Conteúdo

TRÊS

A Derivada e a Derivação

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Introduzimos a *derivada* na Secção 3.1, considerando primeiro sua interpretação geométrica como a inclinação de uma reta tangente a uma curva. Uma função que tenha uma derivada será denominada *derivável*, e na Secção 3.2 discutiremos a relação entre diferenciabilidade e continuidade. A derivada é calculada pela operação de *derivação* e os teoremas que auxiliam o cálculo de funções algébricas são enunciados e provados na Secção 3.3.

Na Secção 3.4 interpretamos a derivada como uma taxa de variação. Essa interpretação mostra a sua importância em diversos campos. Por exemplo, em Física, a velocidade no movimento retilíneo é definida em termos de uma derivada, pois é a medida da taxa de variação da distância com relação ao tempo. A taxa de crescimento de bactérias é uma aplicação da derivada em Biologia.

A taxa de variação de uma reação química é um tópico de interesse para um químico. Os economistas estão preocupados com conceitos marginais tais como a receita marginal. o custo marginal e o lucro marginal, que são taxas de variação.

A derivação de funções trigonométricas será discutida na Secção 3.5, e na Secção 3.6 estabeleceremos e provaremos a *regra da cadeia*, um recurso poderoso que usaremos para derivar funções compostas. Aplicamos a regra da cadeia na Secção 3.7 para obter a fórmula da qual resulta a derivada da função potência para expoentes racionais; na Secção 3.8, para derivar funções definidas implicitamente; e na Secção 3.9, para resolver problemas envolvendo taxas relacionadas. Derivadas de ordem superior e suas aplicações, em Física, ao movimento retilíneo serão tratadas na Secção 3.10.

3.1 A RETA TANGENTE E A DERIVADA

FIGURA 1

Muitos dos problemas importantes de Cálculo envolvem a determinação da reta tangente a uma curva dada, em um determinado ponto dela. Para uma circunferência, sabemos da Geometria Plana que a reta tangente em um ponto seu é a reta que tem com ela um único ponto comum. Essa definição não é válida para uma curva em geral. Por exemplo, na Figura 1 a reta que queremos que seja a tangente à curva no ponto P intercepta a curva em outro ponto Q. Para chegar a uma definição adequada de reta tangente ao gráfico de uma função em um de seus pontos, começamos pensando em definir a inclinação da reta tangente no ponto. Então, a tangente é determinada por sua inclinação e pelo ponto de tangência.

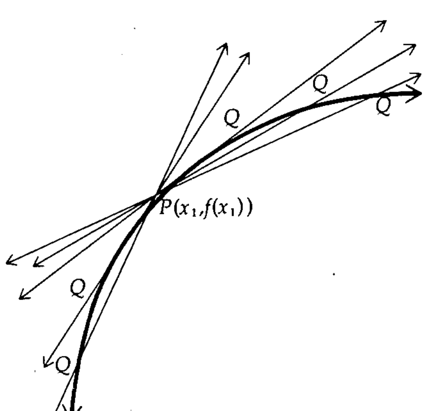


FIGURA 2

Consideremos a função f contínua em x_1. Queremos definir a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $P(x_1, f(x_1))$. Seja I o intervalo aberto que contém x_1 e no qual f está definida. Seja $Q(x_2, f(x_2))$ outro ponto do gráfico de f, tal que x_2 também esteja em I. Tracemos uma reta através de P e Q. Qualquer reta que passe por dois pontos de uma curva é chamada de **reta secante**, assim, a reta através de P e Q é uma reta secante. A Figura 2 mostra retas secantes para vários valores de x_2. A Figura 3 mostra uma determinada reta secante, onde Q está à direita de P. No entanto Q pode estar de qualquer lado de P, conforme mostra a Figura 2.

Vamos denotar a diferença entre as abscissas de Q e de P por Δx (lemos "delta x"), assim

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Observe que Δx denota uma variação nos valores de x, quando ele muda de x_1 para x_2 e pode ser positiva ou negativa. Essa variação é chamada de *incremento de* x. Tome cuidado com o símbolo Δx, para o incremento de x; ele não deve ser interpretado como o "produto de Δ por x".

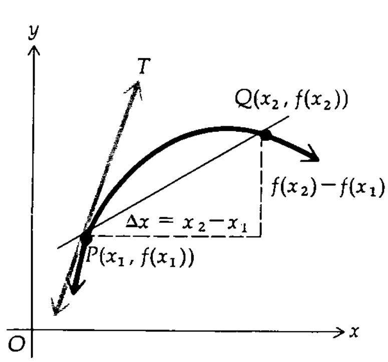


FIGURA 3

Retornando à reta secante PQ da Figura 3, sua inclinação é dada por

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

desde que a reta PQ não seja vertical. Como $x_2 = x_1 + \Delta x$, a inclinação de PQ pode ser escrita como

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Vamos agora considerar o ponto P como fixo e o ponto Q como móvel, ao longo da curva em direção a P, isto é, Q tende a P. Isto equivale a dizer que Δx tende a zero. Quando isso ocorre, a reta secante gira em torno do ponto fixo P. Se a reta secante tiver uma posição limite desejaremos essa posição limite como sendo a da reta tangente ao gráfico f em P. Assim, queremos que a inclinação da reta tangente ao gráfico em P seja o limite de m_{PQ} quando Δx tende a zero, se esse limite existir. Se $\lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{PQ}$ for $+\infty$ ou $-\infty$, então, à medida que Δx tende a zero, a reta PQ aproxima-se da reta por P, que é paralela ao eixo y. Nesse caso, queremos que a reta tangente ao gráfico em P seja a reta $x = x_1$. Toda essa discussão leva-nos à seguinte definição:

3.1.1 DEFINIÇÃO Suponhamos que a função f seja contínua em x_1. A **reta tangente** ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ é

(i) a reta por P tendo inclinação $m(x_1)$, dada por

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \tag{1}$$

se o limite existir;

(ii) a reta $x = x_1$ se

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ for } +\infty \text{ ou } -\infty$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ for } +\infty \text{ ou } -\infty$$

Se nem (i) nem (ii) da Definição 3.1.1 forem verdadeiras, então não existirá reta tangente ao gráfico de f, no ponto $P(x_1, f(x_1))$.

EXEMPLO 1 Dada a parábola $y = x^2$, ache a inclinação da reta secante, nos quesitos de (a) até (c) pelos dois pontos: (a) (2, 4), (3, 9); (b) (2, 4), (2,1, 4,41); (c) (2, 4), (2,01, 4,0401). (d) Ache a inclinação da reta tangente à parábola no ponto (2, 4). (e) Faça um esboço do gráfico e mostre um segmento da reta tangente em (2, 4).

Solução Sejam m_a, m_b e m_c as inclinações das retas secantes em (a), (b) e (c), respectivamente.

(a) $m_a = \dfrac{9-4}{3-2} = 5$

(b) $m_b = \dfrac{4,41 - 4}{2,1 - 2} = \dfrac{0,41}{0,1} = 4,1$

(c) $m_c = \dfrac{4,0401 - 4}{2,01 - 2} = \dfrac{0,0401}{0,01} = 4,01$

(d) Seja $f(x) = x^2$. De (1) temos

$$\begin{aligned}
m(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) \\
&= 4
\end{aligned}$$

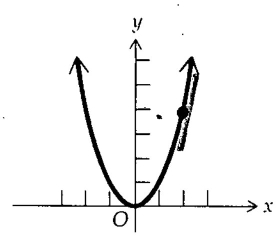


FIGURA 4

(e) A Figura 4 mostra um esboço do gráfico e um segmento da reta tangente em (2, 4).

EXEMPLO 2 Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico da função definida por $y = x^3 - 3x + 4$ no ponto (x_1, y_1).

Solução

$$f(x_1) = x_1^3 - 3x_1 + 4$$

$$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x) + 4$$

De (1),

$$\begin{aligned}
m(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x) + 4 - (x_1^3 - 3x_1 + 4)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^3 + 3x_1^2\,\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x_1 - 3\,\Delta x + 4 - x_1^3 + 3x_1 - 4}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_1^2\,\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3\,\Delta x}{\Delta x}
\end{aligned}$$

Como $\Delta x \neq 0$, podemos dividir o numerador e o denominador por Δx e obter

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} [3x_1^2 + 3x_1\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 3]$$

$$m(x_1) = 3x_1^2 - 3 \tag{2}$$

Tabela 1

x	y	m
0	4	−3
1	2	0
2	6	9
−1	6	0
−2	2	9

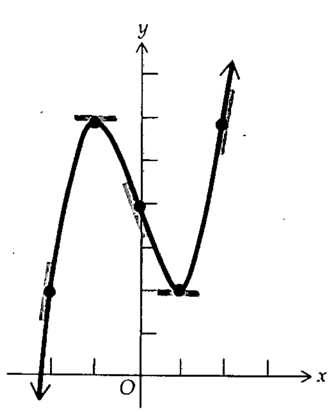


FIGURA 5

Para fazer um esboço do gráfico da função do Exemplo 2, colocamos pontos no gráfico e um segmento da reta tangente em alguns deles. Os valores de x são tomados arbitrariamente e o valor funcional correspondente é calculado pela equação dada, o valor de m é calculado de (2). Os resultados são apresentados na Tabela 1 e um esboço do gráfico aparece na Figura 5. É importante determinar os pontos onde o gráfico possui tangente horizontal. Como uma reta horizontal possui inclinação zero, esses pontos são encontrados ao resolvermos em x_1 à equação $m(x_1) = 0$. Fazendo os cálculos para esse exemplo temos $3x_1^2 - 3 = 0$, resultando $x_1 = \pm 1$. Assim sendo, nos pontos com abscissas -1 e 1 a reta tangente é paralela ao eixo x.

EXEMPLO 3 Ache uma equação da reta tangente à curva do Exemplo 2 no ponto (2, 6).

Solução Como a inclinação da reta tangente em qualquer ponto (x_1, y_1) é

$$m(x_1) = 3x_1^{\,2} - 3$$

a inclinação da reta tangente no ponto (2, 6) é $m(2) = 9$. Logo, uma equação da reta pedida na forma ponto-inclinação é

$$y - 6 = 9(x - 2)$$

$$9x - y - 12 = 0$$

3.1.2 DEFINIÇÃO

A **reta normal** a um gráfico em um dado ponto é a reta perpendicular à reta tangente naquele ponto.

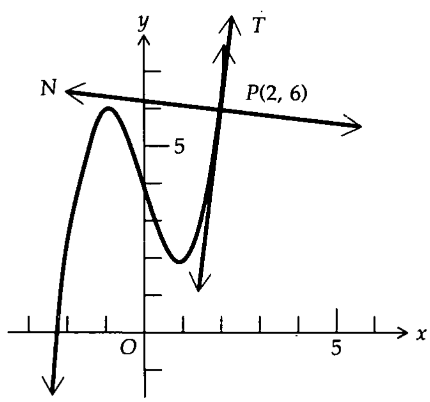


FIGURA 6

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** A reta normal ao gráfico do Exemplo 2 no ponto (2, 6) é perpendicular à reta tangente naquele ponto. Do exemplo 3, a inclinação da reta tangente em (2, 6) é 9. Portanto, a inclinação da reta normal a (2, 6) é $-\frac{1}{9}$, e uma equação dessa reta normal é

$$y - 6 = -\tfrac{1}{9}(x - 2)$$

$$9y - 54 = -x + 2$$

$$x + 9y - 56 = 0$$

A Figura 6 mostra o gráfico e as retas tangente e normal em (2, 6). ◀

O tipo de limite em (1) usado para definir a inclinação da reta tangente é um dos mais importantes em Cálculo.

3.1.3 DEFINIÇÃO

A **derivada** de uma função f é a função denotada por f', tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{3}$$

se esse limite existir.

Se x_1 for um determinado número no domínio de f, então

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \tag{4}$$

Se esse limite existir. Comparando as fórmulas (1) e (4), note que a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$ é precisamente a derivada de f calculada em x_1.

EXEMPLO 4 Ache a derivada de f se

$$f(x) = 3x^2 + 12$$

Solução Se x for qualquer número do domínio de f, então de (3),

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x + \Delta x)^2 + 12] - (3x^2 + 12)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 3x^2 - 12}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\,\Delta x) \\
&= 6x
\end{aligned}$$

Logo, a derivada de f é a função f', definida por $f'(x) = 6x$. O domínio de f' é o conjunto de todos os números reais, sendo igual ao domínio de f.

Considere agora a fórmula (4), que é

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Nessa fórmula seja

$$x_1 + \Delta x = x \tag{5}$$

Então

$$\text{“}\Delta x \to 0\text{” é equivalente a “}x \to x_1\text{”.} \tag{6}$$

De (4), (5) e (6) obtemos a seguinte fórmula para $f'(x_1)$:

$$\boxed{f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}} \tag{7}$$

se o limite existir. A fórmula (7) é uma alternativa para (4) no cálculo de $f'(x_1)$.

EXEMPLO 5 Para a função f do Exemplo 4, ache a derivada de f em 2 de três maneiras: (a) Aplicando a fórmula (4); (b) aplicando a fórmula (7); (c) substituindo 2 por x na expressão de $f'(x)$ no Exemplo 4.

Solução

(a) $f(x) = 3x^2 + 12$. Da fórmula (4),

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(2 + \Delta x)^2 + 12] - [3(2)^2 + 12]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12 + 12\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 12 - 12}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\,\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (12 + 3\,\Delta x) \\
&= 12
\end{aligned}
$$

(b) Da fórmula (7),

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{(3x^2 + 12) - 24}{x - 2} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2} \\
&= 3 \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\
&= 3 \lim_{x \to 2} (x + 2) \\
&= 12
\end{aligned}
$$

(c) Como, do Exemplo 4, $f'(x) = 6x$, então $f'(2) = 12$.

O uso do símbolo f' para a derivada da função f foi introduzido pelo matemático francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813), no século dezoito. Essa notação indica que a função f' é derivada da função f e seu valor em x é $f'(x)$.

Se (x, y) for um ponto do gráfico de f, então $y = f(x)$ e y' também será usado como notação para a derivada de $f(x)$. Com a função f definida pela equação $y = f(x)$, podemos expressar

$$\boxed{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)} \qquad (8)$$

onde Δy é chamado de *incremento* de y e denota a variação no valor da função quando x varia de Δx. Usando (8) e escrevendo $\dfrac{dy}{dx}$ em lugar de $f'(x)$, a fórmula (3) torna-se

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

O símbolo $\frac{dy}{dx}$ como notação para a derivada foi introduzido pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). No século dezessete Leibniz e Sir Isaac Newton (1642-1727), trabalhando independentemente, introduziram quase ao mesmo tempo o conceito de derivada. É provável que Leibniz considerasse dx e dy como pequenas variações nas variáveis x e y e a derivada de y em relação a x como a razão de dy por dx quando dy e dx tornam-se pequenos. O conceito de Limite como concebemos atualmente não era conhecido por Leibniz.

Na notação de Lagrange, o valor da derivada em $x = x_1$ é indicado por $f'(x_1)$. Com a notação de Leibniz escreveríamos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$$

Você deve se lembrar que enquanto $\frac{dy}{dx}$ foi usado como notação para derivada, dy e dx não tiveram, neste livro, significado independente, embora mais adiante eles serão definidos em separado. Assim, por enquanto, $\frac{dy}{dx}$ é um símbolo para a derivada e não deve ser considerado como uma razão. Na verdade, $\frac{d}{dx}$ pode ser considerado como um operador (um símbolo para a operação de cálculo da derivada) e quando escrevemos $\frac{dy}{dx}$, isto significa $\frac{d}{dx}(y)$, ou seja, a derivada de y em relação a x.

EXEMPLO 6 Ache $\frac{dy}{dx}$ se

$$y = \sqrt{x-3}$$

Solução Temos $y = f(x)$, onde $f(x) = \sqrt{x-3}$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x-3} - \sqrt{x-3}}{\Delta x}\end{aligned}$$

Para avaliar esse limite, racionalizamos o numerador.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x-3} - \sqrt{x-3})(\sqrt{x+\Delta x-3} + \sqrt{x-3})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x-3} + \sqrt{x-3})}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x-3) - (x-3)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x-3} + \sqrt{x-3})}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x-3} + \sqrt{x-3})}\end{aligned}$$

O numerador e o denominador são divididos por Δx (desde que $\Delta x \neq 0$) para obter

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x - 3} + \sqrt{x - 3}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x - 3}}$$

Duas outras notações para a derivada de uma função f são

$$\frac{d}{dx}[f(x)] \quad \text{e} \quad D_x[f(x)]$$

Cada uma dessas notações permite-nos indicar a função original na expressão para a derivada. Por exemplo, podemos escrever o resultado do Exemplo 6

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x-3}) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} \quad \text{ou} \quad D_x(\sqrt{x-3}) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

EXEMPLO 7 Calcule

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)$$

Solução Queremos encontrar a derivada de $f(x)$ onde $f(x) = \dfrac{2+x}{3-x}$. Assim,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2+x}{3-x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{2+x+\Delta x}{3-x-\Delta x} - \dfrac{2+x}{3-x}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3-x)(2+x+\Delta x) - (2+x)(3-x-\Delta x)}{\Delta x(3-x-\Delta x)(3-x)}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(6+x-x^2+3\,\Delta x - x\,\Delta x) - (6+x-x^2-2\,\Delta x - x\,\Delta x)}{\Delta x(3-x-\Delta x)(3-x)}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\,\Delta x}{\Delta x(3-x-\Delta x)(3-x)}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5}{(3-x-\Delta x)(3-x)}$$
$$= \frac{5}{(3-x)^2}$$

Naturalmente, se a função e as variáveis forem denotadas por outras letras que não f, x e y, as notações para derivada incorporarão essas letras. Por exemplo, se a função g estiver definida pela equação $s = g(t)$, então a derivada de g poderá ser indicada em cada uma das seguintes formas:

$$g'(t) \qquad \frac{ds}{dt} \qquad \frac{d}{dt}[g(t)] \qquad D_t[g(t)]$$

EXERCÍCIOS 3.1

Nos Exercícios de 1 a 6, ache a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto (x_1, y_1). Faça uma tabela de valores de x, y e m no intervalo fechado [a, b] e inclua na tabela todos os pontos onde o gráfico tem uma tangente horizontal. Faça um esboço do gráfico e mostre um segmento da reta tangente em cada ponto colocado no gráfico.

1. $y = 9 - x^2$; $[a, b] = [-3, 3]$
2. $y = x^2 + 4$; $[a, b] = [-2, 2]$
3. $y = -2x^2 + 4x$; $[a, b] = [-1, 3]$
4. $y = x^2 - 6x + 9$; $[a, b] = [1, 5]$
5. $y = x^3 + 1$; $[a, b] = [-2, 2]$
6. $y = 1 - x^3$; $[a, b] = [-2, 2]$

Nos Exercícios de 7 a 12, ache a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto (x_1, y_1). Faça uma tabela dos valores de x, y e m nos vários pontos do gráfico e inclua na tabela todos os pontos onde o gráfico tem uma tangente horizontal. Faça um esboço do gráfico.

7. $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$
8. $f(x) = 7 - 6x - x^2$
9. $f(x) = \sqrt{4 - x}$
10. $f(x) = \sqrt{x + 1}$
11. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$
12. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 10$

Nos Exercícios de 13 a 20, ache uma equação da reta tangente à curva dada, no ponto indicado. Faça um esboço da curva com a reta tangente e a reta normal.

13. $y = x^2 - 4x - 5$; $(-2, 7)$
14. $y = x^2 - x + 2$; $(2, 4)$
15. $y = \frac{1}{8}x^3$; $(4, 8)$
16. $y = x^2 + 2x + 1$; $(1, 4)$
17. $y = \dfrac{6}{x}$; $(3, 2)$
18. $y = 2x - x^3$; $(-2, 4)$
19. $y = x^4 - 4x$; $(0, 0)$
20. $y = -\dfrac{8}{\sqrt{x}}$; $(4, -4)$
21. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ que é paralela à reta $8x - y + 3 = 0$.
22. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 3x^2 - 4$ que é paralela à reta $3x + y = 4$.
23. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 2 - \frac{1}{3}x^2$ que é perpendicular à reta $x - y = 0$.
24. Ache uma equação de cada reta tangente à curva $y = x^3 - 3x$ que é perpendicular à reta $2x + 18y - 9 = 0$.

Nos Exercícios de 25 a 30, ache $f'(x)$ aplicando a fórmula (3).

25. $f(x) = 7x + 3$
26. $f(x) = 8 - 5x$
27. $f(x) = -4$
28. $f(x) = 3x^2 + 4$
29. $f(x) = 4 - 2x^2$
30. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

Nos Exercícios de 31 a 38, ache a derivada indicada.

31. $\dfrac{d}{dx}(8 - x^3)$
32. $\dfrac{d}{dx}(x^3)$
33. $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x})$
34. $D_x\left(\dfrac{1}{x + 1}\right)$
35. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x + 3}{3x - 2}\right)$
36. $D_x(\sqrt{3x + 5})$
37. $D_x\left(\dfrac{1}{x^2} - x\right)$
38. $D_x\left(\dfrac{3}{1 + x^2}\right)$
39. Dada: $f(x) = x^2$. (a) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$ quando Δx é 1, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001 e Δx é −1, −0,5, −0,1, −0,01, −0,001. A que $\dfrac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$ parece tender quando Δx aproxima-se de 0? (b) Ache $f'(3)$ aplicando a fórmula (4). (c) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ quando x é 4, 3,5, 3,1, 3,01, 3,001 e x é 2, 2,5, 2,9, 2,99, 2,999. A que $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ parece estar tendendo quando x aproxima-se de 3? (d) Ache $f'(3)$ aplicando a fórmula (7).
40. Dada: $f(x) = x^3$. (a) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(2 + x) - f(2)}{\Delta x}$ quando Δx é 1, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001 e Δx é −1, −0,5, −0,1, −0,01, −0,001. A que $\dfrac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ parece tender quando Δx aproxima-se de zero? (b) Encontre $f'(2)$ aplicando a fórmula (4). (c) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ quando x é 3, 2,5, 2,1, 2,01, 2,001 e x é 1, 1,5, 1,9, 1,99, 1,999. A que $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ parece tender quando x aproxima-se de 2? (d) Ache $f'(2)$ aplicando a fórmula (7).
41. Dada: $f(x) = \sqrt{x - 3}$. (a) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(7 + \Delta x) - f(7)}{\Delta x}$ quando Δx é 1, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001 e Δx é −1, −0,5, −0,1, −0,01, −0,001. A que $\dfrac{f(7 + \Delta x) - f(7)}{\Delta x}$ parece tender quando Δx aproxima-se de zero? (b) Encontre $f'(7)$ aplicando a fórmula (4). (c) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(x) - f(7)}{x - 7}$ quando x é 8, 7,5, 7,1, 7,01, 7,001 e x é 6, 6,5, 6,9, 6,99, 6,999. A que $\dfrac{f(x) - f(7)}{x - 7}$ parece tender quando x aproxima-se de 7? (d) Encontre $f'(7)$ aplicando a fórmula (7).
42. Dada: $f(x) = \dfrac{10}{x^2}$. (a) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(5 + \Delta x) - f(5)}{\Delta x}$ quando Δx é 1, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001 e Δx é −1, −0,5, −0,1, −0,01, −0,001. A que $\dfrac{f(5 + \Delta x) - f(5)}{\Delta x}$ parece tender quando Δx aproxima-se de zero? (b) Ache $f'(5)$ aplicando a fórmula (4). (c) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(x) - f(5)}{x - 5}$ quando x é

6, 5,5, 5,1, 5,01, 5,001 e quando x é 4, 4,5, 4,9, 4,99, 4,999. A que $\dfrac{f(x) - f(5)}{x - 5}$ parece tender quando x aproxima-se de 5?
(d) Encontre $f(5)$ aplicando a fórmula (7).

Nos Exercícios de 43 a 46, ache $f'(a)$ aplicando a fórmula (4).

43. $f(x) = 4 - x^2$; $a = 5$ **44.** $f(x) = \dfrac{4}{5x}$; $a = 2$

45. $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$; $a = 4$ **46.** $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 1$; $a = 4$

Nos Exercícios de 47 a 50, ache $f'(a)$ aplicando a fórmula (7).

47. $f(x) = 2 - x^3$; $a = -2$ **48.** $f(x) = x^2 - x + 4$; $a = 4$

49. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x + 3}}$; $a = 3$ **50.** $f(x) = \sqrt{1 + 9x}$; $a = 7$

Nos Exercícios de 51 a 56, ache $\dfrac{dy}{dx}$.

51. $y = \dfrac{4}{x^2} + 3x$ **52.** $y = \dfrac{4}{2x - 5}$ **53.** $y = \sqrt{2 - 7x}$

54. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$ **55.** $y = \sqrt[3]{x}$ **56.** $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - x$

57. Se g é contínua em a e $f(x) = (x - a)g(x)$, ache $f'(a)$. (*Sugestão*: use a fórmula (7)).

58. Se g é contínua em a e $f(x) = (x^2 - a^2)g(x)$, ache $f'(a)$. (*Sugestão*: use a fórmula (7)).

59. Prove que não há reta que passe pelo ponto (1, 5) e seja tangente à curva $y = 4x^2$.

60. Prove que não há reta que passe pelo ponto (1, 2) e seja tangente à curva $y = 4 - x^2$.

61. Se

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

ache $f''(x)$ se $f(x) = ax^2 + bx$

62. Use a fórmula do Exercício 61 para encontrar $f''(x)$ se $f(x) = a/x$.

63. Se $f'(a)$ existe, prove que

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\,\Delta x}$$

(*Sugestão*:
$f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a) + f(a) - f(a - \Delta x)$.)

64. Seja f uma função cujo domínio seja o conjunto de todos os números reais e $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ para todo a e b. Além disso, suponha que $f(0) = 1$ e $f(0)$ exista. Prove que $f(x)$ existe para todo x e que $f'(x) = f'(0) \cdot f'(x)$.

3.2 DERIVABILIDADE E CONTINUIDADE

O processo de cálculo da derivada é chamada de **derivação**. Assim, a derivação é a operação de derivar uma função f' de uma função f.

Se uma função possui uma derivada em x_1, a função será **derivável** em x_1. Isto é, a função f será derivável em x_1 se $f'(x_1)$ existir. Uma função será **derivável em um intervalo aberto** se ela for derivável em todo número no intervalo aberto.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** No Exemplo 4 da Secção 3.1, $f(x) = 3x^2 + 12$ e $f'(x) = 6x$. Como o domínio de f é o conjunto de todos os números reais, e $6x$ existe se x for um número real qualquer, f é uma função derivável. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Seja g a função definida por $g(x) = \sqrt{x - 3}$. O domínio de g é $[3, +\infty)$. Do resultado do Exemplo 6 da Secção 3.1,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 3}}$$

Como $g'(3)$ não existe, g não é derivável, em 3. No entanto, g é derivável em qualquer outro número em seu domínio. Portanto, g será derivável no intervalo aberto $[3, +\infty)$. ◀

Iniciaremos uma discussão sobre derivabilidade e continuidade com o exemplo a seguir.

EXEMPLO 1 Seja

$$f(x) = x^{1/3}$$

(a) Ache $f'(x)$. (b) Mostre que $f'(0)$ não existe, mesmo que f seja contínua nesse número. (c) Faça um esboço do gráfico de f.

Solução

(a) Da Definição 3.1.1

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^{1/3} - x^{1/3}}{\Delta x} \tag{1}$$

Racionalizemos o numerador para obter um fator comum Δx no numerador e no denominador; disto resulta

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x + \Delta x)^{1/3} - x^{1/3}][(x + \Delta x)^{2/3} + (x + \Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}]}{\Delta x[(x + \Delta x)^{2/3} + (x + \Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}]} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x[(x + \Delta x)^{2/3} + (x + \Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}]} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x + \Delta x)^{2/3} + (x + \Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \\ &= \frac{1}{x^{2/3} + x^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \\ &= \frac{1}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

(b) Observe que $\frac{1}{3x^{2/3}}$ não é definido em $x = 0$. Se (1) for usado para calcular $f'(0)$, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(0 + \Delta x)^{1/3} - 0^{1/3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}}$$

e esse limite não existe. Então, f não é derivável em zero. No entanto, a função f é contínua em 0, pois

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} x^{1/3} \\ &= 0 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

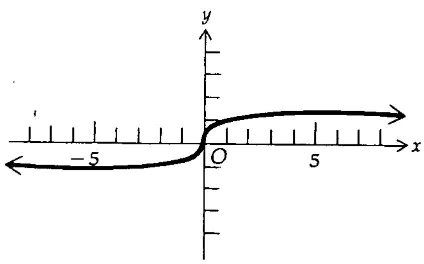


FIGURA 1

(c) Um esboço do gráfico de f está na Figura 1.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Para a função f do Exemplo 1, como

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

da Definição 3.1.1 (ii) segue que a reta $x = 0$ é a reta tangente ao gráfico de f na origem. ◀

Do Exemplo 1 e da Ilustração 3, a função definida por $f(x) = x^{1/3}$ tem as seguintes propriedades:

1. f é contínua em zero.
2. f não é derivável em zero.
3. O gráfico de f tem uma reta tangente vertical no ponto onde x é zero.

Na ilustração a seguir temos outra função que é contínua mas não derivável em zero. O gráfico dessa função não tem uma reta tangente no ponto onde x é zero.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Seja f a função valor absoluto definida por

$$f(x) = |x|$$

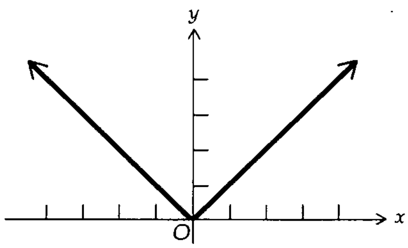


FIGURA 2

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 2. Da fórmula (4) da Secção 3.1,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

se o limite existir. Como $f(0 + \Delta x) = |\Delta x|$ e $f(0) = 0$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Como $|\Delta x| = \Delta x$ se $\Delta x > 0$ e $|\Delta x| = -\Delta x$ se $\Delta x < 0$, consideramos limites laterais em 0:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^+} 1 \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^-} (-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} \neq \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$, segue que o limite bilateral $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ não existe. Logo, $f'(0)$ não existe e assim f não é derivável em 0.

Como a Definição 3.1.1 não é satisfeita quando $x = 0$, não existe reta tangente na origem para o gráfico da função valor absoluto. ◀

Como as funções da Ilustração 4 e do Exemplo 1 são contínuas em um número, porém não deriváveis nele, podemos concluir que o fato de ser uma função contínua num número não implica que ela seja derivável naquele número. Mas o fato de a função ser derivável *implica* a continuidade, o que é assegurado pelo teorema a seguir.

3.2.1 TEOREMA Se uma função f for derivável em x_1, então f será contínua em x_1.

Prova Para provar que f é contínua em x_1 precisamos mostrar que as três condições da Definição 2.6.1 são satisfeitas. Isto é, precisamos mostrar que (i) $f(x_1)$ existe; (ii) $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$ existe e (iii) $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$.

Por hipótese, f é derivável em x_1. Logo $f'(x_1)$ existe. Como pela fórmula (7) da Secção 3.1

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$f(x_1)$ precisa existir, pois caso contrário o limite acima não terá sentido. Logo, a condição (i) é verdadeira em x_1. Consideremos agora

$$\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)]$$

Podemos escrever

$$\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] = \lim_{x \to x_1} \left[(x - x_1) \cdot \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}\right] \tag{2}$$

Como

$$\lim_{x \to x_1} (x - x_1) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1)$$

aplicando o teorema de limite de um produto (Teorema 2.2.6) ao segundo membro de (2), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] &= \lim_{x \to x_1} (x - x_1) \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \\ &= 0 \cdot f'(x_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_1} f(x) &= \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1) + f(x_1)] \\ &= \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] + \lim_{x \to x_1} f(x_1) \\ &= 0 + f(x_1) \end{aligned}$$

que resulta

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$$

Dessa igualdade segue que as condições (ii) e (iii) para a continuidade de f em x_1 são satisfeitas. Logo, o teorema está provado. ■

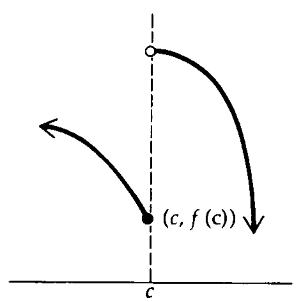


FIGURA 3

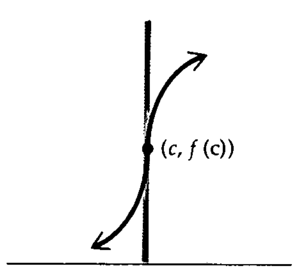


FIGURA 4

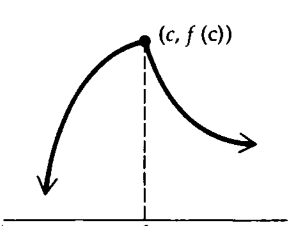


FIGURA 5

Uma função f pode deixar de ser derivável em um número c por uma das seguintes razões:

1. A função f é descontínua em c. Isto decorre do Teorema 3.2.1. Veja na Figura 3 um esboço do gráfico de tal função.
2. A função f é contínua em c e o gráfico de f tem uma reta tangente vertical no ponto onde $x = c$. Veja na Figura 4 um esboço do gráfico de uma função com essa característica. Tal situação também ocorre no Exemplo 1.
3. A função f é contínua em c e o gráfico de f não tem uma reta tangente no ponto $x = c$. Veja na Figura 5 um esboço do gráfico de uma função

satisfazendo essa condição. Observe que existe um "bico" no gráfico em $x = c$. Na Ilustração 1 há outro exemplo de tal função.

Antes de dar outros exemplos de funções que são contínuas em um número, porém não deriváveis nele, vamos introduzir o conceito de **derivada lateral**.

3.2.2 DEFINIÇÃO

Se a função f for definida em x_1, então a **derivada à direita** de f em x_1, denotada por $f'_+(x_1)$, será definida por

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'_+(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

se o limite existir.

3.2.3 DEFINIÇÃO

Se a função f for definida em x_1, então a **derivada à esquerda** de f em x_1, denotada por $f'_-(x_1)$, será definida por

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'_-(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

se o limite existir.

Das Definições 3.2.2 e 3.2.3 e do Teorema 2.3.3, segue que uma função f definida num intervalo aberto contendo x_1 será derivável em x_1 se e somente se $f'_+(x_1)$ e $f'_-(x_1)$ ambas existirem e forem iguais. Naturalmente, então, $f'(x_1)$, $f'_+(x_1)$ e $f'_-(x_1)$ são todas iguais.

EXEMPLO 2 Seja f definida por

$$f(x) = |1 - x^2|$$

(a) Faça um esboço do gráfico de f. (b) Prove que f é contínua em 1. (c) Determine se f é derivável em 1.

Solução Pela definição de valor absoluto, se $x < -1$ ou $x > 1$, então $f(x) = -(1 - x^2)$ e se $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x) = 1 - x^2$. Logo, f pode ser definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 - 1 & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

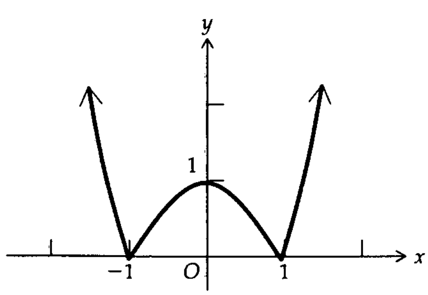


FIGURA 6

(a) Um esboço do gráfico de f está na Figura 6.

(b) Para provar que f é contínua em 1, verificamos as três condições para continuidade.

(i) $f(1) = 0$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (1 - x^2) = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 - 1) = 0$

Assim $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

Como as condições (i)-(iii) são verificadas em 1, f é contínua em 1.

(c)
$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1 - x^2) - 0}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} [-(1 + x)] = -2$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} (x + 1) = 2$$

Como $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, segue que $f'(1)$ não existe e assim f não é derivável em 1.

A função do Exemplo 2 também não é derivável em $x = -1$, conforme pode ser mostrado por um método similar ao que foi usado em $x = 1$ (Veja o Exercício 26).

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Na Ilustração 2 da Secção 2.6 tínhamos a função C definida por

$$C(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0{,}7x + 3 & \text{se } 10 < x \end{cases}$$

onde $C(x)$ é o custo total de x de um produto. A Figura 7 mostra um esboço do gráfico de C. Na Secção 2.6 mostramos que C é contínua em 10.

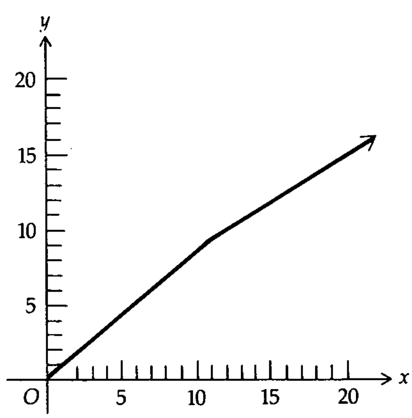


FIGURA 7

$$C'_-(10) = \lim_{x\to 10^-} \frac{C(x) - C(10)}{x - 10} = \lim_{x\to 10^-} \frac{x - 10}{x - 10} = \lim_{x\to 10^-} 1 = 1$$

$$C'_+(10) = \lim_{x\to 10^+} \frac{C(x) - C(10)}{x - 10} = \lim_{x\to 10^+} \frac{(0{,}7x + 3) - 10}{x - 10} = \lim_{x\to 10^+} \frac{0{,}7(x - 10)}{x - 10} = \lim_{x\to 10^+} 0{,}7 = 0{,}7$$

Como $C'_-(10) \neq C'_+(10)$, C não é derivável em 10. ◀

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } 0 < x < b \\ 1 - \frac{1}{4}x & \text{se } b \leqslant x \end{cases}$$

(a) Determine um valor de b de tal forma que f seja contínua em b. (b) f é derivável no valor de b encontrado na parte (a)?

Solução

(a) A função f será contínua em b se $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ e $\lim\limits_{x \to b^+} f(x) = f(b)$.

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{b} \qquad \lim_{x \to b^+} f(x) = \lim_{x \to b^+} (1 - \tfrac{1}{4}x) = 1 - \tfrac{1}{4}b$$

$f(b) = 1 - \frac{1}{4}b$; logo f será contínua em b se

$$\frac{1}{b} = 1 - \frac{1}{4}b$$

$$4 = 4b - b^2$$

$$b^2 - 4b + 4 = 0$$

$$(b - 2)^2 = 0$$

$$b = 2$$

Assim

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } 0 < x < 2 \\ 1 - \frac{1}{4}x & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases}$$

e f é contínua em 2.

(b) Para determinar se f é derivável em 2, calculemos $f'_-(2)$ e $f'_+(2)$.

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2 - x}{2x(x - 2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{2x} = -\tfrac{1}{4}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(1 - \frac{1}{4}x) - \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{2 - x}{4(x - 2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-1}{4} = -\tfrac{1}{4}$$

Como $f'_-(2) = f'_+(2)$, segue que $f'(2)$ existe e, portanto, f é derivável em 2.

EXERCÍCIOS 3.2

Nos Exercícios de 1 a 20, faça o seguinte: (a) Trace um esboço do gráfico da função; (b) determine se f é contínua em x_1; (c) calcule $f'_-(x_1)$ e $f'_+(x_1)$, se existirem; (d) determine se f é derivável em x_1.

1. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leqslant -4 \\ -x-6 & \text{se } -4 < x \end{cases} \quad x_1 = -4$
2. $f(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{se } x < 2 \\ 3x-7 & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases} \quad x_1 = 2$
3. $f(x) = |x-3|;\ x_1 = 3$
4. $f(x) = 1 + |x+2|;\ x_1 = -2$
5. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ x-1 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases} \quad x_1 = 0$
6. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x \end{cases} \quad x_1 = 0$
7. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ -x^2 & \text{se } 0 < x \end{cases} \quad x_1 = 0$
8. $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases} \quad x_1 = 2$
9. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{se } x < 1 \\ (1-x)^2 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases} \quad x_1 = 1$
10. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < -1 \\ -1-2x & \text{se } -1 \leqslant x \end{cases} \quad x_1 = -1$
11. $f(x) = \begin{cases} 2x^2-3 & \text{se } x \leqslant 2 \\ 8x-11 & \text{se } 2 < x \end{cases} \quad x_1 = 2$
12. $f(x) = \begin{cases} x^2-9 & \text{se } x < 3 \\ 6x-18 & \text{se } 3 \leqslant x \end{cases} \quad x_1 = 3$
13. $f(x) = \sqrt[3]{x+1};\ x_1 = -1$
14. $f(x) = (x-2)^{-2};\ x_1 = 2$
15. $f(x) = \begin{cases} 5-6x & \text{se } x \leqslant 3 \\ -4-x^2 & \text{se } 3 < x \end{cases} \quad x_1 = 3$
16. $f(x) = \begin{cases} -x^{2/3} & \text{se } x \leqslant 0 \\ x^{2/3} & \text{se } 0 < x \end{cases} \quad x_1 = 0$
17. $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases} \quad x_1 = 0$
18. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \leqslant 1 \\ x+1 & \text{se } 1 < x \end{cases} \quad x_1 = 1$
19. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ x^3 & \text{se } 2 < x \end{cases} \quad x_1 = 2$
20. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x < -1 \\ 1-x^2 & \text{se } -1 \leqslant x \end{cases} \quad x_1 = -1$
21. Dada $f(x) = \sqrt{x-4}$. (a) Prove que f é contínua à direita de 4. (b) Prove que $f'_+(4)$ não existe. (c) Faça um esboço do gráfico de f.
22. Dada $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. (a) Prove que f é contínua no intervalo fechado $[-2, 2]$. (b) Prove que nem $f'_+(-2)$ nem $f'_-(2)$ existem. (c) Faça um esboço do gráfico de f.
23. Dada $f(x) = \sqrt{x^2-9}$. (a) Prove que f é contínua em $(-\infty, -3]$ e $[3, +\infty)$. (b) Prove que nem $f'_-(-3)$ nem $f'_+(3)$ existem. (c) Faça um esboço do gráfico de f.
24. Dada $f(x) = \sqrt{8-x}$. (a) Prove que f é contínua à esquerda de 8. (b) Prove que $f'_-(8)$ não existe. (c) Faça um esboço do gráfico de f.
25. Dada $f(x) = \operatorname{sgn} x$. (a) Prove que $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$ não existem. (b) Prove que $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$. (c) Faça um esboço do gráfico de f.
26. Prove que a função do Exemplo 2 é contínua em -1, mas não é derivável naquele número.
27. Dada $f(x) = x^{3/2}$. (a) Prove que f é contínua à direita de 0. (b) Prove que $f'_+(0)$ existe e ache o seu valor. (c) Faça um esboço do gráfico de f.
28. Dada $f(x) = (1-x^2)^{3/2}$. (a) Prove que f é contínua no intervalo fechado $[-1, 1]$. (b) Prove que f é derivável no intervalo aberto $(-1, 1)$ e que ambas $f'_+(-1)$ e $f'_-(1)$ existem. (c) Faça um esboço do gráfico de f.
29. Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2-7 & \text{se } 0 < x \leqslant b \\ \dfrac{6}{x} & \text{se } b < x \end{cases}$$

(a) Determine um valor de b para o qual f é contínua em b. (b) f é derivável em b encontrado na parte (a)?

30. Ache os valores de a e b tais que f seja derivável em 1 se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ ax+b & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$$

31. Ache os valores de a e b tais que f seja derivável em 2 se

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{se } x < 2 \\ 2x^2-1 & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases}$$

32. Dada $f(x) = [\![x]\!]$, ache $f'(x_1)$ se x_1 não for inteiro. Prove, aplicando o Teorema 3.2.1, que $f'(x_1)$ não existe se x_1 for inteiro. Se x_1 for inteiro, o que poderá ser dito sobre $f'_-(x_1)$ e $f'_+(x_1)$?
33. Dada $f(x) = (x-1)[\![x]\!]$. Faça um esboço do gráfico de f para x em $[0, 2]$. Ache, se existirem: (a) $f'_-(1)$; (b) $f'_+(1)$; (c) $f'(1)$.
34. Dada $f(x) = (5-x)[\![x]\!]$. Faça um esboço do gráfico de f para x em $[4, 6]$. Ache, se existirem: (a) $f'_-(5)$; (b) $f'_+(5)$; (c) $f'(5)$.
35. Dada $f(x) = (x-a)[\![x]\!]$ onde a é um inteiro, mostre que $f'_-(a) + 1 = f'_+(a)$.
36. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} & \text{se } x \neq a \\ g'(a) & \text{se } x = a \end{cases}$$

Prove que se $g'(a)$ existir, f será contínua em a.

37. Na Ilustração 1 temos a função valor absoluto definida por $f(x) = |x|$ e essa função não é derivável em 0. Prove que $f'(x) = |x|/x$ para todo $x \neq 0$. (*Sugestão*: seja $|x| = \sqrt{x^2}$.)
38. Se $f(x) = |x|$ e $g(x) = -|x|$, (a) ache uma fórmula para $(f + g)(x)$. (b) Prove que $f + g$ é derivável em 0, embora nem f nem g sejam deriváveis nesse número.
39. Uma excursão escolar que pode acomodar até 250 estudantes irá custar $ 15 por estudante, se o número de estudantes que fizer a viagem não ultrapassar 150; contudo, o custo por estudante será reduzido de $ 0,05 para cada estudante que exceder 150, até que o custo atinja $ 10 por pessoa. (a) Se x estudantes fizerem a viagem, expresse o custo bruto como função de x. (b) Como x é o número de estudantes, x é um inteiro não negativo. Para que tenhamos as exigências de continuidade para aplicar o cálculo, x deve ser um número real não negativo. Com essa hipótese, mostre que a função da parte (a) é contínua até 150, mas não é derivável nesse número.
40. Um fabricante pode obter um lucro de $ 20 em cada item se até 800 itens forem produzidos por semana. O lucro decresce $ 0,02 por item acima de 800. (a) Se x itens forem produzidos por semana, expresse o lucro do fabricante como uma função de x. (b) Como x é o número de itens, é um inteiro não-negativo. Para que tenhamos as exigências de continuidade do cálculo, x deve ser um número real não negativo. Com essa hipótese, mostre que a função da parte (a) é contínua até 800, mas não derivável nesse número.
41. Dada

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0 \\ x^n & \text{se } 0 < x \end{cases}$$

onde n é um inteiro positivo. (a) Para que valores de n f é derivável para todos os valores de x? (b) Para que valores de n f é contínua para todos os valores de x?

3.3 TEOREMAS SOBRE DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES ALGÉBRICAS

Como o processo de cálculo da derivada de uma função, a partir da Definição 3.1.3, em geral é lento, enunciaremos e provaremos alguns teoremas que nos possibilitam encontrar derivadas com mais facilidade. Esses teoremas são demonstrados se aplicarmos a Definição 3.1.3. Depois da prova de cada teorema enunciamos a fórmula de derivação correspondente.

3.3.1 TEOREMA Se c for uma constante e se $f(x) = c$ para todo x, então

$$f'(x) = 0$$

Prova

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$ ■

$$\boxed{D_x(c) = 0}$$

A derivada de uma constante é zero.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se $f(x) = 5$, então

$$f'(x) = 0$$ ◀

3.3.2 TEOREMA Se n for um inteiro positivo e se $f(x) = x^n$, então

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Prova

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Aplicando o teorema binomial a $(x + \Delta x)^n$ teremos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n\right] - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x}$$

Dividindo o numerador e o denominador por Δx, obtemos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\,\Delta x + \ldots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right]$$

Todos os termos, exceto o primeiro, têm Δx como fator; assim sendo todos os termos, exceto o primeiro, tendem a zero quando Δx tende a zero. Assim

$$f'(x) = nx^{n-1}$$ ■

$$\boxed{D_x(x^n) = nx^{n-1}}$$

► **ILUSTRAÇÃO 2** Se $f(x) = x^8$, então $f'(x) = 8x^7$. ◄

► **ILUSTRAÇÃO 3** Seja $f(x) = x$. (a) Se $x \neq 0$, pelo Teorema 3.3.2

$$f'(x) = 1 \cdot x^0$$
$$= 1 \cdot 1$$
$$= 1$$

(b) Pela fórmula (7) da Secção 3.1

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} 1$$

$$= 1$$

Portanto, para todo x, $D_x(x) = 1$. ◄

3.3.3 TEOREMA Se f for uma função, c uma constante e g a função definida por

$$g(x) = c \cdot f(x)$$

então, se $f'(x)$ existir,

$$g'(x) = c \cdot f'(x)$$

Prova

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] \\
&= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= cf'(x)
\end{aligned}
$$

■

$$\boxed{D_x\,[c \cdot f(x)] = c \cdot D_x f(x)}$$

A derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função, se essa derivada existir.

Combinando os Teoremas 3.3.2 e 3.3.3 obtemos o seguinte resultado: se $f(x) = cx^n$, onde n é um inteiro positivo e c é uma constante, então

$$f'(x) = cnx^{n-1}$$

$$\boxed{D_x(cx^n) = cnx^{n-1}}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Se $f(x) = 5x^7$, então

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 5 \cdot 7x^6 \\
&= 35x^6
\end{aligned}
$$

◀

3.3.4 TEOREMA Se f e g forem funções e se h for a função definida por

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

então, se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem,

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Prova

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}
$$

■

$$\boxed{D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)}$$

A derivada da soma de duas funções é a soma de suas derivadas se elas existirem.

O resultado do teorema precedente pode ser aplicado a um número qualquer, finito, de funções, por indução matemática, e isso será enunciado como um outro teorema.

3.3.5 TEOREMA A derivada da soma de um número finito de funções é igual à soma de suas derivadas, se elas existirem.

Dos teoremas precedentes, a derivada de qualquer função polinomial pode ser facilmente encontrada.

EXEMPLO 1 Encontre $f'(x)$ se

$$f(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$$

Solução

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x(7x^4 - 2x^3 + 8x + 5) \\ &= D_x(7x^4) + D_x(-2x^3) + D_x(8x) + D_x(5) \\ &= 28x^3 - 6x^2 + 8 \end{aligned}$$

3.3.6 TEOREMA Se f e g forem funções e h for a função definida por

$$h(x) = f(x)g(x)$$

então, se existirem $f'(x)$ e $g'(x)$,

$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Prova

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Se $f(x + \Delta x) \cdot g(x)$ for somado e subtraído ao numerador, então

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \cdot g(x) + f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Como f é derivável em x, pelo Teorema 3.2.1 f é contínua em x; logo, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$. Também, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$ e

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x) \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

dando assim

$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \qquad \blacksquare$$

$$\boxed{D_x\,[f(x)g(x)] = f(x)\,D_x g(x) + g(x) \cdot D_x f(x)}$$

A derivada do produto de duas funções é a primeira função vezes a derivada da segunda função, mais a segunda função vezes a derivada da primeira função, se essas derivadas existirem.

EXEMPLO 2 Encontre $h'(x)$ se

$$h(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$$

Solução

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x^3 - 4x^2)(15x^4 + 2x) + (3x^5 + x^2)(6x^2 - 8x) \\ &= (30x^7 - 60x^6 + 4x^4 - 8x^3) + (18x^7 - 24x^6 + 6x^4 - 8x^3) \\ &= 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3 \end{aligned}$$

No Exemplo 2, note que se a multiplicação for efetuada antes da derivação, o resultado será o mesmo. Fazendo isto, temos

$$h(x) = 6x^8 - 12x^7 + 2x^5 - 4x^4$$

$$h'(x) = 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3$$

3.3.7 TEOREMA Se f e g forem funções e se h for a função definida por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{onde } g(x) \neq 0$$

então se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem,

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Prova

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x + \Delta x)} \end{aligned}$$

Se somarmos e subtrairmos $f(x) \cdot g(x)$ ao denominador, então

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[g(x) \cdot \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - \left[f(x) \cdot \dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x)}$$

Como g é derivável, em x, então g será contínua em x; assim temos que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) = g(x)$. Além disso, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$ e $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$. Com esses resultados e as definições de $f'(x)$ e $g'(x)$ obtemos

$$h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

■

$$\boxed{D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{[g(x)]^2}}$$

A derivada do quociente de duas funções é a fração tendo como denominador o quadrado do denominador original e como numerador o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, se essas derivadas existirem.

EXEMPLO 3 Ache

$$D_x\left(\frac{2x^3 + 4}{x^2 - 4x + 1}\right)$$

Solução

$$D_x\left(\frac{2x^3 + 4}{x^2 - 4x + 1}\right) = \frac{(x^2 - 4x + 1)(6x^2) - (2x^3 + 4)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

$$= \frac{6x^4 - 24x^3 + 6x^2 - 4x^4 + 8x^3 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

3.3.8 TEOREMA Se $f(x) = x^{-n}$, onde $-n$ é um inteiro negativo e $x \neq 0$, então

$$f'(x) = -nx^{-n-1}$$

Prova Se $-n$ for um inteiro negativo, então n será um inteiro positivo. Escrevemos então

$$f(x) = \frac{1}{x^n}$$

Do Teorema 3.3.7

$$f'(x) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2}$$
$$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$
$$= -nx^{n-1-2n}$$
$$= -nx^{-n-1}$$ ■

EXEMPLO 4 Ache

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^5}\right)$$

Solução

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^5}\right) = \frac{d}{dx}(3x^{-5})$$
$$= 3(-5x^{-6})$$
$$= -\frac{15}{x^6}$$

Se r for um inteiro qualquer positivo ou negativo, segue dos Teoremas 3.3.2 e 3.3.8 que

$$\boxed{D_x\,(x^r) = rx^{r-1}}$$

e dos Teoremas 3.3.2, 3.3.3 e 3.3.8 obtemos

$$\boxed{D_x\,(cx^r) = crx^{r-1}}$$

EXERCÍCIOS 3.3

Nos Exercícios de 1 a 24, derive a função dada, aplicando os teoremas desta secção.

1. $f(x) = 7x - 5$
2. $g(x) = 8 - 3x$
3. $g(x) = 1 - 2x - x^2$
4. $f(x) = 4x^2 + x + 1$
5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$
6. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$
7. $f(x) = \frac{1}{8}x^8 - x^4$
8. $g(x) = x^7 - 2x^5 + 5x^3 - 7x$
9. $F(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2$
10. $H(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$
11. $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$
12. $G(y) = y^{10} + 7y^5 - y^3 + 1$
13. $F(x) = x^2 + 3x + \dfrac{1}{x^2}$
14. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{x^3}$
15. $g(x) = 4x^4 - \dfrac{1}{4x^4}$
16. $f(x) = x^4 - 5 + x^{-2} + 4x^{-4}$
17. $g(x) = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{5}{x^4}$
18. $H(x) = \dfrac{5}{6x^5}$
19. $f(s) = \sqrt{3}(s^3 - s^2)$
20. $g(x) = (2x^2 + 5)(4x - 1)$
21. $f(x) = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)$
22. $f(x) = (4x^2 + 3)^2$
23. $G(y) = (7 - 3y^3)^2$
24. $F(t) = (t^3 - 2t + 1)(2t^2 + 3t)$

Nos Exercícios de 25 a 36, calcule a derivada indicada, aplicando os teoremas desta secção.

25. $D_x[(x^2 - 3x + 2)(2x^3 + 1)]$
26. $D_x\left(\dfrac{2x}{x + 3}\right)$
27. $D_x\left(\dfrac{x}{x - 1}\right)$
28. $D_y\left(\dfrac{2y + 1}{3y + 4}\right)$
29. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}\right)$
30. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4 - 3x - x^2}{x - 2}\right)$
31. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{5t}{1 + 2t^2}\right)$
32. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^4 - 2x^2 + 5x + 1}{x^4}\right)$
33. $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{y^3 - 8}{y^3 + 8}\right)$
34. $\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s^2 - a^2}{s^2 + a^2}\right)$

35. $D_x\left[\dfrac{2x+1}{x+5}(3x-1)\right]$
36. $D_x\left[\dfrac{x^3+1}{x^2+3}(x^2-2x^{-1}+1)\right]$
37. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 4$ no ponto $(2, 4)$.
38. Ache uma equação da reta normal à curva $y = 4x^2 - 8x$ no ponto $(1, -4)$.
39. Ache uma equação da reta normal à curva $y = 10/(14 - x^2)$ no ponto $(4, -5)$.
40. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 8/(x^2 + 4)$ no ponto $(2, 1)$.
41. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 3x^2 - 4x$ e paralela à reta $2x - y + 3 = 0$.
42. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = x^4 - 6x$ que seja perpendicular à reta $x - 2y + 6 = 0$.
43. Ache uma equação de cada uma das retas normais à curva $y = x^3 - 4x$ que sejam paralelas à reta $x + 8y - 8 = 0$.
44. Ache uma equação de cada uma das retas tangentes à curva $3y = x^3 - 3x^2 + 6x + 4$ que sejam paralelas à reta $2x - y + 3 = 0$.
45. Ache uma equação de cada uma das retas que passam pelo ponto $(4, 13)$, que sejam tangentes à curva $y = 2x^2 - 1$.
46. Dada $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x + 5$. Mostre que $f'(x) \geqslant 0$ para todos os valores de x.
47. Se f, g e h são funções e $\phi(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$, prove que se $f'(x)$, $g'(x)$ e $h'(x)$ existirem,

$$\phi'(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$$

(*Sugestão*: aplique o Teorema 3.3.6 duas vezes.)

Use os resultados do Exercício 47 para derivar as funções dos Exercícios de 48 a 51.

48. $f(x) = (x^2 + 3)(2x - 5)(3x + 2)$
49. $h(x) = (3x + 2)^2(x^2 - 1)$
50. $g(x) = (3x^3 + x^{-3})(x + 3)(x^2 - 5)$
51. $\phi(x) = (2x^2 + x + 1)^3$

3.4 MOVIMENTO RETILÍNEO E A DERIVADA COMO TAXA DE VARIAÇÃO

A derivada de uma função f no número x_1 tem uma interpretação importantíssima como a *taxa de variação instantânea* de f em x_1. Começaremos considerando uma partícula movendo-se ao longo de uma reta, que seria uma aplicação em Física. Tal movimento é chamado de **movimento retilíneo**. Um dos sentidos é escolhido arbitrariamente como positivo e o outro, oposto, como negativo. Para simplificar, vamos supor que o movimento da partícula seja ao longo de uma reta horizontal com distâncias positivas à direita e negativas à esquerda. Escolhemos um ponto sobre a reta, o qual denotamos por O. Seja f a função que determina a distância orientada da partícula a partir de O em qualquer instante.

Para sermos mais específicos, seja s cm a distância orientada da partícula a partir de O em t s (segundos). Então, f será a função definida pela equação

$$s = f(t)$$

a qual indicará a distância orientada de O até a partícula, num determinado instante.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Seja

$$s = t^2 + 2t - 3$$

Então, quando $t = 0$, $s = -3$; logo, a partícula está 3 cm à esquerda do ponto O, quando $t = 0$. Quando $t = 1$, $s = 0$; assim, a partícula estará no ponto O, decorrido 1 s do início do movimento. Quando $t = 2$, $s = 5$; assim, a partícula estará a 5 cm à direita de O, 2 s após o início do movimento. Quando $t = 3$, $s = 12$; assim, a partícula estará a 12 cm à direita do ponto O, decorridos 3 s do início do movimento.

A Figura 1 ilustra as várias posições da partícula para valores específicos de t.

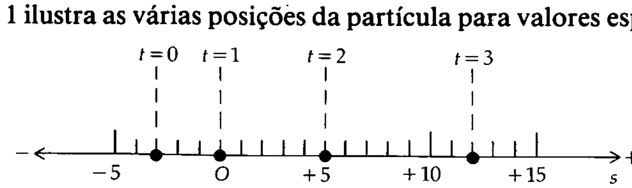


FIGURA 1

Entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$, a partícula move-se do ponto onde $s = 0$ até o ponto onde $s = 12$; assim, no intervalo de 2 s a variação na distância é de 0 a 12 cm. A velocidade média da partícula é a razão entre a variação na distância orientada do ponto fixo e a variação no tempo. Assim, o número de centímetros por segundo, ou seja, a velocidade média da partícula de $t = 1$ a $t = 3$, é $\frac{12}{2} = 6$. De $t = 0$ a $t = 2$, a variação na distância orientada de O da partícula é 8 cm; assim, o número de centímetros por segundo, ou seja, a velocidade média da partícula nesse intervalo de 2 s, é $\frac{8}{2} = 4$. ◀

Na Ilustração 1, a velocidade média da partícula, obviamente, não é constante; e a velocidade média não fornece informações específicas sobre o movimento da partícula em nenhum instante específico. Por exemplo, se um carro percorre uma distância de 100 km na mesma direção em 2 h, dizemos que a velocidade média com a qual percorre aquela distância é de 50 km/h. Entretanto, dessa informação não podemos determinar quanto está marcando o velocímetro do carro, num dado instante, no período de 2 h. A leitura do velocímetro é chamada de *velocidade instantânea*. A discussão a seguir possibilita-nos chegar a uma definição do que significa *velocidade instantânea*.

Suponha que $s = f(t)$ defina s (o número de centímetros da distância orientada da partícula a partir do ponto O) como função de t (número de segundos decorridos). Quando $t = t_1$, $s = s_1$. A variação na distância orientada a partir de O é $(s - s_1)$ cm no intervalo de tempo $(t - t_1)$ s e o número de centímetros por segundo ou seja, a velocidade média da partícula nesse intervalo de tempo é dada por

$$\frac{s - s_1}{t - t_1}$$

ou, como $s = f(t)$ e $s_1 = f(t_1)$, a velocidade média é encontrada de

$$\frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} \tag{1}$$

Agora, quanto menor for o intervalo de t_1 até t, mais próxima estará a velocidade média do que intuitivamente entenderíamos como velocidade instantânea em t_1.

Por exemplo, se o velocímetro de um carro marca 80 km/h quando ele passa por um ponto P_1 e se um ponto P está, por exemplo, a 10 m de P_1, então a velocidade média do carro quando ele percorre esses 10 m estará, ao que tudo indica, próxima dos 80 km/h, pois a variação da velocidade do carro nesse trecho pequeno é, provavelmente, insignificante. Agora, se a distância entre P_1 e P for diminuída para 5 m, a velocidade média do carro nesse intervalo deverá estar mais próxima ainda da leitura do velocímetro do carro em P_1. Podemos continuar esse processo e a leitura do velocímetro em P_1 pode ser representada como o limite da velocidade média entre P_1 e P, quando P tende a P_1. Isto é, a *velocidade instantânea* pode ser definida como o limite do quociente (1) quando t tende a t_1, desde que o limite exista. O limite é a derivada da função f em t_1. Temos, então, a seguinte definição:

3.4.1 DEFINIÇÃO Se f for uma função dada pela equação

$$s = f(t)$$

e uma partícula se mover ao longo de uma reta de tal forma que s seja o número de unidades da distância orientada da partícula a um ponto fixo na reta em t unidades de tempo, então a **velocidade instantânea** da partícula em t unidades de tempo será v unidades de velocidade, onde

$$v = f'(t) \Leftrightarrow v = \frac{ds}{dt}$$

se a derivada existir.

A velocidade instantânea pode ser positiva ou negativa, conforme o movimento da partícula seja no sentido positivo ou negativo da reta. Quando a velocidade instantânea for zero, a partícula estará em repouso.

A **velocidade escalar** de uma partícula em qualquer instante é definida como o valor absoluto da velocidade instantânea. Logo, a velocidade escalar é um número não-negativo. Os termos velocidade escalar e velocidade instantânea são freqüentemente confundidos. Deve ser notado que a velocidade escalar dá somente uma idéia da rapidez com que a partícula está se movendo, enquanto que a velocidade instantânea também indica o sentido do movimento.

EXEMPLO 1 Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação

$$s = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1$$

Determine os intervalos de tempo nos quais a partícula se move para a direita e para a esquerda. Determine também o instante no qual ela inverte o seu sentido.

Solução

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ &= 6t^2 - 8t + 2 \\ &= 2(3t^2 - 4t + 1) \\ &= 2(3t - 1)(t - 1) \end{aligned}$$

A velocidade instantânea é zero quando $t = \frac{1}{3}$ e $t = 1$. Logo, nesses dois instantes a partícula está em repouso. A partícula move-se para a direita quando v é positivo e move-se para a esquerda quando v é negativo. Determinamos o sinal de v para os vários intervalos de t e os resultados estão dados na Tabela 1.

Tabela 1

	$3t - 1$	$t - 1$	*Conclusão*
$t < \frac{1}{3}$	$-$	$-$	v é positivo, e a partícula move-se para a direita
$t = \frac{1}{3}$	0	$-$	v é zero e a partícula está mudando de sentido da direita para a esquerda
$\frac{1}{3} < t < 1$	$+$	$-$	v é negativo e a partícula move-se para a esquerda
$t = 1$	$+$	0	v é zero e a partícula está mudando de sentido, da esquerda para a direita
$1 < t$	$+$	$+$	v é positivo e a partícula move-se para a direita

Tabela 2

t	s	v
-1	-9	16
0	-1	2
$\frac{1}{3}$	$-\frac{19}{27}$	0
1	-1	0
2	3	10

O movimento da partícula, indicado na Figura 2, é ao longo de uma reta horizontal; contudo, o comportamento do movimento está indicado acima da reta. A Tabela 2 dá os valores de s e v para valores específicos de t.

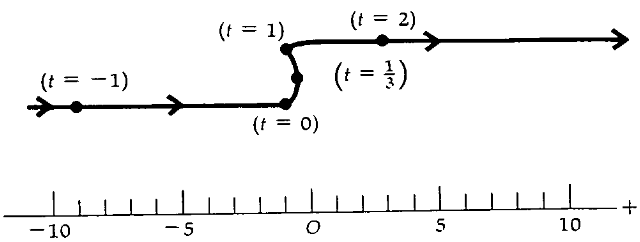


FIGURA 2

EXEMPLO 2 Uma bola é atirada verticalmente para cima a partir do chão, com uma velocidade inicial de 64 m/s. Se o sentido positivo da distância do ponto de partida for para cima, a equação do movimento será

$$s = -16t^2 + 64t$$

Seja t o número de segundos decorridos desde que a bola foi atirada e s o número de metros da distância percorrida pela bola a partir do ponto inicial em t s. (a) Ache a velocidade instantânea da bola ao fim de 1 s. A bola está subindo ou descendo após 1 s? (b) Ache a velocidade instantânea da bola depois de 3 s. A bola está subindo ou descendo após 3 s? (c) Quantos segundos a bola leva para atingir o seu ponto mais alto? (d) Qual a altura máxima atingida pela bola? (e) Ache as velocidades escalares após 1 e de 3 s. (f) Decorridos quantos segundos a bola atinge o solo? (g) Ache a velocidade instantânea da bola quando ela chega ao chão.

Solução Seja $v(t)$ o número de metros por segundo, sendo a velocidade instantânea da bola no instante t s. Então $v(t) = ds/dt$,

$$v(t) = -32t + 64$$

(a) $v(1) = -32(1) + 64$; isto é, $v(1) = 32$; assim, ao fim de 1 s a bola estará subindo com uma velocidade instantânea de 32 m/s.

(b) $v(3) = -32(3) + 64$; isto é, $v(3) = -32$; assim, após 3 s a bola estará caindo com uma velocidade instantânea de -32 m/s.

(c) A bola atinge o seu ponto mais alto quando o sentido do movimento muda, isto é, quando $v(t) = 0$. Obtemos $-32t + 64 = 0$. Assim, $t = 2$.

(d) Quando $t = 2$, $s = 64$; logo, o ponto mais alto atingido pela bola está a 64 m do ponto inicial.

(e) $|v(t)|$ é o número de metros por segundo da velocidade escalar em t s $|v(1)| = 32$ e $|v(3)| = 32$.

(f) A bola irá atingir o chão quando $s = 0$. No caso, temos $-16t^2 + 64t = 0$, donde obtemos $t = 0$ e $t = 4$. Assim sendo, a bola atinge o solo em 4 s.

(g) $v(4) = -64$; quando a bola atinge o solo, sua velocidade instantânea é -64 m/s.

A Tabela 3 dá valores de s e de v para alguns valores específicos de t. O movimento da bola está indicado na Figura 3. Supusemos que o movimento tenha ocorrido na vertical. O comportamento do movimento está indicado à esquerda da reta.

Tabela 3

t	s	v
0	0	64
$\frac{1}{2}$	28	48
1	48	32
2	64	0
3	48	-32
$\frac{7}{2}$	28	-48
4	0	-64

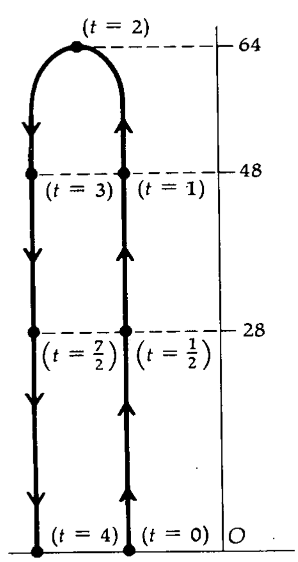


FIGURA 3

A velocidade no movimento retilíneo corresponde ao conceito mais geral de taxa de variação instantânea. Por exemplo, se a partícula move-se ao longo de uma linha reta de acordo com a equação $s = f(t)$, a velocidade da partícula em t unidades de tempo é determinada pela derivada de s com respeito a t. Já que a velocidade pode ser interpretada como uma taxa de variação da distância por unidade de variação do tempo, a derivada de s com respeito a t é a taxa de variação de s por unidade de variação de t.

Da mesma forma, se uma quantidade y for uma função de uma quantidade x, podemos expressar a taxa de variação de y por unidade de variação de x. A discussão é análoga à discussão da inclinação de uma reta tangente ao gráfico e à de velocidade instantânea de uma partícula movendo-se em uma reta.

Se a relação funcional entre y e x for dada por

$$y = f(x)$$

e se x variar do valor x_1 até $x_1 + \Delta x$, então y variará de $f(x_1)$ até $f(x_1 + \Delta x)$. Assim, a variação de y, a qual denotamos por Δy, é $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ quando a variação de x for Δx. A taxa média de variação de y por unidade de variação de x, quando x variar de x_1 a $x_1 + \Delta x$, será então,

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2}$$

Se o limite desse quociente existir quando $\Delta x \to 0$, esse limite será o que intuitivamente consideramos como a taxa de variação instantânea de y por unidade de variação de x em x_1. De acordo com essas considerações, temos a definição a seguir.

3.4.2 DEFINIÇÃO Seja $y = f(x)$; a **taxa de variação instantânea de y por unidade de variação de x em x_1** é $f'(x_1)$ ou, equivalentemente, a derivada de y com respeito a x em x_1, se ela existir no ponto x_1.

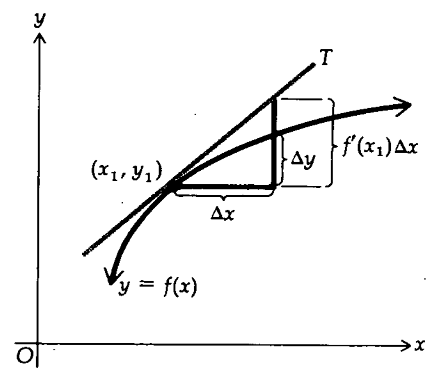


FIGURA 4

Ilustremos geometricamente; seja $f'(x_1)$ a taxa de variação instantânea de y por unidade de variação de x em x_1. Então, se $f'(x_1)$ for multiplicado por Δx (variação de x), temos a variação que ocorreria em y se o ponto (x, y) se movesse ao longo da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto (x_1, y_1). Veja a Figura 4. A taxa média de variação de y por unidade de variação de x é dada pela fração em (2), e se essa fração for multiplicada por Δx, obteremos Δy, que é a variação real de y causada por uma variação de Δx em x, quando o ponto (x, y) move-se ao longo do gráfico.

EXEMPLO 3 Seja $V(x)$ cm³ o volume de um cubo com x cm de lado, use a calculadora para calcular a taxa média de variação de $V(x)$ em relação a x, quando x varia de (a) 3,000 a 3,200; (b) 3,000 a 3,100; (c) 3,000 a 3,010; (d) 3,000 a 3,001. (e) Qual será a taxa de variação instantânea de $V(x)$ em relação a x quando x é 3?

Solução A taxa média de variação de $V(x)$ em relação a x, quando x varia de x_1 a $x_1 + \Delta x$ é

$$\frac{V(x_1 + \Delta x) - V(x_1)}{\Delta x}$$

(a) $x_1 = 3{,}000$, $\Delta x = 0{,}200$

$$\frac{V(3{,}200) - V(3{,}000)}{0{,}200} = \frac{(3{,}200)^3 - (3{,}000)^3}{0{,}200}$$
$$= 28{,}84$$

(b) $x_1 = 3{,}000$, $\Delta x = 0{,}100$

$$\frac{V(3{,}100) - V(3{,}000)}{0{,}100} = \frac{(3{,}100)^3 - (3{,}000)^3}{0{,}100}$$
$$= 27{,}91$$

(c) $x_1 = 3{,}000$, $\Delta x = 0{,}010$

$$\frac{V(3{,}010) - V(3{,}000)}{0{,}010} = \frac{(3{,}010)^3 - (3{,}000)^3}{0{,}010}$$
$$= 27{,}09$$

(d) $x_1 = 3{,}000$, $\Delta x = 0{,}001$

$$\frac{V(3{,}001) - V(3{,}000)}{0{,}001} = \frac{(3{,}001)^3 - (3{,}000)^3}{0{,}001}$$
$$= 27{,}01$$

Em (a) vemos que quando a medida do lado do cubo varia de 3,000 a 3,200 cm, a variação do volume é de 28,84 cm³ por centímetro de variação do comprimento do lado. Interpretamos (b) e (d) de forma similar.

(e) A taxa instantânea de variação de $V(x)$ em relação a x quando x é 3 é $V'(3)$.

$$V'(x) = 3x^2 \qquad V'(3) = 27$$

Logo, quando o comprimento do lado do cubo é 3 cm, a taxa de variação instantânea do volume é 27 cm³ por centímetro de variação do comprimento do lado.

EXEMPLO 4 Em um circuito elétrico, se E volts for a força eletromotriz, R ohms for a resistência e I ampères for a corrente, segue da lei de Ohm que

$$IR = E$$

Supondo que E seja uma constante positiva, mostre que R diminui a uma taxa proporcional ao inverso do quadrado de I.

Solução Resolvendo a equação dada para R, obtemos

$$R = E \cdot I^{-1}$$

Derivando R em relação a I, temos

$$\frac{dR}{dI} = -E \cdot I^{-2}$$

$$\frac{dR}{dI} = -\frac{E}{I^2}$$

Essa igualdade estabelece que a taxa de variação de R em relação a I é negativa e proporcional a $\frac{1}{I^2}$. Portanto, R diminui a uma taxa proporcional ao inverso do quadrado de I.

Em Economia, a variação de uma quantidade em relação a outra pode ser descrita pelos conceitos de *média* ou de *marginal*. O conceito de média expressa a variação de uma quantidade em relação à variação especificada dos valores de uma segunda quantidade, enquanto que o conceito de marginal refere-se à variação instantânea na primeira quantidade que resulta de uma pequena variação na segunda quantidade. Vamos começar nossos exemplos em Economia com as definições de custo médio e custo marginal. Para definir precisamente o conceito de marginal usamos a noção de limite que nos leva à derivada.

Suponhamos que $C(x)$ seja o custo total da produção de x unidades de certa mercadoria. A função C é chamada **função custo total**. Em circunstâncias normais x e $C(x)$ são positivas. Uma vez que x representa o número de unidades de certa mercadoria, x é geralmente um inteiro não-negativo. Para podermos, contudo, aplicar o cálculo, vamos supor que x seja um número real não negativo que garanta os requisitos de continuidade à função C.

Obtemos o **custo médio** da produção de cada unidade de uma mercadoria dividindo o custo total pelo número de unidades produzidas. Se $Q(x)$ for o custo médio,

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

e Q é chamada **função custo médio**.

Suponha agora que o número de unidades de uma dada produção seja x_1, e que esse número varie por um valor Δx. Então, a variação no custo total será dada por $C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)$ e a variação média no custo total em relação à variação no número de unidades produzidas será dada por

$$\frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

Os economistas usam o termo *custo marginal* para o limite do quociente quando Δx tende a zero, desde que o limite exista. Esse limite, sendo a derivada de C em x_1, estabelece que o **custo marginal**, quando $x = x_1$, é dado por $C'(x_1)$, se existir. A função C' é chamada de **função custo marginal**, e $C'(x_1)$ pode ser interpretado como a taxa de variação do custo total quando x_1 unidades são produzidas.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Suponha que $C(x)$ seja o custo total da fabricação de x brinquedos e

$$C(x) = 110 + 4x + 0{,}02x^2$$

(a) A função custo marginal será C' e

$$C'(x) = 4 + 0{,}04x$$

(b) A função custo marginal, quando $x = 50$ será $C'(50)$, e

$$\begin{aligned} C'(50) &= 4 + 0{,}04(50) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Logo, a taxa de variação do custo total, quando forem fabricados 50 brinquedos, será de \$6 por brinquedo.

(c) O custo real da fabricação do qüinquagésimo primeiro brinquedo será $C(51) - C(50)$ e

$$\begin{aligned} C(51) - C(50) & [110 + 4(51) + 0{,}02(51)^2] - [110 + 4(50) + 0{,}02(50)^2] \\ &= 366{,}02 - 360 \\ &= 6{,}02 \end{aligned}$$

Note que as respostas em (b) e (c) diferem por 0,02. Esta discrepância ocorre porque o custo marginal é a taxa de variação instantânea de $C(x)$ em relação a uma unidade de variação em x. Assim, $C'(50)$ é o número aproximado da quantia em dinheiro gasta na produção do qüinquagésimo primeiro brinquedo. ◀

Observe que o cálculo de $C'(50)$ é muito mais simples do que o cálculo de $C(51) - C(50)$. Os economistas, freqüentemente, aproximam o custo da produção de uma unidade adicional usando a função custo marginal. Especificamente, $C'(k)$ é o custo aproximado da $(k + 1)$ésima unidade depois que as k primeiras unidades foram produzidas.

Outra função importante em Economia é a **função rendimento total**, denotada por R, e

$$R(x) = px$$

onde $R(x)$ é o rendimento total recebido quando x unidades são vendidas à quantia de p por unidade.

O **rendimento marginal**, quando $x = x_1$, é dado por $R'(x_1)$, se existir. A função R' é chamada **função rendimento marginal**. $R'(x_1)$ pode ser positivo, negativo ou zero, e pode ser interpretado como a taxa de variação do rendimento total quando x_1 unidades são vendidas. $R'(k)$ é o rendimento aproximado da venda da $(k + 1)$ésima unidade depois que k unidades tiverem sido vendidas.

EXEMPLO 5 Suponha que $R(x)$ seja o rendimento total recebido pela venda de x mesas e

$$R(x) = 300x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Ache (a) a função rendimento marginal; (b) o rendimento marginal quando $x = 40$; (c) o rendimento real da venda da quadragésima primeira mesa.

Solução (a) A função rendimento marginal é R' e

$$R'(x) = 300 - x$$

(b) O rendimento marginal quando $x = 40$ é dado por $R'(40)$ e

$$\begin{aligned} R'(40) &= 300 - 40 \\ &= 260 \end{aligned}$$

Logo, a taxa de variação do rendimento total quando 40 mesas são vendidas é de \$260 por unidade

(c) O rendimento real da venda da quadragésima primeira mesa é $R(41) - R(40)$ e

$$R(41) - R(40) = \left[300(41) - \frac{(41)^2}{2}\right] - \left[300(40) - \frac{(40)^2}{2}\right]$$

$$= [12.300 - 840{,}50] - [12.000 - 800]$$
$$= 11.459{,}50 - 11.200$$
$$= 259{,}50$$

Logo, o rendimento real da venda da quadragésima primeira mesa é \$259,50.

Observe que na parte (b) do Exemplo 5 obtivemos $R'(40) = 260$, e \$260 é uma aproximação do rendimento recebido da venda da quadragésima primeira mesa, que de (c) é \$259,50.

EXERCÍCIOS 3.4

Nos Exercícios de 1 a 8, uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula a partir do ponto O em t s. Ache a velocidade instantânea $v(t)$ cm/s em t s e então ache $v(t_1)$ para o valor de t_1 dado.

1. $s = 3t^2 + 1;\ t_1 = 3$
2. $s = 8 - t^2;\ t_1 = 5$
3. $s = \dfrac{1}{4t};\ t_1 = \frac{1}{2}$
4. $s = \dfrac{3}{t^2};\ t_1 = -2$
5. $s = 2t^3 - t^2 + 5;\ t_1 = -1$
6. $s = 4t^3 + 2t - 1;\ t_1 = \frac{1}{2}$
7. $s = \dfrac{2t}{4+t};\ t_1 = 0$
8. $s = \dfrac{1}{t} + \dfrac{3}{t^2};\ t_1 = 2$

Nos Exercícios de 9 a 14, o movimento de uma partícula é ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula a partir do ponto O, em t s. A direção positiva é à direita. Determine os intervalos de tempo em que a partícula move-se para a direita e para a esquerda. Determine também quando a partícula reverte o sentido do movimento. Mostre o comportamento do movimento através de uma figura similar à Figura 2 e escolha valores de t ao acaso, mas inclua os valores de t em que a partícula muda o sentido do movimento.

9. $s = t^3 + 3t^2 - 9t + 4$
10. $s = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8$
11. $s = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 2t + 4$
12. $s = \dfrac{t}{1+t^2}$
13. $s = \dfrac{t}{9+t^2}$
14. $s = \dfrac{t+1}{t^2+4}$
15. Um objeto cai do repouso de acordo com a equação $s = -16t^2$, onde s cm é a distância do objeto ao ponto de partida em t s e o sentido positivo é para cima. Se uma pedra caí de um edifício com 2560 cm de altura, ache (a) a velocidade instantânea da pedra 1s depois de iniciada a queda; (b) a velocidade instantânea da pedra 2 s depois da queda; (c) quanto tempo leva para a pedra atingir o solo; (d) a velocidade instantânea da pedra quando ela atinge o solo.
16. Uma pedra cai de uma altura de 64 m. Se s m for a altura da pedra t s após ter iniciado a queda, então $s = -16t^2 + 64$. (a) Quanto tempo leva para a pedra atingir o solo? (b) Ache a velocidade instantânea da pedra quando ela atingir o solo.
17. Uma bola de bilhar é atingida e movimenta-se em linha reta. Se s cm for a distância da bola de sua posição inicial após t s, então $s = 100t^2 + 100t$. Com qual velocidade a bola atingirá a tabela da posição inicial que está a 39 cm?
18. Se uma pedra for atirada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 32 cm/s, então $s = -16t^2 + 32t$, onde s cm é a distância da pedra ao ponto inicial, em t s e o sentido positivo é para cima. Ache (a) a velocidade média da pedra no intervalo de tempo $\frac{3}{4} \leqslant t \leqslant \frac{5}{4}$; (b) a velocidade instantânea da pedra em $t = \frac{3}{4}$ s e em $t = \frac{5}{4}$ s; (c) a velocidade escalar da pedra em $t = \frac{3}{4}$ s e em $t = \frac{5}{4}$ s; (d) a velocidade média no intervalo de tempo $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}$; (e) quantos segundos irão decorrer até que a pedra atinja o ponto mais alto; (f) qual a altura máxima atingida; (g) quantos segundos irão decorrer até que a pedra chegue ao chão; (h) a velocidade instantânea da pedra quando ela atingir o solo. Mostre o comportamento do movimento através de uma figura similar à Figura 3.
19. Se uma bola for impulsionada de tal forma que ela adquira uma velocidade inicial de 24 cm/s ao descer um certo plano inclinado, então $s = 24t + 10t^2$, onde s cm é a distância da bola ao ponto inicial em t s e o sentido positivo é o de descida do plano inclinado. (a) Qual será a velocidade instantânea da bola em t_1 s? (b) Quanto tempo levará para que a velocidade aumente para 48 cm/s?
20. Um foguete é lançado verticalmente para cima e após t s ele está a s m do solo, onde $s = 560t - 16t^2$ e o sentido positivo é para cima. Ache (a) a velocidade do foguete 2 s após o lançamento e (b) quanto tempo levará para o foguete atingir sua altura máxima.
21. Se $A(x)$ cm² for a área de um quadrado e s cm for o comprimento de cada lado, ache a taxa de variação média de $A(x)$ em relação a x, quando x varia de (a) 4,000 a 4,600; (b) 4,000 a 4,300; (c) 4,000 a 4,100; (d) 4,000 a 4,050. (e) Qual será a taxa instantânea de variação de $A(x)$ com relação a x, quando x for 4,000?
22. O comprimento de um retângulo é 4 cm a mais do que sua largura e essa diferença de 4 cm mantém-se quando o retângulo aumenta de tamanho. Se $A(w)$ cm² for a área do retângulo e w cm for a largura, ache a taxa média de variação de $A(w)$ com respeito a w, quando w varia de (a) 3,000 a 3,200;

(b) 3,000 a 3,100; (c) 3,000 a 3,010; (d) 3,000 a 3,001. (e) Qual a taxa de variação instantânea de $A(w)$ com relação a w_1 quando w for 3?

23. A lei de Boyle para a expansão de um gás é $PV = C$, onde P é a pressão em quilogramas força por unidade de área, V é o número de unidades de volume do gás e C é uma constante. Mostre que V decresce a única taxa proporcional ao inverso do quadrado de P.

24. Da lei de Boyle para a expansão de um gás, dada no Exercício 23, ache a taxa de variação instantânea de V em relação a P, quando $P = 4$ e $V = 8$.

25. Uma frente fria aproxima-se de uma região. A temperatura é T graus t horas após a meia-noite e

$$T = 0{,}1(400 - 40t + t^2) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 12$$

(a) Ache a taxa de variação média de T em relação a t entre 5h e 6h; (b) ache a taxa de variação de T em relação a t às 5h.

26. Estima-se que um empregado de uma firma que faz molduras para quadros possa pintar y molduras x horas, após começar o trabalho às 8 horas da manhã e

$$y = 3x + 8x^2 - x^3 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 4$$

(a) Ache a taxa segundo a qual o empregado estará pintando às 10h; (b) ache o número de molduras que o empregado pinta entre 10h e 11h.

27. Se a água estiver sendo drenada de uma piscina e V litros for o volume de água na piscina t min após começar o escoamento, onde $V = 250\,(1600 - 80t + t^2)$, ache (a) a taxa média segundo a qual a água deixa a piscina durante os primeiros 5 min e (b) quão rápido a água está fluindo da piscina 5 min após o início do escoamento.

28. Um balão mantém a forma de uma esfera enquanto está sendo inflado. Ache a taxa de variação da área da superfície com respeito ao raio no instante em que o raio for 2 m.

29. A importância no custo total da fabricação de x relógios de uma certa fábrica é dada por $C(x) = 1500 + 3x + x^2$. Ache (a) a função custo marginal; (b) o custo marginal quando $x = 40$; (c) o custo real da fabricação do quadragésimo primeiro relógio.

30. Se $C(x)$ for o custo total da fabricação de x pesos de papel e

$$C(x) = 200 + \frac{50}{x} + \frac{x^2}{5}$$

ache (a) a função custo marginal; (b) o custo marginal quando $x = 10$; (c) o custo real da fabricação do décimo primeiro peso de papel.

31. Se $R(x)$ for o rendimento total recebido das vendas de x aparelhos de televisão e $R(x) = 600x - \frac{1}{20}x^3$, ache (a) a função rendimento marginal; (b) o rendimento marginal quando $x = 20$; (c) o rendimento real da venda da vigésima primeira televisão.

32. O rendimento total recebido da venda de x carteiras é $R(x)$, e $R(x) = 200x - \frac{1}{3}x^2$. Ache (a) a função rendimento marginal; (b) o rendimento marginal quando $x = 30$; (c) o rendimento real da venda trigésima primeira carteira.

*Nos Exercícios de 33 a 35, use o conceito de taxa relativa, definido como segue se $y = f(x)$, a **taxa relativa da variação de y** com relação a x em x_1 é dada por $\dfrac{f'(x_1)}{f(x_1)}$ ou, equivalentemente, $\dfrac{dy/dx}{y}$ calculada em $x = x_1$.*

33. O rendimento anual bruto de uma empresa t anos a partir de 1º de janeiro de 1988 é p milhões e $p = \frac{2}{5}t^2 + 2t + 10$. Ache (a) a taxa em que o rendimento bruto estava crescendo em 1º de janeiro de 1990; (b) a taxa de crescimento relativo do rendimento bruto em 1º de janeiro de 1990 com aproximação de um-décimo da percentagem; (c) a taxa em que o rendimento bruto deveria crescer em 1º de janeiro de 1994; (d) a taxa antecipada de crescimento relativo do rendimento bruto em 1º de janeiro de 1994 até 0,1 por cento.

34. Uma empresa inicia seus negócios em 1º de abril de 1987. Os rendimentos anuais brutos da firma após t anos de operação são de p, onde $p = 50.000 + 18.000\,t + 600t^2$. (a) Ache a taxa segundo a qual os rendimentos brutos cresceram em 1º de abril de 1989; (b) ache a taxa de crescimento relativo em 1º de abril de 1989, com aproximação de 0,1 por cento; (c) ache a taxa em que o rendimento bruto deverá estar crescendo em 1º de abril de 1997; (d) a taxa prevista de crescimento relativo do rendimento bruto em 1º de abril de 1997, com aproximação de 0,1 por cento.

35. Suponha que o número de pessoas da população de uma determinada cidade t anos após 1º de janeiro de 1986 será $40t^2 + 200t + 10.000$. (a) Ache a taxa segundo a qual a população terá crescido, em 1º de janeiro de 1995. (b) Ache a taxa de crescimento relativo da população, estimada em 1º de janeiro de 1995 com aproximação de 0,1%. (c) Ache a taxa segundo a qual a população estará crescendo em 1º de janeiro de 2001. (d) Ache a taxa de crescimento relativo da população, estimada em 1º de janeiro de 2001 com aproximação de 0,1 por cento.

36. Duas partículas A e B movem-se para a direita numa reta horizontal e partem de um ponto O. Seja s cm a distância orientada do ponto O em t s. As equações de movimento são

$$s = 4t^2 + 5t \quad \text{(para a partícula } A\text{)}$$
$$s = 7t^2 + 3t \quad \text{(para a partícula } B\text{)}$$

Se $t = 0$ no começo, para que valores de t a velocidade da partícula A supera a velocidade de B?

37. O lucro de um varejista é \$100y quando são gastos diariamente \$$x$ em propaganda e $y = 2.500 + 36x - 0{,}2x^2$. Use a derivada para determinar se seria lucrativo aumentar a verba de propaganda, considerando a verba diária de propaganda (a) \$60 e (b) \$ 300. (c) Qual seria o valor máximo de x abaixo do qual seria lucrativo aumentar a verba de propaganda?

38. Mostre que para toda função linear f, a taxa média de variação de $f(x)$ quando x varia de x_1 até $x_1 + k$ é a mesma que a taxa de variação instantânea $f(x)$ em x_1.

3.5 DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Para mostrar que a função seno tem uma derivada, aplicamos a identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \tag{1}$$

bem como os Teoremas 2.8.2 e 2.8.5

Seja f a função seno, assim

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

Da definição de derivada,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} \end{aligned}$$

A fórmula (1) para $\operatorname{sen}(x + \Delta x)$ é usada para obter

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos(\Delta x) + \cos x \operatorname{sen}(\Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} x \right) + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \cos x \right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \end{aligned} \tag{2}$$

Do Teorema 2.8.5,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \tag{3}$$

e do Teorema 2.8.2,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} = 1 \tag{4}$$

Substituindo (3) e (4) em (2), obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= -0 \cdot \operatorname{sen} x + \cos x \cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Provamos, assim, o seguinte teorema:

3.5.1 TEOREMA $\boxed{D_x(\operatorname{sen} x) = \cos x}$

EXEMPLO 1 Ache $f'(x)$ se

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$$

Solução Encontramos a derivada do produto de duas funções aplicando o Teorema 3.3.6.

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 D_x(\operatorname{sen} x) + D_x(x^2) \operatorname{sen} x \\ &= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Para encontrar a derivada da função co-seno, procedemos da mesma forma que com a função seno. Aqui aplicamos a identidade

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \tag{5}$$

Se g for a função co-seno, então

$$g(x) = \cos x$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

A fórmula (5) para $\cos(x + \Delta x)$ é usada para obter

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos(\Delta x) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x}\left(\lim_{\Delta x \to 0} \cos x\right) - \left(\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} x\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \tag{6}$$

Substituindo (3) e (4) em (6), obtemos

$$g'(x) = -0 \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot 1$$
$$= -\operatorname{sen} x$$

O teorema a seguir foi, então, provado.

3.5.2 TEOREMA $\boxed{D_x (\cos x) = -\operatorname{sen} x}$

EXEMPLO 2 Ache $\dfrac{dy}{dx}$ se

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - 2 \cos x}$$

Solução Aplicamos o Teorema 3.3.7 (derivada de um quociente).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - 2 \cos x)\, D_x(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \cdot D_x(1 - 2 \cos x)}{(1 - 2 \cos x)^2}$$

$$= \frac{(1 - 2 \cos x)(\cos x) - \operatorname{sen} x(2 \operatorname{sen} x)}{(1 - 2 \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - 2(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}{(1 - 2 \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - 2}{(1 - 2 \cos x)^2}$$

As derivadas das funções tangente, co-tangente, secante e co-secante são obtidas de identidades trigonométricas envolvendo o seno e o co-seno, bem como suas derivadas e teoremas sobre derivação. Para a derivada da tangente aplicamos as identidades

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

3.5.3 TEOREMA $D_x(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$

Prova

$$\begin{aligned} D_x(\operatorname{tg} x) &= D_x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x \cdot D_x(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \cdot D_x(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

■

3.5.4 TEOREMA $D_x(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

A demonstração desse teorema será deixada como exercício (veja o Exercício 1). Ela é análoga à do Teorema 3.5.3. As seguintes identidades serão usadas:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

3.5.5 TEOREMA $D_x(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$

Prova

$$\begin{aligned} D_x(\sec x) &= D_x\left(\frac{1}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x \cdot D_x(1) - 1 \cdot D_x(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot 0 - 1 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\ &= \sec x \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

■

EXEMPLO 3 Calcule

$$\frac{d}{dx}(\text{tg } x \sec x)$$

Solução

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\text{tg } x \sec x) &= \text{tg } x \cdot \frac{d}{dx}(\sec x) + \frac{d}{dx}(\text{tg } x) \cdot \sec x \\ &= \text{tg } x(\sec x \text{ tg } x) + \sec^2 x(\sec x) \\ &= \sec x \text{ tg}^2 x + \sec^3 x\end{aligned}$$

3.5.6 TEOREMA $D_x(\text{cosec } x) = -\text{cosec } x \text{ cotg } x$

A demonstração desse teorema também será deixada como exercício (veja o Exercício 2).

Num curso de Trigonometria, os gráficos das funções são esboçados por meio de considerações intuitivas. Podemos agora obter esses gráficos de uma maneira mais formal, usando as derivadas das funções trigonométricas. Primeiro discutiremos os gráficos do seno e do co-seno. Para cada uma dessas funções o domínio será o conjunto de todos os números reais e a imagem será $[-1,1]$. Seja

$$f(x) = \text{sen } x \quad f'(x) = \cos x$$

Para determinar onde o gráfico tem uma tangente horizontal, resolvemos $f'(x) = 0$ e obtemos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é qualquer inteiro. Para esses valores de x, sen x é $+1$ ou -1 e esses são o maior e o menor valor que sen x assume. O gráfico intercepta o eixo x nos pontos onde sen $x = 0$, isto é, nos pontos $x = k\pi$, onde k é qualquer inteiro. Além disso, quando k for um inteiro par, $f'(k\pi) = 1$ e quando k for um inteiro ímpar, $f'(k\pi) = -1$. Assim, nos pontos de intersecção do gráfico com o eixo x, a inclinação da reta tangente é $+1$ ou -1. Dessas informações traçamos o esboço do gráfico da função seno, mostrado na Figura 1.

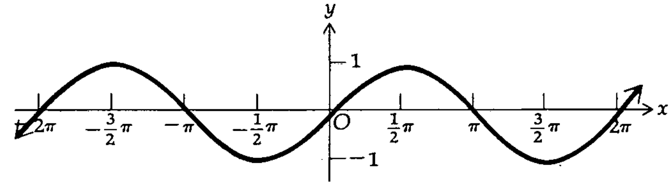


FIGURA 1

Para o gráfico da função co-seno, usamos a identidade

$$\cos x = \text{sen}(x + \tfrac{1}{2}\pi)$$

Assim, o gráfico do co-seno é obtido do gráfico do seno, transladando o eixo y $\frac{\pi}{2}$ unidades para a direita. Veja a Figura 2.

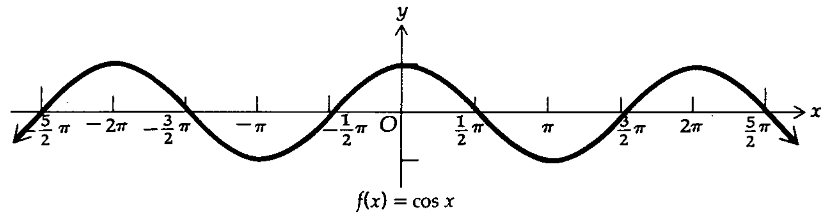


FIGURA 2

EXEMPLO 4 Ache uma equação da reta tangente ao gráfico da função co-seno no ponto $(\frac{3}{2}\pi, 0)$.

Solução Se $f(x) = \cos x, f'(x) = -\text{sen } x$. Então, $f'(\frac{3}{2}\pi) = -\text{sen } \frac{3}{2}\pi$. Como $\text{sen } \frac{3}{2}\pi = -1, f'(\frac{3}{2}\pi) = 1$. Da forma ponto-inclinação da equação da reta tangente tendo inclinação 1 e passando pelo ponto $(\frac{3}{2}\pi, 0)$, temos

$$y - 0 = 1(x - \tfrac{3}{2}\pi)$$
$$y = x - \tfrac{3}{2}\pi$$

Consideremos agora o gráfico da função tangente. Como

$$\text{tg}(-x) = -\text{tg } x$$

o gráfico é simétrico com respeito à origem. Além disso,

$$\text{tg}(x + \pi) = \text{tg } x$$

e assim, a função tangente é periódica, com período fundamental π. A função tangente é contínua em todos os números de seu domínio, o qual é o conjunto de todo os números reais, exceto aqueles da forma $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, onde k é qualquer inteiro. A imagem é o conjunto de todos os números reais. Se k for um inteiro qualquer, tg $k\pi = 0$. Logo, o gráfico intercepta o eixo x nos pontos $(k\pi, 0)$. Seja

$$f(x) = \text{tg } x \qquad f'(x) = \sec^2 x$$

Como $f'(k\pi) = \sec^2 k\pi$ e $\sec^2 k\pi = 1$ para todo k inteiro, segue que onde o gráfico intercepta o eixo x, a inclinação da reta tangente é 1. Resolvendo $f'(x) = 0$ temos $\sec^2 x = 0$. Como $\sec^2 x \geqslant 1$ para todo x, concluímos que não existem retas tangentes horizontais.

Consideremos o intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$ no qual a tangente está definida,

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \text{tg } x = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

Como $\lim_{x \to \pi/2^-} \text{sen } x = 1$ e $\lim_{x \to \pi/2^-} \cos x = 0$, onde o cos x está tendendo a zero através de valores positivos,

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \text{tg } x = +\infty$$

Logo, a reta $x = \pi/2$ é uma assíntota vertical do gráfico. Na Tabela 1 estão alguns valores de x no intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$ e os valores correspondentes de tg x. Colocando num gráfico os pontos com coordenadas $(x, \text{tg} x)$, obtemos uma parte do gráfico, para x em $[0, \frac{1}{2}\pi]$.

Tabela 1

x	tg x
0	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$
$\frac{1}{4}\pi$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$

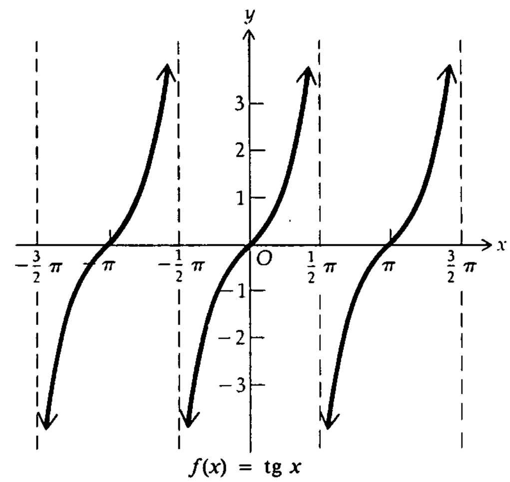


FIGURA 3

Considerando a simetria da função tangente com relação à origem, obtemos a parte do gráfico para x em $(-\frac{1}{2}\pi, 0]$. O período sendo π, completamos o gráfico que é mostrado na Figura 3.

Podemos obter o gráfico da função co-tangente a partir daquele da função tangente, usando a identidade

$$\text{cotg } x = -\text{tg } (\tfrac{\pi}{2} + x)$$

Da identidade acima, vemos que o gráfico da co-tangente é obtido do gráfico da tangente, transladando o eixo y em $\frac{\pi}{2}$ unidades e fazendo em seguida uma reflexão ao eixo x. Um esboço do gráfico da função co-tangente está na Figura 4.

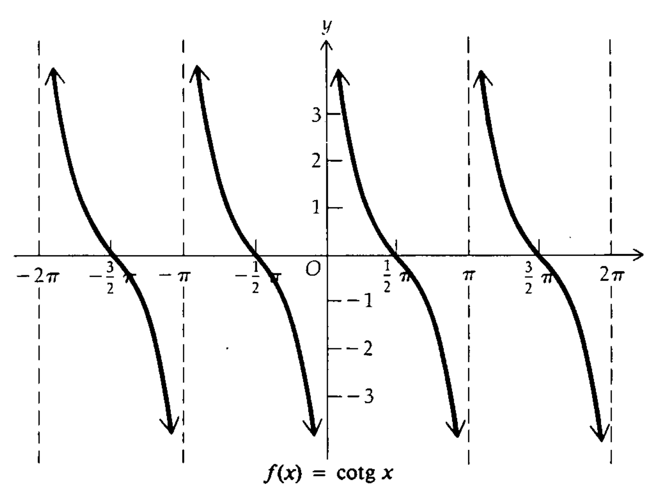


FIGURA 4

Como

$$\sec(x + 2\pi) = \sec x$$

a função secante é períodica, com período fundamental 2π. O domínio da função secante é o conjunto dos números reais, exceto aqueles da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é qualquer inteiro. A imagem é $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. A função é contínua em todos os números em seu domínio. Não há intersecção do gráfico com o eixo x, pois sec x não se anula nunca.

Usaremos a derivada para determinar se o gráfico tem alguma tangente horizontal. Seja

$$f(x) = \sec x \qquad f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$$

Resolvendo $f'(x) = 0$, resulta que $\sec x \operatorname{tg} x = 0$. Como $\sec x \neq 0$, $f'(x) = 0$ quando $\operatorname{tg} x = 0$, isto é, quando $x = k\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

Primeiro vamos considerar o gráfico para x em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$. Existem retas tangentes horizontais em $x = 0$ e $x = \pi$.

$$\lim_{x \to -\pi/2^+} \sec x = \lim_{x \to -\pi/2^+} \frac{1}{\cos x} = +\infty \qquad \lim_{x \to \pi/2^-} \sec x = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pi/2^+} \sec x = \lim_{x \to \pi/2^+} \frac{1}{\cos x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 3\pi/2^-} \sec x = \lim_{x \to 3\pi/2^-} \frac{1}{\cos x} = -\infty$$

Logo, as retas $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ são assíntotas verticais do gráfico.

Com as informações acima e marcando no gráfico alguns pontos, obtemos um esboço do gráfico da função secante para x em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Como o período é 2π, um esboço do gráfico está na Figura 5.

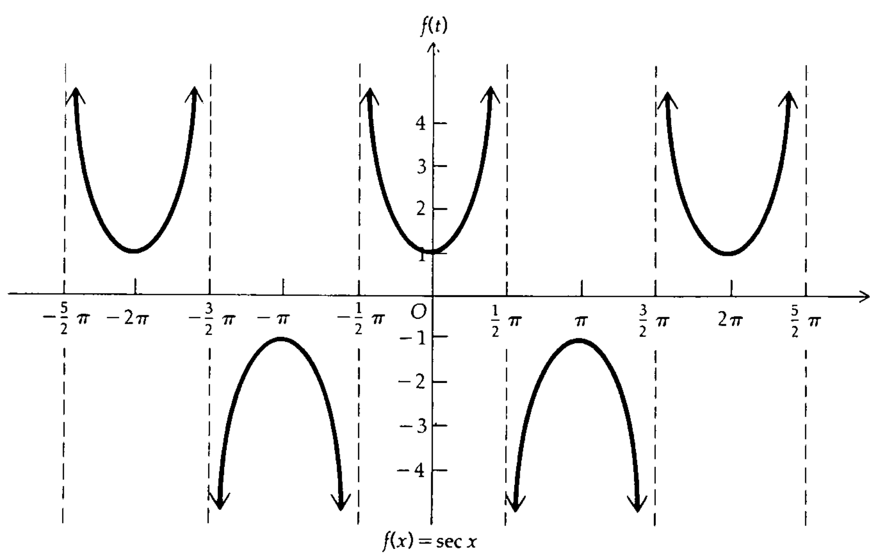
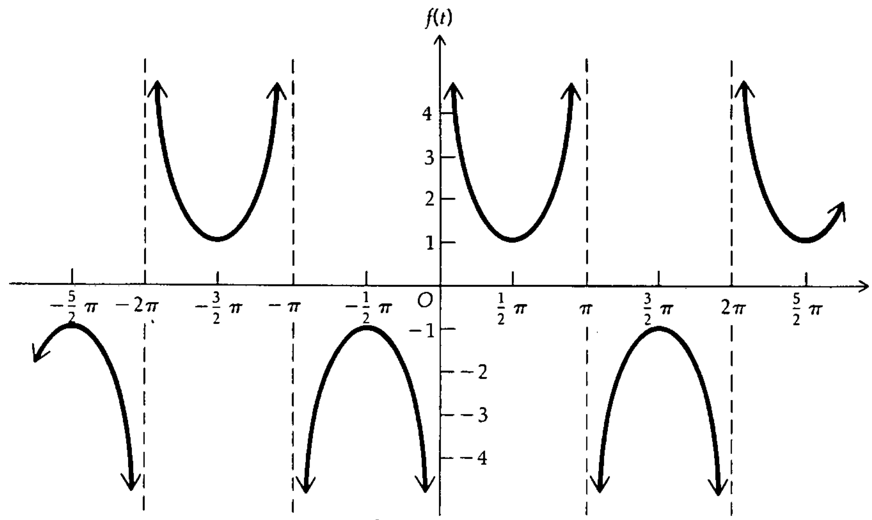


FIGURA 5

Da identidade

$$\operatorname{cosec} x = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Obtemos o gráfico da função co-secante a partir daquele da secante, transladando o eixo y em $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda. Um esboço do gráfico da função co-secante está na Figura 6.



$f(x) = \text{cosec } x$

FIGURA 6

EXERCÍCIOS 3.5

1. Prove: $D_x(\text{cotg } x) = -\text{cosec}^2 x$.
2. Prove: $D_x(\text{cosec } x) = -\text{cosec } x \text{ cotg } x$.

Nos Exercícios de 3 a 16, ache a derivada da função dada.

3. $f(x) = 3 \text{ sen } x$
4. $g(x) = \text{sen } x + \cos x$
5. $g(x) \text{ tg } x + \text{cotg } x$
6. $f(x) = 4 \sec x - 2 \text{ cosec } x$
7. $f(x) = 2t \cos t$
8. $f(x) = 4x^2 \cos x$
9. $g(x) = x \text{ sen } x + \cos x$
10. $g(y) = 3 \text{ sen } y - y \cos y$
11. $h(x) = 4 \text{ sen } x \cos x$
12. $f(x) = x^2 \text{ sen } x + 2x \cos x$
13. $f(x) = x^2 \cos x - 2x \text{ sen } x - 2 \cos x$
14. $h(y) = y^3 - y^2 \cos y + 2y \text{ sen } y + 2 \cos y$
15. $f(x) = 3 \sec x \text{ tg } x$
16. $f(t) = \text{sen } t \text{ tg } t$

Nos Exercícios de 17 a 30, calcule a derivada indicada.

17. $D_y(\text{cotg } y \text{ cosec } y)$
18. $D_x(\cos x \text{ cotg } x)$
19. $D_z\left(\dfrac{2 \cos z}{z + 1}\right)$
20. $D_t\left(\dfrac{\text{sen } t}{t}\right)$
21. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\text{sen } x}{1 - \cos x}\right)$
22. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x + 4}{\cos x}\right)$
23. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\text{tg } t}{\cos t - 4}\right)$
24. $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\text{cotg } y}{1 - \text{sen } y}\right)$
25. $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1 + \text{sen } y}{1 - \text{sen } y}\right)$
26. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\text{sen } x - 1}{\cos x + 1}\right)$
27. $D_x[(x - \text{sen } x)(x + \cos x)]$
28. $D_z[(z^2 + \cos z)(2z - \text{sen } z)]$
29. $D_t\left(\dfrac{2 \text{ cosec } t - 1}{\text{cosec } t + 2}\right)$
30. $D_y\left(\dfrac{\text{tg } y + 1}{\text{tg y} - 1}\right)$

Nos Exercícios de 31 a 42, ache $f'(a)$ para o valor de $f'(a)$.

31. $f(x) = x \cos x$; $a = 0$
32. $f(x) = x \text{ sen } x$; $a = \frac{3}{2}\pi$
33. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$; $a = \frac{1}{2}\pi$
34. $f(x) = \dfrac{\sec x}{x^2}$; $a = \pi$
35. $f(x) = x^2 \text{ tg } x$; $a = \pi$
36. $f(x) = x^2 \cos x - \text{sen } x$; $a = 0$
37. $f(x) = \text{sen } x(\cos x - 1)$; $a = \pi$
38. $f(x) = (\cos x + 1)(x \text{ sen } x - 1)$; $a = \frac{1}{2}\pi$
39. $f(x) = x \cos x + x \text{ sen } x$; $a = \frac{1}{4}\pi$
40. $f(x) = \text{tg } x + \sec x$; $a = \frac{1}{6}\pi$
41. $f(x) = 2 \text{ cotg } x - \text{cosec } x$; $a = \frac{2}{3}\pi$
42. $f(x) = \dfrac{1}{\text{cotg } x - 1}$; $a = \frac{3}{4}\pi$
43. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais, valores de $\dfrac{\text{sen}(\frac{1}{3}\pi + h) - \text{sen } \frac{1}{3}\pi}{h}$ quando h é 1; 0,5; 0,1; 0,01; 0,001 e h é −1; −0,5; −0,1; −0,01; −0,001. A que o quociente parece tender quando h se aproxima de 0? (b) Ache $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\text{sen}(\frac{1}{3}\pi + h) - \text{sen } \frac{1}{3}\pi}{h}$, interpretando-o como uma derivada.
44. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais valores de $\dfrac{\cos(\frac{5}{6}\pi + h) - \cos \frac{5}{6}\pi}{h}$ quando h é 1; 0,5; 0,1; 0,01; 0,001 e h é −1; −0,5; −0,1; −0,01; −0,001. A que o quociente parece estar tendendo quando se aproxima de 0? (b) Ache $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(\frac{5}{6}\pi + h) - \cos \frac{5}{6}\pi}{h}$, interpretando-o como uma derivada.

45. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais valores de $\dfrac{\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + h) - \operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi}{h}$ quando h é 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001, e h é −0,1; −0,01; −0,001; −0,0001; −0,00001. A que o quociente parece tender quando h aproxima-se de zero? (b) Ache $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\tan(\frac{1}{4}\pi + h) - \tan\frac{1}{4}\pi}{h}$, interpretando-o como uma derivada.

46. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais os valores de $\dfrac{\sec(\frac{1}{6}\pi + h) - \sec\frac{1}{6}\pi}{h}$ quando h é 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001 e h é −0,1; −0,01; −0,001; −0,0001; −0,00001. A que o quociente parece tender quando h aproxima-se de 0? (b) Ache $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sec(\frac{1}{6}\pi + h) - \sec\frac{1}{6}\pi}{h}$, interpretando-o como uma derivada.

47. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais os valores de $\dfrac{\cos x - \cos\frac{1}{6}\pi}{x - \frac{1}{6}\pi}$ quando x é $\frac{3}{20}\pi$, $\frac{19}{120}\pi$, $\frac{33}{200}\pi$, $\frac{199}{1200}\pi$, $\frac{333}{2000}\pi$ e x é $\frac{11}{60}\pi$, $\frac{7}{40}\pi$, $\frac{101}{600}\pi$, $\frac{67}{400}\pi$, $\frac{1001}{6000}\pi$. A que o quociente parece tender quando x se aproxima de $\frac{\pi}{6}$? (b) Ache $\lim\limits_{x \to \pi/6} \dfrac{\cos x - \cos\frac{1}{6}\pi}{x - \frac{1}{6}\pi}$, interpretando-o como uma derivada.

48. (a) Use uma calculadora para tabular, até quatro casas decimais, os valores de $\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi}{x - \frac{1}{3}\pi}$ quando x é $\frac{3}{10}\pi$, $\frac{19}{60}\pi$, $\frac{33}{100}\pi$, $\frac{199}{600}\pi$, $\frac{333}{1000}\pi$ e x é $\frac{11}{30}\pi$, $\frac{7}{20}\pi$, $\frac{101}{300}\pi$, $\frac{67}{200}\pi$, $\frac{1001}{3000}\pi$. A que o quociente parece tender quando x se aproxima de $\frac{\pi}{3}$? (b) Ache $\lim\limits_{x \to \pi/3} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi}{x - \frac{1}{3}\pi}$ interpretando-o como uma derivada.

49. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais os valores de $\dfrac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec}\frac{2}{3}\pi}{x - \frac{2}{3}\pi}$ quando, x é $\frac{3}{5}\pi$, $\frac{19}{30}\pi$, $\frac{33}{50}\pi$, $\frac{199}{300}\pi$, $\frac{333}{500}\pi$ e x é $\frac{11}{15}\pi$, $\frac{7}{10}\pi$, $\frac{101}{150}\pi$, $\frac{67}{100}\pi$, $\frac{1001}{1500}\pi$. A que parece tender o quociente quando x se aproxima de $\frac{2}{3}\pi$? (b) Ache $\lim\limits_{x \to 2\pi/3} \dfrac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec}\frac{2}{3}\pi}{x - \frac{2}{3}\pi}$ interpretando-o como uma derivada.

50. (a) Use uma calculadora para tabular, até quatro casas decimais, os valores de $\dfrac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg}\frac{3}{4}\pi}{x - \frac{3}{4}\pi}$ quando x é $\frac{29}{40}\pi$, $\frac{59}{80}\pi$, $\frac{299}{400}\pi$, $\frac{599}{800}\pi$, $\frac{2999}{4000}\pi$ e x é $\frac{31}{40}\pi$, $\frac{61}{80}\pi$, $\frac{301}{400}\pi$, $\frac{601}{800}\pi$, $\frac{3001}{4000}\pi$. A que o quociente parece tender quando x se aproxima de $\frac{3}{4}\pi$? (b) Ache $\lim\limits_{x \to 3\pi/4} \dfrac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg}\frac{3}{4}\pi}{x - \frac{3}{4}\pi}$, interpretando-o como uma derivada.

51. Ache uma equação da reta tangente ao gráfico da função seno no ponto (a) $x = 0$; (b) $x = \frac{\pi}{3}$; (c) $x = \pi$.

52. Ache uma equação da reta tangente ao gráfico da função coseno no ponto (a) $x = \frac{\pi}{2}$; (b) $x = -\frac{\pi}{2}$; (c) $x = \frac{\pi}{6}$.

53. Ache uma equação da reta tangente ao gráfico da função tangente no ponto (a) $x = 0$; (b) $x = \frac{\pi}{4}$; (c) $x = -\frac{\pi}{4}$.

54. Ache uma equação da reta tangente ao gráfico da função secante no ponto (a) $x = \frac{\pi}{4}$; (b) $x = -\frac{\pi}{4}$; (c) $x = \frac{3}{4}\pi$.

Nos Exercícios de 55 a 58, uma partícula move-se ao longo de uma linha reta de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula, da origem, em t s.
(a) Qual a velocidade instantânea da partícula em t s?
(b) Ache a velocidade instantânea da partícula em t_1 s para cada um dos valores de t_1.

55. $s = 4 \operatorname{sen} t$; t_1 é 0, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$ e π

56. $s = 6 \cos t$; t_1 é 0, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$ e π

57. $s = -3 \cos t$; t_1 é 0, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$ e π

58. $s = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} t$; t_1 é 0, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$ e π

59. Se um corpo com W kgf de peso é arrastado por um piso horizontal por uma força de F kgf de magnitude e numa direção que faz com o chão um ângulo de θ rad, F será dada por

$$F = \frac{kW}{k \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

onde k é uma constante chamada de coeficiente de atrito. Se $k = 0{,}5$, ache a taxa de variação instantânea de F em relação a θ quando (a) $\theta = \frac{\pi}{4}$; (b) $\theta = \frac{\pi}{2}$.

60. Um projétil é atirado por uma arma com um ângulo de elevação cuja medida em radianos é $\frac{1}{2}\alpha$ e com uma velocidade inicial de v_0 m/s. Se R m for o alcance do projétil, então

$$R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} \alpha \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$$

onde g m/s² é a aceleração devido à gravidade. (a) Se $v_0 = 480$, ache a taxa de variação de R com respeito a α quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (isto é, o ângulo de elevação mede $\frac{\pi}{4}$ rad). Tome $g = 10$. (b) Ache os valores de α para os quais $D_\alpha R > 0$.

3.6 A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO COMPOSTA E A REGRA DA CADEIA

Para encontrar a derivada de uma função composta usamos um dos importantes teoremas do Cálculo chamado de *regra da cadeia*. Antes de enunciar esse teorema, vamos dar três ilustrações mostrando como teoremas anteriores podem ser usados para determinar as derivadas de algumas funções compostas. Em cada ilustração, a expressão final da derivada será escrita sob uma forma nova para você, de modo que possamos associá-la com a regra da cadeia.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se

$$F(x) = (4x^2 + 1)^3$$

podemos obter $F'(x)$ aplicando duas vezes o Teorema 3.3.6 (a derivada de um produto). O cálculo é o seguinte:

$$F(x) = (4x^2 + 1)^2(4x^2 + 1)$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= (4x^2 + 1)^2 \cdot D_x(4x^2 + 1) + (4x^2 + 1) \cdot D_x[(4x^2 + 1)(4x^2 + 1)] \\ &= (4x^2 + 1)^2(8x) + (4x^2 + 1)[(4x^2 + 1)(8x) + (4x^2 + 1)(8x)] \\ &= (4x^2 + 1)^2(8x) + (4x^2 + 1)[2(4x^2 + 1)(8x)] \\ &= (4x^2 + 1)^2(8x) + 2[(4x^2 + 1)^2(8x)] \end{aligned}$$

Assim,

$$F'(x) = [3(4x^2 + 1)^2](8x) \tag{1}$$

Observe que F é a função composta $f \circ g$, onde $f(x) = x^3$ e $g(x) = 4x^2 + 1$; isto é,

$$\begin{aligned} F(x) &= f(g(x)) \\ &= f(4x^2 + 1) \\ &= (4x^2 + 1)^3 \end{aligned}$$

Como $f'(x) = 3x^2$ e $g'(x) = 8x$, temos de (1)

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{2}$$

◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se

$$G(x) = \text{sen } 2x$$

então, para encontrar $G'(x)$, podemos usar as identidades trigonométricas

$$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

e o Teorema 3.3.6. Temos

$$G(x) = 2 \text{ sen } x \cos x$$

$$\begin{aligned} G'(x) &= (2 \text{ sen } x)\, D_x(\cos x) + (2 \cos x)\, D_x(\text{sen } x) \\ &= (2 \text{ sen } x)(- \text{ sen } x) + (2 \cos x)(\cos x) \\ &= 2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) \end{aligned}$$

Logo,

$$G'(x) = (\cos 2x)(2) \tag{3}$$

Se tomamos $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = 2x$, então G é a função composta $f \circ g$, isto é,

$$\begin{aligned} G(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x) \\ &= \text{sen } 2x \end{aligned}$$

Como $f'(x) = \cos x$ e $g'(x) = 2$, podemos escrever (3) na forma

$$G'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{4}$$

◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se

$$H(x) = (\cos x)^{-1}$$

podemos calcular $H'(x)$ usando primeiro a identidade $(\cos x)^{-1} = \sec x$

$$H(x) = \sec x$$

$$H'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$= (-1)\frac{1}{\cos^2 x}(-\operatorname{sen} x)$$

Logo,

$$H'(x) = [-1(\cos x)^{-2}](-\operatorname{sen} x) \tag{5}$$

◀

Com $f(x) = x^{-1}$ e $g(x) = \cos x$, H é a função composta $f \circ g$; isto é,

$$H(x) = f(g(x))$$
$$= f(\cos x)$$
$$= (\cos x)^{-1}$$

como $f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$ e $g'(x) = -\operatorname{sen} x$, podemos escrever (5) na forma

$$H'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{6}$$

Observe que os segundos membros de (2), (4) e (6) são todos $f'(g(x))\, g'(x)$, que é o segundo membro da *regra* da cadeia, enunciada no teorema a seguir.

3.6.1 TEOREMA
A Regra da Cadeia

Se a função g for derivável em x e a função f for derivável em $g(x)$, então a função composta $f \circ g$ será derivável em x, e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) \tag{7}$$

Antes de apresentarmos uma demonstração da regra da cadeia, vamos dar duas outras ilustrações mostrando sua aplicação.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Sejam

$$f(x) = x^{10} \qquad g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$$

Então, a função composta $f \circ g$ definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$= (2x^3 - 5x^2 + 4)^{10}$$

Para aplicar (7), precisamos calcular $f'(g(x))$ e $g'(x)$. Como $f(x) = x^{10}$, $f'(x) = 10x^9$; assim

$$f'(g(x)) = 10[g(x)]^9$$

$$f'(g(x)) = 10(2x^3 - 5x^2 + 4)^9 \tag{8}$$

Além disso, como $g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$,

$$g'(x) = 6x^2 - 10x \tag{9}$$

Logo, de (7), (8) e (9), temos

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\ &= 10(2x^3 - 5x^2 + 4)^9(6x^2 - 10x)\end{aligned}$$ ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Sejam

$$f(x) = \text{sen } x \qquad g(x) = x^2 + 3$$

Então, a função composta $f \circ g$ será definida por

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= \text{sen}(x^2 + 3)\end{aligned}$$

Calculamos $f'(g(x))$ e $g'(x)$. Como $f(x) = \text{sen } x$, $f'(x) = \cos x$. Logo,

$$f'(g(x)) = \cos[g(x)]$$

$$f'(g(x)) = \cos(x^2 + 3) \tag{10}$$

Como $g(x) = x^2 + 3$,

$$g'(x) = 2x \tag{11}$$

Assim, de (7), (10) e (11), obtemos

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\ &= [\cos(x^2 + 3)](2x) \\ &= 2x \cos(x^2 + 3)\end{aligned}$$ ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Suponha

$$h(x) = \left(\frac{2}{x-1}\right)^5$$

Para determinar $h'(x)$, seja

$$f(x) = x^5 \qquad g(x) = \frac{2}{x-1}$$

Então,

$$f'(x) = 5x^4 \qquad g'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Como $h(x) = f(g(x))$, temos da regra da cadeia

$$\begin{aligned}h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= 5\left(\frac{2}{x-1}\right)^4 \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-160}{(x-1)^6}\end{aligned}$$ ◀

Ao calcular as derivadas pela regra da cadeia não escrevemos as funções f e g como fizemos nas Ilustrações 4, 5 e 6, mas nos lembramos de suas definições. Por exemplo, o cálculo na Ilustração 6 poderia ser escrito como

$$h(x) = \left(\frac{2}{x-1}\right)^5$$

$$h'(x) = 5\left(\frac{2}{x-1}\right)^4 \cdot D_x\left(\frac{2}{x-1}\right)$$

$$= 5\left(\frac{2}{x-1}\right)^4 \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-160}{(x-1)^6}$$

EXEMPLO 1 Encontre $f'(x)$ pela regra da cadeia, se

$$f(x) = \frac{1}{4x^3 + 5x^2 - 7x + 8}$$

Solução Escrevendo $f(x) = (4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-1}$ e aplicando a regra da cadeia, iremos obter

$$f'(x) = -1(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-2} \cdot D_x(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)$$

$$= -1(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-2}(12x^2 + 10x - 7)$$

$$= \frac{-12x^2 - 10x + 7}{(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^2}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^4\right]$$

Solução Da regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^4\right] = 4\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^3 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)$$

$$= 4\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^3 \frac{(3x-1)(2) - (2x+1)(3)}{(3x-1)^2}$$

$$= \frac{4(2x+1)^3(-5)}{(3x-1)^5}$$

$$= -\frac{20(2x+1)^3}{(3x-1)^5}$$

Se a notação de Leibniz for usada para a derivada, a regra da cadeia poderá ser enunciada da seguinte forma:

Se y for uma função de u, definida por $y = f(u)$ e $\frac{dy}{du}$ existir, e se u for uma função de x, definida por $u = g(x)$ e $\frac{du}{dx}$ existir, então y será uma função de

x e $\dfrac{dy}{dx}$ existirá e será dada por

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}} \tag{12}$$

Observe em (12) uma forma conveniente para memorizar a regra da cadeia. O enunciado formal sugere uma "divisão" simbólica de du no numerador e denominador do segundo membro. Entretanto, lembrando a Secção 3.1 quando foi introduzida a notação de Leibniz $\dfrac{dy}{dx}$, foi enfatizado que nem dy nem dx têm significados independentes. Logo, devemos considerar (12) como uma fórmula envolvendo a notação formal de derivação.

Outra maneira de escrever a regra da cadeia é fazer a substituição $u = g(x)$. Então

$$(f \circ g)(x) = f(u) \qquad (f \circ g)'(x) = D_x f(u) \qquad f'(g(x)) = f'(u) \qquad g'(x) = D_x u$$

com essas substituições (7) torna-se

$$\boxed{D_x[f(u)] = f'(u) D_x u}$$

Usaremos essa forma da regra da cadeia para enunciar fórmulas importantes de derivação. Se u for uma função derivável de x, temos dos Teoremas 3.5.1 — 3.5.6 as seguintes fórmulas envolvendo as derivadas das funções trigonométricas: se u for uma função derivável de x

$D_x(\text{sen } u) = \cos u \, D_x u$	$D_x(\cos u) = -\text{sen } u \, D_x u$
$D_x(\text{tg } u) = \sec^2 u \, D_x u$	$D_x(\text{cotg } u) = -\text{cosec}^2 u \, D_x u$
$D_x(\sec u) = \sec u \, tg \, u \, D_x u$	$D_x(\text{cosec } u) = -\text{cosec } u \text{ cotg } u \, D_x u$

EXEMPLO 3 Encontre $F'(t)$ se

$$F(t) = \text{tg}(3t^2 + 2t)$$

Solução Aplicamos a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sec^2(3t^2 + 2t) \cdot D_t(3t^2 + 2t) \\ &= \sec^2(3t^2 + 2t) \cdot (6t + 2) \\ &= 2(3t + 1) \sec^2(3t^2 + 2t) \end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Encontre $\dfrac{dy}{dx}$ se

$$y = \text{sen}(\cos x)$$

Solução Aplicamos a regra da cadeia.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos(\cos x)[D_x(\cos x)] \\ &= \cos(\cos x)[-\text{sen}\, x] \\ &= -\text{sen}\, x\, [\cos(\cos x)] \end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Encontre $f'(x)$ se

$$f(x) = (3x^2 + 2)^2(x^2 - 5x)^3$$

Solução Consideremos f como o produto de duas funções g e h, onde

$$g(x) = (3x^2 + 2)^2 \qquad h(x) = (x^2 - 5x)^3$$

Do Teorema 3.3.6 para a derivada do produto de duas funções,

$$f'(x) = g(x)h'(x) + h(x)g'(x)$$

Encontramos $h'(x)$ e $g'(x)$ pela regra da cadeia.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 + 2)^2[3(x^2 - 5x)^2(2x - 5)] + (x^2 - 5x)^3[2(3x^2 + 2)(6x)] \\ &= 3(3x^2 + 2)(x^2 - 5x)^2[(3x^2 + 2)(2x - 5) + 4x(x^2 - 5x)] \\ &= 3(3x^2 + 2)(x^2 - 5x)^2[6x^3 - 15x^2 + 4x - 10 + 4x^3 - 20x^2] \\ &= 3(3x^2 + 2)(x^2 - 5x)^2(10x^3 - 35x^2 + 4x - 10) \end{aligned}$$

EXEMPLO 6 Calcule

$$D_x(\sec^4 2x^2)$$

Solução Usamos a regra da cadeia duas vezes.

$$\begin{aligned} D_x(\sec^4 2x^2) &= 4 \sec^3 2x^2[D_x(\sec 2x^2)] \\ &= 4 \sec^3 2x^2[(\sec 2x^2 \operatorname{tg} 2x^2)\, D_x(2x^2)] \\ &= (4 \sec^4 2x^2 \operatorname{tg} 2x^2)(4x) \\ &= 16x \sec^4 2x^2 \operatorname{tg} 2x^2 \end{aligned}$$

Vamos retornar agora à questão da demonstração da regra da cadeia. Uma parte importante da prova consiste em introduzir a nova função F que tem propriedades úteis. Esse recurso de "construção" de uma função é comum em Matemática.

Prova da Regra da Cadeia Seja x_1 qualquer número do domínio de g, tal que g seja derivável em x_1 e f seja derivável em $g(x_1)$. Vamos formar a função F definida por

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)} & \text{se } t \neq g(x_1) \\ f'(g(x_1)) & \text{se } t = g(x_1) \end{cases} \tag{13}$$

Então,

$$\lim_{t \to g(x_1)} F(t) = \lim_{t \to g(x_1)} \frac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)}$$

De (7) na Secção 3.1, a função no segundo membro da fórmula acima é $f'(g(x_1))$. Logo,

$$\lim_{t \to g(x_1)} F(t) = f'(g(x_1)) \tag{14}$$

Mas de (13),

$$f'(g(x_1)) = F(g(x_1))$$

Substituindo essa igualdade em (14), obtemos

$$\lim_{t \to g(x_1)} F(t) = F(g(x_1))$$

Portanto, F é contínua em $g(x_1)$. Além disso, de (13),

$$F(t) = \frac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)} \quad \text{se } t \neq g(x_1)$$

Multiplicando ambos os lados dessa equação por $t - g(x_1)$, obtemos

$$f(t) - f(g(x_1)) = F(t)[t - g(x_1)] \quad \text{se } t \neq g(x_1) \tag{15}$$

Observe que (15) é verdadeira, mesmo que $t = g(x_1)$, pois o primeiro membro é

$$f(g(x_1)) - f(g(x_1)) = 0$$

e o segundo membro é

$$F(g(x_1))[g(x_1) - g(x_1)] = 0$$

Logo, a restrição em (15) de que $t \neq g(x_1)$ não é necessária e escrevemos

$$f(t) - f(g(x_1)) = F(t)[t - g(x_1)] \tag{16}$$

Seja, agora, h a função composta $f \circ g$, tal que

$$h(x) = f(g(x)) \tag{17}$$

Então, de (7) da Secção 3.1, se o limite existir,

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{h(x) - h(x_1)}{x - x_1}$$

Substituindo (17) no segundo membro dessa igualdade, obtemos

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(g(x)) - f(g(x_1))}{x - x_1} \tag{18}$$

se o limite existir. Seja, agora, $t = g(x)$ em (16); segue, então, que para todo x no domínio de g, tal que $g(x)$ esteja no domínio de f,

$$f(g(x)) - f(g(x_1)) = F(g(x))[g(x) - g(x_1)]$$

Substituindo em (18), temos

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{F(g(x))[g(x) - g(x_1)]}{x - x_1}$$

Assim, se o limite existir

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} F(g(x)) \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} \tag{19}$$

Como F é contínua em $g(x_1)$,

$$\lim_{x \to x_1} F(g(x)) = F(g(x_1)) \tag{20}$$

Mas de (13),

$$F(g(x_1)) = f'(g(x_1))$$

Substituindo em (20), obtemos

$$\lim_{x \to x_1} F(g(x)) = f'(g(x_1)) \tag{21}$$

Além disso, como g é derivável em x_1,

$$\lim_{x \to x_1} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} = g'(x_1)$$

Substituindo de (21) e dessa equação em (19) e trocando $h'(x_1)$ por $(f \circ g)'(x_1)$, temos

$$(f \circ g)'(x_1) = f'(g(x_1)) \cdot g'(x_1)$$

que é (7) com x substituído por x_1. Dessa forma, provamos a regra da cadeia. ■

EXERCÍCIOS 3.6

Nos Exercícios de 1 a 12, ache a derivada da função dada.

1. $f(x) = (2x + 1)^3$ **2.** $f(x) = (10 - 5x)^4$
3. $F(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$ **4.** $g(r) = (2r^4 + 8r^2 + 1)^5$
5. $f(t) = (2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)^2$ **6.** $H(z) = (z^3 - 3z^2 + 1)^{-3}$
7. $f(x) = (x^2 + 4)^{-2}$ **8.** $g(x) = \operatorname{sen} x^2$
9. $f(x) = 4 \cos 3x - 3 \operatorname{sen} 4x$ **10.** $G(x) = \sec^2 x$
11. $h(t) = \frac{1}{3} \sec^3 2t - \sec 2t$ **12.** $f(x) = \cos(3x^2 + 1)$

Nos Exercícios de 13 a 24, calcule a derivada indicada.

13. $\dfrac{d}{dx}(\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x)$ **14.** $\dfrac{d}{dt}(2 \operatorname{sen}^3 t \cos^2 t)$

15. $\dfrac{d}{dt}(\operatorname{cotg}^4 t - \operatorname{cosec}^4 t)$ **16.** $\dfrac{d}{dx}[(4x^2 + 7)^2(2x^3 + 1)^4]$

17. $D_u[(3u^2 + 5)^3(3u - 1)^2]$ **18.** $D_x[(x^2 - 4x^{-2})^2(x^2 + 1)^{-1}]$
19. $D_x[(2x - 5)^{-1}(4x + 3)^{-2}]$ **20.** $D_x[(2x - 9)^2(x^3 + 4x - 5)^3]$
21. $D_r[(r^2 + 1)^3(2r^2 + 5r - 3)^2]$
22. $D_y[(y + 3)^3(5y + 1)^2(3y^2 - 4)]$

23. $\dfrac{d}{dy}\left[\left(\dfrac{y - 7}{y + 2}\right)^2\right]$ **24.** $\dfrac{d}{dt}\left[\left(\dfrac{2t^2 + 1}{3t^3 + 1}\right)^2\right]$

Nos Exercícios de 25 a 36, ache a derivada da função dada.

25. $f(x) = \left(\dfrac{2x - 1}{3x^2 + x - 2}\right)^3$ **26.** $F(x) = \dfrac{(x^2 + 3)^3}{(5x - 8)^2}$

27. $f(z) = \dfrac{(z^2 - 5)^3}{(z^2 + 4)^2}$ **28.** $G(x) = \dfrac{(4x - 1)^3(x^2 + 2)^4}{(3x^2 + 5)^2}$

29. $g(t) = \operatorname{sen}^2(3t^2 - 1)$ **30.** $f(x) = \operatorname{tg}^2 x^2$
31. $f(x) = (\operatorname{tg}^2 x - x^2)^3$ **32.** $G(x) = (2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x)^3$

33. $f(y) = \dfrac{3 \operatorname{sen} 2y}{\cos^2 2y + 1}$ **34.** $g(x) = \dfrac{\operatorname{cotg}^2 2x}{1 + x^2}$

35. $F(x) = 4 \cos(\operatorname{sen} 3x)$ **36.** $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos 2x)$

37. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = (x^2 - 1)^2$ em cada um dos seguintes pontos $(-2, 9)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(2, 9)$. Faça um esboço do gráfico e desenhe segmentos das retas tangentes nos pontos dados.

38. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 4 \operatorname{tg} 2x$ no ponto $x = \frac{\pi}{8}$.

Nos Exercícios de 39 a 42, uma partícula move-se ao longo de uma reta de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem, em t s. (a) Qual será a velocidade da partícula em t s? (b) Ache a velocidade instantânea da partícula em t s para cada valor dado de t_1.

39. $s = \dfrac{(t^2 - 1)^2}{(t^2 + 1)^2}$, $t \geqslant 0$; t_1 é 1, 2

40. $s = \left(\dfrac{3t}{2t + 1}\right)^4$; $t \geqslant 0$; t_1 é $\frac{1}{2}$, 1

41. $s = 5 \operatorname{sen} \pi t + 3 \cos \pi t$; t_1 é $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$
42. $s = 2 \cos \pi(t + 1)$; t_1 é $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$

43. A força eletromotriz de um circuito elétrico com um gerador simplificado é $E(t)$ volts em t s, onde $E(t) = 50 \operatorname{sen} 120\,\pi\, t$. Ache a taxa de variação instantânea de $E(t)$ em relação a t em (a) 0,02 s e (b) 0,2 s.

44. Uma onda produzida por um som simples tem a equação $P(t) = 0{,}003 \operatorname{sen} 180\,\pi t$, onde $P(t)$ dinas/cm² é a diferença entre a pressão atmosférica e a pressão do ar no tímpano, em t s. Ache a taxa de variação instantânea de $P(t)$ em relação a t em (a) $\frac{1}{9}$ s; (b) $\frac{1}{8}$ s; (c) $\frac{1}{7}$ s.

45. Quando um pêndulo com 10 cm de comprimento balança, de modo que θ seja a medida em radianos do triângulo formado pelo pêndulo e uma reta vertical, então, se $h(\theta)$ cm for a altura da extremidade do pêndulo acima de sua posição mais baixa, $h(\theta) = 20 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta$. Ache a taxa de variação instantânea de $h(\theta)$ em relação a θ quando (a) $\theta = \frac{1}{3}\pi$; (b) $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

46. Se K unidades quadradas for a área de um triângulo retângulo, 10 unidades será o comprimento da hipotenusa e α será a medida em radianos de um ângulo agudo, então $K = 25 \operatorname{sen} 2\alpha$. Ache a taxa de variação instantânea de K em relação a α quando (a) $\alpha = \frac{1}{6}\pi$; (b) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$; (c) $\alpha = \pi$.

47. Em uma floresta, um predador alimenta-se de sua presa, e a população de predadores em qualquer época é uma função do número de presas naquele momento. Suponha que quando há x presas na floresta, a população de predadores é y e $y = \frac{1}{6}x^2 + 90$. Além disso, se t semanas tiverem se passado até o final da temporada de caça, $x = 7t + 85$. A que taxa a população de predadores estará crescendo 8 semanas depois que a temporada de caça terminou? Não expresse y em termos de t, mas use a regra da cadeia.
48. A equação de demanda para um brinquedo é $p^2x = 5000$, onde x brinquedos são demandados por mês, quando p for o preço de cada unidade. Espera-se que em t meses, onde $t \in [0,6]$, o preço do brinquedo seja p, onde $20p = t^2 + 7t + 100$. Qual será a taxa estimada da variação da demanda em relação ao tempo em 5 meses? Não expresse x em termos de t, mas use a regra da cadeia.
49. Dada $f(x) = x^3$ e $g(x) = f(x^2)$. Encontre (a) $f'(x^2)$; (b) $g'(x)$.
50. Dadas $f(u) = u^2 + 5u + 5$ e $g(x) = (x+1)/(x-1)$, ache a derivada de $f \circ g$ de duas maneiras: (a) encontrando primeiro $(f \circ g)(x)$ e então calculando $(f \circ g)'(x)$; (b) usando a regra da cadeia.
51. Deduza a fórmula da derivada da função co-seno usando a fórmula da derivada da função seno, a regra da cadeia e as identidades

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \text{ e } \operatorname{sen} x = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)$$

52. Use a regra da cadeia para provar que (a) a derivada de uma função par é uma função ímpar e (b) a derivada de uma função ímpar é uma função par, desde que essas derivadas existam.
53. Use o resultado do Exercício 52 (a) para provar que se g for uma função par e $g'(x)$ existir, então se $h(x) = (f \circ g)(x)$ e se f for derivável em toda parte, $h'(0) = 0$.
54. Suponha que f e g sejam funções, tais que (i) $g'(x_1)$ e $f'(g(x_1))$ existam e (ii) para todo $x \neq x_1$ em algum intervalo aberto contendo x_1, $(g(x) - g(x_1)) \neq 0$. Então,

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_1)}{x - x_1} = \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \cdot \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1}$$

(a) Prove que quando $x \to x_1$, $g(x) \to g(x_1)$ e então que

$$(f \circ g)'(x_1) = f'(g(x_1))g'(x_1)$$

simplificando a prova da regra da cadeia sob a exigência adicional (ii). (b) Mostre que a prova da regra da cadeia dada na parte (a) aplica-se se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$, mas que não se aplica se $f(x) = x^2$ e $g(x) = \operatorname{sgn} x$.

Nos Exercícios de 55 a 58, mostre que a prova simplificada da regra da cadeia com a exigência adicional (ii) não é válida para as funções f e g dadas. Em cada exercício, faça um esboço do gráfico de g.

55. $f(x) = x^4$; $g(x) = [\![x]\!]$
56. $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = |x-2| + |x+2|$
57. $f(x) = x^2$; $g(x) = |x| + |x-1|$
58. $f(x) = \operatorname{tg} x$; $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$
59. Suponha que f e g sejam funções, tais que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ e $(f \circ g)(x) = x$. Prove que se $g'(x)$ existir, então $g'(x) = g(x)$.

3.7 A DERIVADA DA FUNÇÃO POTÊNCIA PARA EXPOENTES RACIONAIS

A função f definida por

$$f(x) = x^r \tag{1}$$

é chamada de **função potência**. Na Secção 3.3, obtivemos a seguinte fórmula para a derivada dessa função para r inteiro positivo ou negativo:

$$f'(x) = rx^{r-1} \tag{2}$$

Provaremos agora que essa fórmula continua válida, para r racional, com certas restrições se $x = 0$.

Primeiro vamos considerar $x \neq 0$ e $r = 1/q$, onde q é um inteiro positivo. A fórmula (1) pode, então, ser escrita

$$f(x) = x^{1/q} \tag{3}$$

Da Definição 3.1.3,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^{1/q} - x^{1/q}}{\Delta x} \tag{4}$$

Para calcular o limite em (4), precisamos racionalizar o numerador. Usamos então a fórmula a seguir, obtida na Secção 2.9, qual seja:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{5}$$

Racionalizamos o numerador da fração em (4) aplicando (5), para $a = (x + \Delta x)^{1/q}$, $b = x^{1/q}$ e $n = q$. Assim, vamos multiplicar o numerador e o denominador por

$$[(x + \Delta x)^{1/q}]^{(q-1)} + [(x + \Delta x)^{1/q}]^{(q-2)}x^{1/q} + \ldots + (x^{1/q})^{(q-1)}$$

Então, de (4), $f'(x)$ é igual a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x + \Delta x)^{1/q} - x^{1/q}][(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}]}{\Delta x[(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}]} \tag{6}$$

Agora, aplicando (5) ao numerador, obtemos $(x + \Delta x)^{q/q} - x^{q/q}$, que é Δx. Assim de (6),

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x[(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}}$$

$$= \frac{1}{x^{(q-1)/q} + x^{(q-1)/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}}$$

Como há exatamente q termos no denominador da fração acima,

$$f'(x) = \frac{1}{qx^{1-(1/q)}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{q}x^{1/q-1} \tag{7}$$

que é a fórmula (2) com $r = 1/q$. Completamos a parte crucial da demonstração. Mostramos que a função definida por (3) é derivável e que sua derivada é dada por (7).

Agora, em (1) com $x \neq 0$, seja $r = p/q$, onde p é qualquer inteiro não nulo e q é qualquer inteiro positivo; isto é, r é qualquer número racional, exceto zero. Então, (1) pode ser escrito como

$$f(x) = x^{p/q} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x^{1/q})^p$$

Como p é um inteiro positivo ou negativo, segue da regra da cadeia e dos Teoremas 3.3.2 e 3.3.8 que

$$f'(x) = p(x^{1/q})^{p-1} \cdot D_x(x^{1/q})$$

Aplicando a fórmula (7) a $D_x(x^{1/q})$, obtemos

$$f'(x) = p(x^{1/q})^{p-1} \cdot \frac{1}{q}x^{1/q-1}$$

$$f'(x) = \frac{p}{q}x^{p/q-1/q+1/q-1}$$

$$f'(x) = \frac{p}{q}x^{p/q-1}$$

Essa fórmula é igual a (2), com $r = p/q$.

Se $r = 0$ e $x \neq 0$, (1) torna-se: $f(x) = x^0$; isto é, $f(x) = 1$. Assim $f'(x) = 0$, o que pode ser escrito como $f'(x) = 0 \cdot x^{0-1}$. Logo, (2) é válida para $r = 0$ com $x \neq 0$. Mostramos, portanto, que a fórmula (2) é válida quando r for qualquer número racional, com $x \neq 0$.

Sabemos que 0 estará no domínio da função potência f se e somente se r for um número positivo, pois para $r \leqslant 0$, $f(0)$ não é definida. Logo, queremos determinar para que valores positivos de r, $f'(0)$ será dada pela fórmula (2). Precisamos excluir os valores de r para os quais $0 < r \leqslant 1$, pois para esses valores de r, x^{r-1} não é um número real, quando $x = 0$. Vamos supor, então, que $r > 1$. Pela definição de derivada,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{x^r - 0^r}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} x^{r-1} \end{aligned}$$

Quando $r > 1$, $\lim\limits_{x \to 0} x^{r-1}$ existe e é igual a 0, desde que r seja um número tal que x^{r-1} esteja definida em algum intervalo aberto contendo 0. Por exemplo, se $r = \frac{3}{2}$, $x^{r-1} = x^{1/2}$, que não está definida em nenhum intervalo aberto contendo 0 (uma vez que $x^{1/2}$ não existe quando $x < 0$). Entretanto, se $r = \frac{5}{3}$, $x^{r-1} = x^{2/3}$, que está definida em todo intervalo aberto contendo 0. Logo, a fórmula (2) dá a derivada da função potência quando $x = 0$, desde que r seja um número para o qual x^{r-1} esteja definida em algum intervalo aberto contendo 0. Assim sendo, acabamos de provar o teorema enunciado a seguir.

3.7.1 TEOREMA Se f for a função potência definida por $f(x) = x^r$, onde r é qualquer número racional, então f será derivável e

$$f'(x) = rx^{r-1}$$

Para que essa fórmula tenha validade para $f'(0)$, r deve ser tal que x^{r-1} esteja definida em algum intervalo aberto contendo 0.

EXEMPLO 1 Encontre $f'(x)$ se

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$$

Solução $f(x) = 4x^{2/3}$. Do Teorema 3.7.1,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot \tfrac{2}{3}(x^{2/3-1}) \\ &= \tfrac{8}{3}x^{-1/3} \\ &= \frac{8}{3x^{1/3}} \\ &= \frac{8}{3\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

O teorema enunciado a seguir é uma conseqüência imediata do Teorema 3.7.1 e da regra da cadeia.

3.7.2 TEOREMA Se f e g forem funções tais que $f(x) = [g(x)]^r$, onde r é qualquer número racional e se $g'(x)$ existir, então f será derivável e

$$f'(x) = r\,[g(x)]^{r-1}\,g'(x)$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$D_x(\sqrt{2x^3 - 4x + 5})$$

Solução Escrevemos $\sqrt{2x^3 - 4x + 5}$ como $(2x^3 - 4x + 5)^{1/2}$ e aplicamos o Teorema 3.7.2.

$$\begin{aligned} D_x[(2x^3 - 4x + 5)^{1/2}] &= \tfrac{1}{2}(2x^3 - 4x + 5)^{-1/2} \cdot D_x(2x^3 - 4x + 5) \\ &= \tfrac{1}{2}(2x^3 - 4x + 4)^{-1/2}(6x^2 - 4) \\ &= \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{2x^3 - 4x + 5}} \end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Encontre $g'(x)$ se

$$g(x) = \frac{x^3}{\sqrt[3]{3x^2 - 1}}$$

Solução A fração dada pode ser escrita como um produto:

$$g(x) = x^3(3x^2 - 1)^{-1/3}$$

Dos Teoremas 3.3.6 e 3.7.2,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2(3x^2 - 1)^{-1/3} - \tfrac{1}{3}(3x^2 - 1)^{-4/3}(6x)(x^3) \\ &= x^2(3x^2 - 1)^{-4/3}[3(3x^2 - 1) - 2x^2] \\ &= \frac{x^2(7x^2 - 3)}{(3x^2 - 1)^{4/3}} \end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Encontre $f'(r)$ se

$$f(r) = \sqrt{4\,\text{sen}^2\, r + 9\cos^2 r}$$

Solução $f(r) = (4\,\text{sen}^2\, r + 9\cos^2 r)^{1/2}$. Aplicamos o Teorema 3.7.2.

$$\begin{aligned} f'(r) &= \tfrac{1}{2}(4\,\text{sen}^2\, r + 9\cos^2 r)^{-1/2} \cdot D_r(4\,\text{sen}^2\, r + 9\cos^2 r \\ &= \frac{8\,\text{sen}\, r \cdot D_r(\text{sen}\, r) + 18\cos r \cdot D_r(\cos r)}{2\sqrt{4\,\text{sen}^2\, r + 9\cos^2}} \\ &= \frac{8\,\text{sen}\, r\cos r + 18\cos r(-\text{sen}\, r)}{2\sqrt{4\,\text{sen}^2\, r + 9\cos^2 r}} \\ &= \frac{-10\,\text{sen}\, r\cos r}{2\sqrt{4\,\text{sen}^2\, r + 9\cos^2 r}} \\ &= -\frac{5\,\text{sen}\, r\cos r}{\sqrt{4\,\text{sen}^2\, r + 9\cos^2 r}} \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 3.7

Nos Exercícios de 1 a 24, ache a derivada da função dada.

1. $f(x) = 4x^{1/2} + 5x^{-1/2}$
2. $f(x) = 3x^{2/3} - 6x^{1/3} + x^{-1/3}$
3. $g(x) = \sqrt{1 + 4x^2}$
4. $f(s) = \sqrt{2 - 3s^2}$
5. $f(x) = (5 - 3x)^{2/3}$
6. $g(x) = \sqrt[3]{4x^2 - 1}$
7. $g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{25 - y^2}}$
8. $f(x) = (5 - 2x^2)^{-1/3}$
9. $h(t) = 2 \cos \sqrt{t}$
10. $f(x) = 4 \sec \sqrt{x}$
11. $g(r) = \text{cotg}\sqrt{3r}$
12. $g(x) = \sqrt{3 \operatorname{sen} x}$
13. $f(x) = (\operatorname{sen} 3x)^{-1/2}$
14. $f(y) = \sqrt{1 + \operatorname{cosec}^2 y}$
15. $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + 1}$
16. $f(y) = 3 \cos \sqrt[3]{2y^2}$
17. $g(x) = \sqrt{\dfrac{2x - 5}{3x + 1}}$
18. $h(t) = \dfrac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 1}$
19. $F(x) = \sqrt[3]{2x^3 - 5x^2 + x}$
20. $G(t) = \sqrt{\dfrac{5t + 6}{5t - 4}}$
21. $g(t) = \sqrt{2t} + \sqrt{\dfrac{2}{t}}$
22. $g(x) = \sqrt[3]{(3x^2 + 5x - 1)^2}$
23. $f(x) = (5 - x^2)^{1/2}(x^3 + 1)^{1/4}$
24. $g(y) = (y^2 + 3)^{1/3}(y^3 - 1)^{1/2}$

Nos Exercícios de 25 a 36, calcule a derivada indicada.

25. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\right)$
26. $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x^2 - 5}\,\sqrt[3]{x^2 + 3})$
27. $\dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} t + 1}{1 - \operatorname{sen} t}}\right)$
28. $\dfrac{d}{dz}(\operatorname{sen} \sqrt[3]{z} \cos \sqrt[3]{z})$
29. $\dfrac{d}{dy}(\operatorname{tg} \sqrt{y} \sec \sqrt{y})$
30. $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{\dfrac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x}}\right)$
31. $D_x\left(\dfrac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt[3]{x + 1}}\right)$
32. $D_x\left(\dfrac{4x + 6}{\sqrt{x^2 + 3x + 4}}\right)$
33. $D_x(\sqrt{9 + \sqrt{9 - x}})$
34. $D_y\left(\sqrt[4]{\dfrac{y^3 + 1}{y^3 - 1}}\right)$
35. $D_z\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 2z}}\right)$
36. $D_x\left(\sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)$

Nos Exercícios 37 e 38, encontre uma equação da reta tangente à curva em cada um dos pontos dados. Faça um esboço do gráfico e inclua segmentos de retas tangentes nos pontos dados.

37. $y = (2x - 2)^{2/3}$; $(-3, 4)$, $(0, \sqrt[3]{4})$, $(1, 0)$, $(2, \sqrt[3]{4})$, $(5, 4)$
38. $y = (6 - 2x)^{1/3}$; $(-1, 2)$, $(1, \sqrt[3]{4})$, $(3, 0)$, $(5, -\sqrt[3]{4})$, $(7, -2)$
39. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x^2 + 9}$, no ponto $(4, 5)$.
40. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = (7x - 6)^{-1/3}$ que seja perpendicular à reta $12x - 7y + 2 = 0$.
41. Ache uma equação da reta normal à curva $y = x\sqrt{16 + x^2}$ na origem.
42. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{\operatorname{sen} x + \cos x}$ no ponto onde $x = \pi/4$.
43. Um objeto move-se ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento $s = \sqrt{4t^2 + 3}$, com $t \geqslant 0$. Ache o valor de t para o qual a medida da velocidade instantânea é (a) 0; (b) 1; (c) 2.
44. Um objeto move-se ao longo de uma reta, de acordo com a equação do movimento $s = \sqrt{5 + t^2}$, com $t \geqslant 0$. Ache o valor de t para o qual a medida da velocidade instantânea é (a) 0; (b) 1.
45. Suponha que um líquido seja produzido por um certo processo químico e que a função custo total C seja dada por $C(x) = 6 + 4\sqrt{x}$, onde $C(x)$ é a quantia correspondente ao custo total da produção de x litros. Encontre (a) o custo marginal quando 16 L são produzidos e (b) o número de litros produzidos quando o custo marginal é \$ 0,40 por litro.
46. A quantia em dinheiro no custo total da produção de x unidades de certa mercadoria é dada por $C(x) = 40 + 3x + 9\sqrt{2x}$. Ache (a) o custo marginal quando 50 unidades são produzidas e (b) o número de unidades produzidas quando o custo marginal é \$ 4,50.
47. Uma imobiliária que administra um condomínio aluga cada apartamento por \$ p por mês quando x apartamentos são alugados $p = 30\sqrt{300 - 2x}$. Se \$ $R(x)$ for o rendimento recebido do aluguel de x apartamentos, então $R(x) = px$. Quantos apartamentos deverão ser alugados antes que a taxa de variação de R em relação a x (rendimento marginal) seja zero? (*Nota:* como x é o número de apartamentos alugados, x é um inteiro não negativo. Para aplicar o cálculo, vamos supor que x seja um número real não-negativo arredondado para o número inteiro mais próximo.)
48. A produção diária de uma dada fábrica é de $f(x)$ unidades quando o capital investido for de x milhares de uma unidade monetária \$ e $f(x) = 200\sqrt{2x + 1}$. Se a capitalização corrente for de \$ 760.000, use a derivada para estimar a variação na produção diária, se o capital investido for aumentado em \$ 1000.
49. Um avião está voando paralelamente ao chão, a uma altitude de 2 km e com uma velocidade escalar de $4\frac{1}{2}$ km/min. Se em dado instante o avião passar exatamente sobre a Estátua da Liberdade, qual será a taxa de variação da distância sobre a linha de visão entre o avião e a estátua, 20 s mais tarde?
50. Dada $f(u) = 1/u^2$ e $g(x) = \sqrt{x}/\sqrt{2x^3 - 6x + 1}$, ache a derivada de $f \circ g$ de duas maneiras: (a) encontrando primeiro $(f \circ g)(x)$ e depois $(f \circ g)'(x)$; (b) usando a regra da cadeia.

Nos Exercícios de 51 a 54, ache a derivada da função dada. (Sugestão: $|a| = \sqrt{a^2}$.)

51. $f(x) = |x^2 - 4|$
52. $g(x) = x|x|$
53. $g(x) = |x|^3$
54. $h(x) = \sqrt[3]{|x| + x}$
55. Suponha que $g(x) = |f(x)|$. Prove que se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $|g'(x)| = |f'(x)|$.
56. Suponha que $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ e $h(x) = f(g(x))$, onde f é derivável em 3. Prove que $h'(0) = 0$.

3.8 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Se $f = \{(x, y) | y = 3x^2 + 5x + 1\}$, então a equação

$$y = 3x^2 + 5x + 1$$

define a função f explicitamente. Mas, nem todas as funções estão definidas dessa forma. Por exemplo, se tivermos a equação

$$x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2 \tag{1}$$

não poderemos resolver y em termos de x; além disso, podem existir uma ou mais funções f, para as quais se $y = f(x)$, a equação (1) estará satisfeita, isto é, tais que a equação

$$x^6 - 2x = 3[f(x)]^6 + [f(x)]^5 - [f(x)]^2$$

seja válida para todos os valores de x no domínio de f. Nesse caso, a função f está definida *implicitamente* pela equação dada.

Com a hipótese de que (1) define y como uma função derivável de x, a derivada de y em relação a x pode ser encontrada por *derivação implícita.*

A equação (1) é um tipo especial de equação envolvendo x e y, pois pode ser escrita de tal forma que todos os termos envolvendo x estejam de um lado da equação, enquanto que no outro lado ficarão todos os termos envolvendo y. Ela serve como um primeiro exemplo do processo de derivação implícita.

O lado esquerdo de (1) é uma função de x e o lado direito é uma função de y. Seja F a função definida pelo lado esquerdo e seja G a função definida pelo lado direito. Assim,

$$F(x) = x^6 - 2x \qquad G(y) = 3y^6 + y^5 - y^2$$

onde y é uma função de x, digamos $y = f(x)$. Dessa forma, (1) pode ser escrita como

$$F(x) = G(f(x))$$

Essa equação está satisfeita por todos os valores de x no domínio de f para os quais $G(f(x))$ existe.

Então, para todos os valores de x para os quais f é derivável,

$$D_x(x^6 - 2x) = D_x(3y^6 + y^5 - y^2) \tag{2}$$

A derivada do primeiro membro de (2) é facilmente encontrada e

$$D_x(x^6 - 2x) = 6x^5 - 2 \tag{3}$$

Encontramos a derivada do segundo membro de (2) pela regra da cadeia.

$$D_x(3y^6 + y^5 - y^2) = 18y^5 \cdot \frac{dy}{dx} + 5y^4 \cdot \frac{dy}{dx} - 2y \cdot \frac{dy}{dx} \tag{4}$$

Substituindo os valores de (3) e (4) em (2), obtemos

$$6x^5 - 2 = (18y^5 + 5y^4 - 2y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^5 - 2}{18y^5 + 5y^4 - 2y}$$

Observe que ao usarmos a derivação implícita, obtivemos uma expressão para $\frac{dy}{dx}$ que envolve ambas as variáveis, x e y.

Na ilustração a seguir, o método da derivação implícita será usado para encontrar $\dfrac{dy}{dx}$ em uma equação mais geral.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Considere a equação

$$3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y \tag{5}$$

e suponha que exista pelo menos uma função derivável f, tal que se $y = f(x)$, a equação (5) estará satisfeita. Derivando-se ambos os membros de (5) (tendo em mente que y é uma função derivável de x) e aplicando os teoremas para a derivada de um produto, a de uma potência e a regra da cadeia, obtemos

$$12x^3y^2 + 3x^4\left(2y\frac{dy}{dx}\right) - 7y^3 - 7x\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) = 0 - 8\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(6x^4y - 21xy^2 + 8) = 7y^3 - 12x^3y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7y^3 - 12x^3y^2}{6x^4y - 21xy^2 + 8}$$ ◀

Lembre-se de que estamos supondo que ambas (1) e (5) definam y como pelo menos uma função derivável de x. Pode acontecer que uma equação em x e y não implique a existência de nenhuma função com valores reais, como é o caso da equação

$$x^2 + y^2 + 4 = 0$$

que não está satisfeita por nenhum valor real de x e y. Além disso, é possível que uma equação em x e y possa estar satisfeita por várias funções, algumas das quais são deriváveis, enquanto que outras não o são. Uma discussão geral do assunto foge ao contexto deste livro, mas pode ser encontrada em textos de Cálculo Avançado. Nas discussões subseqüentes, quando afirmarmos que uma equação em x e y define y como uma função implícita de x, suporemos que uma ou mais dessas funções seja derivável. O Exemplo 4, a seguir, ilustra o fato de que a derivação implícita resulta a derivada de duas funções deriváveis, definidas pela equação dada.

EXEMPLO 1 Dada $(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^4 + y^4$, ache $\dfrac{dy}{dx}$.

Solução Derivando implicitamente em relação a x, teremos

$$2(x + y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) - 2(x - y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right) = 4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$2x + 2y + (2x + 2y)\frac{dy}{dx} - 2x + 2y + (2x - 2y)\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(4x - 4y^3) = 4x^3 - 4y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - y}{x - y^3}$$

EXEMPLO 2 Ache uma equação da reta tangente à curva $x^3 + y^3 = 9$, no ponto (1, 2).

Solução Vamos derivar implicitamente em relação a x.

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

Logo, no ponto (1, 2), $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$. Uma equação da reta tangente é, então,

$$y - 2 = -\tfrac{1}{4}(x - 1)$$

$$x + 4y - 9 = 0$$

EXEMPLO 3 Dada $x \cos y + y \cos x = 1$, ache $\frac{dy}{dx}$.

Solução Derivando implicitamente em relação a x, obteremos

$$1 \cdot \cos y + x(-\operatorname{sen} y)\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}(\cos x) + y(-\operatorname{sen} x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos x - x \operatorname{sen} y) = y \operatorname{sen} x - \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \operatorname{sen} x - \cos y}{\cos x - x \operatorname{sen} y}$$

EXEMPLO 4 Dada a equação $x^2 + y^2 = 9$, ache (a) $\frac{dy}{dx}$ por derivação implícita; (b) as duas funções definidas pela equação; (c) a derivada de cada função obtida na parte (b) por derivação explícita. (d) Comprove que o resultado obtido na parte (a) está de acordo com os resultados obtidos na parte (c).

Solução

(a) Vamos derivar implicitamente.

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) Resolvendo a equação dada em y,

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{9 - x^2}$$

Sejam f_1 e f_2 as duas funções para as quais

$$f_1(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{e} \quad f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$$

(c) Como $f_1(x) = (9 - x^2)^{1/2}$ e $f_2(x) = -(9 - x^2)^{1/2}$, pela regra da cadeia obtemos

$$f_1'(x) = \tfrac{1}{2}(9 - x^2)^{-1/2}(-2x) \qquad f_2'(x) = -\tfrac{1}{2}(9 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$
$$= -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} \qquad\qquad = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

(d) Para $y = f_1(x)$ onde, $f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$, segue da parte (c) que

$$f_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$
$$= -\frac{x}{y}$$

o que está de acordo com a parte (a).

Para $y = f_2(x)$, onde $f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$, temos da parte (c)

$$f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$
$$= -\frac{x}{-\sqrt{9 - x^2}}$$
$$= -\frac{x}{y}$$

o que também está de acordo com o resultado obtido na parte (a).

EXERCÍCIOS 3.8

Nos Exercícios de 1 a 28, ache $\frac{dy}{dx}$ *por derivação implícita.*

1. $x^2 + y^2 = 16$
2. $4x^2 - 9y^2 = 1$
3. $x^3 + y^3 = 8xy$
4. $x^2 + y^2 = 7xy$
5. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$
6. $\frac{3}{x} - \frac{3}{y} = 2x$
7. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$
8. $2x^3y + 3xy^3 = 5$
9. $x^2y^2 = x^2 + y^2$
10. $(2x + 3)^4 = 3y^4$
11. $x^2 = \frac{x + 2y}{x - 2y}$
12. $\frac{x}{\sqrt{y}} - 4y = x$
13. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xy} = 4y^2$
14. $\sqrt{y} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{y} = x$
15. $\sqrt{xy} + 2x = \sqrt{y}$
16. $y + \sqrt{xy} = 3x^3$
17. $\frac{y}{\sqrt{x - y}} = 2 + x^2$
18. $x^2y^3 = x^4 - y^4$
19. $y = \cos(x - y)$
20. $x = \operatorname{sen}(x + y)$
21. $\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 y = 4$
22. $\operatorname{cotg} xy + xy = 0$
23. $x \operatorname{sen} y + y \cos x = 1$
24. $\cos(x + y) = y \operatorname{sen} x$
25. $\sec^2 y + \operatorname{cotg}(x - y) = \operatorname{tg}^2 x$
26. $\operatorname{cosec}(x - y) + \sec(x + y) = x$
27. $(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^3 + y^3$
28. $y\sqrt{2 + 3x} + x\sqrt{1 + y} = x$

Nos Exercícios de 29 a 32, considere y como a variável independente e ache $\frac{dx}{dy}$.

29. $x^4 + y^4 = 12x^2y$
30. $y = 2x^3 - 5x$
31. $x^3y + 2y^4 - x^4 = 0$
32. $y\sqrt{x} - x\sqrt{y} = 9$

33. Ache uma equação da reta tangente à curva $16x^4 + y^4 = 32$ no ponto $(1, 2)$.
34. Ache uma equação da reta normal à curva $9x^3 - y^3 = 1$ no ponto $(1, 2)$.
35. Ache uma equação da reta normal à curva $x^2 + xy + y^2 - 3y = 10$ no ponto $(2, 3)$.
36. Ache uma equação da reta tangente à curva $\sqrt[3]{xy} = 14x + y$ no ponto $(2, -32)$.
37. Ache a taxa de variação de y em relação a x no ponto $(3, 2)$, se $7y^2 - xy^3 = 4$.
38. Para a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, mostre que a reta tangente em todo ponto (x_1, y_1) da curva é perpendicular à reta que passa por (x_1, y_1) e pelo centro da circunferência.

39. Em que ponto da curva $x + \sqrt{xy} + y = 1$ a reta tangente é paralela ao eixo x?
40. Há duas retas que passam pelo ponto $(-1, 3)$ que são tangentes à curva $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$. Ache as equações de cada uma delas.

Nos Exercícios de 41 a 46, é dada uma equação. Faça o seguinte em cada um destes problemas: (a) Ache duas funções definidas pela equação e estabeleça os seus domínios. (b) Faça um esboço do gráfico de cada uma das funções obtidas na parte (a). (c) Faça um esboço do gráfico da equação. (d) Ache a derivada de cada uma das funções obtidas na parte (a) e estabeleça os seus domínios. (e) Ache $\dfrac{dy}{dx}$ *por derivação implícita da equação dada e comprove que o resultado assim obtido está de acordo com a parte (d). (f) Ache uma equação da reta tangente em cada valor dado de* x_1.

41. $y^2 = 4x - 8$; $x_1 = 3$
42. $x^2 + y^2 = 25$; $x_1 = 4$
43. $x^2 - y^2 = 9$; $x_1 = -5$
44. $y^2 - x^2 = 16$; $x_1 = -3$
45. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$; $x_1 = 1$
46. $x^2 + 4y^2 + 6x - 40y + 93 = 0$; $x_1 = -2$
47. Às 8 da manhã, um navio que viaja para o norte com uma velocidade de 24 nós (milhas náuticas por hora) está em um ponto P. Às 10 h, um segundo navio que viaja para o leste com uma velocidade de 32 nós está em P. Qual a taxa de variação da distância entre os dois navios às (a) 9 h e (b) 11 h?
48. Se $x^n y^m = (x + y)^{n+m}$, prove que $x \cdot \dfrac{dy}{dx} = y$.
49. Ache equações das retas tangentes à curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ nos pontos onde $x = -\frac{1}{8}$.
50. Prove que a soma dos interceptos x e y de qualquer reta tangente à curva $x^{1/2} + y^{1/2} = k^{1/2}$ é constante e igual a k.
51. Seja f a função potência definida por $f(x) = x^r$, onde r é um número racional qualquer. Supondo que f seja derivável, use a derivação implícita para mostrar que $f'(x) = rx^{r-1}$. (*Sugestão:* seja $r = \dfrac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e $q > 0$. Então, substitua $f(x)$ por y e escreva a equação como $y^q = x^p$. Use a derivação implícita para achar $\dfrac{dy}{dx}$.)

3.9 TAXAS RELACIONADAS

Um problema envolvendo taxas de variação de variáveis relacionadas é chamado de problema de **taxas relacionadas**. Começaremos nossa discussão com um exemplo que descreve uma situação real.

EXEMPLO 1 Uma escada com 25 unidades de comprimento está apoiada numa parede vertical. Se o pé da escada for puxado horizontalmente, afastando-se da parede a 3 unidades de comprimento por segundo, qual a velocidade com que a escada está deslizando, quando seu pé está a 15 unidades de comprimento da parede?

Solução Seja t o tempo decorrido desde que a escada começou a deslizar pela parede, y a distância do chão ao topo da escada em t s e x a distância do pé da escada até a parede em t s. Veja a Figura 1.

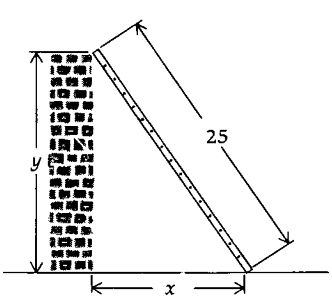


FIGURA 1

Como o pé da escada está sendo puxado horizontalmente, afastando-se da parede a 3 unidades de comprimento por segundo, $\dfrac{dx}{dt} = 3$. Queremos encontrar $\dfrac{dy}{dt}$ quando $x = 15$. Pelo teorema de Pitágoras,

$$y^2 = 625 - x^2 \tag{1}$$

Como x e y são funções de t, derivamos ambos os lados de (1) em relação a t e obtemos

$$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Quando $x = 15$, segue de (1) que $y = 20$. Como $\dfrac{dx}{dt} = 3$, obtemos de (2)

$$\left.\frac{dy}{dt}\right]_{y=20} = -\tfrac{15}{20} \cdot 3$$
$$= -\tfrac{9}{4}$$

Logo, o topo da escada está deslizando pela parede a uma taxa de $2\frac{1}{4}$ unidades de comprimento por segundo, quando o pé está a 15 unidades de comprimento da parede. O sinal *menos* significa que y é decrescente, quando t cresce.

Em problemas com taxas relacionadas, as variáveis têm uma relação específica para os valores de t, onde t é a medida do tempo. Essa relação é usualmente expressa na forma de uma equação, como a equação (1) no Exemplo 1. Os valores das variáveis e as taxas de variação das variáveis em relação a t são freqüentemente dados num determinado instante. No Exemplo 1, no instante em que $x = 15$, então $y = 20$ e $\dfrac{dx}{dt} = 3$ e queremos encontrar $\dfrac{dy}{dt}$.

Antes de apresentar mais explicações, damos outro exemplo para demonstrar o cálculo envolvido.

EXEMPLO 2 Dada

$$x \cos y = 5$$

onde x e y são funções de uma terceira variável t. Se $\dfrac{dx}{dt} = -4$, ache $\dfrac{dy}{dt}$ quando $y = \frac{1}{3}\pi$.

Solução Derivando ambos os lados da equação, obtemos

$$(\cos y)\frac{dx}{dt} - (x \operatorname{sen} y)\frac{dy}{dt} = 0$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\cos y}{x \operatorname{sen} y} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Da equação dada, quando $y = \frac{1}{3}\pi$, $x = 10$. De (3), com y $\frac{1}{3}\pi$, $x = 10$, e $\dfrac{dx}{dt} = -4$,

$$\left.\frac{dy}{dt}\right]_{y=\pi/3} = \frac{\frac{1}{2}}{10(\frac{1}{2}\sqrt{3})}(-4)$$
$$= -\tfrac{2}{15}\sqrt{3}$$

Os passos a seguir representam um procedimento possível para resolver problemas envolvendo taxas relacionadas.

1. Faça uma figura, se isso for possível.
2. Defina as variáveis. Em geral defina primeiro t, pois as outras variáveis usualmente dependem de t.
3. Escreva todos os fatos numéricos conhecidos sobre as variáveis e suas derivadas em relação a t.
4. Obtenha uma equação envolvendo as variáveis que dependem de t.
5. Derive em relação a t ambos os membros da equação encontrada na etapa 4.
6. Substitua os valores de quantidades conhecidas na equação da etapa 5 e resolva em termos da quantidade desejada.

EXEMPLO 3 Um tanque tem a forma de um cone invertido com 16 m de altura e uma base com 4 m de raio. A água "flui" no tanque a uma taxa de 2 m³/min. Com que velocidade o nível da água estará se elevando quando sua profundidade for de 5 m?

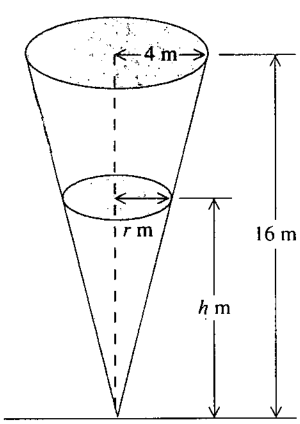


FIGURA 2

Solução Seja t o tempo medido em minutos decorridos desde que a água começou a fluir dentro do tanque; h a altura em metros do nível de água em t min; r a medida em metros do raio da superfície da água em t min; e V a medida, em metros cúbicos, do volume de água no tanque em t min.

Em qualquer instante, o volume de água no tanque pode ser expresso em termos do volume do cone. Veja a Figura 2.

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h \tag{4}$$

V, r e h são todas funções de t. Como a água está fluindo no tanque a uma taxa de 2 m³/min, $\dfrac{dV}{dt} = 2$. Queremos encontrar $\dfrac{dh}{dt}$ quando $h = 5$. Para expressar r em termos de h, temos, dos triângulos semelhantes,

$$\frac{r}{h} = \frac{4}{16} \quad \Leftrightarrow \quad r = \tfrac{1}{4}h$$

Substituindo esse valor de r em (4), obtemos

$$V = \tfrac{1}{3}\pi(\tfrac{1}{4}h)^2(h) \quad \Leftrightarrow \quad V = \tfrac{1}{48}\pi h^3$$

Por derivação de ambos os lados dessa equação em relação a t,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{16}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

Substituindo $\dfrac{dV}{dt}$ por 2 e resolvendo em $\dfrac{dh}{dt}$, obtemos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{32}{\pi h^2}$$

Logo,

$$\left.\frac{dh}{dt}\right]_{h=5} = \frac{32}{25\pi}$$

Assim sendo, o nível de água está subindo a uma taxa de $\dfrac{32}{25\pi}$ m/min quando a profundidade da água é de 5 m.

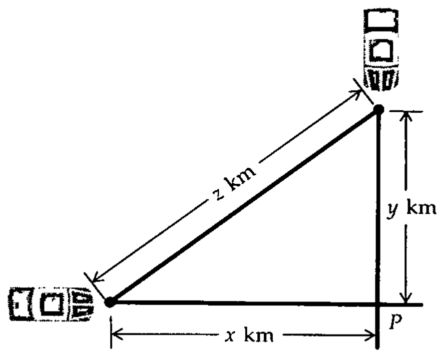


FIGURA 3

EXEMPLO 4 Dois carros estão se encaminhando em direção a um cruzamento, um seguindo a direção leste a uma velocidade de 90 km/h e o outro seguindo a direção sul, a 60 km/h. Qual a taxa segundo a qual eles se aproximam um do outro no instante em que o primeiro carro está a 0,2 km do cruzamento e o segundo a 0,15 km?

Solução Consulte a Figura 3, onde o ponto P é o cruzamento das duas estradas. Seja t h o tempo decorrido desde que os carros começaram a se aproximar de P, x km a distância do primeiro carro em t h, y km a do segundo carro em t h e z km a distância entre os dois carros em t h. Como o primeiro carro aproxima-se de P a uma taxa de 90 km/h e x está decrescendo enquanto t está crescendo, $\dfrac{dx}{dt} = -90$. Da mesma forma, $\dfrac{dy}{dt} = -60$. Queremos determinar $\dfrac{dz}{dt}$ quando $x = 0{,}2$ e $y = 0{,}15$. Do teorema de Pitágoras,

$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{5}$$

Derivando ambos os membros dessa equação em relação a t, obtemos

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\dfrac{dx}{dt} + y\dfrac{dy}{dt}}{z} \tag{6}$$

Quando $x = 0{,}2$ e $y = 0{,}15$, segue de (5) que $z = 0{,}25$. Em (6), seja $\dfrac{dx}{dt} = -90$, $\dfrac{dy}{dt} = -60$, $x = 0{,}2$, $y = 0{,}15$ e $z = 0{,}25$, então obtemos

$$\left.\frac{dz}{dt}\right]_{z=0,25} = \frac{(0{,}2)(-90) + (0{,}15)(-60)}{0{,}25}$$

$$= -108$$

Logo, no instante em questão os carros estão se aproximando um do outro a uma taxa de 108 km/h.

EXEMPLO 5 Suponha que, em certo mercado, x milhares de caixas de laranja sejam fornecidos diariamente sendo p o preço por caixa e a equação de oferta

$$px - 20p - 3x + 105 = 0$$

Se o fornecimento diário estiver decrescendo a uma taxa de 250 caixas por dia, com que taxa os preços estarão variando quando o fornecimento diário for de 5.000 caixas?

Solução Seja t o tempo decorrido medido em dias, desde que o suprimento diário de laranjas começou a decrescer. Então, p e x são ambas funções de t. Como o fornecimento diário está decrescendo a uma taxa de 250 caixas por dia, $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{250}{1000}$, isto é, $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{4}$. Queremos encontrar $\dfrac{dp}{dt}$ quando $x = 5$.

Da equação de oferta dada, derivamos implicitamente em relação a t e obtemos

$$p\frac{dx}{dt} + x\frac{dp}{dt} - 20\frac{dp}{dt} - 3\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{3-p}{x-20}\cdot\frac{dx}{dt}$$

Quando $x = 5$, segue da equação de oferta que $p = 6$. Como $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{4}$, temos da equação precedente

$$\left.\frac{dp}{dt}\right]_{p=6} = \frac{3-6}{5-20}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{20}$$

Assim, o preço de uma caixa de laranja estará decrescendo a uma taxa de \$ 0,05 por dia, quando o fornecimento diário for de 5.000 caixas.

EXEMPLO 6 Um avião voa a 152,4 m/s paralelamente ao solo, a uma altitude de 1.220 m no sentido oeste, tomando como referência um holofote fixado no solo que o focaliza e que se encontra à esquerda da projeção vertical do avião em relação ao solo.

Sabendo-se que a luz do holofote deverá permanecer iluminando o avião, qual deverá ser a velocidade angular (de giro) do holofote, no instante em que a distância horizontal entre ele e a projeção vertical do avião for de 610 m?

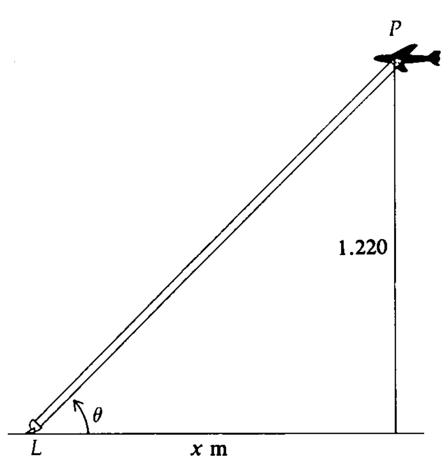


FIGURA 4

Solução Observe a Figura 4. O holofote está no ponto L e num determinado instante o avião está no ponto P. Seja x a distância (em metros) medida horizontalmente entre o holofote e a projeção vertical do avião em relação ao solo, e θ o ângulo de elevação (em radianos) do feixe luminoso emitido pelo holofote em relação ao solo, neste mesmo instante.

Temos $\dfrac{dx}{dt} = -152{,}4$ e queremos encontrar $\dfrac{d\theta}{dt}$ quando $x = 610$.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1.220}{x}$$

Derivando membro a membro em relação a t, obtemos

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1.220}{x^2}\,\frac{dx}{dt}$$

Substituindo $\dfrac{dx}{dt} = -152{,}4$ na relação acima e dividindo por $\sec^2\theta$, iremos obter

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{185.928}{x^2\sec^2\theta} \tag{7}$$

Quando $x = 610$, $\operatorname{tg}\theta = 2$. Como $\sec^2\theta = 1 + \operatorname{tg}^2\theta$, $\sec^2\theta = 5$. Substituindo esses valores em (7) temos, quando $x = 610$,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{185.928}{610^2\cdot 5} = \frac{1}{10}$$

Concluímos, então, que no instante dado a medida do ângulo está aumentando a uma taxa de $\frac{1}{10}$rad/s e essa é a velocidade com que o holofote está girando.

EXERCÍCIOS 3.9

Nos Exercícios de 1 a 8, x e y são funções de uma terceira variável t.

1. Se $2x + 3y = 8$ e $\dfrac{dy}{dt} = 2$, ache $\dfrac{dx}{dt}$.
2. Se $\dfrac{x}{y} = 10$ e $\dfrac{dx}{dt} = -5$, ache $\dfrac{dy}{dt}$.
3. Se $xy = 20$ e $\dfrac{dy}{dt} = 10$, ache $\dfrac{dx}{dt}$ quando $x = 2$.
4. Se $2 \operatorname{sen} x + 4 \cos y = 3$ e $\dfrac{dy}{dt} = 3$, ache $\dfrac{dx}{dt}$ em $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi)$.
5. Se $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4}$ e $\dfrac{dx}{dt} = -1$, ache $\dfrac{dy}{dt}$ em $(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi)$.
6. Se $x^2 + y^2 = 25$ e $\dfrac{dx}{dt} = 5$, ache $\dfrac{dy}{dt}$ quando $y = 4$.
7. Se $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ e $\dfrac{dy}{dt} = 3$, ache $\dfrac{dx}{dt}$ quando $x = 1$.
8. Se $y(\operatorname{tg} x + 1) = 4$ e $\dfrac{dy}{dt} = -4$, ache $\dfrac{dx}{dt}$ quando $x = \pi$.

9. Uma pipa está voando a uma altura de 40 m. Uma criança está empinando-a de tal forma que ela se mova horizontalmente, a uma velocidade de 3 m/s. Se a linha estiver esticada, com que velocidade a linha estará sendo "dada", quando o comprimento da linha desenrolada for de 50 m?
10. Um balão esférico está sendo inflado de tal forma que seu volume aumente a uma taxa de 5 m^3/min. Qual a taxa de crescimento do diâmetro quando ele mede 12 m?
11. Uma bola de neve está se formando de tal modo que seu volume cresça a uma taxa de 8 cm^3/min. Ache a taxa segundo a qual o raio está crescendo quando a bola de neve tiver 4 cm de diâmetro.
12. Suponha que quando o diâmetro da bola de neve do Exercício 11 for de 6 cm, ela pare de crescer e comece a derreter a uma taxa $\frac{1}{4}$$cm^3$/min. Ache a taxa segundo a qual o raio estará variando, quando o raio for de 2 cm.
13. Uma certa quantidade de areia é despejada a uma taxa de 10 m^3/min, formando um monte cônico. Se a altura do monte for sempre o dobro do raio da base, com que taxa a altura estará crescendo quando o monte tiver 8 m de altura?
14. Uma lâmpada está pendurada a 4,5 m de um piso horizontal. Se um homem com 1,80 m de altura caminha afastando-se da luz, com uma velocidade de 1,5 m/s, qual a velocidade de crescimento da sombra?
15. No Exercício 14, com que velocidade a ponta da sombra do homem está se movendo?
16. Um homem com 1,80 m de altura caminha em direção a um edifício, com uma velocidade de 1,5 m/s. Se existe um ponto de luz no chão a 15 m do edifício, com que velocidade a sombra do homem no edifício estará diminuindo, quando ele estiver a 9 m do edifício?
17. Suponha que um tumor no corpo de uma pessoa tenha a forma esférica. Se, quando o raio do tumor for 0,5 cm, o raio estiver crescendo a uma taxa de 0,001 cm por dia, qual será a taxa de aumento do volume do tumor naquele instante?
18. Uma célula bacteriana tem a forma esférica. Se o raio da célula estiver crescendo à taxa de 0,01 micrômetros por dia quando ela tiver 1,5 μm, qual será a taxa de crescimento do volume da célula naquele instante?
19. Para o tumor no Exercício 17, qual será a taxa de crescimento da sua área quando seu raio for 0,5 cm?
20. Para a célula do Exercício 18, qual será a taxa de aumento da área quando o seu raio for 1,5 μm?
21. Um tanque com a forma de um cone invertido está sendo esvaziado a uma taxa de 6 m^3/min. A altura do cone é de 24 m e o raio da base é de 12 m. Ache a velocidade com que o nível de água está abaixando, quando a água tiver uma profundidade de 10 m.
22. Um cocho tem 360 cm de comprimento e seus extremos têm a forma de triângulos isósceles invertidos, com 90 cm de altura e 90 cm de base. Água está fluindo no cocho a uma taxa de 60 cm^3/min. Com que velocidade estará se elevando o nível da água quando a profundidade for de 30 cm?
23. A lei de Boyle para a expansão de um gás é $PV = C$, onde P é o número de quilos por unidade quadrada de pressão, V é o número de unidades cúbicas do volume do gás e C é uma constante. Num certo instante, a pressão é de 150 kg/m^2, o volume é 1,5 m^3 e está crescendo a uma taxa de 1 m^3/min. Ache a taxa de variação da pressão nesse instante.
24. A lei adiabática (sem ganho ou perda de calor) para a expansão do ar é $PV^{1,4} = C$, onde P é o número de quilos por unidade quadrática de pressão, V é o número de unidades cúbicas de volume e C é uma constante. Num dado instante, a pressão é de 18.000 g/cm^2 e está crescendo a uma taxa de 3.600 g/cm^2 a cada segundo. Qual será a taxa de variação do volume nesse instante?
25. Uma pedra cai livremente num lago parado. Ondas circulares se espalham e o raio da região afetada aumenta a uma taxa de 16 cm/s. Qual a taxa segundo a qual a região está aumentando quando o raio for de 4 cm?
26. Uma certa quantidade de óleo está sendo despejado num tanque com a forma cônica invertida, a uma taxa de 3π m^3/min. Se o tanque tiver um raio de 2,5 m no topo e 10 m de profundidade, com que velocidade a profundidade do óleo estará variando quando ela estiver com 8 m de produndidade?
27. Um automóvel aproxima-se de um cruzamento a uma velocidade de 30 m/s. Quando o automóvel está a 120 m do cruzamento, um caminhão a uma velocidade de 40 m/s atravessa o cruzamento. O automóvel e o caminhão estão em ruas que se cruzam em ângulo reto. Com que velocidade o automóvel e o caminhão estarão se afastando um do outro, 2 s após o caminhão ter passado pelo cruzamento?
28. Uma corda está amarrada em um barco no nível da água e uma mulher em um cais puxa a corda a uma taxa de 15 m/min. Se as mãos da mulher estão a 5 m acima do nível da água, com que velocidade o bote estará se aproximando do cais, quando o comprimento da corda já puxada for de 6 m?

29. Esta semana uma fábrica está produzindo 50 unidades de um determinado produto e a produção está crescendo a uma taxa de 2 unidades por semana. Se $C(x)$ for o custo total da produção de x unidades e $C(x) = 0{,}08\,x^3 - x^2 + 10x + 48$, ache a taxa corrente segundo a qual o custo de produção está crescendo.
30. A demanda por um determinado tipo de cereal é dada pela equação $px + 50p = 16.000$, onde x milhares de caixas são demandados quando o preço por caixa for p. Se o preço corrente for de \$ 1,60 por caixa e se os preços por caixa crescerem a uma taxa de \$ 0,4 por semana, ache a taxa de variação da demanda.
31. A equação de oferta para certo produto é $x = 1.000\sqrt{3p^2 + 20p}$, onde x unidades são oferecidas por mês quando p for o preço unitário. Ache a taxa de variação na oferta se o preço corrente for de \$ 20 por unidade e se o preço estiver crescendo a uma taxa de \$ 0,50 ao mês.
32. Suponha que na produção de x unidades de certo produto seja necessária uma força de trabalho de y operários e $x = 4y^2$. Se a produção este ano foi de 250.000 unidades e a produção está aumentando a uma taxa de 18.000 unidades ao ano, qual será a taxa corrente segundo a qual a força de trabalho deve ser aumentada?
33. A equação de demanda de uma determinada camisa é $2px + 65p - 4.950 = 0$, onde x centenas de camisas são demandadas por semana quando p for o preço unitário. Se a camisa estiver sendo vendida esta semana a \$ 30 e o preço estiver crescendo a uma taxa de \$ 0,20 por semana, ache a taxa de variação na demanda.
34. A medida de um ângulo agudo de um triângulo retângulo está decrescendo a uma taxa de $\frac{1}{36}\pi$ rad/s. Se o comprimento da hipotenusa for constante e igual a 40 cm, ache a velocidade com que a área está variando, quando a medida do ângulo agudo for $\frac{1}{6}\pi$.
35. Dois caminhões aproximam-se de um cruzamento, um deles vindo da direção oeste e o outro pelo sul. Se ambos estão com uma velocidade de k km/h, mostre que um se aproxima do outro com uma velocidade de $k\sqrt{2}$ km/h, quando cada um está a m km do cruzamento.
36. Uma tina horizontal tem 16 m de comprimento e seus extremos são trapézios isósceles com uma altura de 4 m, uma base menor de 4 m e uma base maior de 6 m. A água está fluindo dentro da tina a uma taxa de 10 m³/min. Com que velocidade o nível de água está subindo quando a profundidade da água é de 2 m?
37. No Exercício 36, se o nível de água estiver decrescendo a uma taxa de 25 cm/min quando a profundidade é de 3 m, com que velocidade a água está saindo da tina?
38. Uma escada com 7 m de comprimento está apoiada numa parede. Se o pé da escada for empurrado horizontalmente em direção à parede a 1,5 m/s, com que velocidade o topo da escada será deslocado para cima quando o pé da escada estiver a 2 m da parede?
39. Uma viga com 20 m está encostada em um aterro inclinado de 60° em relação à horizontal. Se o pé da viga estiver sendo movido horizontalmente em direção ao aterro a 1 m/s, com que velocidade o topo da viga estará se deslocando quando o pé estiver a 4 m do aterro?
40. O volume de um balão está decrescendo a uma taxa proporcional à sua área da superfície. Mostre que o raio do balão diminui a uma taxa constante.
41. Um avião está voando com velocidade constante a uma altitude de 3 km sobre uma linha reta que irá passar diretamente acima de um observador no chão. Num dado instante, o observador nota que o ângulo de elevação do avião é de $\frac{1}{3}\pi$ rad e está aumentando a uma taxa de $\frac{1}{60}$ rad/s. Ache a velocidade do avião.
42. Uma antena de radar está localizada num navio a 16 km de uma praia reta e está girando com 32 rpm. Com que velocidade o feixe do radar estará percorrendo a praia quando o feixe formar um ângulo de 45° com a praia?
43. Uma viga com 30 m de comprimento está apoiada em uma parede e o seu topo está se deslocando para baixo a uma velocidade de 0,5 m/s. Qual será a taxa de variação da medida do ângulo agudo formado pela viga e pelo chão quando o topo da viga estiver a 18 m do chão?
44. Dentro de um tanque na forma de um cone está fluindo água à razão de 8 m³/min. O cone tem 6 m de profundidade 3m de diâmetro no topo. Se houver um vazamento na base e se o nível da água estiver subindo a uma razão de 1 cm/min, quando a profundidade for de 4,8 m, como estará escoando o vazamento?

3.10 DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Se a função f for derivável, então f' será chamada a **derivada primeira** de f. Às vezes é chamada de **função derivada primeira**. Se a derivada de f' existir, ela será chamada de **derivada segunda** de f, ou de função derivada segunda e poderá ser denotada por f'' (lemos f duas linhas). Da mesma forma, a **derivada terceira** de f, ou a função derivada terceira, é definida como a derivada de f'', se ela existir. A derivada terceira de f é denotada por f''' (lemos f três linhas).

A **derivada enésima** da função f, onde n é um número inteiro positivo maior do que 1, é a derivada primeira da derivada $(n - 1)$ésima de f. Denotamos a derivada enésima de f por $f^{(n)}$. Assim, se $f^{(n)}$ for a derivada enésima da função, podemos escrever f como sendo $f^{(0)}$.

EXEMPLO 1 Ache todas as derivadas da função f definida por

$$f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$$

Solução

$$f'(x) = 32x^3 + 15x^2 - 2x$$
$$f''(x) = 96x^2 + 30x - 2$$
$$f'''(x) = 192x + 30$$
$$f^{(4)}(x) = 192$$
$$f^{(5)}(x) = 0$$
$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad n \geqslant 5$$

A notação de Leibniz para a derivada primeira é $\dfrac{dy}{dx}$. Para a derivada segunda de y em relação a x, a notação de Leibniz é $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, porque ela representa $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{d}{dx}(y)\right]$. O símbolo $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ é uma notação para a derivada enésima de y em relação a x.

Outros símbolos para a derivada enésima de f são

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)] \qquad D_x{}^n[f(x)]$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\frac{d^3}{dx^3}(2 \text{ sen } x + 3 \cos x - x^3)$$

Solução

$$\frac{d}{dx}(2 \text{ sen } x + 3 \cos x - x^3) = 2 \cos x - 3 \text{ sen } x - 3x^2$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(2 \text{ sen } x + 3 \cos x - x^3) = -2 \text{ sen } x - 3 \cos x - 6x$$
$$\frac{d^3}{dx^3}(2 \text{ sen } x + 3 \cos x - x^3) = -2 \cos x + 3 \text{ sen } x - 6$$

Como $f'(x)$ dá a taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação a x, $f''(x)$, que é a derivada de $f'(x)$, dá a taxa de variação instantânea de $f'(x)$ em relação a x. Além disso, se (x, y) for um ponto qualquer sobre o gráfico de $y = f(x)$, então $\dfrac{dy}{dx}$ dará a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto (x, y). Assim, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ será a taxa de variação instantânea da inclinação da reta tangente em relação a x no ponto (x, y).

EXEMPLO 3 Seja $m(x)$ a inclinação da reta tangente à curva

$$y = x^3 - 2x^2 + x$$

no ponto (x, y). Ache a taxa de variação instantânea de $m(x)$ em relação a x no ponto $(2, 2)$.

Solução

$$m(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$= 3x^2 - 4x + 1$$

A taxa de variação instantânea de $m(x)$ em relação a x é dada por $m'(x)$ ou, equivalentemente, por $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$m'(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$= 6x - 4$$

No ponto $(2, 2)$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 8$.

A derivada segunda $f''(x)$ é expressa em unidades de $f'(x)$ por unidade de x, ou seja, unidades de $f(x)$ por unidade de x, por unidade de x. Por exemplo, no movimento retílineo. Se $f(t)$ cm for a distância de uma partícula à origem no instante t s, então $f'(t)$ cm/s, será a velocidade da partícula no instante t s e $f''(t)$ cm/s/s (centímetros por segundo por segundo) será a taxa de variação instantânea da velocidade no mesmo instante t s. Em Física, a taxa de variação instantânea da velocidade é chamada de **aceleração instantânea**. Logo, se uma partícula está se movendo ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento $s = f(t)$, onde a velocidade instantânea é dada por v cm/s e a aceleração instantânea é dada por a cm/s^2, no instante t s, então a será a derivada primeira de v em relação ao tempo ou, equivalentemente, a derivada segunda de s em relação a t; isto é,

$$\boxed{\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ a &= \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow a = \frac{d^2s}{dt^2} \end{aligned}}$$

Quando $a > 0$, v é crescente e quando $a < 0$, v é decrescente. Quando $a = 0$, v não muda. Como a velocidade escalar de uma partícula no instante t é $|v|$ cm/s, temos os seguintes resultados:

(i) Se $v \geqslant 0$ e $a > 0$, a velocidade escalar é crescente.
(ii) Se $v \geqslant 0$ e $a < 0$, a velocidade escalar é decrescente.
(iii) Se $v \leqslant 0$ e $a > 0$, a velocidade escalar é decrescente.
(iv) Se $v \leqslant 0$ e $a < 0$, a velocidade escalar é crescente.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação

$$s = 3t^2 - t^3 \qquad t \geqslant 0 \tag{1}$$

onde s cm é a distância da partícula até a origem, decorridos t s. Se v cm/s for a velocidade instantânea em t s, então $v = \frac{ds}{dt}$. Logo,

$$v = 6t - 3t^2 \tag{2}$$

Se a cm/s² for a aceleração em t s, então $a = \frac{dv}{dt}$. Assim,

$$a = 6 - 6t \tag{3}$$

Vamos determinar para quais valores de t se anulam as quantidades s, v ou a. De (1),

$$s = 0 \text{ quando } t = 0 \text{ ou } t = 3$$

De (2),

$$v = 0 \text{ quando } t = 0 \text{ ou } t = 2$$

De (3),

$$a = 0 \text{ quando } t = 1$$

Tabela 1

	s	v	a	*Conclusão*
$t = 0$	0	0	6	A partícula está na origem. A velocidade é zero e está crescendo. A velocidade escalar está crescendo.
$0 < t < 1$	+	+	+	A partícula está à direita da origem, movendo-se para a direita. A velocidade é crescente. A velocidade escalar é crescente.
$t = 1$	2	3	0	A partícula está a 2 cm à direita da origem, movendo-se para a direita a 3 cm/s. A velocidade não está mudando, bem como a velocidade escalar.
$1 < t < 2$	+	+	−	A partícula está à direita da origem e está movendo-se para a direita. A velocidade é decrescente, bem como a velocidade escalar.
$t = 2$	4	0	−6	A partícula está a 4 cm à direita da origem e está mudando da direita para a esquerda. A velocidade é decrescente. A velocidade escalar é crescente.
$2 < t < 3$	+	−	−	A partícula está à direita da origem, movendo-se para a esquerda. A velocidade é decrescente. A velocidade escalar é crescente
$t = 3$	0	−9	−12	A partícula está na origem, movendo-se para a esquerda a 9 cm/s. A velocidade é decrescente. A velocidade escalar é crescente.
$3 < t$	−	−	−	A partícula está à esquerda da origem, movendo-se para a esquerda. A velocidade é decrescente. A velocidade escalar é crescente.

Na Tabela 1 estão valores de s, v e a para t igual a 0, 1, 2 e 3. Também estão indicados os sinais das quantidades s, v e a nos intervalos de t, excluindo 0, 1, 2 e 3. Uma conclusão é tirada relativa à posição e ao movimento da partícula para os vários valores de t.

Na Figura 1, o movimento da partícula se faz ao longo de uma reta horizontal e o comportamento do movimento está indicado acima da reta. ◀

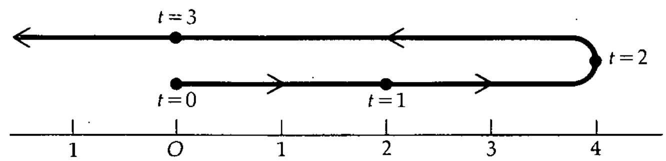


FIGURA 1

EXEMPLO 4 Uma partícula move-se ao longo de uma reta, de acordo com a seguinte equação de movimento:

$$s = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4t}{t+1}$$

onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem em t s. Se v cm/s for a velocidade instantânea em t s e a cm/s² for a aceleração em t s, ache t, s e v quando $a = 0$.

Solução

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

$$= t + \frac{4}{(t+1)^2} \qquad = 1 - \frac{8}{(t+1)^3}$$

Tomando $a = 0$, teremos

$$\frac{(t+1)^3 - 8}{(t+1)^3} = 0$$

$$(t+1)^3 = 8$$

de onde vemos que o único valor real de t é obtido da raiz cúbica de 8; assim sendo, $t + 1 = 2$ ou $t = 1$. Quando $t = 1$,

$$s = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{4 \cdot 1}{1+1} \qquad v = 1 + \frac{4}{(1+1)^2}$$

$$= \tfrac{5}{2} \qquad = 2$$

Portanto, a aceleração é 0 no instante 1 s, quando a partícula está a $\frac{5}{2}$ cm da origem, movendo-se para a direita com uma velocidade de 2 cm/s.

Uma partícula movendo-se sobre uma reta tem um **movimento harmônico simples** se a medida de sua aceleração for sempre proporcional à medida de seu deslocamento de um ponto fixo na reta e a aceleração e o deslocamento tiverem sempre sentidos opostos.

EXEMPLO 5 Mostre que se uma partícula estiver se movendo ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento,

$$s = b\,\text{sen}(kt + \theta) \tag{4}$$

onde b, k e θ são constantes e s cm é a distância orientada da partícula até a origem em t s, então o movimento será harmônico simples.

Solução Queremos mostrar que se a cm/s² for a aceleração da partícula em t s, então a será proporcional a s e a e s terão sinais opostos. Para determinar a encontramos primeiro v, onde v cm/s é a velocidade da partícula em t s.

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ &= b[\cos(kt + \theta)](k) \\ &= bk\cos(kt + \theta) \\ a &= \frac{dv}{dt} \\ &= bk\,[-\text{sen}(kt + \theta)]\,(k) \\ &= -bk^2\,\text{sen}(kt + \theta) \end{aligned}$$

Substituindo (4) nessa igualdade, temos

$$a = -k^2 s$$

Como $-k^2$ é uma constante, a é proporcional a s. Além disso, como $-k^2$ é negativo, a e s têm sentidos opostos. Logo, o movimento é harmônico simples.

A derivada segunda é aplicada ainda na construção do gráfico de uma função (Secção 4.5) e no teste da derivada segunda para extremos relativos (Secção 4.6). Uma aplicação importante das derivadas de ordem superior é no estudo de séries infinitas, conforme mostra o Capítulo 13.

O exemplo a seguir ilustra como a derivada segunda é encontrada para funções definidas implicitamente.

EXEMPLO 6 Dada

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

ache $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ por derivação implícita.

Solução Derivando implicitamente em relação a x, obtemos

$$8x + 18y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{9y} \tag{5}$$

Para encontrar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, calculamos a derivada de um quociente tendo em mente que y é uma função de x. Assim,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9y(-4) - (-4x)\left(9 \cdot \dfrac{dy}{dx}\right)}{81y^2}$$

Substituindo o valor de $\dfrac{dy}{dx}$ de (5) nessa equação, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-36y + (36x)\dfrac{-4x}{9y}}{81y^2} \\ &= \frac{-36y^2 - 16x^2}{81y^3} \\ &= \frac{-4(9y^2 + 4x^2)}{81y^3}\end{aligned}$$

Como qualquer valor de x e y satisfazendo essa equação deve também satisfazer a equação original, podemos substituir $9y^2 + 4x^2$ por 36 e obter

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-4(36)}{81y^3} \\ &= -\frac{16}{9y^3}\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 3.10

Nos Exercícios de 1 a 16 ache as derivadas primeira e segunda da função definida pela equação dada.

1. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$
2. $F(x) = 7x^3 - 8x^2$
3. $g(s) = 2s^4 - 4s^3 + 7s - 1$
4. $G(t) = t^3 - t^2 + t$
5. $F(x) = x^2\sqrt{x} - 5x$
6. $g(r) = \sqrt{r} + \dfrac{1}{\sqrt{r}}$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
8. $h(y) = \sqrt[3]{2y^3 + 5}$
9. $f(t) = 4 \cos t^2$
10. $g(t) = 2 \operatorname{sen}^3 t$
11. $G(x) = \operatorname{cotg}^2 x$
12. $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$
13. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$
14. $g(x) = (2x - 3)^2(x + 4)^3$
15. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x + 1}$
16. $f(x) = \sec 2x + \operatorname{tg} 2x$
17. Ache $D_x^{\,3}(x^4 - 2x^2 + x - 5)$.
18. Ache $D_t^{\,3}(\sqrt{4t + 1})$.
19. Ache $\dfrac{d^4}{dx^4}\left(\dfrac{3}{2x - 1}\right)$.
20. Ache $f^{(4)}(x)$ se $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$.
21. Ache $D_x^{\,3}(2 \operatorname{tg} 3x)$.
22. Ache $\dfrac{d^4}{dt^4}(3 \operatorname{sen}^2 2t)$.
23. Ache $f^{(5)}(x)$ se $f(x) = \cos 2x - \operatorname{sen} 2x$.
24. Ache $\dfrac{d^3u}{dv^3}$ se $u = v\sqrt{v - 2}$.
25. Dada $x^2 + y^2 = 1$, mostre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{y^3}$.
26. Dada $x^2 + 25y^2 = 100$, mostre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{4}{25y^3}$.
27. Dada $x^3 + y^3 = 1$, mostre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2x}{y^5}$.
28. Dada $x^{1/2} + y^{1/2} = 2$, mostre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$.
29. Dada $x^4 + y^4 = a^4$ (a é uma constante), ache $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ na forma mais simples.

30. Dada $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ (a e b são constantes), ache $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ na forma mais simples.
31. Ache a inclinação da reta tangente em cada ponto do gráfico de $y = x^4 + x^3 - 3x^2$, onde a taxa de variação da inclinação é zero.
32. Ache a taxa de variação instantânea da inclinação da reta tangente ao gráfico $y = 2x^3 - 6x^2 - x + 1$ no ponto $(3, -2)$.

Nos Exercícios 33 e 34, uma partícula está se movendo ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem, v cm/s é a velocidade da partícula e a cm/s² é a aceleração da partícula no instante t s. Ache v e a em termos de t. Faça uma tabela similar à Tabela 1 que dê uma descrição da posição e movimento da partícula. Inclua na tabela os intervalos de tempo, onde a partícula está se movendo para a direita e para a esquerda, onde a velocidade é crescente e decrescente, quando a velocidade escalar é crescente e decrescente, e a posição da partícula com relação à origem nesses intervalos. Mostre o comportamento do movimento numa figura similar à Figura 1.

33. $s = t^3 - 9t^2 + 15t,\ t \geqslant 0$
34. $s = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 6t - 2,\ t \geqslant 0$

Nos Exercícios de 35 a 39, uma partícula está se movendo ao longo de uma reta, de acordo com a equação dada, onde s m é a distância orientada entre a posição da partícula e a origem no instante t s. Ache o instante em que a aceleração instantânea é zero e nesse instante determine a distância orientada a partir da origem e a velocidade instantânea.

35. $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1,\ t \geqslant 0$
36. $s = 2t^3 - 6t^2 + 3t - 4,\ t \geqslant 0$
37. $s = \dfrac{125}{16t + 32} - \dfrac{2}{5}t^5,\ t \geqslant 0$
38. $s = 9t^2 + 2\sqrt{2t + 1},\ t \geqslant 0$
39. $s = \frac{4}{9}t^{3/2} + 2t^{1/2},\ t \geqslant 0$

Nos Exercícios de 40 a 45, uma partícula está se movendo ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento dada, onde s cm é a distância orientada entre a partícula e a origem no instante t s. Mostre que o movimento é harmônico simples.

40. $s = A \operatorname{sen} 2\pi kt + B \cos 2\pi kt$, onde A, B, e k são constantes.
41. $s = b \cos (kt + \theta)$, onde b, k, e θ são constantes.
42. $s = 6 \operatorname{sen} (t + \frac{1}{3}\pi) + 4 \operatorname{sen} (t - \frac{1}{6}\pi)$
43. $s = \operatorname{sen} (6t - \frac{1}{3}\pi) + \operatorname{sen} (6t + \frac{1}{6}\pi)$
44. $s = 8 \cos^2 6t - 4$
45. $s = 5 - 10 \operatorname{sen}^2 2t$

Nos Exercícios de 46 a 49, ache as fórmulas para $f'(x)$ e $f''(x)$ e estabeleça os domínios de f' e f''.

46. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
47. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$
48. $f(x) = |x|^3$
49. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

50. Para a função do Exercício 48, ache $f'''(x)$ quando ela existir.
51. Para a função do Exercício 49, ache $f'''(x)$ quando ela exitir.
52. Mostre que se $xy = 1$, então $\dfrac{d^2y}{dx^2} \cdot \dfrac{d^2x}{dy^2} = 4$.
53. Se f', g', f'' e g'' existem e se $h = f \circ g$, expresse $h''(x)$ em termos das derivadas de f e g.
54. Se f e g são duas funções, tais que suas derivadas primeira e segunda existem e h é a função definida pela equação $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, prove que

$$h''(x) = f(x) \cdot g''(x) + 2f'(x) \cdot g'(x) + f''(x) \cdot g(x)$$

55. Se $y = x^n$, onde n é qualquer inteiro positivo, prove, por indução matemática, que $\dfrac{d^ny}{dx^n} = n!$
56. Se

$$y = \frac{1}{1 - 2x}$$

prove, por indução matemática, que

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{2^n n!}{(1 - 2x)^{n+1}}$$

57. Se k for um inteiro positivo qualquer, prove, por indução matemática, que

$$D_x{}^n(\operatorname{sen} x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } n = 4k \\ \cos x & \text{se } n = 4k + 1 \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } n = 4k + 2 \\ -\cos x & \text{se } n = 4k + 3 \end{cases}$$

58. Obtenha uma fórmula similar a do Exercício 57 para $D_x{}^n(\cos x)$.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 3

Nos Exercícios de 1 a 16, ache a derivada da função dada.

1. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 2x - 3$
2. $g(x) = 5(x^4 + 3x^7)$
3. $g(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{4}{x^2}$
4. $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x^4}$
5. $F(x) = 2x^{1/2} - \dfrac{1}{2}x^{-1/2}$
6. $G(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$
7. $G(t) = (3t^2 - 4)(4t^3 + t - 1)$
8. $f(x) = (x^4 - 2x)(4x^2 + 2x + 5)$

9. $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$ 10. $h(y) = \dfrac{y^2}{y^3 + 8}$

11. $f(s) = (2s^3 - 3s + 7)^4$ 12. $F(x) = (4x^4 - 4x^2 + 1)^{-1/3}$

13. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x^3 + 1}}$ 14. $g(x) = \left(\dfrac{3x^2 + 4}{x^7 + 1}\right)^{10}$

15. $F(x) = (x^2 - 1)^{3/2}(x^2 - 4)^{1/2}$ 16. $g(x) = (x^4 - x)^{-3}(5 - x^2)^{-1}$

Nos Exercícios de 17 a 24, calcule a derivada indicada.

17. $D_x[(x + 1)\text{sen}\,x - x \cos x]$ 18. $D_r(\text{tg}^2\, 3r)$

19. $\dfrac{d}{dx}\left(x \text{ tg } \dfrac{1}{x}\right)$ 20. $D_t(\text{sen}^2\, 3t\sqrt{\cos 2t})$

21. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\sec^2 t}{1 + t^2}\right)$ 22. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1 + \text{sen } x}{x \cos x}\right)$

23. $D_w[\text{sen}(\cos 3w) - 3\cos^2 2w]$ 24. $D_x(\text{tg}^3\, x \cdot \sec x)$

Nos Exercícios de 25 a 34, ache $\dfrac{dy}{dx}$.

25. $4x^2 + 4y^2 - y^3 = 0$ 26. $y = \sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}$

27. $y = \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$ 28. $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$

29. $\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y) = 1$ 30. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

31. $y = x^2 + [x^3 + (x^4 + x)^2]^3$ 32. $y = \dfrac{x\sqrt{3 + 2x}}{4x - 1}$

33. $\text{tg } x + \text{tg } y = xy$ 34. $\sec(x + y) - \sec(x - y) = 1$

35. Ache as equações das retas tangentes à curva $y = 2x^3 + 4x^2 - x$ que têm inclinação $\frac{1}{2}$.

36. Ache uma equação da reta normal à curva $x - y = \sqrt{x + y}$ no ponto (3, 1).

37. Ache as equações das retas tangente e normal à curva $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$ no ponto (2, 1).

38. Ache as equações das retas tangente e normal à curva $y = 8 \text{ sen}^3\, 2x$ no ponto $(\frac{1}{12}\pi, 1)$.

39. Prove que a reta tangente à curva $y = -x^4 + 2x^2 + x$ no ponto (1, 2) é também tangente à curva em um outro ponto e determine esse ponto.

40. Prove que as retas tangentes às curvas

$$4y^3 - x^2y - x + 5y = 0 \quad \text{e} \quad x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$$

na origem são perpendiculares.

41. Encontre $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ se $y = \sqrt{3 - 2x}$.

42. Dada $\dfrac{dy}{dx} = y^k$, onde k é uma constante e y, uma função de x, expresse $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ em termos de y e k.

43. Dada $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 8x + 2$. Para que valores de x $f''(x) > 0$?

44. Mostre que se $xy = k$, onde k é uma constante não-nula, então $\dfrac{d^2y}{dx^2} \cdot \dfrac{d^2x}{dy^2} = \dfrac{4}{k}$.

45. Uma partícula se movimenta sobre uma reta horizontal segundo a equação $s = t^3 - 11t^2 + 24t + 100$, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem no instante t s. (a) A partícula está no ponto inicial quando $t = 0$. Para que outros valores de t a partícula estará de novo no ponto inicial? (b) Determine a velocidade da partícula em cada instante em que ela estiver no ponto inicial e interprete o sinal da velocidade em cada caso.

46. Uma partícula se movimenta sobre uma reta horizontal, de acordo com a equação $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$, onde s cm é a distância orientada da partícula a partir de um ponto O em t s. O sentido positivo do movimento é para a direita. Determine os intervalos de tempo nos quais a partícula se move para a direita e para a esquerda. Determine também quando a partícula inverte o sentido de seu movimento na reta. Mostre o comportamento do movimento como uma figura e escolha valores de t ao acaso, mas inclua os valores de t nos quais a partícula inverte o sentido do seu movimento.

47. Uma partícula move-se ao longo de uma reta segundo a equação $s = 5 - 2\cos^2 t$, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem em t s. Se v cm/s e a cm/s² forem, respectivamente, a velocidade e a aceleração da partícula em t s, ache v e a em termos de s.

48. Um objeto está escorregando por um plano inclinado de acordo com a equação $s = 12t^2 + 6t$, onde s m é a distância orientada do objeto até o topo do plano, após t s do início do movimento. (a) Ache a velocidade aos 3 s. (b) Ache a velocidade inicial.

49. Uma bola é atirada para cima do topo de um prédio com 112 m de altura. Sua equação de movimento é $s = -16t^2 + 96t$, onde s m é a distância orientada da bola ao ponto de partida, após t s. Ache (a) a velocidade instantânea da bola após 2 s; (b) qual a altura máxima atingida pela bola? (c) Quanto tempo levará para a bola atingir o solo? (d) Ache a velocidade instantânea da bola ao atingir o solo.

50. A lei de Stefan afirma que um corpo emite energia radiante, de acordo com a fórmula $R = kT^4$, onde R é a medida da taxa de emissão da energia radiante por unidade quadrada de área, T é a medida Kelvin da temperatura da superfície e k é uma constante. Ache (a) a taxa média de variação de R em relação a T quando T passa de 200 a 300; (b) a taxa de variação instantânea de R em relação a T, quando T é 200.

51. Se A unidades quadradas for a área de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos têm x unidades de comprimento, ache (a) a taxa média de variação de A em relação a x quando x varia de 8,00 para 8,01; (b) a taxa de variação instantânea de A em relação a x, quando x é 8,00.

52. Se $y = x^{2/3}$, ache a taxa relativa de variação de y em relação a x quando (a) $x = 8$ e (b) $x = c$, onde c é uma constante.

53. A equação de oferta de uma calculadora é $y = m^2 + \sqrt{m}$, onde $100y$ calculadoras são fornecidas quando o preço de cada calculadora for m. Ache (a) a taxa média de variação da oferta em relação ao preço quando ele passa de \$ 16 para \$ 17; (b) a taxa de variação instantânea (ou marginal) da oferta em relação ao preço, quando ele é \$16.

54. Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$, se $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.
55. Use a definição de derivada para encontrar $f'(-5)$, se $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$.
56. Use a definição de derivada para encontrar $f'(5)$, se $f(x) = \sqrt{3x+1}$.
57. Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$, se $f(x) = \sqrt{4x-3}$.
58. Ache $f''(x)$ se $f(x) = 3 \operatorname{sen}^2 x - 4 \cos^2 x$.
59. Ache $f''(\pi)$ se $f(x) = \sqrt{2 + \cos x}$.
60. Ache $f'(-3)$ se $f(x) = (|x| - x)\sqrt[3]{9x}$.
61. Ache $f'(x)$ se $f(x) = (|x+1| - |x|)^2$.
62. Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 16 & \text{se } x < 4 \\ 8x - 32 & \text{se } 4 \leqslant x \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de f. (b) Determine se f é contínua em 4. (c) Determine se f é derivável em 4.

63. Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x \leqslant 3 \\ 20 - x^2 & \text{se } 3 < x \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de f. (b) Determine se f é contínua em 3. (c) Determine se f é derivável em 3.

64. O teorema do resto em Álgebra Elementar afirma que, se $P(x)$ é um polinômo em x e r é um número real qualquer, então existe um polinômio $Q(x)$, tal que $P(x) = Q(x)(x - r) + P(r)$. Qual é o $\lim_{x \to r} Q(x)$?
65. Dada $f(x) = |x|^3$. (a) Faça um esboço do gráfico de f. (b) Ache $\lim_{x \to 0} f(x)$, se existir. (c) Ache $f'(0)$ se existir.
66. Dada $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$. (a) Onde f é derivável? (b) f' é contínua em seu domínio?
67. Dada

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{se } x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

Ache os valores de a e b, tais que $f'(1)$ exista.

68. Suponha que

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$$

Ache os valores de a, b e c, tais que $f''(1)$ exista.

69. Se $C(x)$ for a quantia em dinheiro correspondente ao custo total da fabricação de x cadeiras e $C(x) = x^2 + 40x + 800$, ache (a) a função custo marginal; (b) o custo marginal quando 20 cadeiras são fabricadas, (c) o custo real da fabricação da vigésima primeira cadeira.
70. O rendimento total recebido da venda de x lâmpadas é $R(x)$ e $R(x) = 100x - \frac{1}{6}x^2$. Ache (a) a função rendimento marginal; (b) o rendimento marginal quando $x = 15$; (c) o rendimento real da venda da décima sexta lâmpada.
71. Em um lago grande, um peixe predador alimenta-se de um peixe menor e a população de predadores em qualquer época é uma função do número de peixes pequenos no lago, naquele período de tempo. Suponha que quando há x peixes pequenos no lago, a população de predatores é y e $y = \frac{1}{4}x^2 + 80$. Se a temporada de pesca terminou t semanas atrás, $x = 8t + 90$. A que taxa a população do peixe predador estará crescendo 9 semanas após o término da temporada de pesca? Não expresse y em termos de t, mas use a regra da cadeia.
72. A equação de demanda para uma barra de chocolate é

$$px + x + 20p = 3000$$

onde $1.000x$ barras são demandadas por semana quando p centavos é o preço por unidade. Se o preço atual de cada barra for 49 centavos e estiver aumentando à taxa de 0,2 centavos por semana, ache a taxa de variação na demanda.

73. Uma partícula move-se ao longo de uma reta, e

$$s = \operatorname{sen}(4t + \tfrac{1}{3}\pi) + \operatorname{sen}(4t + \tfrac{1}{6}\pi)$$

onde s m é a distância da partícula até a origem no instante t s. Prove que o movimento é harmônico simples.

74. Se a equação do movimento é $s = \cos 2t + 2 \operatorname{sen} 2t$, prove que o movimento é harmônico simples.
75. Se uma partícula se move ao longo de uma reta e $s = \cos 2t + \cos t$, prove que o movimento não é harmônico simples.
76. Uma partícula move-se numa reta, de acordo com a equação $s = \sqrt{a + bt^2}$; onde a e b são constantes positivas. Prove que a medida da aceleração é inversamente proporcional a s^3 para todo t.
77. Um navio deixa um porto ao meio-dia e desloca-se para o oeste com a velocidade de 20 nós (um nó é uma milha náutica por hora e 1 milha náutica equivale a aproximadamente 2 km). Ao meio-dia do dia seguinte um segundo navio deixa o mesmo porto e viaja para o noroeste a 15 nós. Com que velocidade os navios se separam quando o segundo navio percorreu 90 milhas náuticas?
78. Um reservatório tem 80 m de comprimento e sua secção transversal é um trapézio isósceles com lados iguais de 10 m, uma base superior de 17 m e uma base inferior de 5 m. Quando a água tiver 5 m de profundidade, ache a taxa segundo a qual estará escoando, se o nível de água estiver abaixando a uma taxa de 0,1 m/h.
79. Um funil na forma de um cone tem 10 cm de diâmetro do topo e 8 cm de profundidade. A água está fluindo dentro do funil, a uma taxa de 12 cm³/s e para fora do funil, a uma taxa de 4 cm³/s. Com que velocidade o nível de água estará subindo, quando a profundidade for de 5 cm?
80. Quando o último vagão de um trem passa por baixo de um viaduto, um automóvel cruza o viaduto numa rodovia perpendicular aos trilhos e 30 m acima deles. O trem está a 80 m/s, enquanto que o automóvel está a 40 m/s. Com que velocidade se afastam um do outro após 2 s?
81. Um homem com 1,80 m de altura caminha em direção a um edifício com uma velocidade de 1,20 m/s. Há um ponto de luz no chão a 12 m do edifício. Com que velocidade diminui a sombra do homem no edifício, quando ele está a 9 m do edifício?

82. Uma queimadura na pele de uma pessoa tem a forma circular. Se o raio da queimadura estiver diminuindo à taxa de 0,05 cm por dia quando ela tem 1,0 cm, qual será a taxa de diminuição da área da queimadura naquele instante?

83. Suponha que $f(x) = 3x + |x|$ e $g(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}|x|$. Prove que nem $f'(0)$, nem $g'(0)$ existem, mas que $(f \circ g)'(0)$ existe.

84. Dê um exemplo de duas funções f e g para as quais f é derivável, em $g(0)$, g não é derivável em 0 e $f \circ g$ é derivável em 0.

85. Dê um exemplo de duas funções f e g, tais que f não seja derivável em $g(0)$, g seja derivável em 0 e $f \circ g$ seja derivável em 0.

86. No Exercício 59 dos Exercícios 3.1, prove que se f for derivável em a, então

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\,\Delta x}$$

Mostre, usando a função valor absoluto, que é possível existir o limite acima, mesmo que $f'(a)$ não exista.

87. Se $f'(x_1)$ existir, prove que

$$\lim_{x \to x_1} \frac{xf(x_1) - x_1 f(x)}{x - x_1} = f(x_1) - x_1 f'(x_1)$$

88. Sejam f e g funções cujos domínios são o conjunto de todos os números reais. Além disso, suponha que (i) $g(x) = xf(x) + 1$; (ii) $g(a + b) = g(a) \cdot g(b)$ para todo a e b; (iii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Prove que $g'(x) = g(x)$.

89. Se duas funções, f e g forem deriváveis num número x_1, a função composta $f \circ g$ será, necessariamente, derivável em x_1? Se sua resposta for afirmativa, prove-a. Se a resposta for negativa, dê um contra-exemplo.

90. Suponha que $g(x) = |f(x)|$. Se $f^{(n)}(x)$ existir e $f(x) \neq 0$, prove que

$$g^{(n)}(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} f^{(n)}(x)$$

91. Prove que $D_x^n(\text{sen } x) = \text{sen}(x + \frac{1}{2}n\pi)$. (*Sugestão*: use a indução matemática e as fórmulas $\text{sen}(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos x$ ou $\cos(x + \frac{1}{2}\pi) = -\text{sen } x$ após cada derivação.)

92. Suponha que a função f seja definida no intervalo aberto $(0, 1)$ e

$$f(x) = \frac{\text{sen } \pi x}{x(x - 1)}$$

Defina f em 0 e 1, de tal forma que f seja contínua no intervalo fechado $[0, 1]$.