Conteúdo

UM

Números Reais, Funções e Gráficos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Aprender Cálculo pode ser sua experiência educacional mais empolgante e estimulante pois é a base para quase toda a Matemática e para muitas das grandes realizações no mundo moderno. Você deverá iniciar o estudo de Cálculo com o conhecimento de certos conceitos matemáticos. Em primeiro lugar, pressupõe-se que você possua conhecimentos de Álgebra e Geometria, do primeiro e do segundo graus. Além disso, existem tópicos que são de extrema importância. Talvez você já os tenha estudado em algum curso de Matemática; senão, você terá um primeiro contato com eles neste capítulo.

Você precisa ter familiaridade com fatos sobre os *números reais* e fazer operações envolvendo desigualdades com desenvoltura; esse material será o objeto da primeira secção. As três secções a seguir contêm uma introdução a algumas noções de *Geometria Analítica* que serão necessárias posteriormente.

Função é um dos conceitos básicos em Cálculo e será definida aqui como um conjunto de pares ordenados. Essa idéia é usada para enfatizar o conceito de função como uma correspondência entre conjuntos de números reais. A notação de função, tipos de funções e operações com funções também serão discutidos na Secção 1.4, enquanto os gráficos de funções serão tratados na Secção 1.5.

Provavelmente você já tenha estudado *funções trigonométricas* em algum curso anterior, mas uma revisão das definições básicas será apresentada na Secção 1.6. Há também uma aplicação da função tangente à inclinação de uma reta.

Dependendo de seu preparo, esse capítulo poderá ser estudado em detalhes, ser tratado como uma revisão ou omitido.

1.1 NÚMEROS REAIS E DESIGUALDADES

O **sistema numérico real** consiste em um conjunto de elementos chamados de **números reais** e duas operações denominadas **adição** e **multiplicação**, denotadas pelos símbolos + e $\cdot$, respectivamente. Se a e b forem elementos do conjunto R, $a + b$ denotará a **soma** de a e b e $a \cdot b$ (ou ab) denotará o seu **produto.** A operação de subtração é definida pela igualdade

$$a - b = a + (-b)$$

onde $-b$ denota o **negativo** de b, tal que $b + (-b) = 0$. A operação de **divisão** é definida pela igualdade

$$a \div b = a \cdot b^{-1} \qquad b \neq 0$$

onde b^{-1} denota o **recíproco** de b, tal que $b \cdot b^{-1} = 1$.

O sistema numérico real pode ser inteiramente descrito por um conjunto de axiomas (a palavra **axioma** é usada para indicar uma afirmação formal considerada verdadeira, dispensando provas). Com esses axiomas podemos deduzir as propriedades dos números reais das quais seguem as operações algébricas de adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como os conceitos algébricos de resolução de equações, fatoração e assim por diante.

As propriedades que podem ser obtidas como conseqüências lógicas dos axiomas são os **teoremas**. No enunciado da maioria dos teoremas existem duas partes: a parte do "se", chamada de **hipótese** e a parte do "então", chamada de **conclusão.** A argumentação que verifica a veracidade de um teorema é uma **demonstração** (ou **prova**), a qual consiste em mostrar que a conclusão é conseqüência de se admitir a hipótese como verdadeira.

Um número real é positivo, negativo ou zero e qualquer número real pode ser classificado como *racional* ou *irracional*. Um **número racional** é qualquer número que pode ser expresso como a razão de dois inteiros. Isto é, um número racional é da forma p/q, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$. Os números racionais consistem em:

Os **inteiros** (positivos, negativos e zero)

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

As **frações** positivas e negativas, como

$$\tfrac{2}{7} \qquad -\tfrac{4}{5} \qquad \tfrac{83}{5}$$

Os **decimais que terminam** positivos e negativos, como

$$2{,}36 = \frac{236}{100} \qquad -0{,}003251 = -\frac{3.251}{1.000.000}$$

Os **decimais que não terminam mas apresentam repetição periódica**, como

$0{,}333\ldots = \frac{1}{3} \qquad -0{,}549549549\ldots = -\frac{61}{111}$

Os números reais que não são racionais são chamados de **números irracionais.** Esses são os decimais **que não terminam e não são periódicos**, por exemplo,

$$\sqrt{3} = 1{,}732\ldots \qquad \pi = 3{,}14159\ldots$$

Vamos usar na discussão a seguir a notação e terminologia da teoria dos conjuntos. A idéia de *conjunto* é usada amplamente em Matemática, sendo esse um conceito tão básico que dele não será dada aqui uma definição formal. Podemos dizer que um *conjunto* é uma coleção de objetos e os objetos de um conjunto são chamados de **elementos**. Se todo elemento de um conjunto S for também elemento de um conjunto T, então S será um **subconjunto** de T. Em Cálculo estamos interessados no conjunto R dos números reais. Dois exemplos de subconjuntos de R são o conjunto N dos números naturais (os inteiros positivos) e o conjunto Z dos inteiros.

Vamos usar o símbolo $\in$ para indicar que um determinado elemento pertence a um conjunto. Assim, podemos escrever que $8 \in N$, e lemos: "8 é um elemento de N". A notação a, $b \in S$ indica que ambos a e b são elementos de S. O símbolo $\notin$ indica "não é um elemento de". Assim, entendemos $\frac{1}{2} \notin N$ como "$\frac{1}{2}$ não é um elemento de N".

Um par de chaves { } usadas para delimitar palavras ou símbolos pode descrever um conjunto. Se S for o conjunto dos números naturais menores do que 6, podemos escrever o conjunto S como

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Podemos também escrever o conjunto S como

{x, tal que x seja um número natural menor do que 6}

onde o símbolo x é chamado de *variável*. Uma **variável** é um símbolo usado para representar qualquer elemento de um conjunto dado. Outra maneira de escrever o conjunto S acima é usar a chamada **notação construtiva de conjunto,** onde uma barra vertical é usada em lugar das palavras *tal que*:

{$x \mid x$ seja um número natural menor do que 6}

que lemos: "o conjunto de todos os x, tal que x seja um número natural menor do que 6".

Dois conjuntos A e B serão **iguais**, e escrevemos $A = B$, se A e B tiverem elementos idênticos. A **união** de dois conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, que lemos "A união B", é o conjunto de todos os elementos que estão em A ou em B, ou em ambos. A **intersecção** de A e B, denotada por $A \cap B$, que lemos "A intersecção B", é o conjunto dos elementos que estão em A e B. O conjunto que não contém nenhum elemento é chamado de **conjunto vazio**, sendo denotado por $\varnothing$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Suponha $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{1, 4, 9, 16\}$, e $C = \{2, 10\}$. Então

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 16\} \qquad A \cap B = \{4\}$$
$$B \cup C = \{1, 2, 4, 9, 10, 16\} \qquad B \cap C = \varnothing$$ ◀

Há uma ordenação para o conjunto R através de uma relação denotada pelos símbolos $<$ (lemos "é menor do que") e $>$ (lemos "é maior do que").

1.1.1 DEFINIÇÃO

Se $a, b \in R$,

(i) $a < b$ se e somente se $b - a$ for positivo;
(ii) $a > b$ se e somente se $a - b$ for positivo.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2**

$3 < 5$ pois $5 - 3 = 2$, e 2 é positivo
$-10 < -6$ pois $-6 - (-10) = 4$, e 4 é positivo
$7 > 2$ pois $7 - 2 = 5$, e 5 é positivo
$-2 > -7$ pois $-2 - (-7) = 5$, e 5 é positivo
$\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ pois $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$, e $\frac{1}{12}$ é positivo ◀

Vamos definir agora os símbolos $\leqslant$ (lemos "é menor do que ou igual a") e $\geqslant$ (lemos "é maior do que ou igual a").

1.1.2 DEFINIÇÃO

Se $a, b \in R$,

(i) $a \leqslant b$ se e somente se for válida qualquer uma das duas relações $a < b$ ou $a = b$;
(ii) $a \geqslant b$ se e somente se for válida qualquer uma das duas relações $a > b$ ou $a = b$.

As afirmações $a < b$, $a > b$, $a \leqslant b$ e $a \geqslant b$ são chamadas de **desigualdades**. Especificando, $a < b$ e $a > b$ são chamadas de desigualdades **estritas**, enquanto que $a \leqslant b$ e $a \geqslant b$ são denominadas desigualdades **não-estritas**.

O teorema a seguir decorre imediatamente da Definição 1.1.1.

1.1.3 TEOREMA

(i) $a > 0$ se e somente se a for positivo;
(ii) $a < 0$ se e somente se a for negativo.

Um número x está **entre** a e b se $a < x$ e $x < b$. Podemos escrever isso como uma **seqüência de desigualdades**, da seguinte forma:

$a < x < b$

Outra seqüência de desigualdades é

$a \leqslant x \leqslant b$

que significa que acontecem ambas as desigualdades $a \leqslant x$ e $x \leqslant b$. Outras seqüências de desigualdades são $a \leqslant x < b$ e $a < x \leqslant b$.

O teorema a seguir pode ser provado usando os axiomas sobre o conjunto R e os teoremas de 1.1.1 a 1.1.3.

1.1.4 TEOREMA

(i) Se $a > 0$ e $b > 0$ então $a + b > 0$.
(ii) Se $a > 0$ e $b > 0$ então $ab > 0$.

A parte (i) do teorema acima estabelece que a soma de dois números positivos é positiva e a parte (ii) estabelece que o produto de dois números positivos é positivo.

1.1.5 TEOREMA
Propriedade Transitiva da Ordem

Se $a, b, c \in R$, e
se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se $x < 5$ e $5 < y$, então, pela propriedade transitiva da ordem, decorre $x < y$. ◀

1.1.6 TEOREMA Suponhamos que $a, b, c \in R$.

(i) Se $a < b$ então $a + c < b + c$.
(ii) Se $a < b$ e $c > 0$ então $ac < bc$.
(iii) Se $a < b$ e $c < 0$ então $ac > bc$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** (a) Se $x < y$, segue, do Teorema 1.1.6(i), que $x + 4 < y + 4$. Por exemplo, $3 < 9$; assim $3 + 4 < 9 + 4$ ou, equivalentemente, $7 < 13$. Além disso, se $x < y$, então $x - 11 < y - 11$. Por exemplo, $3 < 9$; assim $3 - 11 < 9 - 11$ ou, equivalentemente, $-8 < -2$.

(b) Se $x < y$, segue do Teorema 1.1.6(ii) que $7x < 7y$. Por exemplo, como $5 < 8$, então $7 \cdot 5 < 7 \cdot 8$ ou, equivalentemente, $35 < 56$.

(c) Como $4 < 6$, então se $z < 0$, segue do Teorema 1.1.6(iii) que $4z > 6z$. Por exemplo, como $4 < 6$, então $4(-3) > 6(-3)$ ou, equivalentemente, $-12 > -18$. ◀

A parte (ii) do Teorema 1.1.6 estabelece que se ambos os membros de uma desigualdade forem multiplicados por um número positivo, o sentido da desigualdade permanecerá inalterado, enquanto que a parte (iii) estabelece que se ambos os membros de uma desigualdade forem multiplicados por um número negativo, o sentido da desigualdade será invertido. As partes (ii) e (iii) também são válidas para a divisão, pois dividir ambos os membros de uma desigualdade por um número $d (d \neq 0)$ é equivalente a multiplicá-los por $\frac{1}{d}$.

1.1.7 TEOREMA Se $a < b$ e $c < d$ então $a + c < b + d$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Se $x < 8$ e $y < -3$, então temos, pelo Teorema 1.1.7, que $x + y < 8 + (-3)$; isto é, $x + y < 5$. ◀

Vamos impor ao conjunto R a condição chamada de **axioma do completamento** (Axioma 12.2.5). O enunciado desse axioma será adiado até a Secção 12.2, pois requer uma terminologia que será melhor introduzida e discutida mais adiante. Entretanto, daremos agora uma interpretação geométrica do conjunto dos números reais, associando-os aos pontos de uma reta, chamada **eixo**. O axioma do completamento garante que existe uma correspondência um a um, ou seja, biunívoca, entre o conjunto R e o conjunto de pontos de um eixo.

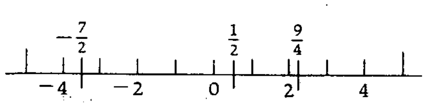


FIGURA 1

Veja a Figura 1, onde o eixo é uma reta horizontal. Um ponto do eixo é escolhido para representar o número 0. Esse ponto é chamado de **origem**. Uma unidade de distância é escolhida. Então, cada número positivo x é representado pelo ponto localizado a uma distância de x unidades à direita da origem, e cada número negativo x é representado pelo ponto localizado a uma distância de $-x$ unidades à esquerda da origem (note que se x for negativo, então $-x$ será positivo). A cada número real corresponde um único ponto sobre o eixo e a cada ponto sobre o eixo está associado um único número real; logo, há uma correspondência biunívoca entre R e os pontos do eixo. Assim, os pontos do eixo são identificados com os números que eles representam, e o mesmo símbolo será usado tanto para o número como para o ponto sobre o eixo que representa o número. Identificamos R como o eixo, que por sua vez é chamado de **reta numérica real**.

Vemos que $a < b$ se e somente se o ponto que representa o número a estiver à esquerda do ponto que representa o número b. Da mesma forma, $a > b$ se e somente se o ponto que representa a estiver à direita do ponto que representa

b. Por exemplo, o número 2 é menor do que o número 5 e o ponto 2 está à esquerda do ponto 5. Poderíamos escrever também $5 > 2$ e dizer que o ponto 5 está à direita do ponto 2.

O conjunto de todos os números x que satisfazem a seqüência de desigualdades $a < x < b$ é chamado de **intervalo aberto**, sendo denotado por (a, b). Logo

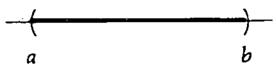


FIGURA 2

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

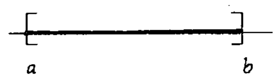


FIGURA 3

O **intervalo fechado** de a até b é o intervalo aberto (a, b) mais os dois pontos extremos a e b, sendo denotado por $[a, b]$. Assim

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

A Figura 2 ilustra o intervalo aberto (a, b), e a Figura 3 ilustra o intervalo fechado $[a, b]$.

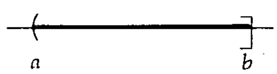


FIGURA 4

O **intervalo semi-aberto à esquerda** é o intervalo aberto (a, b), mais o extremo direito b. É denotado por $(a, b]$; assim

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$$

FIGURA 5

Definimos **intervalo semi-aberto à direita** de forma análoga e o denotamos por $[a, b)$. Assim

$$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$$

A Figura 4 ilustra o intervalo $(a, b]$ e a Figura 5 ilustra o intervalo $[a, b)$.

Usaremos o símbolo $+\infty$ (infinito positivo) e o símbolo $-\infty$ (infinito negativo); contudo, é necessário cuidado para não confundir esses símbolos com os números reais, pois eles não satisfazem as propriedades dos números reais. Temos os seguintes intervalos:

$$\begin{aligned}
(a, +\infty) &= \{x \mid x > a\} \\
(-\infty, b) &= \{x \mid x < b\} \\
[a, +\infty) &= \{x \mid x \geqslant a\} \\
(-\infty, b] &= \{x \mid x \leqslant b\} \\
(-\infty, +\infty) &= R
\end{aligned}$$

FIGURA 6

FIGURA 7

A Figura 6 ilustra o intervalo $(a, +\infty)$ e a Figura 7 ilustra o intervalo $(-\infty, b)$. Note que $(-\infty, +\infty)$ denota o conjunto de todos os números reais.

Para cada um dos intervalos (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ e $(a, b]$ os números a e b são chamados de **extremos** do intervalo. O intervalo fechado $[a, b]$ contém ambos os extremos, enquanto que o intervalo aberto (a, b) não contém nenhum extremo. O intervalo $[a, b)$ contém o extremo esquerdo, mas não o direito, enquanto que o intervalo $(a, b]$ contém o extremo direito, mas não o esquerdo. Um intervalo aberto pode ser considerado como aquele que não contém nenhum extremo e o intervalo fechado pode ser considerado como aquele que contém ambos os extremos. Conseqüentemente, o intervalo $[a, +\infty)$ é considerado como fechado, pois contém o seu único extremo a. Da mesma forma, $(-\infty, b]$ é um intervalo fechado, enquanto que $(a, +\infty)$ e $(-\infty, b)$ são abertos. Os intervalos $[a, b)$ e $(a, b]$ não são fechados nem abertos. O intervalo $(-\infty, +\infty)$ não tem extremos, sendo considerado tanto aberto como fechado.

São usados intervalos para representar *conjuntos-soluções* de desigualdades. O **conjunto-solução** de uma desigualdade é o conjunto de todos os números que satisfazem a desigualdade.

EXEMPLO 1 Ache e mostre na reta numérica real o conjunto-solução da desigualdade

$$2 + 3x < 5x + 8$$

Solução As seguintes desigualdades são equivalentes

$$\begin{aligned} 2 + 3x &< 5x + 8 \\ 2 + 3x - 2 &< 5x + 8 - 2 \\ 3x &< 5x + 6 \\ -2x &< 6 \\ x &> -3 \end{aligned}$$

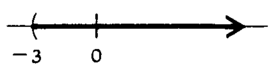


FIGURA 8

Portanto, o conjunto-solução é o intervalo $(-3, +\infty)$, ilustrado na Figura 8.

EXEMPLO 2 Ache e mostre na reta numérica real o conjunto-solução da desigualdade

$$4 < 3x - 2 \leqslant 10$$

Solução Adicionando 2 a cada membro da desigualdade obtemos desigualdades equivalentes

$$\begin{aligned} 6 < 3x &\leqslant 12 \\ 2 < x &\leqslant 4 \end{aligned}$$

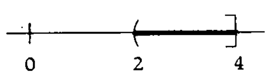


FIGURA 9

Assim, o conjunto-solução é o intervalo $(2, 4]$, conforme ilustrado na Figura 9.

EXEMPLO 3 Ache e mostre na reta numérica real o conjunto-solução da desigualdade

$$\frac{7}{x} > 2$$

Solução Queremos multiplicar ambos os membros da desigualdade por x. Mas, o sentido da desigualdade resultante dependerá de x ser positivo ou negativo. Observe que se $x < 0$, então

$$\frac{7}{x} < 0$$

o que contradiz a desigualdade dada. Logo, precisamos considerar somente $x > 0$. Multiplicando ambos os membros da desigualdade dada por x, obtemos as seguintes desigualdades equivalentes:

$$\begin{aligned} 7 &> 2x \\ \tfrac{7}{2} &> x \\ x &< \tfrac{7}{2} \end{aligned}$$

FIGURA 10

O conjunto-solução da desigualdade é $\{x \mid x > 0\} \cap \{x \mid x < \frac{7}{2}\}$ ou, equivalentemente, $\{x \mid 0 < x < \frac{7}{2}\}$, que é o intervalo $(0, \frac{7}{2})$, conforme a Figura 10.

EXEMPLO 4 Ache e mostre na reta numérica real o conjunto-solução da desigualdade

$$\frac{x}{x - 3} < 4$$

Solução Para multiplicar ambos os membros da desigualdade por $x - 3$, precisamos considerar dois casos.

Caso 1: $x - 3 > 0$; isto é, $x > 3$.

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por $(x - 3)$ obtemos

$$\begin{aligned} x &< 4x - 12 \\ -3x &< -12 \\ x &> 4 \end{aligned}$$

Assim, o conjunto-solução do Caso 1 é $\{x | x > 3\} \cap \{x | x > 4\}$ ou, equivalentemente, $\{x | x > 4\}$, que é o intervalo $(4, +\infty)$.

Caso 2: $x - 3 < 0$; isto é, $x < 3$.

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por $(x - 3)$ e invertendo o sentido da desigualdade, temos

$$\begin{aligned} x &> 4x - 12 \\ -3x &> -12 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

Logo, x deve ser menor do que 4 e também menor do que 3. Assim, o conjunto-solução do Caso 2 será o intervalo $(-\infty, 3)$.

Se os conjuntos-soluções para os Casos 1 e 2 forem combinados, obteremos $(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$, que está ilustrado na Figura 11.

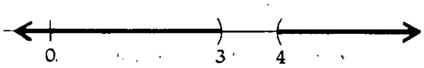


FIGURA 11

O conceito de *valor absoluto* de um número é usado em algumas definições importantes. Além disso, você precisará trabalhar com desigualdades envolvendo valores absolutos.

1.1.8 DEFINIÇÃO

O **valor absoluto** de x, denotado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 6**

$$|3| = 3 \qquad \begin{aligned} |-5| &= -(-5) \\ &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |8 - 14| &= |-6| \\ &= -(-6) \\ &= 6 \end{aligned}$$ ◀

Da definição, o valor absoluto de um número é um número positivo ou zero; isto é, não-negativo.

Em termos geométricos, o valor absoluto de um número x é sua distância ao 0. Em geral, $|a - b|$ é a distância entre a e b, sem levar em conta qual é o maior número. Veja a Figura 12.

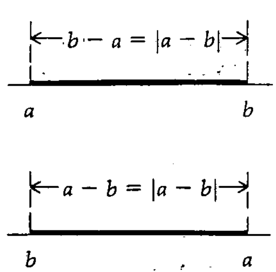


FIGURA 12

A desigualdade $|x| < a$, onde $a > 0$, estabelece que na reta numérica real a distância da origem até o ponto x é menor que a unidades; ou seja, $-a < x < a$. Portanto, x está no intervalo aberto $(-a, a)$. Veja a Figura 13. Parece então que o conjunto-solução de $|x| < a$ é $\{x | -a < x < a\}$. De fato, este é o caso estabelecido no teorema a seguir. A seta dupla é usada aqui e em todo o texto para indicar que as afirmações antes e depois dela são *equivalentes*.

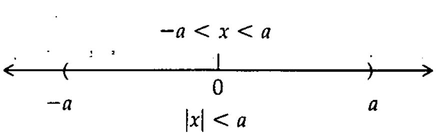


FIGURA 13

1.1.9 TEOREMA $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ onde $a > 0$

Prova Como $|x| = x$ se $x \geqslant 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$, segue que o conjunto-solução da desigualdade $|x| \leqslant a$ é a união dos conjuntos

$$\{x \mid x < a \text{ e } x \geqslant 0\} \text{ e } \{x \mid -x < a \text{ e } x < 0\}$$

Observe que o primeiro desses conjuntos é equivalente a $\{x \mid 0 \leqslant x < a\}$, e o segundo é equivalente a $\{x \mid -a < x < 0\}$ pois $-x < a$ é equivalente a $x > -a$. Assim, o conjunto-solução de $|x| < a$ é

$$\{x \mid 0 \leqslant x < a\} \cup \{x \mid -a < x < 0\}$$

$$\Leftrightarrow \{x \mid -a < x < a\}$$

Comparando a desigualdade dada e o seu conjunto-solução, concluímos que

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$ ■

1.1.10 COROLÁRIO $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$ onde a > 0

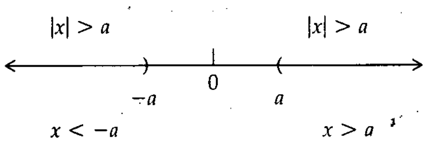


FIGURA 14

A desigualdade $|x| > a$, onde $a > 0$, estabelece que na reta numérica real a distância da origem ao ponto x é maior que a unidades; isto é, $x > a$ ou $x < -a$. Portanto, x está em $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$. Veja a Figura 14. Assim, parece que o conjunto-solução de $|x| > a$ é $\{x \mid x > a\} \cup \{x \mid x < -a\}$. O teorema a seguir estabelece que é esse o caso. Você deverá prová-lo no Exercício 61.

1.1.11 TEOREMA $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$ onde $a > 0$

1.1.12 COROLÁRIO $|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a$ onde $a > 0$

Os exemplos a seguir ilustram a solução de equações e desigualdades envolvendo valores absolutos.

EXEMPLO 5 Resolva cada uma das equações para x: (a) $|3x + 2| = 5$; (b) $|2x - 1| = |4x + 3|$; (c) $|5x + 4| = -3$.

Solução

(a) $|3x + 2| = 5$

Essa equação será satisfeita se

$$3x + 2 = 5 \quad \text{ou} \quad -(3x + 2) = 5$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = -\tfrac{7}{3}$$

(b) $|2x - 1| = |4x + 3|$

Essa equação será satisfeita se

$$2x - 1 = 4x + 3 \quad \text{ou} \quad 2x - 1 = -(4x + 3)$$
$$x = -2 \qquad\qquad x = -\tfrac{1}{3}$$

(c) $|5x + 4| = -3$

Como o valor absoluto de um número não pode ser negativo nunca, essa equação não tem solução.

EXEMPLO 6 Ache e mostre na reta numérica real o conjunto-solução da inequação

$$|x - 5| < 4$$

Solução Do Teorema 1.1.9, as seguintes desigualdades são equivalentes:

$$|x - 5| < 4$$
$$-4 < x - 5 < 4$$
$$1 < x < 9$$

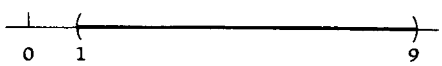


FIGURA 15

Assim, o conjunto-solução da inequação dada é o intervalo aberto (1, 9), que está ilustrado na Figura 15.

EXEMPLO 7 Ache o conjunto-solução da inequação

$$|3x + 2| > 5$$

Solução Pelo Teorema 1.1.11, a inequação dada é equivalente a

$$3x + 2 > 5 \quad \text{ou} \quad 3x + 2 < -5$$

Isto é, a inequação dada estará satisfeita se qualquer uma das desigualdades acima for satisfeita.

Considerando a primeira inequação, temos que

$$3x + 2 > 5$$
$$x > 1$$

Logo, todo número no intervalo $(1, +\infty)$ é uma solução.

Da segunda inequação

$$3x + 2 < -5$$
$$x < -\tfrac{7}{3}$$

Assim, todo número no intervalo $(-\infty, -\frac{7}{3})$ é uma solução.

O conjunto-solução da inequação dada é, portanto, $(-\infty, -\frac{7}{3}) \cup (1, +\infty)$.

Você deve-se lembrar da Álgebra que o símbolo $\sqrt{a}$, onde $a \geqslant 0$, é definido como o único número *não-negativo* x, tal que $x^2 = a$. Lemos $\sqrt{a}$ como "a raiz quadrada principal de a". Por exemplo,

$$\sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{0} = 0 \qquad \sqrt{\tfrac{9}{25}} = \tfrac{3}{5}$$

Nota: $\sqrt{4} \neq -2$ mesmo que $(-2)^2 = 4$, pois $\sqrt{4}$ denota somente a raiz quadrada *positiva* de 4. A raiz quadrada *negativa* de 4 é designada por $-\sqrt{4}$.

Como estamos interessados somente em números reais neste livro, $\sqrt{a}$ não está definida para $a < 0$.

EXEMPLO 8 Ache todos os valores de x para os quais $\sqrt{x^2 + 7x + 12}$ é real.

Solução

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

$$\sqrt{(x + 3)(x + 4)} \text{ é real quando } (x + 3)(x + 4) \geqslant 0$$

Vamos encontrar o conjunto-solução dessa inequação. A inequação estará satisfeita quando ambos os fatores forem não-negativos ou quando forem não-positivos, isto é, se $x + 3 \geqslant 0$ e $x + 4 \geqslant 0$, ou se $x + 3 \leqslant 0$ e $x + 4 \leqslant 0$. Consideraremos dois casos.

Caso 1: $x + 3 \geqslant 0$ e $x + 4 \geqslant 0$. Isto é,

$x \geqslant -3$ e $x \geqslant -4$

Ambas as desigualdades estarão satisfeitas para $x \geqslant -3$ ou seja, o intervalo $[-3, +\infty)$ é o conjunto-solução.

Caso 2: $x + 3 \leqslant 0$ e $x + 4 \leqslant 0$. Isto é,

$x \leqslant -3$ e $x \leqslant -4$

Ambas as desigualdades estarão satisfeitas para $x \leqslant -4$, ou seja, o intervalo $(-\infty, -4]$ é o conjunto-solução.

Se combinarmos os conjuntos-soluções dos Casos 1 e 2, teremos $(-\infty, -4] \cup [-3, +\infty)$.

Da definição de $\sqrt{a}$ segue que

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 7**

$$\sqrt{5^2} = |5| \qquad \sqrt{(-3)^2} = |-3|$$
$$= 5 \qquad\qquad = 3$$
◀

Os teoremas a seguir sobre valores absolutos serão úteis mais adiante.

1.1.13 TEOREMA Se $a, b \in R$, então

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

Prova

$$\begin{aligned} |ab| &= \sqrt{(ab)^2} \\ &= \sqrt{a^2 b^2} \\ &= \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \\ &= |a| \cdot |b| \end{aligned}$$
■

1.1.14 TEOREMA Se $a, b \in R$ e $b \neq 0$,

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

A demonstração do Teorema 1.1.14 será deixada como exercício (veja o Exercício 62).

1.1.15 TEOREMA
A Desigualdade Triangular Se $a, b \in R$, então

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

Prova Pela Definição 1.1.8, temos $a = |a|$ ou $a = -|a|$; assim

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a| \qquad (1)$$

Da mesma forma,

$$-|b| \leqslant b \leqslant |b| \qquad (2)$$

Das desigualdades (1) e (2) e do Teorema 1.1.7,

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

Logo, do Corolário 1.1.10 segue que

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$ ■

O Teorema 1.1.15 tem dois corolários importantes que serão enunciados e provados a seguir.

1.1.16 COROLÁRIO Se a, $b \in R$, então

$$|a - b| \leqslant |a| + |b|$$

Prova

$$|a - b| = |a + (-b)| \leqslant |a| + |(-b)| = |a| + |b|$$ ■

1.1.17 COROLÁRIO Se a, $b \in R$, então

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|$$

Prova

$$|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|$$

assim, subtraindo $|b|$ de ambos os membros da desigualdade, temos

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|$$ ■

EXERCÍCIOS 1.1

Nos Exercícios de 1 a 22, ache a conjunto-solução da desigualdade dada a mostre-o na reta numérica real.

1. $5x + 2 > x - 6$
2. $3 - x < 5 + 3x$
3. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \leqslant 0$
4. $3 - 2x \geqslant 9 + 4x$
5. $13 \geqslant 2x - 3 \geqslant 5$
6. $-2 < 6 - 4x \leqslant 8$
7. $2 > -3 - 3x \geqslant -7$
8. $2 \leqslant 5 - 3x < 11$
9. $\frac{4}{x} - 3 > \frac{2}{x} - 7$
10. $\frac{5}{x} < \frac{3}{4}$
11. $\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3x-1}$
12. $\frac{x+1}{2-x} < \frac{x}{3+x}$
13. $x^2 > 4$
14. $x^2 \leqslant 9$
15. $(x - 3)(x + 5) > 0$
16. $x^2 - 3x + 2 > 0$
17. $1 - x - 2x^2 \geqslant 0$
18. $x^2 + 3x + 1 > 0$
19. $4x^2 + 9x < 9$
20. $2x^2 - 6x + 3 < 0$
21. $\frac{1}{3x-7} \geqslant \frac{4}{3-2x}$
22. $x^3 + 1 > x^2 + x$

Nos Exercícios de 23 a 30, resolva em x.

23. $|4x + 3| = 7$
24. $|3x - 8| = 4$
25. $|5x - 3| = |3x + 5|$
26. $|x - 2| = |3 - 2x|$
27. $|7x| = 4 - x$
28. $2x + 3 = |4x + 5|$
29. $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 5$
30. $\left|\frac{3x+8}{2x-3}\right| = 4$

Nos Exercícios de 31 a 36, ache todos os valores de x para os quais o número é real.

31. $\sqrt{8x - 5}$
32. $\sqrt{x^2 - 16}$
33. $\sqrt{x^2 - 3x - 10}$
34. $\sqrt{2x^2 + 5x - 3}$
35. $\sqrt{x^2 - 5x + 4}$
36. $\sqrt{x^2 + 2x - 1}$

Nos Exercícios de 37 a 52, ache o conjunto-solução da desigualdade dada e mostre-o na reta numérica real.

37. $|x + 4| < 7$
38. $|2x - 5| < 3$
39. $|3x - 4| \leqslant 2$
40. $|3x + 2| \geqslant 1$
41. $|5 - x| > 7$
42. $|3 - x| < 5$
43. $|7 - 4x| \leqslant 9$
44. $|6 - 2x| \geqslant 7$
45. $|2x - 5| > 3$
46. $|x + 4| \leqslant |2x - 6|$
47. $|3x| > |6 - 3x|$
48. $|3 + 2x| < |4 - x|$
49. $|9 - 2x| \geqslant |4x|$
50. $|5 - 2x| \geqslant 7$
51. $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| < 4$
52. $\left|\frac{6-5x}{3+x}\right| \leqslant \frac{1}{2}$

Nos Exercícios de 53 a 56 resolva em x e escreva a resposta com a notação de valor absoluto.

53. $\dfrac{x-a}{x+a} > 0$

54. $\dfrac{a-x}{a+x} \geqslant 0$

55. $\dfrac{x-2}{x-4} > \dfrac{x+2}{x}$

56. $\dfrac{x+5}{x+3} < \dfrac{x+1}{x-1}$

57. Prove o Teorema 1.1.5.
58. Prove o Teorema 1.1.6(i).
59. Prove o Teorema 1.1.6(ii) e (iii).
60. Prove que se $x < y$, então $x < \frac{1}{2}(x + y) < y$.
61. Prove o Teorema 1.1.11.
62. Prove o Teorema 1.1.14.

1.2 RETAS E COORDENADAS

Os *pares ordenados* de números reais são importantes em nossas discussões. Quaisquer dois números reais formam um par, e quando a ordem de aparecimento do número é significativa, são chamados de **par ordenado**. Se x for o primeiro número real e y for o segundo, esse par ordenado será denotado por (x, y). Observe que o par ordenado (3, 7) é diferente do par ordenado (7, 3).

O conjunto de todos os pares de números reais é chamado de **plano numérico**, denotado por R^2, e cada par ordenado (x, y) será um **ponto** no plano numérico. Da mesma forma que podemos identificar R com os pontos de um eixo (um espaço unidimensional), podemos identificar R^2 com os pontos de um plano geométrico (um espaço bidimensional). O método usado em R^2 deve-se ao matemático francês René Descartes (1596-1650) a quem é atribuída a criação da Geometria Analítica em 1637. Uma reta horizontal é escolhida no plano geométrico, sendo chamada de **eixo x**. Uma reta vertical é escolhida, sendo denominada **eixo y**. O ponto de intersecção entre os eixos x e y é chamado de **origem**, sendo denotado pela letra O. Uma unidade de comprimento é escolhida. Usualmente a unidade de comprimento para os dois eixos é a mesma. Estabelecemos a direita da origem como sendo a parte positiva do eixo x; para o eixo y, a parte positiva fica acima da origem. Veja a Figura 1.

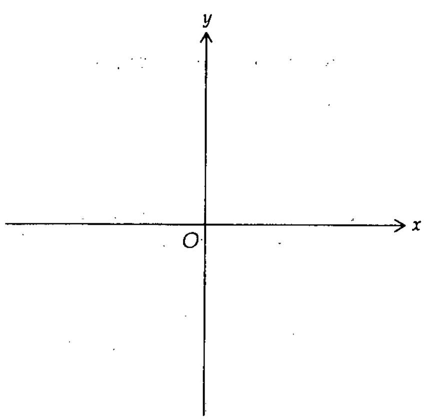


FIGURA 1

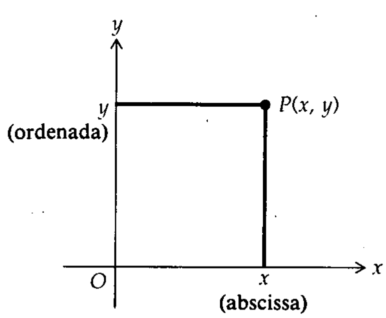


FIGURA 2

Associaremos um par ordenado de números reais (x, y) com um ponto no plano geométrico. No ponto x sobre o eixo horizontal e no ponto y sobre o eixo vertical, os segmentos de reta são desenhados perpendicularmente aos respectivos eixos. A intersecção desses dois segmentos de reta perpendiculares é o ponto P, associado ao par ordenado (x, y). Veja a Figura 2. O primeiro número x do par é chamado a **abscissa** (ou **coordenada x**) de P, e o segundo número y é chamado a **ordenada** (ou **coordenada y**) de P. Se a abscissa for positiva, P estará à direita do eixo y; e se for negativa, P estará à esquerda do eixo y. Se a ordenada for positiva, P estará acima do eixo x; e se for negativa, P estará abaixo do eixo x.

A abscissa e a ordenada de um ponto são denominadas **coordenadas cartesianas retangulares** do ponto. Há uma correspondência biunívoca entre os pontos em um plano geométrico e R^2; isto é, a cada ponto corresponde um único par ordenado (x, y) e a cada par ordenado (x, y) está associado um único ponto. Essa correspondência é denominada **sistema de coordenadas cartesianas retangulares**. A Figura 3 ilustra esse sistema onde são apresentados alguns pontos.

Os eixos x e y são chamados de **eixos coordenados**. Eles dividem o plano em quatro partes denominadas **quadrantes**. O primeiro quadrante é aquele no qual a abscissa e a ordenada são ambas positivas, isto é, o quadrante superior direito. Os outros quadrantes são numerados na direção anti-horária, ficando o quarto quadrante na parte inferior direita. Veja a Figura 4.

Dada a correspondência biunívoca, identificamos R^2 com o plano geométrico. Por essa razão, um par ordenado (x, y) é chamado de um *ponto*.

Vamos discutir agora o problema de encontrar a distância entre dois pontos em R^2. Se A for o ponto (x_1, y_1) e B for o ponto (x_2, y_1) (isto é, A e B têm a

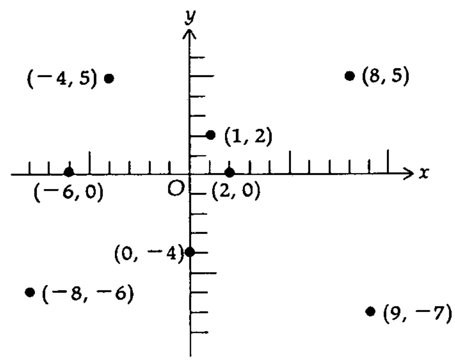


FIGURA 3

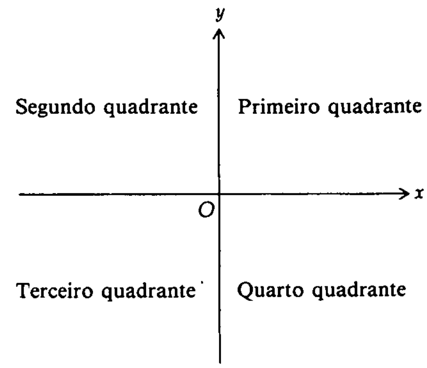
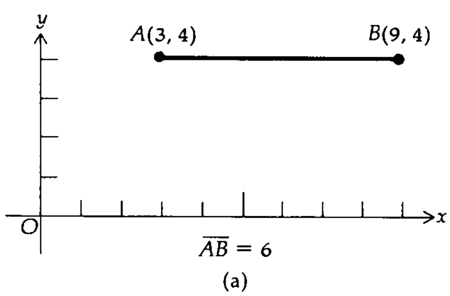


FIGURA 4

mesma ordenada, mas abscissas diferentes), então a **distância orientada** de A para B será denotada por $\overline{AB}$ e definimos

$$\boxed{\overline{AB} = x_2 - x_1}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Veja a Figura 5(a)-(c). Se A for o ponto (3, 4) e B for o ponto (9, 4), então $\overline{AB} = 9 - 3$; isto é $\overline{AB} = 6$. Se A for o ponto $(-8, 0)$ e B for o ponto (6, 0), então $\overline{AB} = 6 - (-8)$, ou seja, $\overline{AB} = 14$. Se A for o ponto (4, 2) e B for o ponto (1, 2), então $\overline{AB} = 1 - 4$; isto é, $\overline{AB} = -3$. Vemos que $\overline{AB}$ será positivo, se B estiver à direita de A e $\overline{AB}$ será negativo, se B estiver à esquerda de A. ◀



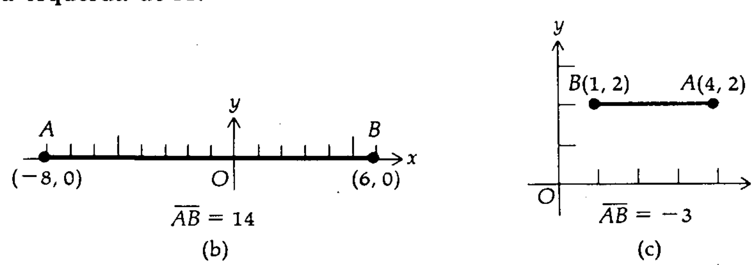


FIGURA 5

Se C for o ponto (x_1, y_1) e D for o ponto (x_1, y_2), então a distância orientada de C para D, denotada por $\overline{CD}$, será definida por

$$\boxed{\overline{CD} = y_2 - y_1}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Veja a Figura 6(a) e (b). Se C for o ponto $(1, -2)$ e D for o ponto $(1, -8)$, então $\overline{CD} = -8 - (-2)$, isto é, $\overline{CD} = -6$. Se C for o ponto $(-2, -3)$ e D for o ponto $(-2, 4)$ então $\overline{CD} = 4 - (-3)$; isto é, $\overline{CD} = 7$. O número $\overline{CD}$ será positivo se D estiver acima de C e $\overline{CD}$ será negativo se D estiver abaixo de C. ◀

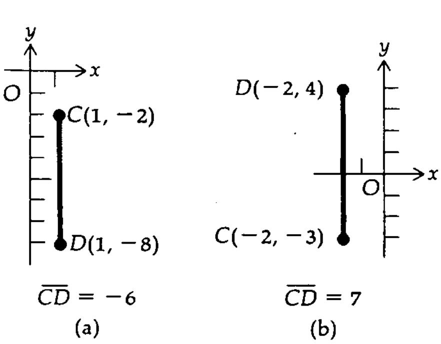


FIGURA 6

Observe que a terminologia *distância orientada* indica ao mesmo tempo a distância e um sentido (positivo ou negativo). Se estivermos interessados apenas no comprimento do segmento de reta entre os pontos P_1 e P_2 (isto é, na distância entre os pontos P_1 e P_2, sem levar em conta o sentido), então usaremos a terminologia *distância não-orientada*. Denotamos a **distância não-orientada** de P_1 a P_2 por $|\overline{P_1P_2}|$, que é um número não-negativo. Se usamos a palavra *distância* sem um adjetivo, *orientada* ou *não-orientada*, fica subentendido que queremos nos referir à distância não-orientada.

Queremos obter agora uma fórmula para calcular $|\overline{P_1P_2}|$ se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ forem pontos quaisquer do plano. Usamos o teorema de Pitágoras da Geometria Plana, que é o seguinte:

> Num triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos é igual ao quadrado do comprimento da hipotenusa.

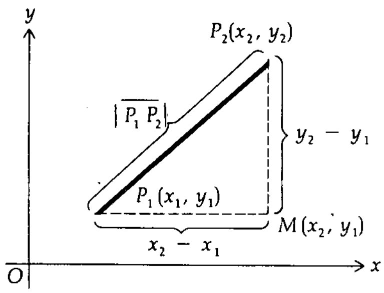


FIGURA 7

A Figura 7 mostra P_1 e P_2 no primeiro quadrante e o ponto $M(x_2, y_1)$. Note que $|\overline{P_1P_2}|$ é o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo P_1MP_2. Usando o teorema de Pitágoras temos

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1M}|^2 + |\overline{MP_2}|^2$$
$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{|\overline{P_1M}|^2 + |\overline{MP_2}|^2}$$
$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Note que na fórmula acima não temos o símbolo $\pm$ na frente do radical do segundo membro, pois $|\overline{P_1P_2}|$ é um número não-negativo. A fórmula é verdadeira para todas as posições possíveis de P_1 e P_2 nos quatro quadrantes. O comprimento da hipotenusa é sempre $|\overline{P_1P_2}|$ e os comprimentos dos catetos são sempre $|\overline{P_1M}|$ e $|\overline{MP_2}|$. O resultado é enunciado como um teorema.

1.2.1 TEOREMA A distância entre dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é dada por

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Observe que se P_1 e P_2 estiverem sobre uma mesma reta horizontal, então $y_1 = y_2$ e

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0^2}$$
$$|\overline{P_1P_2}| = |x_2 - x_1| \qquad (\text{pois } \sqrt{a^2} = |a|)$$

Além disso, se P_1 e P_2 estiverem sobre uma mesma reta vertical, então $x_1 = x_2$ e

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{0^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$|\overline{P_1P_2}| = |y_2 - y_1|$$

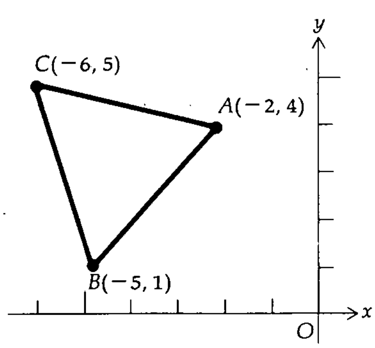


FIGURA 8

EXEMPLO 1 Mostre que o triângulo com vértices em $A(-2, 4)$, $B(-5, 1)$ e $C(-6, 5)$ é isósceles.

Solução O triângulo aparece na Figura 8.

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-6 + 5)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17} \qquad |\overline{AC}| = \sqrt{(-6 + 2)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

Como $|\overline{BC}| = |\overline{AC}|$ o triângulo é isósceles.

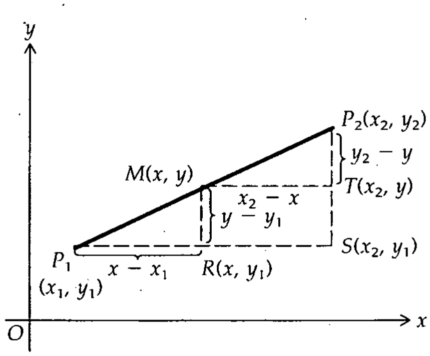


FIGURA 9

Se P_1 e P_2 são pontos extremos de um segmento de reta, denotamos esse segmento por P_1P_2. Isso não deve ser confundido com a notação $\overline{P_1P_2}$, a qual denota a distância orientada de P_1 a P_2. Ou seja, $\overline{P_1P_2}$ é um número, enquanto P_1P_2 é um segmento de reta. Veja a Figura 9, onde $M(x, y)$ é o ponto médio do segmento de reta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$. Como os triângulos P_1RM e MTP_2 são congruentes

$$|\overline{P_1R}| = |\overline{MT}| \quad \text{e} \quad |\overline{RM}| = |\overline{TP_2}|$$

Assim,

$$x - x_1 = x_2 - x \qquad y - y_1 = y_2 - y$$
$$2x = x_1 + x_2 \qquad 2y = y_1 + y_2$$

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

Essas são as **fórmulas do ponto médio**. Em sua derivação supusemos que $x_2 > x_1$ e $y_2 > y_1$. As mesmas fórmulas são obtidas se usarmos qualquer ordenação desses números.

Em Geometria Analítica, a validade dos teoremas no plano geométrico é estabelecida com a aplicação de coordenadas e técnicas de Álgebra. O exemplo a seguir demonstra tal procedimento.

EXEMPLO 2 Prove analiticamente que os segmentos de reta que ligam os pontos médios dos lados opostos de um quadrilátero dividem ao meio um ao outro.

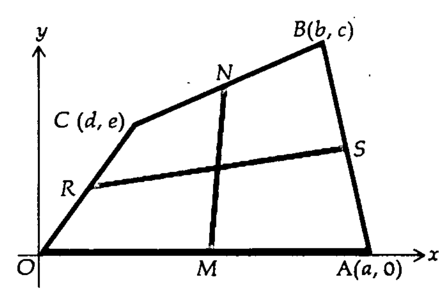


FIGURA 10

Solução Traçamos um quadrilátero geral. Como os eixos coordenados podem ser escolhidos em qualquer parte do plano e já que a escolha da posição dos eixos não afeta a veracidade do teorema, tomamos a origem em um vértice e o eixo x ao longo de um lado. Isso simplifica as coordenadas dos dois vértices no eixo x. Veja a Figura 10.

A hipótese e a conclusão do teorema são as seguintes:

Hipótese: O ABC é um quadrilátero. M é o ponto médio de OA, N é o ponto médio de CB, R é o ponto médio de OC e S é o ponto médio de AB.

Conclusão: MN e RS dividem-se ao meio.

Prova Para provar que dois segmentos de reta dividem-se ao meio, mostramos que eles têm o mesmo ponto médio. Das fórmulas do ponto médio, obtemos as coordenadas de M, N, R e S. M é o ponto $(\frac{1}{2}a, 0)$, N é o ponto $(\frac{1}{2}(b + d), \frac{1}{2}(c + e))$, R é o ponto $(\frac{1}{2}d, \frac{1}{2}e)$ e S é o ponto $(\frac{1}{2}(a + b), \frac{1}{2}c)$.

A abscissa do ponto médio de MN é $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(b + d)] = \frac{1}{4}(a + b + d)$.
A ordenada do ponto médio de MN é $\frac{1}{2}[0 + \frac{1}{2}(c + e)] = \frac{1}{4}(c + e)$.
Logo, o ponto médio de MN é o ponto $(\frac{1}{4}(a + b + d), \frac{1}{4}(c + e))$.
A abscissa do ponto médio de RS é $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}(a + b)] = \frac{1}{4}(a + b + d)$.
A ordenada do ponto médio de RS é $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}c] = \frac{1}{4}(c + e)$.
Assim, o ponto médio de RS é o ponto $(\frac{1}{4}(a + b + d), \frac{1}{4}(c + e))$.

Logo, o ponto médio de MN coincide com o ponto médio de RS.
Então, MN e RS dividem-se ao meio. ∎

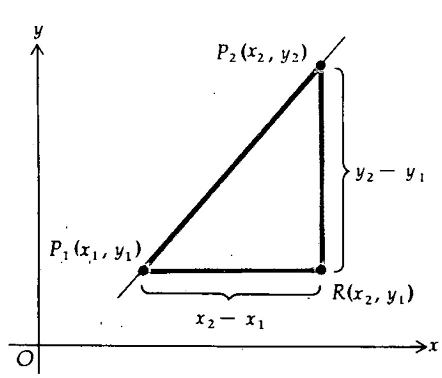


FIGURA 11

Discutiremos agora *retas* em R^2. Seja l uma reta vertical e $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ dois pontos distintos em l. A Figura 11 mostra tal reta. Na figura, R é o ponto (x_2, y_1), e os pontos P_1, P_2 e R são vértices de um triângulo-retângulo; além disso, $\overline{P_1R} = x_2 - x_1$ e $\overline{RP_2} = y_2 - y_1$. O número $y_2 - y_1$ dá a medida da variação na ordenada de P_1 a P_2 e pode ser positivo, negativo ou zero. O número $x_2 - x_1$ dá a medida da variação na abscissa de P_1 a P_2 e pode ser positivo ou negativo.

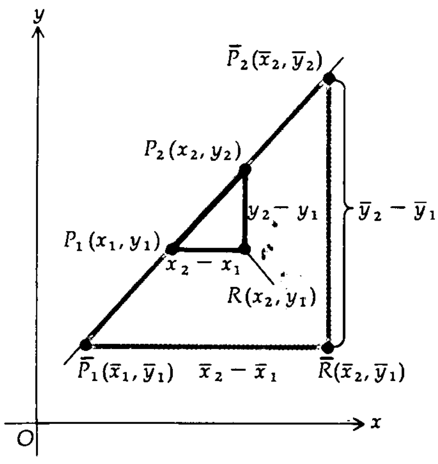


FIGURA 12

Como a reta l não é vertical, $x_2 \neq x_1$, e portanto, $x_2 - x_1$ não é zero. Seja

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

O valor de m calculado pela fórmula acima é independente da escolha dos dois pontos P_1 e P_2 em l. Para mostrar isso, vamos escolher dois outros pontos $\bar{P}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ e $\bar{P}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ e calcular um número $\bar{m}$ usando (1).

$$\bar{m} = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}$$

Mostraremos que $\bar{m} = m$. Veja a Figura 12. Os triângulos $\bar{P}_1\bar{R}\bar{P}_2$ e P_1RP_2 são semelhantes; assim sendo, os lados correspondentes são proporcionais. Logo

$$\frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ou} \quad \bar{m} = m$$

Assim, o valor de m calculado por (1) é único, não importando a escolha dos dois pontos em l. Esse número m é chamado de *inclinação* da reta.

1.2.2 DEFINIÇÃO

Se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ forem dois pontos distintos sobre l, não paralela ao eixo y, então a **inclinação** de l, denotada por m, será dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Se multiplicarmos ambos os membros da equação acima por $x_2 - x_1$, obteremos

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

Segue dessa equação que se considerarmos uma partícula movendo-se ao longo de uma reta, a variação na ordenada da partícula será igual ao produto da inclinação pela variação na abscissa.

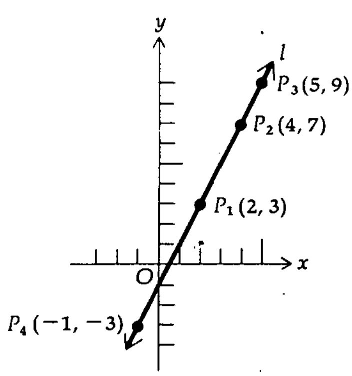


FIGURA 13

► **ILUSTRAÇÃO 3** Se l for a reta que passa pelos pontos $P_1(2, 3)$ e $P_2(4, 7)$ e m for a inclinação de l, então, pela Definição 1.2.2,

$$m = \frac{7 - 3}{4 - 2} = 2$$

Veja a Figura 13. Se uma partícula estiver movendo-se ao longo da reta l acima, a variação na ordenada será duas vezes a variação na abscissa. Isto é, se a partícula estiver em $P_2(4, 7)$ e a abscissa for aumentada em uma unidade, então a ordenada ficará aumentada em duas unidades e a partícula estará em P_3 (5, 9). Analogamente, se a partícula estiver em $P_1(2, 3)$ e a abscissa for diminuída em três unidades, então a ordenada ficará diminuída em seis unidades e a partícula estará em $P_4(-1, -3)$. ◄

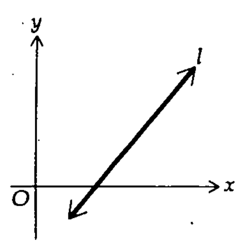


FIGURA 14

Se a inclinação de uma reta for positiva, então quando a abscissa de um ponto da reta aumentar, a ordenada também aumentará. Tal reta está na Figura 14. Na Figura 15 há uma reta cuja inclinação é negativa. Para essa reta, quando a abscissa aumentar, a ordenada diminuirá.

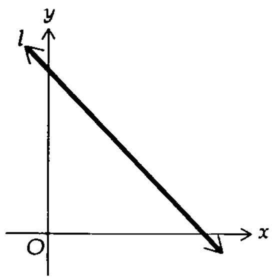


FIGURA 15

Se uma reta for paralela ao eixo x, então $y_2 = y_1$; assim, a inclinação da reta é zero. Se uma reta for paralela ao eixo y, $x_2 = x_1$; assim a fração $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ fica sem sentido, pois não podemos dividi-la por zero. É por essa razão que retas paralelas ao eixo y foram excluídas da definição de inclinação. Assim, a inclinação de uma reta vertical não é definida.

Por *equação de uma reta* queremos nos referir a uma equação que é satisfeita por aqueles, e somente aqueles pontos sobre a reta. Como um ponto $P_1(x_1, y_1)$ e uma inclinação m determinam uma reta única, será possível obter uma equação dessa reta. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer na reta exceto (x_1, y_1). Então, uma vez que a inclinação da reta que passa por P_1 e P é m, temos da definição de inclinação

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Essa equação é chamada **forma ponto-inclinação** da equação da reta. Resulta uma equação da reta, se sua inclinação e um ponto sobre a reta forem conhecidos.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Para encontrar a equação da reta por dois pontos $A(6, -3)$ e $B(-2, 3)$ calculamos primeiro m.

$$\begin{aligned} m &= \frac{3 - (-3)}{-2 - 6} \\ &= \frac{6}{-8} \\ &= -\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Usando agora a forma ponto-inclinação da equação da reta onde consideramos A como P_1, temos

$$\begin{aligned} y - (-3) &= -\tfrac{3}{4}(x - 6) \\ 4y + 12 &= -3x + 18 \\ 3x + 4y - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Naturalmente, o ponto B pode ser tomado como P_1; nesse caso, temos

$$\begin{aligned} y - 3 &= -\tfrac{3}{4}(x + 2) \\ 4y - 12 &= -3x - 6 \\ 3x + 4y - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Se escolhermos o ponto $(0, b)$ (isto é, o ponto onde a reta intercepta o eixo y) como o ponto (x_1, y_1) em (1), teremos

$$y - b = m(x - 0)$$

$$\boxed{y = mx + b}$$

O número b, que é a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo y, é chamado de **intercepto y** da reta. Conseqüentemente, a equação acima é a chamada **forma inclinação-intercepto** da equação da reta. Essa forma é extremamente útil, pois nos dá imediatamente a inclinação da reta. É importante também porque expressa a coordenada y de um ponto sobre a reta explicitamente, em termos da coordenada x.

EXEMPLO 3 Ache a inclinação da reta cuja equação é

$$6x + 5y - 7 = 0$$

Solução A equação é resolvida em y.

$$5y = -6x + 7$$

$$y = -\tfrac{6}{5}x + \tfrac{7}{5}$$

Essa equação está na forma inclinação-intercepto, onde $m = -\frac{6}{5}$.

Como a inclinação de uma reta vertical não é definida, não podemos aplicar a forma ponto-inclinação para obter sua equação. Em seu lugar, usamos o teorema a seguir, envolvendo o **intercepto *x*** da reta (a abscissa do ponto em que a reta intercepta o eixo x). O teorema também dá uma equação da reta horizontal.

1.2.3 TEOREMA

(i) Uma equação da reta vertical tendo x intercepto a é

$$x = a$$

(ii) Uma equação da reta horizontal tendo y intercepto b é

$$y = b$$

Prova (i) A Figura 16 mostra a reta vertical que intercepta o eixo x no ponto $(a, 0)$. Essa reta contém aqueles e somente aqueles pontos sobre a reta que têm a mesma abscissa. Assim, $P(x, y)$ será qualquer ponto sobre a reta se e somente se

$$x = a$$

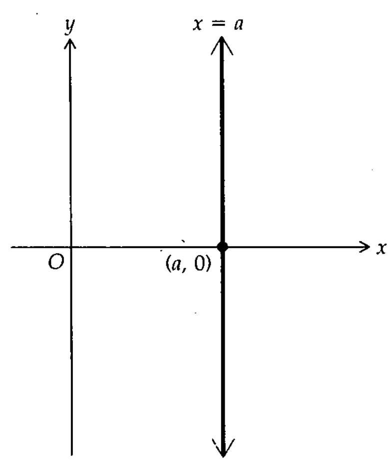


FIGURA 16

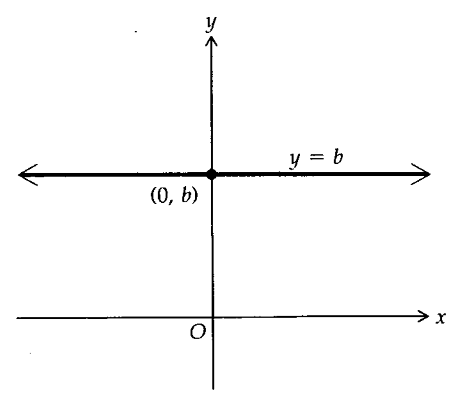


FIGURA 17

(ii) A reta horizontal que intercepta o eixo y no ponto $(0, b)$ aparece na Figura 17. Para essa reta, $m = 0$. Portanto, da forma intercepto-inclinação, uma equação dessa reta é

$$y = b$$

■

Mostramos que uma equação de uma reta não-vertical é da forma $y = mx + b$, e uma equação de uma reta vertical é da forma $x = a$. Como cada uma dessas equações é um caso particular de uma equação da forma

$$Ax + By + C = 0 \tag{2}$$

onde A, B e C são constantes, e A e B não são nulas, segue que toda reta possui uma equação da forma (2). O oposto desse fato é dado pelo Teorema 1.2.5, a seguir. Mas antes de enunciá-lo definiremos o *gráfico de uma equação.*

1.2.4 DEFINIÇÃO O **gráfico de uma equação** em R^2 é o conjunto de todos os pontos em R^2 cujas coordenadas são números que satisfazem a equação.

1.2.5 TEOREMA O gráfico da equação

$$Ax + By + C = 0$$

onde A, B e C são constantes e onde A e B não são ambos nulos, é uma linha reta.

A prova desse teorema é deixada como exercício. Veja o Exercício 57.

Como o gráfico de (2) é uma linha reta, é chamado de **equação linear**; sendo a equação geral do primeiro grau em x e y.

Uma vez que dois pontos determinam uma reta, para fazer o esboço do gráfico de uma reta precisamos apenas determinar as coordenadas de dois pontos dela, marcar os pontos no gráfico e então traçá-la. Qualquer par de pontos é suficiente, mas em geral convém marcar no gráfico os dois pontos onde a reta intercepta os dois eixos.

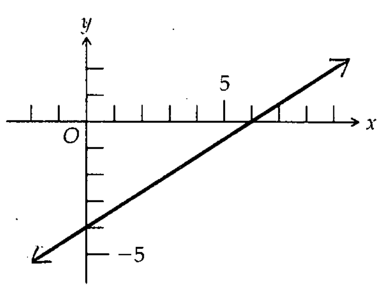


FIGURA 18

► **ILUSTRAÇÃO 5** Para traçar o esboço da reta tendo a equação

$$2x - 3y = 12$$

primeiro achamos x intercepto a e y intercepto b. Na equação, substituimos $(a, 0)$ por (x, y) e obtemos $a = 6$. Substituindo $(0, b)$ por (x, y), obtemos $b = -4$. Assim, temos uma reta na Figura 18. ◄

A aplicação de inclinações é feita no teorema a seguir.

1.2.6 TEOREMA Se l_1 e l_2 forem duas retas distintas não-verticais, tendo inclinações m_1 e m_2, respectivamente, então l_1 e l_2 serão paralelas se e somente se $m_1 = m_2$.

Prova Sejam as equações de l_1 e l_2, respectivamente,

$$y = m_1x + b_1 \qquad \text{e} \qquad y = m_2x + b_2$$

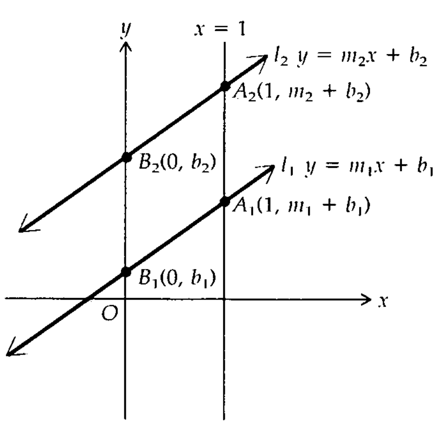


FIGURA 19

Veja a Figura 19, que mostra duas retas interceptando o eixo y nos pontos $B_1(0, b_1)$ e $B_2(0, b_2)$. A reta vertical $x = 1$ intercepta l_1 no ponto A_1 $(1, m_1 + b_1)$ e l_2 no ponto $A_2(1, m_2 + b_2)$. Então

$$|\overline{B_1B_2}| = b_2 - b_1 \qquad \text{e} \qquad |\overline{A_1A_2}| = (m_2 + b_2) - (m_1 + b_1)$$

As duas retas serão paralelas se e somente se as distâncias verticais $|\overline{B_1B_2}|$ e $|\overline{A_1A_2}|$ forem iguais; ou seja, l_1 e l_2 serão paralelas se e somente se

$$b_2 - b_1 = (m_2 + b_2) - (m_1 + b_1)$$

$$b_2 - b_1 = m_2 + b_2 - m_1 - b_1$$

$$m_1 = m_2$$

Assim, l_1 e l_2 serão paralelas se e somente se $m_1 = m_2$. ■

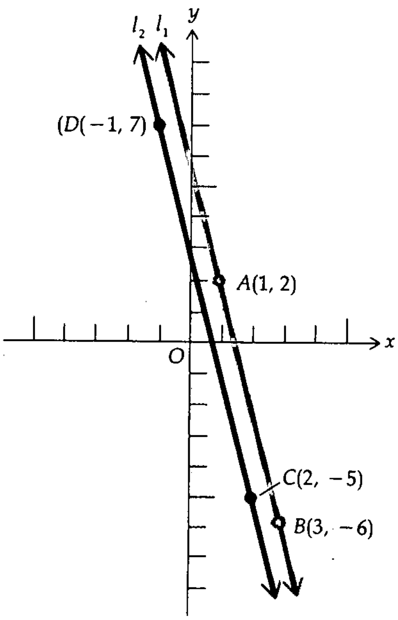


FIGURA 20

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Seja l_1 a reta que passa pelos pontos $A(1, 2)$ e $B(3, -6)$ com inclinação m_1, e seja l_2 a reta que passa pelos pontos $C(2, -5)$ e $D(-1, 7)$ com inclinação m_2. Então

$$m_1 = \frac{-6-2}{3-1} \qquad m_2 = \frac{7-(-5)}{-1-2}$$
$$= \frac{-8}{2} \qquad = \frac{12}{-3}$$
$$= -4 \qquad = -4$$

como $m_1 = m_2$, segue que l_1 e l_2 são paralelas. Veja a Figura 20. ◀

Dois pontos distintos quaisquer determinam uma reta. Três pontos distintos podem ou não estar na mesma reta. Se três ou mais pontos estiverem na mesma reta, eles serão denominados **colineares**. Assim, três pontos A, B e C serão colineares se e somente se a reta que passa pelos pontos A e B for a mesma que passa pelos pontos B e C. Como as retas que passam por A e B e por B e C contêm o ponto B em comum, elas serão a mesma reta se e somente se suas inclinações forem iguais.

EXEMPLO 4 Através das inclinações, determine se os pontos $A(-3, -4)$, $B(2, -1)$ e $C(7, 2)$ são colineares.

Solução Se m_1 for a inclinação da reta que passa por A e B e m_2 for a inclinação da reta que passa por B e C, então

$$m_1 = \frac{-1-(-4)}{2-(-3)} \qquad m_2 = \frac{2-(-1)}{7-2}$$
$$= \frac{3}{5} \qquad = \frac{3}{5}$$

Logo, $m_1 = m_2$. Assim sendo, as retas que passam por A e B e por B e C têm a mesma inclinação e o ponto B em comum. Assim elas coincidem e, portanto, são colineares.

Agora enunciaremos e provaremos um teorema considerando as inclinações de duas retas perpendiculares.

1.2.7 TEOREMA

Duas retas não-verticais l_1 e l_2, com inclinações m_1 e m_2, respectivamente, serão perpendiculares se e somente se $m_1 m_2 = -1$.

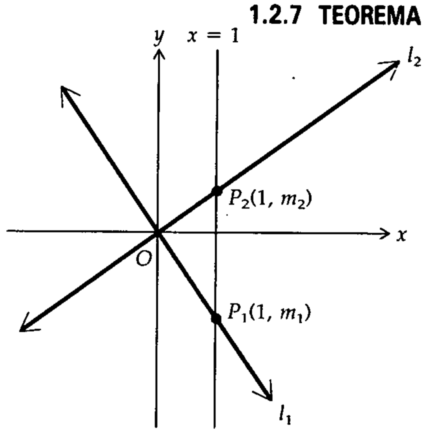


FIGURA 21

Prova Escolhemos os eixos coordenados de modo que a origem esteja no ponto de intersecção de l_1 e l_2. Veja a Figura 21. Como nem l_1 nem l_2 são verticais, essas duas retas interceptam a reta $x = 1$ nos pontos P_1 e P_2, respectivamente. A abscissa de ambos P_1 e P_2 é 1. Seja $\bar{y}$ a ordenada de P_1. Como l_1 contém os pontos $(0, 0)$ e $(1, \bar{y})$, sendo sua inclinação m_1, então

$$m_1 = \frac{\bar{y}-0}{1-0}$$

Assim, $\bar{y} = m_1$. Da mesma forma, podemos provar que a ordenada de P_2 é m_2. Aplicando o teorema de Pitágoras e seu oposto, o triângulo P_1OP_2 será um triângulo retângulo se e somente se

$$|\overline{OP_1}|^2 + |\overline{OP_2}|^2 = |\overline{P_1P_2}|^2 \qquad (3)$$

Da fórmula da distância, obtemos

$$|\overline{OP_1}|^2 = (1-0)^2 + (m_1 - 0)^2 \qquad |\overline{OP_2}|^2 = (1-0)^2 + (m_2 - 0)^2$$
$$= 1 + m_1{}^2 \qquad\qquad = 1 + m_2{}^2$$

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = (1-1)^2 + (m_2 - m_1)^2$$
$$= m_2{}^2 - 2m_1m_2 + m_1{}^2$$

Substituindo em (3) podemos concluir que P_1OP_2 é um triângulo retângulo se e somente se

$$1 + m_1{}^2 + 1 + m_2{}^2 = m_2{}^2 - 2m_1m_2 + m_1{}^2$$
$$2 = -2m_1m_2$$
$$m_1m_2 = -1$$

■

Como $m_1m_2 = -1$ é equivalente a

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{e} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

O Teorema 1.2.7 estabelece que duas retas não-verticais serão perpendiculares se e somente se a inclinação de uma delas for a recíproca negativa da inclinação da outra.

EXEMPLO 5 Dada a reta l com a equação

$$5x + 4y - 20 = 0$$

encontre uma equação da reta que passe pelo ponto $(2, -3)$ e (a) seja paralela a l e (b) seja perpendicular a l.

Solução Primeiro determinamos a inclinação de l, escrevendo sua equação na forma inclinação-intercepto. Resolvendo a equação para y, temos

$$4y = -5x + 20$$
$$y = -\tfrac{5}{4}x + 5$$

A inclinação de l é o coeficiente de x, que é $-\frac{5}{4}$.

(a) A inclinação de uma reta paralela a l também é $-\frac{5}{4}$. Como a reta requerida contém o ponto $(2, -3)$, usamos a forma ponto-inclinação, que resulta

$$y - (-3) = -\tfrac{5}{4}(x - 2)$$
$$4y + 12 = -5x + 10$$
$$5x + 4y + 2 = 0$$

(b) A inclinação de uma reta perpendicular a l é o negativo de $-\frac{5}{4}$, ou seja, $\frac{4}{5}$. Da forma ponto-inclinação, uma equação da reta que passa por $(2, -3)$, com inclinação $\frac{4}{5}$, é

$$y - (-3) = \tfrac{4}{5}(x - 2)$$
$$5y + 15 = 4x - 8$$
$$4x - 5y - 23 = 0$$

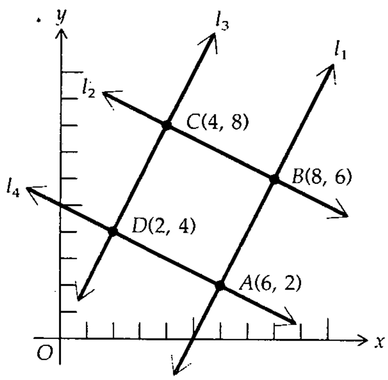


FIGURA 22

EXEMPLO 6 Prove, através das inclinações, que os quatro pontos $A(6, 2)$, $B(8, 6)$, $C(4, 8)$ e $D(2, 4)$ são os vértices de um retângulo.

Solução Veja a Figura 22, onde l_1 é a reta que passa por A e B, l_2 é a reta que passa por B e C, l_3 é a reta que passa por D e C e l_4 é a reta que passa por A e D; m_1, m_2, m_3 e m_4 são suas respectivas inclinações.

$$m_1 = \frac{6-2}{8-6} = 2 \qquad m_2 = \frac{8-6}{4-8} = -\tfrac{1}{2} \qquad m_3 = \frac{8-4}{4-2} = 2 \qquad m_4 = \frac{4-2}{2-6} = -\tfrac{1}{2}$$

Como $m_1 = m_3$, l_1 é paralela a l_3; e como $m_2 = m_4$, l_2 é paralela a l_4. Como $m_1 m_2 = -1$, l_1 e l_2 são perpendiculares. Portanto, o quadrilátero tem seus lados opostos paralelos e dois lados perpendiculares. Assim, o quadrilátero é um retângulo.

EXERCÍCIOS 1.2

Nos Exercícios de 1 a 6, coloque num gráfico o ponto P dado e cada um dos seguintes pontos:

(a) O ponto Q, tal que a reta que passa por P e Q seja perpendicular ao eixo x e o divida ao meio. Dê as coordenadas de Q.
(b) O ponto R, tal que a reta que passa por P e R seja perpendicular ao eixo y e o divida ao meio. Dê as coordenadas de R.
(c) O ponto S, tal que o segmento de reta que passa por P e por S seja dividido ao meio pela origem. Dê as coordenadas de S.
(d) O ponto T, tal que o segmento de reta que passa por P e T seja perpendicular e dividido pela reta que passa pela origem, formando um ângulo de 45° e dividindo o primeiro e o terceiro quadrantes. Dê as coordenadas de T.

1. $P(1, -2)$ **2.** $P(-2, 2)$ **3.** $P(2, 2)$
4. $P(-2, -2)$ **5.** $P(-1, -3)$ **6.** $P(0, -3)$

7. Prove que os pontos $A(-7, 2)$, $B(3, -4)$ e $C(1, 4)$ são vértices de um triângulo isósceles.
8. Prove que os pontos $A(-4, -1)$, $B(-2, -3)$, $C(4, 3)$ e $D(2, 5)$ são vértices de um retângulo.
9. A mediana de um triângulo é um segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. Ache o comprimento das medianas do triângulo cujos vértices são: $A(2, 3)$, $B(3, -3)$ e $C(-1, -1)$.
10. Ache o comprimento das medianas do triângulo com vértices $A(-3, 5)$, $B(2, 4)$ e $C(-1, -4)$.
11. Prove que o triângulo com vértices $A(3, -6)$, $B(8, -2)$ e $C(-1, -1)$ é retângulo. Ache a área do triângulo. (*Sugestão*: Use o inverso do teorema de Pitágoras.)
12. Ache os pontos médios das diagonais do quadrilátero cujos vértices são $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(3, 5)$ e $(3, 1)$.
13. Prove que os pontos $A(6, -13)$, $B(-2, 2)$, $C(13, 10)$ e $D(21, -5)$ são os vértices de um quadrado. Ache o comprimento de uma diagonal.
14. Se um extremo de um segmento de reta for o ponto $(-4, 2)$ e o ponto médio for $(3, -1)$, ache as coordenadas do outro extremo.
15. Se um extremo de um segmento de reta for o ponto $(6, -2)$ e o ponto médio for $(-1, 5)$, ache as coordenadas do outro extremo.
16. A abscissa de um ponto é -6, e sua distância do ponto $(1, 3)$ é $\sqrt{74}$. Ache a ordenada do ponto.
17. Usando a fórmula da distância (1), prove que os pontos $(-3, 2)$, $(1, -2)$ e $(9, -10)$ estão sobre uma reta.
18. Determine se os pontos $(14, 7)$, $(2, 2)$ e $(-4, -1)$ estão sobre uma reta usando a fórmula da distância (1).
19. Se dois vértices de um triângulo equilátero são $(-4, 3)$ e $(0, 0)$, ache o terceiro vértice.
20. Dados dois pontos $A(-3, 4)$ e $B(2, 5)$, ache as coordenadas de um ponto P sobre a reta que passa por A e B, tal que P seja (a) duas vezes mais distante de A do que de B e (b) duas vezes mais distante de B do que de A.

Nos Exercícios de 21 a 24, ache a inclinação da reta que passa pelos pontos.

21. $(2, -3), (-4, 3)$
22. $(5, 2), (-2, -3)$
23. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), (-\frac{5}{6}, \frac{2}{3})$
24. $(-2{,}1,\ 0{,}3)$, $(2{,}3,\ 1{,}4)$

Nos Exercícios de 25 a 38, ache uma equação da reta que satisfaz as condições.

25. A inclinação é 4 e passa pelo ponto $(2, -3)$.
26. A inclinação é 3 e passa pelo ponto $(-4, -1)$.
27. A inclinação é -2 e passa pelo ponto $(-3, 5)$.
28. Passa pelos pontos $(-2, 7)$ e $(6, 0)$.
29. Passa pelos pontos $(4, 6)$ e $(0, -7)$.
30. Passa pelos pontos $(3, 1)$ e $(-5, 4)$.
31. O intercepto x é -3 e o intercepto y é 4.
32. Passa pelo ponto $(1, 4)$ e é paralela à reta cuja equação é $2x + 5y + 7 = 0$.
33. Passa pelo ponto $(-2, 3)$ e é perpendicular à reta cuja equação é $2x - y - 2 = 0$.
34. Passa pelo ponto $(-3, -4)$ e é paralela ao eixo y.
35. Passa pelo ponto $(1, -7)$ e é paralela ao eixo x.
36. A inclinação é -2 e o intercepto x é 4.
37. Passa pelo ponto $(-2, -5)$ e tem uma inclinação de $\sqrt{3}$.
38. Passa pela origem e divide ao meio o ângulo entre os eixos no primeiro e terceiro quadrantes.

Nos Exercícios 39 e 40, ache a inclinação da reta.

39. (a) $x + 3y = 7$; (b) $2y + 9 = 0$
40. (a) $4x - 6y = 5$; (b) $3x - 5 = 0$

Nos Exercícios 41 e 42, determine, através das inclinações, se os três pontos são colineares.

41. (a) $(2, 3), (-4, -7), (5, 8)$; (b) $(2, -1), (1, 1), (3, 4)$
42. (a) $(4, 6), (1, 2), (-5, -4)$; (b) $(-3, 6), (3, 2), (9, -2)$
43. (a) Escreva uma equação cujo gráfico seja o eixo x. (b) Escreva uma equação cujo gráfico seja o eixo y. (c) Escreva uma equação cujo gráfico seja o conjunto de todos os pontos no eixo x ou y.
44. (a) Escreva uma equação cujo gráfico consista em todos os pontos tendo uma abscissa de 4. (b) Escreva uma equação cujo gráfico consista em todos os pontos com ordenada -3.
45. Mostre que as retas com equações $3x + 5y + 7 = 0$ e $6x + 10y - 5 = 0$ são paralelas.
46. Mostre que as retas com equações $3x + 5y + 7 = 0$ e $5x - 3y - 2 = 0$ são perpendiculares.
47. Dada a reta l com equação $2y - 3x = 4$ e o ponto $P(1, -3)$, ache (a) uma equação da reta passando por P, perpendicular a l; (b) a menor distância de P à reta l.
48. Ache o valor de k tal que as retas cujas equações são $3kx + 8y = 5$ e $6y - 4kx = -1$ sejam perpendiculares.
49. Mostre, através das inclinações, que os pontos $(-4, -1)$, $(3, \frac{8}{3})$, $(8, -4)$ e $(2, -9)$ são vértices de um trapezóide.
50. Prove, usando inclinações, que os três pontos $A(3, 1)$, $B(6, 0)$ e $C(4, 4)$ são vértices de um triângulo retângulo e determine a área do triângulo.
51. Ache as coordenadas dos três pontos que dividem o segmento de reta de $A(-5, 3)$ a $B(6, 8)$ em quatro partes iguais.
52. Três vértices consecutivos de um paralelogramo são $(-4, 1)$, $(2, 3)$ e $(8, 9)$. Ache as coordenadas do quarto vértice.
53. Dada a reta l tendo a equação $Ax + By + C = 0$, $B \neq 0$, determine (a) a inclinação; (b) o intercepto y; (c) o intercepto x; (d) uma equação da reta que passe pela origem e seja perpendicular a l.
54. Se A, B, C e D são constantes, mostre que (a) as retas $Ax + By + C = 0$ e $Ax + By + D = 0$ são paralelas e (b) as retas $Ax + By + C = 0$ e $Bx - Ay + D = 0$ são perpendiculares.
55. Ache as equações das três medianas do triângulo com vértices $A(3, -2)$, $B(3, 4)$ e $C(-1, 1)$ e prove que elas se encontram em um ponto.
56. Ache as equações das mediatrizes dos lados de um triângulo com vértices $A(-1, -3)$, $B(5, -3)$ e $C(5, 5)$ e prove que elas se encontram em um ponto.
57. Prove o Teorema 1.2.5: O gráfico da equação
$$Ax + By + C = 0$$
onde A, B e C são constantes e onde nem A nem B são nulos, é uma reta. (*Sugestão*: Considere dois casos $B \neq 0$ e $B = 0$. Se $B \neq 0$, mostre que a equação é aquela de uma reta tendo inclinação $-A/B$ e o intercepto y $-C/B$. Se $B = 0$, mostre que a equação é aquela de uma reta vertical.)
58. Seja l_1 a reta $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ e seja l_2 a reta $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Se l_1 não for paralela a l_2 e k for uma constante qualquer, a equação
$$A_1x + B_1y + C_1 + k(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$
representará um número ilimitado de retas. Prove que cada uma delas contém o ponto de intersecção de l_1 e l_2.
59. Dado que uma equação de l_1 é $2x + 3y - 5 = 0$ e que uma equação de l_2 é $3x + 5y - 8 = 0$, usando o Exercício 58 e sem determinar as coordenadas do ponto de intersecção de l_1 e l_2, encontre uma equação da reta que passe por esse ponto e (a) contendo o ponto $(1, 3)$; (b) seja paralela ao eixo x; (c) e tenha inclinação -2.
60. Para as retas l_1 e l_2 do Exercício 59, use o Exercício 58 e, sem achar as coordenadas do ponto de intersecção de l_1 e l_2, encontre uma equação da reta que passe por esse ponto e (a) seja paralela ao eixo y; (b) seja perpendicular à reta com equação $2x + y = 7$; (c) forme um triângulo isósceles com os eixos coordenados.

Nos Exercícios de 61 a 66, use Geometria Analítica para provar o teorema dado a partir da Geometria Plana.

61. A soma dos quadrados das distâncias de qualquer ponto a dois vértices opostos de qualquer retângulo é igual à soma dos quadrados de suas distâncias aos outros dois vértices.
62. O ponto médio da hipotenusa de qualquer triângulo retângulo é eqüidistante dos três vértices desse triângulo.
63. O segmento de reta que liga os pontos médios de dois lados opostos de qualquer quadrilátero e o segmento de reta que liga os pontos médios das diagonais do quadrilátero dividem-se ao meio.
64. Os segmentos de reta que ligam os pontos médios consecutivos dos lados de qualquer forma quadrilátera formam um paralelogramo.
65. As diagonais de um paralelogramo dividem-se ao meio.
66. Se as diagonais de um quadrilátero dividem-se ao meio, então o quadrilátero é um paralelogramo.

1.3 CIRCUNFERÊNCIAS E GRÁFICOS DE EQUAÇÕES

Uma **equação de um gráfico** é uma equação satisfeita pelas coordenadas daqueles pontos sobre o gráfico e somente por eles. Você aprendeu na Secção 1.2 que uma equação de primeiro grau com duas variáveis tem uma reta como o seu gráfico. Uma das curvas mais simples que é um gráfico de uma equação de segundo grau com duas variáveis é a *circunferência*.

1.3.1 DEFINIÇÃO

Uma **circunferência** é o conjunto de todos os pontos em um plano, eqüidistantes de um ponto fixo. O ponto fixo é chamado de **centro** e a distância fixa é chamada de **raio** da circunferência.

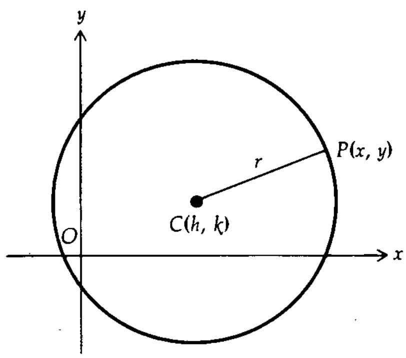


FIGURA 1

Para obter uma equação da circunferência tendo centro em $C(h, k)$ e raio r, usamos a fórmula da distância. Veja a Figura 1. O ponto $P(x, y)$ está na circunferência se e somente se $|\overline{PC}| = r$, isto é, se e somente se

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Essa equação é verdadeira se e somente se

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (r > 0)$$

Essa equação é satisfeita pelas coordenadas daqueles e somente daqueles pontos que estão na circunferência e, portanto, é uma equação da circunferência. Provamos o teorema a seguir.

1.3.2 TEOREMA

A circunferência com centro no ponto $C(h, k)$ e raio r tem como equação

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Se o centro de uma circunferência está na origem, então $h = 0$ e $k = 0$; portanto, sua equação é

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

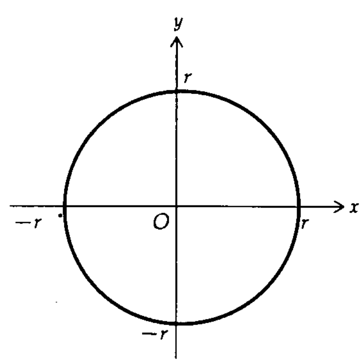


FIGURA 2

Tal circunferência aparece na Figura 2. Se o raio de uma circunferência for 1, será chamada de **circunferência unitária**.

EXEMPLO 1 Ache uma equação da circunferência que tenha um diâmetro com extremidades em $A(-2, 3)$ e $B(4, 5)$.

Solução Como as extremidades de um diâmetro são os pontos A e B, o ponto médio do segmento de reta AB será o centro da circunferência. Veja a Figura 3. Chamando de $C(h, k)$ o centro da circunferência,

$$h = \frac{-2+4}{2} \qquad k = \frac{3+5}{2}$$
$$= 1 \qquad\qquad = 4$$

O centro está em $C(1, 4)$. O raio da circunferência pode ser calculado determinando $|\overline{CA}|$ ou $|\overline{CB}|$. Se $r = |\overline{CA}|$, então

$$r = \sqrt{(1+2)^2 + (4-3)^2}$$
$$= \sqrt{10}$$

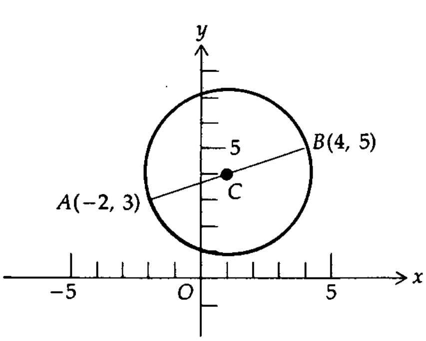


FIGURA 3

Uma equação da circunferência é, portanto,

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 10$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0$$

A equação $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ é chamada de **forma centro-raio** da equação de uma circunferência. Se retirarmos os parênteses e combinarmos os termos, obteremos

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

Tomando $D = -2h$, $E = -2k$, e $F = h^2 + k^2 - r^2$, essa equação torna-se

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

que é denominada a **forma geral** da equação de uma circunferência. Como toda circunferência tem centro e raio, sua equação pode ser colocada na forma centro-raio, ou seja, na forma geral, como fizemos no Exemplo 1. Se iniciarmos com uma equação de uma circunferência na forma geral, podemos escrevê-la em sua forma centro-raio completando os quadrados. No exemplo a seguir tal procedimento é mostrado.

EXEMPLO 2 Encontre o centro e o raio da circunferência com equação

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$$

Solução A equação dada pode ser escrita como

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 2y) = 15$$

Completando os quadrados dos termos entre parênteses, ao somarmos 9 e 1 a ambos os membros da equação, teremos

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 15 + 9 + 1$$
$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

Como essa equação está na forma centro-raio, o centro está em $(-3, 1)$ e o raio é 5.

Mostramos agora que há equações da forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

cujos gráficos não são circunferências. Suponhamos que, ao completar os quadrados, obteremos

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = d$$

Se $d > 0$, temos uma circunferência com centro em (h, k) e raio $\sqrt{d}$. Entretanto, se $d < 0$, não há valores reais de x e y que satisfaçam a equação; assim, não é possível traçarmos um gráfico. Em tal caso, dizemos que o gráfico é o conjunto vazio. Finalmente, se $d = 0$, temos

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = 0$$

Apenas os valores reais de x e y que satisfazem essa equação são $x = h$ e $y = k$. Assim, o gráfico é o ponto (h, k).

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Suponha que tenhamos a equação

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 29 = 0$$

a qual pode ser escrita como

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 10y) = -29$$

Completamos os quadrados dos termos entre parênteses, somando 4 e 25 a ambos os membros, obtemos

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 10y + 25) = -29 + 4 + 25$$
$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 0$$

Como os únicos valores reais de x e y que satisfazem essa equação são $x = 2$ e $y = -5$, o gráfico é o ponto $(2, -5)$. ◀

Observe que uma equação da forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \text{onde } A \neq 0 \tag{2}$$

pode ser escrita na forma de (1) ao dividirmos por A, obtendo

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

A Equação (2) é um caso particular da equação geral do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

na qual os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais, não possuindo nenhum termo xy. O teorema a seguir é resultado dessa discussão.

1.3.3 TEOREMA O gráfico de qualquer equação de segundo grau em R^2 em x e y, na qual os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais e na qual não há termo em xy, é uma circunferência, um ponto, ou ainda, um conjunto vazio.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A equação

$$2x^2 + 2y^2 + 12x - 8y + 31 = 0$$

é da forma (2) e, portanto, pode ser o gráfico de uma circunferência, de um ponto-circunferência ou o conjunto vazio. Colocando a equação na forma (1):

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + \tfrac{31}{2} = 0$$
$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 4y) = -\tfrac{31}{2}$$
$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -\tfrac{31}{2} + 9 + 4$$
$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = -\tfrac{5}{2}$$

Logo, o gráfico é o conjunto vazio. ◀

Na Secção 1.2 definimos o gráfico de uma equação em R^2 como o conjunto de todos os pontos (x, y) cujas coordenadas são números que satisfazem a equação. O gráfico de uma equação em R^2 também é chamado de curva. Já discutimos dois tipos de curvas: retas, que são gráficos de equações de primeiro grau, e circunferências, as quais são gráficos das equações de segundo grau da forma (2). Agora examinaremos alguns gráficos de outro tipo de equação em x e y:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{3}$$

onde a, b e c são constantes e $a \neq 0$. Especificando, consideramos

$$y = x^2 - 2 \tag{4}$$

Tabela 1

x	$y = x^2 - 2$
0	-2
1	-1
2	2
3	7
4	14
-1	-1
-2	2
-3	7
-4	14

A solução dessa equação é um par ordenado de números reais, um para x e o outro para y, que satisfaça a equação. Por exemplo, se x for substituído por 3 na equação, vemos que $y = 7$; assim, $x = 3$ e $y = 7$ constitui uma solução dessa equação. Substituindo x por qualquer número no segundo membro de (4), obtemos um valor para y. Vemos, então, que (4) tem um número ilimitado de soluções. A Tabela 1 dá algumas dessas soluções.

Se marcarmos os pontos que têm como coordenadas os pares de números (x, y) da Tabela 1, ligando-os por uma curva suave, obteremos um esboço do gráfico da Equação (4), que aparece na Figura 4. Qualquer ponto (x, y) nessa curva tem coordenadas que satisfazem a Equação (4) e as coordenadas de qualquer ponto não situado nessa curva não satisfarão a equação.

O gráfico da Figura 4 é uma *parábola*. O ponto mais baixo do gráfico é $(0, -2)$; é o *vértice* da parábola. Essa parábola abre para cima. Um tratamento completo de parábolas encontra-se no Capítulo 10, onde mostraremos que o gráfico de uma equação da forma (3) será uma parábola tendo um eixo vertical abrindo para cima, se $a > 0$ e para baixo, se $a < 0$. No exemplo a seguir, o gráfico é uma parábola com eixo horizontal.

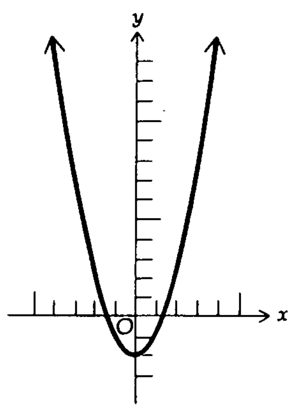


FIGURA 4

EXEMPLO 3 Faça o esboço do gráfico da equação

$$y^2 - x - 2 = 0$$

Solução Resolvendo essa equação em y teremos

$$y^2 = x + 2$$

$$y = \pm\sqrt{x + 2}$$

Assim, a equação dada é equivalente às duas equações

$$y = \sqrt{x + 2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{x + 2}$$

As coordenadas de qualquer ponto que satisfaçam qualquer uma dessas duas equações, irão satisfazer a equação dada. Por outro lado, as coordenadas de qualquer ponto que satisfaçam a equação dada, satisfarão $y = \sqrt{x + 2}$ ou $y = -\sqrt{x + 2}$. A Tabela 2 dá alguns desses valores de x e y.

Tabela 2

x	0	0	1	1	2	2	3	3	-1	-1	-2
y	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	2	-2	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$	1	-1	0

Observe que para qualquer valor de $x > -2$ não há valor real para y. Também, para cada valor de $x > -2$ há dois valores para y. Um esboço do gráfico aparece na Figura 5.

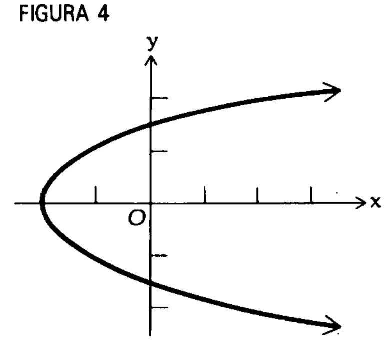


FIGURA 5

EXEMPLO 4 Faça esboços dos gráficos das equações

$$y = \sqrt{x + 2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{x + 2}$$

Solução Lembre do Exemplo 3 que essas duas equações juntas equivalem à equação $y^2 - x - 2 = 0$. Na equação $y = \sqrt{x + 2}$, o valor de y não é negativo. Logo, o gráfico da equação, que a Figura 6 mostra, é a parte superior do gráfico na Figura 5.

Da mesma forma, o gráfico da equação $y = -\sqrt{x + 2}$, cujo esboço está na Figura 7, é a parte inferior da parábola da Figura 5.

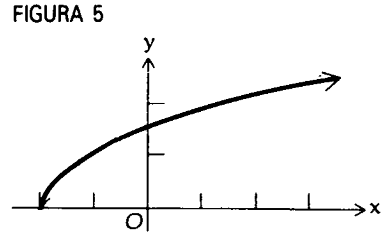


FIGURA 6

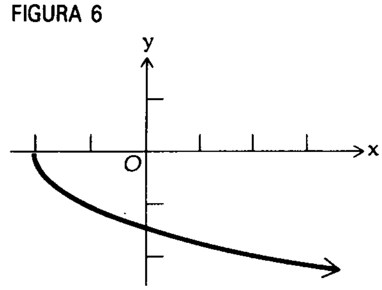


FIGURA 7

Ao desenhar um esboço do gráfico de uma equação, muitas vezes é útil considerar as propriedades de *simetria* de um gráfico.

1.3.4 DEFINIÇÃO

Dois pontos P e Q serão **simétricos com respeito a uma reta** se e somente se a reta for a perpendicular bissetora do segmento de reta PQ. Dois pontos P e Q serão **simétricos com respeito a um terceiro ponto** se e somente se o terceiro ponto for o ponto médio do segmento de reta PQ.

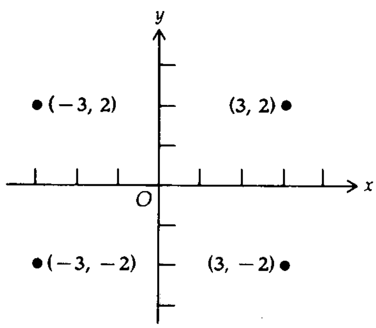


FIGURA 8

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Os pontos (3, 2) e (3, −2) são simétricos com relação ao eixo x, os pontos (3, 2) e (−3, 2) são simétricos com respeito ao eixo y e os pontos (3, 2) e (−3, −2) são simétricos com respeito à origem (veja a Figura 8). ◀

Em geral, os pontos (x, y) e $(x, -y)$ são simétricos com respeito ao eixo x, (x, y) e $(-x, y)$ são simétricos com relação ao eixo y e (x, y) e $(-x, -y)$ são simétricos com respeito à origem.

1.3.5 DEFINIÇÃO

O gráfico de uma equação será simétrico com respeito a uma reta l se e somente se para todo ponto P sobre o gráfico existir um ponto Q, também sobre o gráfico, tal que P e Q sejam simétricos com relação a l. O gráfico de uma equação é simétrico com respeito a um ponto R se e somente se, para todo ponto P sobre o gráfico, existir um ponto S também sobre o gráfico, tal que P e S sejam simétricos com respeito a R.

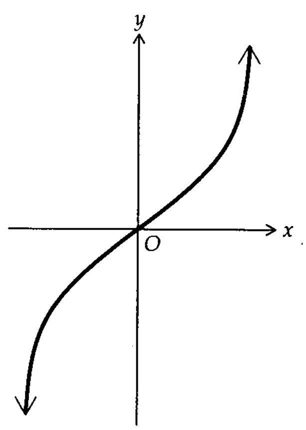


FIGURA 9

Na Figura 5 temos um gráfico simétrico em relação ao eixo x, e a Figura 4 mostra outro gráfico simétrico em relação ao eixo y. Mostramos um gráfico que seja simétrico em relação à origem na Figura 9. A circunferência mostrada na Figura 2 é simétrica em relação ao eixo x, ao eixo y e à origem.

Da Definição 1.3.5 segue que se o ponto (x, y) estiver sobre um gráfico simétrico com respeito ao eixo x, então o ponto $(x, -y)$ também deverá estar no gráfico. E se ambos os pontos (x, y) e $(x, -y)$ estiverem no gráfico, então o gráfico será simétrico com respeito ao eixo x. Logo, as coordenadas dos pontos $(x, -y)$ e (x, y) devem satisfazer a equação do gráfico. Então o gráfico de uma equação em x e y será simétrico com respeito ao eixo x se e somente se uma equação equivalente for obtida quando y for substituído por $-y$ na equação dada. Provamos, assim, a parte (i) do teorema a seguir. As provas das partes (ii) e (iii) são similares.

1.3.6 TEOREMA
Teste de Simetria

O gráfico de uma equação em x e y será
(i) simétrico com respeito ao eixo x se e somente se obtivermos uma equação equivalente ao substituirmos y por $-y$ na equação dada;
(ii) simétrico com respeito ao eixo y se e somente se obtivermos uma equação equivalente ao substituirmos x por $-x$ na equação dada;
(iii) simétrico com respeito à origem se e somente se obtivermos uma equação equivalente quando x for substituído por $-x$ e y for substituído por $-y$ na equação dada.

Observe o gráfico da Figura 4, novamente. Ele é simétrico em relação ao eixo y e sua equação é $y = x^2 - 2$. Observe que uma equação equivalente é obtida quando x é substituído por $-x$. No Exemplo 3 temos a equação $y^2 - x - 2 = 0$ para a qual uma equação equivalente é obtida quando y é substituído por

$-y$, e seu gráfico, esboçado na Figura 4, é simétrico em relação ao eixo x. O exemplo a seguir fornece um gráfico que é simétrico em relação à origem.

EXEMPLO 5 Faça um esboço do gráfico da equação

$$xy = 1$$

Solução Vemos que se na equação dada substituirmos x por $-x$ e y por $-y$, obteremos uma equação equivalente; logo, pelo Teorema 1.3.6 (iii), o gráfico será simétrico com respeito à origem. A Tabela 3 dá alguns valores de x e y satisfazendo a equação dada.

Tabela 3

x	1	2	3	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	-1	-2	-3	-4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	2	3	4	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	-2	-3	-4

Da equação dada, $y = 1/x$. Vemos que à medida que x cresce com valores positivos, y diminui com valores positivos e aproxima-se cada vez mais de zero. À medida que x diminui com valores positivos, y cresce com valores positivos e torna-se cada vez maior. À medida que x cresce com valores negativos (isto é, x assume, por exemplo, os valores -4, -3, -2, -1, $-\frac{1}{2}$ etc.), y assume valores negativos tendo valores absolutos cada vez maiores. Um esboço do gráfico está na Figura 10.

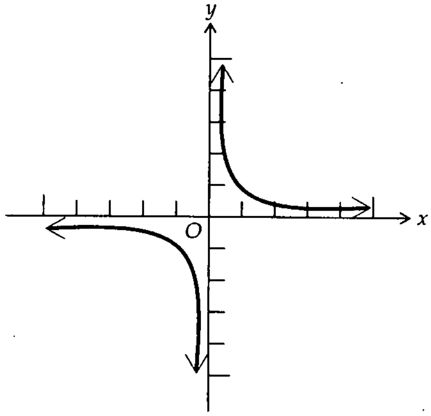


FIGURA 10

EXERCÍCIOS 1.3

Nos Exercícios de 1 a 4, ache uma equação da circunferência com centro em C e raio r. Escreva a equação na forma centro-raio e na forma geral.

1. $C(4, -3)$, $r = 5$
2. $C(0, 0)$, $r = 8$
3. $C(-5, -12)$, $r = 3$
4. $C(-1, 1)$, $r = 2$

Nos Exercícios 5 e 6, ache uma equação da circunferência que satisfaça as condições.

5. Centro em (1, 2) e passa pelo ponto (3, −1).
6. Passa pelos três pontos (2, 8), (7, 3) e (−2, 0).

Nos Exercícios de 7 a 10, ache o centro e o raio da circunferência, e desenhe um esboço do gráfico.

7. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$
8. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y + 7 = 0$
9. $3x^2 + 3y^2 + 4y - 7 = 0$
10. $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

Nos Exercícios de 11 a 16, determine se o gráfico é uma circunferência, um ponto ou um conjunto vazio.

11. $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 19 = 0$
12. $4x^2 + 4y^2 + 24x - 4y + 1 = 0$
13. $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 36 = 0$
14. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$
15. $36x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 119 = 0$
16. $9x^2 + 9y^2 + 6x - 6y + 5 = 0$

Nos Exercícios de 17 a 44, desenhe um esboço do gráfico da equação.

17. $y = 2x + 5$
18. $y = 4x - 3$
19. $y = \sqrt{x + 4}$
20. $y = \sqrt{x - 1}$
21. $y = -\sqrt{x + 4}$
22. $y = -\sqrt{x - 1}$
23. $y^2 = x + 4$
24. $y^2 = x - 1$
25. $y = 3 - x^2$
26. $y = x^2 + 2$
27. $y = x^2 - 4$
28. $y = 9 - x^2$
29. $y = 4 + x^2$
30. $y = x^2 - 9$
31. $xy = 4$
32. $xy = -1$
33. $xy = -9$
34. $xy = 9$
35. $x = y^2 + 2$
36. $x = y^2 - 4$
37. (a) $x + 3y = 0$; (b) $x - 3y = 0$; (c) $x^2 - 9y^2 = 0$
38. (a) $2x - 5y = 0$; (b) $2x + 5y = 0$; (c) $4x^2 - 25y^2 = 0$
39. (a) $y = \sqrt{2x}$; (b) $y = -\sqrt{2x}$; (c) $y^2 = 2x$
40. (a) $y = \sqrt{-2x}$; (b) $y = -\sqrt{-2x}$; (c) $y^2 = -2x$
41. (a) $y = \sqrt{4 - x^2}$; (b) $y = -\sqrt{4 - x^2}$; (c) $x^2 + y^2 = 4$
42. (a) $y = \sqrt{1 - x^2}$; (b) $y = -\sqrt{1 - x^2}$; (c) $x^2 + y^2 = 1$
43. (a) $x = \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4y^2}$; (b) $x = -\frac{1}{2}\sqrt{1 - 4y^2}$; (c) $4x^2 + 4y^2 = 1$
44. (a) $xy = 2$; (b) $xy = -2$; (c) $x^2y^2 = 4$

Nos Exercícios de 45 a 48, ache uma equação da circunferência satisfazendo as condições dadas.

45. O centro está em $(-3, -5)$ e é tangente à reta $12x + 5y = 4$.

46. O centro está em $(-2, 5)$ e é tangente à reta $x = 7$.

47. Tangente à reta $3x + y + 2 = 0$ em $(-1, 1)$ e passa pelo ponto $(3, 5)$.

48. Tangente à reta $3x + 4y - 16 = 0$ em $(4, 1)$ e com um raio de 5 (duas circunferências possíveis).

49. Ache uma equação da reta que é tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ no ponto $(5, 1)$.

50. Ache uma equação de cada uma das duas retas com inclinação $-\frac{4}{3}$, que são tangentes à circunferência $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$.

51. Prove que um gráfico que seja simétrico com respeito a ambos os eixos coordenados também seja simétrico com respeito à origem.

52. O gráfico de uma equação em x e y será simétrico com respeito à reta com equação $y = x$ se e somente se esta for equivalente à equação obtida quando x for substituído por y e y por x. Mostre que o gráfico da equação $ax^2 + by^2 = c$, onde a, b e c são positivos, será simétrico com respeito a essa reta se e somente se $a = b$.

53. Prove que um gráfico simétrico com respeito a duas retas perpendiculares quaisquer também seja simétrico com relação ao ponto de intersecção delas.

1.4 FUNÇÕES

Muitas vezes ocorre na prática que o valor de uma quantidade depende do valor de outra. Exemplificando, o salário de uma pessoa pode depender do número de horas trabalhadas; a produção total de uma fábrica pode depender do número de máquinas usadas; a distância percorrida por um objeto pode depender do tempo decorrido desde que ele deixou um dado ponto; o volume do espaço ocupado por um gás sob uma pressão constante depende da temperatura do gás; a resistência de um fio elétrico com comprimento fixo depende de seu diâmetro, e assim por diante. A relação entre tais quantidades é dada freqüentemente por uma *função*. Para nossos propósitos, restringimos as quantidades na relação a serem números reais. Então

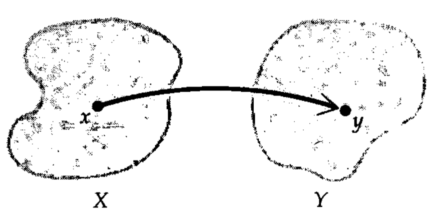


FIGURA 1

> Uma função pode ser considerada como uma correspondência de um conjunto X de números reais x a um conjunto Y de números reais y, onde o número y é único para um valor específico de x.

A Figura 1 dá uma visualização de tal correspondência, onde os conjuntos X e Y consistem em pontos numa região plana.

Estabelecendo o conceito de uma função de outra forma, consideramos intuitivamente o número real y no conjunto Y como uma *função* do número real x no conjunto X se houver uma regra pela qual um valor específico de y seja atribuído a um valor de x. Essa regra é dada, muitas vezes, por uma equação. Por exemplo, a equação

$$y = x^2$$

define uma função para a qual X é o conjunto de todos os números reais e Y é o conjunto de números não-negativos. O valor de y em Y, atribuído ao valor de x em X, é obtido quando multiplicamos x por si mesmo. A Tabela 1 dá o valor de y atribuído a alguns valores fixados de x, e a Figura 2 ilustra a correspondência para os números na tabela.

Tabela 1

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
4	16
0	0
-1	1
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-4	16

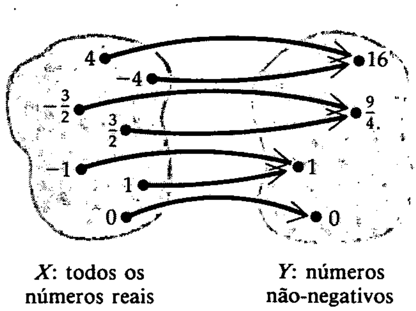


FIGURA 2

Usamos símbolos tais como f, g e h para denotar uma função. O conjunto X de números reais descritos acima é o *domínio* da função, e o conjunto Y de números reais atribuídos aos valores de x em X é a *imagem* da função.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Seja f a função definida pela equação

$$y = \sqrt{x - 2}$$

Como os números são restritos a números reais, y é uma função de x apenas para $x - 2 \geqslant 0$, pois para qualquer x que satisfaça essa desigualdade, um valor único de y é determinado. No entanto, se $x < 2$, obtemos uma raiz quadrada de um número negativo, e então, não existe número real y algum. Logo, devemos restringir x de modo que $x \geqslant 2$. Assim, o domínio de f é o intervalo $[2, +\infty)$, e a imagem é $[0, +\infty)$. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Seja g a função definida pela equação

$$y = \sqrt{x^2 - 9}$$

Observe que y é uma função de x apenas para $x \geqslant 3$ ou $x \leqslant -3$ (ou simplesmente $|x| \geqslant 3$); para qualquer x que satisfaça uma dessas desigualdades, um valor único de y é determinado. Nenhum valor real de y é determinado se x estiver no intervalo aberto $(-3, 3)$, pois para esses valores de x obtemos a raiz quadrada de um número negativo. Logo, o domínio de g é $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ e a imagem é $[0, +\infty)$. ◀

Podemos considerar uma função como um conjunto de pares ordenados. Por exemplo, a função definida pela equação $y = x^2$ consiste em todos os pares ordenados (x, y) que satisfaçam a equação. Os pares ordenados nessa função dados pela Tabela 1 são $(1, 1)$ $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$, $(4, 16)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ e $(-4, 16)$. Evidentemente, há um número ilimitado de pares ordenados na função. Alguns outros são $(2, 4)$, $(-2, 4)$, $(5, 25)$, $(-5, 25)$, $(\sqrt{3}, 3)$ e assim por diante.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** A função f da Ilustração 1 é o conjunto de pares ordenados (x, y) para os quais $y = \sqrt{x - 2}$. Com símbolos, escrevemos

$$f = \{(x, y) | y = \sqrt{x - 2}\}$$

Alguns dos pares ordenados em f são $(2, 0)$, $(\frac{9}{4}, \frac{1}{2})$, $(3, 1)$, $(4, \sqrt{2})$, $(5, \sqrt{3})$, $(6, 2)$, $(11, 3)$. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** A função g da Ilustração 2 é o conjunto dos pares ordenados (x, y) para os quais $y = \sqrt{x^2 - 9}$, isto é,

$$g = \{(x, y) | y = \sqrt{x^2 - 9}\}$$

Alguns dos pares ordenados em g são $(3, 0)$, $(4, \sqrt{7})$, $(5, 4)$, $(-3, 0)$, $(-\sqrt{13}, 2)$. ◀

Daremos agora a definição formal de uma função. O conceito de função torna-se mais preciso se ela for definida como um conjunto de pares ordenados, ao invés de usarmos uma regra ou correspondência.

1.4.1 DEFINIÇÃO Uma **função** é um conjunto de pares ordenados de números (x, y), sendo que dados dois pares ordenados distintos, nenhum deles terá o mesmo primeiro número. O conjunto de todos os valores admissíveis de x é chamado de **domínio** da função e o conjunto de todos os valores resultantes de y é chamado a **imagem** da função.

Nessa definição, a restrição que dois pares ordenados não podem ter o mesmo número assegura que y seja único para valores específicos de x. Os números x e y são **variáveis**. Dados os valores atribuídos a x e como o valor de y independe da escolha de x, x será a **variável independente** e y, a **variável dependente**.

O conceito de uma função é um conjunto de pares ordenados que nos permite dar a definição a seguir do *gráfico de uma função*.

1.4.2 DEFINIÇÃO Se f for uma função, então o **gráfico** de f será o conjunto dos pontos (x, y) em R^2 para os quais (x, y) é um par ordenado de f.

Comparando essa definição com a definição do gráfico de uma equação (1.2.4), segue que o gráfico de uma função f é o mesmo que o gráfico da equação $y = f(x)$.

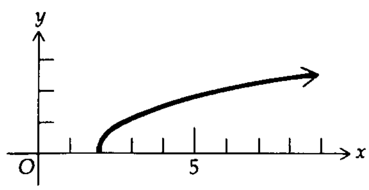


FIGURA 3

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** (a) Um esboço do gráfico da função f da Ilustração 1 está na Figura 3. Ele é a metade superior de uma parábola.

(b) A Figura 4 mostra um esboço do gráfico da função g das Ilustrações 2 e 4. ◀

Lembre-se de que para termos uma função, é preciso existir exatamente um valor da variável dependente para cada valor da variável independente no domínio da função. Em termos geométricos isso significa que

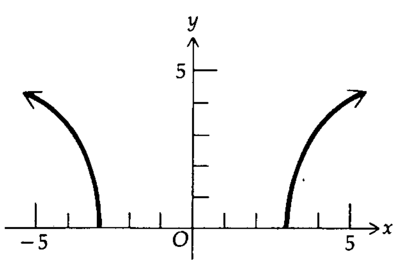


FIGURA 4

O gráfico de uma função pode ser interceptado por uma reta vertical em, no máximo, um ponto.

Observe que essa é a situação dos gráficos das funções nas Figuras 3 e 4.

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Consideremos o conjunto

$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$

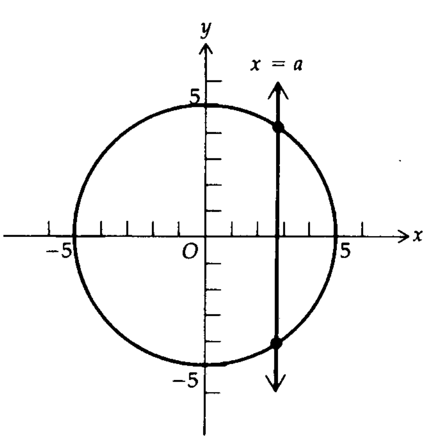


FIGURA 5

Um esboço do gráfico desse conjunto está na Figura 5. Tal conjunto de pares ordenados não é uma função, pois para cada x no intervalo $(-5, 5)$ existem dois pares ordenados distintos, tendo um mesmo valor de x como primeiro elemento. Por exemplo, $(3, 4)$ e $(3, -4)$ são pares ordenados no conjunto dado. Além disso, observe que o gráfico do conjunto dado é uma circunferência com centro na origem e raio 5 e uma reta vertical tendo a equação $x = a$, onde $-5 < a < 5$, intercepta a circunferência em dois pontos. ◀

A próxima secção trata de gráficos de funções e apresenta mais exemplos.

Para introduzir a notação de **valor funcional**, seja f a função tendo como seu domínio os valores da variável x e como sua imagem os valores da variável y. Então, o símbolo $f(x)$ (lemos "f de x") denota o valor de y correspondente ao valor de x.

▶ **ILUSTRAÇÃO 7** Na Ilustração 1, $f = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 2}\}$. Assim

$f(x) = \sqrt{x - 2}$

Calculamos $f(x)$ para valores específicos de x.

$$f(3) = \sqrt{3 - 2} = 1 \qquad f(5) = \sqrt{5 - 2} = \sqrt{3} \qquad f(6) = \sqrt{6 - 2} = 2 \qquad f(9) = \sqrt{9 - 2} = \sqrt{7}$$ ◀

Quando definimos uma função, o domínio da função deve ser dado implícita ou explicitamente. Por exemplo, se f for definida por

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$$

isto implica que x pode ser qualquer número real. Mas, se f for definida por

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \qquad 1 \leqslant x \leqslant 10$$

então o domínio de f consistirá em todos os números reais entre 1 e 10, inclusive os extremos.

Analogamente, se g for definida pela equação

$$g(x) = \frac{5x - 2}{x + 4}$$

isto implica que $x \neq -4$, pois o quociente não está definido para $x = -4$; logo, o domínio de g é o conjunto de todos os números reais exceto -4.

Se

$$h(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

isto implica que x está no intervalo fechado $[-3, 3]$, pois $\sqrt{9 - x^2}$ não é um número real para $x > 3$ ou $x < -3$. Assim, o domínio de h é $[-3, 3]$ e a imagem é $[0, 3]$.

EXEMPLO 1 Dada a função f definida por

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

ache:

(a) $f(0)$; (b) $f(2)$; (c) $f(h)$; (d) $f(2h)$; (e) $f(2x)$; (f) $f(x + h)$; (g) $f(x) + f(h)$.

Solução

(a) $f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 - 4$
$= 4$

(b) $f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4$
$= 6$

(c) $f(h) = h^2 + 3h - 4$

(d) $f(2h) = (2h)^2 + 3(2h) - 4$
$= 4h^2 + 6h - 4$

(e) $f(2x) = (2x)^2 + 3(2x) - 4$
$= 4x^2 + 6x - 4$

(f) $f(x + h) = (x + h)^2 + 3(x + h) - 4$
$= x^2 + 2hx + h^2 + 3x + 3h - 4$
$= x^2 + (2h + 3)x + (h^2 + 3h - 4)$

(g) $f(x) + f(h) = (x^2 + 3x - 4) + (h^2 + 3h - 4)$
$= x^2 + 3x + (h^2 + 3h - 8)$

Compare os cálculos das partes (f) e (g) do Exemplo 1. Na parte (f) o cálculo é de $f(x + h)$ que é o valor funcional na soma de x e h. Na parte (g), onde $f(x) + f(h)$ é calculado, obtemos a soma de dois valores funcionais $f(x)$ e $f(h)$.

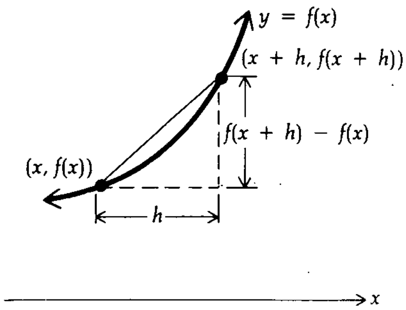


FIGURA 6

No Capítulo 3 precisamos calcular quocientes da forma

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad h \neq 0$$

Esse quociente surge como a inclinação da reta que passa pelos pontos $(x, f(x))$ e $(x + h, f(x + h))$ sobre o gráfico da função definida por $y = f(x)$. Veja a Figura 6. Se, no cálculo, a diferença de dois radicais aparece no numerador, racionalizamos o numerador como na parte (b) do exemplo a seguir.

EXEMPLO 2 Ache

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

onde $h \neq 0$, se (a) $f(x) = 4x^2 - 5x + 7$; (b) $f(x) = \sqrt{x}$.

Solução

(a)
$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{4(x+h)^2-5(x+h)+7-(4x^2-5x+7)}{h}\\ &= \frac{4x^2+8hx+4h^2-5x-5h+7-4x^2+5x-7}{h}\\ &= \frac{8hx-5h+4h^2}{h}\\ &= 8x-5+4h\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\ &= \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Na segunda etapa dessa solução o numerador e o denominador são multiplicados pelo conjugado do numerador, a fim de racionalizar o numerador, e isto dá um fator comum de h no numerador e denominador.

Vamos definir agora algumas operações com funções. Na definição, novas funções são formadas a partir das funções dadas, através da soma, subtração, multiplicação e divisão de valores funcionais. Conseqüentemente, essas novas funções são conhecidas como a *soma*, a *diferença*, o *produto* e o *quociente* das funções originais.

1.4.3 DEFINIÇÃO Dadas as duas funções f e g:

(i) a sua **soma**, denotada por $f + g$, é a função definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(ii) a sua **diferença**, denotada por $f - g$, é a função definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

(iii) o seu **produto**, denotado por $f \cdot g$, é a função definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

(iv) o seu **quociente**, denotado por f/g, é a função definida por

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

Em cada caso, o *domínio* da função resultante consiste naqueles valores de x comuns aos domínios de f e g, com a exigência adicional, no caso (iv), de que os valores de x para os quais $g(x) = 0$ sejam excluídos.

EXEMPLO 3 Dadas as funções f e g definidas por

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x-4}$$

ache:

(a) $(f + g)(x)$; (b) $(f - g)(x)$; (c) $(f \cdot g)(x)$; (d) $(f/g)(x)$.

Solução

(a) $(f + g)(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$ (b) $(f - g)(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4}$

(c) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-4}$ (d) $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}$

O domínio de f é $[-1, +\infty)$, o domínio de g é $[4, +\infty)$. Assim, nas partes (a), (b) e (c), o domínio da função resultante é $[4, +\infty)$. Na parte (d), o denominador é zero quando $x = 4$; desse modo, 4 é excluído do domínio, o qual, então, é $(4, +\infty)$.

Outra operação com funções consiste em obter a *função composta* de duas funções dadas.

1.4.4 DEFINIÇÃO Dadas as duas funções f e g, a **função composta**, denotada por $f \circ g$, é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

e o domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números x no domínio de g, tal que $g(x)$ esteja no domínio de f.

A definição indica que quando calculamos $(f \circ g)(x)$, primeiro aplicamos a função g a x e então, a função f a $g(x)$. Esse procedimento será demonstrado na ilustração e no exemplo a seguir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 8** Se f e g são definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad g(x) = 2x - 3$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(2x - 3)\\ &= \sqrt{2x - 3}\end{aligned}$$

O domínio de g é $(-\infty, +\infty)$, e o domínio de f é $[0, +\infty)$. Logo, o domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números reais, para os quais $2x - 3 \geqslant 0$ ou, de modo equivalente, $[\frac{3}{2}, +\infty)$. ◀

EXEMPLO 4 Dado que f e g estão definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 1$$

determine: (a) $f \circ f$; (b) $g \circ g$; (c) $f \circ g$; (d) $g \circ f$. Encontre também o domínio da função composta em cada parte.

Solução

(a) $$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x))\\ &= f(\sqrt{x})\\ &= \sqrt{\sqrt{x}}\\ &= \sqrt[4]{x}\end{aligned}$$

O domínio é $[0, +\infty)$.

(b) $$\begin{aligned}(g \circ g)(x) &= g(g(x))\\ &= g(x^2 - 1)\\ &= (x^2 - 1)^2 - 1\\ &= x^4 - 2x^2\end{aligned}$$

O domínio é $(-\infty, +\infty)$.

(c) $$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(x^2 - 1)\\ &= \sqrt{x^2 - 1}\end{aligned}$$

O domínio é $(\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

(d) $$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(\sqrt{x})\\ &= (\sqrt{x})^2 - 1\\ &= x - 1\end{aligned}$$

O domínio é $[0, +\infty)$.

Na parte (d) notamos que, embora $x - 1$ seja definida por todos os valores de x, o domínio de $g \circ f$, pela definição de uma função composta, será o conjunto de todos os números x no domínio de f, tais que $f(x)$ esteja no domínio de g. Assim, o domínio de $g \circ f$ deve ser um subconjunto do domínio de f.

Observe, dos resultados das partes (c) e (d) do Exemplo 4, que $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ não são, necessariamente, iguais.

1.4.5 DEFINIÇÃO

(i) Uma função é **par** se, para todo valor de x no domínio de f, $f(-x) = f(x)$.
(ii) Uma função f é denominada **ímpar** se, para todo valor de x no domínio de f, $f(-x) = -f(x)$.

Em ambos os casos (i) e (ii), devemos entender que $-x$ está no domínio de f, sempre que x estiver lá.

▶ **ILUSTRAÇÃO 9** (a) Se $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$, então

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 7 \\ &= 3x^4 - 2x^2 + 7 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Logo, f é uma função par.

(b) Se $g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$, então

$$\begin{aligned} g(-x) &= 3(-x)^5 - 4(-x)^3 - 9(-x) \\ &= -3x^5 + 4x^3 + 9x \\ &= -(3x^5 - 4x^3 - 9x) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

Logo, g é uma função ímpar.

(c) Se $h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$, então

$$\begin{aligned} h(-x) &= 2(-x)^4 + 7(-x)^3 - (-x)^2 + 9 \\ &= 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 9 \end{aligned}$$

Vemos que a função h não é nem par, nem ímpar. ◀

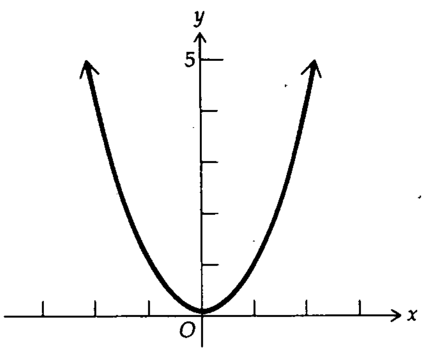


FIGURA 7

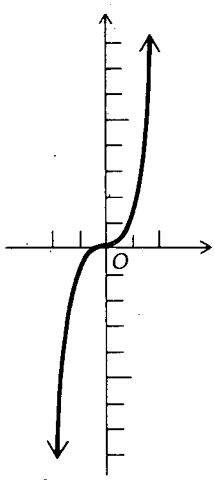


FIGURA 8

Do teste de simetria dado na Secção 1.3, segue que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y e o gráfico de uma função ímpar é simétrico com relação à origem.

▶ **ILUSTRAÇÃO 10** (a) Se $f(x) = x^2$, f será uma função par e seu gráfico será uma parábola simétrica com respeito ao eixo y. Veja a Figura 7.

(b) Se $g(x) = x^3$, g será uma função ímpar. O gráfico de g, mostrado na Figura 8, será simétrico com respeito à origem. ◀

Uma função cuja imagem consiste em um único número, é chamada de **função constante**. Assim, se $f(x) = c$ e se c for um número real qualquer, então f será uma função constante e seu gráfico será uma reta paralela ao eixo x, a uma distância de c unidades desse eixo.

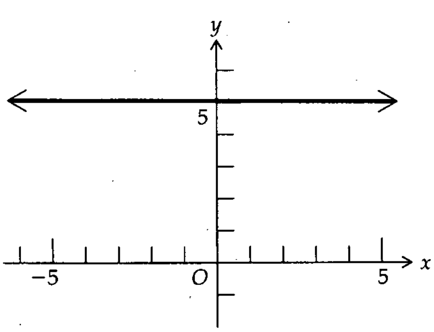


FIGURA 9

▶ **ILUSTRAÇÃO 11** (a) A função definida por $f(x) = 5$ é uma função constante, e seu gráfico, mostrado na Figura 9, é uma reta horizontal 5 unidades acima do eixo x.

(b) A função definida por $g(x) = -4$ é uma função constante cujo gráfico é uma reta horizontal 4 unidades abaixo do eixo x. Veja a Figura 10. ◀

Uma **função linear** é definida por

$$f(x) = mx + b$$

onde m e b são constantes e $m \neq 0$. Seu gráfico é uma reta tendo inclinação m e y intercepto b.

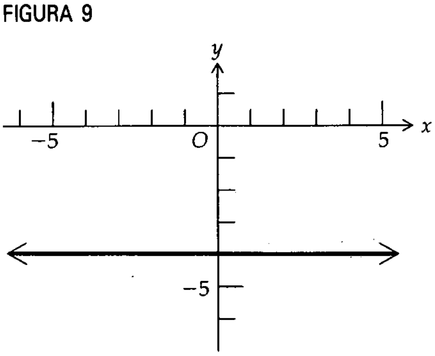


FIGURA 10

▶ **ILUSTRAÇÃO 12** A função definida por

$$f(x) = 2x - 6$$

é linear. Seu gráfico é a reta mostrada na Figura 11. ◀

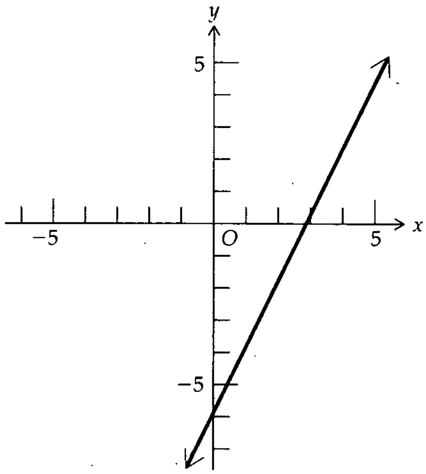


FIGURA 11

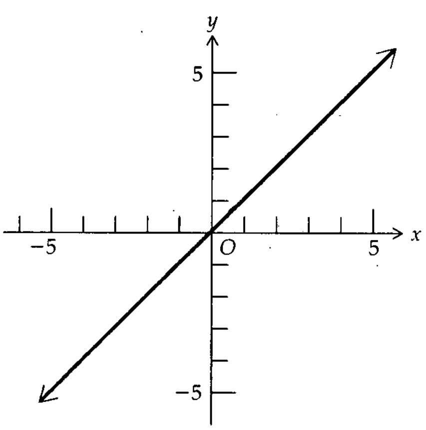


FIGURA 12

A função linear dada, definida por

$$f(x) = x$$

é chamada de **função identidade**. Seu gráfico, mostrado na Figura 12, é a reta que divide ao meio o primeiro e o terceiro quadrantes.

Se uma função f for definida por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais ($a_n \neq 0$) e n for um inteiro não-negativo, então f será chamada de **função polinomial** de grau n. Assim, a função definida por

$$f(x) = 3x^5 - x^2 + 7x - 1$$

é uma função polinomial de grau 5.

Uma função linear será uma função polinomial de grau 1. Se o grau de uma função polinomial for 2, ela será chamada de **função quadrática**, e se o grau for 3, será chamada de **função cúbica.**

Se uma função puder ser expressa como o quociente de duas funções polinomiais, ela será chamada de **função racional**.

Uma **função algébrica** é aquela formada por um número finito de operações algébricas sobre as funções identidade e constante. Essas operações algébricas incluem adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. As funções polinomiais e racionais são tipos especiais de funções algébricas. Um exemplo complicado de uma função algébrica é aquele definido por

$$f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

Além das funções algébricas, são também consideradas em Cálculo as **funções transcendentais**. Exemplos são as funções trigonométricas discutidas na Secção 1.6 e as funções exponencial e logarítmica introduzidas no Capítulo 7.

EXERCÍCIOS 1.4

Nos Exercícios de 1 a 4, determine se o conjunto dado é uma função. Se for, qual o seu domínio?

1. (a) $\{(x, y) | y = \sqrt{x - 4}\}$; (b) $\{(x, y) | y = \sqrt{x^2 - 4}\}$; (c) $\{(x, y) | y = \sqrt{4 - x^2}\}$; (d) $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$.

2. (a) $\{(x, y) | y = \sqrt{x + 1}\}$; (b) $\{(x, y) | y = \sqrt{x^2 - 1}\}$; (c) $\{(x, y) | y = \sqrt{1 - x^2}\}$; (d) $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$.

3. (a) $\{(x, y) | y = x^2\}$; (b) $\{(x, y) | x = y^2\}$; (c) $\{(x, y) | y = x^3\}$; (d) $\{(x, y) | x = y^3\}$.

4. (a) $\{(x, y) | y = (x - 1)^2 + 2\}$; (b) $\{(x, y) | x = (y - 2)^2 + 1\}$; (c) $\{(x, y) | y = (x + 2)^3 - 1\}$; (d) $\{(x, y) | x = (y + 1)^3 - 2\}$.

5. Dada $f(x) = 2x - 1$, ache (a) $f(3)$; (b) $f(-2)$; (c) $f(0)$; (d) $f(a + 1)$; (e) $f(x + 1)$; (f) $f(2x)$; (g) $2f(x)$; (h) $f(x + h)$; (i) $f(x) + f(h)$; (j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

6. Dada $f(x) = \dfrac{3}{x}$, ache (a) $f(1)$; (b) $f(-3)$; (c) $f(6)$; (d) $f(\frac{1}{3})$; (e) $f\left(\dfrac{3}{a}\right)$; (f) $f\left(\dfrac{3}{x}\right)$; (g) $\dfrac{f(3)}{f(x)}$; (h) $f(x - 3)$; (i) $f(x) - f(3)$; (j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

7. Dada $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$, ache (a) $f(-2)$; (b) $f(-1)$; (c) $f(0)$; (d) $f(3)$; (e) $f(h + 1)$; (f) $f(2x^2)$; (g) $f(x^2 - 3)$; (h) $f(x + h)$; (i) $f(x) + f(h)$; (j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

8. Dada $g(x) = 3x^2 - 4$, ache (a) $g(-4)$; (b) $g(\frac{1}{2})$; (c) $g(x^2)$; (d) $g(3x^2 - 4)$; (e) $g(x - h)$; (f) $g(x) - g(h)$; (g) $\dfrac{g(x + h) - g(x)}{h}$, $h \neq 0$.

9. Dada $F(x) = \sqrt{2x + 3}$, ache (a) $F(-1)$; (b) $F(4)$; (c) $F(\frac{1}{2})$; (d) $F(11)$; (e) $F(2x + 3)$; (f) $\dfrac{F(x + h) - F(x)}{h}$, $h \neq 0$.

10. Dada $G(x) = \sqrt{4 - x}$, ache (a) $G(-5)$; (b) $G(0)$; (c) $G(1)$; (d) $G(\frac{11}{9})$; (e) $G(4 - x)$; (f) $\dfrac{G(x + h) - G(x)}{h}$; $h \neq 0$

Nos Exercícios de 11 a 20, as funções f e g são definidas. Em cada exercício, defina as seguintes funções e determine o domínio da função resultante: (a) $f + g$; (b) $f - g$; (c) $f \cdot g$; (d) f/g; (e) g/f.

11. $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$
12. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 1$
13. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$
14. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 4 - x^2$
15. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 1$
16. $f(x) = |x|$; $g(x) = |x - 3|$
17. $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = 3x - 2$
18. $f(x) = \sqrt{x + 4}$; $g(x) = x^2 - 4$
19. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$; $g(x) = \dfrac{x}{x - 2}$
20. $f(x) = x^2$; $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Nos Exercícios de 21 a 30, estão definidas as funções f e g. Em cada exercício, defina as seguintes funções e determine o domínio da função composta: (a) $f \circ g$; (b) $g \circ f$; (c) $f \circ f$; (d) $g \circ g$.

21. $f(x) = x - 2$; $g(x) = x + 7$
22. $f(x) = 3 - 2x$; $g(x) = 6 - 3x$
23. As funções do Exercício 11.
24. As funções do Exercício 12.
25. $f(x) = \sqrt{x - 2}$; $g(x) = x^2 - 2$
26. $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$
27. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \sqrt{x}$
28. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = -\dfrac{1}{x}$
29. $f(x) = |x|$; $g(x) = |x + 2|$
30. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $g(x) = \sqrt{x - 1}$

Nos Exercícios 31 e 32 a função f está definida. Em cada exercício, defina as seguintes funções e determine o domínio da função resultante: (a) $f(x^2)$; (b) $[f(x)]^2$; (c) $(f \circ f)(x)$.

31. $f(x) = 2x - 3$
32. $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$

33. Dada $G(x) = |x - 2| - |x| + 2$, expresse $G(x)$ sem as barras de valor absoluto, se x estiver no intervalo dado: (a) $[2, +\infty)$; (b) $(-\infty, 0)$; (c) $[0, 2)$.

34. Dada $f(t) = \dfrac{|3 + t| - |t| - 3}{t}$, expresse $f(t)$ sem as barras de valor absoluto, se t estiver no intervalo dado: (a) $(0, +\infty)$; (b) $[-3, 0)$; (c) $(-\infty, -3)$.

35. Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ache (a) $f(1)$; (b) $f(-1)$; (c) $f(4)$; (d) $f(-4)$; (e) $f(-x)$; (f) $f(x + 1)$; (g) $f(x^2)$; (h) $f(-x^2)$.

Em cada caso dos Exercícios 36 e 37, determine se a função dada é par, ímpar ou nenhuma das duas.

36. (a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$ (b) $f(x) = 5x^3 - 7x$
(c) $f(s) = s^2 + 2s + 2$ (d) $g(x) = x^6 - 1$
(e) $h(t) = 5t^7 + 1$ (f) $f(x) = |x|$
(g) $f(y) = \dfrac{y^3 - y}{y^2 + 1}$ (h) $g(z) = \dfrac{z - 1}{z + 1}$

37. (a) $g(x) = 5x^2 - 4$ (b) $f(x) = x^3 + 1$
(c) $f(t) = 4t^5 + 3t^3 - 2t$ (d) $g(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$
(e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ (f) $h(x) = \dfrac{4x^2 - 5}{2x^3 + x}$
(g) $f(z) = (z - 1)^2$ (h) $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$
(i) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ (j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

38. Existe uma função que é par e ímpar. Qual é?

39. Determine se a função composta $f \circ g$ é par ou ímpar em cada um dos seguintes casos: (a) f e g são ambas pares; (b) f e g são ambas ímpares; (c) f é par e g é ímpar; (d) f é ímpar e g é par.

Se f e g forem duas funções tais que $(f \circ g)(x) = x$ e $(g \circ f)(x) = x$, então f e g serão funções inversas. Nos Exercícios de 40 a 42, mostre que f e g são funções inversas.

40. $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = \dfrac{x + 3}{2}$
41. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ e $g(x) = \dfrac{1 - x}{x}$
42. $f(x) = x^2$, $x \geqslant 0$ e $g(x) = \sqrt{x}$

1.5 GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Como preparação para o nosso estudo de limites e continuidade no Capítulo 2, discutiremos os gráficos de funções. Lembre-se, da Secção 1.4, que o gráfico de uma função f é o mesmo que o gráfico da equação $y = f(x)$. Enquanto o domínio de uma função geralmente torna-se evidente a partir da definição da função, a imagem é determinada freqüentemente pelo gráfico da função.

EXEMPLO 1 A **função valor absoluto** é definida por

$$f(x) = |x|$$

Determine o domínio e a imagem da função valor absoluto e faça um esboço de seu gráfico.

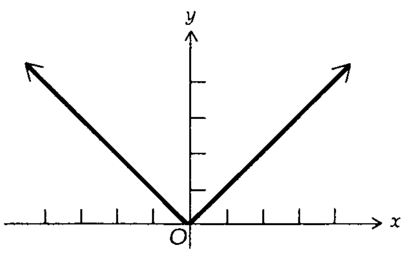


FIGURA 1

Solução Da definição (1.1.8) de $|x|$, temos

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O domínio é $(-\infty, +\infty)$. O gráfico de f consiste em duas semi-retas que passam pela origem e acima do eixo x; uma delas tem inclinação igual a 1 e a outra tem -1. Veja a Figura 1. A imagem é $[0, +\infty)$.

EXEMPLO 2 Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{se } x \leqslant -1 \\ 1 & \text{se } -1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{se } 2 < x \end{cases}$$

Determine o domínio e a imagem de f e desenhe um esboço de seu gráfico.

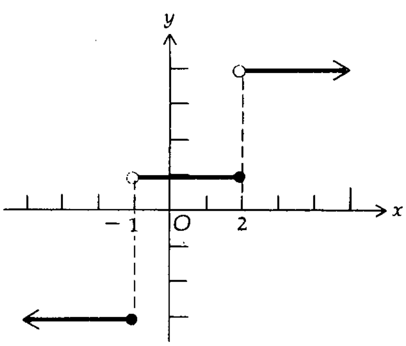


FIGURA 2

Solução O domínio é $(-\infty, +\infty)$ e um esboço do gráfico aparece na Figura 2. A imagem consiste nos três números -3, 1 e 4.

EXEMPLO 3 Seja g a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x < 1 \\ x^2 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$$

Determine o domínio e a imagem de g e faça um esboço de seu gráfico.

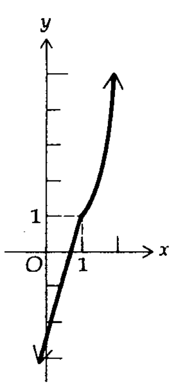


FIGURA 3

Solução O domínio de g é $(-\infty, +\infty)$. O gráfico consiste na parte da reta $y = 3x - 2$ para a qual $x < 1$ e na parte da parábola $y = x^2$ para a qual $1 \leqslant x$. Um esboço do gráfico está na Figura 3. A imagem é $(-\infty, +\infty)$.

EXEMPLO 4 A função h é definida por

$$h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Determine o domínio e a imagem de h e faça um esboço de seu gráfico.

Solução Como $h(x)$ está definida para todo x exceto 3, o domínio de h consiste em todos os números exceto 3. Quando $x = 3$, ambos o numerador e o denominador são nulos e 0/0 é indefinido.

Fatorando o numerador em $(x - 3)(x + 3)$ obtemos

$$h(x) = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$$

ou $h(x) = x + 3$, desde que $x \neq 3$. Em outras palavras, a função h pode ser definida por

$$h(x) = x + 3 \quad \text{se } x \neq 3$$

O gráfico consiste em todos os pontos sobre a reta $y = x + 3$, exceto o ponto $(3, 6)$. Veja a Figura 4. A imagem de h é o conjunto de todos os números reais exceto 6.

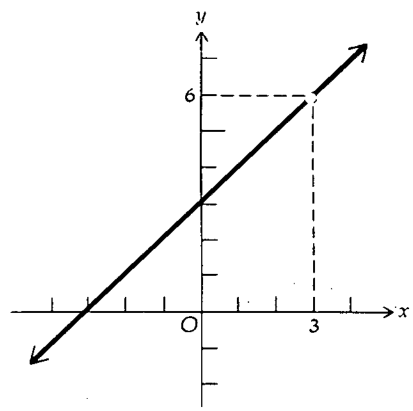


FIGURA 4

EXEMPLO 5 Seja H a função definida por

$$H(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \neq 3 \\ 2 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

Determine o domínio e a imagem de H e faça um esboço de seu gráfico.

Solução Como H está definida para todos os valores de x, seu domínio é $(-\infty, +\infty)$. Um esboço do gráfico de H é mostrado na Figura 5. A imagem é o conjunto de todos os números reais exceto 6.

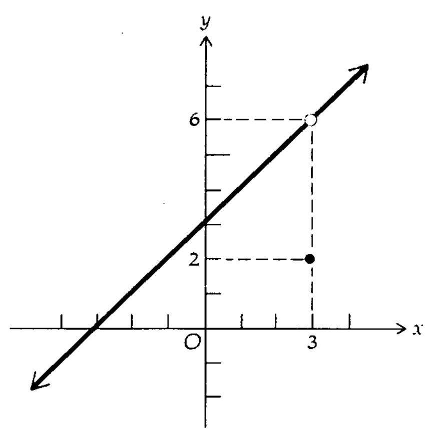


FIGURA 5

EXEMPLO 6 A função f é definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 2 \\ 7 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Determine o domínio e a imagem de f e faça um esboço de seu gráfico.

Solução Como f é definida para todos os valores de x, o domínio é $(-\infty, +\infty)$. O gráfico mostrado na Figura 6 consiste nos pontos $(2, 7)$ e todos os pontos sobre a parábola $y = x^2$ exceto $(2, 4)$. A imagem é $[0, +\infty)$.

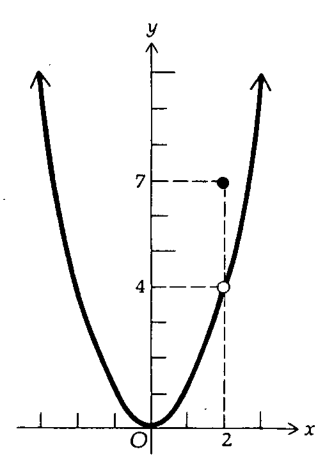


FIGURA 6

EXEMPLO 7 Seja F a função definida por

$$F(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x < 3 \\ 5 & \text{se } x = 3 \\ 2x + 1 & \text{se } 3 < x \end{cases}$$

Determine o domínio e a imagem de F e faça um esboço de seu gráfico.

Solução O domínio de F é $(-\infty, +\infty)$. A Figura 7 mostra um esboço do gráfico de F; consiste em parte da reta $y = x - 1$ para $x < 3$, o ponto $(3, 5)$ e parte da reta $y = 2x + 1$ para $3 < x$. Os valores funcionais são ou números menores do que 2, o número 5, ou números maiores do que 7. Logo, a imagem de F é o número 5 e aqueles números em $(-\infty, 2) \cup (7, +\infty)$.

EXEMPLO 8 A função g é definida por

$$g(x) = \sqrt{x(x-2)}$$

Determine o domínio e a imagem de g e faça um esboço de seu gráfico.

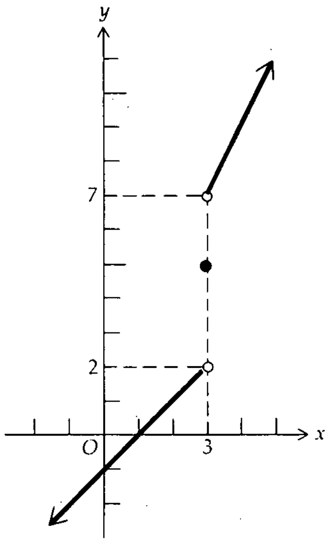


FIGURA 7

Solução Como $\sqrt{x(x-2)}$ não é um número real quando $x(x-2) < 0$, o domínio de g consiste em todos os valores de x para os quais $x(x-2) \geqslant 0$. Essa inequação estará satisfeita quando ocorrer um dos dois casos: $x \geqslant 0$ e $x - 2 \geqslant 0$; ou $x \leqslant 0$ e $x - 2 \leqslant 0$.

Caso 1: $x \geqslant 0$ e $x - 2 \geqslant 0$. Isto é,

$$x \geqslant 0 \text{ e } x \geqslant 2$$

Ambas as desigualdades estão verificadas se $x \geqslant 2$, que é o intervalo $[2, +\infty)$.

Caso 2: $x \leqslant 0$ e $x - 2 \leqslant 0$. Isto é,

$$x \leqslant 0 \text{ e } x \leqslant 2$$

Ambas as desigualdades ocorrem se $x \leqslant 0$, que é o intervalo $(-\infty, 0]$.

Combinando as soluções dos dois casos obteremos o domínio de g. Ele é $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

A Figura 8 mostra um esboço do gráfico de g. A imagem de g é $[0, +\infty)$.

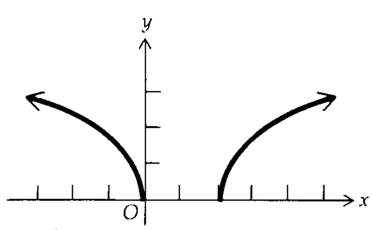


FIGURA 8

O símbolo $[\![x]\!]$ é usado para denotar o maior inteiro, menor ou igual a x; isto é,

$$[\![x]\!] = n \text{ se } n \leqslant x < n + 1, \text{ onde } n \text{ é um inteiro}$$

Essa função é chamada de **função maior inteiro**. Portanto, se I for essa função

$$I = \{(x, y) \mid y = [\![x]\!]\}$$

e o domínio de I será $(-\infty, +\infty)$. Para obter um esboço do gráfico de I, primeiro calculamos alguns valores funcionais.

Se $-5 \leqslant x < -4$, $[\![x]\!] = -5$

Se $-4 \leqslant x < -3$, $[\![x]\!] = -4$

Se $-3 \leqslant x < -2$, $[\![x]\!] = -3$

Se $-2 \leqslant x < -1$, $[\![x]\!] = -2$

Se $-1 \leqslant x < 0$, $[\![x]\!] = -1$

Se $0 \leqslant x < 1$, $[\![x]\!] = 0$

Se $1 \leqslant x < 2$, $[\![x]\!] = 1$

Se $2 \leqslant x < 3$, $[\![x]\!] = 2$

Se $3 \leqslant x < 4$, $[\![x]\!] = 3$

Se $4 \leqslant x < 5$, $[\![x]\!] = 4$

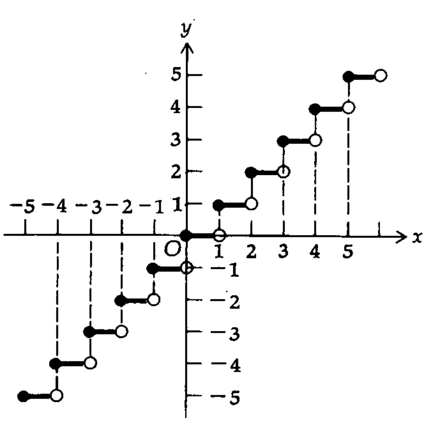


FIGURA 9

A Figura 9 mostra um esboço do gráfico de I. A imagem é o conjunto de todos os inteiros.

EXEMPLO 9 Faça um esboço do gráfico da função definida por

$$G(x) = [\![x]\!] - x$$

Dê o domínio e a imagem de G.

Solução Como G está definida para todos os valores de x, seu domínio é $(-\infty, +\infty)$. Da definição de $[\![x]\!]$, temos o seguinte:

Se $-2 \leqslant x < -1$, $[\![x]\!] = -2$; portanto $G(x) = -2 - x$

Se $-1 \leqslant x < 0$, $[\![x]\!] = -1$; portanto $G(x) = -1 - x$

Se $0 \leqslant x < 1$, $[\![x]\!] = 0$; portanto $G(x) = -x$

Se $1 \leqslant x < 2$, $[\![x]\!] = 1$; portanto $G(x) = 1 - x$

Se $2 \leqslant x < 3$, $[\![x]\!] = 2$; portanto $G(x) = 2 - x$

e assim por diante. Em termos mais gerais, se n for um inteiro qualquer, então

Se $n \leqslant x < n + 1$, $[\![x]\!] = n$; portanto $G(x) = n - x$

Com estes valores de funções obtemos o esboço do gráfico de G, mostrado na Figura 10. Do gráfico observamos que a imagem de G é $(-1, 0]$.

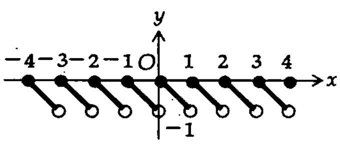


FIGURA 10

EXERCÍCIOS 1.5

Em cada exercício, determine o domínio e a imagem da função e desenhe um esboço de seu gráfico.

1. $f(x) = 3x - 1$
2. $g(x) = 6 - 2x$
3. $F(x) = x^2 - 1$
4. $G(x) = 5 - x^2$
5. $g(x) = \sqrt{x+1}$
6. $f(x) = \sqrt{3x - 6}$
7. $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$
8. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$
9. $h(x) = \sqrt{-x}$
10. $H(x) = |x - 1|$
11. $f(x) = |4 - x|$
12. $h(x) = |x| - 1$
13. $F(x) = 4 - |x|$
14. $f(x) = 5 - |x + 1|$
15. $g(x) = |x - 2| + 4$
16. $F(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x + 1}$
17. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$
18. $g(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - x - 6}$
19. $G(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \leqslant 3 \\ 2 & \text{se } 3 < x \end{cases}$
20. $h(x) = \begin{cases} -4 & \text{se } x < -2 \\ -1 & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3 & \text{se } 2 < x \end{cases}$
21. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \end{cases}$
22. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \neq -3 \\ -2 & \text{se } x = -3 \end{cases}$
23. $H(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 3 \\ 2x - 1 & \text{se } 3 \leqslant x \end{cases}$
24. $\phi(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{se } x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{se } -5 \leqslant x \leqslant 5 \\ x - 5 & \text{se } 5 < x \end{cases}$
25. $f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{se } x \leqslant -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{se } -4 < x < 4 \\ 6 - x & \text{se } 4 \leqslant x \end{cases}$
26. $g(x) = \begin{cases} 6x + 7 & \text{se } x < -2 \\ 3 & \text{se } x = -2 \\ 4 - x & \text{se } -2 < x \end{cases}$
27. $F(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$
28. $G(x) = \dfrac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 5x + 6)}{(x^2 - 3x + 2)(x - 3)}$
29. $F(x) = \dfrac{(x + 1)(x^2 + 3x - 10)}{x^2 + 6x + 5}$
30. $h(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$
31. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$
32. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + x + 3}{x + 3}$
33. $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$
34. $F(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - 9x^2 - 3x + 18}{x^2 + x - 6}$
35. $h(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 - 6x - 30}{x + 5}$
36. $g(x) = |x| \cdot |x - 1|$
37. $f(x) = |x| + |x - 1|$
38. $F(x) = [\![x + 2]\!]$
39. $g(x) = [\![x - 4]\!]$
40. $H(x) = |x| + [\![x]\!]$
41. $G(x) = x - [\![x]\!]$
42. $h(x) = [\![x^2]\!]$
43. $g(x) = \dfrac{[\![x]\!]}{|x|}$
44. $h(x) = \dfrac{|x|}{[\![x]\!]}$

1.6 AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Você já deve ter feito algum estudo de trigonometria. Mas, dada a importância das funções trigonométricas em Cálculo, apresentamos aqui um breve resumo delas.

Em geometria um **ângulo** é definido como a união de dois raios chamados de **lados**, tendo um extremo em comum denominado **vértice**. Qualquer ângulo é congruente a um ângulo tendo vértice na origem e um lado, chamado de **lado inicial**, sobre o lado positivo do eixo x. Dizemos que tal ângulo está na **posição padrão**. A Figura 1 mostra um ângulo AOB na posição padrão com OA como lado inicial. O outro lado OB é chamado de **lado final**. O ângulo AOB pode ser formado ao girarmos o lado OA até o lado OB; sob tal rotação o ponto A move-se ao longo da circunferência de centro O e raio $|\overline{OA}|$, até o ponto B.

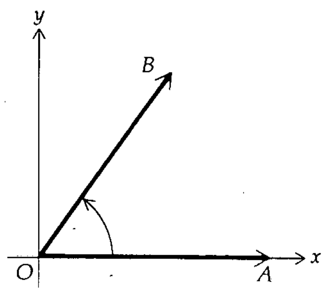


FIGURA 1

Quando os problemas envolvem ângulos de triângulos, a medida de um ângulo é dada usualmente em graus. Mas, em Cálculo estamos interessados em funções trigonométricas de números reais e essas funções estão definidas em termos da *medida de ângulos em radianos.*

O comprimento de um arco de uma circunferência é usado para definir a medida em radianos de um ângulo.

1.6.1 DEFINIÇÃO

Seja AOB um ângulo na posição padrão e $|\overline{OA}| = 1$. Se s unidades for o comprimento do arco da circunferência percorrido pelo ponto A quando o lado inicial OA é girado até o lado final OB, a **medida em radianos** t, do ângulo AOB, será dada por

$t = s$ se a rotação for no sentido anti-horário

e

$t = -s$ se a rotação for no sentido horário

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Do fato de que a medida da circunferência do círculo unitário é 2π, as medidas em radianos dos ângulos na Figura 2 (a)-(f) são determinadas. Elas são $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{3}{4}\pi$ e $\frac{7}{4}\pi$, respectivamente. ◀

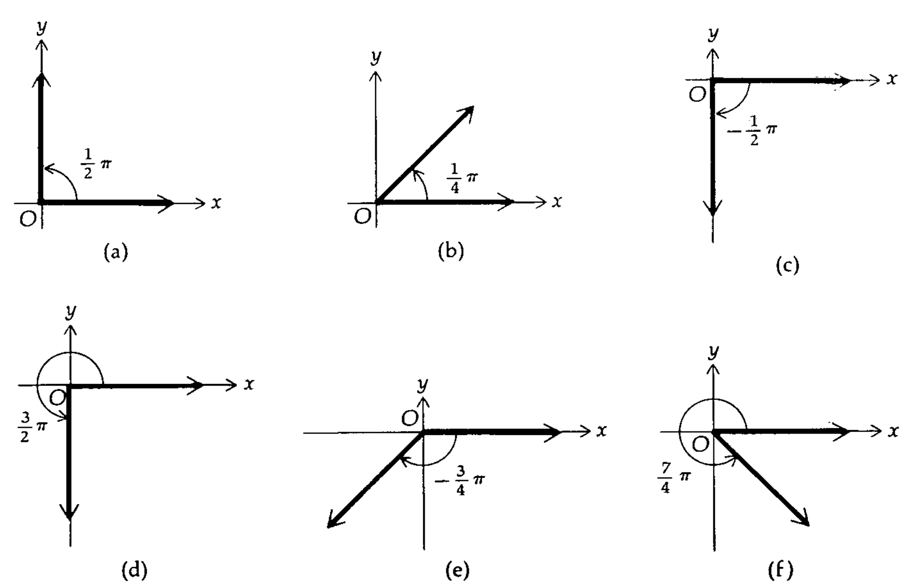


FIGURA 2

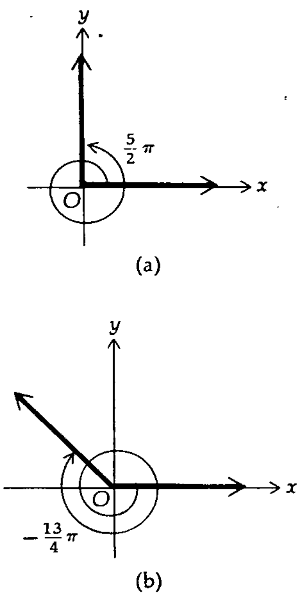


FIGURA 3

Na Definição 1.6.1, é possível ocorrer mais do que uma revolução completa na relação de OA.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A Figura 3(a) mostra um ângulo cuja medida em radianos é $\frac{5}{2}\pi$, e a Figura 3(b) mostra um cuja medida em radianos é $-\frac{13}{4}\pi$. ◀

Um ângulo formado por uma revolução completa, de tal forma que OA seja coincidente com OB, tem por medida 360 graus e 2π como medida em radianos. Assim sendo, há a seguinte correspondência entre as medidas em graus e radianos (onde o símbolo $\sim$ indica que as medidas dadas são de ângulos iguais ou congruentes):

$$360° \sim 2\pi \text{ rad} \qquad 180° \sim \pi \text{ rad}$$

Disso segue que

$$1° \sim \tfrac{1}{180}\pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} \sim \frac{180°}{\pi}$$

$$\approx 57°18'$$

Note que o símbolo $\approx$ antes de $57°18'$ indica que 1 rad e aproximadamente $57°18'$ são medidas do mesmo ângulo ou de ângulos congruentes.

Dessa correspondência, a medida de um ângulo pode ser convertida de um sistema de unidades para o outro.

EXEMPLO 1 (a) Ache a medida em radianos equivalente a 162°; (b) encontre a medida equivalente em graus para $\frac{5}{12}\pi$ rad.

Solução

(a) $162° \sim 162 \cdot \frac{1}{180}\pi$ rad

$162° \sim \frac{9}{10}\pi$ rad

(b) $\frac{5}{12}\pi \text{ rad} \sim \frac{5}{12}\pi \cdot \frac{180°}{\pi}$

$\frac{5}{12}\pi \text{ rad} \sim 75°$

Tabela 1

Medida em graus	*Medida em radianos*
30	$\frac{1}{6}\pi$
45	$\frac{1}{4}\pi$
60	$\frac{1}{3}\pi$
90	$\frac{1}{2}\pi$
120	$\frac{2}{3}\pi$
135	$\frac{3}{4}\pi$
150	$\frac{5}{6}\pi$
180	π
270	$\frac{3}{2}\pi$
360	2π

A Tabela 1 dá a correspondência em graus e radianos da medida de alguns ângulos. Vamos definir agora as funções *seno* e *co-seno* de qualquer número real.

1.6.2 DEFINIÇÃO

Suponha que t seja um número real. Coloque na posição padrão um ângulo com t rad de medida e seja P a intersecção do lado final do ângulo com a circunferência do círculo unitário com centro na origem. Se P for o ponto (x, y), então a função **seno** será definida por

$$\text{sen } t = y$$

então a função **seno** será definida por

$$\cos t = x$$

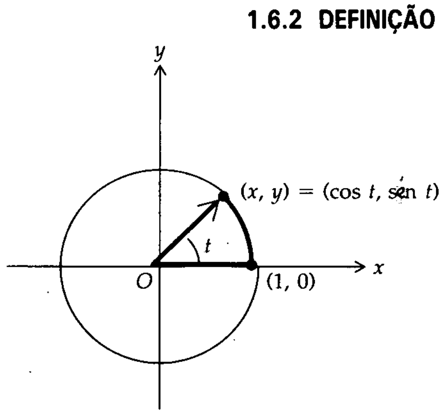


FIGURA 4

Da definição acima, vemos que sen t e cos t estão definidas para todos os valores de t. Assim sendo, o domínio das funções seno e co-seno é o conjunto de todos os números reais. A Figura 4 mostra o ponto (cos t, sen t) quando $0 < t < \frac{1}{2}\pi$, e a Figura 5 mostra o ponto (cos t, sen t) quando $-\frac{3}{2}\pi < t < -\pi$.

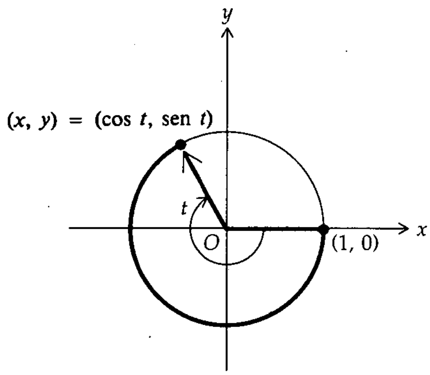


FIGURA 5

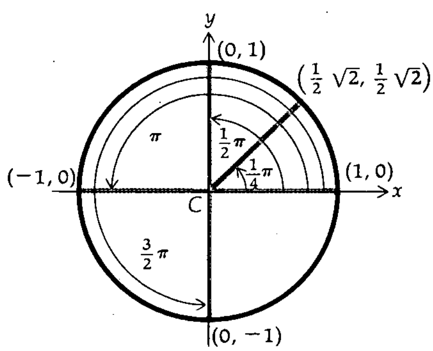


FIGURA 6

Tabela 2

t	sen t	cos t
0	0	1
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\pi$	1	0
$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
π	0	-1
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0
2π	0	1

O maior valor de qualquer uma das duas funções é 1 e o menor é -1. Veremos posteriormente que as funções seno e co-seno assumem todos os valores entre -1 e 1; segue, portanto, que a imagem das duas funções é $[-1, 1]$.

Para certos valores de t, o seno e o co-seno são facilmente obtidos de uma figura. Da Figura 6 vemos que sen $0 = 0$ e cos $0 = 1$, sen $\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e cos $\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, sen $\frac{1}{2}\pi = 1$ e cos $\frac{1}{2}\pi = 0$, sen $\pi = 0$ e cos $\pi = -1$, sen $\frac{3}{2}\pi = -1$ e cos $\frac{3}{2}\pi = 0$. A Tabela 2 dá esses valores e outros muitos usados.

Uma equação da circunferência do círculo unitário com centro na origem é $x^2 + y^2 = 1$. Como $x = \cos t$ e $y = \text{sen}\, t$, segue que

$$\boxed{\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1} \qquad (1)$$

Note que $\text{sen}^2 t + \cos^2 t$ significam $(\text{sen}\, t)^2$ e $(\cos t)^2$. A igualdade (1) é uma identidade, pois é válida para todo número real t. É chamada de **identidade fundamental de Pitágoras**, mostrando a relação entre os valores seno e co-seno, e pode ser usada para calcular um deles quando o outro é conhecido.

As Figuras 7 e 8 mostram ângulos com uma medida em radianos negativa $-t$ e os ângulos correspondentes tendo uma medida em radianos positiva t. Dessas figuras, observe que

$$\boxed{\text{sen}(-t) = -\text{sen}\, t \text{ e } \cos(-t) = \cos t}$$

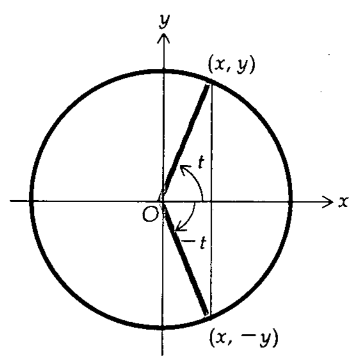


FIGURA 7

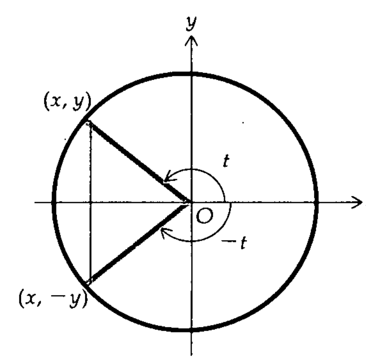


FIGURA 8

Essas equações valem para todo número real t, pois os pontos onde os lados finais dos ângulos (tendo medidas em radianos t e $-t$) interceptam a circunferência do círculo unitário, têm abscissas e ordenadas iguais que diferem somente em sinal. Logo, são identidades. Dessas igualdades, segue que seno é uma função ímpar e co-seno é uma função par.

Da Definição 1.6.2 são obtidas as seguintes identidades:

$$\boxed{\text{sen}(t + 2\pi) = \text{sen}\, t \text{ e } \cos(t + 2\pi) = \cos t} \qquad (2)$$

A propriedade do seno e do co-seno estabelecida pelas igualdades (2) é chamada de **periodicidade**.

1.6.3 DEFINIÇÃO Uma função f será **periódica** se existir um número real $p \neq 0$ tal que quando x estiver no domínio de f, então $x + p$ estará também no domínio de f e

$$f(x + p) = f(x)$$

O menor número real positivo p é chamado de **período** de f.

Compare essa definição com as igualdades (2). Como podemos mostrar que 2π é o menor número positivo p com a propriedade segundo a qual $\text{sen}(t + p) = \text{sen}\ t$ e $\cos(t + p) = \cos t$, o seno e o co-seno são periódicos com período 2π, isto é, sempre que o valor da variável independente t aumentar em 2π, o valor de cada uma das funções será repetido. É devido à periodicidade do seno e do co-seno que essas funções têm importantes aplicações, associadas a fenômenos que se repetem periodicamente, tais como movimentos ondulatórios, correntes elétricas alternadas, cordas vibratórias, pêndulos oscilantes, ciclos de negócios e ritmos biológicos.

EXEMPLO 2 Use a periodicidade das funções seno e co-seno, bem como os valores de sen t e cos t quando $0 \leqslant t < 2\pi$ para determinar o valor exato de cada um dos seguintes: (a) $\text{sen}\ \frac{17}{4}\pi$; (b) $\cos \frac{7}{3}\pi$; (c) $\text{sen}\ \frac{15}{2}\pi$; (d) $\cos(-\frac{7}{6}\pi)$

Solução

(a) $\text{sen}\ \frac{17}{4}\pi = \text{sen}(\frac{1}{4}\pi + 2 \cdot 2\pi) = \text{sen}\ \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

(b) $\cos \frac{7}{3}\pi = \cos(\frac{1}{3}\pi + 2\pi) = \cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$

(c) $\text{sen}\ \frac{15}{2}\pi = \text{sen}(\frac{3}{2}\pi + 3 \cdot 2\pi) = \text{sen}\ \frac{3}{2}\pi = -1$

(d) $\cos(-\frac{7}{6}\pi) = \cos[\frac{5}{6}\pi + (-1)2\pi] = \cos \frac{5}{6}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Vamos definir agora mais quatro funções trigonométricas. Elas são definidas em termos do seno e co-seno.

1.6.4 DEFINIÇÃO

As funções **tangente** e **secante** são definidas por

$$\text{tg}\ t = \frac{\text{sen}\ t}{\cos t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

para todo número real t para o qual $\cos t \neq 0$.
As funções **co-tangente** e **co-secante** são definidas por

$$\text{cotg}\ t = \frac{\cos t}{\text{sen}\ t} \qquad \text{cosec}\ t = \frac{1}{\text{sen}\ t}$$

para todo número real t para o qual $\text{sen}\ t \neq 0$.

As funções tangente e secante não estão definidas quando $\cos t = 0$. Assim sendo, o domínio das funções tangente e secante é o conjunto de todos os números reais exceto os números da forma $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, onde k é qualquer inteiro. Analogamente, como cotg t e cosec não estão definidas quando $\text{sen}\ t = 0$, o domínio das funções co-tangente e co-secante é o conjunto de todos os números reais exceto os números da forma $k\pi$, onde k é qualquer inteiro.

Podemos mostrar que a tangente e a co-tangente são periódicas, com período π, isto é,

$$\boxed{\text{tg}(t + \pi) = \text{tg}\ t \text{ e } \text{cotg}(t + \pi) = \text{cotg}\ t}$$

Além disso, a secante e a co-secante são periódicas com período 2π, logo

$$\boxed{\sec(t + 2\pi) = \sec t \quad \text{e} \quad \operatorname{cosec}(t + 2\pi) = \operatorname{cosec} t}$$

Usando a identidade fundamental de Pitágoras (1) e a Definição 1.6.4, obtemos duas outras identidades. Uma dessas identidades é obtida quando dividimos ambos os lados de (1) por $\cos^2 t$, e a outra é obtida ao dividirmos ambos os lados de (1) por $\operatorname{sen}^2 t$. Temos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}^2 t + 1 = \sec^2 t \quad \text{e} \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 t = \operatorname{cosec}^2 t}$$

Essas duas identidades são chamadas de identidades de Pitágoras.

Três outras identidades importantes que seguem da Definição 1.6.4 são

$$\boxed{\operatorname{sen} t \operatorname{cosec} t = 1 \qquad \cos t \sec t = 1 \qquad \operatorname{tg} t \operatorname{cotg} t = 1}$$

Essas três identidades, as três identidades de Pitágoras, e as duas identidades na Definição 1.6.4 que definem a tangente e a co-tangente são as *oito identidades trigonométricas fundamentais*, as quais, como outras fórmulas da Trigonometria, aparecem no Apêndice.

Definimos as funções trigonométricas com domínios no conjunto dos números reais. Existem importantes aplicações das funções trigonométricas para as quais os domínios são conjuntos de ângulos. Para esse propósito, uma função trigonométrica do ângulo θ é a função correspondente do número real t, onde t é a medida de θ em radianos.

1.6.5 DEFINIÇÃO Se θ for um ângulo cuja medida em radianos é t, então

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} t \qquad \cos \theta = \cos t \qquad \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} t$$
$$\operatorname{cotg} \theta = \operatorname{cotg} t \qquad \sec \theta = \sec t \qquad \operatorname{cosec} \theta = \operatorname{cosec} t$$

Quando consideramos uma função trigonométrica de um ângulo θ, freqüentemente a medida do ângulo é usada em lugar de θ. Por exemplo, se a medida de um ângulo θ for 60° (ou, equivalentemente, a medida de θ em radianos for $\frac{1}{3}\pi$), então, em lugar de $\operatorname{sen} \theta$, poderemos escrever sen 60° ou $\operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi$. Observe que quando a medida de um ângulo for dada em graus, o símbolo de graus aparece escrito. Mas, quando não houver nenhum símbolo, devemos entender que a medida do ângulo é dada em radianos. Por exemplo, cos 2° significa o co-seno do ângulo cuja medida é 2 graus, enquanto que cos 2 significa o co-seno do ângulo cuja medida é 2 rad. Isso é consistente com o fato de que o co-seno de um ângulo cuja medida em radianos é 2 é igual ao co-seno do número real 2.

Agora mostraremos como a função tangente pode ser usada em conjunto com a inclinação de uma reta. Primeiro definimos o *ângulo de inclinação* de uma reta.

1.6.6 DEFINIÇÃO O **ângulo de inclinação** de uma reta não-paralela ao eixo x é o menor ângulo medido no sentido anti-horário, a partir do sentido positivo do eixo x até a reta. O ângulo de inclinação de uma reta paralela ao eixo x é definido como sendo zero.

Se α for o ângulo de inclinação de uma reta, então $0° \leqslant \alpha < 180°$. A Figura 9 mostra a reta L para a qual $0° < \alpha < 90°$ e a Figura 10 mostra aquela para a qual $90° < \alpha < 180°$.

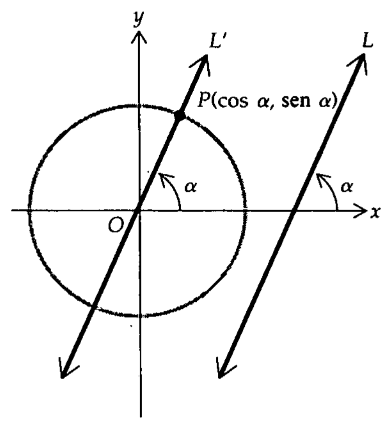


FIGURA 9

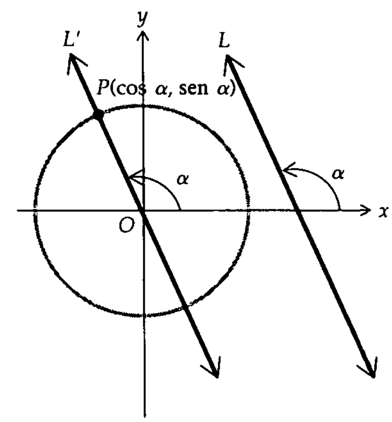


FIGURA 10

1.6.7 TEOREMA Se α for o ângulo de inclinação da reta L, não-paralela ao eixo y, então a inclinação m de L dada por

$$m = \text{tg } \alpha$$

Prova Veja as Figuras 9 e 10, que mostram a reta dada L, cujo ângulo de inclinação é α e cuja inclinação é m. A reta L' que passa pela origem e é paralela a L, também tem inclinação m e um ângulo de inclinação α. O ponto P (cos α, sen α) é a intersecção de L' com a circunferência do círculo unitário U. Como o ponto (0, 0) também está em L', segue, da Definição 1.2.2 que

$$\begin{aligned} m &= \frac{\text{sen } \alpha - 0}{\cos \alpha - 0} \\ &= \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \text{tg } \alpha \end{aligned}$$

■

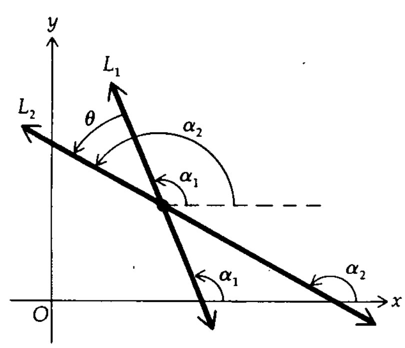


FIGURA 11

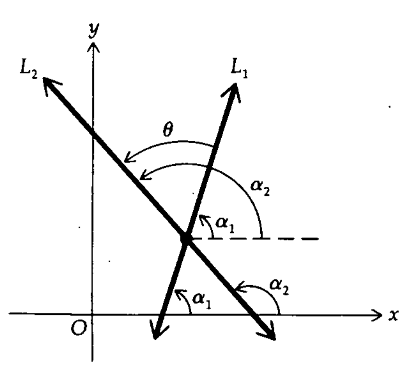


FIGURA 12

Se a reta L for vertical, o ângulo de inclinação de L será 90° e tg 90° não existe. Isso é consistente com o fato de que a inclinação de uma reta vertical não está definida.

O Teorema 1.6.7 pode ser usado para obter uma fórmula para encontrar o ângulo entre duas retas concorrentes não-verticais. Quando duas retas se interceptam, formam dois ângulos suplementares com vértice no ponto de intersecção. Para distinguir esses dois ângulos, seja L_2 a reta com o maior ângulo de inclinação α_2 e seja L_1 a outra reta cujo ângulo de inclinação é α_1. Se θ for o ângulo entre as duas retas, então definimos

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

Se L_1 e L_2 forem paralelas, então $\alpha_1 = \alpha_2$ e o ângulo entre as duas retas será 0°. Assim, se L_1 e L_2 forem duas retas distintas, então $0° \leqslant \theta < 180°$. Veja as Figuras 11 e 12. O teorema a seguir possibilita-nos encontrar θ quando forem conhecidas as inclinações de L_1 e L_2.

1.6.8 TEOREMA Sejam L_1 e L_2 duas retas não-verticais que se interceptam e não são perpendiculares e seja L_2 a reta com maior ângulo de inclinação. Então, se m_1 for a inclinação de L_1, m_2, a de L_2 e θ for o ângulo entre L_1 e L_2,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

A prova do Teorema 1.6.8 é proposta como exercício (veja o Exercício 34).

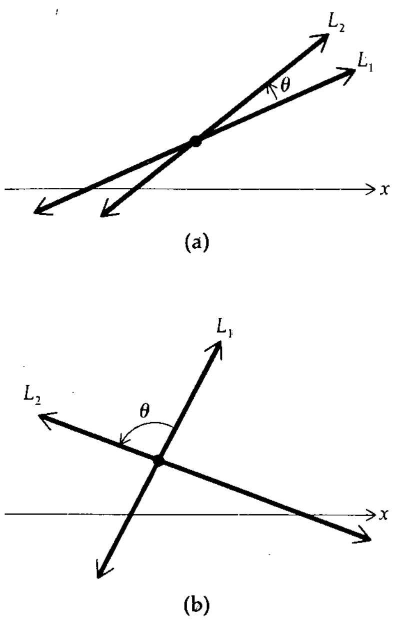


FIGURA 13

EXEMPLO 3 Determine o ângulo entre as retas com as inclinações: (a) $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$; (b) 2 e $-\frac{2}{5}$.

Solução Quando usamos a fórmula do Teorema 1.6.8, m_2 deve ser a inclinação mais acentuada da reta. Para a parte (a), veja a Figura 13(a) onde $m_2 = \frac{3}{4}$ e $m_1 = \frac{2}{5}$. Para a parte (b), veja a Figura 13(b) onde $m_2 = -\frac{2}{5}$ e $m_1 = 2$. Em cada parte calculamos, com aproximação de 1 grau, o ângulo θ entre as retas.

$$\text{(a) } \operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{5}}{1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{15 - 8}{20 + 6} = \frac{7}{26}$$

$$\theta = 15°$$

$$\text{(b) } \operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{2}{5} - 2}{1 + (-\frac{2}{5})(2)} = \frac{-2 - 10}{5 - 4} = -12$$

$$\theta = 95°$$

O procedimento usado no Exemplo 3 pode ser aplicado para encontrarmos os ângulos em um triângulo. Veja os Exercícios 41 e 42.

Os exercícios dessa secção destinam-se à revisão de alguns dos conceitos fundamentais de trigonometria. Ao fazê-los, você poderá achar útil consultar um texto de trigonometria.

EXERCÍCIOS 1.6

Nos Exercícios 1 e 2, ache a medida equivalente em radianos.

1. (a) 60°; (b) 135°; (c) 210°; (d) −150°; (e) 20°; (f) 450°; (g) −75°; (h) 100°
2. (a) 45°; (b) 120°; (c) 240°; (d) −225°; (e) 15°; (f) 540°; (g) −48°; (h) 2°

Nos Exercícios 3 e 4, ache a medida equivalente em graus.

3. (a) $\frac{1}{4}\pi$ rad; (b) $\frac{2}{3}\pi$ rad; (c) $\frac{11}{6}\pi$ rad; (d) $-\frac{1}{2}\pi$ rad; (e) $\frac{1}{2}$ rad; (f) 3π rad; (g) -2 rad; (h) $\frac{1}{12}\pi$ rad
4. (a) $\frac{1}{6}\pi$ rad; (b) $\frac{4}{3}\pi$ rad; (c) $\frac{3}{4}\pi$ rad; (d) -5π rad; (e) $\frac{1}{3}$ rad; (f) -5 rad; (g) $\frac{11}{12}\pi$ rad; (h) 0,2 rad

Nos Exercícios de 5 a 12, determine o valor exato da função.

5. (a) $\operatorname{sen}\frac{1}{6}\pi$; (b) $\cos\frac{1}{4}\pi$; (c) $\operatorname{sen}(-\frac{3}{2}\pi)$; (d) $\cos\frac{1}{3}\pi$
6. (a) $\cos\frac{1}{3}\pi$; (b) $\operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi$; (c) $\cos(-\frac{1}{2}\pi)$; (d) $\operatorname{sen}(-2\pi)$
7. (a) $\cos\frac{5}{6}\pi$; (b) $\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi$; (c) $\cos 3\pi$; (d) $\operatorname{sen}(-5\pi)$
8. (a) $\operatorname{sen}\frac{4}{3}\pi$; (b) $\cos(-\frac{1}{6}\pi)$; (c) $\operatorname{sen} 7\pi$; (d) $\cos(-\frac{5}{2}\pi)$
9. (a) $\operatorname{tg}\frac{1}{3}\pi$; (b) $\operatorname{cotg}\frac{1}{4}\pi$; (c) $\sec(-\pi)$; (d) $\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\pi$

10. (a) cotg $\frac{1}{6}\pi$; (b) tg $\frac{1}{4}\pi$; (c) cosec$(-\frac{3}{2}\pi)$; (d) sec π
11. (a) sec$(-\frac{1}{6}\pi)$; (b) cosec $\frac{3}{4}\pi$; (c) tg $\frac{5}{6}\pi$; (d) cotg$(-\frac{3}{4}\pi)$
12. (a) cosec$(-\frac{1}{3}\pi)$; (b) sec $\frac{5}{6}\pi$; (c) tg $\frac{3}{4}\pi$; (d) cotg $\frac{3}{2}\pi$

Nos Exercícios de 13 a 20, use a periodicidade das funções do seno, co-seno, secante e co-secante, bem como os valores do sen t, cos t, sec t cosec t quando $0 \leqslant t\ 2\pi$, para determinar o valor exato da função.

13. (a) sen $\frac{9}{4}\pi$; (b) cos $\frac{9}{4}\pi$; (c) sec $\frac{9}{4}\pi$; (d) cosec $\frac{9}{4}\pi$
14. (a) sen $\frac{17}{6}\pi$; (b) cos $\frac{17}{6}\pi$; (c) sec $\frac{17}{6}\pi$; (d) cosec $\frac{17}{6}\pi$
15. (a) sen$(-\frac{2}{3}\pi)$; (b) cos$(-\frac{2}{3}\pi)$; (c) sec$(-\frac{2}{3}\pi)$; (d) cosec$(-\frac{2}{3}\pi)$
16. (a) sen$(-\frac{5}{4}\pi)$; (b) cos$(-\frac{5}{4}\pi)$; (c) sec$(-\frac{5}{4}\pi)$; (d) cosec$(-\frac{5}{4}\pi)$
17. (a) sen 8π; (b) cos 10π; (c) sec 7π; (d) cosec 9π
18. (a) sen $\frac{7}{2}\pi$; (b) cos $\frac{5}{2}\pi$; (c) sec $\frac{11}{2}\pi$; (d) cosec $\frac{9}{2}\pi$
19. (a) sen$(-\frac{7}{2}\pi)$; (b) cos$(-\frac{5}{2}\pi)$; (c) sec$(-\frac{11}{2}\pi)$; (d) cosec$(-\frac{9}{2}\pi)$
20. (a) sen(-8π); (b) cos(-10π); (c) sec(-7π); (d) cosec(-9π)

Nos Exercícios de 21 a 24, use a periodicidade das funções tangente e co-tangente, bem como os valores de tg t e cotg t, quando $0 \leqslant t < \pi$, para encontrar o valor exato da função.

21. (a) tg $\frac{7}{4}\pi$; (b) cotg $\frac{7}{4}\pi$; (c) tg$(-\frac{5}{6}\pi)$; (d) cotg$(-\frac{5}{6}\pi)$
22. (a) tg $\frac{4}{3}\pi$; (b) cotg $\frac{4}{3}\pi$; (c) tg$(-\frac{1}{6}\pi)$; (d) cotg$(-\frac{1}{6}\pi)$
23. (a) tg $\frac{11}{3}\pi$; (b) cotg $\frac{11}{3}\pi$; (c) tg(-5π); (d) cotg$(-\frac{9}{2}\pi)$
24. (a) tg$(-\frac{11}{4}\pi)$; (b) cotg$(-\frac{11}{4}\pi)$; (c) tg 11π; (c) cotg $\frac{15}{2}\pi$

Nos Exercícios de 25 a 30, encontre todos os valores de t no intervalo $[0, 2\pi)$ para os quais a equação está satisfeita.

25. (a) sen $t = 1$; (b) cos $t = -1$; (c) tg $t = 1$; (d) sec $t = 1$
26. (a) sen $t = -1$; (b) cos $t = 1$; (c) tg $t = -1$; (d) cosec $t = 1$
27. (a) sen $t = 0$; (b) cos $t = 0$; (c) tg $t = 0$; (d) cotg $t = 0$
28. (a) sen $t = \frac{1}{2}$; (b) cos $t = -\frac{1}{2}$; (c) cotg $t = 1$; (d) sec $t = 2$
29. (a) sen $t = -\frac{1}{2}$; (b) cos $t = \frac{1}{2}$; (c) cotg $t = -1$; (d) cosec $t = 2$
30. (a) sen $t = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (b) cos $t = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; (c) tg $t = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$; (d) cotg $t = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
31. Para que valores de t em $[0, 2\pi]$ temos (a) tg t indefinida e (b) cosec t indefinida?
32. Para que valores de t em $[0, \pi]$ temos (a) cotg t indefinida e (b) sec t indefinida?
33. Para que valores de t em $[\pi, 2\pi)$ temos (a) cotg t indefinida e (b) sec t indefinida?
34. Prove o Teorema 1.6.8. (*Sugestão:* Use a fórmula para tg $(u - v)$ encontrada no Apêndice.)

Nos Exercícios de 35 a 38, ache a tg θ se θ for o ângulo entre as retas com as inclinações dadas.

35. (a) 1 e $\frac{1}{4}$; (b) 4 e $-\frac{5}{3}$
36. (a) $\frac{1}{2}$ e $-\frac{3}{4}$; (b) $\frac{2}{7}$ e $\frac{7}{2}$
37. (a) $-\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$; (b) $-\frac{5}{4}$ e $-\frac{7}{5}$
38. (a) $-\frac{3}{5}$ e 2; (b) $-\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{10}$

Nos Exercícios 39 e 40, ache, com aproximação de 1 grau, a medida do ângulo entre as retas com as inclinações dadas.

39. (a) 5 e $-\frac{7}{9}$; (b) $-\frac{3}{2}$ e $-\frac{3}{4}$
40. (a) -3 e 2; (b) $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{4}$
41. Ache, com aproximação de 1 grau, as medidas dos ângulos internos do triângulo formado pelas retas que têm as equações $2x + y - 6 = 0$, $3x - y - 4 = 0$ e $3x + 4y + 8 = 0$.
42. Ache, com aproximação de 1 grau, as medidas dos ângulos internos do triângulo com vértices em $(1, 0)$, $(-3, 2)$ e $(2, 3)$.
43. Ache a equação de uma reta que passa pelo ponto $(-1, 4)$, formando um ângulo de $\frac{1}{4}\pi$ rad com a reta cuja equação é $2x + y - 5 = 0$ (duas soluções).
44. Encontre uma equação de uma reta que passa pelo ponto $(-3, -2)$, formando um ângulo de $\frac{1}{3}\pi$ rad com a reta cuja equação é $3x - 2y - 7 = 0$ (duas soluções).

Nos Exercícios de 45 a 48, defina a função f o g e determine o seu domínio.

45. (a) $f(x) = \text{sen}\, x$, $g(x) = 3x$; (b) $f(x) = \text{tg}\, x$, $g(x) = \dfrac{x}{2}$
46. (a) $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2$; (b) $f(x) = \text{cosec}\, x$, $g(x) = 2x$
47. (a) $f(x) = \text{cotg}\, x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$; (b) $f(x) = \sec \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x - \pi}$
48. (a) $f(x) = \text{sen}\, x$, $g(x) = \dfrac{1}{2x}$; (b) $f(x) = \text{tg}\, x$, $g(x) = x + \pi$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 1

Nos Exercícios de 1 a 12, ache e mostre na reta numérica real, o conjunto-solução da desigualdade.

1. $3x - 7 \leq 5x - 17$
2. $8 < 5x + 4 \leq 10$
3. $\dfrac{x}{x-1} > \dfrac{1}{4}$
4. $\dfrac{3}{x+4} < \dfrac{2}{x-5}$
5. $2x^2 + x < 3$
6. $|x - 2| < 4$
7. $|3 + 4x| \leq 9$
8. $|5 - 2x| \leq 3$
9. $|4 - 3x| < 8$
10. $|2x - 5| > 7$
11. $|2x + 7| > 5$
12. $\left|\dfrac{2 - 3x}{3 + x}\right| \geq \dfrac{1}{4}$

Nos Exercícios de 13 a 15 resolva para x.

13. $|3 - 4x| = 15$
14. $\left|\dfrac{2x - 1}{x + 3}\right| = 4$
15. $|3x - 4| = |6 - 2x|$
16. Ache todos os valores de x para os quais $\sqrt{x^2 + 2x - 15}$ é real.

17. Ache as abscissas dos pontos tendo ordenada 4 e que estão a uma distância de $\sqrt{117}$ do ponto $(5, -2)$.

18. Ache uma equação que seja satisfeita pelas coordenadas de qualquer ponto cuja distância ao ponto $(-1, 2)$ seja o dobro da distância a $(3, -4)$. Faça um esboço do seu gráfico.

19. Ache uma equação que seja satisfeita pelas coordenadas de qualquer ponto cuja distância ao ponto $(-3, 4)$ é 10.

20. Defina os seguintes conjuntos de pontos por uma equação ou uma inequação: (a) o ponto $(3, -5)$; (b) o conjunto de todos os pontos cuja distância ao ponto $(3, -5)$ seja menor do que 4; (c) o conjunto de todos os pontos cuja distância ao ponto $(3, -5)$ seja no mínimo 5.

Nos Exercícios de 21 a 26, desenhe um esboço do gráfico da equação.

21. $y^2 = x - 4$

22. $y = |x - 4|$

23. $y = x^2 - 4$

24. $y = \sqrt{4 - x}$

25. $y = \sqrt{16 - x^2}$

26. $xy = 16$

27. Prove que o quadrilátero com vértices em $(1, 2)$, $(5, -1)$, $(11, 7)$ e $(7, 10)$ é um retângulo.

28. Prove que o triângulo com vértices em $(-8, 1)$, $(-1, -6)$ e $(2, 4)$ é isósceles e ache sua área.

29. Prove que os pontos $(2, 4)$, $(1, -4)$ e $(5, -2)$ são vértices de um triângulo retângulo e ache a área do triângulo.

30. Prove que os pontos $(1, -1)$, $(3, 2)$ e $(7, 8)$ são colineares de duas maneiras: (a) usando a fórmula da distância; (b) usando inclinações.

31. Dois vértices de um paralelogramo são $(-3, 4)$ e $(2, 3)$ e seu centro está em $(0, -1)$. Ache os outros dois vértices.

32. Os vértices opostos de um quadrado estão em $(3, -4)$ e $(9, -4)$. Ache os outros dois vértices.

33. Prove que os pontos $(2, 13)$, $(-2, 5)$, $(3, -1)$ e $(7, 7)$ são vértices de um paralelogramo.

34. Ache uma equação da circunferência com centro em $(-2, 4)$ e raio $\sqrt{5}$. Escreva a equação na forma geral.

35. Ache uma equação da circunferência onde os pontos $(-3, 2)$ e $(5, 6)$ são extremos de um diâmetro.

36. Ache uma equação da circunferência que passa pelos pontos $(3, -1)$, $(2, 2)$ e $(-4, 5)$.

37. Ache o centro e o raio da circunferência com a equação $4x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 9 = 0$.

38. Ache uma equação da reta que passa pelos pontos $(2, -4)$ e $(7, 3)$ e escreva a equação na forma intercepto-inclinação.

39. Ache uma equação da reta que passa pelo ponto $(-1, 6)$ e tem inclinação 3.

40. Ache uma equação da reta perpendicular à reta que passa pelos pontos $(-1, 5)$ e $(3, 2)$ no ponto médio desse segmento da reta.

41. Ache uma equação da reta que passa pelo ponto $(5, -3)$ e é perpendicular à reta cuja equação é $2x - 5y = 1$.

42. Ache uma equação da circunferência cujo diâmetro é a corda comum às circunferências $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$ e $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$.

43. Ache uma equação da circunferência que circunscreve o triângulo cujos lados estão sobre as retas $x - 3y + 2 = 0$, $3x - 2y + 6 = 0$ e $2x + y - 3 = 0$.

44. Ache a menor distância do ponto $(2, -5)$ à reta $3x + y = 2$.

45. Ache uma equação da reta que passa pelo ponto de intersecção das retas $5x + 6y - 4 = 0$ e $x - 3y + 2 = 0$ e é perpendicular à reta $x - 4y - 20 = 0$, sem determinar o ponto de intersecção das retas. (*Sugestão:* veja o Exercício 58 nos Exercícios 1.2).

46. Os lados de um paralelogramo estão sobre as retas $x + 2y = 10$, $3x - y = -20$, $x + 2y = 15$ e $3x - y = -10$. Ache as equações das diagonais sem determinar os vértices do paralelogramo. (*Sugestão:* veja o Exercício 58 nos Exercícios 1.2.)

47. Determine todos os valores de k para os quais os gráficos das equações $x^2 + y^2 = k$ e $x + y = k$ interceptam-se.

48. Determine os valores de k e h se $3x + ky + 2 = 0$ e $5x - y + h = 0$ forem equações da mesma reta.

49. Dada $f(x) = 3x^2 - x + 5$, ache (a) $f(-3)$; (b) $f(-x^2)$; (c) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

50. Dada $g(x) = \sqrt{x - 1}$, ache $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$, $h \neq 0$.

51. Determine se a função é par, ímpar ou nem par e nem ímpar. (a) $f(x) = 2x^3 - 3x$; (b) $g(x) = 5x^4 + 2x^2 - 1$; (c) $h(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x$; (d) $F(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - x}$.

Nos Exercícios de 52 a 56, para as funções dadas f e g defina as seguintes funções e determine o domínio da função resultante: (a) $f + g$; (b) $f - g$; (c) $f \cdot g$; (d) f/g; (e) g/f; (f) $f \circ g$; (g) $g \circ f$.

52. $f(x) = \sqrt{x + 2}$ e $g(x) = x^2 + 4$

53. $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = 4x - 3$

54. $f(x) = x^2 - 9$ e $g(x) = \sqrt{x + 5}$

55. $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$ e $g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

56. $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Nos Exercícios de 57 a 64, determine o domínio e a imagem da função e desenhe um esboço de seu gráfico.

57. $f(x) = |3 - x|$

58. $f(x) = 3 - |x|$

59. $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}$

60. $G(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

61. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 1 \\ 2x + 3 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$

62. $g(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + x - 6}$

63. $F(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x < -2 \\ 4 - x^2 & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3 - x & \text{se } 2 < x \end{cases}$

64. $f(x) = 2x - [\![x]\!]$

Nos Exercícios 65 e 66, determine o valor exato da função.

65. (a) sen $\frac{2}{3}\pi$; (b) cos $\frac{5}{4}\pi$; (c) tg$(-\frac{5}{6}\pi)$; (d) cotg $\frac{13}{12}\pi$; (e) sec π; (f) cosec$(-\frac{1}{8}\pi)$
66. (a) cos $\frac{7}{6}\pi$; (b) sen$(-\frac{7}{4}\pi)$; (c) cotg$(-\frac{1}{2}\pi)$; (d) tg $\frac{5}{8}\pi$; (e) sec$(-\frac{1}{12}\pi)$; (f) cosec $\frac{5}{3}\pi$

Nos Exercícios 67 e 68, ache todos os valores de t no intervalo [0, 2π) para os quais a equação dada é satisfeita.

67. (a) sen $t = \frac{1}{2}$; (b) cos $t = 1$; (c) tg $t = -1$; (d) cotg $t = \sqrt{3}$; (e) sec $t = -2$; (f) cosec $t = \sqrt{2}$
68. (a) sen $t = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; (b) cos $t = -1$; (c) tg $t = -\sqrt{3}$; (d) cotg $t = 1$; (e) sec $t = -\sqrt{2}$; (f) cosec $t = 2$
69. Ache, com aproximação de 1 grau, as medidas dos quatro ângulos internos do quadrilátero com vértices em (5, 6), (−2, 4), (−2, 1) e (3, 1) e verifique que a soma deles é 360°.
70. Ache uma equação da reta que passa por (2, 5) e faz com a reta $3x - 4y + 7 = 0$ um ângulo cuja medida em radianos é $\frac{1}{4}\pi$ (duas soluções).
71. Ache as equações das retas que passam pela origem e são tangentes à circunferência com centro em (2, 1) e raio 2.
72. Prove que as duas retas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{e} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

são paralelas se e somente se $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.
73. Prove analiticamente que se as diagonais de um retângulo forem perpendiculares, então o retângulo será um quadrado.
74. Prove analiticamente que o segmento de reta que liga os pontos médios de qualquer par de lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e seu comprimento é a metade do comprimento do terceiro lado.
75. Num triângulo, o ponto de intersecção das medianas, das alturas e o centro da circunferência circunscrita são colineares. Ache esses três pontos e comprove que eles são colineares no triângulo com vértices (2, 8), (5, −1) e (6, 6).
76. Prove analiticamente que o conjunto de pontos equidistantes de dois pontos dados é a perpendicular pelo ponto médio do segmento que liga os pontos.
77. Prove que se x for qualquer número real, $|x| < x^2 + 1$.
78. Prove analiticamente que as três medianas de um triângulo encontram-se num ponto.