I.

Consideremos agora a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$. Uma equação da reta tangente é

$$y = f(c) + f'(c)(x - c) \tag{2}$$

Seja x um número no intervalo I tal que $x \neq c$, e seja Q o ponto do gráfico de f cuja abscissa é x. Através de Q traçamos uma reta paralela ao eixo y e seja T o ponto de intersecção dessa reta com a reta tangente (veja a Figura 6).

Para provar que o gráfico de f é côncavo para cima em $(c, f(c))$, precisamos mostrar que o ponto Q está acima do ponto T ou, equivalentemente, que a distância orientada $\overline{TQ} > 0$ para todos os valores de $x \neq c$ em I. $\overline{TQ}$ é igual à ordenada de Q menos a ordenada de T. A ordenada de Q é $f(x)$ e a de T é obtida de (2); assim,

$$\overline{TQ} = f(x) - [f(c) + f'(c)(x - c)]$$
$$\overline{TQ} = [f(x) - f(c)] - f'(c)(x - c) \tag{3}$$

Do teorema do valor médio, existe algum número d entre x e c, tal que

$$f'(d) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Isto é,

$$f(x) - f(c) = f'(d)(x - c) \qquad \text{para algum } d \text{ entre } x \text{ e } c$$

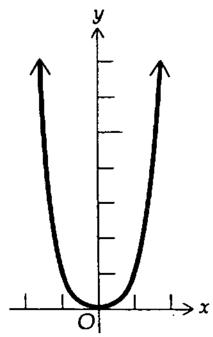


FIGURA 7

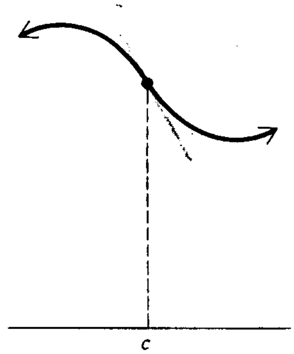


FIGURA 8

Substituindo essa igualdade em (3), temos

$$\overline{TQ} = f'(d)(x-c) - f'(c)(x-c)$$

$$\overline{TQ} = (x-c)[f'(d) - f'(c)] \tag{4}$$

Como d está entre x e c, d está no intervalo I, e assim, tomando $x = d$ na desigualdade (1), obtemos

$$\frac{f'(d) - f'(c)}{d - c} > 0 \tag{5}$$

Para provar que $\overline{TQ} > 0$, vamos mostrar que ambos os fatores à direita de (4) têm o mesmo sinal. Se $x - c > 0$, então $x > c$. E como d está entre x e c, então $d > c$; logo, da desigualdade (5), $f'(d) - f'(c) > 0$. Se $x - c < 0$, então $x < c$ e assim $d < c$; portanto, de (5), $f'(d) - f'(c) < 0$. Concluímos que $x - c$ e $f'(d) - f'(c)$ têm o mesmo sinal; logo, $\overline{TQ}$ é um número positivo. Assim, o gráfico de f é côncavo para cima em $(c, f(c))$.

A prova da parte (ii) é similar e será omitida. ■

O inverso do Teorema 4.5.3 não é verdadeiro. Por exemplo, se f for a função definida por $f(x) = x^4$, o gráfico de f será côncavo para cima no ponto (0, 0) mas $f''(0) = 0$ pois $f''(x) = 12x^2$ (veja a Figura 7). Assim sendo, uma condição suficiente para que o gráfico de uma função f seja côncavo para cima no ponto $(c, f(c))$ é que $f''(c) > 0$, mas a condição não é necessária. Analogamente, uma condição suficiente — mas não necessária — para que o gráfico de uma função f seja côncavo para baixo no ponto $(c, f(c))$ é que $f''(c) < 0$.

Se existe no gráfico de uma função um ponto no qual o sentido da concavidade muda, havendo aí uma reta tangente ao gráfico, então o gráfico da função cruzará sua reta tangente nesse ponto, conforme mostram as Figuras 8, 9 e 10. Tal ponto é chamado *ponto de inflexão*.

4.5.4 DEFINIÇÃO O ponto $(c, f(c))$ será um **ponto de inflexão** do gráfico da função f se o gráfico tiver nele uma reta tangente e se existir um intervalo aberto I contendo c, tal que se x estiver em I, então

(i) $f''(x) < 0$ se $x < c$ e $f''(x) > 0$ se $x > c$, ou
(ii) $f''(x) > 0$ se $x < c$ e $f''(x) < 0$ se $x > c$.

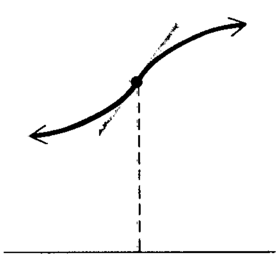


FIGURA 9

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** A Figura 8 ilustra um ponto de inflexão onde verificamos a condição (i) da Definição 4.5.4; neste caso, o gráfico é côncavo para baixo em pontos imediatamente à esquerda do ponto de inflexão e côncavo para cima em pontos imediatamente à sua direita. A condição (ii) está ilustrada na Figura 9, onde o sentido da concavidade muda de cima para baixo no ponto de inflexão. A Figura 10 é outra ilustração da condição (i), onde o sentido da concavidade muda de baixo para cima no ponto de inflexão. Note que na Figura 10 há uma reta tangente horizontal no ponto de inflexão. ◀

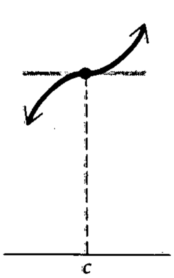


FIGURA 10

No gráfico da Figura 1 há pontos de inflexão em C, E e F.

A parte crucial da Definição 4.5.4 é que o gráfico deve ter uma reta tangente no ponto de inflexão. Considere, por exemplo, a função do Exemplo 3, da Sec-

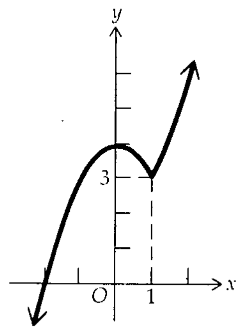


FIGURA 11

ção 2.3. Ela é definida por

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x < 1 \\ 2 + x^2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

Um esboço do gráfico de h está na Figura 11. Observe que $h''(x) = -2$ se $x < 1$ e $h''(x) = 2$ se $x > 1$. Assim, no ponto (1, 3) do gráfico, o sentido da concavidade muda de baixo para cima. No entanto, (1, 3) não é um ponto de inflexão, pois o gráfico não tem uma reta tangente ali.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Suponha que tenha sido estimado que t horas após ter começado a trabalhar às 7 da manhã, um operário de uma linha de montagem tenha concluído determinada tarefa em $f(t)$ unidades, e

$$f(t) = 21t + 9t^2 - t^3 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 5$$

Na Tabela 1 estão os valores funcionais para valores inteiros de t de 1 até 5, e um esboço do gráfico de f em [0, 5] está na Figura 12.

Tabela 1

t	1	2	3	4	5
$f(t)$	29	70	117	164	205

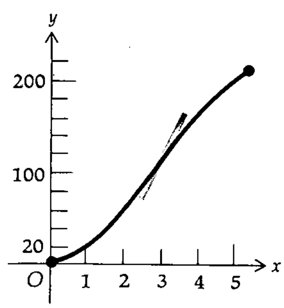


FIGURA 12

$$f'(t) = 21 + 18t - 3t^2 \qquad f''(t) = 18 - 6t$$
$$= 6(3 - t)$$

Observe que $f''(t) > 0$ se $0 < t < 3$ e $f''(t) < 0$ se $3 < t < 5$. Da Definição 4.5.4 (ii) segue que o gráfico de f tem um ponto de inflexão em $t = 3$. Do Teorema 4.4.3, como $f''(t) > 0$ quando $0 < t < 3$, $f'(t)$ é crescente em [0, 3] e como $f''(t) < 0$ quando $3 < t < 5$, $f'(t)$ é decrescente em [3, 5]. Logo, como $f'(t)$ é a taxa de variação de $f(t)$ em relação a t, concluímos que nas primeiras três horas (de 7 às 10 h da manhã) o operário executa sua tarefa numa taxa crescente e durante as duas horas restantes (de 10 até meio dia), o operário executa a tarefa numa taxa decrescente. Em $t = 3$ (10 h da manhã), o operário está produzindo com maior eficiência, e quando $3 < t < 5$ (após as 10 h), há uma redução em sua taxa de produção. O ponto no qual o operário está produzindo com maior eficiência é chamado de *ponto de diminuição do retorno*; é um ponto de inflexão do gráfico de f. ◀

A Definição 4.5.4 não indica nada sobre o valor da derivada segunda de f num ponto de inflexão. O teorema a seguir estabelece que se a derivada segunda existir num ponto de inflexão, ela deverá ser zero nele.

4.5.5 TEOREMA Se a função f for derivável em algum intervalo aberto contendo c e se $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de f, então, se $f''(c)$ existe, $f''(c) = 0$.

Prova Seja g a função tal que $g(x) = f'(x)$; então $g'(x) = f''(x)$. Como $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f, então $f''(x)$ muda de sinal em c e assim $g'(x)$ muda de sinal em c. Logo, pelo teste da derivada primeira (Teorema 4.4.4), g tem um extremo relativo em c, e c é um número crítico de g. Como $g'(c) = f''(c)$ e como por hipótese $f''(c)$ existe, segue que $g'(c)$ existe. Logo, pelo Teorema 4.1.3, $g'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, como queríamos provar. ■

O inverso do Teorema 4.5.5 não é verdadeiro. Isto é, se a derivada segunda de uma função for nula num número c, o gráfico da função não terá, necessariamente, um ponto de inflexão em $x = c$. Esse fato é o que mostra a ilustração a seguir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Considere a função f definida por $f(x) = x^4$. Um esboço do gráfico de f está na Figura 7.

$$f'(x) = 4x^3 \qquad f''(x) = 12x^2$$

Observe que $f''(0) = 0$; mas, como $f''(x) > 0$ se $x < 0$, e $f''(x) > 0$ se $x > 0$, o gráfico é côncavo para cima em pontos imediatamente à esquerda e à direita de (0, 0). Conseqüentemente, (0, 0) não é um ponto de inflexão. ◀

EXEMPLO 1 A função do Exemplo 1 da Secção 4.4 é definida por

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Ache o ponto de inflexão do gráfico de f e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo. Faça um esboço do gráfico e mostre um segmento da tangente no ponto de inflexão.

Solução

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \qquad f''(x) = 6x - 12$$

$f''(x)$ existe para todos os valores de x; assim sendo, o único ponto de inflexão possível é onde $f''(x) = 0$, o que ocorre em $x = 2$. Para determinar se existe ou não um ponto de inflexão em $x = 2$, precisamos verificar se $f''(x)$ muda de sinal; ao mesmo tempo, determinamos a concavidade do gráfico para os respectivos intervalos. Os resultados estão resumidos na Tabela 2.

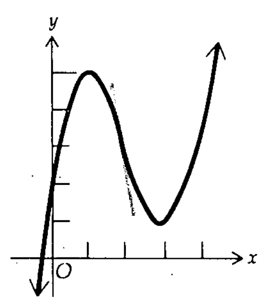


FIGURA 13

Tabela 2

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x < 2$			$-$	o gráfico é côncavo para baixo
$x = 2$	3	-3	0	o gráfico tem um ponto de inflexão
$2 < x$			$+$	o gráfico é côncavo para cima

No Exemplo 1 da Secção 4.4, mostramos que f tem um valor máximo relativo em 1 e um valor mínimo relativo em 3. Um esboço do gráfico mostrando um segmento da tangente encontra-se na Figura 13.

O gráfico de uma função pode ter um ponto de inflexão onde a derivada segunda não exista. Isso será ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 2 Dada

$$f(x) = x^{1/3}$$

ache o ponto de inflexão do gráfico de f e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde ele é côncavo para baixo. Faça um esboço do gráfico.

Solução

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-5/3}$$

Nem $f'(0)$, nem $f''(0)$ existem. Na Ilustração 3 da Secção 3.2, mostramos que o eixo y é a reta tangente ao gráfico dessa função em (0, 0). Além disso,

$$f''(x) > 0 \text{ se } x < 0 \quad \text{e} \quad f''(x) < 0 \text{ se } x > 0$$

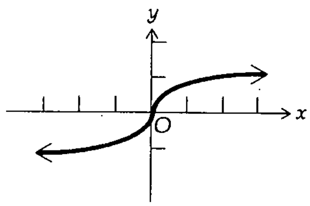


FIGURA 14

Logo, da Definição 4.5.4 (ii), f tem um ponto de inflexão em (0, 0). A concavidade do gráfico é determinada pelo sinal de $f''(x)$. Os resultados estão resumidos na Tabela 3.

Um esboço do gráfico de f está na Figura 14.

Tabela 3

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x < 0$		$+$	$+$	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 0$	0	não existe	não existe	o gráfico tem um ponto de inflexão
$0 < x$		$+$	$-$	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo

EXEMPLO 3 Se

$$f(x) = (1 - 2x)^3$$

ache o ponto de inflexão do gráfico de f e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde ele é côncavo para baixo. Faça um esboço do gráfico de f.

Solução

$$f'(x) = -6(1 - 2x)^2 \qquad f''(x) = 24(1 - 2x)$$

Como $f''(x)$ existe para todos os valores de x, o único ponto de inflexão possível é onde $f''(x) = 0$, isto é, em $x = \frac{1}{2}$. Os resultados estão resumidos na Tabela 4: $f''(x)$ muda de sinal de $+$ para $-$ em $x = \frac{1}{2}$; assim, o gráfico tem um ponto de inflexão ali. Note também que como $f'(\frac{1}{2}) = 0$, o gráfico tem uma reta tangente horizontal no ponto de inflexão. Um esboço do gráfico está na Figura 15.

Tabela 4

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x < \frac{1}{2}$			$+$	o gráfico é côncavo para cima
$x = \frac{1}{2}$	0	0	0	o gráfico tem um ponto de inflexão
$\frac{1}{2} < x$			$-$	o gráfico é côncavo para baixo

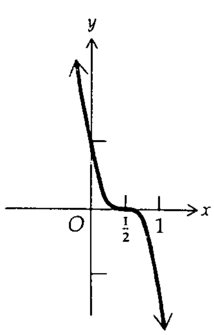


FIGURA 15

EXEMPLO 4 Ache os pontos de inflexão do gráfico da função seno. Ache também as inclinações das tangentes nos pontos de inflexão. Faça o gráfico da função seno num intervalo de 2π de comprimento, contendo o ponto de inflexão com menor abscissa positiva. Mostre um segmento da tangente nesse ponto de inflexão.

Solução Seja

$$f(x) = \text{sen } x$$

Então,

$$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\text{sen } x$$

$f''(x)$ existe para todo x. Para determinar os pontos de inflexão, equacionamos $f''(x) = 0$.

$$-\text{sen } x = 0$$

$$x = k\pi \qquad k \text{ é um inteiro qualquer}$$

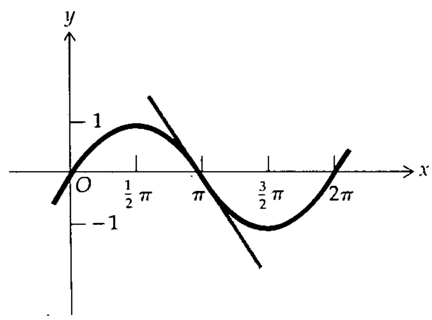


FIGURA 16

Como $f''(x)$ muda de sinal em cada um desses valores de x, o gráfico tem um ponto de inflexão em todos os pontos com essas abscissas. Em cada ponto de inflexão,

$$f'(k\pi) = \cos k\pi \qquad k \text{ é um inteiro qualquer}$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ for um inteiro par} \\ -1 & \text{se } k \text{ for um inteiro ímpar} \end{cases}$$

Logo, as inclinações das tangentes nos pontos de inflexão são $+1$ ou -1. A Figura 16 mostra o gráfico da função seno no intervalo $[0, 2\pi]$. No ponto de inflexão $(\pi, 0)$ vê-se um segmento da reta tangente.

EXERCÍCIOS 4.5

Nos Exercícios de 1 a 16, encontre os pontos de inflexão do gráfico da função dada, se existirem. Determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde ele é côncavo para baixo. Faça um esboço do gráfico e mostre um segmento da reta tangente ao gráfico nos pontos de inflexão.

1. $f(x) = x^3 + 9x$
2. $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 3$
3. $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$
4. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 20$
5. $F(x) = x^4 - 8x^3$
6. $f(x) = x^4 - 2x^3$
7. $g(x) = (x - 1)^3$
8. $G(x) = (x + 2)^3$
9. $f(x) = (x + 2)^{1/3}$
10. $g(x) = (x - 1)^{1/3}$
11. $G(x) = \dfrac{2}{x^2 + 3}$
12. $F(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$
13. $g(x) = 2 \operatorname{sen} 3x;\ x \in [-\pi, \pi]$
14. $f(x) = 3 \cos 2x;\ x \in [-\pi, \pi]$
15. $f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x;\ x \in (-\pi, \pi)$
16. $g(x) = \operatorname{cotg} 2x;\ x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$

Nos Exercícios de 17 a 24, ache o ponto de inflexão do gráfico da função dada, se existir. Determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde ele é côncavo para baixo. Faça um esboço do gráfico.

17. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ 7 - x^2 & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases}$
18. $f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 4 - x^2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$
19. $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ -x^2 & \text{se } 0 < x \end{cases}$
20. $g(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{se } x < 0 \\ x^3 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$
21. $F(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 0 \\ x^4 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$
22. $G(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ x^4 & \text{se } 0 < x \end{cases}$
23. $f(x) = (x - 2)^{1/5} + 3$
24. $g(x) = (2x - 6)^{3/2} + 1$
25. Se $f(x) = ax^3 + bx^2$, determine a e b, de forma que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em $(1, 2)$.
26. Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determine a, b e c, de forma que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em $(1, 2)$ e que a inclinação da reta tangente no ponto de inflexão seja -2.
27. Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determine a, b, c e d, de forma que f tenha um extremo relativo em $(0, 3)$ e que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em $(1, -1)$.
28. Se $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, determine os valores de a, b, c, d e e, de forma que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em $(1, -1)$, passe pela origem e seja simétrico com respeito ao eixo y.

Nos Exercícios de 29 a 31, (a) ache os pontos de inflexão do gráfico da função trigonométrica dada; (b) ache a inclinação das retas tangentes nos pontos de inflexão; (c) faça um esboço do gráfico da função num intervalo de 2π de comprimento e contendo o ponto de inflexão com menor abscissa positiva, e mostre um segmento da reta tangente nesse ponto de inflexão.

29. A função co-seno
30. A função tangente
31. A função co-tangente
32. Prove que os gráficos das funções secante e co-secante não têm pontos de inflexão.

Nos Exercícios de 33 a 46, esboçe parte do gráfico de uma função f contendo o ponto onde $x = c$, se as condições dadas estiverem satisfeitas. Suponha que f seja contínua em algum intervalo aberto contendo c.

33. $f'(x) > 0$ se $x < c$; $f'(x) < 0$ se $x > c$; $f''(x) < 0$ se $x < c$; $f''(x) < 0$ se $x > c$
34. $f'(x) > 0$ se $x < c$; $f'(x) > 0$ se $x > c$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) < 0$ se $x > c$
35. $f'(x) > 0$ se $x < c$; $f'(x) < 0$ se $x > c$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $x > c$
36. $f'(x) < 0$ se $x < c$; $f'(x) > 0$ se $x > c$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) < 0$ se $x > c$
37. $f''(c) = 0$; $f'(c) = 0$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) < 0$ se $x > c$
38. $f''(c) = 0$; $f'(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $x > c$
39. $f''(c) = 0$; $f'(c) = 0$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $x > c$
40. $f'(c) = 0$; $f'(x) < 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $x > c$
41. $f''(c) = 0$; $f'(c) = -1$; $f''(x) < 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $x > c$
42. $f''(c) = 0$; $f'(c) = \frac{1}{2}$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) < 0$ se $x > c$
43. $f'(c)$ não existe; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $x > c$
44. $f'(c)$ não existe; $f''(c)$ não existe; $f''(x) < 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $x > c$

45. $\lim_{x \to c^-} f'(x) = +\infty$; $\lim_{x \to c^+} f'(x) = 0$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) < 0$ se $x > c$

46. $\lim_{x \to c^-} f'(x) = +\infty$; $\lim_{x \to c^+} f'(x) = -\infty$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $x > c$

47. Faça um esboço do gráfico de uma função f para a qual $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ existem e são positivas para todo x.

48. Faça um esboço do gráfico de uma função f para a qual $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ existem e são negativas para todo x.

49. Se $f(x) = x^5$, mostre que 0 é um número crítico de f, mas que $f(0)$ não é um extremo relativo. A origem é um ponto de inflexão do gráfico de f? Prove sua resposta.

50. Se $f(x) = 3x^2 + x|x|$, prove que $f''(0)$ não existe, mas o gráfico de f é côncavo para cima em toda parte.

51. Estima-se que um operário de uma oficina que fabrica molduras para quadros possa pintar y molduras, x horas após ter começado a trabalhar às 8 da manhã, e

$$y = 3x + 8x^2 - x^3 \quad 0 \leqslant x \leqslant 4$$

Ache o momento em que o operário está trabalhando mais eficientemente (isto é, em que instante ele atinge o ponto de diminuição do retorno?). (*Sugestão:* veja a Ilustração 4.)

52. Desenhe um esboço do gráfico da equação $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. (*Sugestão*: o gráfico não é aquele de uma função. Entretanto, a parte no primeiro quadrante é o gráfico de uma função. Obtenha essa porção e então complete o gráfico por propriedades de simetria. A concavidade desempenha um papel importante.)

4.6 O TESTE DA DERIVADA SEGUNDA PARA EXTREMOS RELATIVOS

Na Secção 4.4, você aprendeu como determinar se uma função f tem um valor máximo ou mínimo relativo num número crítico c, verificando o sinal algébrico de f' em números contidos em intervalos à direita e à esquerda de c. Outro teste para extremos relativos envolve somente o número crítico c. Antes de enunciá-lo na forma de teorema, vamos apresentar uma discussão geométrica informal que deverá apelar para sua intuição.

Suponhamos que f seja uma função, tal que f' e f'' existam em algum intervalo aberto (a, b) contendo c e que $f'(c) = 0$. Suponhamos também, que f'' seja negativa em (a, b). Do Teorema 4.4.3 (ii), como $f''(x) < 0$ em (a, b), então f' será decrescente em $[a, b]$. Como o valor de f' num ponto do gráfico de f dá a inclinação da reta tangente no ponto, segue que a inclinação da reta é decrescente em $[a, b]$. Na Figura 1 há um esboço do gráfico de uma função f com essas propriedades. Do Teorema 4.5.3 (ii), o gráfico de f é côncavo para baixo em todos os pontos da figura, e um segmento da reta tangente aparece em alguns pontos. Observe que a inclinação da reta tangente é decrescente em $[a, b]$. Note que f tem um valor máximo relativo em c, onde $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$.

Suponhamos agora que f seja uma função tendo as propriedades da função citadas no parágrafo anterior, exceto que, agora, f'' é positiva em (a, b). Então, do Teorema 4.4.3 (i), como $f''(x) > 0$ em (a, b), segue que f' é crescente em $[a, b]$. Assim, a inclinação da reta tangente é crescente em $[a, b]$. A Figura 2 mostra um esboço do gráfico de uma função f com essas propriedades. Do Teo-

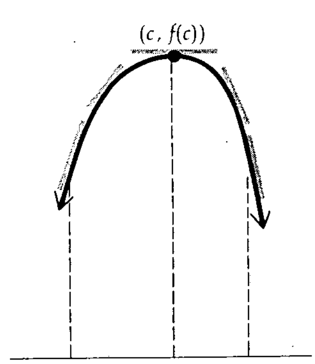


FIGURA 1

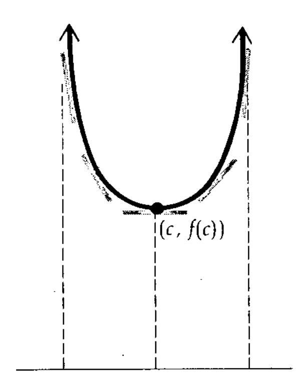


FIGURA 2

rema 4.5.3 (i), o gráfico de f é côncavo para cima em todos os pontos da figura. Nessa figura, aparecem segmentos da reta tangente em alguns pontos. As inclinações dessas retas tangentes são crescentes em $[a, b]$. A função f tem um valor mínimo relativo em c, onde $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$.

As deduções dos dois parágrafos precedentes são mencionadas no **teste da derivada segunda para extremos relativos**, que enunciaremos agora.

4.6.1 TEOREMA Teste da Derivada Segunda para Extremos Relativos

Seja c um número crítico de uma função f, no qual $f'(c) = 0$ e suponhamos que f' exista para todos os valores de x em algum intervalo aberto contendo c. Se $f''(c)$ existe e

(i) se $f''(c) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em c;
(ii) se $f''(c) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em c.

A demonstração da parte (i) faz uso do Teorema 2.10.2 e na parte (ii) é aplicado o Teorema 2.10.1. Você pode querer consultá-los agora, além de rever as Ilustrações 1 e 2 da Secção Suplementar 2.10, que apresentam interpretações geométricas dos teoremas.

Prova de (i) Por hipótese, $f''(c)$ existe e é negativa; assim

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$$

Logo, pelo Teorema 2.10.2, existe um intervalo aberto I contendo c, tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0 \tag{1}$$

para todo $x \neq c$ no intervalo.

Seja I_1 o intervalo aberto contendo todos os valores de x em I para os quais $x < c$; logo, c é o extremo direito de I_1. Seja I_2 o intervalo aberto contendo todos os valores de x em I para os quais $x > c$; assim, c é o extremo esquerdo do intervalo aberto I_2.

Então, se x está em I_1, $x - c < 0$, e segue de (1) que $f'(x) - f'(c) > 0$ ou, equivalentemente, $f'(x) > f'(c)$. Se x está em I_2, $x - c > 0$ e segue de (1) que $f'(x) - f'(c) < 0$ ou, equivalentemente, $f'(x) < f'(c)$.

Mas como $f'(c) = 0$, concluímos que se x está em I_1, $f'(x) > 0$, e se x está em I_2, $f'(x) < 0$. Logo, $f'(x)$ muda o sinal algébrico de positivo para negativo, quando x cresce passando por c, e assim, pelo Teorema 4.4.4, f tem um valor máximo relativo em c.

A demostração da parte (ii) é similar e será deixada como um exercício (veja o Exercício 46). ■

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x) = x^4 + \tfrac{4}{3}x^3 - 4x^2$$

ache os máximos e mínimos relativos de f, aplicando o teste da derivada segunda. Faça um esboço do gráfico de f.

Solução Calculamos as derivadas primeira e segunda de f.

$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x \qquad f''(x) = 12x^2 + 8x - 8$$

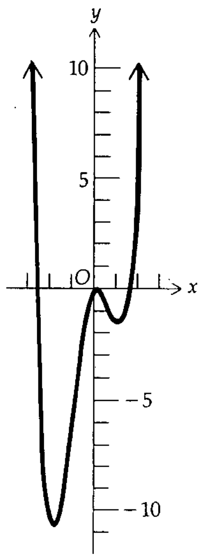


FIGURA 3

Equacionando $f'(x) = 0$,

$$4x(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = -2 \qquad x = 1$$

Assim, os números críticos de f são -2, 0 e 1. Vamos determinar se existe extremo relativo entre esses números críticos, encontrando o sinal da derivada segunda neles. Os resultados estão resumidos na Tabela 1.

Tabela 1

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x = -2$	$-\frac{32}{2}$	0	+	f tem um valor mínimo relativo
$x = 0$	0	0	−	f tem um valor máximo relativo
$x = 1$	$-\frac{5}{3}$	0	+	f tem um valor mínimo relativo

A partir da tabela e mais alguns pontos, obtemos o esboço do gráfico de f, conforme mostra a Figura 3.

EXEMPLO 2 Ache os extremos relativos da função seno, aplicando o teste da derivada segunda.

Solução Seja

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

Então,

$$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\operatorname{sen} x$$

$f'(x)$ existe para todo x. Os números críticos são obtidos equacionando $f'(x) = 0$

$$\cos x = 0$$

$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \qquad k \text{ é um inteiro qualquer}$$

Vamos determinar se entre esses números críticos existe um extremo relativo usando o sinal da derivada segunda neles.

$$\begin{aligned} f''(\tfrac{1}{2}\pi + k\pi) &= -\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi + k\pi) \\ &= -\cos k\pi \\ &= \begin{cases} -1 & \text{se } k \text{ for um inteiro par} \\ 1 & \text{se } k \text{ for um inteiro ímpar} \end{cases} \end{aligned}$$

Os resultados do teste da derivada segunda estão resumidos na Tabela 2.

Tabela 2

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k é um inteiro par)	1	0	−	f tem um valor máximo relativo
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k é um inteiro ímpar)	−1	0	+	f tem um valor mínimo relativo

Se $f''(c) = 0$, bem como quando $f'(c) = 0$, nenhuma conclusão pode ser tirada relativa à existência de extremo relativo de f em c. As ilustrações a seguir mostram isso.

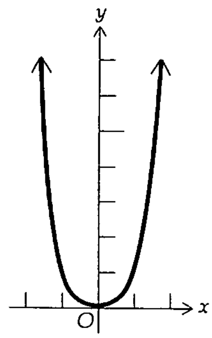


FIGURA 4

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se $f(x) = x^4$, então $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^2$. Assim, $f(0)$, $f'(0)$ e $f''(0)$ são todas nulas. Aplicando o teste da derivada primeira, vemos que f tem um valor mínimo relativo em 0. Um esboço do gráfico de f está na Figura 4. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se $g(x) = -x^4$, então $g'(x) = -4x^3$ e $g''(x) = -12x^2$. Assim, $g(0)$, $g'(0)$ e $g''(0)$ são todas nulas. Nesse caso, g tem um valor máximo relativo em 0, conforme podemos ver aplicando o teste da derivada primeira. Um esboço do gráfico de g está na Figura 5. ◀

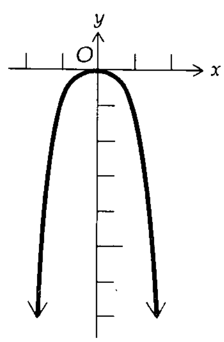


FIGURA 5

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se $h(x) = x^3$, então $h'(x) = 3x^2$ e $h''(x) = 6x$; assim $h(0)$, $h'(0)$ e $h''(0)$ são todas nulas. A função h não tem extremo relativo em 0, pois se $x < 0$, $h(x) < h(0)$ e se $x > 0$, $h(x) > h(0)$. Um esboço do gráfico de h está na Figura 6. ◀

Nas Ilustrações 1, 2 e 3 temos exemplos de três funções, cada uma com derivada segunda nula num número onde a derivada primeira também é nula; mesmo assim, uma das funções tem um valor mínimo relativo, outra função tem um valor máximo relativo e a terceira função não tem extremo relativo.

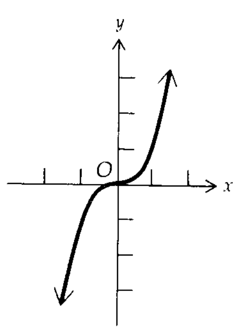


FIGURA 6

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$$

ache os extremos relativos de f, aplicando o teste da derivada segunda, quando possível. Use a derivada segunda para encontrar os pontos de inflexão do gráfico de f e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo. Faça um esboço do gráfico.

Solução

$$f'(x) = \tfrac{2}{3}x^{-1/3} - \tfrac{2}{3}x^{-2/3} \qquad f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-4/3} + \tfrac{4}{9}x^{-5/3}$$

Como $f'(0)$ não existe, 0 é um númeo crítico de f. Encontramos os demais números críticos equacionando $f'(x) = 0$.

$$\frac{2}{3x^{1/3}} - \frac{2}{3x^{2/3}} = 0$$

$$2x^{1/3} - 2 = 0$$

$$x^{1/3} = 1$$

$$x = 1$$

Assim, 1 também é um número crítico. Podemos determinar se há um extremo relativo em 1 aplicando o teste da derivada segunda. Não podemos usar o teste da derivada segunda no número crítico 0, pois $f'(0)$ não existe. Aplicamos então, em $x = 0$, o teste da derivada primeira. A Tabela 3 mostra os resultados desses testes.

Como $f''(0)$ não existe, $(0, 0)$ é um possível ponto de inflexão. Para achar outras possibilidades equacionamos $f''(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
-\frac{2}{9x^{4/3}} + \frac{4}{9x^{5/3}} &= 0 \\
-2x^{1/3} + 4 &= 0 \\
x^{1/3} &= 2 \\
x &= 8
\end{aligned}
$$

Para determinar se existe ponto de inflexão em $x = 0$ e $x = 8$, verificamos se $f''(x)$ muda de sinal; ao mesmo tempo, descobrimos o sentido da concavidade nos respectivos intervalos. Num ponto de inflexão é necessário que o gráfico tenha uma reta tangente. Na origem há uma tangente vertical, pois

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} f'(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{2x^{1/3} - 2}{3x^{2/3}} \\
&= -\infty
\end{aligned}
$$

A Tabela 3 resume nossos resultados e deles obtemos o esboço do gráfico da Figura 7.

Tabela 3

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x < 0$		$-$	$-$	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	0	não existe	não existe	f não tem extremo relativo; o gráfico tem um ponto de inflexão
$0 < x < 1$		$-$	$+$	f é decrescente; o gráfico é coñcavo para cima
$x = 1$	-1	0	$+$	f tem um valor mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$1 < x < 8$		$+$	$+$	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 8$	0	$\frac{1}{6}$	0	f é crescente; o gráfico tem um ponto de inflexão
$8 < x$		$+$	$-$	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixc

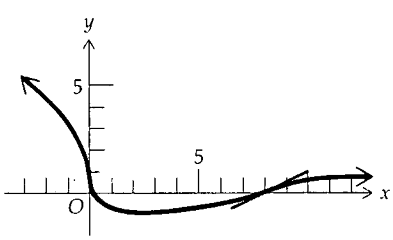


FIGURA 7

EXERCÍCIOS 4.6

Nos Exercícios de 1 a 26, ache os extremos relativos da função dada usando o teste da derivada segunda, quando aplicável. Quando ele não for aplicável, use o teste da derivada primeira. Use a derivada segunda para encontrar os pontos de inflexão do gráfico da função e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde é para baixo. Faça um esboço do gráfico.

1. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$
2. $g(x) = 7 - 6x - 3x^2$
3. $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$
4. $h(x) = 2x^3 - 9x^2 + 27$
5. $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3$
6. $f(y) = y^3 - 5y + 6$
7. $f(z) = (4 - z)^4$
8. $G(x) = (x + 2)^3$
9. $h(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$
10. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3$
11. $F(x) = \cos 3x$; $x \in \left[-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$
12. $f(x) = 2 \operatorname{sen} 4x$; $x \in \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$
13. $f(x) = x(x + 2)^3$
14. $g(t) = (t - 2)^{7/3}$
15. $f(x) = 4x^{1/2} + 4x^{-1/2}$
16. $f(x) = x(x - 1)^3$
17. $h(x) = x\sqrt{x + 3}$
18. $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

19. $F(x) = 6x^{1/3} - x^{2/3}$

20. $g(x) = \dfrac{9}{x} + \dfrac{x^2}{9}$

21. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$

22. $G(x) = x^{2/3}(x - 4)^2$

23. $f(x) = \text{tg}^2\, x;\ x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

24. $g(x) = \sec x \text{ tg } x;\ x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

25. $g(x) = x + \cos x;\ x \in [-2\pi, 2\pi]$

26. $f(x) = \text{sen}\, x - x;\ x \in [-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$

Nos Exercícios de 27 a 30, ache os extremos relativos das funções trigonométricas dadas, pelo teste da derivada segunda.

27. Função co-seno

28. Função secante

29. Função co-secante

30. $f(x) = \text{sen}\, x + \cos x$

Nos Exercícios de 31 a 42, faça um esboço do gráfico de uma função f que passa pelos pontos (c, f(c)), (d, f(d)) e (e, f(e)), se as condições dadas forem satisfeitas. Trace também um segmento da reta tangente em cada um desses pontos, se houver uma reta tangente. Suponha que c < d < e e que f seja contínua em algum intervalo contendo c, d, e e.

31. $f'(c) = 0$; $f'(d) = 1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) > 0$ se $x < d$; $f''(x) < 0$ se $x > d$

32. $f'(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) < 0$ se $x < d$; $f''(x) > 0$ se $x > d$

33. $f'(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(e) = 0$; $f''(x) < 0$ se $x < d$; $f''(x) > 0$ se $d < x < e$; $f''(x) < 0$ se $x > e$

34. $f'(c) = 0$; $f'(d) = 1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(e) = 0$; $f''(x) > 0$ se $x < d$; $f''(x) < 0$ se $d < x < e$; $f''(x) > 0$ se $x > e$

35. $f'(c) = 0$; $f''(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) < 0$ se $c < x < d$; $f''(x) > 0$ se $x > d$

36. $f'(c) = 0$; $f''(c) = 0$; $f'(d) = 1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) < 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $c < x < d$; $f''(x) < 0$ se $x > d$

37. $f'(c) = 0$; $\lim\limits_{x \to d^-} f'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to d^+} f'(x) = +\infty$; $f'(e) = 0$; $f''(x) > 0$ se $x < d$; $f''(x) < 0$ se $x > d$

38. $f'(c) = 0$; $\lim\limits_{x \to d^-} f'(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to d^+} f'(x) = -\infty$; $f'(e) = 0$; $f''(x) < 0$ se $x < d$; $f''(x) > 0$ se $x > d$

39. $f'(c)$ não existe; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) < 0$ se $c < x < d$; $f''(x) > 0$ se $x > d$

40. $f'(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e)$ não existe; $f''(x) < 0$ se $x < d$; $f''(x) > 0$ se $d < x < e$; $f''(x) < 0$ se $x > e$

41. $f'(c) = 0$; $f'(d)$ não existe; $f'(e) = 0$; $f''(e) = 0$; $f''(x) < 0$ se $x < d$; $f''(x) < 0$ se $d < x < e$; $f''(x) > 0$ se $x > e$

42. $f'(c) = 0$; $f''(c) = 0$; $f'(d)$ não existe; $f'(e) = 0$; $f''(x) < 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $c < x < d$; $f''(x) > 0$ se $x > d$

43. Suponha que $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ sejam números críticos de uma função f e que $f''(x) = x[\![\frac{1}{2}x^2 + 1]\!]$. Em cada um desses números determine se f tem um extremo relativo; se tiver, classifique-o.

44. Dada $f(x) = x^r - rx + k$, onde $r > 0$ e $r \neq 1$, prove que (a) se $0 < r < 1$, f tem um valor máximo relativo em 1; (b) se $r > 1$, f tem um valor mínimo relativo em 1.

45. Dada $f(x) = x^3 + 3rx + 5$, prove que (a) se $r > 0$, f não tem extremos relativos; (b) se $r < 0$, f tem ambos os valores, máximo e mínimo, relativos.

46. Prove o Teorema 4.6.1 (ii).

47. Dada $f(x) = x^2 + rx^{-1}$, prove que, independentemente do valor de r, f tem um valor mínimo relativo, mas não tem valor máximo relativo.

48. Se $f(x) = ax^2 + bx + c$, use o teste da derivada segunda para mostrar que f tem um valor máximo relativo, se $a < 0$. Ache o número onde ele ocorre.

49. Suponha que f seja uma função para a qual $f''(x)$ existe para todos os valores de x num intervalo aberto I e que para um número c em I, $f''(c) = 0$ e $f'''(c)$ existe e não é zero. Prove que o ponto $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f. (*Sugestão:* a prova é similar àquela do teste da derivada segunda.)

4.7 TRAÇANDO UM ESBOÇO DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Nas Secções 2.4 e 2.5 comentamos que para facilitar a elaboração do esboço do gráfico de uma função, encontramos, se existirem, as assíntotas do gráfico. Na Secção 2.4, tratamos das assíntotas verticais e na Secção 2.5, discutimos as assíntotas horizontais. Você poderá fazer uma revisão dessas secções agora, pois nós estaremos aplicando tais conceitos aqui.

Uma assíntota de um gráfico que não seja nem horizontal nem vertical é chamada de **assíntota oblíqüa**. Na Secção 11.6 daremos a definição formal (11.6.3) de assíntota oblíqüa. Então, mostraremos que o gráfico de uma função racional da forma $f(x)/g(x)$, onde o grau de $f(x)$ é um a mais do que o grau de $g(x)$, tem a reta $y = mx + b$ como assíntota oblíqüa, provando que

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - (mx + b) \right| = 0 \tag{1}$$

Se dividirmos o polinômio $f(x)$ no numerador pelo polinômio $g(x)$ do denominador, iremos obter a soma de uma função linear com uma função racional; isto é,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = mx + b + \frac{h(x)}{g(x)}$$

onde o grau do polinômio $h(x)$ é menor do que o grau de $g(x)$. Então,

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - (mx + b) \right| = \lim_{x \to +\infty} \left| \frac{h(x)}{g(x)} \right|$$

Quando o numerador e o denominador de $h(x)/g(x)$ forem divididos pela maior potência de x que aparece em $g(x)$, haverá um termo constante no denominador e todos os termos do denominador e do numerador serão da forma k/x^r, onde k é uma constante. Logo, quando $x \to +\infty$, o limite do numerador será 0, enquanto que o limite do denominador será uma constante. Assim,

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{h(x)}{g(x)} \right| = 0$$

o que estabelece (1).

EXEMPLO 1 Ache as assíntotas do gráfico da função h definida por

$$h(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1} \tag{2}$$

e faça um esboço do gráfico.

Solução Como

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^+} h(x) = +\infty$$

a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical. Não existem assíntotas horizontais, pois se o numerador e o denominador de $h(x)$ forem divididos por x^2, obteremos

$$\frac{1 + \dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}}$$

e quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, o limite do numerador é 1 e o limite do denominador é 0. Mas, o grau do numerador de $h(x)$ é um a mais do que o grau do denominador e quando o numerador for dividido pelo denominador, obteremos

$$h(x) = x + 1 + \frac{4}{x - 1}$$

Logo, a reta $y = x + 1$ é uma assíntota oblíqüa.

Para traçar o gráfico de h, determinamos se existe alguma reta tangente horizontal. De (2),

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 3)}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

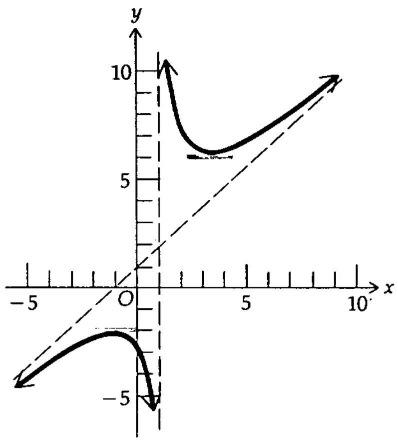


FIGURA 1

Equacionando $h'(x) = 0$, obtemos

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x + 1)(x - 3) = 0$$
$$x = -1 \qquad x = 3$$

Assim sendo, existem retas tangentes horizontais nos pontos $(-1, -2)$ e $(3, 6)$.

Indicamos as assíntotas, as retas tangentes horizontais e marcando mais alguns pontos, obtemos o esboço do gráfico de h dado pela Figura 1.

Para obter um esboço do gráfico de uma função f, você deverá aplicar as propriedades discutidas nesse capítulo e proceder da seguinte forma:

1. Determine o domínio de f.
2. Ache os interceptos y do gráfico. Localize os interceptos x do gráfico, se a equação resultante for fácil de resolver.
3. Teste a simetria em relação ao eixo y e a origem.
4. Calcule $f'(x)$ e $f''(x)$.
5. Determine os números críticos de f. Esses são os valores de x no domínio de f para os quais ou $f'(x)$ não existe ou $f'(x) = 0$.
6. Aplique o teste da derivada primeira (Teorema 4.4.4) ou o teste da derivada segunda (Teorema 4.6.1) para determinar se nos números críticos existe um valor máximo relativo, um valor mínimo relativo, ou nenhum dos dois.
7. Determine os intervalos nos quais f é crescente, encontrando os valores de x para os quais $f'(x)$ é positiva; determine os intervalos nos quais f é decrescente, encontrando os valores de x para os quais $f'(x)$ é negativa. Ao localizar os intervalos nos quais f é monótona, verifique os pontos críticos onde f não tem um extremo relativo.
8. Para obter os pontos de inflexão possíveis, ache os números críticos de f', isto é, os valores de x para os quais $f''(x)$ não existe ou $f''(x) = 0$. Em cada um desses valores de x, verifique se $f''(x)$ muda de sinal e se o gráfico tem uma reta tangente nele, a fim de determinar se realmente existe um ponto de inflexão.
9. Verifique a concavidade do gráfico. Ache os valores de x para os quais $f''(x)$ é positiva e negativa, a fim de obter os pontos nos quais a concavidade é para cima e para baixo, respectivamente.
10. É útil achar a inclinação da reta tangente nos pontos de inflexão.
11. Verifique a existência de possíveis assíntotas horizontais, verticais ou oblíqüas.

Sugerimos que as informações obtidas sejam incorporadas numa tabela, como nos exemplos a seguir.

EXEMPLO 2 Dada

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$$

Faça um esboço do gráfico de f determinando primeiro: os extremos relativos de f; os pontos de inflexão do gráfico de f; os intervalos nos quais f é crescente e decrescente; onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo e a inclinação da reta tangente nos pontos de inflexão.

Solução O domínio de f é o conjunto de todos números reais. O intercepto y é 3.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \qquad f''(x) = 6x - 6$$

Equacione $f'(x) = 0$ para obter $x = 0$ e $x = 2$. De $f''(x) = 0$, obtemos $x = 1$. Ao fazer a tabela, considere os pontos nos quais $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$, bem como os intervalos excluindo esses valores de x:

$$x < 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad 1 < x < 2 \qquad 2 < x$$

Das informações na Tabela 1 e determinando mais alguns pontos do gráfico, obteremos o gráfico da Figura 2.

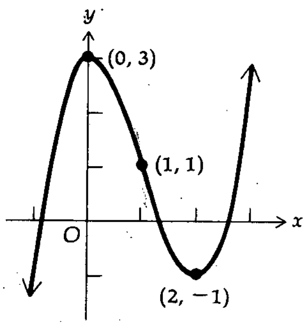


FIGURA 2

Tabela 1

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x < 0$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	3	0	−	f tem um valor máximo relativo; o gráfico é côncavo para baixo
$0 < x < 1$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 1$	1	−3	0	f é decrescente; o gráfico tem um ponto de inflexão
$1 < x < 2$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 2$	−1	0	+	f tem um valor mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$2 < x$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

Faça um esboço do gráfico de f, seguindo as instruções do Exemplo 2. Ache também as assíntotas horizontais e verticais.

Solução O domínio de f é o conjunto de todos números reais exceto ± 2. A única intersecção do gráfico com os eixos é a origem. Como $f(-x) = f(x)$, o gráfico é simétrico em relação ao eixo y.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2)}{(x^2 - 4)^2} \qquad f''(x) = \frac{-8(x^2 - 4)^2 + 8x[2(x^2 - 4)(2x)]}{(x^2 - 4)^4}$$

$$= \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} \qquad = \frac{24x^2 + 32}{(x^2 - 4)^3}$$

Equacione $f'(x) = 0$ para obter $x = 0$; $f''(x)$ não se anula nunca. Para a Tabela 2, considere os pontos nos quais $x = 0$ e $x = \pm 2$, pois 2 e -2 não estão no domínio de f. Também, para a tabela, considere os intervalos excluindo estes valores de x:

$$x < -2 \qquad -2 < x < 0 \qquad 0 < x < 2 \qquad 2 < x$$

Como 2 e -2 estão excluídos do domínio de f, calculamos os seguintes limites:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty$$

Portanto, $x = 2$ e $x = -2$ são assíntotas verticais do gráfico.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{4}{x^2}} = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{4}{x^2}} = 1$$

Logo, $y = 1$ é uma assíntota horizontal do gráfico.

Com os dados da Tabela 2, as assíntotas como guias, tendo mais alguns pontos marcados no gráfico, e as propriedades de simetria, obtemos o esboço do gráfico de f mostrado na Figura 3.

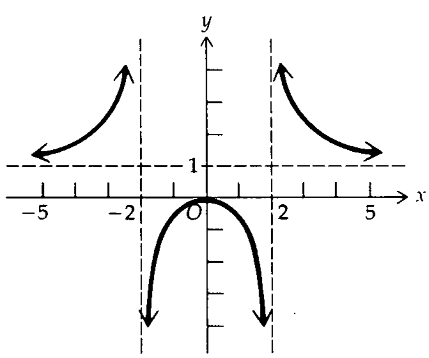


FIGURA 3

Tabela 2

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x < -2$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = -2$	não existe	não existe	não existe	
$-2 < x < 0$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	0	0	−	f tem um valor máximo relativo
$0 < x < 2$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 2$	não existe	não existe	não existe	
$2 < x$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima

Observe, no Exemplo 3, que dada a simetria com respeito ao eixo y, podemos obter o gráfico fazendo os cálculos para x em $[0, +\infty)$ e então, aplicamos as propriedades de simetria.

EXEMPLO 4 Dada

$$f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$$

Faça um esboço do gráfico de f, seguindo as instruções do Exemplo 2.

Solução O domínio de f é o conjunto de todos os números reais. O intercepto y é 0. Equacionando $f(x) = 0$, obtemos

$$x^{2/3}(5 - x) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 5$$

Logo, os interceptos x são 0 e 5.

$$f'(x) = \tfrac{10}{3}x^{-1/3} - \tfrac{5}{3}x^{2/3} \qquad f''(x) = -\tfrac{10}{9}x^{-4/3} - \tfrac{10}{9}x^{-1/3}$$
$$= \tfrac{5}{3}x^{-1/3}(2 - x) \qquad = -\tfrac{10}{9}x^{-4/3}(1 + x)$$

Quando $x = 0$, nem $f'(x)$ nem $f''(x)$ existem. Equacionando $f'(x) = 0$, obtemos $x = 2$. Assim sendo, os números críticos de f são 0 e 2. De $f''(x) = 0$, obtemos $x = -1$. Ao fazer a tabela, consideraremos os pontos nos quais x é -1, 0 e 2 e os seguintes intervalos:

$$x < -1 \qquad -1 < x < 0 \qquad 0 < x < 2 \qquad 2 < x$$

Um esboço do gráfico, com as informações da Tabela 3 e com alguns pontos adicionais está na Figura 4.

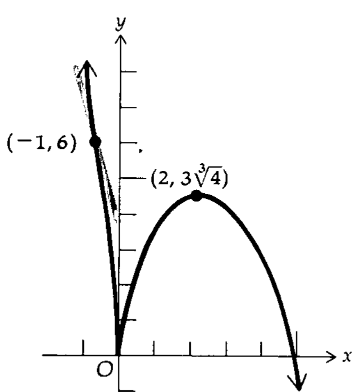


FIGURA 4

Tabela 3

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x < -1$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = -1$	6	−5	0	f é decrescente; o gráfico tem um ponto de inflexão
$-1 < x < 0$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	0	não existe	não existe	f tem um valor mínimo relativo
$0 < x < 2$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 2$	$3\sqrt[3]{4} \approx 4{,}8$	0	−	f tem um valor máximo relativo; o gráfico é côncavo para baixo
$2 < x$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo

EXERCÍCIOS 4.7

Nos Exercícios de 1 a 8, ache as assíntotas horizontal e vertical do gráfico da função e faça um esboço do gráfico.

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 8}{x - 3}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 4}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x + 2}$
6. $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$
7. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2}$
8. $f(x) = \dfrac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}$

Nos Exercícios de 9 a 58, ache as assíntotas horizontal e vertical do gráfico de f, determinando o seguinte: os extremos relativos de f; os pontos de inflexão do gráfico de f; os intervalos em que f é crescente; os intervalos em que f é decrescente; onde o gráfico é côncavo para cima; onde o gráfico é côncavo para baixo; a inclinação de qualquer tangente de inflexão; as assíntotas horizontal, vertical e oblíqüa; se existirem.

9. $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$
10. $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$
11. $f(x) = x^4 - 2x^3$
12. $f(x) = 3x^4 + 2x^3$
13. $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$
14. $f(x) = 2x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - 12x + 1$

15. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$

16. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x$

17. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$

18. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$

19. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2$

20. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4$

21. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ 2x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{se } x < 0 \\ x^3 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} -x^4 & \text{se } x < 0 \\ x^4 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} 2(x-1)^3 & \text{se } x < 1 \\ (x-1)^4 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$

25. $f(x) = \begin{cases} 3(x-2)^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ (2-x)^3 & \text{se } 2 < x \end{cases}$

26. $f(x) = x^2(x+4)^3$

27. $f(x) = (x+1)^3(x-2)^2$

28. $f(x) = 3x^5 + 5x^3$

29. $f(x) = 3x^5 + 5x^4$

30. $f(x) = |4 - x^2|$

31. $f(x) = 3\cos 2x;\ x \in [-\pi, \pi]$

32. $f(x) = 2\,\text{sen}\,3x;\ x \in [-\pi, \pi]$

33. $f(x) = \begin{cases} \text{sen}\,x & \text{se } 0 \leqslant x < \frac{1}{2}\pi \\ \text{sen}(x - \frac{1}{2}\pi) & \text{se } \frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ \cos(\pi - x) & \text{se } 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$

35. $f(x) = 2\,\text{tg}\,\frac{1}{2}x;\ x \in (-\pi, \pi)$

36. $f(x) = 3\sec\frac{1}{4}x;\ x \in (-2\pi, 2\pi)$

37. $f(x) = \text{sen}\,x + \cos x;\ x \in [-2\pi, 2\pi]$

38. $f(x) = |\text{sen}\,x|;\ x \in [-2\pi, 2\pi]$

39. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

40. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

41. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

42. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$

43. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

44. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$

45. $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$

46. $f(x) = x^{1/3} + 2x^{4/3}$

47. $f(x) = 3x^{4/3} - 4x$

48. $f(x) = 3x^{1/3} - x$

49. $f(x) = 2 + (x-3)^{1/3}$

50. $f(x) = 2 + (x-3)^{4/3}$

51. $f(x) = 2 + (x-3)^{5/3}$

52. $f(x) = 2 + (x-3)^{2/3}$

53. $f(x) = x^2\sqrt{4-x}$

54. $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$

55. $f(x) = (x+2)\sqrt{-x}$

56. $f(x) = \dfrac{9x}{x^2+9}$

57. $f(x) = (x+1)^{2/3}(x-2)^{1/3}$

58. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

4.8 TRATAMENTO ADICIONAL DOS EXTREMOS ABSOLUTOS E APLICAÇÕES

O teorema do valor extremo (4.1.9) garante um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto para uma função que seja contínua num intervalo fechado. Vamos considerar agora algumas funções definidas em intervalos onde não é válido o teorema do valor extremo e que podem ter ou não extremos absolutos.

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x) = \frac{x^2 - 27}{x - 6}$$

ache os extremos absolutos de f no intervalo $[0, 6)$, se existirem.

Solução A função f é contínua no intervalo $[0, 6)$, pois a única descontinuidade de f é em 6, que não pertence ao intervalo.

$$f'(x) = \frac{2x(x-6) - (x^2 - 27)}{(x-6)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 12x + 27}{(x-6)^2}$$

$$= \frac{(x-3)(x-9)}{(x-6)^2}$$

Observe que $f'(x)$ existe para todos os valores de x em $[0, 6)$ e $f'(x) = 0$ quando x é 3 ou 9; assim sendo, o único número crítico de f no intervalo $[0, 6)$ é 3. O teste da derivada primeira, quando aplicado, a fim de determinar se f tem um extremo relativo em 3, e os resultados são resumidos na Tabela 1.

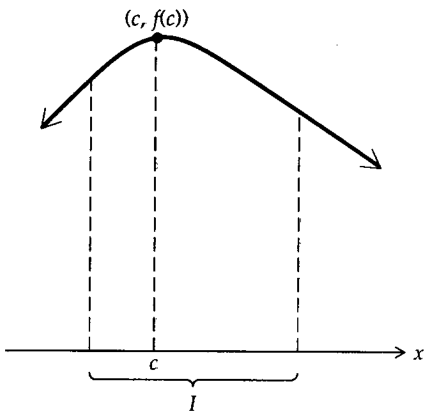


FIGURA 1

Tabela 1

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusão*
$0 \leqslant x < 3$		$+$	f é crescente
$x = 3$	6	0	f tem um valor máximo relativo
$3 < x < 6$		$-$	f é decrescente

Como f tem um valor máximo relativo em 3 e f é crescente no intervalo $[0, 3)$ e decrescente no intervalo $(3, 6)$, então em $[0, 6)$ f tem um valor máximo absoluto em 3, sendo $f(3)$, que é igual a 6. Note que $\lim_{x \to 6^-} f(x) = -\infty$, donde concluímos que f não tem um valor mínimo absoluto em $[0, 6)$.

As funções cujos gráficos aparecem nas Figuras 1 e 2 são contínuas em um intervalo I e têm apenas um extremo relativo, $f(c)$, em I. Observe que $f(c)$também tem um extremo absoluto em I. Essas funções ilustram o teorema a seguir, que às vezes é útil para determinar se um extremo relativo é um extremo absoluto.

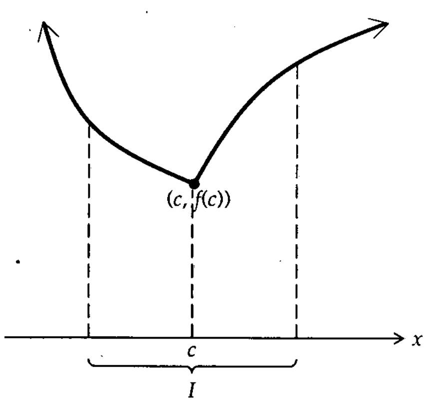


FIGURA 2

4.8.1 TEOREMA Seja f uma função contínua num intervalo I contendo o número c. Se $f(c)$ for um extremo relativo de f em I e se c for o único número em I, no qual f tem um extremo relativo, então $f(c)$ será um extremo absoluto de f em I. Além disso,

(i) se $f(c)$ for um valor máximo relativo de f em I, então $f(c)$ será um valor máximo absoluto de f em I;
(ii) se $f(c)$ for um valor mínimo relativo de f em I, então $f(c)$ será um valor mínimo absoluto de f em I.

Prova Vamos provar a parte (i). A demonstração da parte (ii) é similar.

Como $f(c)$ é um valor máximo relativo de f em I, então, pela definição 4.1.1 existe um intervalo aberto J, onde $J \subset I$, e J contém c, tal que

$$f(c) \geqslant f(x) \qquad \text{para todo } x \in J$$

Como c é o único número de I no qual f tem um valor máximo relativo, segue que

$$f(c) > f(k) \qquad \text{se } k \in J \text{ e } k \neq c \tag{1}$$

Para mostrar que $f(c)$ é um valor máximo absoluto de f em I, vamos mostrar que se d for qualquer número em I, distinto de c, então $f(c) > f(d)$. Vamos supor que

$$f(c) \leqslant f(d) \tag{2}$$

e mostrar que isto leva a uma contradição. Como $d \neq c$, então $c < d$ ou $d < c$. Vamos considerar o caso em que $c < d$ (a demonstração é similar se $d < c$).

Como f é contínua em I, então f é contínua no intervalo fechado $[c, d]$. Logo, pelo teorema do valor extremo, f tem um valor mínimo absoluto em $[c, d]$. Suponha que esse valor mínimo absoluto ocorra em e, onde $c \leqslant e \leqslant d$. Da desigualdade (1) segue que $e \neq c$ e das desigualdades (1) e (2) segue que $e \neq d$. Conseqüentemente, $c < e < d$ e, portanto, f tem um valor mínimo relativo em e. Mas isso contraria a hipótese de que c é o único número em I no qual f tem um extremo relativo. Segue que a hipótese $f(c) \leqslant f(d)$ é falsa. Logo,

$f(c) > f(d)$ se $d \in I$ e $d \neq c$ e, conseqüentemente, $f(c)$ é um valor máximo absoluto de f em I. ■

EXEMPLO 2 Dada

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 12x + 3$$

ache os extremos absolutos de f em $(-\infty, +\infty)$, se existirem.

Solução

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 24x - 12 \qquad f''(x) = 36x^2 - 48x + 24$$

$f'(x)$ existe para todos os valores de x. Equacionando $f'(x) = 0$, obtemos

$$12(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) = 0$$

Fazemos a divisão polinomial para determinar que $x - 1$ é um fator do primeiro membro da equação, obtendo

$$12(x - 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

Como a equação $x^2 - x + 1 = 0$ tem somente raízes imaginárias, a única solução real é 1. Portanto, $f'(1) = 0$. Para determinar se $f(1)$ é um extremo relativo, aplicamos o teste da derivada segunda e obtemos os resultados que estão resumidos na Tabela 2.

Tabela 2

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x = 1$	-2	0	+	f tem um valor mínimo relativo

A função f é contínua em $(-\infty, +\infty)$ e o único extremo relativo de f em $(-\infty, +\infty)$ está em $x = 1$. Logo, segue do Teorema 4.8.1 (ii) que -2, o valor mínimo relativo de f, é o valor mínimo absoluto de f.

Na Secção 4.2, as aplicações envolviam o cálculo dos extremos absolutos de funções contínuas num intervalo fechado e o teorema do valor extremo foi usado na solução dos problemas. Vamos tratar agora das aplicações envolvendo extremos absolutos para os quais o teorema do valor extremo não pode ser aplicado.

EXEMPLO 3 Uma caixa fechada com base quadrada deve ter um volume de 2.000 cm³. O material da tampa e da base deve custar \$ 3 por centímetro quadrado e o material para os lados custa \$ 1,50 por centímetro quadrado. Queremos encontrar as dimensões da caixa cujo custo total do material seja mínimo.

Solução Seja x cm o comprimento de um lado da base quadrada e $C(x)$ o custo total do material. A área da base é x^2 cm². Seja y cm a profundidade da caixa. Veja a Figura 3. Como o volume da caixa é o produto da área da base pela profundidade

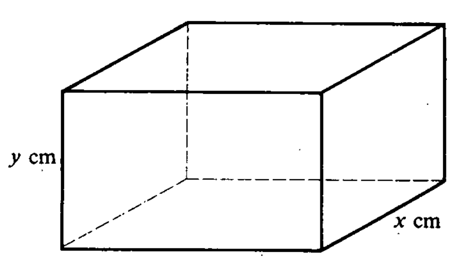


FIGURA 3

$$x^2y = 2000$$

$$y = \frac{2000}{x^2} \tag{3}$$

O número total de centímetros quadrados na área combinada da tampa e da base é $2x^2$, e para os lados, é $4xy$. Portanto, o número de centavos no custo total do material é

$$3(2x^2) + \tfrac{3}{2}(4xy)$$

Substituindo y por seu equivalente de (3), temos

$$C(x) = 6x^2 + 6x\left(\frac{2000}{x^2}\right)$$

$$C(x) = 6x^2 + \frac{12.000}{x}$$

O domínio de C é $(0, +\infty)$. Além disso, C é contínua em seu domínio.

$$C'(x) = 12x - \frac{12.000}{x^2} \qquad C''(x) = 12 + \frac{24.000}{x^3}$$

Observe que $C'(x)$ não existe quando $x = 0$, mas 0 não está no domínio de C. Logo, os únicos números críticos serão aqueles obtidos como solução da equação $C'(x) = 0$, o que dá

$$12x - \frac{12.000}{x^2} = 0$$

$$x^3 = 1.000$$

A única solução real é 10. Assim, 10 é o único número crítico. Para determinar se $x = 10$ torna C um mínimo relativo, aplicamos o teste da derivada segunda. Os resultados do teste da derivada segunda estão resumidos na Tabela 3.

Tabela 3

	$C'(x)$	$C''(x)$	*Conclusão*
$x = 10$	0	+	C tem um valor mínimo relativo

Como C é contínua em seu domínio $(0, +\infty)$ e o único extremo relativo de C em $(0, +\infty)$ é em $x = 10$, segue do Teorema 4.8.1 (ii) que esse valor mínimo relativo de C é o valor mínimo absoluto. Assim, o custo total do material será mínimo quando o lado da base quadrada for 10 cm. A profundidade será, então, de 20 cm, pois a área da base será 100 cm² e o volume, 2.000 cm³.

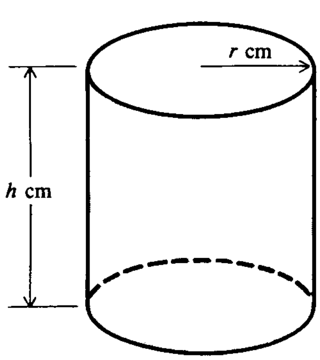


FIGURA 4

EXEMPLO 4 Se uma lata fechada com volume 16π cm³ deve ter a forma de um cilindro circular reto, ache a altura e o raio, se um mínimo de material deve ser usado em sua fabricação.

Solução Seja r cm o raio da base do cilindro, h cm a altura do cilindro e S cm² a área da superfície total do cilindro. Veja a Figura 4. A área da superfície lateral é $2\pi rh$ cm², a área da tampa é πr^2 cm² e a área da base é πr^2 cm². Logo,

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 \tag{4}$$

Se V cm³ for o volume de um cilindro circular reto, então $V = \pi r^2 h$. Assim,

$$16\pi = \pi r^2 h \tag{5}$$

Resolvendo (5) em h e substituindo em (4), obtemos S como uma função de r:

$$S(r) = 2\pi r\left(\frac{16}{r^2}\right) + 2\pi r^2$$

$$S(r) = \frac{32\pi}{r} + 2\pi r^2$$

O domínio de S é $(0, +\infty)$, e S é contínua em seu domínio.

$$S'(r) = -\frac{32\pi}{r^2} + 4\pi r \qquad S''(r) = \frac{64\pi}{r^3} + 4\pi$$

$S'(r)$ não existe quando $r = 0$, mas 0 não está no domínio de S. Os únicos números críticos serão aqueles obtidos ao resolvermos a equação $S'(r) = 0$, da qual temos

$$4\pi r^3 = 32\pi$$

$$r^3 = 8$$

$$r = 2$$

O único número crítico de S é 2. Os resultados da aplicação do teste da derivada segunda estão resumidos na Tabela 4.

Tabela 4

	$S'(r)$	$S''(r)$	*Conclusão*
$r = 2$	0	+	S tem um valor mínimo relativo

Como S é contínua em seu domínio $(0, +\infty)$ e o único extremo relativo de S em $(0, +\infty)$ ocorre em $r = 2$, segue do Teorema 4.8.1 (ii) que esse valor mínimo relativo é o valor mínimo absoluto de S. Quando $r = 2$, temos, de (5), $h = 4$. Logo, a menor quantidade de material será usada na fabricação da lata quando o raio for de 2 cm e a altura for de 4 cm.

Nos exemplos precedentes e nos exercícios da Secção 4.2, a variável para a qual desejávamos encontrar um extremo absoluto era expressa como uma função de uma única variável. Algumas vezes, esse procedimento é muito difícil ou muito trabalhoso, ou ocasionalmente impossível. Freqüentemente, as informações dadas possibilitam-nos obter duas equações envolvendo três variáveis. Em vez de eliminar uma das variáveis, pode ser mais vantajoso derivar implicitamente. O exemplo a seguir ilustra este método. O problema é similar ao do Exemplo 4, mas neste exemplo o volume pedido não é especificado.

EXEMPLO 5 Se uma lata fechada com um volume fixo deve ter a forma de um cilindro circular reto, ache a razão entre a altura e o raio da base se a quantidade de material usado na fabricação for mínima.

Solução Queremos encontrar uma relação entre a altura e o raio da base de um cilindro circular reto, a fim de que a área total da superfície seja um mínimo absoluto para um volume fixo. Logo, iremos considerar o volume do cilindro como uma constante.

Seja V unidades cúbicas o volume de um cilindro (constante).

Vamos definir agora as variáveis.

Seja r unidades o raio da base do cilindro, $r > 0$; e h unidades a altura do cilindro, $h > 0$. Seja S unidades de área a superfície total do cilindro.

Temos as seguintes equações:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \tag{6}$$

$$V = \pi r^2 h \tag{7}$$

Como V é uma constante, poderíamos resolver (7) para r ou h, em termos da outra e substituir em (6) o que nos daria S como função de uma única variável. O método alternativo consiste em considerar S com uma função de duas variáveis r e h; contudo, r e h não são independentes uma da outra. Isto é, se escolhermos r como variável independente, então S depende de r e h também depende de r.

Derivando S e V em relação a r e levando em conta que h é uma função de r, temos

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi r\frac{dh}{dr} \tag{8}$$

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi rh + \pi r^2\frac{dh}{dr}$$

Como V é uma constante, $\frac{dV}{dr} = 0$; logo, da fórmula acima,

$$2\pi rh + \pi r^2\frac{dh}{dr} = 0$$

com $r \neq 0$. Dividindo por r e resolvendo em $\frac{dh}{dr}$, teremos

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{2h}{r} \tag{9}$$

Substituindo (9) em (8), iremos obter

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi\left[2r + h + r\left(-\frac{2h}{r}\right)\right]$$

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi(2r - h) \tag{10}$$

Para encontrar a situação em que S tem um valor mínimo relativo, resolvemos a equação $\frac{dS}{dr} = 0$, obtendo $2r - h = 0$, o que resulta

$$r = \tfrac{1}{2}h$$

Para determinar se essa relação entre r e h torna S um mínimo relativo, aplicamos o teste da derivada segunda. Então, de (10),

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 2\pi\left(2 - \frac{dh}{dr}\right)$$

Substituindo (9) nessa relação, iremos obter

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 2\pi\left[2 - \left(\frac{-2h}{r}\right)\right]$$
$$= 2\pi\left(2 + \frac{2h}{r}\right)$$

Os resultados da aplicação do teste da derivada segunda estão resumidos na Tabela 5.

Tabela 5

	$\frac{dS}{dr}$	$\frac{d^2S}{dr^2}$	*Conclusão*
$r = \frac{1}{2}h$	0	+	S tem um valor mínimo relativo

De (6) e (7), S é uma função contínua de r em $(0, +\infty)$. Como o único extremo relativo de S em $(0, +\infty)$ está em $r = \frac{1}{2}h$, concluímos do Teorema 4.8.1 (ii) que S tem um valor mínimo absoluto em $r = \frac{1}{2}h$. Logo, a área total da superfície da lata será mínima para um volume específico quando a razão entre a altura e o raio da base for 2.

Problemas geométricos envolvendo extremos absolutos, ocasionalmente, ficam mais fáceis de ser resolvidos quando utilizamos funções trigonométricas. O exemplo a seguir ilustra esse fato.

EXEMPLO 6 Um cilindro circular reto deve ser inscrito numa esfera com raio dado. Ache a razão entre a altura e o raio da base do cilindro cuja área da superfície lateral seja máxima.

Solução Consulte a Figura 5. Vamos tomar a medida do raio constante da esfera como sendo a.

Seja θ rad o ângulo no centro da esfera subentendido pelo raio do cilindro, r unidades o raio do cilindro, h unidades a altura do cilindro e S unidades quadradas a área da superfície lateral do cilindro. Da Figura 5,

$$r = a \text{ sen } \theta \quad \text{e} \quad h = 2a \cos \theta$$

Como $S = 2\pi rh$,

$$S = 2\pi(a \text{ sen } \theta)(2a \cos \theta)$$
$$= 2\pi a^2(2 \text{ sen } \theta \cos \theta)$$
$$= 2\pi a^2 \text{ sen } 2\theta$$

Assim, S é uma função de θ e seu domínio é $(0, \frac{\pi}{2})$.

$$\frac{dS}{d\theta} = 4\pi a^2 \cos 2\theta \quad \text{e} \quad \frac{d^2S}{d\theta^2} = -8\pi a^2 \text{ sen } 2\theta$$

Equacionando $\frac{dS}{d\theta} = 0$,

$$\cos 2\theta = 0$$

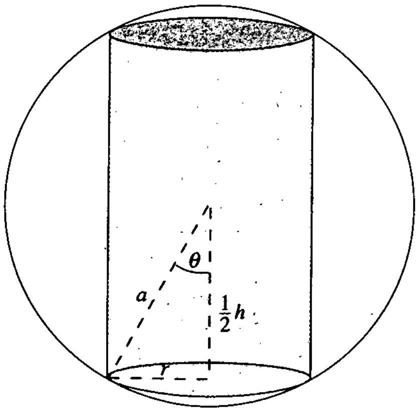


FIGURA 5

Como $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$,

$$\theta = \tfrac{1}{4}\pi$$

Aplicamos então o teste da derivada segunda para extremos relativos, cujos resultados estão resumidos na Tabela 6.

Tabela 6

	$\frac{dS}{d\theta}$	$\frac{d^2S}{d\theta^2}$	*Conclusão*
$\theta = \frac{1}{4}\pi$	0	$-$	S tem um valor máximo relativo

S é contínua em seu domínio e como há somente um extremo relativo segue do Teorema 4.8.1 (i) que o valor máximo relativo de S é também o seu valor máximo absoluto.

Quando $\theta = \frac{1}{4}\pi$,

$$r = a \operatorname{sen} \tfrac{1}{4}\pi \qquad h = 2a \cos \tfrac{1}{4}\pi$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}a \qquad = \sqrt{2}a$$

Assim, para que a área da superfície lateral seja máxima, $h/r = 2$.

EXERCÍCIOS 4.8

Nos exercícios de 1 a 16, ache os extremos absolutos da função dada no intervalo indicado, se existir algum.

1. $f(x) = x^2$; $(-3, 2]$
2. $g(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$; $(-3, 2)$
3. $F(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$; $[-4, 4]$
4. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+3}$; $[-4, -1]$
5. $g(x) = 4x^2 - 2x + 1$; $(-\infty, +\infty)$
6. $f(x) = x^3 - 3x + 5$; $(-\infty, 0)$
7. $f(x) = (x-1)^{1/3}$; $(-\infty, +\infty)$
8. $G(x) = (x-5)^{2/3}$; $(-\infty, +\infty)$
9. $f(x) = x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 2x + 1$; $(-\infty, +\infty)$
10. $h(x) = 3x^4 - 2x^3 - 12x^2 - 6x - 1$; $(-\infty, +\infty)$
11. $g(x) = \dfrac{x^2+7}{x-3}$; $[-3, 3)$
12. $f(x) = \dfrac{x^2-30}{x-4}$; $(-\infty, 4)$
13. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+4)^{3/2}}$; $[0, +\infty)$
14. $g(x) = \sqrt{x^4 - 4x + 7}$; $(-\infty, +\infty)$
15. $f(x) = \operatorname{tg} x + 2 \sec x$; $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$
16. $h(x) = x + \operatorname{cotg} x$; $[\frac{1}{6}\pi, \frac{2}{3}\pi]$
17. Um campo retangular com uma área de 2.700 m² deve ser fechado e uma cerca adicional deve ser usada para dividi-lo ao meio. O custo da cerca do meio é de $ 12 por metro linear e ao longo dos lados a cerca custa $ 18 por metro linear. Ache as dimensões do campo, de modo que o custo da cerca seja mínimo.
18. Um tanque retangular aberto deve ter uma base quadrada e seu volume deve ser de 125 m³. O custo por metro quadrado é de $ 24 para a base e de $ 12 para os lados. Ache as dimensões do tanque cujo custo total do material seja mínimo.
19. Uma página deve conter 24 cm² de impressão, com margens de $1\frac{1}{2}$ cm em cima e embaixo, enquanto devemos ter 1 cm de cada lado. Quais as dimensões da menor página que satisfaz todos esses requisitos?
20. Um edifício de um andar tendo 1.188 m² de piso deve ser construído, sendo exigidos recuos de 6,6 m na frente e no fundo e de 4,5 m nas laterais. Ache as dimensões do lote com menor área onde esse edifício possa ser construído.
21. Um fabricante de caixas deve produzir uma caixa fechada com um volume de 288 cm³, onde a base é um retângulo com um comprimento três vezes maior que a largura. Ache as dimensões da caixa fabricada com o mínimo de material.
22. Resolva o Exercício 21 para o caso em que a caixa não tenha tampa.
23. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 3x^2 + 5x$ com inclinação mínima.
24. Um poster de papelão cuja figura ocupa 32 cm² do espaço deve ter embaixo e em cima uma margem de 2 cm e uma margem de $\frac{4}{3}$ cm nos lados. Determine as dimensões do menor pedaço de papelão que possa ser usado para fazer o poster.
25. Numa dada comunidade, uma certa epidemia alastra-se de tal forma que x meses após o seu início, P % da população estará infectada, onde

$$P = \frac{30x^2}{(1+x^2)^2}$$

Em quantos meses o número de pessoas infectadas atingirá o máximo e que porcentagem da população esse número representa?

26. Um gerador de corrente contínua tem uma força eletromotriz de E volts e uma resistência interna de r ohms, onde E e r são constantes. Se R ohms for a resistência externa, a resistência total será de $(r + R)$ ohms e se P watts for a potência, então

$$P = \frac{E^2R}{(r + R)^2}$$

Mostre que a maior potência será consumida quando as resistências interna e externa forem iguais.

27. Para a lata do Exemplo 4, suponha que o custo do material da tampa e da base seja o dobro do custo dos lados. Ache a altura e o raio da base para que o custo do material seja mínimo.

28. Resolva o Exemplo 4, se a lata for aberta ao invés de fechada.

Nos Exercícios 29 e 30, use a expressão competição perfeita. Quando uma empresa funciona em ***competição perfeita,*** *há muitas firmas pequenas assim, nenhuma empresa afeta o preço ao elevar a sua produção. Portanto, sob competição perfeita o preço de uma mercadoria é constante, e a empresa pode vender quanto desejar, a um preço constante.*

29. Sob competição perfeita, uma fábrica pode vender a um preço de \$ 200 por unidade todo o estoque de uma determinada mercadoria produzida. Se $C(x)$ for o custo total da produção diária quando x unidades são fabricadas, e $C(x) = 2x^2 + 40x + 1.400$, ache o número de unidades produzidas diariamente, para que a fábrica tenha um lucro diário total máximo. (*Sugestão*: o lucro total é igual ao rendimento total menos o custo total.)

30. Uma empresa que fabrica e vende carteiras sob competição perfeita pode vendê-las a um preço unitário de \$ 400. Se x carteiras forem produzidas e vendidas a cada semana e $C(x)$ for o custo total da produção semanal, então $C(x) = 2x^2 + 80x + 6.000$. Determine quantas carteiras devem ser fabricadas a cada semana para que a companhia obtenha um lucro semanal máximo. Qual será este lucro semanal máximo? Veja a sugestão para o Exercício 29.

31. Sob um **monopólio**, que significa que há apenas um produtor de certa mercadoria, o preço e então a demanda podem ser controlados, regulando-se a quantidade da mercadoria produzida. Suponha que, sob um monopólio, x unidades sejam demandadas diariamente, quando p é o preço por unidade e $x = 140 - p$. Se a quantia em dinheiro no custo total da produção de x unidades for dada por $C(x) = x^2 + 20x + 300$, ache o lucro total diário máximo.

32. Ache a menor distância do ponto $P(2, 0)$ a um ponto sobre a curva $y^2 - x^2 = 1$, e ache o ponto sobre a curva que seja mais próximo de P.

33. Ache a menor distância da origem à reta $3x + y = 6$, e encontre o ponto P sobre a reta que esteja mais próximo da origem. Então, mostre que a origem está na reta perpendicular à reta dada em P.

34. Ache a menor distância do ponto $A(2, \frac{1}{2})$ a um ponto sobre a parábola $y = x^2$, e ache o ponto B sobre a parábola que seja o mais próximo de A. Então, mostre que A está sobre a reta normal da parábola em B.

35. Uma janela em estilo normando consiste em um retângulo com um semicírculo sobre ele. Se o perímetro de uma janela normanda for de 10 m, determine qual deve ser o raio do semicírculo e a altura do retângulo, tal que a janela deixe passar o máximo de luz.

36. Resolva o Exercício 35, no caso em que o semicírculo transmita somente a metade da luz por metro quadrado da área do retângulo.

37. Ficou determinado que, excluindo-se os salários, o custo por quilômetro para operar um caminhão é de $8 + \frac{1}{300}x$, onde x km/h é a velocidade do caminhão. Se os salários do motorista e do ajudante forem, no total, de \$ 27 por hora, qual deverá ser a velocidade média do caminhão para que o custo por quilômetro seja mínimo?

38. O custo por hora do combustível para um navio de carga é $\frac{1}{50}v^3$, onde v nós (milha náutica por hora) é a velocidade do navio. Se houver um custo adicional de \$ 400 por hora, qual deverá ser a velocidade média do navio, para que o custo por milha náutica seja mínimo? (1 milha náutica = 1,85325 km)

39. Um automóvel viajando a uma velocidade de 9 m/s aproxima-se de um cruzamento. Quando o automóvel está a 36 m do cruzamento, um caminhão viajando a uma velocidade de 12 m/s, o atravessa. O automóvel e o caminhão estão em estradas perpendiculares entre si. Quanto tempo após o caminhão deixar o cruzamento, os veículos estarão mais próximos um do outro?

40. Dois aviões A e B voam horizontalmente à mesma altitude. O avião B está a sudoeste do avião A e 20 km a oeste e 20 km ao sul de A. Se o avião A está viajando para o oeste a 16 km/min e o avião B está viajando para o norte a $\frac{64}{3}$ km/min, (a) em quantos segundos eles estarão mais perto um do outro e (b) qual será a menor distância entre eles?

41. Uma viga de 27 m é transportada horizontalmente por uma passagem com 8 m de largura, e então, por um corredor em ângulo reto com a passagem. Qual deve ser a largura do corredor para que a viga possa passar por essa quina? Despreze a dimensão transversal da viga, ou seja, considere-a como um segmento de reta.

42. Se dois corredores em ângulo reto um com o outro têm larguras de 3 e 4,5 m, qual o comprimento da maior viga que pode ser movida horizontalmente, passando por essa quina? Despreze a dimensão transversal da viga.

43. Um funil com um dado volume deve ter a forma de um cone circular reto. Ache a razão entre a altura e o raio da base se a quantidade de material usado em sua fabricação for mínima.

44. Um cone circular reto deve ser inscrito em uma esfera com um raio dado. Ache a razão entre a altura e o raio da base do cone de maior volume possível.

45. Um cone circular reto deve ser circunscrito numa esfera de raio dado. Ache a razão entre a altura e o raio da base do cone com o menor volume possível.

46. Prove, usando o método desta Secção, que a menor distância de um ponto $P_1(x_1, y_1)$ a uma reta l com equação $Ax + By + C = 0$ é $|Ax_1 + By_1 + C|/\sqrt{A^2 + B^2}$. (*Sugestão*: se s for o número de unidades na distância de P_1 ao ponto $P(x, y)$ sobre l, então s será um mínimo absoluto quando s^2 for um mínimo absoluto.)

47. Ache a altura do cone circular reto com maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio a unidades. Seja 2θ a medida em radianos do ângulo vertical do cone.

48. A Secção transversal de uma tina tem a forma de um triângulo isósceles invertido. Se o comprimento dos lados iguais for de 15 cm, ache a medida do ângulo do vértice que dará capacidade máxima à tina.

4.9 A DIFERENCIAL

Suponha que a função f seja definida pela equação

$$y = f(x)$$

Agora mostraremos como os incrementos Δy podem ser aproximados, por essa função, a pontos onde f seja derivável. Em tais pontos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

onde

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Segue de (1) que para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |\Delta x| < \delta, \text{ então } \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{ se } 0 < |\Delta x| < \delta, \text{ então } \frac{|\Delta y - f'(x)\Delta x|}{|\Delta x|} < \epsilon$$

Isso significa que $|\Delta y - f'(x)\,\Delta x|$ é pequeno, comparado com $|\Delta x|$. Ou seja, para $|\Delta x|$ suficientemente pequeno, $f'(x)\Delta x$ é uma boa aproximação do valor de Δy, e podemos escrever

$$\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x \tag{2}$$

se $|\Delta x|$ for suficientemente pequeno.

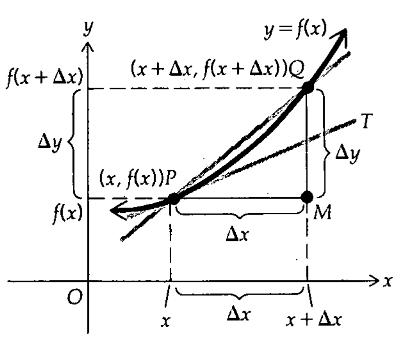


FIGURA 1

Para uma interpretação gráfica de (2), consulte a Figura 1. Na figura, uma equação da curva é $y = f(x)$. A reta PT é tangente à curva em $P(x, f(x))$, Q é o ponto $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, e a distância orientada MQ é $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Na figura, Δx e Δy são ambas positivas; contudo, elas poderiam ser negativas. Para um pequeno valor de Δx, a inclinação da reta secante PQ e a inclinação da reta tangente em P são aproximadamente iguais, isto é,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$$

$$\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$$

que é (2).

O segundo membro de (2) é definido como sendo a *diferencial* de y.

4.9.1 DEFINIÇÃO

Se a função f for definida por $y = f(x)$, então a **diferencial de** y, denotada por dy, será dada por

$$dy = f'(x)\Delta x \tag{3}$$

onde x está no domínio de f' e Δx é um incremento arbitrário de x.

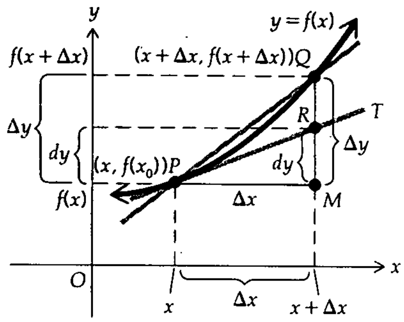


FIGURA 2

Consulte agora a Figura 2 que é igual à Figura 1, exceto que a reta vertical MR é mostrada, onde a distância orientada $\overline{MR} = dy$. Observe que dy representa a variação em y ao longo da reta tangente ao gráfico da equação $y = f(x)$ no ponto $P(x, f(x))$, quando x recebe um acréscimo de Δx.

O conceito de diferencial envolve um tipo especial de função de duas variáveis e um estudo detalhado de tais funções é feito no Capítulo 16. O símbolo df pode ser usado para representar essa função. A variável x pode ser qualquer número no domínio de f' e Δx pode ser qualquer número que desejarmos. Afirmar que df é uma função de duas variáveis independentes x e Δx significa que a cada par ordenado $(x, \Delta x)$ no domínio de df corresponde um único número na imagem de df e esse número pode ser representado por $df(x, \Delta x)$; assim,

$$df(x, \Delta x) = f'(x)\,\Delta x$$

Comparando essa igualdade com (3) vemos que quando $y = f(x)$, dy e $df(x, \Delta x)$ são notações diferentes para $f'(x)\Delta x$. O símbolo dy será usado nas discussões subseqüentes.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se $y = 3x^2 - x$, então $f(x) = 3x^2 - x$; assim, $f'(x) = 6x - 1$. Logo, da Definição 4.9.1

$$dy = (6x - 1)\,\Delta x$$

Em particular, se $x = 2$, então $dy = 11\Delta x$. ◀

Quando $y = f(x)$, a Definição 4.9.1 fornece-nos o significado de dy, a diferencial da variável dependente. Queremos também definir a diferencial da variável independente, ou dx. Para chegar a uma definição conveniente de dx que seja consistente com a definição de dy, consideramos a função identidade definida por $f(x) = x$. Então, $f'(x) = 1$ e $y = x$; assim, de (3), $dy = 1 \cdot \Delta x$, isto é,

$$\text{se } y = x, \text{ então } dy = \Delta x \tag{4}$$

Para a função identidade, gostaríamos que dx fosse igual a dy; isto é, devido à afirmativa (4) gostaríamos que dx fosse igual a Δx. Esse raciocínio nos leva à definição a seguir.

4.9.2 DEFINIÇÃO Se a função f for definida por $y = f(x)$, então a **diferencial de x**, denotada por dx, será dada por

$$dx = \Delta x$$

onde Δx é um incremento arbitrário de x e x é qualquer número no domínio de f'.

Das definições 4.9.1 e 4.9.2,

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx} \tag{5}$$

Dividindo ambos os membros de (5) por dx, temos

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad \text{se } dx \neq 0$$

Essa relação expressa a derivada como o quociente de duas diferenciais. Lembre-se de que, quando introduzimos a notação $\frac{dy}{dx}$ para a derivada na Secção 3.1, dy e dx não tinham significado independente.

EXEMPLO 1 Dada $y = 4x^2 - 3x + 1$, ache Δy, dy e $\Delta y - dy$ para (a) quaisquer x e Δx; (b) $x = 2$, $\Delta x = 0{,}1$; (c) $x = 2$, $\Delta x = 0{,}01$; (d) $x = 2$, $\Delta x = 0{,}001$.

Solução

(a) Como $y = 4x^2 - 3x + 1$, seja

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 1$$

Então,

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= 4(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1 - (4x^2 - 3x + 1)\\ &= 4x^2 + 8x\,\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3x - 3\,\Delta x + 1 - 4x^2 + 3x - 1\\ &= (8x - 3)\,\Delta x + 4(\Delta x)^2\end{aligned}$$

De (5),

$$\begin{aligned}dy &= f'(x)\,dx\\ &= (8x - 3)\,dx\\ &= (8x - 3)\,\Delta x\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Delta y - dy &= (8x - 3)\,\Delta x + 4(\Delta x)^2 - (8x - 3)\,\Delta x\\ &= 4(\Delta x)^2\end{aligned}$$

Os resultados das partes (b), (c) e (d) estão dados na Tabela 1, onde

$$\Delta y = (8x - 3)\,\Delta x + 4(\Delta x)^2 \qquad \text{e} \qquad dy = (8x - 3)\,\Delta x$$

Tabela 1

	x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
(b)	2	0,1	1,34	1,3	0,04
(c)	2	0,01	0,1304	0,13	0,0004
(d)	2	0,001	0,013004	0,013	0,000004

Observe na Tabela 1 que a afirmação de que a diferença $\Delta y - dy$ tem um limite zero quando $\Delta x \to 0$ não traz nenhuma informação adicional, uma vez que já sabemos que ambos, Δy e dy, têm o limite zero! O que é realmente notável é o fato de que **também** para **o erro relativo** $\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta x}$ temos $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y - dy}{\Delta x} = 0$; uma afirmação obviamente mais forte do que a anterior. A primeira afirmação decorre apenas da continuidade de $f(x)$ e a segunda é equivalente à existência da derivada $f'(x)$. Observe ainda que, em geral, **não** podemos afirmar que $\Delta y - dy$ decresça monotonicamente com Δx, mas sim que, para qualquer tolerância de erro $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|\Delta y - dy| \leqslant \epsilon\,|\Delta x|$ se $|\Delta x| < \delta$.

Para um valor fixo de x, digamos x_0,

$$dy = f'(x_0)\,dx$$

Isto é, dy uma função linear de dx; conseqüentemente, em geral é mais fácil calcular dy do que Δy, como foi visto no Exemplo 1. Como

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$$

então,

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$$

Assim,

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy \qquad (6)$$

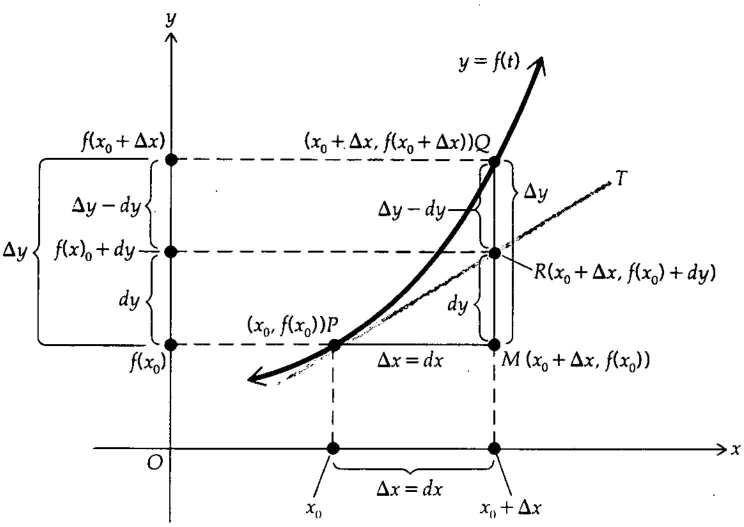


FIGURA 3

Nossos resultados estão ilustrados na Figura 3. A equação da curva é $y = f(x)$ e o gráfico é côncavo para cima. A reta PT é tangente à curva em $P(x_0, f(x_0))$; Δx e dx são iguais e estão representados pela distância orientada $\overline{PM}$, onde M é o ponto $(x_0 + \Delta x, f(x_0))$. Seja Q o ponto $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, e a distância orientada $\overline{MQ}$ é Δy ou, equivalentemente, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. A inclinação de PT é $f'(x) = dy/dx$. Também a inclinação de PT é $\overline{MR}/\overline{PM}$ e como $\overline{PM} = dx$, temos $dy = \overline{MR}$ e $\overline{RQ} = \Delta y - dy$. Note que quanto menor o valor de dx (isto é, quanto mais próximo o ponto Q estiver do ponto P), menor será o valor de $\Delta y - dy$ (isto é, menor será o comprimento do segmento de reta RQ). Uma equação da reta tangente PT é

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Assim, se $\bar{y}$ for a ordenada de R, então

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)[(x_0 + \Delta x) - x_0]$$

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$$

$$\bar{y} = f(x_0) + dy$$

Comparando essa equação com (6), observe que se usarmos $f(x_0) + dy$ para aproximar o valor de $f(x_0 + \Delta x)$, estaremos aproximando a ordenada do ponto $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ na curva pela ordenada do ponto $R(x_0 + \Delta x, f(x_0) + dy)$ sobre a reta tangente à curva em $P(x_0, f(x_0))$.

Na Figura 3, $\Delta y > dy$; assim, $\Delta y - dy > 0$. Consulte agora a Figura 4, onde $\Delta y < dy$, e assim, $\Delta y - dy < 0$. Novamente, observe que quanto menor o valor de dx, menores serão os valores de $|\Delta y - dy|$; isto é, quanto mais próximo o ponto Q estiver do ponto P, menor será o comprimento do segmento de reta QR.

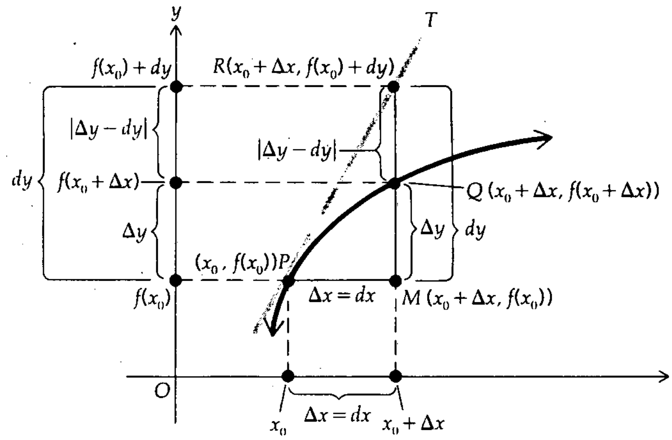


FIGURA 4

EXEMPLO 2 Ache o volume aproximado de um invólucro esférico cujo raio interno é 4 cm e cuja espessura é $\frac{1}{16}$ cm.

Solução Consideramos o volume do invólucro esférico como um incremento do volume de uma esfera. Seja r o número de centímetros do raio de uma esfera, V cm^3 o volume de uma esfera e ΔV o número de centímetros cúbicos no volume de um invólucro esférico.

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \qquad dV = 4\pi r^2\, dr$$

Substituindo $r = 4$ e $dr = \frac{1}{16}$ nas relações acima, obtemos

$$\begin{aligned} dV &= 4\pi(4)^2\tfrac{1}{16} \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

Logo, $\Delta V \approx 4\pi$ e concluímos que o volume do invólucro esférico é aproximadamente 4π cm^3.

Suponha que y seja uma função de x e que x, por sua vez, seja função de uma terceira variável t; isto é,

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad x = g(t)$$

As duas relações juntas definem y como uma função de t. Por exemplo, suponha que $y = x^3$ e $x = 2t^2 - 1$. Combinando essas duas equações, obtemos $y = (2t^2 - 1)^3$. Em geral, combinando as duas equações $y = f(x)$ e $x = g(t)$, obtemos

$$y = f(g(t))$$

A derivada de y em relação a t pode ser encontrada pela regra da cadeia, resultando

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) \tag{7}$$

A fórmula (7) acima expressa $\dfrac{dy}{dt}$ como uma função de x e t, pois $\dfrac{dy}{dx}$ é uma função de x e $\dfrac{dx}{dt}$ é uma função de t.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se $y = x^3$ e $x = 2t^2 - 1$, então

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) \\ &= 3x^2(4t) \\ &= 12x^2t \end{aligned}$$ ◀

Já que $y = f(g(t))$ define y como uma função da variável independente t, a diferencial de y é obtida de (5):

$$dy = \left(\frac{dy}{dt}\right)dt$$

Essa relação expressa dy como uma função de t e dt. Substituindo (7) na relação, obtemos

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)dt \tag{8}$$

Agora, como x é uma função da variável independente t, (5) pode ser aplicada para obter a diferencial de x, e temos

$$dx = \left(\frac{dx}{dt}\right)dt$$

Essa relação expressa dx como uma função de t e dt. Usando-a para substituir $\left(\frac{dx}{dt}\right)dt$ em (8) por dx, obtemos

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)dx \tag{9}$$

Você deve ter em mente que em (9), dy é uma função de t e dt, e que dx é uma função de t e de dt. Se $\frac{dy}{dx}$ em (9) for substituída por $f'(x)$, temos

$$dy = f'(x)\,dx \tag{10}$$

A relação (10) assemelha-se a (5). Mas em (5), x é a variável independente e dy é expressa em termos de x e dx, enquanto que em (10), t é a variável independente e ambas dy e dx são expressas em termos de t e dt. Assim, temos o teorema a seguir.

4.9.3 TEOREMA Se $y = f(x)$, então quando $f'(x)$ existe,

$$dy = f'(x)\,dx$$

sendo x uma variável independente ou não.

Se dividirmos ambos os membros de (10) por dx (desde que $dx \neq 0$), obteremos

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \qquad dx \neq 0$$

Essa relação estabelece que se $y = f(x)$, então $f'(x)$ será o quociente de duas diferenciais dy e dx, mesmo que x não seja a variável independente.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Suponha $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ e $0 < t < \pi$. Então,

$$dx = -\operatorname{sen} t\,dt \text{ e } dy = \cos t\,dt$$

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t\,dt}{-\operatorname{sen} t\,dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{11}$$

Como $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t$, então $x^2 + y^2 = 1$. Assim,

$$y^2 = 1 - x^2$$

Além disso, $y > 0$, pois $y = \operatorname{sen} t$ e $0 < t < \pi$. Assim, da relação acima

$$y = \sqrt{1 - x^2} \tag{12}$$

Substituindo o valor de y de (12) em (11), temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Esse resultado também pode ser obtido, calculando $\dfrac{dy}{dx}$ a partir de (12). ◀

Na Secção 3.3, demonstramos os teoremas usados para calcular as derivadas das funções algébricas. As fórmulas desses teoremas serão reescritas agora, usando a notação de Leibniz. Junto com a fórmula para a derivada há uma fórmula para a diferencial. Nessas fórmulas, u e v são funções de x e elas são válidas, desde que $\dfrac{du}{dx}$ e $\dfrac{dv}{dx}$ existam. A letra c representa uma constante.

I $\dfrac{d(c)}{dx} = 0$	I′ $d(c) = 0$
II $\dfrac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$	II′ $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$
III $\dfrac{d(cu)}{dx} = c\dfrac{du}{dx}$	III′ $d(cu) = c\,du$
IV $\dfrac{d(u+v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$	IV′ $d(u+v) = du + dv$
V $\dfrac{d(uv)}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$	V′ $d(uv) = u\,dv + v\,du$
VI $\dfrac{d\left(\dfrac{u}{v}\right)}{dx} = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$	VI′ $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
VII $\dfrac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$	VII′ $d(u^n) = nu^{n-1}\,du$

Ampliaremos a operação de derivação para incluir o processo que envolve o cálculo da diferencial, bem como da derivada. Se $y = f(x)$, dy pode ser encontrada se aplicarmos as fórmulas I′—VII′, ou se determinarmos $f'(x)$ e a multiplicarmos por dx.

EXEMPLO 3 Dada

$$2x^2y^2 - 3x^3 + 5y^3 + 6xy^2 = 5$$

onde x e y são funções de uma terceira variável, ache $\dfrac{dy}{dx}$ calculando a diferencial termo a termo.

Solução Esse é um problema de derivação implícita. Tomando a diferencial termo a termo, obtemos

$$4xy^2\,dx + 4x^2y\,dy - 9x^2\,dx + 15y^2\,dy + 6y^2\,dx + 12xy\,dy = 0$$

Dividindo por dx, se $dx \neq 0$, temos

$$(4x^2y + 15y^2 + 12xy)\frac{dy}{dx} = -4xy^2 + 9x^2 - 6y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9x^2 - 6y^2 - 4xy^2}{4x^2y + 15y^2 + 12xy}$$

EXERCÍCIOS 4.9

Nos Exercícios de 1 a 4, (a) encontre dy e Δy para os valores indicados de x e Δx. (b) Faça um esboço do gráfico e indique os segmentos de reta cujos comprimentos são dy e Δy.

1. $y = x^2$; $x = 2$ e $\Delta x = 1$
2. $y = x^3$; $x = 2$ e $\Delta x = 1$
3. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 8$ e $\Delta x = 2$
4. $y = \sqrt{x}$; $x = 4$ e $\Delta x = 3$

Nos Exercícios de 5 a 10, ache (a) Δy; (b) dy; (c) $\Delta y - dy$.

5. $y = 6 - 3x - 2x^2$
6. $y = 3x^2 - x$
7. $y = x^3 - x^2$
8. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$
9. $y = \dfrac{2}{x-1}$
10. $y = \dfrac{1}{x} - x^3$

Nos Exercícios de 11 a 16, ache para os valores dados (a) Δy; (b) dy; (c) $\Delta y - dy$.

11. $y = x^2 - 3x$; $x = 2$; $\Delta x = 0{,}03$
12. $y = x^2 - 3x$; $x = -1$; $\Delta x = 0{,}02$
13. $y = \dfrac{1}{x}$; $x = -2$; $\Delta x = -0{,}1$
14. $y = \dfrac{1}{x}$; $x = 3$; $\Delta x = -0{,}2$
15. $y = x^3 + 1$; $x = 1$; $\Delta x = -0{,}5$
16. $y = x^3 + 1$; $x = -1$; $\Delta x = 0{,}1$

Nos Exercícios de 17 a 24, ache dy.

17. $y = (3x^2 - 2x + 1)^3$
18. $y = \sqrt{4 - x^2}$
19. $y = x^2\sqrt[3]{2x+3}$
20. $y = \dfrac{3x}{x^2+2}$
21. $y = \dfrac{2+\cos x}{2 - \operatorname{sen} x}$
22. $y = \operatorname{cotg} 2x \operatorname{cosec} 2x$
23. $y = \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x$
24. $y = x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} - x\cos\dfrac{1}{x}$

Nos Exercícios de 25 a 30, x e y são funções de uma terceira variável. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$, encontrando a diferencial termo a termo (veja o Exemplo 3).

25. $3x^2 + 4y^2 = 48$
26. $8x^2 - y^2 = 32$
27. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$
28. $2x^2y - 3xy^3 + 6y^2 = 1$
29. $\operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$
30. $3\operatorname{tg}^2 x + 4\sec^2 y = 1$

Nos Exercícios de 31 a 34, faça o seguinte: (a) encontre dx e dy em termos de t e dt; (b) use os resultados da parte (a) para encontrar $\dfrac{dy}{dx}$; (c) expresse y em termos de x, eliminando t, e então calcule $\dfrac{dy}{dx}$ usando os teoremas de derivação.

31. $x = 2t^2$, $y = 3t$
32. $x = 1 + t$, $y = 1 - t^2$
33. $x = 2\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$, $0 < t < \pi$
34. $x = 1 - \cos t$, $y = 2 + \operatorname{sen} t$, $0 < t < \pi$

(Sugestão para os Exercícios 33 e 34: elimine t usando a identidade $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$.)

35. A medida da aresta de um cubo é 15 cm, com um erro possível de 0,01 cm. Use diferenciais para encontrar o erro aproximado do cálculo (a) do volume; (b) da área de uma das faces.
36. Uma caixa de metal na forma de um cubo deve ter um volume interior de 1.000 cm^3. Os seis lados são feitos de metal, com $\frac{1}{2}$ cm de espessura. Se o custo do material for de \$0,20 por centímetro cúbico, use diferenciais para encontrar o custo aproximado do metal a ser usado na confecção da caixa.
37. Um tanque cilíndrico aberto, deve ter um revestimento externo com 2 cm de espessura. Se o raio interno for 6 m e a altura for 10 m, encontre, por diferenciais, a quantidade de material necessária para o revestimento.
38. O talo de determinado cogumelo tem uma forma cilíndrica e um talo com 2 cm de altura e r cm de raio tem um volume de V cm^3, onde $V = 2\pi r^2$. Use a diferencial para encontrar o aumento aproximado no volume do talo, quando o raio passa de 0,4 para 0,5 cm.
39. Uma queimadura na pele de uma pessoa tem a forma de um círculo, tal que se r cm for o raio e A cm^2 for a área da queimadura, então $A = \pi r^2$. Use a diferencial para encontrar o decréscimo aproximado da área da queimadura quando o raio passa de 1 para 0,8 cm.
40. Uma dada bactéria unicelular tem a forma de uma esfera, tal que se r micromilímetros (μm) for seu raio e $V\mu^3$ for seu volume, então $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Use a diferencial para encontrar o aumento aproximado no volume da célula quando o raio passa de 2,2 para 2,3 μm.
41. Um tumor no corpo de uma pessoa tem a forma esférica, tal que se r cm for o raio e V cm^3 for o volume do tumor, então $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Use a diferencial para encontrar o aumento aproximado no volume do tumor quando o raio passa de 1,5 para 1,6 cm.
42. Se t s for o tempo necessário a uma oscilação completa de um pêndulo simples com l m, então $4\pi^2 l = gt^2$, onde $g = 9{,}8$ m/s^2. Um relógio tendo um pêndulo com 1 m de comprimento adianta 5 min por dia. Ache aproximadamente o quanto deve aumentar o comprimento do pêndulo para que o relógio seja acertado.
43. A medida da resistência elétrica de um fio é proporcional à medida de seu comprimento e inversamente proporcional ao quadrado da medida de seu diâmetro. Suponha que a resistência de um fio de um determinado comprimento seja calculada a partir da medida de seu diâmetro, com um erro possível de 2%. Ache o erro percentual possível no cálculo do valor da resistência.
44. Um empreiteiro concorda em pintar ambos os lados de 1.000 sinais circulares, com 3 m de raio cada um. Depois de receber os sinais, descobre que na realidade o raio de cada sinal tem 1 centímetro a mais. Use diferenciais para encontrar uma porcentagem aproximada da quantidade adicional de tinta que será necessária.
45. Se o erro possível na medida do volume de um gás for 0,1 cm^3 e o erro permitido na pressão for 0,001 C kg/m^2, ache o tamanho do menor recipiente para o qual é válida a lei de Boyle (Exercício 23 nos Exercícios 3.9).
46. Para a lei adiabática da expansão de ar (Exercício 24 nos Exercícios 3.9), prove que $\dfrac{dP}{P} = 1{,}4\,\dfrac{dV}{V}$.

4.10 SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES PELO MÉTODO DE NEWTON *(Suplementar)*

As soluções de uma equação da forma

$$f(x) = 0$$

são chamadas de **raízes** da equação ou **zeros** da função f. Se f for uma função polinomial com grau menor do que cinco, existem fórmulas para o cálculo dos zeros. Você está familiarizado com as fórmulas caso f tenha grau um (uma função linear) ou dois (uma função quadrática). Para uma função polinomial com grau três ou quatro, o método geral de cálculo dos zeros é complicado. Além disso, para os zeros de uma função polinomial com grau cinco ou mais, existe um teorema, creditado a Niels Abel (1802-1829), o qual afirma não existir uma fórmula geral em termos de um número finito de operações com os coeficientes. Existem, todavia, processos numéricos para aproximar soluções de equações e agora eles são mais importantes do que nunca, com o uso dos computadores e calculadoras programáveis. Um desses processos envolve uma aplicação da derivada e foi inventado por Isaac Newton no século dezessete. É conhecido como método de Newton e será o objeto desta secção.

Consideremos a equação $f(x) = 0$, onde f é uma função derivável. O método de Newton fornece um processo para aproximar uma raiz dessa equação ou, equivalentemente, um zero de f, isto é, um número r tal que $f(r) = 0$. Vamos apresentar primeiro uma interpretação geométrica dos conceitos envolvidos. Consulte a Figura 1, que mostra um esboço do gráfico de $y = f(x)$. O número r

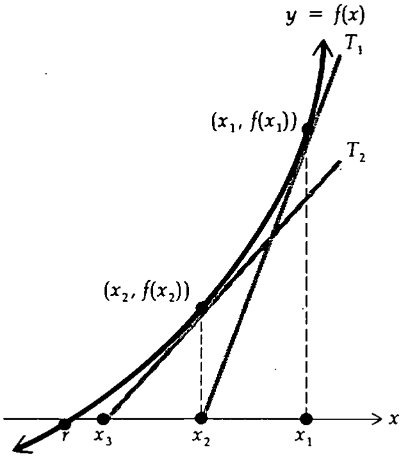


FIGURA 1

é um intercepto x do gráfico. Para obter uma aproximação de r, escolhemos um número x_1. A escolha de x_1 pode ser feita examinando um esboço do gráfico e ele deve estar razoavelmente próximo do número r. Consideramos então a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_1, f(x_1))$. A reta tangente, denotada por T_1, está na Figura 1, e T_1 intercepta o eixo x no ponto x_2. O número x_2 serve agora como uma segunda aproximação de r. Repetimos então o processo com a reta tangente T_2 no ponto $(x_2, f(x_2))$. O intercepto x de T_2 é x_3. Continuamos o processo até obter a precisão desejada. Pelo gráfico, vemos que os números x_1, x_2, x_3, e assim por diante, estão cada vez mais próximos do número r. Essa situação ocorre para muitas funções.

Para obter as aproximações sucessivas x_2, x_3, ... a partir da primeira aproximação x_1, usamos as equações das retas tangentes. A reta tangente T_1 no ponto $(x_1, f(x_1))$ tem uma inclinação de $f'(x_1)$. Assim, uma equação de T_1 é

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

O intercepto x de T_1 é x_2 e determinamos x_2 tomando $x = x_2$ e $y = 0$ na equação acima. Resulta, então, que

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \text{se } f'(x_1) \neq 0$$

Com esse valor de x_2, uma equação de T_2 é

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$$

Então, na equação acima, expressando $x = x_3$ e $y = 0$, teremos

$$0 - f(x_2) = f'(x_2)(x_3 - x_2)$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \qquad \text{se } f'(x_2) \neq 0$$

Prosseguindo dessa forma, obtemos a fórmula geral para a aproximação x_{n+1} em termos da aproximação precedente x_n:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{se } f'(x_n) \neq 0} \tag{1}$$

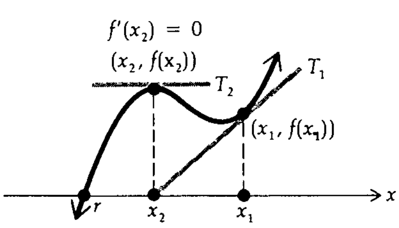


FIGURA 2

Adaptamos (1) facilmente, para usá-la num computador ou numa calculadora programável.

De (1) podemos obter a $(n + 1)$-ésima aproximação a partir da n-ésima aproximação, desde que $f'(x_n) \neq 0$. Se $f'(x_n) = 0$, a reta tangente será horizontal e, em tal caso, a menos que a reta tangente seja o próprio eixo x, ela não terá um intercepto x. A Figura 2 mostra isso quando $f'(x_2) = 0$. Dessa forma, o método de Newton não é aplicável, se $f'(x_n) = 0$ para algum x_n. Você deve ter em mente que o valor de x_{n+1} dado por (1) não é necessariamente uma aproximação de r melhor do que x_n. Se, por exemplo, x_1 não estiver suficientemente próximo de r, então $|f'(x_1)|$ pode ser pequeno e, assim sendo, a reta tangente T_1 será aproximadamente horizontal. Então x_2, o intercepto x de T_1, pode estar mais distante de r do que x_1. Veja a Figura 3, onde ocorre essa situação.

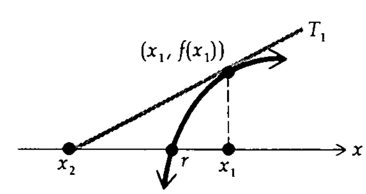


FIGURA 3

Na ilustração a seguir mostramos como aplicar o método de Newton a uma equação cuja solução nós conhecemos.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos usar o método de Newton para obter a raiz positiva da equação $x^2 = 9$, começando com a primeira aproximação de 4. Escrevemos a equação como $x^2 - 9 = 0$ e expressamos

$$f(x) = x^2 - 9$$

$$f'(x) = 2x$$

De (1), obtemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 9}{2x_n} \tag{2}$$

Agora, aplicamos (2) com valores de n e valores correspondentes de x_n para calcular, com uma calculadora, x_{n+1}. Começamos com $x_1 = 4$.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{x_1^2 - 9}{2x_1} \\ &= 4 - \frac{16 - 9}{8} \\ &= 3{,}125 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{x_2^2 - 9}{2x_2} \\ &= 3{,}125 - \frac{(3;125)^2 - 9}{2(3{,}125)} \\ &= 3{,}0025 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 - \frac{x_3^2 - 9}{2x_3} \\ &= 3{,}0025 - \frac{(3{,}0025)^2 - 9}{2(3{,}0025)} \\ &= 3{,}0000 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_5 &= x_4 - \frac{x_4^2 - 9}{2x_4} \\ &= 3{,}0000 - \frac{(3{,}0000)^2 - 9}{2(3{,}0000)} \\ &= 3{,}0000 \end{aligned}$$

Certamente, todas as aproximações sucessivas serão 3,0000. Assim, a raiz positiva da equação $x^2 - 9 = 0$ será 3,0000, até a quarta casa decimal. ◀

Observe que se x_n for uma solução de $f(x) = 0$, $f(x_n) = 0$. Assim, de (1),

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - 0 \\ &= x_n \end{aligned}$$

Conseqüentemente, todas as aproximações são iguais a x_n. Note que essa situação ocorre na Ilustração 1, onde todas as aproximações após e incluindo x_4 têm o mesmo valor com quatro casas decimais.

Observe também de (1) que $x_{n+1} = x_n$ implica $f(x_n) = 0$. Assim sendo, podemos concluir que se duas aproximações sucessivas forem iguais, temos então uma aproximação para um zero de f.

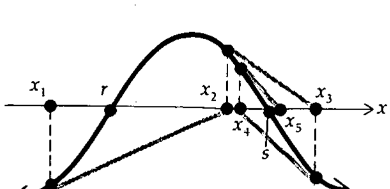


FIGURA 4

Se, contudo, sua escolha inicial de x_1 não for suficientemente próxima do zero desejado, é possível que você obtenha aproximações para um outro zero. Veja a Figura 4 para um esboço do gráfico de uma função onde isso pode acontecer. Note que a escolha indicada de x_1 próximo do zero r desejado resulta sucessivas aproximações x_2, x_3, x_4, ... perto de um outro zero s. Assim, quando for aplicar o método de Newton, você deverá primeiro fazer um rápido esboço do gráfico da função para obter sua aproximação inicial. Consulte o gráfico, enquanto prossegue, para se assegurar de que você está obtendo as aproximações sucessivas do zero que desejava.

Em suma, quando você for aplicar o método de Newton para resolver uma equação da forma $f(x) = 0$, faça o seguinte:

1. Escolha *adequadamente* a primeira aproximação x_1. Um esboço rápido do gráfico de f irá ajudá-lo a obter uma escolha razoável.
2. Com o valor de x_1 na fórmula (1), obtenha uma segunda aproximação x_2. Então, use x_2 em (1) a fim de obter uma terceira aproximação x_3, e assim por diante, até que $x_{n+1} = x_n$ com a precisão desejada.

EXEMPLO 1 Use o método de Newton para encontrar a raiz real da equação

$$x^3 - 2x - 2 = 0$$

com quatro casas decimais.

Solução Seja $f(x) = x^3 - 2x - 2$; assim $f'(x) = 3x^2 - 2$. Então, de (1), temos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 2}{3x_n^2 - 2} \tag{3}$$

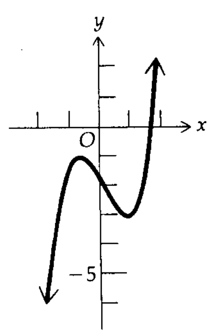


FIGURA 5

Para obter um esboço do gráfico de f, colocamos os pontos $(-2, -6)$, $(-1, -1)$, $(0, -2)$, $(1, -3)$, e $(2, 2)$. Há extremos relativos de f quando $f'(x) = 0$, isto é, quando $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{6}$. O gráfico aparece como na Figura 5. Como o gráfico intercepta o eixo x num único ponto, existe somente uma raiz real da equação dada. Como $f(1) = -3$ e $f(2) = 2$, essa raiz está entre 1 e 2. Uma escolha adequada para nossa primeira aproximação é $x_1 = 1{,}5$. A Tabela 1 mostra as aproximações sucessivas calculadas de (3) com esse x_1. Queremos que a raiz seja precisa até a quarta casa decimal; assim sendo, usamos cinco casas decimais nos nossos cálculos. Como x_5 e x_6 são iguais (até cinco casas decimais), arredondamos esse número para quatro casas decimais, obtendo 1,7693 como sendo a raiz procurada.

Tabela 1

n	x_n	$x_n^3 - 2x_n - 2$	$3x_n^2 - 2$	$\dfrac{x_n^3 - 2x_n - 2}{3x_n^2 - 2}$	x_{n+1}
1	1,50000	−1,62500	4,75000	−0,34211	1,84211
2	1,84211	0,56674	8,18011	0,06928	1,77283
3	1,77283	0,02621	7,42878	0,00353	1,76930
4	1,76930	0,00006	7,39127	0,00001	1,76929
5	1,76929	−0,00002	7,39116	0,00000	1,76929

EXEMPLO 2 Use o método de Newton para encontrar, com três casas decimais, a coordenada x do ponto de intersecção no primeiro quadrante da reta $y = \frac{1}{3}x$ e a curva $y = \operatorname{sen} x$.

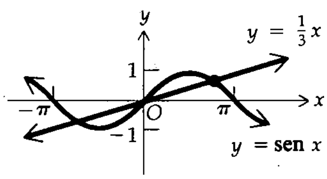


FIGURA 6

Solução A Figura 6 mostra a reta e a curva. Queremos encontrar o valor positivo de x para o qual

$$\operatorname{sen} x = \tfrac{1}{3}x$$

$$3 \operatorname{sen} x - x = 0$$

Seja

$$f(x) = 3\,\text{sen}\,x - x$$

$$f'(x) = 3\cos x - 1$$

Da fórmula (1),

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3\,\text{sen}\,x_n - x_n}{3\cos x_n - 1} \tag{4}$$

Pela Figura 6, parece que uma escolha razoável para x_1 é 2. Calculamos as aproximações sucessivas pela fórmula (4); elas estão na Tabela 2. Os cálculos foram feitos com quatro casas decimais. Observe que x_4 e x_5 são iguais a 2,2789. Dessa forma, o valor positivo de x para o qual $\text{sen}\,x = \frac{1}{3}x$, com três casas decimais, é 2,279.

Tabela 2

n	x_n	$3\,\text{sen}\,x_n - x_n$	$3\cos x_n - 1$	$\dfrac{3\,\text{sen}\,x_n - x_n}{3\cos x_n - 1}$	x_{n+1}
1	2,0000	0,7279	−2,2484	−0,3237	2,3237
2	2,3237	−0,1346	−3,0513	0,0441	2,2796
3	2,2796	−0,0022	−2,9528	0,0007	2,2789
4	2,2789	−0,0001	−2,9512	0,0000	2,2789

Existem teoremas que estabelecem condições para a aplicação do método de Newton, bem como teoremas relativos à sua precisão. Tais teoremas podem ser encontrados em textos de análise numérica.

EXERCÍCIOS 4.10

Nos Exercícios de 1 a 4, use o método de Newton para encontrar a raiz real da equação dada com quatro casas decimais.

1. $x^3 - 4x^2 \quad 2 = 0$
2. $6x^3 + 9x + 1 = 0$
3. $x^5 - x + 1 = 0$
4. $x^5 + x - 1 = 0$

Nos Exercícios de 5 até 10, use o método de Newton para encontrar o valor aproximado da raiz indicada com erro menor do que um milésimo.

5. $x^3 - 4x - 8 = 0$; a raiz positiva
6. $x^3 - 2x + 7 = 0$; a raiz negativa
7. $x^4 - 10x + 5 = 0$; a menor raiz positiva
8. $x^4 - 10x + 5 = 0$; a maior raiz positiva
9. $2x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 4 = 0$; a raiz negativa
10. $x^4 + x^3 - 3x^2 - x - 4 = 0$; a raiz positiva

Nos Exercícios de 11 a 14, use o método de Newton para encontrar o radical dado com cinco casas decimais corretas.

11. $\sqrt{3}$, resolvendo a equação $x^2 - 3 = 0$
12. $\sqrt{10}$, resolvendo a equação $x^2 - 10 = 0$
13. $\sqrt[3]{6}$, resolvendo a equação $x^3 - 6 = 0$
14. $\sqrt[3]{7}$, resolvendo a equação $x^3 - 7 = 0$

Nos Exercícios de 15 a 18, use o método de Newton para encontrar, com quatro casas decimais, a coordenada x do ponto de intersecção no primeiro quadrante dos gráficos das duas equações.

15. $y = x$; $y = \cos x$
16. $y = \frac{1}{2}x$; $y = \text{sen}\,x$
17. $y = x^2$; $y = \text{sen}\,x$
18. $y = x^2$; $y = \cos x$

19. Equações da forma $tg\,x + ax = 0$, onde a é um inteiro, surgem em problemas de condução de calor. As raízes positivas da equação em ordem crescente são $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Se $a = 1$, ache α_1 e α_2 com quatro casas decimais.
20. Siga as instruções do Exercício 19, se $a = -2$.

Nos Exercícios 21 e 22, obtenha uma aproximação de π com cinco casas decimais, usando o método de Newton para resolver a equação dada.

21. $\text{tg}\,x = 0$
22. $\cos x + 1 = 0$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 4

Nos Exercícios de 1 a 12, ache os extremos absolutos da função dada no intervalo indicado, se houver algum, e ache os valores de x nos quais os extremos absolutos ocorrem. Faça um esboço do gráfico da função no intervalo.

1. $f(x) = \sqrt{5+x}; [-5, +\infty)$
2. $f(x) = \sqrt{9-x^2}; (-3, 3)$
3. $f(x) = \frac{5}{2}x^6 - 3x^5; [-1, 2]$
4. $f(x) = x^4 - 12x^2 + 36; [-2, 6]$
5. $f(x) = |9 - x^2|; [-2, 3]$
6. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}; [0, 4]$
7. $f(x) = x^4 - 12x^2 + 36; [0, 5]$
8. $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } -2 \leqslant x < 1 \\ x^2+4 & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}; [-2, 2]$
9. $f(x) = 2\,\text{sen}\,3x; [-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi]$
10. $f(x) = 4\cos^2 2x; [0, \frac{3}{4}\pi]$
11. $f(x) = \text{tg}\,4x; [-\frac{1}{8}\pi, \frac{1}{12}\pi]$
12. $f(x) = \text{cosec}\,3x; [0, \frac{1}{3}\pi]$

Nos Exercícios de 13 a 32, faça um esboço do gráfico da função f dada, determinando primeiro o seguinte: os extremos relativos de f; os pontos de inflexão do gráfico de f; os intervalos nos quais f é crescente e aqueles onde f é decrescente; onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo; a inclinação das tangentes inflexionais, as assíntotas horizontal, vertical e oblíqua, se existirem.

13. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$
14. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 5$
15. $f(x) = (x-4)^2(x+2)^3$
16. $f(x) = (x-1)^3(x-3)$
17. $f(x) = (x-4)^{1/3} - 3$
18. $f(x) = (x+2)^3 + 2$
19. $f(x) = \dfrac{4x^2}{3x^2+1}$
20. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9}$
21. $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2-4}$
22. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$
23. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$
24. $f(x) = \dfrac{x^2+9}{x}$
25. $f(x) = \begin{cases} (1-x)^3 & \text{se } x \leqslant 1 \\ (x-1)^3 & \text{se } 1 < x \end{cases}$
26. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & \text{se } x < 2 \\ 6 - x^2 & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases}$
27. $f(x) = (x-3)^{5/3} + 1$
28. $f(x) = (x+2)^{4/3}$
29. $f(x) = (x+1)^{2/3}(x-3)^2$
30. $f(x) = x\sqrt{25-x^2}$
31. $f(x) = \text{sen}\,2x - \cos 2x;\ x \in [-\frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi]$
32. $f(x) = x - \text{tg}\,x;\ x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

Nos Exercícios 33 e 34, verifique se as três condições da hipótese do teorema de Rolle estão satisfeitas pela função dada no intervalo indicado. Então, ache um valor adequado de c que satisfaça a conclusão do teorema de Rolle. Faça um esboço do gráfico de f no intervalo e use-o para dar a interpretação geométrica desse teorema.

33. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4; [-2, 1]$
34. $f(x) = 2\,\text{sen}\,3x; [0, \frac{1}{3}\pi]$

Nos Exercícios 35 e 36, verifique se as hipóteses do teorema do valor médio estão satisfeitas para a função dada no intervalo indicado. Então, ache um valor adequado de c que satisfaça as conclusões do teorema do valor médio. Faça um esboço do gráfico de f no intervalo e utilize-o para dar a interpretação geométrica desse teorema.

35. $f(x) = \sqrt{3-x}; [-6, -1]$
36. $f(x) = x^3; [-2, 2]$

37. (a) Se f for uma função polinomial e $f(a)$, $f(b)$, $f'(a)$ e $f'(b)$ forem nulos, prove que existem pelo menos dois números no intervalo aberto (a, b) que sejam raízes da equação $f''(x) = 0$. (b) Mostre que a função definida pela equação $f(x) = (x^2 - 4)^2$ satisfaz a parte (a) para o intervalo aberto $(-2, 2)$.

38. Se f for uma função definida por $f(x) = |2x - 4| - 6$, então $f(-1) = 0$ e $f(5) = 0$. Mas f' não se anula nunca. Mostre por que o teorema de Rolle não é válido.

39. Suponha que f e g sejam funções que satisfaçam as hipóteses do teorema do valor médio em $[a, b]$. Além disso, suponha que $f'(x) = g'(x)$ para todo x no intervalo aberto (a, b). Prove que $f(x) - g(x) = f(a) - g(a)$ para todo x no intervalo fechado $[a, b]$.

40. Se f for uma função polinomial, mostre que entre duas raízes consecutivas da equação $f'(x) = 0$ haverá no máximo uma raiz da equação $f(x) = 0$.

41. Ache o valor máximo absoluto atingido pela função f se $f(x) = A\,\text{sen}\,kx + B\cos kx$, onde A, B e k são constantes positivas.

42. Ache o ponto (ou pontos) de inflexão do gráfico da função definida por $f(x) = x^{1/5}$ e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo.

43. Ache o ponto (ou pontos) de inflexão do gráfico da função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 2 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$$

e determine onde o gráfico é côncavo para cima e côncavo para baixo.

44. Se $f(x) = ax^3 + bx^2$, determine a e b de tal forma que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em $(2, 16)$.

45. Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determine a, b e c de tal forma que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em $(1, -1)$ e que a inclinação da tangente inflexional seja -3.

46. Se $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, prove que o gráfico de f tem três pontos de inflexão que são colineares. Faça um esboço do gráfico.

47. Se $f(x) = x|x|$, mostre que o gráfico de f tem um ponto de inflexão na origem.

48. Seja $f(x) = x^n$, onde n é um inteiro positivo. Prove que o gráfico de f terá um ponto de inflexão na origem se e somente se n for um inteiro ímpar e $n > 1$. Além disso, mostre que se n for par, f terá um valor mínimo relativo em 0.

49. Se $f(x) = (x^2 + a^2)^p$, onde p é um número racional e $p \neq 0$, prove que se $p < \frac{1}{2}$, o gráfico de f terá dois pontos de inflexão e se $p \geqslant \frac{1}{2}$, o gráfico de f não terá pontos de inflexão.
50. Suponha que o gráfico de uma função tenha um ponto de inflexão em $x = c$. O que você pode concluir, se possível, sobre (a) a continuidade de f em c; (b) a continuidade de f' em c; (c) a continuidade de f'' em c?
51. Ache dois números não-negativos cuja soma seja 12 e tais que a soma de seus quadrados seja um mínimo absoluto.
52. Ache dois números não-negativos cuja soma seja 12 e tais que seu produto seja um máximo absoluto.
53. Mostre que entre todos os retângulos tendo um perímetro de 36 cm, o quadrado com 9 cm de lado tem a maior área.
54. Mostre que entre todos os retângulos tendo uma área de 81 cm², o quadrado com 9 cm de lado tem o menor perímetro.
55. Uma caixa aberta com uma base quadrada deve ter um volume de 4.000 cm³. Ache as dimensões da caixa que possa ser fabricada com um mínimo de material.
56. Resolva o Exercício 55, se a caixa for fechada.
57. Resolva o Exercício 55, se a caixa aberta tiver um volume de k cm³.
58. Numa cidade com 11.000 habitantes, a taxa de crescimento de uma epidemia é diretamente proporcional ao produto dos números de pessoas infectadas e não-infectadas. Determine o número de pessoas infectadas quando a taxa de crescimento da epidemia for máxima.
59. Devido a várias restrições, o tamanho de determinada comunidade está limitado a 3.000 habitantes e a taxa de crescimento da população é diretamente proporcional ao produto do seu tamanho com diferença entre 3.000 e o seu tamanho. Determine o tamanho da população para o qual a sua taxa de crescimento é máxima.
60. Um fabricante propõe entregar a um vendedor 300 cadeiras a \$90 cada e reduzir, no total do pedido, o preço por unidade em \$0,25 para cada cadeira acima de 300. Ache o montante envolvido na maior transação possível entre o fabricante e o vendedor nessas circunstâncias.
61. Duas cidades A e B devem receber seu suprimento de água de uma estação de tratamento situada à margem de um rio, com um curso em linha reta que está a 15 km de A e a 10 km de B. Se os pontos no rio mais próximos de A e B estão separados por 20 km e A e B estão do mesmo lado do rio, onde a estação deveria estar situada, de modo que o mínimo de canos fossem empregados?
62. Um dos ângulos agudos de um triângulo deve ter $\frac{\pi}{6}$ rad e o lado oposto a esse ângulo deve ter 10 cm. Prove que de todos os triângulos que satisfazem esses requisitos, o que tem maior área é isósceles. (*Sugestão:* expresse a medida da área do triângulo em termos das funções trigonométricas de um dos outros ângulos agudos.)
63. Em um armazém, mercadorias pesando 1.000 quilos são transportadas ao nível do chão, amarrando-se uma pesada corda em uma plataforma móvel, baixa, e puxando-a com um veículo motorizado. Se a corda forma um ângulo de θ rad com o plano do chão, então a força de magnitude F kg ao longo da corda é dada por:

$$F = \frac{1.000\,k}{k \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

onde k é o coeficiente de atrito constante e $0 < k < 1$. Se $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Mostre que F é mínima, quando $\operatorname{tg} \theta = k$.
64. Uma lata fechada com um volume de 27 cm³ deve ter a forma de um cilindro circular reto. Se a tampa e a base, ambas circulares, forem cortadas de pedaços quadrados de lata, ache o raio e a altura da lata, de forma que seja usado o mínimo de material em sua fabricação. Inclua o material desperdiçado na tampa e na base.
65. Se $100x$ unidades de uma determinada mercadoria forem demandadas sendo p o preço por unidade, $x^2 + p^2 = 36$. Ache o rendimento total máximo absoluto.
66. Sob um monopólio (veja Exercício 31 nos Exercícios 4.8), x unidades são demandadas diariamente sendo p o preço por unidade e $x^2 + p = 320$. Se o custo total da produção de x unidades for dado por $C(x) = 20x$, ache o lucro total diário máximo.
67. Uma fábrica sob competição perfeita (veja as instruções dos Exercícios 29 e 30 nos Exercícios 4.8) fabrica e vende rádios portáteis. A fábrica pode vender a um preço de \$75 por rádio. Se x rádios forem fabricados a cada dia e $C(x)$ for o custo total da produção diária, então $C(x) = x^2 + 25x + 100$. Quantos rádios devem ser fabricados a cada dia para que a fábrica obtenha um lucro total diário máximo? Qual será este lucro total diário máximo?
68. Ache a distância mais curta entre o ponto $P(0, 4)$ e o ponto na curva $x^2 - y^2 = 16$, e ache o ponto na curva mais próximo de P.
69. Duas partículas entram em movimento ao mesmo tempo. Uma move-se segundo uma reta horizontal e sua equação de movimento é $x = t^2 - 2t$, onde x cm é a distância orientada da partícula desde a origem em t s. A outra move-se ao longo de uma reta vertical que intercepta a reta horizontal na origem e sua equação de movimento é $y = t^2 - 2$, onde y cm é a distância orientada da partícula desde a origem em t s. Determine quando a distância orientada entre as partículas é mínima e suas velocidades naquele instante.
70. Uma escada deverá passar por cima de um muro de $\frac{27}{8}$ m de altura e alcançar uma parede que está a 8 m depois do muro. Ache o menor comprimento que a escada a ser usada pode ter.
71. Resolva o Exercício 70 se o muro tiver h m de altura e a parede estiver a w m do muro.
72. Uma tenda deve ter a forma de um cone. Ache a razão entre as medidas do raio e da altura da tenda com um dado volume que requer o mínimo de material.
73. Uma grande placa de sinalização deve conter 50 m² de letreiro. Se for deixada uma margem de 4 m na base e no topo e uma margem de 2 m nas laterais, ache as dimensões da menor placa que satisfaça essas especificações.

74. Ache o volume do maior cilindro circular reto que possa ser inscrito num cone circular reto com um raio de 4 cm e uma altura de 8 cm.

75. Ache as dimensões do cone circular reto com menor volume que possa circunscrever um cilindro circular reto com r cm de raio e h cm de altura.

76. Um pedaço de fio com 80 cm de comprimento deve ser dobrado para formar um retângulo. Ache as dimensões do retângulo com maior área possível.

77. Um pedaço de fio com 20 cm deve ser cortado em dois e cada parte é dobrada, tomando a forma de um quadrado. Como deve ser cortado o fio de modo que a área total dos quadrados seja a menor possível?

78. Se $f(x) = x + \text{sen}\, x$, prove que f não tem extremos relativos, mas que o gráfico de f possui retas tangentes horizontais. Faça um esboço do gráfico para $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

79. Para certa mercadoria de que x unidades são demandadas semanalmente quando p é o preço de cada unidade, $10^6px = 10^9 - 2 \cdot 10^6x + 18 \cdot 10^3x^2 - 6x^3$. O custo médio de produção de cada unidade é dado por $Q(x) = \frac{1}{50}x - 24 + 11 \cdot 10^3x^{-1}$ e $x \geqslant 100$. Ache o número de unidades produzidas a cada semana e o preço de cada unidade para maximizar o lucro semanal.

80. Se $y = 2x^2 - 3$, (a) ache dy e Δy para $x = 2$ e $\Delta x = 0{,}5$. (b) Trace um esboço do gráfico e indique os segmentos de reta cujos comprimentos são dy e Δy.

81. Se $y = 80x - 16x^2$, ache a diferença $\Delta y - dy$ se (a) $x = 2$ e $\Delta x = 0{,}1$; (b) $x = 4$ e $\Delta x = -0{,}2$.

82. Se $x^3 + y^3 - 3xy^2 + 1 = 0$, ache dy no ponto (1, 1) se $dx = 0{,}1$.

83. Use diferenciais para apoximar o volume de material necessário para fazer uma bola de borracha se o raio da câmara interna é 2 cm e a espessura da borracha é $\frac{1}{8}$ cm.

84. Um recipiente na forma de um cubo com um volume de 1.000 cm^3 deve ser fabricado com seis quadrados iguais de um material que custa 20 centavos por centímetro quadrado. Com que precisão deve ser calculado o tamanho de cada quadrado, para que o custo total do material seja exatamente $5,00?

85. Se t s for o tempo para que um pêndulo complete sua volta, tendo ℓ cm de comprimento, então $4\pi^2\ell = gt^2$, onde $g = 32{,}2$. Qual será o efeito sobre o tempo, se for cometido um erro de 0,01 cm na medida do comprimento do pêndulo?

86. A medida do raio de um cone circular reto é $\frac{4}{3}$ vezes a medida da altura. Qual a exatidão com que a altura deverá ser medida se o erro no volume calculado não puder exceder 3 por cento?

87. (a) Se $f(x) = 3|x| + 4|x - 1|$, prove que f tem um valor mínimo absoluto de 3. (b) Se $g(x) = 4|x| + 3|x-1|$, prove que g tem um valor mínimo absoluto de 3. (c) Se $a > 0$ e $b > 0$, e se $h(x) = a|x| + b|x - 1|$, prove que h tem um valor mínimo absoluto que é o menor dos dois números a e b.

88. Se $f(x) = |x|^a \cdot |x - 1|^b$, onde a e b são números racionais, prove que f tem um valor máximo relativo de $a^ab^b/(a + b)^{a+b}$.

89. Sejam f e g duas funções diferenciáveis em todo número no intervalo fechado $[a, b]$. Suponha, então, que $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$. Prove que existe um número c no intervalo aberto (a, b), tal que $f'(c) = g'(c)$. (*Sugestão:* considere a função $f - g$.)

90. Trace um esboço do gráfico de uma função f no intervalo I em cada caso: (a) I é o intervalo aberto (0, 2) e f é contínua em I. Em 1, f tem um valor máximo relativo, mas f' (1) não existe. (b) I é o intervalo fechado [0, 2]. A função f tem um valor mínimo relativo em 1, mas o valor mínimo absoluto de f está em 0. (c) I é o intervalo aberto (0, 2), e f' tem um valor máximo relativo em 1.

Os exercícios de 91 a 94 pertencem à Secção Suplementar 4.10.

91. Use o método de Newton para determinar, com três casas decimais, a raiz positiva da equação $4x^4 - 3x^3 + 2x - 5 = 0$.

92. Use o método de Newton para determinar, em três casas decimais, a raiz negativa da equação $3x^4 - 4x^3 + 36x^2 + 2x - 8 = 0$.

93. Ache, com até quatro casas decimais, pelo método de Newton, a coordenada x do ponto de intersecção da curva $y = \text{sen}\, x$ com a reta $y = 2x - 3$.

94. Ache, com até quatro casas decimais, o valor de x no intervalo $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ para o qual $tg\, x = x$, aplicando o método de Newton.