NONA EDIÇÃO

Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno

William E. Boyce
Professor Emérito da cátedra Edward P. Hamilton

Richard C. DiPrima
Anteriormente Professor da cátedra Eliza Ricketts Foundation do Departamento de Ciências Matemáticas do Rensselaer Polytechnic Institute

Tradução e Revisão Técnica

Valéria de Magalhães Iório
Fundação Educacional Serra dos Órgãos, Teresópolis

gen | LTC

SUMÁRIO

CAPÍTULO

5

Soluções em Série para Equações Lineares de Segunda Ordem

Encontrar a solução geral de uma equação diferencial linear depende da determinação de um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea. Até agora só vimos um procedimento sistemático para a construção de soluções fundamentais no caso de coeficientes constantes. Para tratar a classe muito maior de equações com coeficientes variáveis é necessário estender nossa procura de soluções além das funções elementares usuais do Cálculo. A ferramenta principal de que precisamos é a representação de uma função dada em série de potências. A ideia básica é semelhante ao método dos coeficientes indeterminados: supomos que a solução de uma equação diferencial dada tem expansão em série de potências e, depois, tentamos determinar os coeficientes de modo a satisfazer a equação diferencial.

5.1 Revisão de Séries de Potências

Neste capítulo vamos discutir a utilização de séries de potências para construir conjuntos fundamentais de soluções para equações diferenciais lineares de segunda ordem cujos coeficientes são funções da variável independente. Começamos resumindo, muito rapidamente, os resultados pertinentes sobre séries de potências que precisaremos. Os leitores familiarizados com séries de potências podem ir diretamente para a Seção 5.2. Os que precisarem de mais detalhes do que os contidos aqui devem consultar um livro de Cálculo.

1. Uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge em um ponto x se
$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n(x-x_0)^n$$
existe para esse x. A série certamente converge em $x = x_0$; pode convergir em todo x ou pode convergir para alguns valores de x e não convergir para outros.

2. A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente em um ponto x se a série
$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(x-x_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n||x-x_0|^n$$
converge. Pode-se mostrar que se a série converge absolutamente, então ela converge; no entanto, a recíproca não é necessariamente verdadeira.

3. Um dos testes mais úteis para a convergência absoluta de uma série de potências é o teste da razão. Se $a_n \neq 0$ e se, para um valor fixo de x,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-x_0|L,$$

então a série de potências converge absolutamente naquele valor de x se $|x - x_0|L < 1$ e diverge se $|x - x_0|L > 1$. Se $|x - x_0| = 1/L$, o teste não é conclusivo.

EXEMPLO 1

Para quais valores de x a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(x-2)^n$$

converge?

Vamos usar o teste da razão para testar a convergência. Temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)(x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1}n(x-2)^n}\right| = |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = |x-2|.$$

De acordo com o item 3, a série converge absolutamente para $|x - 2| < 1$, ou $1 < x < 3$, e diverge para $|x - 2| > 1$. Os valores de x para os quais $|x - 2| = 1$ são $x = 1$ e $x = 3$. A série diverge para cada um desses valores de x, já que o n-ésimo termo da série não tende a zero quando $n \to \infty$.

4. Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge em $x = x_1$, então ela converge absolutamente para $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$; e se ela diverge em $x = x_1$, então diverge para $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$.
5. Existe um número não negativo ρ, chamado de **raio de convergência**, tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente para $|x - x_0| < \rho$ e diverge para $|x - x_0| > \rho$. Para uma série que converge apenas em x_0, definimos ρ como zero; para uma série que converge em todo x, dizemos que ρ é infinito. Se $\rho > 0$, o intervalo $|x - x_0| < \rho$ é chamado de **intervalo de convergência**; é indicado pelo trecho hachurado na Figura 5.1.1. A série pode convergir ou divergir quando $|x - x_0| = \rho$.

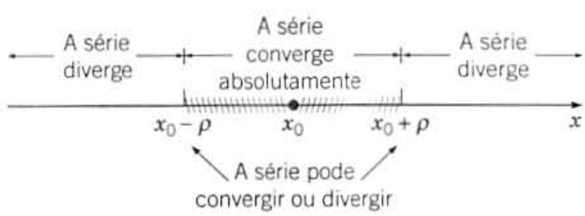

FIGURA 5.1.1 O intervalo de convergência de uma série de potências.

EXEMPLO 2

Determine o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n2^n}.$$

Vamos aplicar o teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\frac{n2^n}{(x+1)^n}\right| = \frac{|x+1|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x+1|}{2}.$$

Assim, a série converge absolutamente para $|x + 1| < 2$, ou $-3 < x < 1$, e diverge para $|x + 1| > 2$. O raio de convergência da série de potências é $\rho = 2$. Finalmente, vamos verificar os extremos do intervalo de convergência. Em $x = 1$, a série é a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

que diverge. Em $x = -3$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

que converge, mas não converge absolutamente. Dizemos que a série converge condicionalmente em $x = -3$. Para resumir, a série de potências dada converge para $-3 \leq x < 1$ e diverge caso contrário. Ela converge absolutamente em $-3 < x < 1$ e tem raio de convergência 2.

Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ convergem para $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente, para $|x - x_0| < \rho$, $\rho > 0$.

6. As séries podem ser somadas ou subtraídas termo a termo e

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x - x_0)^n;$$

a série resultante converge pelo menos para $|x - x_0| < \rho$.

7. As séries podem ser multiplicadas formalmente e

$$f(x)g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n,$$

onde $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$. A série resultante converge para pelo menos $|x - x_0| < \rho$. Além disso, se $g(x_0) \neq 0$, as séries podem ser formalmente divididas e

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x - x_0)^n.$$

Na maioria dos casos, os coeficientes d_n podem ser obtidos mais facilmente igualando-se os coeficientes correspondentes na relação equivalente

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x - x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n\right]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} d_k b_{n-k}\right)(x - x_0)^n.\end{aligned}$$

No caso da divisão, o raio de convergência da série de potências resultante pode ser menor do que ρ.

8. A função f é contínua e tem derivadas de todas as ordens para $|x - x_0| < \rho$. Além disso, $f', f'', \ldots$ podem ser calculadas derivando-se a série termo a termo, ou seja,

$$\begin{aligned}f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1},\\ f''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots\\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2},\end{aligned}$$

e assim por diante, e cada uma dessas séries converge absolutamente no intervalo $|x - x_0| < \rho$.

9. O valor de a_n é dado por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

A série é chamada de série de Taylor[1] para a função f em torno de $x = x_0$.

10. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ para todo x em algum intervalo centrado em x_0, então $a_n = b_n$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Em particular, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = 0$ para todo x, então $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = \ldots = 0$.

[1]Brook Taylor (1685-1731) foi o matemático inglês mais importante da geração seguinte à de Newton. Em 1715, publicou uma versão geral do teorema de expansão que leva seu nome, um resultado fundamental em todos os ramos da análise. Foi, também, um dos fundadores do cálculo de diferenças finitas e o primeiro a reconhecer a existência de soluções singulares de equações diferenciais.

Uma função f que tem uma expansão em série de Taylor em torno de $x = x_0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

com raio de convergência $\rho > 0$ é dita **analítica** em $x = x_0$. Todas as funções usuais do Cálculo são analíticas, talvez com a exceção de alguns pontos facilmente reconhecíveis. Por exemplo, sen x e e^x são analíticas em todos os pontos, $1/x$ é analítica exceto em $x = 0$ e tan x é analítica exceto em múltiplos ímpares de $\pi/2$. De acordo com as afirmações 6 e 7, se f e g forem analíticas em x_0, então $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g [desde que $g(x_0) \neq 0$] também serão analíticas em $x = x_0$.

Deslocamento do Índice de Somatório. O índice de somatório em uma série infinita é uma variável muda, da mesma forma que a variável de integração em uma integral definida é uma variável muda. Logo, não importa a letra usada para o índice de um somatório. Por exemplo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j x^j}{j!}.$$

Da mesma forma que podemos mudar a variável de integração em uma integral definida, é conveniente fazer mudanças no índice de somatório ao se calcular soluções em série para equações diferenciais. Vamos ilustrar através de diversos exemplos como mudar o índice de somatório.

EXEMPLO 3

Escreva $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ como uma série cujo primeiro termo corresponde a $n = 0$, em vez de $n = 2$.

Seja $m = n - 2$; então $n = m + 2$ e $n = 2$ corresponde a $m = 0$. Logo,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} x^{m+2}. \tag{1}$$

Escrevendo alguns termos iniciais de cada uma dessas séries pode-se verificar que elas contêm precisamente os mesmos termos. Finalmente, na série à direita do sinal de igualdade na Eq. (1) podemos substituir a variável muda m por n, obtendo

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2}. \tag{2}$$

De fato, deslocamos o índice de 2 para cima e compensamos começando a contar 2 níveis mais baixos do que originalmente.

EXEMPLO 4

Escreva a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n(x - x_0)^{n-2} \tag{3}$$

como uma série cujo termo geral envolve $(x - x_0)^n$, em vez de $(x - x_0)^{n-2}$.

Novamente, deslocamos o índice de somatório por 2, de modo que n é substituído por $n + 2$ e começamos a contar de 2 unidades abaixo. Obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3)a_{n+2}(x - x_0)^n. \tag{4}$$

Você pode verificar facilmente que os termos nas séries (3) e (4) são exatamente os mesmos.

EXEMPLO 5

Escreva a expressão

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n-1} \tag{5}$$

como uma série cujo termo geral envolve x^{r+n}.

Coloque, primeiro, x^2 dentro do somatório, obtendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n+1}. \tag{6}$$

A seguir, mude o índice do somatório por 1 e comece a contar 1 acima. Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(r+n-1)a_{n-1}x^{r+n}. \tag{7}$$

Novamente, você pode verificar que as duas séries na Eq. (7) são idênticas e que ambas são exatamente iguais à expressão em (5).

EXEMPLO 6

Suponha que

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{8}$$

para todo x, e determine o que isso implica sobre os coeficientes a_n.

Queremos usar a afirmação 10 para igualar os coeficientes correspondentes nas duas séries. Para fazer isso precisamos, primeiro, escrever a Eq. (8) de modo que as duas séries tenham a mesma potência de x em seus termos gerais. Por exemplo, podemos substituir n por $n+1$ na série à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (8) e começar a contar de 1 a menos. Assim, a Eq. (8) fica

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{9}$$

De acordo com a afirmação 10, podemos concluir que

$$(n+1)a_{n+1} = a_n, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{10}$$

Logo, escolhendo valores sucessivos de n na Eq. (10), temos

$$a_1 = a_0, \qquad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \qquad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!},$$

e assim por diante. Em geral,

$$a_n = \frac{a_0}{n!}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{11}$$

Portanto, a relação (8) determina todos os coeficientes a seguir em função de a_0. Finalmente, usando os coeficientes dados pela Eq. (11), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = a_0 e^x,$$

onde seguimos a convenção usual de que $0! = 1$.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 8, determine o raio de convergência da série de potências dada.

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(x-3)^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n$
3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n^2}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2 (x+2)^n}{3^n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$

Em cada um dos Problemas de 9 a 16, determine a série de Taylor da função dada em torno do ponto x_0. Determine, também, o raio de convergência da série.

9. $\operatorname{sen} x, \quad x_0 = 0$
10. $e^x, \quad x_0 = 0$
11. $x, \quad x_0 = 1$
12. $x^2, \quad x_0 = -1$
13. $\ln x, \quad x_0 = 1$
14. $\frac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0$
15. $\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0$
16. $\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 2$

17. Dado que $y = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$, calcule y' e y'' e escreva os quatro primeiros termos de cada uma das séries, assim como o coeficiente de x^n no termo geral.

18. Dado que $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, calcule y' e y'' e escreva os quatro primeiros termos de cada uma das séries, assim como o coeficiente de x^n no termo geral. Mostre que se $y'' = y$, então os coeficientes a_0 e a_1 são arbitrários; determine a_2 e a_3 em função de a_0 e a_1. Mostre que $a_{n+2} = a_n/(n+2)(n+1)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Em cada um dos Problemas 19 e 20, verifique a equação dada.

19. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-1)^n$

20. $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} + a_{k-1})x^k$

Em cada um dos Problemas de 21 a 27, escreva a expressão dada como uma série cujo termo geral envolve x^n.

21. $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

22. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$

23. $x \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

24. $(1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

25. $\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

27. $x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

28. Determine a_n de modo que a equação

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

seja satisfeita. Tente identificar a função representada pela série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

5.2 Soluções em Série Perto de um Ponto Ordinário, Parte I

No Capítulo 3 descrevemos métodos para resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Vamos considerar, agora, métodos para resolver equações lineares de segunda ordem quando os coeficientes são funções da variável independente. Neste capítulo denotaremos a variável independente por x. Basta considerar a equação homogênea

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0, \qquad (1)$$

já que o procedimento para a equação não homogênea associada é semelhante.

Muitos problemas em física matemática levam a equações da forma (1) com coeficientes polinomiais; exemplos incluem a equação de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

onde ν é uma constante, e a equação de Legendre,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$$

onde α é constante. Por essa razão, assim como para simplificar os cálculos algébricos, vamos considerar principalmente o caso em que as funções P, Q e R são polinômios. No entanto, como veremos, o método de solução também é aplicável quando P, Q e R são funções analíticas genéricas.

Por enquanto, então, vamos supor que P, Q e R são polinômios e que não têm fatores comuns. Suponha, também, que queremos resolver a Eq. (1) em uma vizinhança de um ponto x_0. A solução da Eq. (1) em um intervalo contendo x_0 está intimamente associada ao comportamento de P nesse intervalo.

Um ponto x_0 no qual $P(x_0) \neq 0$ é chamado de **ponto ordinário**. Como P é contínuo, segue que existe um intervalo em torno de x_0 no qual $P(x)$ nunca se anula. Nesse intervalo, podemos dividir a Eq. (1) por $P(x)$ para obter

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2}$$

onde $p(x) = Q(x)/P(x)$ e $q(x) = R(x)/P(x)$ são funções contínuas. Logo, pelo Teorema 3.2.1 de existência e unicidade existe uma única solução da Eq. (1) nesse intervalo que também satisfaz as condições iniciais $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ para valores arbitrários de y_0 e y_0'. Nesta e na próxima seção vamos discutir soluções da Eq. (1) na vizinhança de um ponto ordinário.

Por outro lado, se $P(x_0) = 0$, então x_0 é chamado de **ponto singular** da Eq. (1). Nesse caso, pelo menos um entre $Q(x_0)$ e $R(x_0)$ é diferente de zero. Em consequência, pelo menos um dos coeficientes p e q na Eq. (2) torna-se ilimitado quando $x \to x_0$ e, portanto, o Teorema 3.2.1 não se aplica nesse caso. As Seções de 5.4 a 5.7 tratam do problema de encontrar soluções da Eq. (1) na vizinhança de um ponto singular.

Vamos começar o problema de resolver a Eq. (1) em uma vizinhança de um ponto ordinário x_0. Procuramos soluções da forma

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \tag{3}$$

e supomos que a série converge no intervalo $|x - x_0| < \rho$ para algum $\rho > 0$. Enquanto, à primeira vista, pode não parecer atraente procurar uma solução em forma de série de potências, essa é, de fato, uma forma conveniente e útil para uma solução. Dentro de seu intervalo de convergência, séries de potências se comportam de maneira muito semelhante a polinômios e são fáceis de manipular tanto analítica quanto numericamente. De fato, mesmo se obtivermos uma solução em termos de funções elementares, tais como funções exponenciais ou trigonométricas, precisaremos, provavelmente, de uma série de potências ou expressão equivalente se quisermos calculá-la numericamente ou desenhar seu gráfico.

O modo mais prático de determinar os coeficientes a_n é substituir a série (3) e suas derivadas por y, y' e y'' na Eq. (1). Os exemplos a seguir ilustram esse processo. As operações envolvidas nos procedimentos, como a diferenciação, são justificáveis desde que permaneçamos no intervalo de convergência. As equações diferenciais nesses exemplos também têm uma importância considerável por si mesmas.

EXEMPLO 1

Encontre uma solução em série para a equação

$$y'' + y = 0, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{4}$$

Como sabemos, um conjunto fundamental de soluções para essa equação é composto por $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, de modo que os métodos de expansão em série não são necessários para resolver essa equação. No entanto, esse exemplo ilustra o uso de séries de potências em um caso relativamente simples. Para a Eq. (4), $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ e $R(x) = 1$, logo todo ponto é um ponto ordinário.

Vamos procurar uma solução em forma de série de potências em torno de $x_0 = 0$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{5}$$

e supor que a série converge em algum intervalo $|x| < \rho$. Diferenciando a Eq. (5) termo a termo, obtemos

$$y' = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \tag{6}$$

$$y'' = 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}. \tag{7}$$

Substituindo y e y'' pelas séries (5) e (7) na Eq. (4) fornece

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Para combinar as duas séries precisamos reescrever pelo menos uma delas de modo que ambas tenham o mesmo termo geral. Assim, mudamos o índice do somatório na primeira série substituindo n por $n + 2$ e começando a soma em 0 em vez de 2. Obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n] x^n = 0.$$

Para que essa equação seja satisfeita para todo x é preciso que o coeficiente de cada potência de x seja nulo; logo, podemos concluir que

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{8}$$

A Eq. (8) é conhecida como uma **relação de recorrência**. Os coeficientes sucessivos podem ser calculados um a um escrevendo-se a relação de recorrência primeiro para $n = 0$, depois para $n = 1$ e assim por diante. Neste exemplo, a Eq. (8) relaciona cada coeficiente com o que está dois antes dele. Assim, os coeficientes com índices pares ($a_0, a_2, a_4, \ldots$) e os com índices ímpares ($a_1, a_3, a_5, \ldots$) são determinados separadamente. Para os pares, temos

$$a_2 = -\frac{a_0}{2\cdot 1} = -\frac{a_0}{2!}, \qquad a_4 = -\frac{a_2}{4\cdot 3} = +\frac{a_0}{4!}, \qquad a_6 = -\frac{a_4}{6\cdot 5} = -\frac{a_0}{6!}, \ldots.$$

Esses resultados sugerem que, em geral, se $n = 2k$, então

$$a_n = a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}a_0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9}$$

Podemos provar a Eq. (9) por indução matemática. Observe, primeiro, que ela é válida para $k = 1$. A seguir, suponha que é válida para um valor arbitrário de k e considere o caso $k + 1$. Temos

$$a_{2k+2} = -\frac{a_{2k}}{(2k+2)(2k+1)} = -\frac{(-1)^k}{(2k+2)(2k+1)(2k)!}a_0 = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!}a_0.$$

Portanto, a Eq. (9) também é verdadeira para $k + 1$ e, em consequência, é verdadeira para todos os inteiros positivos k.

Analogamente, para os coeficientes com índices ímpares,

$$a_3 = -\frac{a_1}{2\cdot 3} = -\frac{a_1}{3!}, \qquad a_5 = -\frac{a_3}{5\cdot 4} = +\frac{a_1}{5!}, \qquad a_7 = -\frac{a_5}{7\cdot 6} = -\frac{a_1}{7!}, \ldots,$$

e, em geral, se $n = 2k + 1$, então[2]

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_1, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{10}$$

Substituindo esses coeficientes na Eq. (5), temos

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 \\ &\quad + \cdots + \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots \\ &= a_0\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\right] \\ &\quad + a_1\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots\right] \\ &= a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \end{aligned} \tag{11}$$

)?

Agora que obtivemos formalmente as duas soluções em série da Eq. (4), podemos testá-las quanto à convergência. Usando o teste da razão, é fácil mostrar que cada uma das séries na Eq. (11) converge para todo x, e isso justifica, de forma retroativa, todos os passos usados para se obter as soluções. De fato, reconhecemos que a primeira série na Eq. (11) é exatamente a série de Taylor para $\cos x$ em torno de $x = 0$ e que a segunda é a série de Taylor para $\operatorname{sen} x$ em torno de $x = 0$. Assim, como esperado, obtivemos a solução $y = a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x$.

Note que não foram impostas condições sobre a_0 e a_1; portanto, elas são constantes arbitrárias. Das Eqs. (5) e (6) vemos que y e y' calculadas em $x = 0$ tomam os valores a_0 e a_1, respectivamente. Como as condições iniciais $y(0)$ e $y'(0)$ podem ser escolhidas arbitrariamente, segue que a_0 e a_1 devem ser arbitrárias até que sejam dadas condições iniciais específicas.

As Figuras 5.2.1 e 5.2.2 mostram como as somas parciais das séries na Eq. (11) aproximam $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$. À medida que cresce o número de termos, o intervalo no qual a aproximação é satisfatória torna-se maior e, para cada x nesse intervalo, a precisão da aproximação melhora. No entanto, você sempre deve se lembrar de

[2]O resultado dado na Eq. (10) e outras fórmulas análogas neste capítulo podem ser provadas por um argumento de indução semelhante ao que acabamos de dar para a Eq. (9). Supomos que esses resultados são plausíveis e omitimos o argumento de indução daqui para a frente.

que uma série de potências truncada fornece apenas uma aproximação local da solução em uma vizinhança do ponto inicial $x = 0$; ela não pode representar adequadamente a solução para valores grandes de $|x|$.

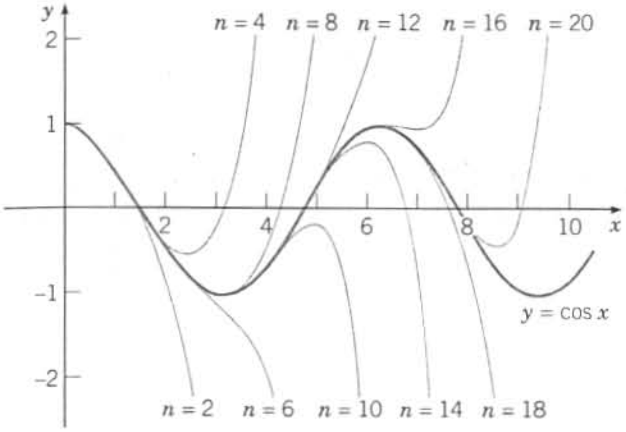

FIGURA 5.2.1 Aproximações polinomiais de cos x. O valor de n é o grau do polinômio na aproximação.

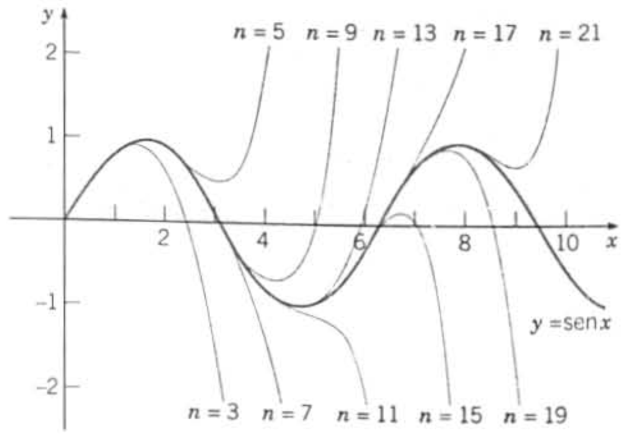

FIGURA 5.2.2 Aproximações polinomiais de sen x. O valor de n é o grau do polinômio na aproximação.

No Exemplo 1 sabíamos desde o início que sen x e cos x formavam um conjunto fundamental de soluções da Eq. (4). No entanto, se não soubéssemos disso e tivéssemos tentado simplesmente resolver a Eq. (4) usando expansão em série ainda assim teríamos obtido a solução (11). Em reconhecimento do fato de que a Eq. (4) ocorre com frequência em aplicações, poderíamos decidir dar nomes especiais às duas soluções da Eq. (11), talvez

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \tag{12}$$

Poderíamos, então, perguntar quais as propriedades dessas funções. Por exemplo, podemos ter certeza de que $C(x)$ e $S(x)$ formam um conjunto fundamental de soluções? Segue imediatamente da expansão em série que $C(0) = 1$ e $S(0) = 0$. Diferenciando as séries para $C(x)$ e $S(x)$ termo a termo, vemos que

$$S'(x) = C(x), \qquad C'(x) = -S(x). \tag{13}$$

Assim, em $x = 0$ temos que $S'(0) = 1$ e $C'(0) = 0$. Em consequência, o wronskiano de C e S em $x = 0$ é

$$W(C, S)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \tag{14}$$

de modo que essas funções formam, de fato, um conjunto fundamental de soluções. Substituindo x por $-x$ em cada uma das Eqs. (12), vemos que $C(-x) = C(x)$ e que $S(-x) = -S(x)$. Além disso, calculando a série infinita[2] podemos mostrar que as funções $C(x)$ e $S(x)$ têm todas as propriedades analíticas e algébricas das funções cosseno e seno, respectivamente.

Embora você tenha visto, provavelmente, as funções seno e cosseno pela primeira vez de um modo mais elementar em termos de triângulos retângulos, é interessante que essas funções podem ser definidas como soluções de certas equações diferenciais lineares de segunda ordem simples. Para ser preciso, a função sen x pode ser definida como a única solução do problema de valor inicial $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; analogamente, cos x pode ser definido como a única solução do problema de valor inicial $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Muitas outras funções importantes em física matemática também são definidas como soluções de determinados problemas de valor inicial. Para a maioria dessas funções não existe maneira mais simples ou mais elementar de se estudá-las.

EXEMPLO 2

Encontre uma solução em série de potências de x para a equação de Airy[4]

$$y'' - xy = 0, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{15}$$

[3]Tal análise é feita na Seção 24 do livro de K. Knopp, *Theory and Applications of Infinite Series* (Nova York: Hafner, 1951).
[4]Sir George Biddell Airy (1801-1892), astrônomo e matemático inglês, foi diretor do Observatório de Greenwich de 1835 a 1881. Uma das razões pelas quais a equação de Airy é interessante é que as soluções são oscilatórias para x negativo, semelhante às funções trigonométricas, e monótonas para x positivo, semelhante às funções hiperbólicas. Você pode explicar por que é razoável esperar um tal comportamento?

Para essa equação, $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ e $R(x) = -x$, logo todo ponto é um ponto ordinário. Vamos supor que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{16}$$

e que a série converge em algum intervalo $|x| < \rho$. A série para y'' é dada pela Eq. (7); como explicado no exemplo precedente, podemos reescrevê-la como

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n. \tag{17}$$

Substituindo y e y'' na Eq. (15) pelas séries (16) e (17), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}. \tag{18}$$

A seguir, mudamos o índice da última série à direita na Eq. (18) substituindo n por $n - 1$ e começando a somar a partir de 1 em vez de zero. Temos, então,

$$2 \cdot 1 a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n.$$

Novamente, para que essa equação seja satisfeita para todo x é preciso que os coeficientes das potências iguais de x sejam iguais; portanto, $a_2 = 0$, e obtemos a relação de recorrência

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{19}$$

Como a_{n+2} é dado em função de a_{n-1}, os coeficientes são determinados de três em três. Assim, a_0 determina a_3, que por sua vez determina $a_6, \ldots$; a_1 determina a_4, que determina $a_7, \ldots$; e a_2 determina a_5, que determina $a_8, \ldots$ Como $a_2 = 0$, concluímos imediatamente que $a_5 = a_8 = a_{11} = \ldots = 0$.

Para a sequência $a_0, a_3, a_6, a_9, \ldots$, fazemos $n = 1, 4, 7, 10, \ldots$ na relação de recorrência:

$$a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3}, \qquad a_6 = \frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}, \qquad a_9 = \frac{a_6}{8 \cdot 9} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}, \ldots.$$

Esses resultados sugerem a fórmula geral

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3n-1)(3n)}, \qquad n \geq 4.$$

Para a sequência $a_1, a_4, a_7, a_{10}, \ldots$, fazemos $n = 2, 5, 8, 11, \ldots$ na relação de recorrência:

$$a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 4}, \qquad a_7 = \frac{a_4}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}, \qquad a_{10} = \frac{a_7}{9 \cdot 10} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}, \ldots.$$

Em geral, temos

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3n)(3n+1)}, \qquad n \geq 4.$$

Assim, a solução geral da equação de Airy é

$$y = a_0\left[1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdots (3n-1)(3n)} + \cdots\right]$$
$$+ a_1\left[x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{x^{3n+1}}{3 \cdot 4 \cdots (3n)(3n+1)} + \cdots\right]. \tag{20}$$

Tendo obtido essas duas soluções em série, podemos investigar agora sua convergência. Devido ao crescimento rápido dos denominadores dos termos na série (20), poderíamos esperar que essas séries tivessem um raio de convergência grande. De fato, é fácil usar o teste da razão para mostrar que ambas as séries convergem para todo x; veja o Problema 20.

Supondo, por um instante, que as séries convergem para todo x, sejam y_1 e y_2 as funções definidas pelas expressões no primeiro e no segundo par de colchetes, respectivamente, na Eq. (20). Então, escolhendo primeiro $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e depois $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, segue que y_1 e y_2 são soluções da Eq. (15). Note que y_1 satisfaz as condições iniciais $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, e que y_2 satisfaz as condições iniciais $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$. Portanto, $W(y_1, y_2)(0) = 1 \neq 0$ e, em consequência, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções. Logo, a solução geral da equação de Airy é

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

As Figuras 5.2.3 e 5.2.4 mostram os gráficos das soluções y_1 e y_2, respectivamente, da equação de Airy, assim como os gráficos de diversas somas parciais das duas séries na Eq. (20). Novamente, as somas parciais fornecem aproximações locais para as soluções em uma vizinhança da origem. Embora a qualidade da aproximação melhore à medida que aumenta o número de termos, nenhum polinômio pode representar de modo adequado y_1 e y_2 para valores grandes de $|x|$. Um modo prático de estimar o intervalo no qual uma soma parcial dada é razoavelmente precisa é comparar os gráficos daquela soma parcial e da próxima, obtida incluindo-se mais um termo. Assim que se puder notar a separação dos gráficos, pode-se ter certeza de que a soma parcial original não é precisa. Por exemplo, na Figura 5.2.3 os gráficos para $n = 24$ e $n = 27$ começam a se separar em torno de $x = -9/2$. Portanto, além desse ponto a soma parcial de grau 24 não serve como uma aproximação da solução.

Observe que ambas as funções y_1 e y_2 são monótonas para $x > 0$ e oscilatórias para $x < 0$. Você também pode ver das figuras que as oscilações não são uniformes, mas decaem em amplitude e aumentam em frequência quando aumenta a distância da origem. Em contraste com o Exemplo 1, as soluções y_1 e y_2 da equação de Airy não são funções elementares que você já encontrou em Cálculo. No entanto, pela sua importância em algumas aplicações físicas essas funções têm sido estudadas extensamente, e suas propriedades são bem conhecidas entre matemáticos aplicados e cientistas.

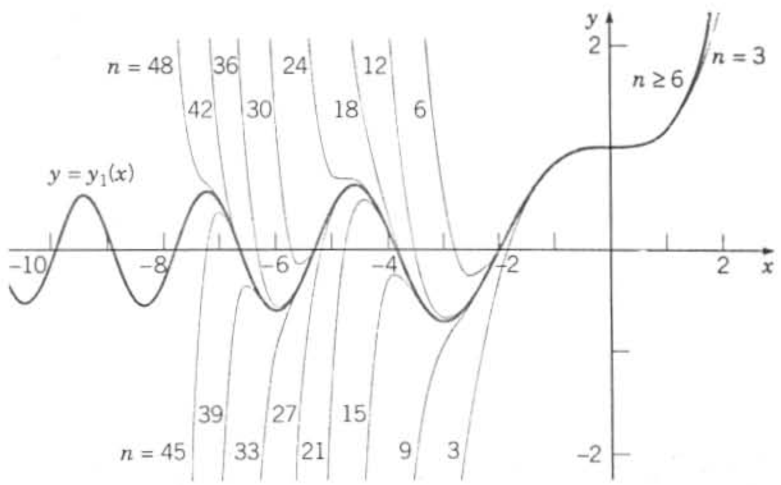

FIGURA 5.2.3 Aproximações polinomiais da solução $y_1(x)$ da equação de Airy. O valor de n é o grau do polinômio na aproximação.

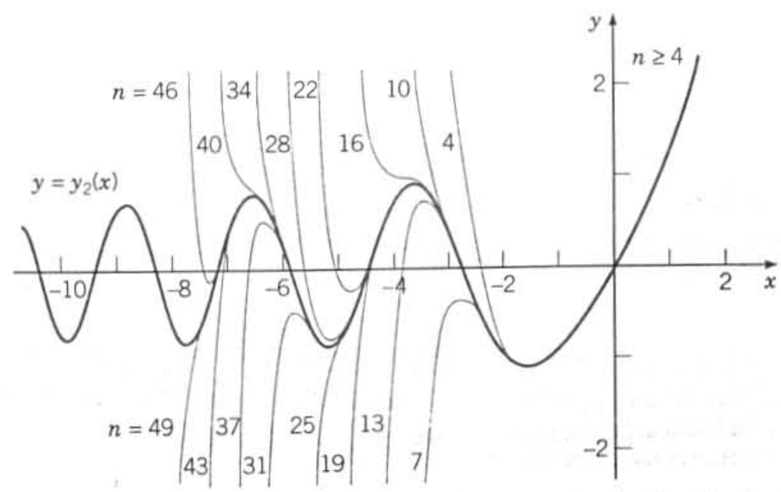

FIGURA 5.2.4 Aproximações polinomiais da solução $y_2(x)$ da equação de Airy. O valor de n é o grau do polinômio na aproximação.

EXEMPLO 3

Encontre uma solução da equação de Airy em potências de $x - 1$.

O ponto $x = 1$ é um ponto ordinário da Eq. (15) e, portanto, procuramos por uma solução da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n,$$

onde supomos que a série converge em algum intervalo $|x - 1| < \rho$. Então

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-1)^n,$$

e

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n.$$

Substituindo y e y'' na Eq. (15), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n. \tag{21}$$

Para igualar os coeficientes das potências iguais de $(x-1)$ precisamos escrever x, o coeficiente de y na Eq. (15), em potências de $(x-1)$; ou seja, escrevemos $x = 1 + (x-1)$. Note que essa é precisamente a série de Taylor de x em torno de $x = 1$. Então, a Eq. (21) fica

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n &= [1+(x-1)]\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

Mudando o índice da última série à direita, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-1)^n.$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de $x-1$, encontramos

$$\begin{aligned}2a_2 &= a_0, \\ (3\cdot 2)a_3 &= a_1 + a_0, \\ (4\cdot 3)a_4 &= a_2 + a_1, \\ (5\cdot 4)a_5 &= a_3 + a_2, \\ &\vdots\end{aligned}$$

A relação de recorrência geral é

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n + a_{n-1} \quad \text{para} \quad n \geq 1. \tag{22}$$

Resolvendo para os primeiros coeficientes em função de a_0 e a_1, vemos que

$$a_2 = \frac{a_0}{2}, \qquad a_3 = \frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{6}, \qquad a_4 = \frac{a_2}{12} + \frac{a_1}{12} = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12}, \qquad a_5 = \frac{a_3}{20} + \frac{a_2}{20} = \frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}y = a_0&\left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \cdots\right] \\ &+ a_1\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \cdots\right].\end{aligned} \tag{23}$$

Em geral, quando a relação de recorrência tem mais de dois termos, como na Eq. (22), a determinação de uma fórmula para a_n em função de a_0 e a_1 é bem complicada, se não impossível. Neste exemplo, tal fórmula não parece ser fácil. Sem tal fórmula não podemos testar a convergência das duas séries na Eq. (23) por métodos diretos, como o teste da razão. No entanto, mesmo sem ter uma fórmula para a_n vamos ver na Seção 5.3 que é possível mostrar que as duas séries na Eq. (23) convergem para todo x. Além disso, elas definem funções y_3 e y_4 que formam um conjunto fundamental de soluções da equação de Airy (15). Assim,

$$y = a_0 y_3(x) + a_1 y_4(x)$$

é a solução geral da equação de Airy para $-\infty < x < \infty$.

Vale a pena enfatizar que, como vimos no Exemplo 3, se procurarmos uma solução da Eq. (1) da forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, teremos, também, que expressar os coeficientes $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ em potências de

$(x - x_0)$. De outro modo, podemos fazer uma mudança de variável $x - x_0 = t$, obtendo uma nova equação diferencial para y em função de t e depois procurar soluções dessa nova equação da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Ao terminar os cálculos, substituímos t por $x - x_0$ (veja o Problema 19).

Nos Exemplos 2 e 3 encontramos dois conjuntos de soluções da equação de Airy. As funções y_1 e y_2 definidas pelas séries na Eq. (20) formam um conjunto fundamental de soluções para a Eq. (15) para todo x, o que também é verdade para as funções y_3 e y_4 definidas pelas séries na Eq. (23). De acordo com a teoria geral de equações lineares de segunda ordem, cada uma entre as duas primeiras funções pode ser expressa como combinação linear das duas últimas funções e vice-versa — um resultado que, certamente, não é óbvio examinando-se apenas as séries.

Finalmente, enfatizamos que não é terrivelmente importante se não formos capazes de determinar o coeficiente geral a_n em função de a_0 e a_1, como no Exemplo 3. O essencial é podermos determinar *quantos coeficientes quisermos*. Assim, podemos encontrar quantos termos quisermos nas duas soluções em série, mesmo sem conhecer o termo geral. Embora a tarefa de calcular diversos coeficientes em uma solução em série de potências não seja difícil, pode ser tediosa. Um pacote de manipulação simbólica pode ajudar aqui; alguns são capazes de encontrar um número de termos especificado em uma solução em série de potências em resposta a um único comando. Com um pacote gráfico apropriado pode-se, também, produzir gráficos como os que aparecem nas figuras desta seção.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 14:

(a) Procure soluções em séries de potências da equação diferencial dada em torno do ponto dado x_0; encontre a relação de recorrência.

(b) Encontre os quatro primeiros termos em cada uma das duas soluções y_1 e y_2 (a menos que a série termine antes).

(c) Calculando o wronskiano $W(y_1, y_2)(x_0)$, mostre que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções.

(d) Se possível, encontre o termo geral em cada solução.

1. $y'' - y = 0, \quad x_0 = 0$
2. $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$
3. $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 1$
4. $y'' + k^2x^2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad k$ constante
5. $(1 - x)y'' + y = 0, \quad x_0 = 0$
6. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad x_0 = 0$
7. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad x_0 = 0$
8. $xy'' + y' + xy = 0, \quad x_0 = 1$
9. $(1 + x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad x_0 = 0$
10. $(4 - x^2)y'' + 2y = 0, \quad x_0 = 0$
11. $(3 - x^2)y'' - 3xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$
12. $(1 - x)y'' + xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$
13. $2y'' + xy' + 3y = 0, \quad x_0 = 0$
14. $2y'' + (x + 1)y' + 3y = 0, \quad x_0 = 2$

Em cada um dos Problemas de 15 a 18:

(a) Encontre os cinco primeiros termos não nulos na solução do problema de valor inicial dado.

(b) Faça gráficos das aproximações da solução com quatro e cinco termos no mesmo conjunto de eixos.

(c) Estime, a partir dos gráficos no item (b), o intervalo no qual a aproximação com quatro termos é razoavelmente precisa.

15. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$; Veja o Problema 2
16. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 3$; Veja o Problema 6
17. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -1$; Veja o Problema 7
18. $(1 - x)y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 2$; Veja o Problema 12
19. (a) Fazendo a mudança de variável $x - x_0 = t$ e supondo que y tem uma série de Taylor em potências de t, encontre duas soluções de

$$y'' + (x - 1)^2y' + (x^2 - 1)y = 0$$

em séries de potências de $x - 1$.

(b) Mostre que você obtém o mesmo resultado diretamente supondo que y é dado por uma série de Taylor em potências de $x - 1$ e expressando o coeficiente $x^2 - 1$ em potências de $x - 1$.

20. Mostre diretamente, usando o teste da razão, que as duas soluções em série em torno do ponto $x = 0$ da equação de Airy convergem para todo x; veja a Eq. (20) do texto.
21. **A Equação de Hermite.** A equação

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \qquad -\infty < x < \infty,$$

onde λ é constante, é conhecida como a equação de Hermite.[5] Esta é uma equação importante na física matemática.

(a) Encontre os quatro primeiros termos em cada uma de duas soluções linearmente independentes em torno de $x = 0$.

(b) Note que se λ for um inteiro par não negativo, então uma ou outra das soluções em série termina e torna-se um polinômio. Encontre as soluções polinomiais para $\lambda = 0, 2, 4, 6, 8$ e 10. Note que cada polinômio é determinado a menos de uma constante multiplicativa.

(c) O polinômio de Hermite $H_n(x)$ é definido como a solução polinomial da equação de Hermite com $\lambda = 2n$ para a qual o coeficiente de x^n é 2^n. Encontre $H_0(x), \ldots, H_5(x)$.

22. Considere o problema de valor inicial $y' = \sqrt{1-y^2}$, $y(0) = 0$.

(a) Mostre que $y = \operatorname{sen} x$ é a solução deste problema de valor inicial.

(b) Procure uma solução do problema de valor inicial em forma de série de potências em torno de $x = 0$. Encontre os coeficientes dessa série até o termo contendo x^3.

Em cada um dos Problemas de 23 a 28, faça o gráfico de diversas somas parciais da solução em série do problema de valor inicial dado em torno de $x = 0$, obtendo, assim, gráficos análogos aos ilustrados nas Figuras 5.2.1 até 5.2.4.

23. $y'' - xy' - y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$; Veja o Problema 2

24. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$; Veja o Problema 6

25. $y'' + xy' + 2y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$; Veja o Problema 7

26. $(4 - x^2)y'' + 2y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$; Veja o Problema 10

27. $y'' + x^2y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$; Veja o Problema 4

28. $(1 - x)y'' + xy' - 2y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$

5.3 Soluções em Série Perto de um Ponto Ordinário, Parte II

Consideramos, na seção precedente, o problema de encontrar soluções de

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{1}$$

onde P, Q e R são polinômios, na vizinhança de um ponto ordinário x_0. Supondo que a Eq. (1) tem, de fato, uma solução $y = \phi(x)$ e que ϕ tem uma série de Taylor

$$y = \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \tag{2}$$

que converge para $|x - x_0| < \rho$, onde $\rho > 0$, vimos que a_n pode ser determinado substituindo-se, diretamente, y na Eq. (1) pela série (2).

Vamos considerar, agora, como justificar a afirmação de que se x_0 é um ponto ordinário da Eq. (1), então existem soluções da forma (2). Vamos considerar, também, a questão do raio de convergência de tal série. Ao fazer isso, seremos levados a uma generalização da definição de ponto ordinário.

Suponha, então, que existe uma solução da Eq. (1) da forma (2). Diferenciando a Eq. (2) m vezes e fazendo x igual a x_0, segue que

$$m!a_m = \phi^{(m)}(x_0).$$

Logo, para calcular a_n na série (2) precisamos mostrar que podemos determinar $\phi^{(n)}(x_0)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ a partir da equação diferencial (1).

Suponha que $y = \phi(x)$ é uma solução da Eq. (1) satisfazendo as condições iniciais $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$. Então, $a_0 = y_0$ e $a_1 = y_0'$. Se estivermos interessados apenas em encontrar uma solução da Eq. (1) sem especificar condições iniciais, então a_0 e a_1 permanecem arbitrários. Para determinar $\phi^{(n)}(x_0)$ e os coeficientes correspondentes a_n para $n = 2, 3, \ldots$, voltamos para a Eq. (1). Como ϕ é uma solução da Eq. (1), temos

[5]Charles Hermite (1822-1901) foi um analista e algebrista francês influente. Introduziu as funções de Hermite em 1864 e mostrou, em 1873, que e é um número transcendental (ou seja, e não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes racionais). Seu nome também está associado às matrizes hermitianas (veja a Seção 7.3), algumas de cujas propriedades ele descobriu.

$$P(x)\phi''(x) + Q(x)\phi'(x) + R(x)\phi(x) = 0.$$

No intervalo em torno de x_0 onde P nunca se anula, podemos escrever essa equação na forma

$$\phi''(x) = -p(x)\phi'(x) - q(x)\phi(x), \tag{3}$$

onde $p(x) = Q(x)/P(x)$ e $q(x) = R(x)/P(x)$. Fazendo x igual a x_0 na Eq. (3), temos

$$\phi''(x_0) = -p(x_0)\phi'(x_0) - q(x_0)\phi(x_0).$$

Portanto, a_2 é dado por

$$2!a_2 = \phi''(x_0) = -p(x_0)a_1 - q(x_0)a_0. \tag{4}$$

Para determinar a_3, diferenciamos a Eq. (3) e depois fazemos x igual a x_0, obtendo

$$\begin{aligned} 3!a_3 = \phi'''(x_0) &= -[p\phi'' + (p' + q)\phi' + q'\phi]\Big|_{x=x_0} \\ &= -2!p(x_0)a_2 - [p'(x_0) + q(x_0)]a_1 - q'(x_0)a_0. \end{aligned} \tag{5}$$

A substituição de a_2 pela expressão obtida da Eq. (4) fornece a_3 em termos de a_1 e a_0. Como P, Q e R são polinômios e $P(x_0) \neq 0$, todas as derivadas de p e q existem em x_0. Logo, podemos continuar a diferenciar a Eq. (3) indefinidamente, determinando, após cada diferenciação, os coeficientes sucessivos $a_4, a_5, \ldots$ fazendo x igual a x_0.

Note que a propriedade importante que usamos na determinação de a_n é que podemos calcular uma infinidade de derivadas das funções p e q. Pode parecer razoável relaxar nossa hipótese de que as funções p e q são quocientes de polinômios e supor, simplesmente, que sejam infinitamente diferenciáveis em uma vizinhança de x_0. Infelizmente, essa condição é muito fraca para garantir que podemos provar a convergência da expansão em série resultante para $y = \phi(x)$. É necessário supor que as funções p e q são *analíticas* em x_0; ou seja, que elas têm expansões em série de Taylor que convergem em algum intervalo em torno do ponto x_0:

$$p(x) = p_0 + p_1(x - x_0) + \cdots + p_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n, \tag{6}$$

$$q(x) = q_0 + q_1(x - x_0) + \cdots + q_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n. \tag{7}$$

Com essa ideia em mente, podemos generalizar as definições de ponto ordinário e ponto singular da Eq. (1) da seguinte maneira: se as funções $p = Q/P$ e $q = R/P$ forem analíticas em x_0, então o ponto x_0 é dito um **ponto ordinário** da equação diferencial (1); caso contrário, é um **ponto singular**.

Vamos agora considerar o problema do intervalo de convergência da solução em série. Uma possibilidade é calcular, explicitamente, a solução em série para cada problema e usar um dos testes de convergência de uma série infinita para determinar seu raio de convergência. Infelizmente, esses testes requerem que obtenhamos uma expressão para o coeficiente geral a_n em função de n, uma tarefa muito difícil, se não impossível, com frequência; lembre o Exemplo 3 na Seção 5.2. No entanto, essa questão pode ser respondida imediatamente para uma classe ampla de problemas pelo teorema a seguir.

Teorema 5.3.1 Se x_0 for um ponto ordinário da equação diferencial (1)

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

ou seja, se $p = Q/P$ e $q = R/P$ forem analíticas em x_0, então a solução geral da Eq. (1) será

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0y_1(x) + a_1y_2(x), \tag{8}$$

onde a_0 e a_1 são arbitrários, e y_1 e y_2 são duas soluções em séries de potências que são analíticas em x_0. As soluções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções. Além disso, o raio de convergência de cada uma das soluções em série y_1 e y_2 é pelo menos tão grande quanto o mínimo dos raios de convergência das séries para p e q.

Para ver que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções, note que eles têm a forma $y_1(x) = 1 + b_2(x - x_0)^2 + \ldots$ e $y_2(x) = (x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots$, onde $b_2 + c_2 = a_2$. Logo, y_1 satisfaz as condições iniciais $y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0$ e y_2 satisfaz as condições iniciais $y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1$. Logo, $W(y_1, y_2)(x_0) = 1$.

Note também que embora o cálculo dos coeficientes através de diferenciações sucessivas da equação diferencial seja excelente do ponto de vista teórico, não é, em geral, um procedimento computacional prático. Em vez disso, é melhor substituir y na Eq. (1) pela série (2) e determinar os coeficientes de modo que a equação diferencial seja satisfeita, como nos exemplos da seção precedente.

Não demonstraremos esse teorema que, em uma forma ligeiramente mais geral, é devido a Fuchs.[6] O que importa para nossos propósitos é que existe uma solução em série da forma (2) e que o raio de convergência dessa solução em série não pode ser menor do que o menor entre os raios de convergência das séries para p e q; logo, precisamos apenas determinar esses raios.

Isso pode ser feito de duas maneiras. Novamente, uma possibilidade é calcular as séries de potências para p e q e depois determinar seus raios de convergência usando um dos testes de convergência para séries infinitas. No entanto, existe um modo mais fácil quando P, Q e R são polinômios. Na teoria de funções de uma variável complexa mostra-se que a razão de dois polinômios, digamos Q/P, tem uma expansão em série de potências que converge em torno de um ponto x_0 se $P(x_0) \neq 0$. Além disso, supondo que todos os fatores comuns entre Q e P foram cancelados, o raio de convergência da série de potências para Q/P em torno do ponto x_0 é exatamente a distância de x_0 à raiz mais próxima de P. Ao determinar essa distância, precisamos lembrar que $P(x) = 0$ pode ter raízes complexas, e elas também têm que ser levadas em consideração.

EXEMPLO 1

Qual é o raio de convergência da série de Taylor para $(1 + x^2)^{-1}$ em torno de $x = 0$?

Um modo de proceder é encontrar a série de Taylor em questão, a saber,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots.$$

Pode-se verificar, então, pelo teste da razão, que $\rho = 1$. Outra abordagem é notar que os zeros de $1 + x^2$ são $x = \pm i$. Como a distância de 0 a i ou a $-i$ no plano complexo é 1, o raio de convergência da série de potências em torno de $x = 0$ é 1.

EXEMPLO 2

Qual é o raio de convergência da série de Taylor para $(x^2 - 2x + 2)^{-1}$ em torno de $x = 0$? E em torno de $x = 1$?

Em primeiro lugar, note que

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

tem soluções $x = 1 \pm i$. A distância de $x = 0$ a $x = 1 + i$ ou a $x = 1 - i$ no plano complexo é $\sqrt{2}$, logo, o raio de convergência da expansão em série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ em torno de $x = 0$ é $\sqrt{2}$.

A distância no plano complexo de $x = 1$ a $x = 1 + i$ ou a $x = 1 - i$ é 1; logo o raio de convergência da expansão em série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-1)^n$ em torno de $x = 1$ é 1.

De acordo com o Teorema 5.3.1, as soluções em série da equação de Airy nos Exemplos 2 e 3 da seção precedente convergem para todos os valores de x, já que, em cada um dos problemas, $P(x) = 1$ e, portanto, nunca se anula.

Uma solução em série pode convergir para outros valores de x, além dos indicados no Teorema 5.3.1, de modo que o teorema fornece, de fato, apenas uma cota inferior para o raio de convergência da solução em série. Isso é ilustrado pelos polinômios de Legendre, que satisfazem a equação de Legendre dada no próximo exemplo.

EXEMPLO 3

Determine uma cota inferior para o raio de convergência das soluções em série em torno de $x = 0$ da equação de Legendre

[6] Immanuel Lazarus Fuchs (1833-1902) foi estudante e, mais tarde, professor na University of Berlim. Provou o resultado do Teorema 5.3.1 em 1866. Sua pesquisa mais importante foi sobre pontos singulares de equações diferenciais lineares. Ele reconheceu a importância dos pontos singulares regulares (Seção 5.4), e as equações cujas únicas singularidades, incluindo o ponto no infinito, são pontos singulares regulares; são conhecidas como equações de Fuchs.

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$$

onde α é constante.

Note que $P(x) = 1 - x^2$, $Q(x) = -2x$ e $R(x) = \alpha(\alpha + 1)$ são polinômios e que os zeros de P, a saber, $x = \pm 1$, distam 1 de $x = 0$. Logo, uma solução em série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pelo menos para $|x| < 1$ e, possivelmente, para valores maiores de x. De fato, pode-se mostrar que se α é um inteiro positivo, uma das soluções em série termina após um número finito de termos e, portanto, converge para todo x e não apenas para $|x| < 1$. Por exemplo, se $\alpha = 1$, a solução polinomial é $y = x$. Veja os Problemas 22 até 29, ao final desta seção, para uma discussão mais completa da equação de Legendre.

EXEMPLO 4

Determine uma cota inferior para o raio de convergência da solução em série da equação diferencial

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' + 4x^2y = 0 \tag{9}$$

em torno do ponto $x = 0$ e em torno do ponto $x = -\frac{1}{2}$.

Novamente, Q, P e R são polinômios e P tem raízes $x = \pm i$. A distância no plano complexo de 0 a $\pm i$ é 1 e a distância de $-\frac{1}{2}$ a $\pm i$ é $\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{5}/2$. Assim, no primeiro caso, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pelo menos para $|x| < 1$ e, no segundo caso, a série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(x + \frac{1}{2}\right)^n$ converge pelo menos para $|x + \frac{1}{2}| < \sqrt{5}/2$.

Uma observação interessante que podemos fazer sobre a Eq. (9) segue dos Teoremas 3.2.1 e 5.3.1. Suponha que são dadas as condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_0'$. Como $1 + x^2 \neq 0$ para todo x, sabemos, do Teorema 3.2.1, que o problema de valor inicial tem uma única solução em $-\infty < x < \infty$. Por outro lado, o Teorema 5.3.1 garante apenas uma solução em série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (com $a_0 = y_0$, $a_1 = y_0'$) para $-1 < x < 1$. A solução única no intervalo $-\infty < x < \infty$ pode não ter uma expansão em série de potências em torno de $x = 0$ que convirja para todo x.

EXEMPLO 5

Podemos determinar uma solução em série em torno de $x = 0$ para a equação diferencial

$$y'' + (\operatorname{sen} x)y' + (1 + x^2)y = 0,$$

e, se for o caso, qual o raio de convergência?

Para esta equação diferencial, $p(x) = \operatorname{sen} x$ e $q(x) = 1 + x^2$. Lembre-se do Cálculo que $\operatorname{sen} x$ tem uma expansão em série de Taylor em torno de $x = 0$ que converge para todo x. Além disso, q também tem uma expansão em série de Taylor em torno de $x = 0$, a saber, $q(x) = 1 + x^2$, que converge para todo x. Portanto, a equação tem uma solução em série da forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, com a_0 e a_1 arbitrários, e a série converge para todo x.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, determine $\phi''(x_0)$, $\phi'''(x_0)$ e $\phi^{(4)}(x_0)$ para o ponto dado x_0, se $y = \phi(x_0)$ é uma solução do problema de valor inicial dado.

1. $y'' + xy' + y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
2. $y'' + (\operatorname{sen} x)y' + (\cos x)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
3. $x^2y'' + (1 + x)y' + 3(\ln x)y = 0; \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$
4. $y'' + x^2y' + (\operatorname{sen} x)y = 0; \quad y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1$

Em cada um dos Problemas de 5 a 8, determine uma cota inferior para o raio de convergência da solução em série da equação diferencial dada em torno de cada ponto x_0 dado.

5. $y'' + 4y' + 6xy = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 4$
6. $(x^2 - 2x - 3)y'' + xy' + 4y = 0; \quad x_0 = 4, \quad x_0 = -4, \quad x_0 = 0$
7. $(1 + x^3)y'' + 4xy' + y = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 2$
8. $xy'' + y = 0; \quad x_0 = 1$

9. Determine uma cota inferior para o raio de convergência da solução em série em torno de x_0 dado para cada uma das equações diferenciais dadas nos Problemas de 1 a 14 da Seção 5.2.

10. **A Equação de Chebyshev.** A equação diferencial de Chebyshev[7] é

$$(1-x^2)y''-xy'+\alpha^2y=0,$$

onde α é constante.

(a) Determine duas soluções em séries de potências de x para $|x|<1$ e mostre que elas formam um conjunto fundamental de soluções.

(b) Mostre que, se α for um inteiro não negativo n, então existe uma solução polinomial de grau n. Esses polinômios, quando normalizados adequadamente, são chamados de polinômios de Chebyshev. Eles são muito úteis em problemas que necessitam de uma aproximação polinomial para uma função definida em $-1\le x\le 1$.

(c) Encontre uma solução polinomial para cada um dos casos $\alpha=n=0,1,2$ e 3.

Para cada uma das equações diferenciais nos Problemas de 11 a 14, encontre os quatro primeiros termos não nulos em cada uma de duas soluções em série em torno da origem. Qual o valor que você espera que tenha o raio de convergência de cada solução?

11. $y''+(\operatorname{sen}x)y=0$

12. $e^xy''+xy=0$

13. $(\cos x)y''+xy'-2y=0$

14. $e^{-x}y''+\ln(1+x)y'-xy=0$

15. Sejam x e x^2 soluções da equação diferencial $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$. Você pode dizer se o ponto $x=0$ é um ponto ordinário ou singular? Prove sua resposta.

Equações de Primeira Ordem. Os métodos de expansão em séries discutidos nesta seção são diretamente aplicáveis à equação diferencial linear de primeira ordem $P(x)y'+Q(x)y=0$ em um ponto x_0, se a função $p=Q/P$ tiver uma expansão em série de Taylor em torno desse ponto. Tal ponto é chamado de ponto ordinário e, além disso, o raio de convergência da série $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ é pelo menos tão grande quanto o raio de convergência da série para Q/P. Em cada um dos Problemas de 16 a 21, resolva a equação diferencial dada por uma série de potências em x e verifique que a_0 é arbitrário em cada caso. Os Problemas 20 e 21 envolvem equações diferenciais não homogêneas para as quais os métodos de expansão em séries podem ser estendidos facilmente. Sempre que possível, compare a solução em série com a obtida pelos métodos do Capítulo 2.

16. $y'-y=0$

17. $y'-xy=0$

18. $y'=e^{x^2}y$, só três termos

19. $(1-x)y'=y$

20. $y'-y=x^2$

21. $y'+xy=1+x$

A Equação de Legendre. Os Problemas de 22 a 29 tratam da equação de Legendre[8]

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0.$$

Como indicado no Exemplo 3, o ponto $x=0$ é um ponto ordinário dessa equação, e a distância da origem ao zero mais próximo de $P(x)=1-x^2$ é 1. Logo, o raio de convergência da solução em série em torno de $x=0$ é pelo menos 1. Note, também, que basta considerar $\alpha>-1$, pois, se $\alpha\le -1$, então a substituição $\alpha=-(1+\gamma)$, onde $\gamma\ge 0$, leva à equação de Legendre $(1-x^2)y''-2xy'+\gamma(\gamma+1)y=0$.

22. Mostre que duas soluções da equação de Legendre para $|x|<1$ são

$$y_1(x)=1-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4$$
$$+\sum_{m=3}^{\infty}(-1)^m\frac{\alpha\cdots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)\cdots(\alpha+2m-1)}{(2m)!}x^{2m},$$

$$y_2(x)=x-\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3+\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5$$
$$+\sum_{m=3}^{\infty}(-1)^m\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+2m)}{(2m+1)!}x^{2m+1}.$$

[7]Pafnuty L. Chebyshev (1821-1894), professor da Petersburg University durante 35 anos e o matemático russo mais influente do século XIX, fundou a chamada escola de São Petersburgo, que produziu uma longa linhagem de matemáticos importantes. Seus estudos sobre os polinômios de Chebyshev começaram em torno de 1854, como parte de uma investigação de aproximação de funções por polinômios. Chebyshev também é conhecido por seu trabalho em teoria dos números e probabilidade.

[8]Adrien-Marie Legendre (1752-1833) teve várias posições na *Académie des Sciences* francesa a partir de 1783. Seus trabalhos principais foram nos campos de funções elíticas e teoria dos números. As funções de Legendre, soluções da equação de Legendre, apareceram pela primeira vez em 1784 em seu estudo sobre a atração de esferoides.

23. Mostre que se α for zero ou um inteiro positivo par $2n$, a solução em série y_1 se reduz a um polinômio de grau $2n$ contendo apenas potências pares de x. Encontre os polinômios correspondentes a $\alpha = 0, 2$ e 4. Mostre que, se α for um inteiro positivo ímpar $2n + 1$, então a solução em série y_2 se reduz a um polinômio de grau $2n + 1$ contendo apenas potências ímpares de x. Encontre os polinômios correspondentes a $\alpha = 1$, 3 e 5.

24. O polinômio de Legendre $P_n(x)$ é definido como a solução polinomial da equação de Legendre com $\alpha = n$ que satisfaz, também, a condição $P_n(1) = 1$.
   (a) Usando os resultados do Problema 23, encontre os polinômios de Legendre $P_0(x), \ldots, P_5(x)$.
   (b) Faça os gráficos de $P_0(x), \ldots, P_5(x)$ para $-1 \leq x \leq 1$.
   (c) Encontre os zeros de $P_0(x), \ldots, P_5(x)$.

25. Pode-se mostrar que a fórmula geral para $P_n(x)$ é

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k},$$

onde $\lfloor n/2 \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a $n/2$. Observando a forma de $P_n(x)$ para n par e ímpar, mostre que $P_n(-1) = (-1)^n$.

26. Os polinômios de Legendre têm um papel importante em física matemática. Por exemplo, ao se resolver a equação de Laplace (equação do potencial) em coordenadas esféricas, encontramos a equação

$$\frac{d^2F(\varphi)}{d\varphi^2} + \cot\varphi \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} + n(n+1)F(\varphi) = 0, \qquad 0 < \varphi < \pi,$$

onde n é um inteiro positivo. Mostre que a mudança de variável $x = \cos\varphi$ leva a uma equação de Legendre com $\alpha = n$ para $y = f(x) = F(\arccos x)$.

27. Mostre que, para $n = 0, 1, 2, 3$, o polinômio de Legendre correspondente é dado por

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Esta fórmula, conhecida como fórmula de Rodrigues,[9] é válida para todos os inteiros positivos n.

28. Mostre que a equação de Legendre também pode ser escrita como

$$[(1-x^2)y']' = -\alpha(\alpha+1)y.$$

Segue, então, que

$$[(1-x^2)P_n'(x)]' = -n(n+1)P_n(x) \quad \text{e} \quad [(1-x^2)P_m'(x)]' = -m(m+1)P_m(x).$$

Multiplicando a primeira equação por $P_m(x)$, a segunda por $P_n(x)$, integrando por partes e depois subtraindo uma equação da outra, mostre que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \quad \text{se} \quad n \neq m.$$

Esta propriedade dos polinômios de Legendre é conhecida como a propriedade de ortogonalidade. Se $m = n$, pode-se mostrar que o valor desta integral é $2/(2n + 1)$.

29. Dado um polinômio f de grau n, é possível expressar f como uma combinação linear de $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x).$$

Usando o resultado do Problema 28, mostre que

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\,dx.$$

5.4 Equações de Euler; Pontos Singulares Regulares

Nesta seção vamos começar considerando como resolver equações da forma

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{1}$$

[9]Olinde Rodrigues (1794–1851) publicou este resultado como parte de sua tese de doutorado na *École Normale* em Paris em 1816. Mais tarde tornou-se banqueiro e reformador social.

na vizinhança de um ponto singular x_0. Lembre-se de que se as funções P, Q e R são polinômios sem fatores comuns, os pontos singulares da Eq. (1) são os pontos nos quais $P(x) = 0$.

Equações de Euler. Uma equação diferencial relativamente simples que tem um ponto singular é a **equação de Euler**[10]

$$L[y] = x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \tag{2}$$

onde α e beta são constantes reais. Neste caso $P(x) = x^2$, de modo que $x = 0$ é o único ponto singular regular da Eq. (2); todos os outros são pontos ordinários. Por conveniência, vamos considerar, primeiro, o intervalo $x > 0$; mais tarde estenderemos nossos resultados para o intervalo $x < 0$.

Note que $(x^r)' = rx^{r-1}$ e $(x^r)'' = r(r-1)x^{r-2}$. Logo, se supusermos que a Eq. (2) tem uma solução da forma

$$y = x^r, \tag{3}$$

obtemos

$$\begin{aligned} L[x^r] &= x^2(x^r)'' + \alpha x(x^r)' + \beta x^r \\ &= x^r[r(r-1) + \alpha r + \beta]. \end{aligned} \tag{4}$$

Se r é raiz da equação de segundo grau

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0, \tag{5}$$

então $L[x^r]$ é zero e $y = x^r$ é uma solução da Eq. (2). As raízes da Eq. (5) são

$$r_1, r_2 = \frac{-(\alpha-1) \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2}, \tag{6}$$

e $F(r) = (r - r_1)(r - r_2)$. Como para equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, é necessário considerar separadamente os casos nos quais as raízes são reais e diferentes, reais e iguais, e complexas conjugadas. De fato, a discussão inteira sobre equações de Euler é semelhante ao tratamento de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes no Capítulo 3, com e^{rx} substituído por x^r.

Raízes Reais e Distintas. Se $F(r) = 0$ tem raízes reais r_1 e r_2 com $r_1 \neq r_2$, então $y_1(x) = x^{r_1}$ e $y_2(x) = x^{r_2}$ são soluções da Eq. (2). Como

$$W(x^{r_1}, x^{r_2}) = (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2-1}$$

não se anula se $r_1 \neq r_2$ e $x > 0$, segue que a solução geral da Eq. (2) é

$$y = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}, \qquad x > 0. \tag{7}$$

Note que, se r não for racional, então x^r é definida por $x^r = e^{r\ln x}$.

EXEMPLO 1

Resolva

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \qquad x > 0. \tag{8}$$

Substituindo $y = x^r$ na Eq. (8), obtemos

$$x^r[2r(r-1) + 3r - 1] = x^r(2r^2 + r - 1) = x^r(2r-1)(r+1) = 0.$$

Logo $r_1 = \frac{1}{2}$ e $r_2 = -1$, de modo que a solução geral da Eq. (8) é

$$y = c_1x^{1/2} + c_2x^{-1}, \qquad x > 0. \tag{9}$$

Raízes Iguais. Se as raízes r_1 e r_2 são iguais, obtemos apenas uma solução $y_1(x) = x^{r_1}$ da forma proposta. Pode-se obter uma segunda solução pelo método de redução de ordem, mas vamos considerar, para nossa discussão futura, um método alternativo. Como $r_1 = r_2$, $F(r) = (r - r_1)^2$. Assim, nesse caso, além de $F(r_1) =$

[10] Esta equação é chamada algumas vezes de equação de Cauchy-Euler ou equação equidimensional. Ela foi estudada por Euler em cerca de 1740, mas sua solução já era conhecida por Johann Bernoulli antes de 1700.

0, temos, também, $F'(r_1) = 0$. Isso sugere a diferenciação da Eq. (4) em relação a r e, depois, a atribuição r igual a r_1. Diferenciando a Eq. (4) em relação a r, temos

$$\frac{\partial}{\partial r}L[x^r] = \frac{\partial}{\partial r}[x^r F(r)].$$

Substituindo $F(r)$, trocando as ordens de integração em relação a x e em relação a r, e notando que $\partial(x^r)/\partial r = x^r \ln r$, obtemos

$$L[x^r \ln x] = (r - r_1)^2 x^r \ln x + 2(r - r_1)x^r. \tag{10}$$

A expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (10) é 0 para $r = r_1$; portanto,

$$y_2(x) = x^{r_1} \ln x, \qquad x > 0 \tag{11}$$

é uma segunda solução da Eq. (2). Calculando o wronskiano, vemos que

$$W(x^{r_1}, x^{r_1} \ln x) = x^{2r_1 - 1}.$$

Logo, x^{r_1} e $x^{r_1} \ln x$ formam um conjunto fundamental de soluções para $x > 0$, e a solução geral da Eq. (2) é

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{r_1}, \qquad x > 0. \tag{12}$$

EXEMPLO 2

Resolva

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, \qquad x > 0. \tag{13}$$

Substituindo $y = x^r$ na Eq. (13), obtemos

$$x^r[r(r-1) + 5r + 4] = x^r(r^2 + 4r + 4) = 0.$$

Portanto, $r_1 = r_2 = -2$ e

$$y = x^{-2}(c_1 + c_2 \ln x), \qquad x > 0 \tag{14}$$

é a solução geral da Eq. (13).

Raízes Complexas. Finalmente, suponha que as raízes r_1 e r_2 são complexas conjugadas, digamos, $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$, com $\mu \neq 0$. Precisamos explicar agora o significado de x^r quando r é complexo. Lembrando que

$$x^r = e^{r \ln x} \tag{15}$$

quando $x > 0$ e r é real, podemos usar essa equação para *definir* x^r quando r é complexo. Então, usando a fórmula de Euler para $e^{i\mu \ln x}$, obtemos

$$\begin{aligned} x^{\lambda + i\mu} &= e^{(\lambda + i\mu)\ln x} = e^{\lambda \ln x}e^{i\mu \ln x} = x^\lambda e^{i\mu \ln x} \\ &= x^\lambda[\cos(\mu \ln x) + i\,\mathrm{sen}(\mu \ln x)], \qquad x > 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Com essa definição de x^r para valores complexos de r, pode-se verificar que as regras usuais da álgebra e o cálculo diferencial continuam válidos, logo x^{r_1} e x^{r_2} são, de fato, soluções da Eq. (2). A solução geral da Eq. (2) é

$$y = c_1 x^{\lambda + i\mu} + c_2 x^{\lambda - i\mu}. \tag{17}$$

A desvantagem dessa expressão é que as funções $x^{\lambda+i\mu}$ e $x^{\lambda-i\mu}$ tomam valores complexos. Lembre-se de que tivemos uma situação semelhante no estudo de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes quando as raízes eram complexas. Da mesma forma que fizemos anteriormente, podemos observar que as partes real e imaginária de $x^{\lambda+i\mu}$, a saber,

$$x^\lambda \cos(\mu \ln x) \qquad \text{e} \qquad x^\lambda\,\mathrm{sen}(\mu \ln x) \tag{18}$$

também são soluções da Eq. (2). Um cálculo direto mostra que

$$W[x^\lambda \cos(\mu \ln x), x^\lambda\,\mathrm{sen}(\mu \ln x)] = \mu x^{2\lambda - 1}.$$

Portanto, essas soluções formam um conjunto fundamental de soluções para $x > 0$, e a solução geral da Eq. (2) é

$$y = c_1 x^\lambda \cos(\mu \ln x) + c_2 x^\lambda\,\mathrm{sen}(\mu \ln x), \qquad x > 0. \tag{19}$$

EXEMPLO 3

Resolva

$$x^2y'' + xy' + y = 0. \tag{20}$$

Substituindo $y = x^r$ na Eq. (20), obtemos

$$x^r[r(r-1) + r + 1] = x^r(r^2+1) = 0.$$

Logo, $r = \pm i$ e a solução geral é

$$y = c_1\cos(\ln x) + c_2\,\mathrm{sen}(\ln x), \qquad x > 0. \tag{21}$$

O fator x^λ não parece explicitamente na Eq. (21) porque, neste exemplo, $\lambda = 0$ e $x^\lambda = 1$.

Vamos considerar, agora, o comportamento qualitativo das soluções da Eq. (2) perto do ponto singular $x = 0$. Isso depende inteiramente da natureza dos expoentes r_1 e r_2. Em primeiro lugar, se r for real e positivo, $x^r \to 0$ quando x tende a zero assumindo apenas valores positivos. Por outro lado, se r for real e negativo, então x^r tornar-se-á ilimitado. Finalmente, se $r = 0$, $x^r = 1$. Essas possibilidades estão ilustradas na Figura 5.4.1 para diversos valores de r. Se r for complexo, uma solução típica será $x^\lambda\cos(\mu\ln x)$. Essa função torna-se ilimitada ou tende a zero se λ for, respectivamente, negativo ou positivo, e, também, oscila cada vez mais rapidamente quando $x \to 0$. Esses comportamentos estão ilustrados nas Figuras 5.4.2 e 5.4.3 para valores selecionados de λ e de μ. Se $\lambda = 0$, a oscilação tem amplitude constante. Finalmente, se as raízes são repetidas, então uma das soluções tem a forma $x^r\ln x$, que tende a zero se $r > 0$ e é ilimitada se $r \leq 0$. Um exemplo de cada caso aparece na Figura 5.4.4.

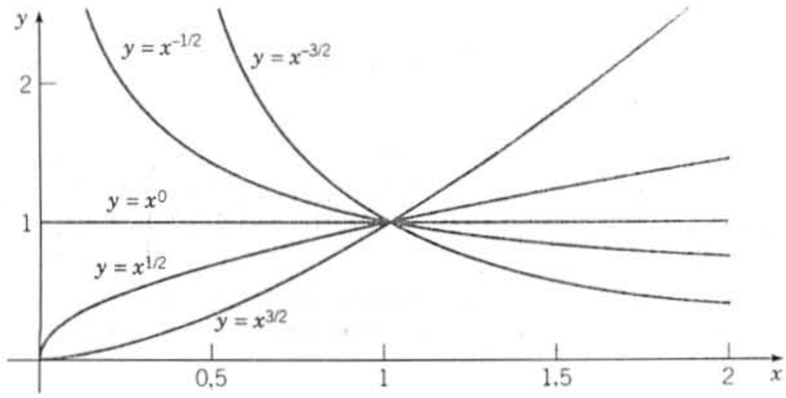

FIGURA 5.4.1 Soluções de uma equação de Euler; raízes reais.

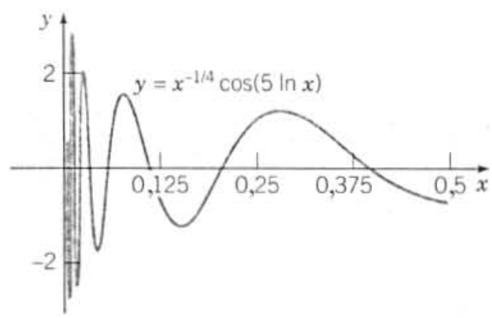

FIGURA 5.4.2 Solução de uma equação de Euler; raízes complexas com parte real negativa.

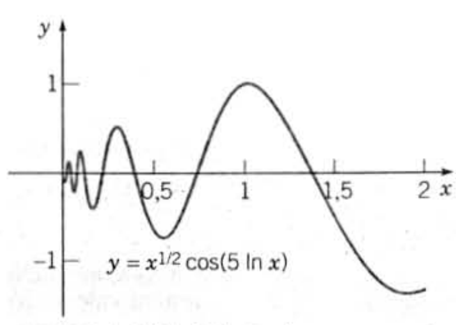

FIGURA 5.4.3 Solução de uma equação de Euler; raízes complexas com parte real positiva.

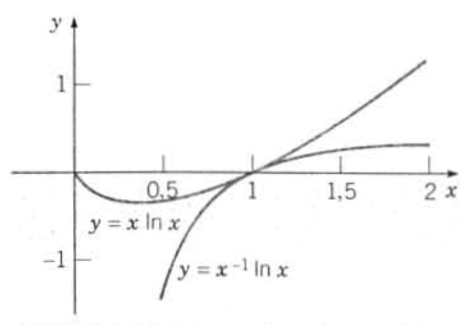

FIGURA 5.4.4 Segundas soluções típicas de uma equação de Euler com raízes iguais.

A extensão das soluções da Eq. (2) para o intervalo $x < 0$ pode ser feita de modo relativamente direto. A dificuldade está em compreender o significado de x^r quando r é negativo e não é inteiro; analogamente, $\ln x$ não está definido para $x < 0$. As soluções da equação de Euler que encontramos para $x > 0$ são válidas para $x < 0$ mas são, em geral, complexas. Assim, no Exemplo 1, a solução $x^{1/2}$ é imaginária para $x < 0$.

Sempre é possível obter soluções reais da equação de Euler (2) no intervalo $x < 0$ fazendo a mudança de variável a seguir. Seja $x = -\xi$, onde $\xi > 0$, e seja $y = u(\xi)$. Temos, então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = -\frac{du}{d\xi}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\xi}\left(-\frac{du}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{dx} = \frac{d^2u}{d\xi^2}. \tag{22}$$

Assim, para $x < 0$, a Eq. (2) fica na forma

$$\xi^2\frac{d^2u}{d\xi^2} + \alpha\xi\frac{du}{d\xi} + \beta u = 0, \qquad \xi > 0. \tag{23}$$

Mas, exceto pelos nomes das variáveis, esta é exatamente igual à Eq. (2); das Eqs. (7), (12) e (19) temos

$$u(\xi) = \begin{cases} c_1\xi^{r_1} + c_2\xi^{r_2} \\ (c_1 + c_2\ln\xi)\xi^{r_1} \\ c_1\xi^{\lambda}\cos(\mu\ln\xi) + c_2\xi^{\lambda}\,\mathrm{sen}(\mu\ln\xi), \end{cases} \tag{24}$$

dependendo de os zeros de $F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta$ serem reais e diferentes, reais e iguais ou complexos conjugados. Para obter u em função de x, substituímos ξ por $-x$ nas Eqs. (24).

Podemos combinar os resultados para $x > 0$ e $x < 0$ lembrando que $|x| = x$ quando $x > 0$ e $|x| = -x$ quando $x < 0$. Logo, precisamos apenas substituir x por $|x|$ nas Eqs. (7), (12) e (19) para obter soluções reais válidas em qualquer intervalo que não contém a origem.

Portanto, a solução geral da equação de Euler (2)

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

em qualquer intervalo que não contém a origem é determinada pelas raízes r_1 e r_2 da equação

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$$

como segue. Se as raízes forem reais e diferentes, então

$$y = c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2}. \tag{25}$$

Se as raízes forem iguais, então

$$y = (c_1 + c_2\ln|x|)|x|^{r_1}. \tag{26}$$

Se as raízes forem complexas, então

$$y = |x|^{\lambda}\left[c_1\cos(\mu\ln|x|) + c_2\,\mathrm{sen}(\mu\ln|x|)\right], \tag{27}$$

onde $r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$.

As soluções de uma equação de Euler da forma

$$(x - x_0)^2y'' + \alpha(x - x_0)y' + \beta y = 0 \tag{28}$$

são semelhantes. Se procurarmos soluções da forma $y = (x - x_0)^r$, então a solução geral é dada por uma das Eqs. (25), (26) ou (27) com $(x - x_0)$ no lugar de x. De outro modo, podemos reduzir a Eq. (28) à forma da Eq. (2) fazendo uma mudança da variável independente $t = x - x_0$.

Pontos Singulares Regulares. Agora vamos voltar a considerar a equação geral

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

onde x_0 é um ponto singular. Isso significa que $P(x_0) = 0$ e que pelo menos um entre Q e R não se anula em x_0.

Infelizmente, se tentarmos usar os métodos das duas seções precedentes para resolver a Eq. (1) na vizinhança de um ponto singular x_0, descobriremos que esses métodos não funcionam. Isso se deve ao fato de que frequentemente as soluções da Eq. (1) não são analíticas em x_0 e, portanto, não podem ser representadas por uma série de Taylor em potências de $x - x_0$. Os Exemplos 1, 2 e 3 anteriores ilustram esse fato; em cada um desses exemplos a solução não tem uma expansão em séries de potências em torno do ponto singular $x = 0$. Portanto, para ter alguma chance de resolver a Eq. (1) na vizinhança de um ponto singular precisamos usar um tipo de expansão em série mais geral.

Como uma equação diferencial tem, em geral, poucos pontos singulares, poderíamos especular se eles não poderiam ser simplesmente ignorados, uma vez que já sabemos como construir soluções em torno de pontos ordinários. No entanto, isso não é possível porque os pontos singulares determinam as características principais das soluções de forma muito mais profunda do que poderíamos suspeitar à primeira vista. Em uma vizinhança de um ponto singular a solução torna-se, muitas vezes, muito grande em módulo ou experimenta mudanças rápidas em seu módulo. Assim, o comportamento de um sistema físico modelado por uma equação diferencial é, com frequência, mais interessante em uma vizinhança de um ponto singular. Muitas vezes, singularidades geométricas em um problema físico, como bicos ou arestas, geram pontos singulares na equação diferencial correspondente. Então, embora queiramos inicialmente evitar os poucos pontos onde uma equação diferencial é singular, é precisamente nesses pontos que é necessário estudar a equação com mais cuidado.

Como alternativa aos métodos analíticos poderia ser considerada a utilização de métodos numéricos, que serão discutidos no Capítulo 8. Entretanto, esses métodos não são adequados para o estudo de soluções na proximidade de um ponto singular. Dessa forma, mesmo adotando uma abordagem numérica é vantajoso combiná-la com os métodos analíticos deste capítulo para que se possa examinar o comportamento das soluções na proximidade de um ponto singular.

Sem qualquer informação adicional sobre o comportamento de Q/P e R/P na vizinhança do ponto singular é impossível descrever o comportamento das soluções da Eq. (1) perto de $x = x_0$. Pode acontecer de existirem duas soluções distintas da Eq. (1) que permanecem limitadas quando $x \to x_0$ (como no Exemplo 3); ou uma delas pode permanecer limitada enquanto a outra se torna ilimitada quando $x \to x_0$ (como no Exemplo 1); ou ambas podem tornar-se ilimitadas quando $x \to x_0$ (como no Exemplo 2). Se a Eq. (1) tem soluções que se tornam ilimitadas quando $x \to x_0$, muitas vezes é importante determinar como essas soluções se comportam quando $x \to x_0$. Por exemplo, $y \to \infty$ do mesmo modo que $(x - x_0)^{-1}$, ou como $(x - x_0)^{-1/2}$ ou de alguma outra maneira?

Nosso objetivo é estender o método já desenvolvido para resolver a Eq. (1) perto de um ponto ordinário de modo que ele possa também ser aplicado na vizinhança de um ponto singular x_0. Para fazer isso de modo razoavelmente simples é necessário nos restringirmos a casos onde as singularidades das funções Q/P e R/P em $x = x_0$ não são muito severas – ou seja, o que poderíamos chamar de "singularidades fracas". Neste ponto não é claro o que seria exatamente uma singularidade aceitável. No entanto, ao desenvolvermos o método de solução você verá que as condições apropriadas (veja também o Problema 21 na Seção 5.6) para distinguirmos "singularidades fracas" são

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{é finito} \tag{29}$$

e

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} \quad \text{é finito.} \tag{30}$$

Isso significa que a singularidade em Q/P não pode ser pior do que $(x - x_0)^{-1}$ e a singularidade em R/P não pode ser pior do que $(x - x_0)^{-2}$. Tal ponto é chamado de **ponto singular regular** da Eq. (1). Para equações com coeficientes mais gerais do que polinômios, x_0 é um ponto singular regular da Eq. (1) se for um ponto singular e se ambas as funções[11]

$$(x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{e} \quad (x - x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} \tag{31}$$

tiverem séries de Taylor convergentes em torno de x_0 – ou seja, se as funções na Eq. (31) forem analíticas em $x = x_0$. As Eqs. (29) e (30) implicam que isso será verdade quando P, Q e R forem polinômios. Qualquer ponto singular da Eq. (1) que não seja um ponto singular regular é chamado de **ponto singular irregular** da Eq. (1).

Note que as condições nas Eqs. (29) e (30) são satisfeitas pela equação de Euler (28). Logo, a singularidade em uma equação de Euler é um ponto singular regular. De fato, veremos que todas as equações da forma (1) se comportam de modo muito parecido com as equações de Euler perto de um ponto singular regular. Ou seja, soluções perto de um ponto singular regular podem incluir potências de x com expoentes negativos ou que não sejam inteiros, logaritmos ou senos ou cossenos com argumentos logarítmicos.

Nas seções a seguir discutiremos como resolver a Eq. (1) na vizinhança de um ponto singular regular. Uma discussão de soluções de equações diferenciais na vizinhança de pontos singulares irregulares é mais complicada e pode ser encontrada em livros mais avançados.

EXEMPLO 4

Determine os pontos singulares da equação de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \tag{32}$$

e determine se eles são regulares ou irregulares.

---

[11]As funções dadas na Eq. (31) podem não estar definidas em x_0; nesse caso, são atribuídos seus valores em x_0 como seus limites quando $x \to x_0$.

Neste caso $P(x) = 1 - x^2$, de modo que os pontos singulares são $x = 1$ e $x = -1$. Observe que quando dividimos a Eq. (32) por $1 - x^2$ os coeficientes de y' e de y ficam iguais a $-2x/(1 - x^2)$ e $\alpha(\alpha + 1)/(1 - x^2)$, respectivamente. Vamos considerar primeiro o ponto $x = 1$. Então, das Eqs. (29) e (30) calculamos

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{-2x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(-2x)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1}\frac{2x}{1+x} = 1$$

e

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\alpha(\alpha+1)}{(1-x)(1+x)}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(-\alpha)(\alpha+1)}{1+x} = 0.$$

Como esses limites são finitos, o ponto $x = 1$ é um ponto singular regular. Pode-se mostrar, de maneira semelhante, que $x = -1$ também é um ponto singular regular.

EXEMPLO 5

Determine os pontos singulares da equação diferencial

$$2x(x-2)^2y'' + 3xy' + (x-2)y = 0$$

e classifique-os como regulares ou irregulares.

Dividindo a equação diferencial por $2x(x - 2)^2$, temos

$$y'' + \frac{3}{2(x-2)^2}y' + \frac{1}{2x(x-2)}y = 0,$$

de modo que $p(x) = Q(x)/P(x) = 3/2(x - 2)^2$ e $q(x) = R(x)/P(x) = 1/2x(x - 2)$. Os pontos singulares são $x = 0$ e $x = 2$. Considere $x = 0$. Temos

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{3}{2(x-2)^2} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} x^2q(x) = \lim_{x\to 0} x^2\frac{1}{2x(x-2)} = 0.$$

Como esses limites são finitos, $x = 0$ é um ponto singular regular. Para $x = 2$, temos

$$\lim_{x\to 2}(x-2)p(x) = \lim_{x\to 2}(x-2)\frac{3}{2(x-2)^2} = \lim_{x\to 2}\frac{3}{2(x-2)},$$

de modo que o limite não existe; portanto, $x = 2$ é um ponto singular irregular.

EXEMPLO 6

Determine os pontos singulares de

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 y'' + (\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 0$$

e classifique-os como regulares ou irregulares.

O único ponto singular é $x = \pi/2$. Para estudá-lo, vamos considerar as funções

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)p(x) = \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{\cos x}{x-\pi/2}$$

e

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 q(x) = \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{R(x)}{P(x)} = \operatorname{sen} x.$$

A partir da série de Taylor para $\cos x$ em torno de $x = \pi/2$ encontramos

$$\frac{\cos x}{x-\pi/2} = -1 + \frac{(x-\pi/2)^2}{3!} - \frac{(x-\pi/2)^4}{5!} + \cdots,$$

que converge para todo x. Analogamente, $\operatorname{sen} x$ é analítica em $x = \pi/2$. Portanto, concluímos que $\pi/2$ é um ponto singular regular para esta equação.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 12, determine a solução geral da equação diferencial dada, válida em qualquer intervalo que não inclui o ponto singular.

1. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$
2. $(x+1)^2y'' + 3(x+1)y' + 0{,}75y = 0$
3. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
4. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$
5. $x^2y'' - xy' + y = 0$
6. $(x-1)^2y'' + 8(x-1)y' + 12y = 0$
7. $x^2y'' + 6xy' - y = 0$
8. $2x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$
9. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$
10. $(x-2)^2y'' + 5(x-2)y' + 8y = 0$
11. $x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$
12. $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$

Em cada um dos Problemas de 13 a 16, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Faça o gráfico da solução e descreva como ela se comporta quando $x \to 0$.

13. $2x^2y'' + xy' - 3y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4$
14. $4x^2y'' + 8xy' + 17y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -3$
15. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 3$
16. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1$

Em cada um dos Problemas de 17 a 34, encontre todos os pontos singulares da equação dada e determine se cada um deles é regular ou irregular.

17. $xy'' + (1-x)y' + xy = 0$
18. $x^2(1-x)^2y'' + 2xy' + 4y = 0$
19. $x^2(1-x)y'' + (x-2)y' - 3xy = 0$
20. $x^2(1-x^2)y'' + (2/x)y' + 4y = 0$
21. $(1-x^2)^2y'' + x(1-x)y' + (1+x)y = 0$
22. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, equação de Bessel
23. $(x+3)y'' - 2xy' + (1-x^2)y = 0$
24. $x(1-x^2)^3y'' + (1-x^2)^2y' + 2(1+x)y = 0$
25. $(x+2)^2(x-1)y'' + 3(x-1)y' - 2(x+2)y = 0$
26. $x(3-x)y'' + (x+1)y' - 2y = 0$
27. $(x^2+x-2)y'' + (x+1)y' + 2y = 0$
28. $xy'' + e^xy' + (3\cos x)y = 0$
29. $y'' + (\ln|x|)y' + 3xy = 0$
30. $x^2y'' + 2(e^x - 1)y' + (e^{-x}\cos x)y = 0$
31. $x^2y'' - 3(\operatorname{sen} x)y' + (1+x^2)y = 0$
32. $xy'' + y' + (\cot x)y = 0$
33. $(\operatorname{sen} x)y'' + xy' + 4y = 0$
34. $(x \operatorname{sen} x)y'' + 3y' + xy = 0$

35. Encontre todos os valores de α para os quais todas as soluções de $x^2y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$ tendem a zero quando $x \to 0$.
36. Encontre todos os valores de β para os quais todas as soluções de $x^2y'' + \beta y = 0$ tendem a zero quando $x \to 0$.
37. Encontre γ de modo que a solução do problema de valor inicial $x^2y'' - 2y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \gamma$ permaneça limitada quando $x \to 0$.
38. Encontre todos os valores de α para os quais todas as soluções de $x^2y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$ tendem a zero quando $x \to \infty$.
39. Considere a equação de Euler $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$. Encontre condições sobre α e β para que:
    (a) Todas as soluções tendam a zero quando $x \to 0$.
    (b) Todas as soluções permaneçam limitadas quando $x \to 0$.
    (c) Todas as soluções tendam a zero quando $x \to \infty$.
    (d) Todas as soluções permaneçam limitadas quando $x \to \infty$.
    (e) Todas as soluções permaneçam limitadas quando $x \to 0$ e quando $x \to \infty$.
40. Usando o método de redução de ordem, mostre que se r_1 é uma raiz repetida de

$$r(r-1) + \alpha r + \beta = 0,$$

então x^{r_1} e $x^{r_1}\ln x$ são soluções de $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ para $x > 0$.

Em cada um dos Problemas 41 e 42, mostre que o ponto $x = 0$ é um ponto singular regular. Tente, em cada problema, encontrar soluções da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Mostre que (exceto por múltiplos constantes) existe apenas uma solução não nula dessa forma para o Problema 41 e que não existem soluções não nulas dessa forma para o Problema 42. Assim, em nenhum dos casos a solução geral pode ser encontrada desse modo. Isso é típico de equações com pontos singulares.

41. $2xy'' + 3y' + xy = 0$
42. $2x^2y'' + 3xy' - (1 + x)y = 0$
43. **Singularidades no Infinito.** As definições de ponto ordinário e ponto singular regular dadas nas seções precedentes só se aplicam se o ponto x_0 é finito. Em trabalhos mais avançados de equações diferenciais é necessário, muitas vezes, discutir o ponto no infinito. Isso é feito através da mudança de variável $\xi = 1/x$ e estudando-se a equação resultante em $\xi = 0$. Mostre que, para a equação diferencial

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

o ponto no infinito é um ponto ordinário se

$$\frac{1}{P(1/\xi)}\left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2}\right] \quad \text{e} \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^4 P(1/\xi)}$$

têm expansões em série de Taylor em torno de $\xi = 0$. Mostre, também, que o ponto no infinito é um ponto singular regular se pelo menos uma dessas funções não tem expansão em série de Taylor, mas ambas as funções

$$\frac{\xi}{P(1/\xi)}\left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2}\right] \quad \text{e} \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^2 P(1/\xi)}$$

têm tais expansões.

Em cada um dos Problemas de 44 a 49, use os resultados do Problema 43 para determinar se o ponto no infinito é um ponto ordinário, singular regular ou singular irregular da equação diferencial dada.

44. $y'' + y = 0$
45. $x^2y'' + xy' - 4y = 0$
46. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$, Equação de Legendre
47. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, Equação de Bessel
48. $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$, Equação de Hermite
49. $y'' - xy = 0$, Equação de Airy

5.5 Soluções em Série Perto de um Ponto Singular Regular, Parte I

Vamos considerar, agora, o problema de resolver a equação geral linear de segunda ordem

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{1}$$

em uma vizinhança de um ponto singular regular $x = x_0$. Vamos supor, por conveniência, que $x_0 = 0$. Se $x_0 \neq 0$, podemos transformar a equação em uma equação para a qual o ponto singular regular está na origem igualando $x - x_0$ a t.

O fato de que $x = 0$ é um ponto singular regular da Eq. (1) significa que $xQ(x)/P(x) = xp(x)$ e $x^2R(x)/P(x) = x^2q(x)$ têm limites finitos quando $x \to 0$ e são analíticas em $x = 0$. Logo, têm expansão em séries de potências convergentes da forma

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \tag{2}$$

em algum intervalo $|x| < \rho$ em torno da origem, onde $\rho > 0$. Para fazer com que as funções $xp(x)$ e $x^2q(x)$ apareçam na Eq. (1), é conveniente dividi-la por $P(x)$ e depois multiplicá-la por x^2, obtendo

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0, \tag{3}$$

ou

$$\begin{aligned} x^2y'' &+ x(p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots)y' \\ &+ (q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n + \cdots)y = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Se todos os coeficientes p_n e q_n forem nulos, com a possível exceção de

$$p_0 = \lim_{x \to 0} \frac{xQ(x)}{P(x)} \quad \text{e} \quad q_0 = \lim_{x \to 0} \frac{x^2R(x)}{P(x)}, \tag{5}$$

então a Eq. (4) se reduz à equação de Euler

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0, \tag{6}$$

que foi discutida na seção precedente. É claro que, em geral, alguns dos p_n e q_n, $n \geq 1$ não são nulos. Entretanto, o caráter essencial das soluções da Eq. (4) é idêntico ao das soluções da equação de Euler (6). A presença dos termos $p_1x + \ldots + p_nx^n + \ldots$ e $q_1x + \ldots + q_nx^n + \ldots$ só complica os cálculos.

Vamos restringir nossa discussão principalmente ao intervalo $x > 0$. O intervalo $x < 0$ pode ser tratado, como para a equação de Euler, pela mudança de variável $x = -\xi$ e posterior resolução da equação resultante para $\xi > 0$.

Como os coeficientes da Eq. (4) são "coeficientes de Euler" multiplicados por série de potências, é natural procurar soluções da forma "soluções de Euler" multiplicadas por série de potências. Supomos, então, que

$$y = x^r(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n}, \tag{7}$$

onde $a_0 \neq 0$. Em outras palavras, r é o expoente do primeiro termo da série e a_0 é seu coeficiente. Como parte da solução, temos que determinar:

1. Os valores de r para os quais a Eq. (1) tem uma solução da forma (7).
2. A relação de recorrência para os coeficientes a_n.
3. O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$.

A teoria geral é devida a Frobenius,[12] e é razoavelmente complicada. Em vez de tentar apresentar essa teoria vamos supor, simplesmente, nesta e nas duas próximas seções, que existe uma solução da forma especificada. Em particular, vamos supor que qualquer série de potências em uma expressão para a solução tem raio de convergência não nulo e vamos nos concentrar em mostrar como determinar os coeficientes em tal série. Para ilustrar o método de Frobenius, vamos considerar primeiro um exemplo.

EXEMPLO 1

Resolva a equação diferencial

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = 0. \tag{8}$$

É fácil mostrar que $x = 0$ é um ponto singular regular da Eq. (8). Além disso, $xp(x) = -1/2$ e $x^2q(x) = (1 + x)/2$. Assim, $p_0 = -1/2$, $q_0 = 1/2$, $q_1 = 1/2$ e todos os outros coeficientes p_n e q_n são nulos. Então, da Eq. (6), a equação de Euler correspondente à Eq. (8) é

$$2x^2y'' - xy' + y = 0. \tag{9}$$

Para resolver a Eq. (8), vamos supor que existe uma solução da forma (7). Logo, y' e y'' são dados por

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r + n)x^{r+n-1} \tag{10}$$

e

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r + n)(r + n - 1)x^{r+n-2}. \tag{11}$$

Substituindo as expressões para y, y' e y'' na Eq. (8), obtemos

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(r + n)(r + n - 1)x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r + n)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n+1}. \tag{12}$$

O último termo na Eq. (12) pode ser escrito como $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{r+n}$, de modo que, combinando os termos na Eq. (12), obtemos

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = a_0[2r(r - 1) - r + 1]x^r$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{[2(r + n)(r + n - 1) - (r + n) + 1]a_n + a_{n-1}\right\} x^{r+n} = 0. \tag{13}$$

[12]Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) foi (como Fuchs) estudante e depois professor na University of Berlim. Mostrou como construir soluções em série em torno de pontos singulares regulares em 1874. Seu trabalho mais importante, no entanto, foi em álgebra, onde foi um dos expoentes entre os primeiros a desenvolver a teoria dos grupos.

Como a Eq. (13) tem que ser satisfeita para todo x, o coeficiente de cada potência de x na Eq. (13) tem que ser zero. Como $a_0 \neq 0$, obtemos do coeficiente de x^r

$$2r(r-1) - r + 1 = 2r^2 - 3r + 1 = (r-1)(2r-1) = 0. \tag{14}$$

A Eq. (14) é chamada de **equação indicial** para a Eq. (8). Note que ela é exatamente a equação polinomial que obteríamos para a equação de Euler (9) associada à Eq. (8). As raízes da equação indicial são

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = 1/2. \tag{15}$$

Esses valores de r são chamados de **expoentes na singularidade** para o ponto singular regular $x = 0$. Eles determinam o comportamento qualitativo da solução (7) na vizinhança do ponto singular.

Vamos voltar, agora, para a Eq. (13) e igualar o coeficiente de x^{r+n} a zero. Isso nos fornece a relação

$$[2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1]\,a_n + a_{n-1} = 0, \qquad n \geq 1, \tag{16}$$

ou

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(r+n)^2 - 3(r+n) + 1}$$

$$= -\frac{a_{n-1}}{[(r+n)-1][2(r+n)-1]}, \qquad n \geq 1. \tag{17}$$

Para cada raiz r_1 e r_2 da equação indicial, usamos a relação de recorrência (17) para determinar um conjunto de coeficientes $a_1, a_2, \ldots$ Para $r = r_1 = 1$, a Eq. (17) fica

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(2n+1)n}, \qquad n \geq 1.$$

Logo,

$$a_1 = -\frac{a_0}{3 \cdot 1},$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{5 \cdot 2} = \frac{a_0}{(3 \cdot 5)(1 \cdot 2)},$$

e

$$a_3 = -\frac{a_2}{7 \cdot 3} = -\frac{a_0}{(3 \cdot 5 \cdot 7)(1 \cdot 2 \cdot 3)}.$$

Em geral, temos

$$a_n = \frac{(-1)^n}{[3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)]n!}a_0, \qquad n \geq 4. \tag{18}$$

Multiplicando o numerador e o denominador da expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (18) por $2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n = 2^n n!$, podemos reescrever a_n como

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!}a_0, \qquad n \geq 1.$$

Portanto, se omitirmos a constante multiplicativa a_0, uma solução da Eq. (8) é

$$y_1(x) = x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!}x^n\right], \qquad x > 0. \tag{19}$$

Para determinar o raio de convergência da série na Eq. (19), usamos o teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2|x|}{(2n+2)(2n+3)} = 0$$

para todo x. Logo, a série converge para todo x.

Vamos proceder de modo análogo para a segunda raiz $r = r_2 = \frac{1}{2}$. Da Eq. (17), temos

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n\left(n - \frac{1}{2}\right)} = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}, \qquad n \geq 1.$$

Portanto,

$$a_1 = -\frac{a_0}{1 \cdot 1},$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3} = \frac{a_0}{(1 \cdot 2)(1 \cdot 3)},$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{3 \cdot 5} = -\frac{a_0}{(1 \cdot 2 \cdot 3)(1 \cdot 3 \cdot 5)},$$

e, em geral,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n![1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)]} a_0, \qquad n \geq 4. \tag{20}$$

Como no caso da primeira raiz r_1, multiplicamos o numerador e o denominador por $2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n = 2^n n!$. Temos, então,

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} a_0, \qquad n \geq 1.$$

Omitindo novamente a constante multiplicativa a_0, obtemos a segunda solução

$$y_2(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} x^n\right], \qquad x > 0. \tag{21}$$

Como anteriormente, podemos mostrar que a série na Eq. (21) converge para todo x. Como y_1 e y_2 se comportam como x e $x^{1/2}$, respectivamente, perto de $x = 0$, estas funções formam um conjunto fundamental de soluções. Logo, a solução geral da Eq. (8) é

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad x > 0.$$

O exemplo precedente ilustra o fato de que se $x = 0$ for um ponto singular regular, então algumas vezes existirão duas soluções da forma (7) em uma vizinhança desse ponto. Analogamente, se existir um ponto singular regular em $x = x_0$, poderão existir duas soluções da forma

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{22}$$

que são válidas perto de $x = x_0$. No entanto, assim como uma equação de Euler pode não ter duas soluções da forma $y = x^r$, uma equação mais geral com um ponto singular regular pode não ter duas soluções da forma (7) ou (22). Em particular, vamos mostrar na próxima seção que se as raízes r_1 e r_2 da equação indicial forem iguais ou diferirem por um inteiro, então a segunda solução terá normalmente uma estrutura mais complicada. Em todos os casos, no entanto, é possível encontrar pelo menos uma solução da forma (7) ou (22); se r_1 e r_2 diferirem por um inteiro, essa solução corresponderá ao maior valor de r. Se existir apenas uma dessas soluções, então a segunda solução envolverá um termo logarítmico, como na equação de Euler quando as raízes da equação característica são iguais. O método de redução de ordem ou algum outro procedimento pode ser usado para se determinar a segunda solução nesse caso. Isso será discutido nas Seções 5.6 e 5.7.

Se as raízes da equação indicial forem complexas, então elas não poderão ser iguais nem diferir por um inteiro, de modo que sempre existirão duas soluções da forma (7) ou (22). É claro que essas soluções são funções complexas de x. No entanto, como para a equação de Euler, é possível obter soluções reais tomando-se as partes real e imaginária das soluções complexas.

Finalmente, vamos mencionar uma questão prática. Se P, Q e R forem polinômios, será bem melhor, muitas vezes, trabalhar diretamente com a Eq. (1) do que com a Eq. (3). Isso evita a necessidade de expandir $xQ(x)/P(x)$ e $x^2R(x)/P(x)$ em séries de potências. Por exemplo, é mais conveniente considerar a equação

$$x(1+x)y'' + 2y' + xy = 0$$

do que escrevê-la na forma

$$x^2 y'' + \frac{2x}{1+x} y' + \frac{x^2}{1+x} y = 0,$$

o que implicaria expandir $2x/(1+x)$ e $x^2/(1+x)$ em séries de potências.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 10:

(a) Mostre que a equação diferencial dada tem um ponto singular regular em $x = 0$.

(b) Determine a equação indicial, a relação de recorrência e as raízes da equação indicial.

(c) Encontre a solução em série ($x > 0$) correspondente à maior raiz.

(d) Se as raízes forem diferentes e não diferirem por um inteiro, encontre, também, a solução em série correspondente à menor raiz.

1. $2xy'' + y' + xy = 0$
2. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$
3. $xy'' + y = 0$
4. $xy'' + y' - y = 0$
5. $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$
6. $x^2y'' + xy' + (x-2)y = 0$
7. $xy'' + (1-x)y' - y = 0$
8. $2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$
9. $x^2y'' - x(x+3)y' + (x+3)y = 0$
10. $x^2y'' + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)y = 0$
11. A equação de Legendre de ordem α é

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0.$$

A solução desta equação perto do ponto ordinário $x = 0$ foi discutida nos Problemas 22 e 23 da Seção 5.3. O Exemplo 4 da Seção 5.4 mostrou que $x = \pm 1$ são pontos singulares regulares.

(a) Determine a equação indicial e suas raízes para o ponto $x = 1$.

(b) Encontre uma solução em série de potências de $x - 1$ para $x - 1 > 0$.

Sugestão: escreva $1 + x = 2 + (x - 1)$ e $x = 1 + (x - 1)$. Outra maneira é fazer a mudança de variável $x - 1 = t$ e determinar uma solução em série de potências de t.

12. A equação de Chebyshev é

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0,$$

onde α é constante; veja o Problema 10 da Seção 5.3.

(a) Mostre que $x = 1$ e $x = -1$ são pontos singulares regulares e encontre os expoentes em cada uma dessas singularidades.

(b) Encontre duas soluções em torno de $x = 1$.

13. A equação diferencial de Laguerre[13] é

$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

(b) Determine a equação indicial, suas raízes e a relação de recorrência.

(c) Encontre uma solução ($x > 0$). Mostre que se $\lambda = m$ for um inteiro positivo, essa solução se reduzirá a um polinômio. Quando normalizado apropriadamente, esse polinômio é conhecido como o polinômio de Laguerre, $L_m(x)$.

14. A equação de Bessel de ordem zero é

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

(b) Mostre que as raízes da equação indicial são $r_1 = r_2 = 0$.

(c) Mostre que uma solução para $x > 0$ é

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

(d) Mostre que a série para $J_0(x)$ converge para todo x. A função J_0 é conhecida como a função de Bessel de primeira espécie de ordem zero.

15. Com referência ao Problema 14, use o método de redução de ordem para mostrar que a segunda solução da equação de Bessel de ordem zero contém um termo logarítmico.

Sugestão: se $y_2(x) = J_0(x)v(x)$, então

$$y_2(x) = J_0(x) \int \frac{dx}{x[J_0(x)]^2}.$$

Encontre o primeiro termo na expansão em série de $1/x[J_0(x)]^2$.

16. A equação de Bessel de ordem um é

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

(b) Mostre que as raízes da equação indicial são $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$.

---

[13]Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886), um geômetra e analista francês, estudou os polinômios que levam seu nome em torno de 1879.

(c) Mostre que uma solução para $x > 0$ é

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)!\,n!\,2^{2n}}.$$

(d) Mostre que a série converge para $J_1(x)$ para todo x. A função J_1 é conhecida como a função de Bessel de primeira espécie de ordem um.

(e) Mostre que é impossível determinar uma segunda solução da forma

$$x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad x > 0.$$

5.6 Soluções em Série Perto de um Ponto Singular Regular, Parte II

Vamos considerar, agora, o problema geral de determinar uma solução da equação

$$L[y] = x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0, \tag{1}$$

onde

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \tag{2}$$

e ambas as séries convergem em um intervalo $|x| < \rho$ para algum $\rho > 0$. O ponto $x = 0$ é um ponto singular regular, e a equação de Euler correspondente é

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0. \tag{3}$$

Procuramos uma solução da Eq. (1) para $x > 0$ e supomos que ela tem a forma

$$y = \phi(r,x) = x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \tag{4}$$

onde $a_0 \neq 0$, e escrevemos $y = \phi(r,x)$ para enfatizar que ϕ depende tanto de r quanto de x. Segue que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2}. \tag{5}$$

Então, substituindo as Eqs. (2), (4) e (5) na Eq. (1), obtemos

$$\begin{aligned}
&a_0r(r-1)x^r + a_1(r+1)rx^{r+1} + \cdots + a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \cdots\\
&\quad + (p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots)\\
&\qquad \times [a_0rx^r + a_1(r+1)x^{r+1} + \cdots + a_n(r+n)x^{r+n} + \cdots]\\
&\quad + (q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n + \cdots)\\
&\qquad \times (a_0x^r + a_1x^{r+1} + \cdots + a_nx^{r+n} + \cdots) = 0.
\end{aligned}$$

Multiplicando as séries infinitas e depois juntando os termos semelhantes, temos

$$\begin{aligned}
&a_0F(r)x^r + [a_1F(r+1) + a_0(p_1r + q_1)]x^{r+1}\\
&\quad + \{a_2F(r+2) + a_0(p_2r + q_2) + a_1[p_1(r+1) + q_1]\}x^{r+2}\\
&\quad + \cdots + \{a_nF(r+n) + a_0(p_nr + q_n) + a_1[p_{n-1}(r+1) + q_{n-1}]\\
&\quad + \cdots + a_{n-1}[p_1(r+n-1) + q_1]\}x^{r+n} + \cdots = 0,
\end{aligned}$$

ou, em forma mais compacta,

$$L[\phi](r,x) = a_0F(r)x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1}a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]\right\}x^{r+n} = 0, \tag{6}$$

onde

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0. \tag{7}$$

Para que a Eq. (6) seja satisfeita para todo $x > 0$, o coeficiente de cada potência de x tem que ser igual a zero.

Como $a_0 \neq 0$, o termo envolvendo x^r leva à equação $F(r) = 0$. Esta equação é chamada de **equação indicial**; note que é exatamente a equação que obteríamos procurando por soluções da forma $y = x^r$ da equação de Euler (3). Vamos denotar as raízes da equação indicial por r_1 e r_2, com $r_1 \geq r_2$ se as raízes forem reais. Se as raízes forem complexas, não importa sua designação. Só podemos esperar encontrar soluções da Eq. (1) da forma (4) para esses valores de r. As raízes r_1 e r_2 são chamadas de **expoentes na singularidade**; elas determinam a natureza qualitativa das soluções em uma vizinhança do ponto singular.

Igualando a zero o coeficiente de x^{r+n} na Eq. (6), obtemos a **relação de recorrência**

$$F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0, \qquad n \geq 1. \tag{8}$$

A Eq. (8) mostra que, em geral, a_n depende do valor de r e de todos os coeficientes anteriores $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Ela mostra, também, que podemos calcular sucessivamente os valores de $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ em função de a_0 e dos coeficientes das séries para $xp(x)$ e para $x^2q(x)$ desde que $F(r+1), F(r+2), \ldots, F(r+n), \ldots$ não sejam nulos. Os únicos valores de r para os quais $F(r) = 0$ são $r = r_1$ e $r = r_2$; como $r_1 \geq r_2$, segue que $r_1 + n$ não é igual a r_1 nem a r_2 se $n \geq 1$. Em consequência, $F(r_1 + n) \neq 0$ para $n \geq 1$. Logo, sempre podemos determinar uma solução da Eq. (1) da forma (4), a saber,

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right], \qquad x > 0. \tag{9}$$

Introduzimos a notação $a_n(r_1)$ para indicar que a_n foi determinado da Eq. (8) com $r = r_1$. Para especificar a constante arbitrária na solução, escolhemos a_0 como 1.

Se r_2 não for igual a r_1 e se $r_1 - r_2$ não for um inteiro positivo, então $r_2 + n$ será diferente de r_1 para todo valor de $n \geq 1$; portanto, $F(r_2 + n) \neq 0$ e sempre podemos obter uma segunda solução

$$y_2(x) = x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right], \qquad x > 0. \tag{10}$$

Da mesma forma que para as soluções em série em torno de um ponto ordinário, discutidas na Seção 5.3, as séries nas Eqs. (9) e (10) convergem pelo menos no intervalo $|x| < \rho$ onde ambas as séries para $xp(x)$ e $x^2q(x)$ convergem. Dentro de seus raios de convergência, as séries de potências $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n$ e $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n$ definem funções analíticas em $x = 0$. Assim, o comportamento singular das funções y_1 e y_2, se existir, será devido aos fatores x^{r_1} e x^{r_2} que multiplicam essas duas funções analíticas. A seguir, para obter soluções reais para $x < 0$ podemos fazer a substituição $x = -\xi$ com $\xi > 0$. Como poderíamos esperar da nossa discussão sobre a equação de Euler, basta substituir x^{r_1} na Eq. (9) e x^{r_2} na Eq. (10) por $|x|^{r_1}$ e $|x|^{r_2}$, respectivamente. Finalmente, note que se r_1 e r_2 forem números complexos, então serão necessariamente complexos conjugados e $r_2 \neq r_1 + N$ para qualquer inteiro positivo N. Assim, nesse caso sempre podemos encontrar duas soluções em série da forma (4); no entanto, elas são funções complexas de x. Soluções reais podem ser obtidas tomando-se as partes real e imaginária das soluções complexas. Os casos excepcionais em que $r_1 = r_2$ ou $r_1 - r_2 = N$, onde N é um inteiro positivo, necessitam de uma discussão maior e serão considerados mais tarde, nesta seção.

É importante compreender que r_1 e r_2, os expoentes no ponto singular, são fáceis de encontrar e que eles determinam o comportamento qualitativo das soluções. Para calcular r_1 e r_2, basta resolver a equação indicial de segundo grau

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0, \tag{11}$$

cujos coeficientes são dados por

$$p_0 = \lim_{x \to 0} xp(x), \qquad q_0 = \lim_{x \to 0} x^2q(x). \tag{12}$$

Note que esses são exatamente os limites que precisam ser calculados para se classificar o ponto singular como ponto singular regular; assim, em geral eles já foram determinados em um estágio anterior da investigação.

Além disso, se $x = 0$ é um ponto singular regular da equação

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{13}$$

onde as funções P, Q e R são polinômios, então $xp(x) = xQ(x)/P(x)$ e $x^2q(x) = x^2R(x)/P(x)$. Então,

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)}, \qquad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)}. \tag{14}$$

Finalmente, os raios de convergência das séries nas Eqs. (9) e (10) são, pelo menos, iguais à distância da origem ao zero mais próximo de $P(x)$ diferente do próprio $x = 0$.

EXEMPLO 1

Discuta a natureza das soluções da equação

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

perto dos pontos singulares.

Esta equação é da forma (13) com $P(x) = 2x(1 + x)$, $Q(x) = 3 + x$ e $R(x) = -x$. Os pontos $x = 0$ e $x = -1$ são os únicos pontos singulares. O ponto $x = 0$ é um ponto singular regular, já que

$$\lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x\frac{3+x}{2x(1+x)} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x^2\frac{-x}{2x(1+x)} = 0.$$

Além disso, da Eq. (14), $p_0 = \frac{3}{2}$ e $q_0 = 0$. Logo, a equação indicial é $r(r - 1) + \frac{3}{2}r = 0$ e as raízes são $r_1 = 0$, $r_2 = -\frac{1}{2}$. Como essas raízes não são iguais nem diferem por um inteiro, existem duas soluções da forma

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)x^n \quad \text{e} \quad y_2(x) = |x|^{-1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(-\tfrac{1}{2}\right)x^n\right]$$

para $0 < |x| < \rho$. Uma cota inferior para o raio de convergência de cada série é 1, a distância de $x = 0$ a $x = -1$, o outro zero de $P(x)$. Note que a solução $y_1(x)$ permanece limitada quando $x \to 0$, é, de fato, analítica aí, e que a segunda solução y_2 torna-se ilimitada quando $x \to 0$.

O ponto $x = -1$ também é um ponto singular regular, pois

$$\lim_{x\to -1} (x+1)\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(3+x)}{2x(1+x)} = -1,$$

$$\lim_{x\to -1} (x+1)^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2(-x)}{2x(1+x)} = 0.$$

Nesse caso, $p_0 = -1$, $q_0 = 0$, de modo que a equação indicial é $r(r - 1) - r = 0$. As raízes da equação indicial são $r_1 = 2$ e $r_2 = 0$. Correspondendo à maior raiz existe uma solução da forma

$$y_1(x) = (x+1)^2\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2)(x+1)^n\right].$$

A série converge pelo menos para $|x + 1| < 1$ e y_1 é uma função analítica aí. Como as duas raízes diferem por um inteiro positivo, pode existir ou não uma segunda solução da forma

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)(x+1)^n.$$

Não podemos dizer mais nada sem uma análise mais profunda.

Note que não foram necessários cálculos complicados para se descobrir informações sobre as soluções apresentadas neste exemplo. Só precisamos calcular alguns limites e resolver duas equações de segundo grau.

Vamos considerar, agora, os casos nos quais a equação indicial tem raízes iguais ou que diferem por um inteiro positivo, $r_1 - r_2 = N$. Como mostramos anteriormente, sempre existe uma solução da forma (9) correspondente à maior raiz r_1 da equação indicial. Por analogia com a equação de Euler, poderíamos esperar que, se $r_1 = r_2$, então a segunda solução conteria um termo logarítmico. Isso também poderá ser verdade se as raízes diferirem por um inteiro positivo.

Raízes Iguais. O método para encontrar a segunda solução é essencialmente o mesmo que usamos para encontrar a segunda solução da equação de Euler (veja a Seção 5.4) quando as raízes da equação indicial eram iguais. Vamos considerar r como uma variável contínua e determinar a_n em função de r resolvendo a relação de recorrência (8). Para essa escolha de $a_n(r)$ para $n \geq 1$, a Eq. (6) se reduz a

$$L[\phi](r,x) = a_0F(r)x^r = a_0(r-r_1)^2x^r, \tag{15}$$

já que r_1 é uma raiz repetida de $F(r)$. Fazendo $r = r_1$ na Eq. (15), encontramos que $L[\phi](r_1, x) = 0$; logo, como já sabíamos, $y_1(x)$ dado pela Eq. (9) é uma solução da Eq. (1). Mas, mais importante, segue também da Eq. (15), da mesma forma que para a equação de Euler, que

$$\begin{aligned} L\left[\frac{\partial\phi}{\partial r}\right](r_1,x) &= a_0\frac{\partial}{\partial r}[x^r(r-r_1)^2]\Big|_{r=r_1} \\ &= a_0[(r-r_1)^2x^r\ln x + 2(r-r_1)x^r]\Big|_{r=r_1} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Portanto, uma segunda solução da Eq. (1) é

$$\begin{aligned} y_2(x) = \frac{\partial\phi(r,x)}{\partial r}\Big|_{r=r_1} &= \frac{\partial}{\partial r}\left\{x^r\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n(r)x^n\right]\right\}\Big|_{r=r_1} \\ &= (x^{r_1}\ln x)\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right] + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_1)x^n \\ &= y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_1)x^n, \qquad x>0, \end{aligned} \tag{17}$$

onde $a_n'(r_1)$ denota a derivada da_n/dr calculada em $r = r_1$.

Pode ser difícil determinar $a_n(r)$ como função de r a partir da relação de recorrência (8) e depois diferenciar a expressão resultante em relação a r. Outro maneira é simplesmente supor que y tem a *forma* da Eq. (17). Ou seja, suponha que

$$y = y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n, \qquad x>0, \tag{18}$$

onde $y_1(x)$ já foi encontrado. Os coeficientes b_n são calculados, como de hábito, substituindo na equação diferencial, juntando os termos correspondentes e igualando os coeficientes de cada potência de x a zero. Uma terceira possibilidade é usar o método de redução de ordem para encontrar $y_2(x)$ uma vez conhecido $y_1(x)$.

Raízes r_1 e r_2 Diferindo por um Inteiro N. Nesse caso a dedução da segunda solução é bem mais complicada, e não será dada aqui. A forma dessa solução é dada pela Eq. (24) no próximo teorema. Os coeficientes $c_n(r_2)$ na Eq. (24) são dados por

$$c_n(r_2) = \frac{d}{dr}[(r-r_2)a_n(r)]\Big|_{r=r_2}, \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{19}$$

onde $a_n(r)$ é determinado da relação de recorrência (8) com $a_0 = 1$. Além disso, o coeficiente de a na Eq. (24) é

$$a = \lim_{r\to r_2}(r-r_2)a_N(r). \tag{20}$$

Se $a_N(r_2)$ for finito, então $a = 0$ e y_2 não tem termo logarítmico. Uma dedução completa das fórmulas (19) e (20) pode ser encontrada no livro de Coddington (Capítulo 4).

Na prática, a melhor maneira de determinar se $a = 0$ na segunda solução é tentar simplesmente calcular os a_n correspondentes à raiz r_2 e ver se é possível determinar $a_N(r_2)$. Se for, não há problema. Se não, precisamos usar a forma (24) com $a \neq 0$.

Quando $r_1 - r_2 = N$ existem, novamente, três maneiras de se encontrar uma segunda solução. Primeiro, podemos calcular a e $c_n(r_2)$ diretamente, substituindo y pela expressão (24) na Eq. (1). Segundo, podemos calcular $c_n(r_2)$ e a da Eq. (24) usando as fórmulas (19) e (20). Se esse for o procedimento planejado, ao calcular a solução correspondente a $r = r_1$ não se esqueça de obter a fórmula geral para $a_n(r)$, em vez de encontrar apenas $a_n(r_1)$. A terceira maneira é usar o método de redução de ordem.

Teorema 5.6.1 Considere a equação diferencial (1),

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0,$$

onde $x = 0$ é um ponto singular regular. Então, $xp(x)$ e $x^2q(x)$ são analíticas em $x = 0$ com expansão em séries de potências convergentes

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

para $|x| < \rho$, onde $\rho > 0$ é o mínimo entre os raios de convergência das séries de potências para $xp(x)$ e $x^2q(x)$. Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação indicial

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0,$$

com $r_1 \geq r_2$, se r_1 e r_2 forem reais. Então, em um dos intervalos $-\rho < x < 0$ ou $0 < x < \rho$, existe uma solução da forma

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right], \tag{21}$$

onde os $a_n(r_1)$ são dados pela relação de recorrência (8) com $a_0 = 1$ e $r = r_1$.

Se $r_1 - r_2$ não é zero nem um inteiro positivo, então em um dos intervalos $-\rho < x < 0$ ou $0 < x < \rho$ existe uma segunda solução da forma

$$y_2(x) = |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right]. \tag{22}$$

Os $a_n(r_2)$ também são determinados pela relação de recorrência (8), com $a_0 = 1$ e $r = r_2$. As séries de potências nas Eqs. (21) e (22) convergem pelo menos para $|x| < \rho$.

Se $r_1 = r_2$, então a segunda solução é

$$y_2(x) = y_1(x)\ln|x| + |x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)x^n. \tag{23}$$

Se $r_1 - r_2 = N$, um inteiro positivo, então

$$y_2(x) = ay_1(x)\ln|x| + |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)x^n\right]. \tag{24}$$

Os coeficientes $a_n(r_1)$, $b_n(r_1)$, $c_n(r_2)$ e a constante a podem ser determinados substituindo-se a forma da solução em série y na Eq. (1). A constante a pode ser nula, caso em que a solução (24) não tem termo logarítmico. Cada uma das séries nas Eqs. (23) e (24) converge pelo menos para $|x| < \rho$ e define uma função analítica em alguma vizinhança de $x = 0$.

Em todos os três casos as duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial dada.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 12:

(a) Encontre todos os pontos singulares regulares da equação diferencial dada.

(b) Determine a equação indicial e os expoentes na singularidade para cada ponto singular regular.

1. $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$
2. $x^2y'' - x(2+x)y' + (2+x^2)y = 0$
3. $x(x-1)y'' + 6x^2y' + 3y = 0$
4. $y'' + 4xy' + 6y = 0$
5. $x^2y'' + 3(\operatorname{sen} x)y' - 2y = 0$
6. $2x(x+2)y'' + y' - xy = 0$
7. $x^2y'' + \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x)y' + y = 0$
8. $(x+1)^2y'' + 3(x^2-1)y' + 3y = 0$
9. $x^2(1-x)y'' - (1+x)y' + 2xy = 0$
10. $(x-2)^2(x+2)y'' + 2xy' + 3(x-2)y = 0$
11. $(4-x^2)y'' + 2xy' + 3y = 0$
12. $x(x+3)^2y'' - 2(x+3)y' - xy = 0$

Em cada um dos Problemas de 13 a 17:

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação diferencial dada.

(b) Encontre os expoentes no ponto singular $x = 0$.

(c) Encontre os três primeiros termos não nulos em cada uma das duas soluções (que não são múltiplas uma da outra) em torno de $x = 0$.

13. $xy'' + y' - y = 0$
14. $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$; Veja o Problema 1
15. $x(x-1)y'' + 6x^2 y' + 3y = 0$; Veja o Problema 3
16. $xy'' + y = 0$
17. $x^2 y'' + (\operatorname{sen} x)y' - (\cos x)y = 0$
18. (a) Mostre que

$$(\ln x)y'' + \tfrac{1}{2}y' + y = 0$$

tem um ponto singular regular em $x = 1$.

(b) Determine as raízes da equação indicial em $x = 1$.

(c) Determine os três primeiros termos não nulos na série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{r+n}$ correspondente à raiz maior. Tome $x - 1 > 0$.

(d) Qual o valor que você esperaria para o raio de convergência da série?

19. Em diversos problemas em física matemática é necessário estudar a equação diferencial

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)x]y' - \alpha\beta y = 0, \tag{i}$$

onde α, β e γ são constantes. Essa equação é conhecida como **equação hipergeométrica**.

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são 0 e $1 - \gamma$.

(b) Mostre que $x = 1$ é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são 0 e $\gamma - \alpha - \beta$.

(c) Supondo que $1 - \gamma$ não é um inteiro positivo, mostre que uma solução da Eq. (i) em uma vizinhança de $x = 0$ é

$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma \cdot 1!}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!}x^2 + \cdots.$$

Qual o valor que você esperaria para o raio de convergência desta série?

(d) Supondo que $1 - \gamma$ não é inteiro, mostre que uma segunda solução para $0 < x < 1$ é

$$y_2(x) = x^{1-\gamma}\left[1 + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{(2-\gamma)1!}x + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{(2-\gamma)(3-\gamma)2!}x^2 + \cdots\right].$$

(e) Mostre que o ponto no infinito é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são α e β. Veja o Problema 43 da Seção 5.4.

20. Considere a equação diferencial

$$x^3 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0,$$

onde α e β são constantes reais e $\alpha \neq 0$.

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular irregular.

(b) Ao tentar encontrar uma solução da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$, mostre que a equação indicial para r é linear e, portanto, existe apenas uma solução formal dessa forma suposta.

(c) Mostre que se $\beta/\alpha = -1, 0, 1, 2, \ldots$, então a solução formal em série termina e é, portanto, uma solução de fato. Para os outros valores de β/α mostre que a solução formal em série tem raio de convergência nulo, logo não representa uma solução de fato em nenhum intervalo.

21. Considere a equação diferencial

$$y'' + \frac{\alpha}{x^s}y' + \frac{\beta}{x^t}y = 0, \tag{i}$$

onde $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ são números reais e s e t são inteiros positivos, arbitrários por enquanto.

(a) Mostre que, se $s > 1$ ou $t > 2$, então o ponto $x = 0$ é um ponto singular irregular.

(b) Tente encontrar uma solução da Eq. (i) da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \qquad x > 0. \tag{ii}$$

Mostre que se $s = 2$ e $t = 2$, então existe apenas um valor possível para r para o qual existe uma solução formal da Eq. (i) da forma (ii).

(c) Mostre que se $s = 1$ e $t = 3$, então não existem soluções da Eq. (i) da forma (ii).

(d) Mostre que os valores máximos de s e de t para os quais a equação indicial é de segundo grau em r [e, portanto, podemos esperar encontrar duas soluções da forma (ii)] são $s = 1$ e $t = 2$. Estas são precisamente as condições que distinguem uma "singularidade fraca", ou um ponto singular regular, de um ponto singular irregular, como definimos na Seção 5.4.

Como aviso, deveríamos esclarecer que embora seja possível, algumas vezes, obter uma solução formal em série da forma (ii) em um ponto singular irregular, a série pode não ter raio de convergência positivo. Veja o Problema 20 para um exemplo.

5.7 Equação de Bessel

Nesta seção vamos ilustrar a discussão na Seção 5.6 considerando três casos especiais da equação de Bessel,[14]

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{1}$$

onde ν é uma constante. É fácil mostrar que $x = 0$ é um ponto singular regular da Eq. (1). Temos

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x\frac{1}{x} = 1,$$

$$q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x^2\frac{x^2 - \nu^2}{x^2} = -\nu^2.$$

Logo, a equação indicial é

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) + r - \nu^2 = r^2 - \nu^2 = 0,$$

com raízes $r = \pm\nu$. Consideraremos os três casos $\nu = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$ e $\nu = 1$ para o intervalo $x > 0$.

Equação de Bessel de Ordem Zero. Neste caso $\nu = 0$, de modo que a Eq. (1) fica reduzida a

$$L[y] = x^2y'' + xy' + x^2y = 0, \tag{2}$$

e as raízes da equação indicial são iguais. Substituindo

$$y = \phi(r,x) = a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^{r+n}, \tag{3}$$

na Eq. (2), obtemos

$$\begin{aligned} L[\phi](r,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n[(r+n)(r+n-1) + (r+n)]x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n+2} \\ &= a_0[r(r-1) + r]x^r + a_1[(r+1)r + (r+1)]x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{a_n[(r+n)(r+n-1) + (r+n)] + a_{n-2}\right\} x^{r+n} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Como já observamos, as raízes da equação indicial $F(r) = r(r-1) + r = 0$ são $r_1 = 0$ e $r_2 = 0$, logo temos o caso de raízes iguais. A relação de recorrência é

$$a_n(r) = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)(r+n-1) + (r+n)} = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)^2}, \qquad n \ge 2. \tag{5}$$

Para determinar $y_1(x)$ fazemos r igual a 0. Então, da Eq. (4) segue que, para que o coeficiente de x^{r+1} seja zero, temos que escolher $a_1 = 0$. Portanto, da Eq. (5), $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$. Além disso,

$$a_n(0) = -a_{n-2}(0)/n^2, \qquad n = 2, 4, 6, 8, \ldots,$$

ou, fazendo $n = 2m$, obtemos

[14]Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) começou uma carreira em negócios quando jovem, mas se interessou logo por astronomia e matemática. Foi designado diretor do observatório em Königsberg em 1810 e manteve essa posição até sua morte. Seu estudo de perturbações planetárias levou-o, em 1824, a fazer a primeira análise sistemática das soluções da Eq. (1), conhecidas como funções de Bessel. É famoso, também, por fazer o primeiro cálculo preciso da distância da Terra a uma estrela em 1838.

$$a_{2m}(0) = -a_{2m-2}(0)/(2m)^2, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Assim,

$$a_2(0) = -\frac{a_0}{2^2}, \qquad a_4(0) = \frac{a_0}{2^4 2^2}, \qquad a_6(0) = -\frac{a_0}{2^6(3 \cdot 2)^2},$$

e, em geral,

$$a_{2m}(0) = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots . \tag{6}$$

Portanto,

$$y_1(x) = a_0\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right], \qquad x > 0. \tag{7}$$

A função entre colchetes é conhecida como a *função de Bessel de primeira espécie de ordem zero*, e é denotada por $J_0(x)$. Segue do Teorema 5.6.1 que a série converge para todo x e que J_0 é analítica em $x = 0$. Algumas das propriedades importantes de J_0 estão discutidas nos problemas. A Figura 5.7.1 mostra os gráficos de $y = J_0(x)$ e de algumas das somas parciais da série (7).

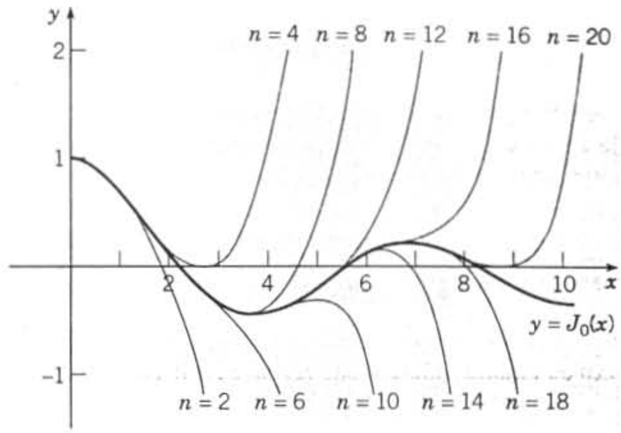

FIGURA 5.7.1 Aproximações polinomiais de $J_0(x)$. O valor de n é o grau do polinômio na aproximação.

Para determinar $y_2(x)$, vamos calcular $a'_n(0)$.[15] Primeiro, note que devido ao coeficiente de x^{r+1} na Eq. (4) $(r + 1)^2 a_1(r) = 0$. Logo, $a_1(r) = 0$ para todo r próximo de $r = 0$. Então, não só $a_1(0) = 0$, mas também $a'_1(0) = 0$. Da relação de recorrência (5) segue que $a'_3(0) = a'_5(0) = \ldots = a'_{2n+1}(0) = \ldots = 0$; logo, precisamos apenas calcular $a'_{2m}(0)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Da Eq. (5), temos

$$a_{2m}(r) = -a_{2m-2}(r)/(r + 2m)^2, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Resolvendo esta relação de recorrência, obtemos

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(r+2)^2}, \qquad a_4(r) = \frac{a_0}{(r+2)^2(r+4)^2},$$

e, em geral,

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(r+2)^2 \cdots (r+2m)^2}, \qquad m \geq 3. \tag{8}$$

Podemos efetuar os cálculos de $a'_{2m}(r)$ de maneira mais conveniente notando que, se

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{\beta_1}(x - \alpha_2)^{\beta_2}(x - \alpha_3)^{\beta_3} \cdots (x - \alpha_n)^{\beta_n},$$

e se x for diferente de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, então

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x - \alpha_1} + \frac{\beta_2}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{\beta_n}{x - \alpha_n}.$$

[15] O Problema 10 esquematiza um procedimento alternativo no qual simplesmente substituímos a fórmula (23) da Seção 5.6 na Eq. (2) e depois determinamos os b_n.

Aplicando este resultado a $a_{2m}(r)$ na Eq. (8), vemos que

$$\frac{a'_{2m}(r)}{a_{2m}(r)} = -2\left(\frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+4} + \cdots + \frac{1}{r+2m}\right),$$

e fazendo r igual a 0, obtemos

$$a'_{2m}(0) = -2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m}\right] a_{2m}(0).$$

Substituindo $a_{2m}(0)$ dado pela Eq. (6) e fazendo

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}, \tag{9}$$

obtemos, finalmente,

$$a'_{2m}(0) = -H_m \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

A segunda solução da equação de Bessel de ordem zero é encontrada fazendo-se $a_0 = 1$ e substituindo-se, na Eq. (23) da Seção 5.6, $y_1(x)$ e $b_{2m}(0) = a'_{2m}(0)$. Obtemos

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}, \qquad x > 0. \tag{10}$$

Em vez de y_2, a segunda solução considerada, em geral, é uma determinada combinação linear de J_0 e y_2. Ela é conhecida como a função de Bessel de segunda espécie de ordem zero, e é denotada por Y_0. Seguindo Copson (Capítulo 12), definimos[16]

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}[y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_0(x)]. \tag{11}$$

Aqui, γ é uma constante, conhecida como a constante de Euler-Máscheroni;[17] ela é definida pela equação

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n) \cong 0{,}5772. \tag{12}$$

Substituindo $y_2(x)$ na Eq. (11), obtemos

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right) J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}\right], \qquad x > 0. \tag{13}$$

A solução geral da equação de Bessel de ordem zero para $x > 0$ é

$$y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x).$$

Note que $J_0(x) \to 1$ quando $x \to 0$ e que $Y_0(x)$ tem uma singularidade logarítmica em $x = 0$, ou seja, $Y_0(x)$ se comporta como $(2/\pi)\ln x$ quando $x \to 0$ por valores positivos. Então, se estivermos interessados em soluções da equação de Bessel de ordem zero que sejam finitas na origem, o que ocorre muitas vezes, temos que descartar Y_0. Os gráficos das funções $J_0(x)$ e $Y_0(x)$ estão ilustrados na Figura 5.7.2.

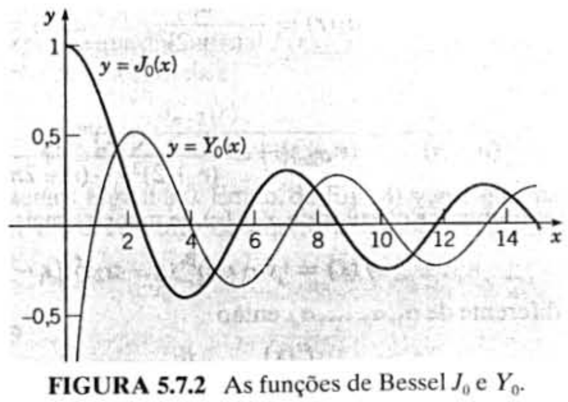

FIGURA 5.7.2 As funções de Bessel J_0 e Y_0.

[16]Outros autores usam outras definições de Y_0. Esta escolha para Y_0 também é conhecida como função de Weber, em homenagem a Heinrich Weber (1842-1913), que ensinou em diversas universidades alemãs.

[17]Lorenzo Máscheroni (1750-1800) era um padre italiano que foi professor na University of Pavia. Ele calculou corretamente as 19 primeiras casas decimais γ em 1790.

É interessante observar na Figura 5.7.2 que para x grande, ambas as funções $J_0(x)$ e $Y_0(x)$ oscilam. Poderíamos ter antecipado tal comportamento a partir da equação original; de fato, isso é verdade para as soluções da equação de Bessel de ordem ν. Dividindo a Eq. (1) por x^2, obtemos

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Para x muito grande é razoável suspeitar que os termos $(1/x)y'$ e $(\nu^2/x^2)y$ são pequenos e, portanto, podem ser desprezados. Se isso for verdade, então a equação de Bessel de ordem ν pode ser aproximada por

$$y'' + y = 0.$$

As soluções desta equação são sen x e cos x; poderíamos, então, antecipar que as soluções da equação de Bessel para valores grandes de x são semelhantes a combinações lineares de sen x e cos x. Isso está correto no sentido em que as funções de Bessel são oscilatórias; no entanto, está apenas parcialmente correto. Para x grande, as funções J_0 e Y_0 também decaem quando x aumenta; assim, a equação $y'' + y = 0$ não fornece uma aproximação adequada para a equação de Bessel para valores grandes de x, e é necessário uma análise mais delicada. De fato, é possível mostrar que

$$J_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{quando} \quad x \to \infty, \tag{14}$$

e que

$$Y_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{quando} \quad x \to \infty. \tag{15}$$

Essas aproximações assintóticas, quando $x \to \infty$, são, de fato, muito boas. Por exemplo, a Figura 5.7.3 mostra que a aproximação assintótica (14) para $J_0(x)$ é razoavelmente precisa para todo $x \geq 1$. Assim, para aproximar $J_0(x)$ em todo o intervalo de zero a infinito podemos usar dois ou três termos da série (7) para $x \leq 1$ e a aproximação assintótica (14) para $x \geq 1$.

Equação de Bessel de Ordem Meio. Este caso ilustra a situação na qual as raízes da equação indicial diferem por um inteiro positivo, mas a segunda solução não tem termo logarítmico. Fazendo $\nu = \frac{1}{2}$ na Eq. (1), obtemos

$$L[y] = x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{1}{4}\right)y = 0. \tag{16}$$

Substituindo $y = \phi(r, x)$ pela série (3), obtemos

$$\begin{aligned} L[\phi](r,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(r+n)(r+n-1) + (r+n) - \tfrac{1}{4}\right] a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\ &= \left(r^2 - \tfrac{1}{4}\right) a_0 x^r + \left[(r+1)^2 - \tfrac{1}{4}\right] a_1 x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{\left[(r+n)^2 - \tfrac{1}{4}\right] a_n + a_{n-2}\right\} x^{r+n} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

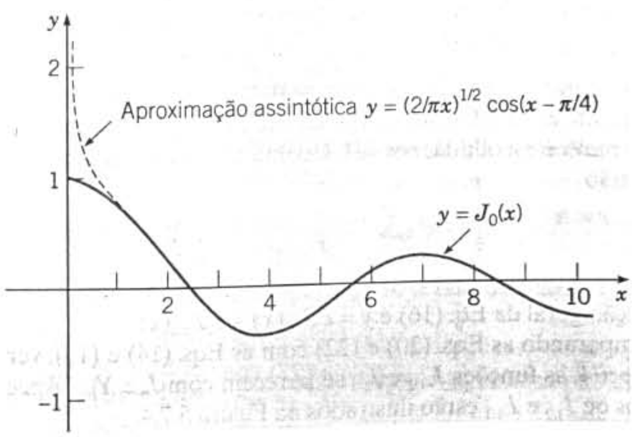

FIGURA 5.7.3 Aproximação assintótica de $J_0(x)$.

As raízes da equação indicial são $r_1 = \frac{1}{2}$ e $r_2 = -\frac{1}{2}$; logo, as raízes diferem por um inteiro. A relação de recorrência é

$$\left[(r+n)^2 - \tfrac{1}{4}\right] a_n = -a_{n-2}, \qquad n \geq 2. \tag{18}$$

Correspondendo à raiz maior $r_1 = \frac{1}{2}$, pelo coeficiente de x^{r+1} na Eq. (17) vemos que $a_1 = 0$. Logo, da Eq. (18), $a_3 = a_5 = \ldots = a_{2n+1} = \ldots = 0$. Além disso, para $r = \frac{1}{2}$,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)}, \qquad n = 2, 4, 6\ldots,$$

ou, fazendo $n = 2m$, obtemos

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2m(2m+1)}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Resolvendo a relação de recorrência, encontramos

$$a_2 = -\frac{a_0}{3!}, \qquad a_4 = \frac{a_0}{5!}, \ldots$$

e, em geral,

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Portanto, fazendo $a_0 = 1$, obtemos

$$y_1(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}\right] = x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \qquad x > 0. \tag{19}$$

A segunda série de potências na Eq. (19) é precisamente a série de Taylor para sen x; logo, uma solução para a equação de Bessel de ordem meio é $x^{-1/2}$ sen x. A função de Bessel de primeira espécie de ordem meio, $J_{1/2}$, é definida como $(2/\pi)^{1/2} y_1$. Assim,

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{sen} x, \qquad x > 0. \tag{20}$$

Correspondendo à raiz $r = -\frac{1}{2}$, é possível que encontremos dificuldade em calcular a_1, já que $N = r_1 - r_2 = 1$. No entanto, da Eq. (17) para $r = -\frac{1}{2}$, os coeficientes de x^r e de x^{r+1} são ambos nulos, independente da escolha de a_0 e a_1. Portanto, a_0 e a_1 podem ser escolhidos arbitrariamente. Da relação de recorrência (18) obtemos um conjunto de coeficientes com índices pares correspondendo a a_0 e um conjunto de coeficientes com índices ímpares correspondendo a a_1. Então não é necessário um termo logarítmico para se obter uma segunda solução nesse caso. Deixamos como exercício mostrar que, para $r = -\frac{1}{2}$,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}, \qquad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^{-1/2}\left[a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \\ &= a_0 \frac{\cos x}{x^{1/2}} + a_1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^{1/2}}, \qquad x > 0. \end{aligned} \tag{21}$$

A constante a_1 simplesmente introduz um múltiplo de $y_1(x)$. A segunda solução da equação de Bessel de ordem meio é escolhida, em geral, como a solução para a qual $a_0 = (2/\pi)^{1/2}$ e $a_1 = 0$. Ela é denotada por $J_{-1/2}$. Então

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x, \qquad x > 0. \tag{22}$$

A solução geral da Eq. (16) é $y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$.

Comparando as Eqs. (20) e (22) com as Eqs. (14) e (15), vemos que, exceto por um deslocamento de fase de $\pi/4$, as funções $J_{-1/2}$ e $J_{1/2}$ se parecem com J_0 e Y_0, respectivamente, para valores grandes de x. Os gráficos de $J_{1/2}$ e $J_{-1/2}$ estão ilustrados na Figura 5.7.4.

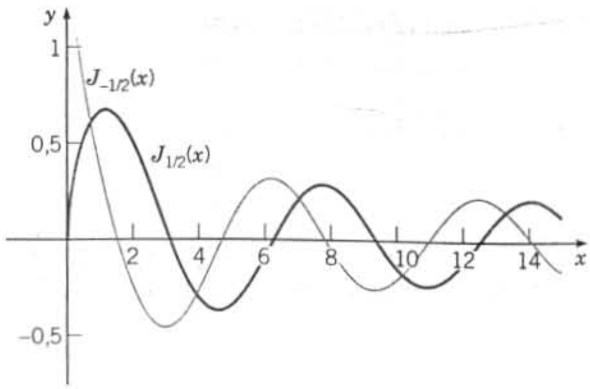

FIGURA 5.7.4 As funções de Bessel $J_{1/2}$ e $J_{-1/2}$.

Equação de Bessel de Ordem Um. Este caso ilustra a situação na qual as raízes da equação indicial diferem por um inteiro positivo e a segunda solução envolve um termo logarítmico. Fazendo $\nu = 1$ na Eq. (1), temos

$$L[y] = x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0. \tag{23}$$

Substituindo $y = \phi(r,x)$ pela série em (3) e juntando os termos como nos casos precedentes, obtemos

$$L[\phi](r,x) = a_0(r^2 - 1)x^r + a_1[(r+1)^2 - 1]x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[(r+n)^2 - 1\right] a_n + a_{n-2} \right\} x^{r+n} = 0. \tag{24}$$

As raízes da equação indicial são $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$. A relação de recorrência é

$$[(r+n)^2 - 1]a_n(r) = -a_{n-2}(r), \qquad n \geq 2. \tag{25}$$

Correspondendo à raiz maior $r = 1$, a relação de recorrência fica

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+2)n}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Pelo coeficiente de x^{r+1} na Eq. (24), vemos também que $a_1 = 0$; logo, pela relação de recorrência, $a_3 = a_5 = \ldots = 0$. Para valores pares de n, seja $n = 2m$; então

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m+2)(2m)} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2(m+1)m}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Resolvendo essa relação de recorrência, obtemos

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m+1)!m!}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \tag{26}$$

A função de Bessel de primeira espécie de ordem um, denotada por J_1, é obtida escolhendo-se $a_0 = 1/2$. Portanto,

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m+1)!m!}. \tag{27}$$

A série converge absolutamente para todo x, de modo que J_1 é analítica em toda parte.

Ao determinar uma segunda solução da equação de Bessel de ordem um vamos ilustrar o método de substituição direta. O cálculo do termo geral na Eq. (28) abaixo é bastante complicado, mas os primeiros poucos coeficientes podem ser encontrados facilmente. De acordo com o Teorema 5.6.1, vamos supor que

$$y_2(x) = aJ_1(x)\ln x + x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right], \qquad x > 0. \tag{28}$$

Calculando $y'_2(x)$, $y''_2(x)$, substituindo na Eq. (23) e usando o fato de que J_1 é uma solução da Eq. (23), obtemos

$$2axJ'_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} [(n-1)(n-2)c_n + (n-1)c_n - c_n]x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0, \tag{29}$$

onde $c_0 = 1$. Substituindo $J_1(x)$ por sua expressão na Eq. (27), mudando os índices dos somatórios nas duas séries e efetuando diversos cálculos algébricos, chegamos a

$$-c_1 + [0 \cdot c_2 + c_0]x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n^2 - 1)c_{n+1} + c_{n-1}]x^n = -a\left[x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+1)x^{2m+1}}{2^{2m}(m+1)!\,m!}\right]. \quad (30)$$

Da Eq. (30) notamos primeiro que $c_1 = 0$ e $a = -c_0 = -1$. Além disso, como a expressão à direita do sinal de igualdade contém apenas potências ímpares de x, o coeficiente de cada potência par de x na expressão à esquerda do sinal de igualdade tem que ser nulo. Então, como $c_1 = 0$, temos $c_3 = c_5 = \ldots = 0$. Correspondendo às potências ímpares de x, obtemos a relação de recorrência [seja $n = 2m + 1$ na série à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (30)]

$$[(2m+1)^2 - 1]c_{2m+2} + c_{2m} = \frac{(-1)^m (2m+1)}{2^{2m}(m+1)!\,m!}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \quad (31)$$

Fazendo $m = 1$ na Eq. (31), obtemos

$$(3^2 - 1)c_4 + c_2 = (-1)3/(2^2 \cdot 2!).$$

Note que c_2 pode ser escolhido *arbitrariamente*, e esta equação, então, determina c_4. Note, também, que na equação para o coeficiente de x, c_2 aparece multiplicado por 0, e essa equação foi usada para determinar a. Não é surpreendente que c_2 seja arbitrário, já que c_2 é o coeficiente de x na expressão $x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right]$. Em consequência, c_2 gera simplesmente um múltiplo de J_1 e y_2 só está determinado a menos de múltiplos de J_1. De acordo com a prática usual, escolhemos $c_2 = 1/2^2$. Obtemos, então,

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{-1}{2^4 \cdot 2}\left[\frac{3}{2} + 1\right] = \frac{-1}{2^4 2!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1\right] \\ &= \frac{(-1)}{2^4 \cdot 2!}(H_2 + H_1). \end{aligned}$$

É possível mostrar que a solução da relação de recorrência (31) é

$$c_{2m} = \frac{(-1)^{m+1}(H_m + H_{m-1})}{2^{2m} m!(m-1)!}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

com a convenção de que $H_0 = 0$. Assim,

$$y_2(x) = -J_1(x)\ln x + \frac{1}{x}\left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (H_m + H_{m-1})}{2^{2m} m!(m-1)!} x^{2m}\right], \qquad x > 0. \quad (32)$$

O cálculo de $y_2(x)$ usando outro procedimento [veja as Eqs. (19) e (20) da Seção 5.6], no qual determinamos $c_n(r_2)$, é ligeiramente mais fácil. Em particular, este último procedimento fornece uma fórmula geral para c_{2m} sem a necessidade de se resolver uma relação de recorrência da forma (31) (veja o Problema 11). Nesse aspecto você pode querer, também, comparar os cálculos da segunda solução da equação de Bessel de ordem zero no texto e no Problema 10.

A segunda solução da Eq. (23), a função de Bessel de segunda espécie de ordem um, Y_1, é escolhida, em geral, como uma determinada combinação linear de J_1 e y_2. Seguindo Copson (Capítulo 12), Y_1 é definida como

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}[-y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_1(x)], \quad (33)$$

onde γ é definido pela Eq. (12). A solução geral da Eq. (23) para $x > 0$ é

$$y = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x).$$

Note que enquanto J_1 é analítica em $x = 0$, a segunda solução Y_1 torna-se ilimitada do mesmo modo que $1/x$ quando $x \to 0$. A Figura 5.7.5 mostra os gráficos de J_1 e Y_1.

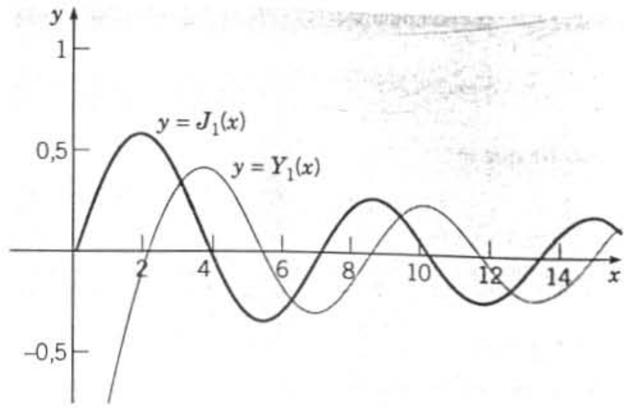

FIGURA 5.7.5 As funções de Bessel J_1 e Y_1.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, mostre que a equação diferencial dada tem um ponto singular regular em $x = 0$ e determine duas soluções para $x > 0$.

1. $x^2y'' + 2xy' + xy = 0$
2. $x^2y'' + 3xy' + (1 + x)y = 0$
3. $x^2y'' + xy' + 2xy = 0$
4. $x^2y'' + 4xy' + (2 + x)y = 0$
5. Encontre duas soluções para a equação de Bessel de ordem $\frac{3}{2}$,

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{9}{4}\right)y = 0, \qquad x > 0.$$

6. Mostre que a equação de Bessel de ordem meio

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{1}{4}\right)y = 0, \qquad x > 0$$

pode ser reduzida à equação

$$v'' + v = 0$$

pela mudança da variável dependente $y = x^{-1/2}v(x)$. Conclua disso que $y_1(x) = x^{-1/2}\cos x$ e $y_2(x) = x^{-1/2}\,\text{sen}\, x$ são soluções da equação de Bessel de ordem meio.

7. Mostre diretamente que a série para $J_0(x)$, Eq. (7), converge absolutamente para todo x.
8. Mostre diretamente que a série para $J_1(x)$, Eq. (27), converge absolutamente para todo x e que $J_0'(x) = -J_1(x)$.
9. Considere a equação de Bessel de ordem ν,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \qquad x > 0,$$

onde ν é real e positivo.

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são ν e $-\nu$.

(b) Correspondendo à raiz maior ν, mostre que uma solução é

$$y_1(x) = x^{\nu}\left[1 - \frac{1}{1!(1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1+\nu)(2+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \sum_{m=3}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(1+\nu)\cdots(m+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right].$$

(c) Se 2ν não for inteiro, mostre que a segunda solução será

$$y_2(x) = x^{-\nu}\left[1 - \frac{1}{1!(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1-\nu)(2-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \sum_{m=3}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(1-\nu)\cdots(m-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right].$$

Note que $y_1(x) \to 0$ quando $x \to 0$ e que $y_2(x)$ torna-se ilimitado quando $x \to 0$.

(d) Verifique, por métodos diretos, que as séries de potências nas expressões para $y_1(x)$ e $y_2(x)$ convergem absolutamente para todo x. Verifique, também, que y_2 é uma solução, bastando apenas que ν não seja inteiro.

10. Mostramos, nesta seção, que uma solução da equação de Bessel de ordem zero

$$L[y] = x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

é J_0, onde $J_0(x)$ é dada pela Eq. (7) com $a_0 = 1$. De acordo com o Teorema 5.6.1, uma segunda solução tem a forma $(x > 0)$

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n.$$

(a) Mostre que

$$L[y_2](x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} + 2xJ_0'(x). \qquad \text{(i)}$$

(b) Substituindo a representação em série de $J_0(x)$ na Eq. (i), mostre que

$$b_1 x + 2^2 b_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n^2 b_n + b_{n-2})x^n = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \qquad \text{(ii)}$$

(c) Note que aparecem apenas potências pares de x na expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (ii). Mostre que $b_1 = b_3 = b_5 = \ldots = 0$, $b_2 = 1/2^2(1!)^2$ e que

$$(2n)^2 b_{2n} + b_{2n-2} = -2(-1)^n(2n)/2^{2n}(n!)^2, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Deduza que

$$b_4 = -\frac{1}{2^2 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad b_6 = \frac{1}{2^2 4^2 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right).$$

A solução geral da relação de recorrência é $b_{2n} = (-1)^{n+1}H_n/2^{2n}(n!)^2$. Substituindo b_n na expressão para $y_2(x)$, obtemos a solução dada na Eq. (10).

11. Encontre uma segunda solução da equação de Bessel de ordem um calculando os $c_n(r_2)$ e a da Eq. (24) da Seção 5.6 de acordo com as fórmulas (19) e (20) daquela seção. Algumas diretrizes para esse cálculo são as seguintes. Primeiro, use a Eq. (24) desta seção para mostrar que $a_1(-1)$ e $a_1'(-1)$ são iguais a 0. Depois mostre que $c_1(-1) = 0$ e, da relação de recorrência, que $c_n(-1) = 0$ para $n = 3, 5, \ldots$. Finalmente, use a Eq. (25) para mostrar que

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(r+1)(r+3)}, \qquad a_4(r) = \frac{a_0}{(r+1)(r+3)(r+3)(r+5)},$$

e que

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(r+1)\cdots(r+2m-1)(r+3)\cdots(r+2m+1)}, \qquad m \geq 3.$$

Depois mostre que

$$c_{2m}(-1) = (-1)^{m+1}(H_m + H_{m-1})/2^{2m} m!(m-1)!, \qquad m \geq 1.$$

12. Através de uma mudança adequada de variável é possível, algumas vezes, transformar outra equação diferencial em uma equação de Bessel. Por exemplo, mostre que uma solução de

$$x^2 y'' + \left(\alpha^2 \beta^2 x^{2\beta} + \tfrac{1}{4} - \nu^2 \beta^2\right) y = 0, \qquad x > 0$$

é dada por $y = x^{1/2} f(\alpha x^\beta)$, onde $f(\xi)$ é uma solução da equação de Bessel de ordem ν.

13. Usando o resultado do Problema 12, mostre que a solução geral da equação de Airy

$$y'' - xy = 0, \qquad x > 0$$

é $y = x^{1/2}[c_1 f_1(\frac{2}{3} i x^{3/2}) + c_2 f_2(\frac{2}{3} i x^{3/2})]$, onde $f_1(\xi)$ e $f_2(\xi)$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação de Bessel de ordem um terço.

14. Pode-se mostrar que J_0 tem uma infinidade de zeros para $x > 0$. Em particular, os três primeiros zeros são aproximadamente iguais a 2,405; 5,520 e 8,653 (veja a Figura 5.7.1). Denote por λ_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$ os zeros de J_0; segue que

$$J_0(\lambda_j x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Verifique que $y = J_0(\lambda_j x)$ satisfaz a equação diferencial

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \lambda_j^2 y = 0, \qquad x > 0.$$

Mostre que, portanto,

$$\int_0^1 x J_0(\lambda_i x) J_0(\lambda_j x)\, dx = 0 \quad \text{se} \quad \lambda_i \neq \lambda_j.$$

Esta propriedade importante de $J_0(\lambda_i x)$, conhecida como propriedade de ortogonalidade, é útil na resolução de problemas de valores de contorno.

Sugestão: escreva a equação diferencial para $J_0(\lambda_i x)$. Multiplique-a por $xJ_0(\lambda_j x)$ e a subtraia de $xJ_0(\lambda_i x)$ vezes a equação diferencial para $J_0(\lambda_j x)$. Depois integre de 0 a 1.

REFERÊNCIAS

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1961; New York: Dover, 1989).

Copson, E. T., *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable* (Oxford: Oxford University Press, 1935).

Demonstrações dos Teoremas 5.3.1 e 5.6.1 podem ser encontradas em livros intermediários ou avançados; veja, por exemplo, os Capítulos 3 e 4 de Coddington, ou os Capítulos 3 e 4 de

Rainville, E. D., *Intermediate Differential Equations* (2nd ed.) (New York: Macmillan, 1964).

Veja também esses textos para uma discussão do ponto no infinito, mencionado no Problema 43 da Seção 5.4. O comportamento de soluções perto de um ponto singular irregular é um tópico ainda mais avançado; uma discussão sucinta pode ser encontrada no Capítulo 5 de

Coddington, E.A.,and Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations* (New York: McGraw-Hill, 1955).

Discussões mais completas da equação de Bessel, da equação de Legendre e de muitas outras equações que levam o nome de pessoas podem ser encontradas em livros avançados de equações diferenciais, de métodos de matemática aplicada e de funções especiais. Um livro que trata de funções especiais, como os polinômios de Legendre e as funções de Bessel, é

Hochstadt, H., *Special Functions of Mathematical Physics* (New York: Holt, 1961).

Uma compilação excelente de fórmulas, gráficos e tabelas de funções de Bessel, funções de Legendre e outras funções especiais da física matemática pode ser encontrada em

Abramowitz, M., and Stegun, I. A. (eds.), *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover, 1965); publicado originalmente pelo Departamento Nacional de Padrões, Washington, DC, 1964.