NONA EDIÇÃO

Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno

William E. Boyce
Professor Emérito da cátedra Edward P. Hamilton

Richard C. DiPrima
Anteriormente Professor da cátedra Eliza Ricketts Foundation do Departamento de Ciências Matemáticas do Rensselaer Polytechnic Institute

Tradução e Revisão Técnica

Valéria de Magalhães Iório
Fundação Educacional Serra dos Órgãos, Teresópolis

gen | LTC

SUMÁRIO

5

CAPÍTULO

3

Equações Lineares de Segunda Ordem

Equações lineares de segunda ordem têm uma importância crucial no estudo de equações diferenciais por duas razões principais. A primeira é que equações lineares têm uma estrutura teórica rica, subjacente a diversos métodos sistemáticos de resolução. Além disso, uma parte substancial dessa estrutura e desses métodos é compreensível em um nível matemático relativamente elementar. Para apresentar as ideias fundamentais em um contexto o mais simples possível vamos descrevê-las neste capítulo para equações de segunda ordem. Outra razão para estudar equações lineares de segunda ordem é que elas são essenciais para qualquer investigação séria das áreas clássicas da física matemática. Não se pode progredir muito no estudo de mecânica dos fluidos, condução de calor, movimento ondulatório ou fenômenos eletromagnéticos sem esbarrar na necessidade de resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem. Como exemplo, vamos discutir oscilações de alguns sistemas mecânicos e elétricos básicos no final deste capítulo.

3.1 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Uma equação diferencial de segunda ordem tem a forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right), \tag{1}$$

onde f é alguma função dada. Em geral, denotaremos a variável independente por t, já que o tempo é, com frequência, a variável independente em fenômenos físicos, mas, algumas vezes, usaremos x em seu lugar. Usaremos y ou, ocasionalmente, outra letra para denotar a variável dependente. A Eq. (1) é dita **linear** se a função f tem a forma

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y, \tag{2}$$

ou seja, se f é linear em y e dy/dt. Na Eq. (2), g, p e q são funções especificadas da variável independente t, mas não dependem de y. Nesse caso, reescrevemos a Eq. (1), em geral, como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{3}$$

onde a linha denota diferenciação em relação a t. No lugar da Eq. (3) encontramos, com frequência, a equação

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t). \tag{4}$$

É claro que, se $P(t) \neq 0$, podemos dividir a Eq. (4) por $P(t)$, obtendo, assim, a Eq. (3) com

$$p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}, \qquad q(t) = \frac{R(t)}{P(t)}, \qquad g(t) = \frac{G(t)}{P(t)}. \tag{5}$$

Ao discutir a Eq. (3) e tentar resolvê-la, vamos nos restringir a intervalos nos quais as funções p, q e g sejam contínuas.[1]

Se a Eq. (1) não for da forma (3) ou (4), então ela é dita **não linear**. Investigações analíticas de equações não lineares são relativamente difíceis, de modo que teremos pouco a dizer sobre elas neste livro. Abordagens numéricas ou geométricas são, frequentemente, mais apropriadas, e são discutidas nos Capítulos 8 e 9.

Um problema de valor inicial consiste em uma equação diferencial, como a Eq. (1), (3) ou (4), junto com um par de condições iniciais

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y'_0, \tag{6}$$

onde y_0 e y'_0 são números dados que descrevem os valores de y e de y' no ponto inicial t_0. Note que as condições iniciais para uma equação de segunda ordem não indicam, apenas, um ponto particular (t_0, y_0) que tem que pertencer ao gráfico da solução, mas, também, o coeficiente angular y'_0 da reta tangente ao gráfico naquele ponto. É razoável esperar que sejam necessárias duas condições iniciais para uma equação de segunda ordem, já que, *grosso modo*, precisa-se de duas integrações para se encontrar a solução, e cada integração introduz uma constante arbitrária. Presume-se que duas condições iniciais serão suficientes para a determinação dos valores dessas duas constantes.

Uma equação linear de segunda ordem é dita **homogênea** se a função $g(t)$ na Eq. (3), ou $G(t)$ na Eq. (4), for igual a zero para todo t. Caso contrário, a equação é dita **não homogênea**. Em consequência, a função $g(t)$, ou $G(t)$, é chamada, muitas vezes, de termo não homogêneo. Vamos começar nossa discussão com equações homogêneas, que escreveremos na forma

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0. \tag{7}$$

Mais tarde, nas Seções 3.5 e 3.6, mostraremos que uma vez resolvida a equação homogênea sempre é possível resolver a equação não homogênea correspondente (4) ou, pelo menos, expressar sua solução em função de uma integral. Assim, o problema de resolver a equação homogênea é o mais fundamental.

Vamos concentrar nossa atenção, neste capítulo, a equações nas quais as funções P, Q e R são constantes. Nesse caso, a Eq. (7) torna-se

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{8}$$

onde a, b e c são constantes dadas. Acontece que a Eq. (8) sempre pode ser facilmente resolvida em termos das funções elementares do Cálculo. Por outro lado, é muito mais difícil, em geral, resolver a Eq. (7) se os coeficientes não forem constantes, e vamos adiar um tratamento desse caso até o Capítulo 5. Antes de atacar a Eq. (8), vamos adquirir alguma experiência analisando um exemplo simples, mas, de certa forma, típico.

EXEMPLO 1

Resolva a equação

$$y'' - y = 0, \tag{9}$$

e encontre, também, a solução que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -1. \tag{10}$$

Note que a Eq. (9) é simplesmente a Eq. (8) com $a = 1$, $b = 0$ e $c = -1$. Em outras palavras, a Eq. (9) diz que procuramos uma função com a propriedade de que a derivada segunda da função é igual a ela mesma. Alguma das funções que você estudou em Cálculo tem essa propriedade? Um pouco de reflexão produzirá, provavelmente, pelo menos uma dessas funções, a saber, a função exponencial $y_1(t) = e^t$. Um pouco mais de reflexão poderia produzir, também, uma segunda função, $y_2(t) = e^{-t}$. Um pouco de experimentação revela que múltiplos constantes dessas duas soluções também são soluções. Por exemplo, as funções $2e^t$ e $5e^{-t}$ também satisfazem a equação diferencial (9), como você pode verificar calculando suas derivadas segundas. Da mesma forma, as funções $c_1y_1(t) = c_1e^t$ e $c_2y_2(t) = c_2e^{-t}$ satisfazem a equação diferencial (9) para todos os valores das constantes c_1 e c_2.

A seguir, é fundamental que se note que a soma de duas soluções quaisquer da Eq. (9) também é uma solução. Em particular, como $c_1y_1(t)$ e $c_2y_2(t)$ são soluções da Eq. (9), a função

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} \tag{11}$$

[1]Há um tratamento correspondente para equações lineares de ordem mais alta no Capítulo 4. Se quiser, você pode ler as partes apropriadas do Capítulo 4 em paralelo com o Capítulo 3.

também é solução, quaisquer que sejam os valores de c_1 e c_2. Mais uma vez, isso pode ser verificado calculando-se a derivada segunda y'' a partir da Eq. (11). Temos $y' = c_1e^t - c_2e^{-t}$ e $y'' = c_1e^t + c_2e^{-t}$; logo, y'' é igual a y e a Eq. (9) é satisfeita.

Vamos resumir o que fizemos até agora neste exemplo. Uma vez observado que as funções $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{-t}$ são soluções da Eq. (9), segue que a combinação linear geral (11) dessas funções também é solução. Como os coeficientes c_1 e c_2 na Eq. (11) são arbitrários, essa expressão representa uma família infinita de soluções da equação diferencial (9).

Vamos considerar, agora, como escolher um elemento particular dessa família infinita de soluções que satisfaça, também, o conjunto dado de condições iniciais (10). Em outras palavras, procuramos uma solução cujo gráfico contenha o ponto (0, 2) e tenha reta tangente nesse ponto com coeficiente angular −1. Primeiro, fazemos $t = 0$ e $y = 2$ na Eq. (11), o que nos dá a equação

$$c_1 + c_2 = 2. \tag{12}$$

A seguir, diferenciamos a Eq. (11), o que resulta em

$$y' = c_1e^t - c_2e^{-t}.$$

Depois, fazendo $t = 0$ e $y' = -1$, obtemos

$$c_1 - c_2 = -1. \tag{13}$$

Resolvendo simultaneamente as Eqs. (12) e (13) para c_1 e c_2, encontramos

$$c_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad c_2 = \tfrac{3}{2}. \tag{14}$$

Finalmente, inserindo esses valores na Eq. (11), obtemos

$$y = \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{3}{2}e^{-t}, \tag{15}$$

a solução do problema de valor inicial que consiste na equação diferencial (9) e nas condições iniciais (10).

O que podemos concluir do exemplo precedente que vai nos ajudar a tratar a equação mais geral (8),

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

cujos coeficientes a, b e c são constantes (reais) arbitrárias? Em primeiro lugar, as soluções no exemplo eram funções exponenciais. Além disso, quando identificamos duas soluções fomos capazes de usar uma combinação linear delas para satisfazer as condições iniciais dadas, além da equação diferencial propriamente dita.

Explorando essas duas ideias, podemos resolver a Eq. (8) para quaisquer valores de seus coeficientes e satisfazer, também, qualquer conjunto de condições iniciais dado para y e y'. Começamos procurando soluções exponenciais da forma $y = e^{rt}$, onde r é um parâmetro a ser determinado. Segue que $y' = re^{rt}$ e $y'' = r^2e^{rt}$. Substituindo essas expressões para y, y' e y'' na Eq. (8), obtemos

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0,$$

ou, como $e^{rt} \neq 0$,

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{16}$$

A Eq. (16) é chamada de **equação característica** da equação diferencial (8). Seu significado reside no fato de que, se r é uma raiz da equação polinomial (16), então $y = e^{rt}$ é solução da equação diferencial (8). Como a Eq. (16) é uma equação de segundo grau com coeficientes reais, ela tem duas raízes que podem ser reais e distintas, reais e iguais, ou complexas conjugadas. Vamos considerar o primeiro caso aqui e os dois últimos nas Seções 3.3 e 3.4.

Supondo que as raízes da equação característica (16) são reais e distintas, vamos denotá-las por r_1 e r_2, onde $r_1 \neq r_2$. Então $y_1(t) = e^{r_1t}$ e $y_2(t) = e^{r_2t}$ são duas soluções da Eq. (8). Como no Exemplo 1, segue que

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} \tag{17}$$

também é uma solução de (8). Para verificar se isso é verdade, podemos diferenciar a expressão na Eq. (17); portanto,

$$y' = c_1r_1e^{r_1t} + c_2r_2e^{r_2t} \tag{18}$$

e

$$y'' = c_1r_1^2e^{r_1t} + c_2r_2^2e^{r_2t}. \tag{19}$$

Substituindo y, y' e y'' na Eq. (8) por essas expressões e rearrumando os termos, obtemos

$$ay'' + by' + cy = c_1(ar_1^2 + br_1 + c)e^{r_1 t} + c_2(ar_2^2 + br_2 + c)e^{r_2 t}. \tag{20}$$

As quantidades entre parênteses à direita do sinal de igualdade na Eq. (20) são nulas, pois r_1 e r_2 são raízes da Eq. (16); logo, y dado pela Eq. (17) é, de fato, uma solução da Eq. (8), como queríamos verificar.

Vamos supor agora que queremos encontrar o elemento particular da família de soluções (17) que satisfaz as condições iniciais (6)

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_0'.$$

Fazendo $t = t_0$ e $y = y_0$ na Eq. (17), obtemos

$$c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} = y_0. \tag{21}$$

Analogamente, fazendo $t = t_0$ e $y' = y_0'$ na Eq. (18), temos

$$c_1 r_1 e^{r_1 t_0} + c_2 r_2 e^{r_2 t_0} = y_0'. \tag{22}$$

Resolvendo simultaneamente as Eqs. (21) e (22) para c_1 e c_2, encontramos

$$c_1 = \frac{y_0' - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t_0}, \qquad c_2 = \frac{y_0 r_1 - y_0'}{r_1 - r_2} e^{-r_2 t_0}. \tag{23}$$

Lembre-se de que $r_1 - r_2 \neq 0$, de modo que as expressões na Eq. (23) sempre fazem sentido. Assim, não importa que condições iniciais sejam dadas – ou seja, independentemente dos valores de t_0, y_0 e y_0' nas Eqs. (6) – sempre é possível determinar c_1 e c_2 de modo que as condições iniciais sejam satisfeitas. Além disso, existe apenas uma escolha possível de c_1 e c_2 para cada conjunto dado de condições iniciais. Com os valores de c_1 e c_2 dados pela Eq. (23), a expressão (17) é a solução do problema de valor inicial

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'. \tag{24}$$

É possível mostrar, baseado no teorema fundamental citado na próxima seção, que todas as soluções da Eq. (8) estão incluídas na expressão (17), pelo menos no caso em que as raízes da Eq. (16) são reais e distintas. Portanto, chamamos a Eq. (17) de solução geral da Eq. (8). O fato de que quaisquer condições iniciais possíveis podem ser satisfeitas pela escolha adequada das constantes na Eq. (17) torna mais plausível a ideia de que essa expressão inclui, de fato, todas as soluções da Eq. (8).

Vamos considerar mais alguns exemplos.

EXEMPLO 2

Encontre a solução geral de

$$y'' + 5y' + 6y = 0. \tag{25}$$

Supondo que $y = e^{rt}$, segue que r tem que ser raiz da equação característica

$$r^2 + 5r + 6 = (r + 2)(r + 3) = 0.$$

Assim, os valores possíveis de r são $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$; a solução geral da Eq. (25) é

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}. \tag{26}$$

EXEMPLO 3

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3. \tag{27}$$

A solução geral da equação diferencial foi encontrada no Exemplo 2 e é dada pela Eq. (26). Para satisfazer a primeira condição inicial, fazemos $t = 0$ e $y = 2$ na Eq. (26); assim, c_1 e c_2 têm que satisfazer

$$c_1 + c_2 = 2. \tag{28}$$

Para usar a segunda condição inicial, primeiro precisamos diferenciar a Eq. (26). Isso nos dá $y' = -2c_1e^{-2t} - 3c_2e^{-3t}$. Fazendo, agora, $t = 0$ e $y' = 3$, obtemos

$$-2c_1 - 3c_2 = 3. \tag{29}$$

Resolvendo as Eqs. (28) e (29), vemos que $c_1 = 9$ e $c_2 = -7$. Usando esses valores na expressão (26), obtemos a solução

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t} \tag{30}$$

do problema de valor inicial (27). A Figura 3.1.1 mostra o gráfico da solução.

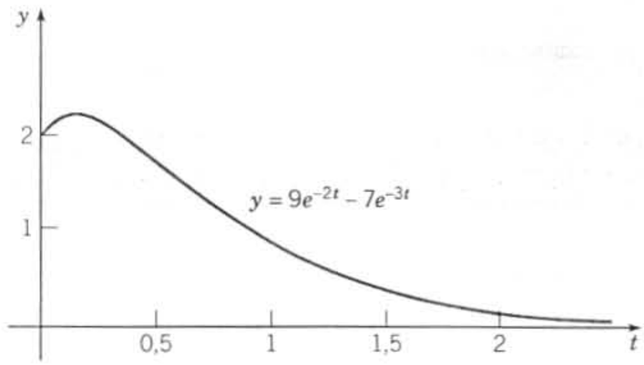

FIGURA 3.1.1 Solução de $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

EXEMPLO 4

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$4y'' - 8y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = \tfrac{1}{2}. \tag{31}$$

Se $y = e^{rt}$, então a equação característica é

$$4r^2 - 8r + 3 = 0$$

e suas raízes são $r = 3/2$ e $r = 1/2$. Portanto, a solução geral da equação diferencial é

$$y = c_1 e^{3t/2} + c_2 e^{t/2}. \tag{32}$$

Usando as condições iniciais, obtemos as duas equações seguintes para c_1 e c_2:

$$c_1 + c_2 = 2, \qquad \tfrac{3}{2}c_1 + \tfrac{1}{2}c_2 = \tfrac{1}{2}.$$

A solução dessas equações é $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{5}{2}$, de modo que a solução do problema de valor inicial (31) é

$$y = -\tfrac{1}{2}e^{3t/2} + \tfrac{5}{2}e^{t/2}. \tag{33}$$

A Figura 3.1.2 mostra o gráfico da solução.

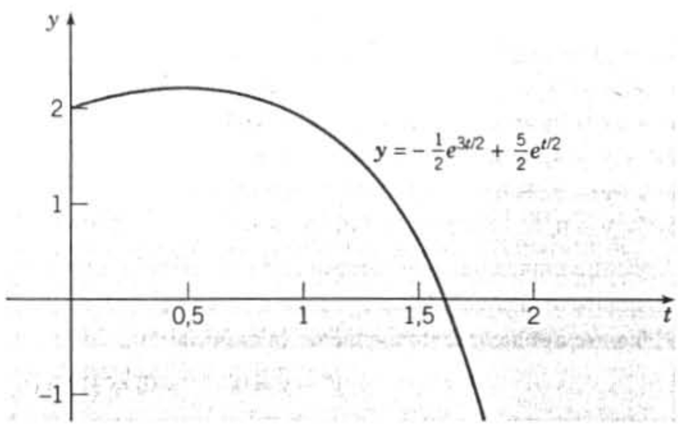

FIGURA 3.1.2 Solução de $4y'' - 8y' + 3y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0{,}5$.

EXEMPLO 5

A solução (30) do problema de valor inicial (27) começa crescendo (já que o coeficiente angular da reta tangente a seu gráfico é positivo, inicialmente), mas acaba tendendo a zero (pois ambas as parcelas contêm exponenciais com expoentes negativos). Portanto, a solução tem que atingir um máximo, e o gráfico na Figura 3.1.1 confirma isso. Determine a localização desse ponto de máximo.

Pode-se estimar as coordenadas do ponto de máximo através do gráfico, mas para encontrá-las precisamente procuramos o ponto onde o gráfico da solução tem reta tangente horizontal. Diferenciando a solução (30), $y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$, em relação a t, obtemos

$$y' = -18e^{-2t} + 21e^{-3t}. \tag{34}$$

Igualando y' a zero e multiplicando por e^{3t}, encontramos o valor crítico t_m que satisfaz $e^t = 7/6$; logo

$$t_m = \ln(7/6) \cong 0{,}15415. \tag{35}$$

O valor máximo correspondente, y_m, é dado por

$$y_m = 9e^{-2t_m} - 7e^{-3t_m} = \frac{108}{49} \cong 2{,}20408. \tag{36}$$

Neste exemplo o coeficiente angular inicial é 3, mas a solução da equação diferencial dada se comporta de maneira semelhante para qualquer coeficiente angular inicial positivo. O Problema 26 pede que você determine como as coordenadas do ponto de máximo dependem do coeficiente angular inicial.

Voltando para a equação $ay'' + by' + cy = 0$ com coeficientes arbitrários, lembre-se de que, quando $r_1 \neq r_2$, sua solução geral (17) é a soma de duas funções exponenciais. Portanto, a solução tem um comportamento geométrico relativamente simples: quando t aumenta, a solução, em módulo, ou tende a zero (quando ambos os expoentes forem negativos), ou cresce rapidamente (quando pelo menos um dos expoentes for positivo). Esses dois casos aparecem nos Exemplos 3 e 4, ilustrados nas Figuras 3.1.1 e 3.1.2, respectivamente. Existe um terceiro caso menos frequente: a solução tende a uma constante se um dos expoentes for nulo e o outro for negativo.

Nas Seções 3.3 e 3.4 voltaremos ao problema de resolver a equação $ay'' + by' + cy = 0$ quando as raízes da equação característica forem, respectivamente, complexas conjugadas ou reais e iguais. Enquanto isso, na Seção 3.2, fornecemos uma discussão sistemática da estrutura matemática das soluções de todas as equações lineares homogêneas de segunda ordem.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 8, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0$
3. $6y'' - y' - y = 0$
4. $2y'' - 3y' + y = 0$
5. $y'' + 5y' = 0$
6. $4y'' - 9y = 0$
7. $y'' - 9y' + 9y = 0$
8. $y'' - 2y' - 2y = 0$

Em cada um dos Problemas de 9 a 16, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento quando t aumenta.

9. $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
10. $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
11. $6y'' - 5y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$
12. $y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3$
13. $y'' + 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
14. $2y'' + y' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
15. $y'' + 8y' - 9y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$
16. $4y'' - y = 0, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1$
17. Encontre uma equação diferencial cuja solução geral é $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}$.
18. Encontre uma equação diferencial cuja solução geral é $y = c_1e^{-t/2} + c_2e^{-2t}$.
19. Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' - y = 0, \qquad y(0) = \tfrac{5}{4}, \quad y'(0) = -\tfrac{3}{4}.$$

Faça o gráfico da solução para $0 \leq t \leq 2$ e determine seu valor mínimo.

20. Encontre a solução do problema de valor inicial

$$2y'' - 3y' + y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = \tfrac{1}{2}.$$

Depois determine o valor máximo da solução e encontre, também, o ponto onde a solução se anula.

21. Resolva o problema de valor inicial $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = \alpha$, $y'(0) = 2$. Depois encontre α de modo que a solução tenda a zero quando $t \to \infty$.
22. Resolva o problema de valor inicial $4y'' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \beta$. Depois encontre β de modo que a solução tenda a zero quando $t \to \infty$.

Em cada um dos Problemas 23 e 24, determine os valores de α, se existirem, para os quais todas as soluções tendem a zero quando $t \to \infty$; determine, também, os valores de α, se existirem, para os quais todas as soluções (não nulas) tornam-se ilimitadas quando $t \to \infty$.

23. $y'' - (2\alpha - 1)y' + \alpha(\alpha - 1)y = 0$
24. $y'' + (3 - \alpha)y' - 2(\alpha - 1)y = 0$
25. Considere o problema de valor inicial

$$2y'' + 3y' - 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\beta,$$

onde $\beta > 0$.
(a) Resolva o problema de valor inicial.
(b) Faça o gráfico da solução quando $\beta = 1$. Encontre as coordenadas (t_0, y_0) do ponto de mínimo da solução neste caso.
(c) Encontre o menor valor de β para o qual a solução não tem ponto de mínimo.

26. Considere o problema de valor inicial (veja o Exemplo 5)

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = \beta,$$

onde $\beta > 0$.
(a) Resolva o problema de valor inicial.
(b) Determine as coordenadas t_m e y_m do ponto de máximo da solução como funções de β.
(c) Determine o menor valor de β para o qual $y_m \geq 4$.
(d) Determine o comportamento de t_m e y_m quando $\beta \to \infty$.

27. Considere a equação $ay'' + by' + cy = d$, onde a, b, c e d são constantes.
(a) Encontre todas as soluções de equilíbrio, ou constantes, dessa equação diferencial.
(b) Denote por y_e uma solução de equilíbrio e seja $Y = y - y_e$. Então Y é o desvio de uma solução y da solução de equilíbrio. Encontre a equação diferencial satisfeita por Y.

28. Considere a equação $ay'' + by' + cy = 0$, onde a, b e c são constantes com $a > 0$. Encontre condições sobre a, b e c para que as raízes da equação característica sejam:
(a) reais, diferentes e negativas;
(b) reais com sinais opostos;
(c) reais, diferentes e positivas.

3.2 Soluções de Equações Lineares Homogêneas; o Wronskiano

Na seção precedente, mostramos como resolver algumas equações diferenciais da forma

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

onde a, b e c são constantes. A partir desses resultados, vamos obter uma visão mais clara da estrutura das soluções de todas as equações lineares homogêneas de segunda ordem. Essa compreensão irá nos auxiliar, por sua vez, a resolver outros problemas que encontraremos mais tarde.

Ao discutir propriedades gerais das equações diferenciais lineares é conveniente usar a notação de operador diferencial. Sejam p e q funções contínuas em um intervalo aberto I, isso é, para $\alpha < t < \beta$. Os casos $\alpha = -\infty$ ou $\beta = \infty$, ou ambos, estão incluídos. Então, para qualquer função ϕ duas vezes diferenciável em I definimos o operador diferencial L pela fórmula

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi. \tag{1}$$

Note que $L[\phi]$ é uma função em I. O valor de $L[\phi]$ em um ponto t é

$$L[\phi](t) = \phi''(t) + p(t)\phi'(t) + q(t)\phi(t).$$

Por exemplo, se $p(t) = t^2$, $q(t) = 1 + t$ e $\phi(t) = \text{sen}\, 3t$, então

$$\begin{aligned} L[\phi](t) &= (\text{sen}\, 3t)'' + t^2(\text{sen}\, 3t)' + (1 + t)\,\text{sen}\, 3t \\ &= -9\,\text{sen}\, 3t + 3t^2 \cos 3t + (1 + t)\,\text{sen}\, 3t. \end{aligned}$$

O operador L é, muitas vezes, escrito na forma $L = D^2 + pD + q$, onde D é o operador derivada.

Vamos estudar, nesta seção, a equação linear homogênea de segunda ordem $L[\phi](t) = 0$. Como é costume usar o símbolo y para denotar $\phi(t)$, escreveremos, normalmente, esta equação na forma

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{2}$$

Associamos à Eq. (2) um conjunto de condições iniciais,

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_0', \tag{3}$$

onde t_0 é qualquer ponto no intervalo I e y_0, y_0' são números reais dados. Gostaríamos de saber se o problema de valor inicial (2), (3) sempre tem solução e se pode ter mais de uma solução. Gostaríamos, também, de saber se é possível dizer alguma coisa sobre a forma e a estrutura das soluções que possam ajudar a encontrar soluções de problemas particulares. As respostas a essas questões estão contidas nos teoremas desta seção.

O resultado teórico fundamental para problemas de valor inicial para equações lineares de segunda ordem está enunciado no Teorema 3.2.1, que é análogo ao Teorema 2.4.1 para equações lineares de primeira ordem. Como o resultado também pode ser aplicado a equações não homogêneas, o teorema está enunciado nessa forma mais geral.

Teorema 3.2.1 **(Teorema de Existência e Unicidade)**
Considere o problema de valor inicial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \qquad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \tag{4}$$

onde p, q e g são contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto t_0. Então, existe exatamente uma solução $y = \phi(t)$ deste problema e a solução existe em todo o intervalo I.

Enfatizamos que o teorema diz três coisas:

1. O problema de valor inicial *tem* uma solução; em outras palavras, *existe* uma solução.
2. O problema de valor inicial tem *apenas uma* solução; ou seja, a solução é *única*.
3. A solução ϕ está definida *em todo o intervalo I*, onde os coeficientes são contínuos, e é, pelo menos, duas vezes diferenciável ali.

Para alguns problemas, algumas dessas afirmações são fáceis de provar. Por exemplo, vimos no Exemplo 1 da Seção 3.1 que o problema de valor inicial

$$y'' - y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1 \tag{5}$$

tem a solução

$$y = \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{3}{2}e^{-t}. \tag{6}$$

O fato de que encontramos uma solução certamente estabelece que existe uma solução para esse problema de valor inicial. Além disso, a solução (6) é duas vezes diferenciável, de fato, diferenciável um número qualquer de vezes, em todo o intervalo $(-\infty, \infty)$, onde os coeficientes da equação diferencial são contínuos. Por outro lado, não é óbvio, e é mais difícil provar, que o problema de valor inicial (5) não tem outras soluções além da dada pela Eq. (6). Não obstante, o Teorema 3.2.1 afirma que essa solução é, de fato, a única solução do problema de valor inicial (5).

Para a maioria dos problemas da forma (4) não é possível escrever uma expressão útil para a solução. Essa é uma grande diferença entre equações lineares de primeira e de segunda ordens. Portanto, todas as partes do teorema têm que ser demonstradas por métodos gerais, que não envolvem a obtenção de tal expressão. A demonstração do Teorema 3.2.1 é razoavelmente difícil e não será discutida aqui.[2] Aceitaremos, entretanto, o Teorema 3.2.1 como verdadeiro e o utilizaremos sempre que necessário.

EXEMPLO 1

Encontre o maior intervalo no qual a solução do problema de valor inicial

$$(t^2 - 3t)y'' + ty' - (t + 3)y = 0, \qquad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$$

existe com certeza.

[2]Uma demonstração do Teorema 3.2.1 pode ser encontrada, por exemplo, no Capítulo 6, Seção 8, do livro de autoria de Coddington, listado nas referências no final deste capítulo.

Se a equação diferencial dada for colocada na forma da Eq. (4), então $p(t) = 1/(t-3)$, $q(t) = -(t+3)/t(t-3)$ e $g(t) = 0$. Os únicos pontos de descontinuidade dos coeficientes são $t = 0$ e $t = 3$. Logo, o maior intervalo contendo o ponto inicial $t = 1$ no qual todos os coeficientes são contínuos é $0 < t < 3$. Portanto, esse é o maior intervalo no qual o Teorema 3.2.1 garante que a solução existe.

EXEMPLO 2

Encontre a única solução do problema de valor inicial

$$y'' = p(t)y' + q(t)y = 0, \qquad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0,$$

onde p e q são contínuas em um intervalo aberto I contendo t_0.

A função $y = \phi(t) = 0$ para todo t em I certamente satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais. Pela parte referente à unicidade no Teorema 3.2.1, essa é a única solução do problema dado.

Vamos supor, agora, que y_1 e y_2 são duas soluções da Eq. (2); em outras palavras,

$$L[y_1] = y_1'' + py_1' + qy_1 = 0,$$

e analogamente para y_2. Então, como nos exemplos na Seção 3.1 podemos gerar mais soluções formando as combinações lineares de y_1 e y_2. Enunciamos esse resultado como um teorema.

Teorema 3.2.2 **(Princípio da Superposição)**

Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial (2),

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

então a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2.

Um caso particular do Teorema 3.2.2 ocorre se c_1 ou c_2 for zero. Podemos concluir, então, que qualquer múltiplo constante de uma solução da Eq. (2) também é solução.

Para provar o Teorema 3.2.2, precisamos apenas substituir y na Eq. (2) pela expressão

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t). \tag{7}$$

Calculando as derivadas indicadas e rearrumando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} L[c_1y_1 + c_2y_2] &= [c_1y_1 + c_2y_2]'' + p[c_1y_1 + c_2y_2]' + q[c_1y_1 + c_2y_2] \\ &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1py_1' + c_2py_2' + c_1qy_1 + c_2qy_2 \\ &= c_1[y_1'' + py_1' + qy_1] + c_2[y_2'' + py_2' + qy_2] \\ &= c_1L[y_1] + c_2L[y_2]. \end{aligned}$$

Como $L[y_1] = 0$ e $L[y_2] = 0$, segue que $L[c_1y_1 + c_2y_2] = 0$. Portanto, independente dos valores de c_1 e c_2, y dado pela Eq. (7) satisfaz a equação diferencial (2), e a demonstração do Teorema 3.2.2 está completa.

O Teorema 3.2.2 diz que, começando com apenas duas soluções da Eq. (2), podemos construir uma família infinita de soluções através da Eq. (7). A próxima pergunta é se todas as soluções da Eq. (2) estão incluídas na Eq. (7) ou se podem existir soluções com formas diferentes. Começamos a estudar essa questão examinando se as constantes c_1 e c_2 na Eq. (7) podem ser escolhidas de modo que a solução satisfaça as condições iniciais (3). Essas condições iniciais obrigam c_1 e c_2 a satisfazerem as equações

$$\begin{aligned} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) &= y_0, \\ c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) &= y_0'. \end{aligned} \tag{8}$$

O determinante dos coeficientes do sistema (8) é

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0). \tag{9}$$

Se $W \neq 0$, as Eqs. (8) têm uma única solução (c_1, c_2), não importa quais sejam os valores de y_0 e de y_0'. Esta solução é dada por

$$c_1 = \frac{y_0 y_2'(t_0) - y_0' y_2(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)}, \qquad c_2 = \frac{-y_0 y_1'(t_0) + y_0' y_1(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)}, \tag{10}$$

ou, em termos de determinantes,

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}, \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}. \tag{11}$$

Com esses valores para c_1 e c_2, a expressão (7) satisfaz as condições iniciais (3), assim como a equação diferencial (2).

Por outro lado, se $W = 0$, as Eqs. (8) não têm solução, a menos que y_0 e y_0' satisfaçam uma determinada condição adicional; nesse caso, existe uma infinidade de soluções.

O determinante W é chamado o **determinante wronskiano**,[3] ou, simplesmente, **wronskiano**, das soluções y_1 e y_2. Usamos, algumas vezes, a notação completa $W(y_1, y_2)(t_0)$ para denotar a expressão mais à direita na Eq. (9) enfatizando, desse modo, o fato de que o wronskiano depende das funções y_1 e y_2 e que é calculado no ponto t_0. O argumento precedente é suficiente para estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 3.2.3 Sejam y_1 e y_2 duas soluções da Eq. (2),

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

e suponha que as condições iniciais (3)

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_0'$$

sejam atribuídas. Então, sempre é possível escolher constantes c_1, c_2 tais que

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

satisfaça a equação diferencial (2) e as condições iniciais (3) se, e somente se, o wronskiano

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

não se anula em t_0.

EXEMPLO 3

No Exemplo 2 da Seção 3.1 vimos que $y_1(t) = e^{-2t}$ e $y_2(t) = e^{-3t}$ são soluções da equação diferencial

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Encontre o wronskiano de y_1 e y_2.

O wronskiano dessas duas funções é

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -e^{-5t}.$$

Como W é diferente de zero para todos os valores de t, as funções y_1 e y_2 podem ser usadas para se construir soluções da equação diferencial dada junto com quaisquer condições iniciais prescritas para qualquer valor de t. Um desses problemas de valor inicial foi resolvido no Exemplo 3 da Seção 3.1.

O próximo teorema justifica a expressão "solução geral" introduzida na Seção 3.1 para a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$.

[3]Os determinantes wronskianos recebem esse nome por causa de Jósef Maria Hoëné-Wronski (1776-1853), que nasceu na Polônia mas viveu a maior parte da sua vida na França. Wronski era um homem talentoso, mas complicado, e sua vida foi marcada por disputas acaloradas frequentes com outros indivíduos e instituições.

Teorema 3.2.4 Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções da equação diferencial (2),

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

Então, a família de soluções

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

com coeficientes arbitrários c_1 e c_2 inclui todas as soluções da Eq. (2) se, e somente se, existe um ponto t_0 onde o wronskiano de y_1 e y_2 não é nulo.

Seja ϕ uma solução qualquer da Eq. (2). Para provar o Teorema 3.2.4 precisamos determinar se ϕ está incluída no conjunto de combinações lineares $c_1y_1 + c_2y_2$. Ou seja, precisamos determinar se existem valores das constantes c_1 e c_2 que tornam a combinação linear igual a ϕ. Seja t_0 um ponto onde o wronskiano de y_1 e y_2 é diferente de zero. Calcule ϕ e ϕ' nesse ponto e chame esses valores de y_0 e y_0', respectivamente; assim,

$$y_0 = \phi(t_0), \qquad y_0' = \phi'(t_0).$$

A seguir, considere o problema de valor inicial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \qquad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'. \tag{12}$$

A função ϕ é, certamente, solução desse problema de valor inicial. Além disso, como estamos supondo que $W(y_1, y_2)(t_0)$ é diferente de zero, então é possível (pelo Teorema 3.2.3) escolher c_1 e c_2 tais que $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ também é solução do problema de valor inicial (12). De fato, os valores apropriados de c_1 e c_2 são dados pela Eq. (10) ou (11). A parte relativa à unicidade no Teorema 3.2.1 garante que essas duas soluções do mesmo problema de valor inicial são iguais; assim, para uma escolha apropriada de c_1 e c_2,

$$\phi(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \tag{13}$$

e, portanto, ϕ está incluída na família de funções $c_1y_1 + c_2y_2$. Finalmente, como ϕ é uma solução *arbitrária* da Eq. (2), segue que *toda* solução desta equação está incluída nessa família.

Suponha, agora, que não existe ponto t_0 onde o wronskiano não seja nulo. Logo $W(y_1, y_2)(t_0) = 0$ qualquer que seja o ponto t_0 selecionado. Então (pelo Teorema 3.2.3) existem valores de y_0 e y_0' para os quais o sistema (8) não tem solução para c_1 e c_2. Selecione tal par de valores e escolha a solução $\phi(t)$ da Eq. (2) que satisfaz as condições iniciais (3). Note que o Teorema 3.2.1 garante a existência de tal solução. Entretanto, esta solução não está incluída na família $y = c_1y_1 + c_2y_2$. Assim, essa combinação linear não inclui todas as soluções da Eq. (2) se $W(y_1, y_2) = 0$. Isso completa a demonstração do Teorema 3.2.4.

O Teorema 3.2.4 diz que a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ contém todas as soluções da Eq. (2) se, e somente se, o wronskiano de y_1 e y_2 não é identicamente nulo. É, portanto, natural (e já o fizemos na seção precedente) chamar a expressão

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

com coeficientes constantes arbitrários de **solução geral** da Eq. (2). Dizemos que as soluções y_1 e y_2 formam um **conjunto fundamental de soluções** da Eq. (2) se, e somente se, seu wronskiano é diferente de zero.

Podemos colocar o resultado do Teorema 3.2.4 em linguagem ligeiramente diferente: para encontrar a solução geral e, portanto, todas as soluções de uma equação da forma (2), precisamos, apenas, achar duas soluções da equação dada cujo wronskiano seja diferente de zero. Fizemos precisamente isso em diversos exemplos na Seção 3.1, embora não tenhamos calculado ali os wronskianos. Você deveria voltar e fazer isso, verificando, assim, que todas as soluções que chamamos de "solução geral" na Seção 3.1 satisfazem, de fato, a condição necessária sobre o wronskiano. De outro modo, os exemplos a seguir incluem todos os mencionados na Seção 3.1, assim como muitos outros problemas semelhantes.

EXEMPLO 4

Suponha que $y_1(t) = e^{r_1t}$ e $y_2(t) = e^{r_2t}$ são duas soluções de uma equação da forma (2). Mostre que elas formam um conjunto fundamental de soluções se $r_1 \neq r_2$.

Vamos calcular o wronskiano de y_1 e y_2:

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\exp[(r_1 + r_2)t].$$

Como a função exponencial nunca se anula e como estamos supondo que $r_2 - r_1 \neq 0$, segue que W é diferente de zero para todo valor de t. Em consequência, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções.

EXEMPLO 5

Mostre que $y_1(t) = t^{1/2}$ e $y_2(t) = t^{-1}$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad t > 0. \tag{14}$$

Mostraremos como resolver a Eq. (14) mais tarde (veja o Problema 34 na Seção 3.3). No entanto, neste estágio podemos verificar por substituição direta que y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial. Como $y_1'(t) = \frac{1}{2}t^{-1/2}$ e $y_1''(t) = -\frac{1}{4}t^{-3/2}$, temos

$$2t^2(-\tfrac{1}{4}t^{-3/2}) + 3t(\tfrac{1}{2}t^{-1/2}) - t^{1/2} = (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} - 1)t^{1/2} = 0.$$

Analogamente, $y_2'(t) = -t^{-2}$ e $y_2''(t) = 2t^{-3}$, logo

$$2t^2(2t^{-3}) + 3t(-t^{-2}) - t^{-1} = (4 - 3 - 1)t^{-1} = 0.$$

A seguir, vamos calcular o wronskiano W de y_1 e y_2:

$$W = \begin{vmatrix} t^{1/2} & t^{-1} \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} & -t^{-2} \end{vmatrix} = -\tfrac{3}{2}t^{-3/2}. \tag{15}$$

Como $W \neq 0$ para $t > 0$, concluímos que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções ali.

Fomos capazes de encontrar, em diversos casos, um conjunto fundamental de soluções e, portanto, a solução geral de uma equação diferencial dada. No entanto, muitas vezes isso é uma tarefa difícil, e uma pergunta natural é se uma equação diferencial da forma (2) sempre tem um conjunto fundamental de soluções. O teorema a seguir nos dá uma resposta afirmativa a essa pergunta.

Teorema 3.2.5 Considere a equação diferencial (2)

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

cujos coeficientes p e q são contínuos em algum intervalo aberto I. Escolha algum ponto t_0 em I. Seja y_1 a solução da Eq. (2), que também satisfaz as condições iniciais

$$y(t_0) = 1, \qquad y'(t_0) = 0,$$

e seja y_2 a solução da Eq. (2) que satisfaz as condições iniciais

$$y(t_0) = 0, \qquad y'(t_0) = 1.$$

Então y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da Eq. (2).

Observe, em primeiro lugar, que a *existência* das funções y_1 e y_2 é garantida pelo Teorema 3.2.1. Para mostrar que elas formam um conjunto fundamental de soluções, só precisamos calcular seu wronskiano em t_0:

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Como seu wronskiano não se anula no ponto t_0, as funções y_1 e y_2 formam, de fato, um conjunto fundamental de soluções, completando, assim, a demonstração do Teorema 3.2.5.

Note que a parte difícil dessa demonstração, mostrar a existência de um par de soluções, é obtida invocando-se o Teorema 3.2.1. Note, também, que o Teorema 3.2.5 não fala nada sobre como encontrar as soluções y_1 e y_2 resolvendo os problemas de valor inicial especificados. Não obstante, pode ser confortador saber que sempre existe um conjunto fundamental de soluções.

EXEMPLO 6

Encontre o conjunto fundamental de soluções especificado pelo Teorema 3.2.5 para a equação diferencial

$$y'' - y = 0, \tag{16}$$

usando o ponto inicial $t_0 = 0$.

Vimos, na Seção 3.1, que duas soluções da Eq. (16) são $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{-t}$. O wronskiano dessas soluções é $W(y_1, y_2)(t) = -2 \neq 0$, logo elas formam um conjunto fundamental de soluções. No entanto, não formam o conjunto fundamental de soluções indicado no Teorema 3.2.5, já que não satisfazem as condições iniciais mencionadas nesse teorema no ponto $t = 0$.

Para encontrar o conjunto fundamental de soluções especificado no teorema, precisamos encontrar as soluções que satisfazem as condições iniciais apropriadas. Vamos denotar por $y_3(t)$ a solução da Eq. (16) que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0. \tag{17}$$

A solução geral da Eq. (16) é

$$y = c_1e^t + c_2e^{-t}, \tag{18}$$

e as condições iniciais (17) são satisfeitas se $c_1 = 1/2$ e $c_2 = 1/2$. Assim,

$$y_3(t) = \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{1}{2}e^{-t} = \cosh t.$$

Analogamente, se $y_4(t)$ satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1, \tag{19}$$

então

$$y_4(t) = \tfrac{1}{2}e^t - \tfrac{1}{2}e^{-t} = \operatorname{senh} t.$$

Como o wronskiano de y_3 e y_4 é

$$W(y_3, y_4)(t) = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1,$$

essas funções também formam um conjunto fundamental de soluções, como enunciado no Teorema 3.2.5. Portanto, a solução geral da Eq. (16) pode ser escrita como

$$y = k_1 \cosh t + k_2 \operatorname{senh} t, \tag{20}$$

assim como na forma (18). Usamos k_1 e k_2 para as constantes arbitrárias na Eq. (20) porque não são as mesmas constantes c_1 e c_2 na Eq. (18). Um dos objetivos deste exemplo é tornar claro que uma equação diferencial dada tem mais de um conjunto fundamental de soluções; de fato, tem uma infinidade deles; veja o Problema 21. Como regra, você deve escolher o conjunto mais conveniente.

Vamos examinar melhor as propriedades do wronskiano de duas soluções de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem. O teorema a seguir, talvez de forma surpreendente, fornece uma fórmula explícita simples para o wronskiano de duas soluções quaisquer de tal equação arbitrária, mesmo que as soluções propriamente ditas não sejam conhecidas.

Teorema 3.2.6 **(Teorema de Abel)**[4]

Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{21}$$

onde p e q são contínuas em um intervalo aberto I, então o wronskiano $W(y_1, y_2)(t)$ é dado por

$$W(y_1, y_2)(t) = c\exp\left[-\int p(t)\,dt\right], \tag{22}$$

onde c é uma certa constante que só depende de y_1 e y_2, mas não de t. Além disso, $W(y_1, y_2)(t)$ ou é nulo para todo t em I (se $c = 0$) ou nunca se anula em I (se $c \neq 0$).

Para provar o teorema de Abel, começamos observando que y_1 e y_2 satisfazem

$$\begin{aligned} y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 &= 0, \\ y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

[4]O resultado no Teorema 3.2.6 foi deduzido pelo matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) em 1827, e é conhecido como fórmula de Abel. Ele também mostrou que não existe fórmula geral para resolver uma equação polinomial de quinto grau usando apenas operações algébricas explícitas sobre os coeficientes, resolvendo, desse modo, uma questão em aberto desde o século XVI. Suas maiores contribuições, no entanto, foram em análise, especialmente no estudo de funções elíticas. Infelizmente, seu trabalho só foi amplamente conhecido depois de sua morte. O eminente matemático francês Legendre chamou seu trabalho de um "monumento mais duradouro do que bronze".

Se multiplicarmos a primeira equação por $-y_2$, multiplicarmos a segunda por y_1 e somarmos as equações resultantes, obteremos

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + p(t)(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0. \qquad (24)$$

A seguir, seja $W(t) = W(y_1, y_2)(t)$ e note que

$$W' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2. \qquad (25)$$

Podemos então escrever a Eq. (24) na forma

$$W' + p(t)W = 0. \qquad (26)$$

A Eq. (26) pode ser resolvida imediatamente, já que é tanto uma equação linear de primeira ordem (Seção 2.1) quanto uma equação separável (Seção 2.2). Logo,

$$W(t) = c \exp\left[-\int p(t)\,dt\right], \qquad (27)$$

onde c é uma constante. O valor de c depende do par de soluções da Eq. (21) envolvido. No entanto, como a função exponencial nunca se anula, $W(t)$ não é zero a menos que $c = 0$ e, neste caso, $W(t)$ é igual a zero para todo t, o que completa a demonstração do Teorema 3.2.6.

Note que os wronskianos de dois conjuntos fundamentais de soluções quaisquer da mesma equação diferencial só podem diferir por uma constante multiplicativa e que o wronskiano de qualquer conjunto fundamental de soluções pode ser determinado, a menos de uma constante multiplicativa, sem resolver a equação diferencial. Além disso, como, sob as condições do Teorema 3.2.6, o wronskiano W é sempre zero ou nunca é zero, você pode determinar qual o caso que ocorre de fato calculando W para um único valor conveniente de t.

EXEMPLO 7

No Exemplo 5, verificamos que $y_1(t) = t^{1/2}$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são soluções da equação

$$2t^2 y'' + 3ty' - y = 0, \qquad t > 0. \qquad (28)$$

Verifique que o wronskiano de y_1 e y_2 é dado pela Eq. (22).

Do exemplo citado, sabemos que $W(y_1, y_2)(t) = -(3/2)t^{-3/2}$. Para usar a Eq. (22), precisamos escrever a equação diferencial (28) na forma-padrão, com o coeficiente de y'' igual a 1. Obtemos, então,

$$y'' + \frac{3}{2t}y' - \frac{1}{2t^2}y = 0,$$

de modo que $p(t) = 3/2t$. Portanto,

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(t) &= c\ \exp\left[-\int \frac{3}{2t}\,dt\right] = c\exp\left(-\frac{3}{2}\ln t\right) \\ &= c\,t^{-3/2}. \end{aligned} \qquad (29)$$

A Eq. (29) fornece o wronskiano de qualquer par de soluções da Eq. (28). Para as soluções particulares dadas neste exemplo, precisamos escolher $c = -3/2$.

Sumário. Podemos resumir a discussão desta seção da seguinte maneira: para encontrar a solução geral da equação diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \qquad \alpha < t < \beta,$$

precisamos, primeiro, encontrar duas soluções y_1 e y_2 que satisfazem a equação diferencial em $\alpha < t < \beta$. Depois precisamos nos certificar de que existe um ponto no intervalo onde o wronskiano W de y_1 e y_2 não se anula. Nessas circunstâncias, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções, e a solução geral é

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Se as condições iniciais são dadas em um ponto em $\alpha < t < \beta$, então c_1 e c_2 podem ser escolhidos de modo a satisfazer essas condições.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, encontre o wronskiano do par de funções dado.

1. e^{2t}, $e^{-3t/2}$
2. $\cos t$, $\operatorname{sen} t$
3. e^{-2t}, te^{-2t}
4. x, xe^x
5. $e^t \operatorname{sen} t$, $e^t \cos t$
6. $\cos^2\theta$, $1 + \cos 2\theta$

Em cada um dos Problemas de 7 a 12, determine o maior intervalo no qual o problema de valor inicial dado certamente tem uma única solução duas vezes diferenciável. Não tente encontrar a solução.

7. $ty'' + 3y = t, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$
8. $(t-1)y'' - 3ty' + 4y = \operatorname{sen} t, \quad y(-2) = 2, \quad y'(-2) = 1$
9. $t(t-4)y'' + 3ty' + 4y = 2, \quad y(3) = 0, \quad y'(3) = -1$
10. $y'' + (\cos t)y' + 3(\ln|t|)y = 0, \quad y(2) = 3, \quad y'(2) = 1$
11. $(x-3)y'' + xy' + (\ln|x|)y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$
12. $(x-2)y'' + y' + (x-2)(\tan x)y = 0, \quad y(3) = 1, \quad y'(3) = 2$
13. Verifique que $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são duas soluções da equação diferencial $t^2y'' - 2y = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $c_1t^2 + c_2t^{-1}$ também é solução dessa equação quaisquer que sejam c_1 e c_2.
14. Verifique que $y_1(t) = 1$ e $y_2(t) = t^{1/2}$ são soluções da equação diferencial $yy'' + (y')^2 = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $y = c_1 + c_2t^{1/2}$ não é, em geral, solução dessa equação. Explique por que este resultado não contradiz o Teorema 3.2.2.
15. Mostre que, se $y = \phi(t)$ é uma solução da equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$, onde $g(t)$ não é identicamente nula, então $y = c\phi(t)$, onde c é qualquer constante diferente de 1, não é solução. Explique por que este resultado não contradiz a observação após o Teorema 3.2.2.
16. A função $y = \operatorname{sen}(t^2)$ pode ser solução, em um intervalo contendo $t = 0$, de uma equação da forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ com coeficientes contínuos? Explique sua resposta.
17. Se o wronskiano W de f e g é $3e^{4t}$ e se $f(t) = e^{2t}$, encontre $g(t)$.
18. Se o wronskiano W de f e g é t^2e^t e se $f(t) = t$, encontre $g(t)$.
19. Se $W(f, g)$ é o wronskiano de f e g e se $u = 2f - g$, $v = f + 2g$, encontre o Wronskiano $W(u, v)$ de u e v em função de $W(f, g)$.
20. Se o wronskiano de f e g é $t\cos t - \operatorname{sen} t$ e se $u = f + 3g$, $v = f - g$, encontre o wronskiano de u e v.
21. Suponha que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ e sejam $y_3 = a_1y_1 + a_2y_2$, $y_4 = b_1y_1 + b_2y_2$, onde a_1, a_2, b_1 e b_2 são constantes arbitrárias. Mostre que

$$W(y_3, y_4) = (a_1b_2 - a_2b_1)W(y_1, y_2).$$

y_3 e y_4 também formam um conjunto fundamental de soluções. Por quê?

Em cada um dos Problemas 22 e 23, encontre o conjunto fundamental de soluções especificado pelo Teorema 3.2.5 para a equação diferencial e o ponto inicial dados.

22. $y'' + y' - 2y = 0, \quad t_0 = 0$
23. $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad t_0 = 1$

Em cada um dos Problemas de 24 a 27, verifique que as funções y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial dada. Elas constituem um conjunto fundamental de soluções?

24. $y'' + 4y = 0; \quad y_1(t) = \cos 2t, \quad y_2(t) = \operatorname{sen} 2t$
25. $y'' - 2y' + y = 0; \quad y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = te^t$
26. $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x, \quad y_2(x) = xe^x$
27. $(1 - x\cot x)y'' - xy' + y = 0, \quad 0 < x < \pi; \quad y_1(x) = x, \quad y_2(x) = \operatorname{sen} x$
28. Considere a equação $y'' - y' - 2y = 0$.
    (a) Mostre que $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = e^{2t}$ formam um conjunto fundamental de soluções.
    (b) Sejam $y_3(t) = -2e^{2t}$, $y_4(t) = y_1(t) + 2y_2(t)$ e $y_5(t) = 2y_1(t) - 2y_3(t)$. $y_3(t)$, $y_4(t)$ e $y_5(t)$ também são soluções da equação diferencial dada?
    (c) Determine se cada par a seguir forma um conjunto fundamental de soluções: $[y_1(t), y_3(t)]$; $[y_2(t), y_3(t)]$; $[y_1(t), y_4(t)]$; $[y_4(t); y_5(t)]$.

Em cada um dos Problemas de 29 a 32, encontre o wronskiano de duas soluções da equação diferencial dada sem resolver a equação.

29. $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$
30. $(\cos t)y'' + (\operatorname{sen} t)y' - ty = 0$
31. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, equação de Bessel

32. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$, equação de Legendre
33. Mostre que, se p é diferenciável e $p(t) > 0$, então o wronskiano $W(t)$ de duas soluções de $[p(t)y']' + q(t)\,y = 0$ é $W(t) = c/p(t)$, onde c é uma constante.
34. Se y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções de $ty'' + 2y' + te^ty = 0$ e se $W(y_1, y_2)(1) = 2$, encontre o valor de $W(y_1, y_2)(5)$.
35. Se y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções de $t^2y'' - 2y' + (3 + t)y = 0$ e se $W(y_1, y_2)(2) = 3$, encontre o valor de $W(y_1, y_2)(4)$.
36. Se o wronskiano de duas soluções quaisquer de $y'' + p(t)y' + q(t) = 0$ é constante, o que isso implica sobre os coeficientes p e q?
37. Se f, g e h são funções diferenciáveis, mostre que $W(fg, fh) = f^2W(g, h)$.

Nos Problemas de 38 a 40, suponha que p e q são contínuas e que as funções y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t) = 0$ em um intervalo aberto I.

38. Prove que, se y_1 e y_2 se anulam em um mesmo ponto em I, então não podem formar um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.
39. Prove que, se y_1 e y_2 atingem um máximo ou mínimo em um mesmo ponto em I, então não podem formar um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.
40. Prove que, se y_1 e y_2 têm um ponto de inflexão em comum em t_0 em I, então não podem formar um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo a menos que p e q se anulem em t_0.
41. **Equações Exatas.** A equação $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ é dita exata se puder ser escrita na forma $[P(x)y']' + [f(x)y]' = 0$, onde $f(x)$ pode ser determinada em função de $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$. Esta última equação pode ser integrada uma vez imediatamente, resultando em uma equação de primeira ordem para y que pode ser resolvida como na Seção 2.1. Igualando os coeficientes das equações precedentes e eliminando $f(x)$, mostre que uma condição necessária para que a equação seja exata é que $P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0$. Pode-se mostrar que essa condição também é suficiente.

Em cada um dos Problemas de 42 a 45, use o resultado do Problema 41 para determinar se a equação dada é exata. Se for, resolva-a.

42. $y'' + xy' + y = 0$
43. $y'' + 3x^2y' + xy = 0$
44. $xy'' - (\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 0, \quad x > 0$
45. $x^2y'' + xy' - y = 0, \quad x > 0$
46. **A Equação Adjunta.** Se uma equação linear homogênea de segunda ordem não for exata, ela pode ser tornada exata multiplicando-se por um fator integrante apropriado $\mu(x)$. Precisamos, então, que $\mu(x)$ seja tal que $\mu(x)P(x)y'' + \mu(x)Q(x)y' + \mu(x)R(x)y = 0$ possa ser escrita na forma $[\mu(x)P(x)y']' + [f(x)y]' = 0$. Igualando os coeficientes nessas duas equações e eliminando $f(x)$, mostre que a função μ precisa satisfazer
$$P\mu'' + (2P' - Q)\mu' + (P'' - Q' + R)\mu = 0.$$
Essa equação é conhecida como a adjunta da equação original e é importante na teoria avançada de equações diferenciais. Em geral, o problema de resolver a equação diferencial adjunta é tão difícil quanto o de resolver a equação original, de modo que só é possível encontrar um fator integrante para uma equação de segunda ordem ocasionalmente.

Em cada um dos Problemas de 47 a 49, use o resultado do Problema 46 para encontrar a adjunta da equação diferencial dada.

47. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, equação de Bessel
48. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$, equação de Legendre
49. $y'' - xy = 0$, equação de Airy
50. Para a equação linear de segunda ordem $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$, mostre que a adjunta da equação adjunta é a equação original.
51. Uma equação linear de segunda ordem $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ é dita autoadjunta se sua adjunta for igual à equação original. Mostre que uma condição necessária para esta equação ser autoadjunta é que $P'(x) = Q(x)$. Determine se cada uma das equações nos Problemas de 47 a 49 é autoadjunta.

3.3 Raízes Complexas da Equação Característica

Vamos continuar nossa discussão da equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{1}$$

onde a, b e c são números reais dados. Vimos, na Seção 3.1, que, se procurarmos soluções da forma $y = e^{rt}$, então r tem que ser raiz da equação característica

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2}$$

Se as raízes r_1 e r_2 são reais e distintas, o que ocorre sempre que o discriminante $b^2 - 4ac$ for positivo, então a solução geral da Eq. (1) é

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \tag{3}$$

Suponha, agora, que $b^2 - 4ac$ é negativo. Então as raízes da Eq. (2) são números complexos conjugados; vamos denotá-los por

$$r_1 = \lambda + i\mu, \qquad r_2 = \lambda - i\mu, \tag{4}$$

onde λ e μ são reais. As expressões correspondentes para y são

$$y_1(t) = \exp[(\lambda + i\mu)t], \qquad y_2(t) = \exp[(\lambda - i\mu)t]. \tag{5}$$

Nossa primeira tarefa é explorar o significado dessas expressões, o que envolve o cálculo de uma função exponencial com expoente complexo. Por exemplo, se $\lambda = -1$, $\mu = 2$ e $t = 3$, então, da Eq. (5),

$$y_1(3) = e^{-3+6i}. \tag{6}$$

O que significa elevar o número e a uma potência complexa? A resposta é dada por uma relação importante conhecida como fórmula de Euler.

Fórmula de Euler. Para atribuir significado às expressões nas Eqs. (5), precisamos definir a função exponencial complexa. É claro que queremos que a definição se reduza à função exponencial real habitual quando o expoente for real. Existem várias maneiras de descobrir como essa extensão da função exponencial deveria ser definida. Vamos usar aqui um método baseado em séries infinitas; um método alternativo está esquematizado no Problema 28.

Lembre-se do Cálculo que a série de Taylor para e^t em torno de $t = 0$ é

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{7}$$

Se supusermos que podemos substituir t por it na Eq. (7), teremos

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{(2n-1)!}, \end{aligned} \tag{8}$$

onde separamos a soma em suas partes real e imaginária, usando o fato de que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, e assim por diante. A primeira série na Eq. (8) é precisamente a série de Taylor para $\cos t$ em torno de $t = 0$ e a segunda é a série de Taylor para $\operatorname{sen} t$ em torno de $t = 0$. Temos, então,

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t. \tag{9}$$

A Eq. (9) é conhecida como fórmula de Euler, e é uma relação matemática extremamente importante. Embora nossa dedução da Eq. (9) esteja baseada na hipótese não verificada de que a série (7) pode ser usada para números complexos da mesma forma que para números reais da variável independente, nossa intenção é usar essa dedução apenas para tornar a Eq. (9) mais plausível. Vamos colocar as coisas em uma fundação sólida agora, adotando a Eq. (9) como *definição* de e^{it}. Em outras palavras, sempre que escrevermos e^{it}, queremos dizer a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (9).

Existem alguns variantes da fórmula de Euler que vale a pena notar. Substituindo t por $-t$ na Eq. (9) e lembrando que $\cos(-t) = \cos t$ e $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$, temos

$$e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t. \tag{10}$$

Além disso, se t for substituído por μt na Eq. (9), então obtemos uma versão generalizada da fórmula de Euler, a saber,

$$e^{i\mu t} = \cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t. \tag{11}$$

A seguir, queremos estender a definição de exponencial complexa para expoentes complexos arbitrários da forma $(\lambda + i\mu)t$. Como queremos que as propriedades usuais da função exponencial continuem válidas para expoentes complexos, queremos, certamente, que $\exp[(\lambda + i\mu)t]$ satisfaça

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t}e^{i\mu t}. \tag{12}$$

Usando, então, a Eq. (11), obtemos

$$\begin{aligned} e^{(\lambda+i\mu)t} &= e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t) \\ &= e^{\lambda t}\cos \mu t + ie^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t. \end{aligned} \tag{13}$$

Tomamos agora a Eq. (13) como a definição de $\exp[(\lambda + i\mu)t]$. O valor da função exponencial com coeficiente complexo é um número complexo cujas partes real e imaginária são dadas pelas expressões à direita do sinal de igualdade na Eq. (13). Note que as partes real e imaginária de $\exp[(\lambda + i\mu)t]$ estão expressas inteiramente em termos de funções elementares reais. Por exemplo, a quantidade na Eq. (6) tem o valor

$$e^{-3+6i} = e^{-3}\cos 6 + ie^{-3} \operatorname{sen} 6 \cong 0{,}0478041 - 0{,}0139113i.$$

Com as definições (9) e (13), é fácil mostrar que as regras usuais de exponenciação são válidas para a função exponencial complexa. Você também pode usar a Eq. (13) para verificar que a fórmula de diferenciação

$$\frac{d}{dt}(e^{rt}) = re^{rt} \tag{14}$$

é válida para valores complexos de r.

EXEMPLO 1

Encontre a solução geral da equação diferencial

$$y'' + y' + 9{.}25y = 0. \tag{15}$$

Encontre, também, a solução que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = 8, \tag{16}$$

e desenhe seu gráfico.

A equação característica para a Eq. (15) é

$$r^2 + r + 9{.}25 = 0$$

de modo que suas raízes são

$$r_1 = -\tfrac{1}{2} + 3i, \qquad r_2 = -\tfrac{1}{2} - 3i.$$

Portanto, duas soluções da Eq. (15) são

$$y_1(t) = \exp[(-\tfrac{1}{2} + 3i)t] = e^{-t/2}(\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t) \tag{17}$$

e

$$y_2(t) = \exp[(-\tfrac{1}{2} - 3i)t] = e^{-t/2}(\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t). \tag{18}$$

Você pode verificar que o wronskiano é $W(y_1, y_2)(t) = -6ie^{-t}$, que nunca se anula, logo a solução geral da Eq. (15) pode ser expressa como uma combinação linear de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ com coeficientes arbitrários.

Entretanto, em vez de usar soluções complexas $y_1(t)$ e $y_2(t)$, vamos procurar um conjunto fundamental de soluções reais para a Eq. (15). Do Teorema 3.2.2, sabemos que qualquer combinação linear de duas soluções também é uma solução, logo vamos formar as combinações lineares $y_1(t) + y_2(t)$ e $y_1(t) - y_2(t)$. Dessa forma, obtemos das Eqs. (17) e (18) as soluções

$$y_1(t) + y_2(t) = 2e^{-t/2}\cos 3t, \quad y_1(t) - y_2(t) = 2ie^{-t/2} \operatorname{sen} 3t.$$

Retirando as constantes 2 e $2i$ por conveniência, ficamos com

$$u(t) = e^{-t/2}\cos 3t, \qquad v(t) = e^{-t/2} \operatorname{sen} 3t \tag{19}$$

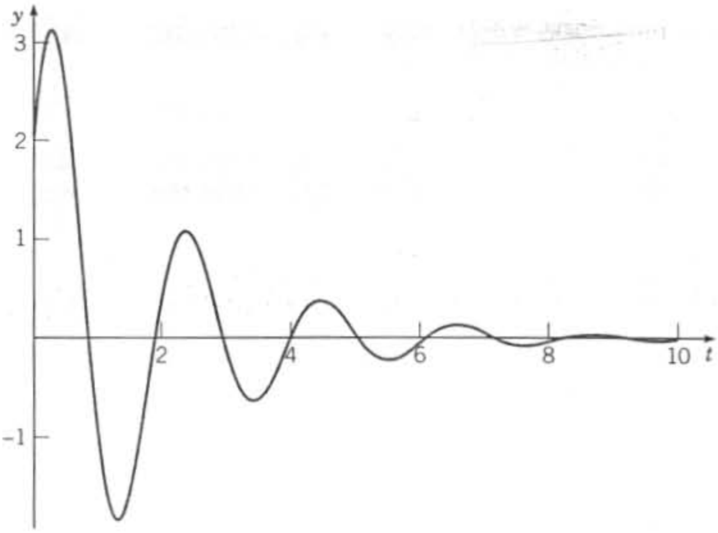

FIGURA 3.3.1 Solução do problema de valor inicial $y'' + y' + 9{,}25y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$

como soluções reais da Eq. (15). [Se você não tiver certeza absoluta de que $u(t)$ e $v(t)$ são soluções da equação diferencial dada, substitua essas funções na Eq. (15) e confirme que elas satisfazem a equação.] Calculando o wronskiano de $u(t)$ e $v(t)$, obtemos $W(u, v(t) = 3e^{-t}$; logo $u(t)$ e $v(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções, e a solução geral da Eq. (15) pode ser escrita como

$$y = c_1 u(t) + c_2 v(t) = e^{-t/2}(c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t), \tag{20}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Para satisfazer as condições iniciais (16), primeiro substituímos $t = 0$ e $y = 2$ na Eq. (20), com o resultado que $c_1 = 2$. Então, diferenciando a Eq. (20), fazendo $t = 0$ e $y' = 8$, obtemos $-\frac{1}{2}c_1 + 3c_2 = 8$, de modo que $c_2 = 3$. Portanto, a solução do problema de valor inicial (15), (16) é

$$y = e^{-t/2}(2 \cos 3t + 3 \operatorname{sen} 3t). \tag{21}$$

A Figura 3.3.1 mostra o gráfico desta solução.

Vemos, do gráfico, que a solução deste problema é uma oscilação decaindo. O fator contendo seno e cosseno controla a natureza oscilatória da solução, enquanto que o fator exponencial com expoente negativo faz com que as amplitudes das oscilações diminuam quando o tempo aumenta.

Raízes Complexas; O Caso Geral. As funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$, dadas pelas Eqs. (5) e com o significado expresso pela Eq. (13), são soluções da Eq. (1) quando as raízes da equação característica (2) são números complexos $\lambda \pm i\mu$. Infelizmente, as soluções y_1 e y_2 são funções que têm valores complexos, ao passo que, em geral, preferiríamos ter soluções reais, se possível, já que a própria equação diferencial só tem coeficientes reais. Podemos proceder como no Exemplo 1 para encontrar um conjunto fundamental de soluções reais. Em particular, vamos formar a soma e a diferença de y_1 e y_2. Temos

$$\begin{aligned} y_1(t) + y_2(t) &= e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t) + e^{\lambda t}(\cos \mu t - i \operatorname{sen} \mu t) \\ &= 2e^{\lambda t} \cos \mu t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_1(t) - y_2(t) &= e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t) - e^{\lambda t}(\cos \mu t - i \operatorname{sen} \mu t) \\ &= 2ie^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t. \end{aligned}$$

Logo, desprezando os fatores constantes 2 e $2i$, respectivamente, obtivemos um par de soluções reais,

$$u(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t, \qquad v(t) = e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t. \tag{22}$$

Note que u e v são, simplesmente, as partes real e imaginária, respectivamente, de y_1.

Por um cálculo direto, você pode mostrar que o wronskiano de u e v é

$$W(u, v)(t) = \mu e^{2\lambda t}. \tag{23}$$

Portanto, desde que $\mu \neq 0$, o wronskiano W não é nulo, de modo que u e v formam um conjunto fundamental de soluções. (É claro que, se $\mu = 0$, então as raízes são reais e a discussão nesta seção não se aplica.)

Em consequência, se as raízes da equação característica são números complexos $\lambda \pm i\mu$, com $\mu \neq 0$, então a solução geral da Eq. (1) é

$$y = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t, \tag{24}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Note que a solução (24) pode ser escrita tão logo sejam conhecidos os valores de λ e μ. Vamos considerar mais alguns exemplos.

EXEMPLO 2

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \qquad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1. \tag{25}$$

A equação característica é $16r^2 - 8r + 145 = 0$, e suas raízes são $r = ¼ \pm 3i$. Logo, a solução geral da equação diferencial é

$$y = c_1 e^{t/4} \cos 3t + c_2 e^{t/4} \operatorname{sen} 3t. \tag{26}$$

Para aplicar a primeira condição inicial, fazemos $t = 0$ na Eq. (26): isso dá

$$y(0) = c_1 = -2.$$

Para a segunda condição inicial, precisamos diferenciar a Eq. (26) e depois fazer $t = 0$. Desse modo, vemos que

$$y'(0) = \tfrac{1}{4}c_1 + 3c_2 = 1,$$

de onde temos que $c_2 = ½$. Usando esses valores de c_1 e c_2, obtemos

$$y = -2e^{t/4} \cos 3t + \tfrac{1}{2} e^{t/4} \operatorname{sen} 3t \tag{27}$$

como solução do problema de valor inicial (25). O gráfico desta solução está ilustrado na Figura 3.3.2.

Neste caso observamos que a solução é uma oscilação aumentando. Novamente, os fatores trigonométricos na Eq. (27) determinam a parte oscilatória da solução, enquanto o fator exponencial (com expoente positivo) faz com que a amplitude da oscilação aumente com o tempo.

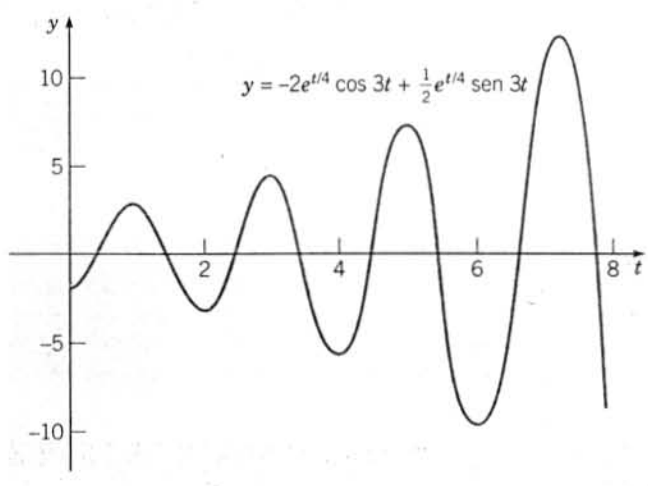

FIGURA 3.3.2 Solução de $16y'' - 8y' + 145y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$.

EXEMPLO 3

Encontre a solução geral de

$$y'' + 9y = 0. \tag{28}$$

A equação característica é $r^2 + 9 = 0$, com raízes $r = \pm 3i$; logo, $\lambda = 0$ e $\mu = 3$. A solução geral é

$$y = c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t; \tag{29}$$

note que se a parte real das raízes é zero, como neste exemplo, então a solução não tem fator exponencial. A Figura 3.3.3 mostra o gráfico de duas soluções típicas da Eq. (28). Em cada caso a solução é uma oscilação pura cuja amplitude é determinada pelas condições iniciais. Como a solução (29) não tem fator exponencial, a amplitude de cada oscilação permanece constante no tempo.

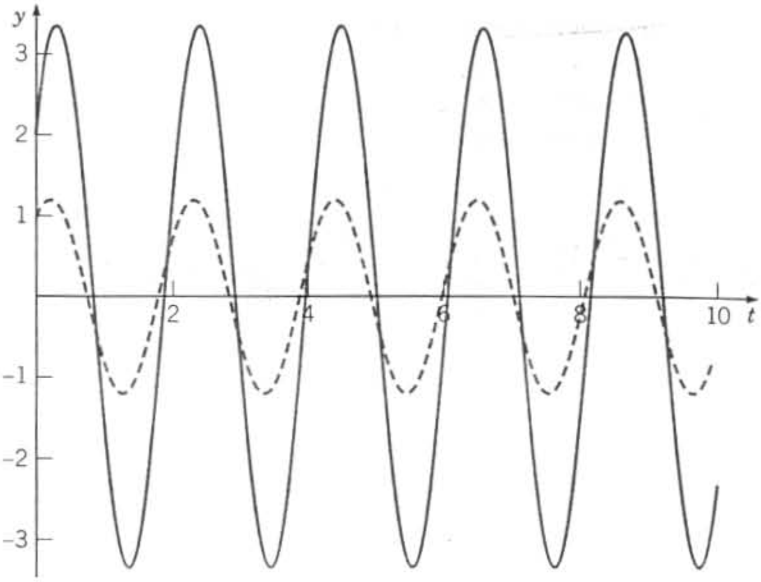

FIGURA 3.3.3 Duas soluções típicas de $y'' = 9y = 0$.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, use a fórmula de Euler para escrever a expressão dada na forma $a + ib$.

1. $\exp(1 + 2i)$
2. $\exp(2 - 3i)$
3. $e^{i\pi}$
4. $e^{2-(\pi/2)i}$
5. 2^{1-i}
6. π^{-1+2i}

Em cada um dos Problemas de 7 a 16, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

7. $y'' - 2y' + 2y = 0$
8. $y'' - 2y' + 6y = 0$
9. $y'' + 2y' - 8y = 0$
10. $y'' + 2y' + 2y = 0$
11. $y'' + 6y' + 13y = 0$
12. $4y'' + 9y = 0$
13. $y'' + 2y' + 1{,}25y = 0$
14. $9y'' + 9y' - 4y = 0$
15. $y'' + y' + 1{,}25y = 0$
16. $y'' + 4y' + 6{,}25y = 0$

Em cada um dos Problemas de 17 a 22, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento para valores cada vez maiores de t.

17. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
18. $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
19. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 2$
20. $y'' + y = 0, \quad y(\pi/3) = 2, \quad y'(\pi/3) = -4$
21. $y'' + y' + 1{,}25y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$
22. $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(\pi/4) = 2, \quad y'(\pi/4) = -2$
23. Considere o problema de valor inicial

$$3u'' - u' + 2u = 0, \qquad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0.$$

(a) Encontre a solução $u(t)$ deste problema.
(b) Para $t > 0$, encontre o primeiro instante no qual $|u(t)| = 10$.

24. Considere o problema de valor inicial

$$5u'' + 2u' + 7u = 0, \qquad u(0) = 2, \quad u'(0) = 1.$$

(a) Encontre a solução $u(t)$ deste problema.
(b) Encontre o menor T para o qual $|u(t)| \leq 0{,}1$ para todo $t > T$.

25. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + 6y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = \alpha \geq 0.$$

(a) Encontre a solução $y(t)$ deste problema.

(b) Encontre α tal que $y = 0$ quando $t = 1$.
(c) Encontre o menor valor positivo de t, em função de α, para o qual $y = 0$.
(d) Determine o limite da expressão encontrada no item (c) quando $\alpha \to \infty$.

26. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 2ay' + (a^2 + 1)y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

(a) Encontre a solução $y(t)$ deste problema.
(b) Para $a = 1$, encontre o menor T para o qual $|y(t)| \leq 0{,}1$ para $t > T$.
(c) Repita o item (b) para $a = 1/4$, $1/2$ e 2.
(d) Usando os resultados dos itens (b) e (c), coloque em um gráfico os valores de T em função de a e descreva a relação entre T e a.

27. Mostre que $W(e^{\lambda t}\cos \mu t, e^{\lambda t}\operatorname{sen} \mu t) = \mu e^{2\lambda t}$.

28. Neste problema, esquematizamos um modo diferente de obter a fórmula de Euler.
(a) Mostre que $y_1(t) = \cos t$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} t$ formam um conjunto fundamental de soluções de $y'' + y = 0$; ou seja, mostre que são soluções e que seu wronskiano não se anula.
(b) Mostre (formalmente) que $y = e^{it}$ também é solução de $y'' + y = 0$. Portanto,

$$e^{it} = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \tag{i}$$

para constantes c_1 e c_2 apropriadas. Por que isso ocorre?
(c) Faça $t = 0$ na Eq. (i) para mostrar que $c_1 = 1$.
(d) Supondo que a Eq. (14) é válida, diferencie a Eq. (i) e depois faça $t = 0$ para concluir que $c_2 = i$. Use os valores de c_1 e c_2 na Eq. (i) para chegar à fórmula da Euler.

29. Usando a fórmula de Euler, mostre que

$$\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2, \qquad \operatorname{sen} t = (e^{it} - e^{-it})/2i.$$

30. Se e^{rt} é dado pela Eq. (13), mostre que $e^{(r_1+r_2)t} = e^{r_1 t}e^{r_2 t}$ quaisquer que sejam os números complexos r_1 e r_2.

31. Se e^{rt} é dado pela Eq. (13), mostre que

$$\frac{d}{dt}e^{rt} = re^{rt}$$

para qualquer número complexo r.

32. Suponha que as funções reais p e q são contínuas em um intervalo aberto I e seja $y = \phi(t) = u(t) + iv(t)$ uma solução complexa de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{i}$$

onde u e v são funções reais. Mostre que u e v também são soluções da Eq. (i).
Sugestão: substitua $y = \phi(t)$ na Eq. (i) e separe em partes real e imaginária.

33. Se as funções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, mostre que entre dois zeros consecutivos de y_1 existe um, e apenas um, zero de y_2. Note que esse comportamento é ilustrado pelas soluções $y_1 = \cos t$ e $y_2 = \operatorname{sen} t$ da equação $y'' + y = 0$.
Sugestão: suponha que t_1 e t_2 são dois zeros de y_1 entre os quais não existe zero de y_2. Aplique o teorema de Rolle a y_1/y_2 para chegar a uma contradição.

Mudança de Variáveis. Algumas vezes, uma equação diferencial com coeficientes variáveis

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{i}$$

pode ser colocada em uma forma mais adequada para que se possa resolvê-la através de uma mudança da variável independente. Vamos explorar essas ideias nos Problemas de 34 a 42. Em particular, no Problema 34 mostramos que as equações conhecidas como equações de Euler podem ser transformadas em equações com coeficientes constantes por uma mudança simples da variável independente. Os Problemas de 35 a 42 contêm exemplos desse tipo de equação. O Problema 43 determina condições sob as quais a equação mais geral Eq. (i) pode ser transformada em uma equação diferencial com coeficientes constantes. Os Problemas de 44 a 46 fornecem aplicações específicas deste procedimento.

34. **Equações de Euler.** Uma equação da forma

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha t\frac{dy}{dt} + \beta y = 0, \qquad t > 0, \tag{ii}$$

onde α e β são constantes reais, é chamada de equação de Euler.

(a) Seja $x = \ln t$ e calcule dy/dt e d^2y/dt^2 em termos de dy/dx e d^2y/dx^2.

(b) Use os resultados do item (a) para transformar a Eq. (ii) em

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{dx} + \beta y = 0. \qquad \text{(iii)}$$

Note que a Eq. (iii) tem coeficientes constantes. Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ formam um conjunto fundamental de soluções da Eq. (iii), então $y_1(\ln t)$ e $y_2(\ln t)$ formam um conjunto fundamental de soluções da Eq. (ii).

Em cada um dos Problemas de 35 a 42, use o método do Problema 34 para resolver a equação dada para $t > 0$.

35. $t^2y'' + ty' + y = 0$
36. $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$
37. $t^2y'' + 3ty' + 1{,}25y = 0$
38. $t^2y'' - 4ty' - 6y = 0$
39. $t^2y'' - 4ty' + 6y = 0$
40. $t^2y'' - ty' + 5y = 0$
41. $t^2y'' + 3ty' - 3y = 0$
42. $t^2y'' + 7ty' + 10y = 0$

43. Neste problema vamos determinar condições sobre p e q de modo que a Eq. (i) possa ser transformada em uma equação com coeficientes constantes através de uma mudança da variável independente. Seja $x = u(t)$ a nova variável independente, com a relação entre x e t a ser especificada mais tarde.

(a) Mostre que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dx}.$$

(b) Mostre que a equação diferencial (i) torna-se

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt}\right)\frac{dy}{dx} + q(t)y = 0. \qquad \text{(iv)}$$

(c) Para que a Eq. (iv) tenha coeficientes constantes, é preciso que os coeficientes de d^2y/dx^2 e de y sejam proporcionais. Se $q(t) > 0$, então podemos escolher a constante de proporcionalidade como 1; logo,

$$x = u(t) = \int [q(t)]^{1/2}\,dt. \qquad \text{(v)}$$

(d) Com x escolhido como no item (c), mostre que o coeficiente de dy/dx na Eq. (iv) também é constante, desde que a expressão

$$\frac{q'(t) + 2p(t)q(t)}{2[q(t)]^{3/2}} \qquad \text{(vi)}$$

seja constante. Assim, a Eq. (i) pode ser transformada em uma equação com coeficientes constantes através de uma mudança da variável independente, desde que a função $(q' + 2pq)/q^{3/2}$ seja constante. Como esse resultado pode ser modificado se $q(t) < 0$?

Em cada um dos Problemas de 44 a 46, tente transformar a equação dada em uma com coeficientes constantes pelo método do Problema 43. Se isso for possível, encontre a solução geral da equação dada.

44. $y'' + ty' + e^{-t^2}y = 0, \quad -\infty < t < \infty$
45. $y'' + 3ty' + t^2y = 0, \quad -\infty < t < \infty$
46. $ty'' + (t^2 - 1)y' + t^3y = 0, \quad 0 < t < \infty$

3.4 Raízes Repetidas; Redução de Ordem

Em seções anteriores, mostramos como resolver a equação

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (1)$$

quando as raízes da equação característica

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (2)$$

são reais e distintas ou complexas conjugadas. Vamos considerar agora a terceira possibilidade, a saber, quando as duas raízes r_1 e r_2 são iguais. Esse caso faz a transição entre os outros dois, e ocorre quando o discriminante $b^2 - 4ac$ é zero. Segue da fórmula para a equação do segundo grau que

$$r_1 = r_2 = -b/2a. \tag{3}$$

A dificuldade é imediatamente aparente: ambas as raízes geram a mesma solução

$$y_1(t) = e^{-bt/2a} \tag{4}$$

da equação diferencial (1), e não é nada óbvio como encontrar uma segunda solução.

EXEMPLO 1

Resolva a equação diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = 0. \tag{5}$$

A equação característica é

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0,$$

de modo que $r_1 = r_2 = -2$. Portanto, uma solução da Eq. (5) é $y_1(t) = e^{-2t}$. Para encontrar a solução geral da Eq. (5), precisamos de uma segunda solução que não seja múltiplo de y_1. Essa segunda solução pode ser encontrada de diversas maneiras (veja os Problemas de 20 a 22); usaremos aqui um método descoberto por D'Alembert[5] no século XVIII. Lembre que, como $y_1(t)$ é uma solução da Eq. (1), $cy_1(t)$ também o é para qualquer constante c. A ideia básica é generalizar essa observação substituindo-se c por uma função $v(t)$ e depois tentando determinar $v(t)$ de modo que o produto $v(t)y_1(t)$ seja solução da Eq. (1).

Para seguir esse programa, vamos substituir $y = v(t)y_1(t)$ na Eq. (5) e usar a equação resultante para encontrar $v(t)$. Começando com

$$y = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-2t}, \tag{6}$$

temos

$$y' = v'(t)e^{-2t} - 2v(t)e^{-2t} \tag{7}$$

e

$$y'' = v''(t)e^{-2t} - 4v'(t)e^{-2t} + 4v(t)e^{-2t}. \tag{8}$$

Substituindo as expressões nas Eqs. (6), (7) e (8) na Eq. (5) e juntando os termos, obtemos

$$[v''(t) - 4v'(t) + 4v(t) + 4v'(t) - 8v(t) + 4v(t)]e^{-2t} = 0,$$

que pode ser simplificada para

$$v''(t) = 0. \tag{9}$$

Logo,

$$v'(t) = c_1$$

e

$$v(t) = c_1 t + c_2, \tag{10}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Finalmente, substituindo $v(t)$ na Eq. (6), obtemos

$$y = c_1 t e^{-2t} + c_2 e^{-2t}. \tag{11}$$

A segunda parcela à direita do sinal de igualdade na Eq. (11) corresponde à solução original $y_1(t) = \exp(-2t)$, mas a primeira parcela corresponde a uma segunda solução, a saber, $y_2(t) = t\exp(-2t)$. Essas duas soluções não são proporcionais, obviamente, mas podemos verificar que formam um conjunto fundamental de soluções calculando seu wronskiano:

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(t) &= \begin{vmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & (1-2t)e^{-2t} \end{vmatrix} \\ &= e^{-4t} - 2te^{-4t} + 2te^{-4t} = e^{-4t} \neq 0. \end{aligned}$$

---

[5]Jean d'Alembert (1717-1783), matemático francês, foi contemporâneo de Euler e Daniel Bernoulli, e é conhecido, principalmente, por seu trabalho em mecânica e equações diferenciais. O princípio de d'Alembert em mecânica e o paradoxo de d'Alembert em hidrodinâmica receberam esse nome em sua homenagem, e a equação de onda apareceu pela primeira vez em seu artigo sobre cordas vibrantes em 1747. Em seus últimos anos, devotou-se principalmente à filosofia e às suas tarefas como editor de ciência da Enciclopédia de Diderot.

Portanto,

$$y_1(t) = e^{-2t}, \qquad y_2(t) = te^{-2t} \tag{12}$$

formam um conjunto fundamental de soluções da Eq. (5), e a solução geral desta equação é dada pela Eq. (11). Note que ambas as funções, $y_1(t)$ e $y_2(t)$, tendem a zero quando $t \to \infty$; em consequência, todas as soluções da Eq. (5) se comportam desse modo. A Figura 3.4.1 mostra o gráfico de uma solução típica.

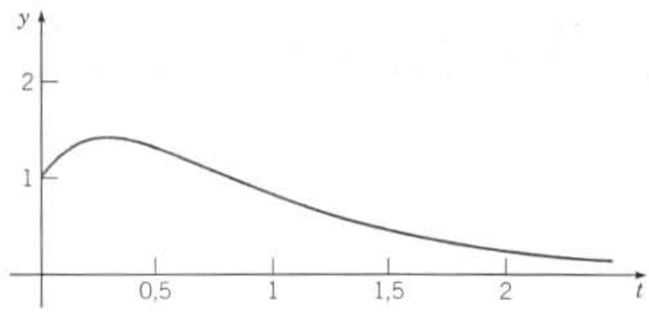

FIGURA 3.4.1 Uma solução típica de $y'' + 4y' + 4y = 0$.

O procedimento usado no Exemplo 1 pode ser estendido a uma equação geral cuja equação característica tenha raízes repetidas. Ou seja, supomos que os coeficientes na Eq. (1) satisfazem $b^2 - 4ac = 0$, caso em que

$$y_1(t) = e^{-bt/2a}$$

é uma solução. Para encontrar uma segunda solução, supomos que

$$y = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-bt/2a} \tag{13}$$

e substituímos na Eq. (1) para determinar $v(t)$. Temos

$$y' = v'(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a}v(t)e^{-bt/2a} \tag{14}$$

e

$$y'' = v''(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{a}v'(t)e^{-bt/2a} + \frac{b^2}{4a^2}v(t)e^{-bt/2a}. \tag{15}$$

Então, substituindo na Eq. (1), obtemos

$$\left\{a\left[v''(t) - \frac{b}{a}v'(t) + \frac{b^2}{4a^2}v(t)\right] + b\left[v'(t) - \frac{b}{2a}v(t)\right] + cv(t)\right\}e^{-bt/2a} = 0. \tag{16}$$

Cancelando o fator $\exp(-bt/2a)$, que não se anula, e rearrumando os termos restantes, encontramos

$$av''(t) + (-b + b)v'(t) + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)v(t) = 0. \tag{17}$$

A parcela envolvendo $v'(t)$ é obviamente nula. Além disso, o coeficiente de $v(t)$ é $c - (b^2/4a)$, que também é zero, pois $b^2 - 4ac = 0$ no problema em consideração. Assim, como no Exemplo 1, a Eq. (17) se reduz a

$$v''(t) = 0;$$

logo,

$$v(t) = c_1 + c_2t.$$

Portanto, da Eq. (13), temos

$$y = c_1e^{-bt/2a} + c_2te^{-bt/2a}. \tag{18}$$

Então, y é uma combinação linear das duas soluções

$$y_1(t) = e^{-bt/2a}, \qquad y_2(t) = te^{-bt/2a}. \tag{19}$$

O wronskiano dessas duas soluções é

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-bt/2a} & te^{-bt/2a} \\ -\dfrac{b}{2a}e^{-bt/2a} & \left(1 - \dfrac{bt}{2a}\right)e^{-bt/2a} \end{vmatrix} = e^{-bt/a}. \tag{20}$$

Como $W(y_1, y_2)(t)$ nunca se anula, as soluções y_1 e y_2 dadas pela Eq. (19) formam um conjunto fundamental de soluções. Além disso, a Eq. (18) é a solução geral da Eq. (1) quando as raízes da equação característica são iguais. Em outras palavras, neste caso existe uma solução exponencial correspondente à raiz repetida, enquanto uma segunda solução é obtida multiplicando-se a solução exponencial por t.

EXEMPLO 2

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' - y' + 0{,}25y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = \tfrac{1}{3}. \tag{21}$$

A equação característica é

$$r^2 - r + 0{,}25 = 0,$$

de modo que as raízes são $r_1 = r_2 = 1/2$. Logo, a solução geral da equação diferencial é

$$y = c_1e^{t/2} + c_2te^{t/2}. \tag{22}$$

A primeira condição inicial requer que

$$y(0) = c_1 = 2.$$

Para satisfazer a segunda condição inicial, primeiro diferenciamos a Eq. (22) e depois fazemos $t = 0$. Isso nos dá

$$y'(0) = \tfrac{1}{2}c_1 + c_2 = \tfrac{1}{3},$$

de modo que $c_2 = -2/3$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = 2e^{t/2} - \tfrac{2}{3}te^{t/2}. \tag{23}$$

A Figura 3.4.2 mostra o gráfico desta solução.

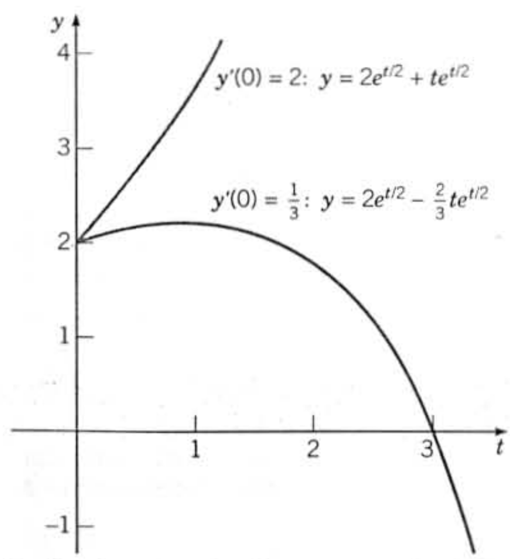

FIGURA 3.4.2 Soluções de $y'' - y' + 0{,}25y = 0$, $y(0) = 2$, com $y'(0) = 1/3$ e $y'(0) = 2$, respectivamente.

Vamos modificar, agora, o problema de valor inicial (21) mudando o coeficiente angular inicial; especificamente, vamos trocar a segunda condição inicial por $y'(0) = 2$. A solução deste problema modificado é

$$y = 2e^{t/2} + te^{t/2}.$$

e seu gráfico também aparece na Figura 3.4.2. Os gráficos mostrados nessa figura sugerem a existência de um coeficiente angular inicial crítico, com valor entre $\frac{1}{3}$ e 2, que separa as soluções que crescem positivamente das que crescem em módulo, mas tornam-se negativas. O Problema 16 pede que você determine este coeficiente angular crítico.

O comportamento geométrico de soluções é semelhante, nesse caso, a quando as raízes são reais e distintas. Se os expoentes são positivos ou negativos, então a solução, em módulo, aumenta ou diminui de acordo; o fator linear t tem pouca influência. A Figura 3.4.1 mostra uma solução decaindo e a Figura 3.4.2 mostra duas soluções crescendo em módulo. No entanto, se a raiz repetida é nula, então a equação diferencial é $y'' = 0$ e a solução geral é uma função linear de t.

Resumo. Podemos resumir, agora, os resultados obtidos para equações lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{1}$$

Sejam r_1 e r_2 as raízes do polinômio característico correspondente

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2}$$

Se r_1 e r_2 são reais e distintos, então a solução geral da equação diferencial (1) é

$$y = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}. \tag{24}$$

Se r_1 e r_2 são complexos conjugados $\lambda \pm i\mu$, então a solução geral é

$$y = c_1e^{\lambda t}\cos\mu t + c_2e^{\lambda t}\,\mathrm{sen}\,\mu t. \tag{25}$$

Se $r_1 = r_2$, então a solução geral é

$$y = c_1e^{r_1t} + c_2te^{r_1t}. \tag{26}$$

Redução de Ordem. Vale a pena observar que o procedimento usado anteriormente nesta seção para equações com coeficientes constantes é aplicável mais geralmente. Suponha que conhecemos uma solução $y_1(t)$, não identicamente nula, de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{27}$$

Para encontrar uma segunda solução, seja

$$y = v(t)y_1(t); \tag{28}$$

então,

$$y' = v'(t)y_1(t) + v(t)y_1'(t)$$

e

$$y'' = v''(t)y_1(t) + 2v'(t)y_1'(t) + v(t)y_1''(t).$$

Substituindo essas expressões para y, y' e y'' na Eq. (27) e juntando os termos, encontramos

$$y_1v'' + (2y_1' + py_1(v' +)y_1'' + py_1' + qy_1)v = 0. \tag{29}$$

Como y_1 é uma solução da Eq. (27), o coeficiente de v na Eq. (29) é zero, de modo que a Eq. (29) fica

$$y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0. \tag{30}$$

Apesar de sua aparência, a Eq. (30) é, de fato, uma equação de primeira ordem para a função v' e pode ser resolvida como uma equação de primeira ordem ou como uma equação separável. Uma vez encontrada v', v é obtida por integração. Finalmente, a solução y é determinada da Eq. (28). Este procedimento é chamado de método de redução de ordem, já que o passo crucial é a resolução de uma equação diferencial de primeira ordem para v', em vez da equação de segunda ordem original para y. Embora seja possível escrever uma fórmula para $v(t)$, vamos, em vez disso, ilustrar como o método funciona através de um exemplo.

EXEMPLO 3

Dado que $y_1(t) = t^{-1}$ é uma solução de

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad t > 0, \tag{31}$$

encontre um conjunto fundamental de soluções.

Vamos fazer $y = v(t)t^{-1}$; então

$$y' = v't^{-1} - vt^{-2}, \qquad y'' = v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}.$$

Substituindo y, y' e y'' na Eq. (31) e juntando os termos, obtemos

$$
\begin{aligned}
2t^2(v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}) + 3t(v't^{-1} - vt^{-2}) - vt^{-1} \\
= 2tv'' + (-4+3)v' + (4t^{-1} - 3t^{-1} - t^{-1})v \\
= 2tv'' - v' = 0. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Note que o coeficiente de v é nulo, como deveria; isso nos dá um ponto útil de verificação dos nossos cálculos.

Separando as variáveis na Eq. (32) e resolvendo para $v'(t)$, encontramos

$$v'(t) = ct^{1/2};$$

então,

$$v(t) = \tfrac{2}{3}ct^{3/2} + k.$$

Segue que

$$y = \tfrac{2}{3}ct^{1/2} + kt^{-1}, \qquad (33)$$

onde c e k são constantes arbitrárias. A segunda parcela na Eq. (33) é um múltiplo de y_1 e pode ser retirada, mas a primeira parcela nos dá uma solução nova $y_2(t) = t^{1/2}$. Você pode verificar que o wronskiano de y_1 e y_2 é

$$W(y_1, y_2)(t) = \tfrac{3}{2}t^{-3/2}, \quad t > 0. \qquad (34)$$

Em consequência, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 10, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y'' - 2y' + y = 0$
2. $9y'' + 6y' + y = 0$
3. $4y'' - 4y' - 3y = 0$
4. $4y'' + 12y' + 9y = 0$
5. $y'' - 2y' + 10y = 0$
6. $y'' - 6y' + 9y = 0$
7. $4y'' + 17y' + 4y = 0$
8. $16y'' + 24y' + 9y = 0$
9. $25y'' - 20y' + 4y = 0$
10. $2y'' + 2y' + y = 0$

Em cada um dos Problemas de 11 a 14, resolva o problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento quando t cresce.

11. $9y'' - 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
12. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
13. $9y'' + 6y' + 82y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$
14. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 1$
15. Considere o problema de valor inicial

$$4y'' + 12y' + 9y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -4.$$

(a) Resolva o problema de valor inicial e faça o gráfico de sua solução para $0 \le t \le 5$.
(b) Determine onde a solução tem valor zero.
(c) Determine as coordenadas (t_0, y_0) do ponto de mínimo.
(d) Mude a segunda condição inicial para $y'(0) = b$ e encontre a solução como função de b. Depois encontre o valor crítico de b que separa as soluções que permanecem positivas das que acabam se tornando negativas.

16. Considere a seguinte modificação do problema de valor inicial no Exemplo 2:

$$y'' - y' + 0{,}25y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = b.$$

Encontre a solução em função de b e depois determine o valor crítico de b que separa as soluções que crescem positivamente das que acabam crescendo em módulo, mas com valores negativos.

17. Considere o problema de valor inicial

$$4y'' + 4y' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

(a) Resolva o problema de valor inicial e faça o gráfico da solução.
(b) Determine as coordenadas (t_M, y_M) do ponto de máximo.
(c) Mude a segunda condição inicial para $y'(0) = b > 0$ e encontre a solução como função de b.
(d) Encontre as coordenadas do ponto de máximo (t_M, y_M) em função de b. Descreva a dependência em b de t_M e de y_M quando b aumenta.

18. Considere o problema de valor inicial

$$9y'' + 12y' + 4y = 0, \qquad y(0) = a > 0, \quad y'(0) = -1.$$

(a) Resolva o problema de valor inicial.

(b) Encontre o valor crítico de a que separa as soluções que se tornam negativas das que permanecem positivas.

19. Se as raízes da equação característica são reais, mostre que uma solução de $ay'' + by' + cy = 0$ é identicamente nula ou pode assumir o valor zero no máximo uma vez.

Os Problemas de 20 a 22 indicam outras maneiras de se encontrar uma segunda solução quando a equação característica tem raízes repetidas.

20. (a) Considere a equação $y'' + 2ay' + a^2y = 0$. Mostre que as raízes da equação característica são $r_1 = r_2 = -a$, de modo que uma solução da equação é e^{-at}.

(b) Use a fórmula de Abel [Eq. (22) da Seção 3.2] para mostrar que o wronskiano de duas soluções quaisquer da equação dada é

$$W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = c_1e^{-2at},$$

onde c_1 é constante.

(c) Seja $y_1(t) = e^{-at}$ e use o resultado do item (b) para obter uma equação diferencial satisfeita por uma segunda solução $y_2(t)$. Resolvendo essa equação, mostre que $y_2(t) = te^{-at}$.

21. Suponha que r_1 e r_2 são raízes de $ar^2 + br + c = 0$ e que $r_1 \neq r_2$; então, $\exp(r_1t)$ e $\exp(r_2t)$ são soluções da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. Mostre que $\phi(t; r_1, r_2) = [\exp(r_2t) - \exp(r_1t)]/(r_2 - r_1)$ também é solução da equação para $r_2 \neq r_1$. Depois, pense em r_1 como fixo e use a regra de L'Hospital para calcular o limite de $\phi(t; r_1, r_2)$ quando $r_2 \to r_1$, obtendo, assim, a segunda solução no caso de raízes iguais.

22. (a) Se $ar^2 + br + c = 0$ tem raízes iguais r_1, mostre que

$$L[e^{rt}] = a(e^{rt})'' + b(e^{rt})' + ce^{rt} = a(r - r_1)^2e^{rt}. \tag{i}$$

Como a última expressão à direita na Eq. (i) é nula quando $r = r_1$, segue que $\exp(r_1t)$ é uma solução de $L[y] = ay'' + by' + cy = 0$.

(b) Diferencie a Eq. (i) em relação a r e mude as ordens das derivadas em relação a r e a t, mostrando, assim, que

$$\frac{\partial}{\partial r}L[e^{rt}] = L\left[\frac{\partial}{\partial r}e^{rt}\right] = L[te^{rt}] = ate^{rt}(r - r_1)^2 + 2ae^{rt}(r - r_1). \tag{ii}$$

Como a última expressão à direita na Eq. (ii) é zero quando $r = r_1$, conclua que $t\exp(r_1t)$ também é solução de $L[y] = 0$.

Em cada um dos Problemas de 23 a 30, use o método de redução de ordem para encontrar uma segunda solução da equação diferencial dada.

23. $t^2y'' - 4ty' + 6y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^2$
24. $t^2y'' + 2ty' - 2y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t$
25. $t^2y'' + 3ty' + y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^{-1}$
26. $t^2y'' - t(t + 2)y' + (t + 2)y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t$
27. $xy'' - y' + 4x^3y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = \operatorname{sen} x^2$
28. $(x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1; \quad y_1(x) = e^x$
29. $x^2y'' - (x - 0{,}1875)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{1/4}e^{2\sqrt{x}}$
30. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0{,}25)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$
31. A equação diferencial

$$xy'' - (x + N)y' + Ny = 0,$$

onde N é um inteiro não negativo, foi discutida por diversos autores.[6] Uma razão para esse interesse é que ela tem uma solução exponencial e uma solução polinomial.

(a) Verifique que uma solução é $y_1(x) = e^x$.

(b) Mostre que uma segunda solução tem a forma $y_2(x) = c\,e^x \int x^N e^{-x}dx$. Calcule $y_2(x)$ para $N = 1$ e $N = 2$; convença-se de que, com $c = -1/N!$,

[6] T. A. Newton, "On Using a Differential Equation to Generate Polynomials", *American Mathematical Monthly 81*(1974), pp. 592-601. Veja, também, as referências citadas ali.

$$y_2(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^N}{N!}.$$

Note que $y_2(x)$ é precisamente a soma das $N + 1$ primeiras parcelas da série de Taylor para e^x em torno de $x = 0$, ou seja, da série de Taylor para $y_1(x)$.

32. A equação diferencial

$$y'' + \delta(xy' + y) = 0$$

aparece no estudo da turbulência em um fluxo uniforme ao passar por um cilindro circular. Verifique que $y_1(x) = \exp(-\delta x^2/2)$ é uma solução, e depois encontre a solução geral na forma de uma integral.

33. O método do Problema 20 pode ser estendido para equações de segunda ordem com coeficientes variáveis. Se y_1 é uma solução conhecida de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ que não se anula, mostre que uma segunda solução y_2 satisfaz $(y_2/y_1)' = W(y_1, y_2)/y_1^2$, onde $W(y_1, y_2)$ é o wronskiano de y_1 e y_2. Depois use a fórmula de Abel [Eq. (22) da Seção 3.2] para determinar y_2.

Em cada um dos Problemas de 34 a 37, use o método do Problema 33 para encontrar uma segunda solução independente da equação dada.

34. $t^2y'' + 3ty' + y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^{-1}$
35. $ty'' - y' + 4t^3y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = \operatorname{sen}(t^2)$
36. $(x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1; \quad y_1(x) = e^x$
37. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0{,}25)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$

Comportamento de Soluções quando $t \to \infty$. Os Problemas de 38 a 40 tratam do comportamento de soluções no limite quando $t \to \infty$.

38. Se a, b e c são constantes positivas, mostre que todas as soluções de $ay'' + by' + cy = 0$ tendem a zero quando $t \to \infty$.
39. (a) Se $a > 0$ e $c > 0$, mas $b = 0$, mostre que o resultado do Problema 38 não continua válido, mas que todas as soluções permanecem limitadas quando $t \to \infty$.
    (b) Se $a > 0$ e $b > 0$, mas $c = 0$, mostre que o resultado do Problema 38 não continua válido, mas que todas as soluções tendem a uma constante, que depende da condição inicial, quando $t \to \infty$. Determine essa constante para as condições iniciais $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$.
40. Mostre que $y = \operatorname{sen} t$ é uma solução de

$$y'' + (k\operatorname{sen}^2 t)y' + (1 - k\cos t\operatorname{sen} t)y = 0$$

para qualquer valor da constante k. Se $0 < k < 2$, mostre que $1 - k\cos t\operatorname{sen} t > 0$ e $k\operatorname{sen}^2 t \geq 0$. Observe então que, embora os coeficientes dessa equação diferencial com coeficientes variáveis sejam não negativos (e o coeficiente de y' se anule apenas nos pontos $t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$), ela tem uma solução que não tende a zero quando $t \to \infty$. Compare essa situação com o resultado do Problema 38. Observamos, assim, uma situação que não é incomum na teoria de equações diferenciais: equações aparentemente bastante semelhantes podem ter propriedades muito diferentes.

Equações de Euler. Em cada um dos Problemas 41 e 42, use a substituição introduzida no Problema 34 da Seção 3.3 para resolver a equação diferencial dada.

41. $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0, \quad t > 0$
42. $t^2y'' + 2ty' + 0{,}25y = 0, \quad t > 0$
43. $2t^2y'' - 5ty' + 5y = 0, \quad t > 0$
44. $t^2y'' + 3ty' + y = 0, \quad t > 0$
45. $4t^2y'' - 8ty' + 9y = 0, \quad t > 0$
46. $t^2y'' + 5ty' + 13y = 0, \quad t > 0$

3.5 Equações Não Homogêneas; Método dos Coeficientes Indeterminados

Vamos retornar à equação não homogênea

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{1}$$

onde p, q e g são funções (contínuas) dadas em um intervalo aberto I. A equação

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{2}$$

na qual $g(t) = 0$ e p e q são as mesmas que na Eq. (1). é chamada de equação homogênea associada à Eq. (1). Os dois resultados a seguir descrevem a estrutura de soluções da equação não homogênea (1) e fornecem uma base para a construção de sua solução geral.

Teorema 3.5.1 Se Y_1 e Y_2 são duas soluções da equação não homogênea (1), então sua diferença $Y_1 - Y_2$ é uma solução da equação homogênea associada (2). Se, além disso, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções para a Eq. (2), então

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \tag{3}$$

onde c_1 e c_2 são constantes determinadas.

Para provar esse resultado, note que Y_1 e Y_2 satisfazem as equações

$$L[Y_1](t) = g(t), \qquad L[Y_2](t) = g(t). \tag{4}$$

Subtraindo a segunda da primeira dessas equações, temos

$$L[Y_1](t) - L[Y_2](t) = g(t) - g(t) = 0. \tag{5}$$

No entanto,

$$L[Y_1] - L[Y_2] = L[Y_1 - Y_2],$$

de modo que a Eq. (5) fica

$$L[Y_1 - Y_2](t) = 0. \tag{6}$$

A Eq. (6) diz que $Y_1 - Y_2$ é uma solução da Eq. (2). Finalmente, como todas as soluções da Eq. (2) podem ser expressas como uma combinação linear das funções em um conjunto fundamental de soluções pelo Teorema 3.2.4, segue que a solução $Y_1 - Y_2$ também pode ser expressa nessa forma. Logo, a Eq. (3) é válida e a demonstração está completa.

Teorema 3.5.2 A solução geral da equação não homogênea (1) pode ser escrita na forma

$$y = \phi(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + Y(t), \tag{7}$$

onde y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada (2), c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e Y é alguma solução específica da equação não homogênea (1).

A demonstração do Teorema 3.5.2 segue rapidamente do teorema precedente. Note que a Eq. (3) é válida se identificarmos Y_1 com uma solução arbitrária ϕ da Eq. (1) e Y_2 com a solução específica Y. Da Eq. (3) obtemos, assim,

$$\phi(t) - Y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \tag{8}$$

que é equivalente à Eq. (7). Como ϕ é uma solução arbitrária da Eq. (1), a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (7) inclui todas as soluções da Eq. (1): é natural, portanto, chamá-la de solução geral da Eq. (1).

Colocando de maneira um pouco diferente, o Teorema 3.5.2 diz que, para resolver a equação não homogênea (1), precisamos fazer três coisas:

1. Encontrar a solução geral $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ da equação homogênea associada. Essa solução é chamada, muitas vezes, de solução complementar e pode ser denotada por $y_c(t)$.
2. Encontrar uma única solução $Y(t)$ da equação não homogênea. Referimo-nos a essa solução, muitas vezes, como uma solução particular.
3. Somar as duas funções encontradas nas duas etapas precedentes.

Já discutimos como encontrar $y_c(t)$, pelo menos quando a equação homogênea (2) tem coeficientes constantes. Portanto, no restante desta seção e na próxima focalizaremos nossa atenção em encontrar uma solução particular $Y(t)$ da equação não homogênea (1). Existem dois métodos que gostaríamos de discutir. Eles são conhecidos como o método dos coeficientes indeterminados (discutido aqui) e o método de variação dos parâmetros (veja a Seção 3.6), respectivamente. Cada um tem vantagens e desvantagens.

O Método dos Coeficientes Indeterminados. O método dos coeficientes indeterminados (ou a determinar) requer uma hipótese inicial sobre a forma da solução particular $Y(t)$, mas com os coeficientes não especificados. Substituímos, então, a expressão hipotética na Eq. (1) e tentamos determinar os coeficientes de modo que a equação seja satisfeita. Se tivermos sucesso, teremos encontrado uma solução da equação diferencial (1) e podemos usá-la como a solução particular $Y(t)$. Se não pudermos determinar os coeficientes, isso significa que não existe solução da forma que supusemos. Nesse caso, temos que modificar a hipótese inicial e tentar de novo.

A maior vantagem do método dos coeficientes indeterminados é que ele é fácil de executar, uma vez feita a hipótese sobre a forma de $Y(t)$. Sua maior limitação é que é útil principalmente para equações para as quais é fácil escrever a forma correta da solução particular antecipadamente. Por essa razão, este método só é usado, em geral, para problemas nos quais a equação homogênea tem coeficientes constantes e o termo não homogêneo pertence a uma classe relativamente pequena de funções. Em particular, consideramos apenas termos homogêneos consistindo em polinômios, funções exponenciais, senos e cossenos. Apesar dessa limitação, o método dos coeficientes indeterminados é útil para resolver muitos problemas que têm aplicações importantes. No entanto, os detalhes dos cálculos podem ser bastante tediosos, e um sistema de álgebra computacional pode ser muito útil nas aplicações práticas. Ilustraremos o método dos coeficientes indeterminados através de diversos exemplos e depois resumiremos algumas regras para usá-lo.

EXEMPLO 1

Encontre uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}. \tag{9}$$

Procuramos uma função Y tal que $Y''(t) - 3Y'(t) - 4Y(t)$ seja igual a $3e^{2t}$. Como uma função exponencial se reproduz pela diferenciação, a maneira mais plausível de obter o resultado desejado é supor que $Y(t)$ é algum múltiplo de e^{2t}, ou seja,

$$Y(t) = Ae^{2t},$$

onde o coeficiente A ainda precisa ser determinado. Para encontrar A, vamos calcular

$$Y'(t) = 2Ae^{2t}, \qquad Y''(t) = 4Ae^{2t},$$

e substituir na Eq. (9). Obtemos

$$(4A - 6A - 4A)e^{2t} = 3e^{2t}.$$

Portanto, $-6Ae^{2t}$ tem que ser igual a $3e^{2t}$, logo $A = -1/2$. Assim, uma solução particular é

$$Y(t) = -\tfrac{1}{2}e^{2t}. \tag{10}$$

EXEMPLO 2

Encontre uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 2\operatorname{sen} t. \tag{11}$$

Por analogia com o Exemplo 1, vamos supor primeiro que $Y(t) = A \operatorname{sen} t$, onde A é uma constante a ser determinada. Substituindo na Eq. (11) e rearrumando os termos, obtemos

$$-5A \operatorname{sen} t - 3A \cos t = 2 \operatorname{sen} t,$$

ou

$$(2 + 5A) \operatorname{sen} t + 3A \cos t = 0. \tag{12}$$

Queremos que a Eq. (12) seja válida para todo t. Então ela tem que ser válida em dois pontos específicos, como $t = 0$ e $t = \pi/2$. Nesses pontos, a Eq. (12) se reduz a $3A = 0$ e $2 + 5A = 0$, respectivamente. Essas condições contraditórias significam que não existe escolha da constante A que torne a Eq. (12) válida para $t = 0$ e $t = \pi/2$, muito menos para todo t. Podemos concluir, então, que nossa hipótese sobre $Y(t)$ não foi adequada. A aparição de um termo em cosseno na Eq. (12) sugere que modifiquemos nossa hipótese original, incluindo um termo em cosseno em $Y(t)$, ou seja,

$$Y(t) = A\,\text{sen}\,t + B\cos t,$$

onde A e B são constantes a serem determinadas. Logo,

$$Y'(t) = A\cos t - B\,\text{sen}\,t, \qquad Y''(t) = -A\,\text{sen}\,t - B\cos t.$$

Substituindo na Eq. (11) e juntando os termos, obtemos

$$(-A + 3B - 4A)\,\text{sen}\,t + (-B - 3A - 4B)\cos t = 2\,\text{sen}\,t. \tag{13}$$

Para satisfazer a Eq. (13), precisamos igualar os coeficientes de sen t e de cos t nos dois lados da equação; assim, A e B têm que satisfazer as equações

$$-5A + 3B = 2, \qquad -3A - 5B = 0.$$

Portanto, $A = -5/17$ e $B = 3/17$, de modo que uma solução particular da Eq. (11) é

$$Y(t) = -\tfrac{5}{17}\,\text{sen}\,t + \tfrac{3}{17}\cos t.$$

O método ilustrado nos exemplos precedentes também pode ser usado quando a expressão à direita do sinal de igualdade é um polinômio. Assim, para encontrar uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 4t^2 - 1, \tag{14}$$

supomos, inicialmente, que $Y(t)$ é um polinômio de mesmo grau que o termo não homogêneo, ou seja, $Y(t) = At^2 + Bt + C$.

Para resumir nossas conclusões até agora: se o termo não homogêneo $g(t)$ na Eq. (1) for uma função exponencial $e^{\alpha t}$, suponha que $Y(t)$ é proporcional a essa mesma função exponencial; se $g(t)$ for igual a sen βt ou a cos βt, suponha que Y é uma combinação linear de sen βt e cos βt; se $g(t)$ for um polinômio, suponha que $Y(t)$ é um polinômio de mesmo grau. O mesmo princípio se estende ao caso em que $g(t)$ é um produto de quaisquer dois ou três desses tipos de funções, como mostra o próximo exemplo.

EXEMPLO 3

Encontre uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^t\cos 2t. \tag{15}$$

Neste caso, supomos que $Y(t)$ é o produto de e^t com uma combinação linear de cos $2t$ e sen $2t$, ou seja,

$$Y(t) = Ae^t\cos 2t + Be^t\,\text{sen}\,2t.$$

Os cálculos algébricos são mais tediosos neste exemplo, mas segue que

$$Y'(t) = (A + 2B)e^t\cos 2t + (-2A + B)e^t\,\text{sen}\,2t$$

e

$$Y''(t) = (-3A + 4B)e^t\cos 2t + (-4A - 3B)e^t\,\text{sen}\,2t.$$

Substituindo essas expressões na Eq. (15), encontramos que A e B têm que satisfazer

$$10A + 2B = 8, \qquad 2A - 10B = 0.$$

Portanto, $A = 10/13$ e $B = 2/13$; logo, uma solução particular da Eq. (15) é

$$Y(t) = \tfrac{10}{13}e^t\cos 2t + \tfrac{2}{13}e^t\,\text{sen}\,2t.$$

Suponha, agora, que $g(t)$ é uma soma de dois termos, $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, e suponha que Y_1 e Y_2 são soluções das equações

$$ay'' + by' + cy = g_1(t) \tag{16}$$

e

$$ay'' + by' + cy = g_2(t), \tag{17}$$

respectivamente. Então, $Y_1 + Y_2$ é uma solução da equação

$$ay'' + by' + cy = g(t). \tag{18}$$

Para provar esta afirmação, substitua y na Eq. (18) por $Y_1(t) + Y_2(t)$ e use as Eqs. (16) e (17). Uma conclusão semelhante é válida se $g(t)$ é uma soma de um número finito de parcelas. O significado prático deste resultado é que, para resolver uma equação cuja função não homogênea $g(t)$ pode ser expressa como uma soma, pode-se resolver diversas equações mais simples e depois somar os resultados. O exemplo a seguir ilustra esse procedimento.

EXEMPLO 4

Encontre uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} + 2\,\text{sen}\,t - 8e^t \cos 2t. \tag{19}$$

Separando a expressão à direita do sinal de igualdade, obtemos três equações:

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t},$$
$$y'' - 3y' - 4y = 2\,\text{sen}\,t,$$

e

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^t \cos 2t.$$

Foram encontradas soluções dessas três equações nos Exemplos 1, 2 e 3, respectivamente. Portanto, uma solução particular da Eq. (9) é sua soma, ou seja,

$$Y(t) = -\tfrac{1}{2}e^{2t} + \tfrac{3}{17}\cos t - \tfrac{5}{17}\,\text{sen}\,t + \tfrac{10}{13}e^t \cos 2t + \tfrac{2}{13}e^t\,\text{sen}\,2t.$$

O procedimento ilustrado nesses exemplos nos permite resolver uma classe grande de problemas de um modo razoavelmente eficiente. No entanto, existe uma dificuldade que ocorre às vezes. O próximo exemplo mostra como isso acontece.

EXEMPLO 5

Encontre uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}. \tag{20}$$

Procedendo como no Exemplo 1, vamos supor que $Y(t) = Ae^{-t}$. Substituindo na Eq. (20), obtemos

$$(A + 3A - 4A)e^{-t} = 2e^{-t}. \tag{21}$$

Como a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (21) é zero, não existe escolha de A que satisfaça esta equação. Portanto, não existe solução particular da Eq. (20) que tenha a forma suposta. A razão para esse resultado, possivelmente inesperado, torna-se clara se resolvermos a equação homogênea

$$y'' - 3y' - 4y = 0 \tag{22}$$

associada à Eq. (20). Um conjunto fundamental de soluções para a Eq. (22) é formado por $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = e^{4t}$. Assim, a forma suposta da solução particular para a Eq. (20) era, de fato, solução da equação homogênea (22); em consequência, não pode ser solução da equação não homogênea (20). Para encontrar uma solução da Eq. (20), precisamos considerar então funções de uma forma um pouco diferente.

Neste ponto temos diversas alternativas possíveis. Uma é tentar simplesmente adivinhar a forma apropriada da solução particular da Eq. (20). Outra é resolver esta equação de outra maneira e depois usar o resultado para orientar nossas hipóteses se essa situação aparecer novamente no futuro; veja os Problemas 27 e 33 para outros métodos de solução. Outra possibilidade é buscar uma equação mais simples onde essa dificuldade ocorre e usar sua solução para sugerir como proceder com a Eq. (20). Adotando esta última abordagem, vamos procurar uma equação de primeira ordem análoga à Eq. (20). Uma possibilidade é a equação linear

$$y' + y = 2e^{-t}. \tag{23}$$

Se tentarmos encontrar uma solução particular da Eq. (23) da forma Ae^{-t} não conseguiremos, pois e^{-t} é uma solução da equação homogênea associada $y' + y = 0$. No entanto, já vimos na Seção 2.1 como resolver a Eq. (23). Um fator integrante é $\mu(t) = e^t$; multiplicando a equação por $\mu(t)$ e integrando, obtemos a solução

$$y = 2te^{-t} + ce^{-t}. \tag{24}$$

A segunda parcela à direita na Eq. (24) é a solução geral da equação homogênea $y' + y = 0$, mas a primeira é uma solução da equação não homogênea completa (23). Observe que a solução envolve um fator exponencial e^{-t} multiplicado por um fator t. Essa é a pista que estávamos procurando.

Vamos agora voltar para a Eq. (20) e supor uma solução particular da forma $Y(t) = Ate^{-t}$. Então

$$Y'(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t}, \qquad Y''(t) = -2Ae^{-t} + Ate^{-t}. \tag{25}$$

Substituindo y, y' e y'' na Eq. (20) por essas expressões, obtemos

$$(-2A - 3A)e^{-t} = (A + 3A - 4A)te^{-t} = 2e^{-t}.$$

Portanto, $-5A = 2$, de modo que $A = -2/5$. Logo, uma solução particular da Eq. (20) é

$$Y(t) = -\tfrac{2}{5}te^{-t}. \tag{26}$$

O resultado do Exemplo 5 sugere uma modificação do princípio enunciado anteriormente: se a forma suposta da solução particular duplica uma solução da equação homogênea associada, modifique sua hipótese multiplicando a suposta solução particular por t. De vez em quando essa modificação não será suficiente para remover todas as duplicações com as soluções da equação homogênea, caso em que é necessário multiplicar por t uma segunda vez. Para uma equação de segunda ordem, nunca será necessário continuar esse processo.

Resumo. Vamos resumir as etapas envolvidas em encontrar a solução de um problema de valor inicial consistindo em uma equação não homogênea da forma

$$ay'' + by' + cy = g(t), \tag{27}$$

onde os coeficientes a, b e c são constantes, junto com um par de condições iniciais dado:

1. Encontre a solução geral da equação homogênea associada.
2. Certifique-se de que a função $g(t)$ na Eq. (27) pertence à classe de funções discutidas nesta seção, ou seja, não envolve outras funções além de exponenciais, senos, cossenos, polinômios ou somas ou produtos de tais funções. Se não for esse o caso, use o método de variação dos parâmetros (discutido na próxima seção).
3. Se $g(t) = g_1(t) + \ldots + g_n(t)$, isso é, se $g(t)$ é uma soma de n parcelas, então forme n subproblemas, cada um dos quais contendo apenas uma das parcelas $g_1(t), \ldots, g_n(t)$. O i-ésimo subproblema consiste na equação

   $$ay'' + by' + cy = g_i(t),$$

   onde i varia de 1 a n.
4. Para o i-ésimo subproblema, suponha uma solução particular $Y_i(t)$ consistindo na função apropriada, seja ela exponencial, seno, cosseno, polinomial ou uma combinação dessas. Se existir qualquer duplicação na forma suposta de $Y_i(t)$ com as soluções da equação homogênea (encontrada na etapa 1), então multiplique $Y_i(t)$ por t ou (se necessário) por t^2, de modo a remover a duplicação. Veja a Tabela 3.5.1.
5. Encontre uma solução particular $Y_i(t)$ para cada um dos subproblemas. Então a soma $Y_1(t) + \ldots + Y_n(t)$ é uma solução particular da equação não homogênea completa (27).
6. Forme a soma da solução geral da equação homogênea (etapa 1) com a solução particular da equação não homogênea (etapa 5). Essa é a solução geral da equação não homogênea.
7. Use as condições iniciais para determinar os valores das constantes arbitrárias na solução geral.

Para alguns problemas todo esse procedimento é fácil de ser feito à mão, mas em muitos casos necessita de uma quantidade considerável de cálculos algébricos. Uma vez que você tenha compreendido claramente como o método funciona, um sistema de álgebra computacional pode ser de grande auxílio para executar os detalhes.

TABELA 3.5.1 A solução particular de $ay'' + by' + cy = g_i(t)$

$g_i(t)$	$Y_i(t)$
$P_n(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_n$	$t^s(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n)$
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha t}$
$P_n(t)e^{\alpha t}\begin{cases}\operatorname{sen}\beta t\\ \cos\beta t\end{cases}$	$t^s[(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha t}\cos\beta t$ $+ (B_0t^n + B_1t^{n-1} + \cdots + B_n)e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t]$

Notas. Aqui s é o menor inteiro não negativo ($s = 0$, 1 ou 2) que garantirá que nenhuma parcela de $Y_i(t)$ é solução da equação homogênea associada. Equivalentemente, para os três casos s é o número de vezes que 0 é uma raiz da equação característica, α é uma raiz da equação característica e $\alpha + i\beta$ é uma raiz da equação característica, respectivamente.

O método dos coeficientes indeterminados corrige a si mesmo no sentido de que se você supuser muito pouco sobre $Y(t)$ chegará logo a uma contradição que, em geral, vai apontar o caminho para a modificação necessária na forma suposta. Por outro lado, se você supuser termos demais vai ter um trabalho desnecessário e alguns coeficientes ficarão iguais a zero, mas, pelo menos, chegará à resposta correta.

Demonstração do Método dos Coeficientes Indeterminados. Na discussão precedente, descrevemos o método dos coeficientes indeterminados baseados em diversos exemplos. Para provar que o procedimento sempre funciona como enunciado, vamos dar um argumento geral, onde consideramos diversos casos correspondendo a formas diferentes do termo não homogêneo $g(t)$.

$\boldsymbol{g(t) = P_n(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_n}$**.** Neste caso a Eq. (27) fica

$$ay'' + by' + cy = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_n. \tag{28}$$

Para obter uma solução particular, supomos que

$$Y(t) = A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_{n-2}t^2 + A_{n-1}t + A_n. \tag{29}$$

Substituindo na Eq. (28), obtemos

$$\begin{aligned} &a[n(n-1)A_0t^{n-2} + \cdots + 2A_{n-2}] + b(nA_0t^{n-1} + \cdots + A_{n-1} \\ &+ c(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n) = a_0t^n + \cdots + a_n. \end{aligned} \tag{30}$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de t nos dá

$$\begin{aligned} cA_0 &= a_0, \\ cA_1 + nbA_0 &= a_1, \\ &\vdots \\ cA_n + bA_{n-1} + 2aA_{n-2} &= a_n. \end{aligned}$$

Se $c \neq 0$, a solução da primeira equação é $A_0 = a_0/c$ e as equações restantes determinam $A_1, \ldots, A_n$ sucessivamente. Se $c = 0$, mas $b \neq 0$, então o polinômio à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (30) tem grau $n - 1$ e a Eq. (30) não pode ser satisfeita. Para garantir que $aY''(t) + bY'(t)$ é um polinômio de grau n, precisamos escolher $Y(t)$ como um polinômio de grau $n + 1$. Supomos, então, que

$$Y(t) = t(A_0t^n + \cdots + A_n).$$

Não existe parcela constante nessa expressão para $Y(t)$, mas não há necessidade de incluir tal parcela, já que constantes são soluções da equação homogênea quando $c = 0$. Como $b \neq 0$, temos $A_0 = a_0/b(n + 1)$ e os outros coeficientes $A_1, \ldots, A_n$ podem ser determinados analogamente. Se c e b são iguais a zero, vamos supor que

$$Y(t) = t^2(A_0t^n + \cdots + A_n).$$

O termo $aY''(t)$ é um polinômio de grau n, e podemos proceder como anteriormente. Novamente, as parcelas constante e linear em $Y(t)$ são omitidas, já que, nesse caso, ambas são soluções da equação homogênea.

$\boldsymbol{g(t) = e^{\alpha t}P_n(t)}$**.** O problema de determinar uma solução particular de

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha t}P_n(t) \tag{31}$$

pode ser reduzido ao caso precedente através de uma substituição. Seja

$$Y(t) = e^{\alpha t}u(t);$$

então

$$Y'(t) = e^{\alpha t}[u'(t) + \alpha u(t)]$$

e

$$Y''(t) = e^{\alpha t}[u''(t) + 2\alpha u'(t) + \alpha^2u(t)].$$

Substituindo y, y' e y'' na Eq. (31), cancelando o fator $e^{\alpha t}$ e juntando os termos semelhantes, obtemos

$$au''(t) + (2a\alpha + b)u'(t) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)u(t) = P_n(t). \tag{32}$$

A determinação de uma solução particular da Eq. (32) é precisamente o mesmo problema, exceto pelo nome das constantes, que resolver a Eq. (28). Portanto, se $a\alpha^2 + b\alpha + c$ não for zero, supomos que $u(t) = A_0t^n + \ldots + A_n$; logo, uma solução particular da Eq. (31) é da forma

$$Y(t) = e^{\alpha t}(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n). \tag{33}$$

Por outro lado, se $a\alpha^2 + b\alpha + c$ for zero, mas $2a\alpha + b$ não for, precisamos tomar $u(t)$ da forma $t(A_0t^n + \ldots + A_n)$. A forma correspondente para $Y(t)$ é t vezes a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (33). Note que, se $a\alpha^2 + b\alpha + c$ for zero, então $e^{\alpha t}$ é uma solução da equação homogênea. Se ambos, $a\alpha^2 + b\alpha + c$ e $2a\alpha + b$, forem nulos (e isso implica que tanto $e^{\alpha t}$ quanto $te^{\alpha t}$ são soluções da equação homogênea), então a forma correta para $u(t)$ é $t^2(A_0t^n + \ldots + A_n)$. Portanto, $Y(t)$ é t^2 vezes a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (33).

$g(t) = e^{\alpha t}P_n(t)\cos\beta t$ ou $e^{\alpha t}P_n(t)\mathrm{sen}\beta t$. Estes dois casos são semelhantes, logo consideraremos apenas o último. Podemos reduzir este problema ao precedente notando que, em consequência da fórmula de Euler, sen $\beta t = (e^{i\beta t} - e^{-i\beta t})/2i$. Portanto, $g(t)$ é da forma

$$g(t) = P_n(t)\frac{e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i},$$

e devemos escolher

$$Y(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(A_0t^n + \cdots + A_n) + e^{(\alpha-i\beta)t}(B_0t^n + \cdots + B_n),$$

ou, equivalentemente,

$$Y(t) = e^{\alpha t}(A_0t^n + \cdots + A_n)\cos\beta t + e^{\alpha t}(B_0t^n + \cdots + B_n)\,\mathrm{sen}\beta t.$$

Em geral, prefere-se esta última forma. Se $\alpha \pm i\beta$ satisfazem a equação característica correspondente a equação homogênea, temos, é claro, que multiplicar cada um dos polinômios por t para aumentar o grau de um.

Se a função não homogênea envolve $\cos\beta t$ e $\mathrm{sen}\beta t$, é conveniente, em geral, tratar esses termos em conjunto, já que cada um, individualmente, pode gerar a mesma forma de solução particular. Por exemplo, se $g(t) = t\,\mathrm{sen}t + 2\cos t$, a forma de $Y(t)$ seria

$$Y(t) = (A_0t + A_1)\,\mathrm{sen}t + (B_0t + B_1)\cos t,$$

desde que sen t e cos t não sejam soluções da equação homogênea.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 12, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$
2. $y'' + 2y' + 5y = 3\,\mathrm{sen}\,2t$
3. $y'' - 2y' - 3y = -3te^{-t}$
4. $y'' + 2y' = 3 + 4\,\mathrm{sen}\,2t$
5. $y'' + 9y = t^2e^{3t} + 6$
6. $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$
7. $2y'' + 3y' + y = t^2 + 3\,\mathrm{sen}\,t$
8. $y'' + y = 3\,\mathrm{sen}\,2t + t\cos 2t$
9. $u'' + \omega_0^2u = \cos\omega t, \quad \omega^2 \neq \omega_0^2$
10. $u'' + \omega_0^2u = \cos\omega_0t$
11. $y'' + y' + 4y = 2\,\mathrm{senh}t$ *Sugestão:* $\mathrm{senh}\,t = (e^t - e^{-t})/2$
12. $y'' - y' - 2y = \cosh 2t$ *Sugestão:* $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$

Em cada um dos Problemas de 13 a 18, encontre a solução do problema de valor inicial dado.

13. $y'' + y' - 2y = 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
14. $y'' + 4y = t^2 + 3e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
15. $y'' - 2y' + y = te^t + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
16. $y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
17. $y'' + 4y = 3\,\mathrm{sen}\,2t \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
18. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}\cos 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

Em cada um dos Problemas de 19 a 26:

(a) Determine uma forma adequada para $Y(t)$ para se usar o método dos coeficientes indeterminados.

(b) Use um sistema de álgebra computacional para encontrar uma solução particular da equação dada.

19. $y'' + 3y' = 2t^4 + t^2e^{-3t} + \operatorname{sen} 3t$
20. $y'' + y = t(1 + \operatorname{sen} t)$
21. $y'' - 5y' + 6y = e^t \cos 2t + e^{2t}(3t + 4) \operatorname{sen} t$
22. $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-t} = 2e^{-t} \cos t + 4e^{-t}t^2 \operatorname{sen} t$
23. $y'' - 4y' + 4y = 2t^2 + 4te^{2t} + t \operatorname{sen} 2t$
24. $y'' + 4y = t^2 \operatorname{sen} 2t + (6t + 7) \cos 2t$
25. $y'' + 3y' + 2y = e^t(t^2 + 1) \operatorname{sen} 2t + 3e^{-t} \cos t + 4e^t$
26. $y'' + 2y' + 5y = 3te^{-t} \cos 2t - 2te^{-2t} \cos t$
27. Considere a equação

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t} \qquad \text{(i)}$$

do Exemplo 5. Lembre-se de que $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = e^{4t}$ são soluções da equação homogênea associada. Adaptando o método de redução de ordem (Seção 3.4), busque uma solução da equação não homogênea da forma $Y(t) = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-t}$, onde $v(t)$ deverá ser determinado.

(a) Substitua $Y(t)$, $Y'(t)$ e $Y''(t)$ na Eq. (i) e mostre que $v(t)$ tem que satisfazer $v'' - 5v' = 2$.

(b) Seja $w(t) = v'(t)$ e mostre que $w(t)$ tem que satisfazer $w' - 5w = 2$. Resolva esta equação para $w(t)$.

(c) Integre $w(t)$ para encontrar $v(t)$ e depois mostre que

$$Y(t) = -\tfrac{2}{5}te^{-t} + \tfrac{1}{5}c_1e^{4t} + c_2e^{-t}.$$

A primeira parcela é a solução particular desejada da equação não homogênea. Note que é um produto de t e de e^{-t}.

28. Determine a solução geral de

$$y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^{N} a_m \operatorname{sen} m\pi t,$$

onde $\lambda > 0$ e $\lambda \neq m\pi$ para $m = 1, \ldots, N$.

29. Em muitos problemas físicos o termo não homogêneo pode ser especificado por fórmulas diferentes em períodos de tempo diferentes. Como exemplo, determine a solução $y = \phi(t)$ de

$$y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \pi, \\ \pi e^{\pi - t}, & t > \pi, \end{cases}$$

satisfazendo as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Suponha, também, que y e y' são contínuas em $t = \pi$. Faça o gráfico do termo não homogêneo e da solução em função do tempo.

Sugestão: primeiro resolva o problema de valor inicial para $t \le \pi$; depois resolva para $t > \pi$, determinando as constantes nesta última solução a partir das condições de continuidade em $t = \pi$.

30. Siga as instruções no Problema 29 para resolver a equação diferencial

$$y'' + 2y' + 5y = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \pi)2, \\ 0, & t > \pi)2 \end{cases}$$

com condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Comportamento de Soluções quando $t \to \infty$. Nos Problemas 31 e 32 continuamos a discussão iniciada nos Problemas de 38 a 40 da Seção 3.4. Considere a equação diferencial

$$ay'' + by' + cy = g(t), \qquad \text{(i)}$$

onde a, b e c são constantes positivas.

31. Se $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ são soluções da Eq. (i), mostre que $Y_1(t) - Y_2(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Este resultado é verdadeiro se $b = 0$?
32. Se $g(t) = d$, uma constante, mostre que toda solução da Eq. (i) tende a d/c quando $t \to \infty$. O que acontece se $c = 0$? E se b também for nulo?
33. Indicamos, neste problema, um procedimento[7] diferente para resolver a equação diferencial

[7]R. S. Luthar, "Another Approach to a Standard Differential Equation", *Two Year College Mathematics Journal 10* (1979), pp. 200-201; veja também D. C. Sandell e F. M. Stein, "Factorization of Operators of Second Order Linear Homogeneous Ordinary Differential Equations", *Two Year College Mathematics Journal 8* (1977), pp. 132-141, para uma discussão mais geral de operadores que fatoram.

$$y'' + by' + cy = (D^2 + bD + c)y = g(t), \tag{i}$$

onde b e c são constantes e D denota diferenciação em relação a t. Sejam r_1 e r_2 os zeros do polinômio característico da equação homogênea associada. Essas raízes podem ser reais e distintas, reais e iguais ou números complexos conjugados.

(a) Verifique que a Eq. (i) pode ser escrita na forma fatorada

$$(D - r_1)(D - r_2)y = g(t),$$

onde $r_1 + r_2 = -b$ e $r_1 r_2 = c$.

(b) Seja $u = (D - r_2)y$. Mostre que a solução da Eq. (i) pode ser encontrada resolvendo-se as duas equações de primeira ordem a seguir:

$$(D - r_1)u = g(t), \qquad (D - r_2)y = u(t).$$

Em cada um dos Problemas de 34 a 37, use o método do Problema 33 para resolver a equação diferencial dada.

34. $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$ (veja o Exemplo 1)
35. $2y'' + 3y' + y = t^2 = 3\,\text{sen}\,t$ (veja o Problema 7)
36. $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$ (veja o Problema 6)
37. $y'' + 2y' = 3 + 4\,\text{sen}\,2t$ (veja o Problema 4)

3.6 Variação dos Parâmetros

Vamos descrever, nesta seção, outro método para encontrar uma solução particular de uma equação não homogênea. Este método, conhecido como **variação dos parâmetros**, é devido a Lagrange e complementa muito bem o método dos coeficientes indeterminados. A principal vantagem do método de variação dos parâmetros é que é um *método geral*; pelo menos em princípio pode ser aplicado a qualquer equação, e não precisa de hipóteses detalhadas sobre a forma da solução. De fato, usaremos este método mais tarde nesta seção para deduzir uma fórmula para uma solução particular de uma equação diferencial linear não homogênea de segunda ordem arbitrária. Por outro lado, o método de variação dos parâmetros sempre precisa do cálculo de determinadas integrais envolvendo o termo não homogêneo da equação diferencial, o que pode apresentar dificuldades. Antes de olhar o método no caso geral, vamos ilustrar seu uso em um exemplo.

EXEMPLO 1

Encontre uma solução particular de

$$y'' + 4y = 3\csc t. \tag{1}$$

Observe que este problema não é um bom candidato para o método de coeficientes indeterminados como descrito na Seção 3.5, já que o termo não homogêneo, $g(t) = 3\csc t$, envolve um quociente (em vez de uma soma ou produto) de sen t ou cos t. Precisamos, portanto, de uma abordagem diferente. Note, também, que a equação homogênea associada à Eq. (1) é

$$y'' + 4y = 0, \tag{2}$$

e que a solução geral da Eq. (2) é

$$y_c(t) = c_1 \cos 2t + c_2\,\text{sen}\,2t. \tag{3}$$

A ideia básica no método de variação dos parâmetros é substituir as constantes c_1 e c_2 na Eq. (3) por funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$, respectivamente, e depois determinar essas funções de modo que a expressão resultante

$$y = u_1(t)\cos 2t + u_2(t)\,\text{sen}\,2t \tag{4}$$

seja solução da equação não homogênea (1).

Para determinar u_1 e u_2, precisamos substituir y na Eq. (1) pela Eq. (4). No entanto, mesmo sem fazer essa substituição podemos antecipar que o resultado será uma única equação envolvendo alguma combinação de u_1, u_2 e suas duas primeiras derivadas. Como temos apenas uma equação e duas funções desconhecidas, esperamos que existam muitas escolhas possíveis para u_1 e u_2 que satisfaçam nossas necessidades. De outra forma, podemos ser capazes de impor uma segunda condição de nossa escolha, obtendo, assim, duas equações para as duas funções desconhecidas u_1 e u_2. Vamos mostrar em breve (seguindo Lagrange) que é possível escolher essa segunda condição de maneira a tornar os cálculos muito mais eficientes.

Voltando à Eq. (4), diferenciando-a e rearrumando os termos, obtemos

$$y' = -2u_1(t)\,\text{sen}\,2t + 2u_2(t)\cos 2t + u_1'(t)\cos 2t + u_2'(t)\,\text{sen}\,2t. \tag{5}$$

Mantendo em mente a possibilidade de escolher uma segunda condição sobre u_1 e u_2, vamos exigir que a soma das duas últimas parcelas na Eq. (5) seja nula; ou seja, vamos exigir que

$$u_1'(t)\cos 2t + u_2'(t)\,\text{sen}\,2t = 0. \tag{6}$$

Segue então da Eq. (5) que

$$y' = -2u_1(t)\,\text{sen}\,2t + 2u_2(t)\cos 2t. \tag{7}$$

Embora o efeito, em última análise, da condição (6) ainda não esteja claro, pelo menos simplificou a expressão para y'. Continuando, diferenciando a Eq. (7), obtemos

$$y'' = -4u_1(t)\cos 2t - 4u_2(t)\,\text{sen}\,2t - 2u_1'(t)\,\text{sen}\,2t + 2u_2'(t)\cos 2t. \tag{8}$$

Então, substituindo y e y'' na Eq. (1) pelas Eqs. (4) e (8), respectivamente, vemos que u_1 e u_2 têm que satisfazer

$$-2u_1'(t)\,\text{sen}\,2t + 2u_2'(t)\cos 2t = 3\csc t. \tag{9}$$

Resumindo nossos resultados até agora, queremos escolher u_1 e u_2 de modo a satisfazer as Eqs. (6) e (9). Essas equações podem ser consideradas como um par de equações lineares *algébricas* para as quantidades desconhecidas $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$. As Eqs. (6) e (9) podem ser resolvidas de diversas maneiras. Por exemplo, resolvendo a Eq. (6) para $u_2'(t)$, temos

$$u_2'(t) = -u_1'(t)\frac{\cos 2t}{\text{sen}\,2t}. \tag{10}$$

Substituindo $u_2'(t)$ na Eq. (9) por essa expressão e simplificando, obtemos

$$u_1'(t) = -\frac{3\csc t\,\text{sen}\,2t}{2} = -3\cos t. \tag{11}$$

Agora, substituindo essa expressão para $u_1'(t)$ de volta na Eq. (10) e usando as fórmulas para o ângulo duplo, vemos que

$$u_2'(t) = \frac{3\cos t\cos 2t}{\text{sen}\,2t} = \frac{3(1-2\,\text{sen}^2 t)}{2\,\text{sen}\,t} = \frac{3}{2}\csc t - 3\,\text{sen}\,t. \tag{12}$$

Tendo obtido $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$, o próximo passo é integrar, de modo a obter $u_1(t)$ e $u_2(t)$. O resultado é

$$u_1(t) = -3\,\text{sen}\,t + c_1 \tag{13}$$

e

$$u_2(t) = \tfrac{3}{2}\ln|\csc t - \cot t| + 3\cos t + c_2. \tag{14}$$

Substituindo essas expressões na Eq. (4), temos

$$\begin{aligned} y = {} & -3\,\text{sen}\,t\cos 2t + \tfrac{3}{2}\ln|\csc t - \cot t|\,\text{sen}\,2t + 3\cos t\,\text{sen}\,2t \\ & + c_1\cos 2t + c_2\,\text{sen}\,2t. \end{aligned}$$

Finalmente, usando as fórmulas para o ângulo duplo mais uma vez, obtemos

$$y = 3\,\text{sen}\,t + \tfrac{3}{2}\ln|\csc t - \cot t|\,\text{sen}\,2t + c_1\cos 2t + c_2\,\text{sen}\,2t. \tag{15}$$

As parcelas na Eq. (15) envolvendo as constantes arbitrárias c_1 e c_2 correspondem à solução geral da equação homogênea associada, enquanto a soma restante forma uma solução particular da equação não homogênea (1). Portanto, a Eq. (15) é a solução geral da Eq. (1).

No exemplo precedente, o método de variação dos parâmetros funcionou bem para determinar uma solução particular e, portanto, a solução geral da Eq. (1). A próxima pergunta é se esse método pode ser aplicado efetivamente a uma equação arbitrária. Vamos considerar, então,

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{16}$$

onde p, q e g são funções contínuas dadas. Como ponto de partida, vamos supor que conhecemos a solução geral

$$y_c(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \tag{17}$$

da equação homogênea associada

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{18}$$

Essa é uma hipótese importante, já que, até agora, só mostramos como resolver a Eq. (18) se ela tiver coeficientes constantes. Se a Eq. (18) tiver coeficientes que dependem de t, então, em geral, os métodos descritos no Capítulo 5 têm que ser usados para se obter $y_c(t)$.

A ideia crucial, como ilustrado no Exemplo 1, é substituir as constantes c_1 e c_2 na Eq. (17) por funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$, respectivamente; isso nos dá

$$y = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t). \tag{19}$$

Podemos, então, tentar determinar $u_1(t)$ e $u_2(t)$ de modo que a expressão na Eq. (19) seja solução da equação não homogênea (16), em vez da equação homogênea (18). Diferenciando a Eq. (19), obtemos

$$y' = u_1'(t)y_1(t) + u_1(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2(t) + u_2(t)y_2'(t). \tag{20}$$

Como no Exemplo 1, vamos igualar a zero a soma das parcelas envolvendo $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$ na Eq. (20); ou seja, vamos exigir que

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0. \tag{21}$$

Então, da Eq. (20), temos

$$y' = u_1(t)y_1'(t) + u_2(t)y_2'(t). \tag{22}$$

Diferenciando novamente, obtemos

$$y'' = u_1'(t)y_1'(t) + u_1(t)y_1''(t) + u_2'(t)y_2'(t) + u_2(t)y_2''(t). \tag{23}$$

Agora, vamos substituir y, y' e y'' na Eq. (16) pelas expressões nas Eqs. (19), (22) e (23), respectivamente. Após rearrumar os termos na equação resultante, vemos que

$$\begin{aligned} u_1(t)[y_1''(t) &+ p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)] \\ &+ u_2(t)[y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)] \\ &\qquad + u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t). \end{aligned} \tag{24}$$

Cada uma das expressões entre colchetes na Eq. (24) é nula, pois ambas as funções y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea (18). Portanto, a Eq. (24) se reduz a

$$u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t). \tag{25}$$

As Eqs. (21) e (25) formam um sistema de duas equações lineares algébricas para as derivadas $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$ das funções desconhecidas. Elas correspondem, exatamente, às Eqs. (6) e (9) no Exemplo 1.

Resolvendo o sistema (21), (25), obtemos

$$u_1'(t) = -\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}, \qquad u_2'(t) = \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}, \tag{26}$$

onde $W(y_1, y_2)$ é o wronskiano de y_1 e y_2. Note que a divisão por W é permitida, já que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções e, portanto, seu wronskiano não se anula. Integrando as Eqs. (26), encontramos as funções desejadas $u_1(t)$ e $u_2(t)$, a saber,

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\,dt + c_1, \qquad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\,dt + c_2. \tag{27}$$

Se as integrais nas Eq. (27) puderem ser calculadas como funções elementares, substituímos os resultados na Eq. (19), obtendo assim a solução geral da Eq. (16). Mais geralmente, a solução sempre pode ser expressa como integrais, conforme enunciado no teorema a seguir.

Teorema 3.6.1 Se as funções p, q e g forem contínuas em um intervalo aberto I e se as funções y_1 e y_2 formarem um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea (18) associada à equação não homogênea (16)

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t),$$

então uma solução particular da Eq. (16) é

$$Y(t) = -y_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{y_2(s)g(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\,ds + y_2(t)\int_{t_0}^{t}\frac{y_1(s)g(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\,ds, \tag{28}$$

onde t_0 é qualquer ponto escolhido convenientemente em I. A solução geral é

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + Y(t), \tag{29}$$

como enunciado no Teorema 3.5.2.

Examinando a expressão (28) e revendo o processo segundo o qual a deduzimos, vemos que podem existir duas grandes dificuldades na utilização do método de variação dos parâmetros. Como mencionamos anteriormente, uma é a determinação de $y_1(t)$ e $y_2(t)$, ou seja, a determinação de um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea (18), quando os coeficientes da equação não são constantes. Outra dificuldade possível é o cálculo das integrais que aparecem na Eq. (28). Isso depende inteiramente da natureza das funções y_1, y_2 e g. Ao usar a Eq. (28), certifique-se de que a equação diferencial é exatamente da forma (16); caso contrário, o termo não homogêneo $g(t)$ não será identificado corretamente.

Uma grande vantagem do método de variação dos parâmetros é que a Eq. (28) fornece uma expressão para a solução particular $Y(t)$ em termos de uma função não homogênea arbitrária $g(t)$. Essa expressão é um bom ponto de partida se você quiser investigar o efeito de variações no termo não homogêneo, ou se quiser analisar a resposta de um sistema sujeito a um número de forças externas diferentes.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, use o método de variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular da equação diferencial dada. Depois verifique sua resposta usando o método dos coeficientes indeterminados.

1. $y'' - 5y' + 6y = 2e^t$
2. $y'' - y' - 2y = 2e^{-t}$
3. $y'' + 2y' + y = 3e^{-t}$
4. $4y'' - 4y' + y = 16e^{t/2}$

Em cada um dos Problemas de 5 a 12, encontre a solução geral da equação diferencial dada. Nos Problemas 11 e 12, g é uma função contínua arbitrária.

5. $y'' + y = \tan t, \quad 0 < t < \pi/2$
6. $y'' + 9y = 9\sec^2 3t, \quad 0 < t < \pi/6$
7. $y'' + 4y' + 4y = t^{-2}e^{-2t}, \quad t > 0$
8. $y'' + 4y = 3\csc 2t, \quad 0 < t < \pi/2$
9. $4y'' + y = 2\sec(t/2), \quad -\pi < t < \pi$
10. $y'' - 2y' + y = e^t/(1 + t^2)$
11. $y'' - 5y' + 6y = g(t)$
12. $y'' + 4y = g(t)$

Em cada um dos Problemas de 13 a 20, verifique que as funções dadas y_1 e y_2 satisfazem a equação homogênea associada; depois encontre uma solução particular da equação não homogênea dada. Nos Problemas 19 e 20, g é uma função contínua arbitrária.

13. $t^2y'' - 2y = 3t^2 - 1, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^2, \quad y_2(t) = t^{-1}$
14. $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t, \quad y_2(t) = te^t$
15. $ty'' - (1+t)y' + y = t^2e^{2t}, \quad t > 0; \quad y_1(t) = 1 + t, \quad y_2(t) = e^t$
16. $(1-t)y'' + ty' - y = 2(t-1)^2e^{-t}, \quad 0 < t < 1; \quad y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = t$
17. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2\ln x, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^2\ln x$
18. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0{,}25)y = 3x^{3/2}\operatorname{sen} x, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x, \quad y_2(x) = x^{-1/2}\cos x$
19. $(1-x)y'' + xy' - y = g(x), \quad 0 < x < 1; \quad y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = x$
20. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0{,}25)y = g(x), \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x, \quad y_2(x) = x^{-1/2}\cos x$
21. Mostre que a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \qquad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \tag{i}$$

pode ser escrita como $y = u(t) + v(t)$, onde u e v são soluções dos dois problemas de valor inicial

$$L[u] = 0, \qquad u(t_0) = y_0, \quad u'(t_0) = y_0', \tag{ii}$$

$$L[v] = g(t), \qquad v(t_0) = 0, \quad v'(t_0) = 0, \tag{iii}$$

respectivamente. Em outras palavras, as partes não homogêneas na equação diferencial e nas condições iniciais podem ser tratadas separadamente. Note que u é fácil de achar, se for conhecido um conjunto fundamental de soluções para $L[u] = 0$.

22. Escolhendo o limite inferior de integração na Eq. (28) no texto como o ponto inicial t_0, mostre que $Y(t)$ se torna

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_1'(s)y_2(s)} g(s)\, ds.$$

Mostre que $Y(t)$ é uma solução do problema de valor inicial

$$L[y] = g(t), \qquad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0.$$

Assim, Y pode ser identificado com v no Problema 21.

23. (a) Use o resultado do Problema 22 para mostrar que a solução do problema de valor inicial

$$y'' + y = g(t), \qquad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0 \tag{i}$$

é

$$y = \int_{t_0}^{t} \operatorname{sen}(t - s) g(s)\, ds. \tag{ii}$$

(b) Use o resultado do Problema 21 para encontrar a solução do problema de valor inicial

$$y'' + y = g(t), \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'.$$

24. Use o resultado do Problema 22 para encontrar a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = (D - a)(D - b)y = g(t), \qquad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0,$$

onde a e b são números reais com $a \neq b$.

25. Use o resultado do Problema 22 para encontrar a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = [D^2 - 2\lambda D + (\lambda^2 + \mu^2)]y = g(t), \qquad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0.$$

Note que as raízes da equação característica são $\lambda \pm i\mu$.

26. Use o resultado do Problema 22 para encontrar a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = (D - a)^2 y = g(t), \qquad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0,$$

onde a é um número real arbitrário.

27. Combinando os resultados dos Problemas de 24 a 26, mostre que a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = (D^2 + bD + c)y = g(t), \qquad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0,$$

onde b e c são constantes, tem a forma

$$y = \phi(t) = \int_{t_0}^{t} K(t - s) g(s)\, ds. \tag{i}$$

A função K depende apenas das soluções y_1 e y_2 da equação homogênea associada e é independente do termo não homogêneo. Uma vez determinado K, todos os problemas não homogêneos envolvendo o mesmo operador diferencial L ficam reduzidos ao cálculo de uma integral. Note também que, embora K dependa de t e s, só aparece a combinação $t - s$, de modo que K é, de fato, uma função de uma única variável. Pensando em $g(t)$ como nos dados de entrada (*input*) do problema e em $\phi(t)$ como os dados de saída (*output*), segue da Eq. (i) que os dados de saída dependem dos dados de entrada em todo o intervalo, do ponto inicial t_0 ao ponto atual t. A integral na Eq. (i) é a **convolução** de K e g, e referimo-nos a K como o **núcleo**.

28. O método de redução de ordem (Seção 3.4) também pode ser usado para a equação não homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{i}$$

desde que se conheça uma solução y_1 da equação homogênea associada. Seja $y = v(t)y_1(t)$ e mostre que y satisfaz a Eq. (i) se v for solução de

$$y_1(t)v'' + [2y_1'(t) + p(t)y_1(t)]v' = g(t). \tag{ii}$$

A Eq. (ii) é uma equação linear de primeira ordem em v'. Resolvendo essa equação, integrando o resultado e depois multiplicando por $y_1(t)$, obtemos a solução geral da Eq. (i).

Em cada um dos Problemas de 29 a 32, use o método esquematizado no Problema 28 para resolver a equação diferencial dada.

29. $t^2y'' - 2ty' + 2y = 4t^2$, $t > 0$; $y_1(t) = t$
30. $t^2y'' + 7ty' + 5y = t$, $t > 0$; $y_1(t) = t^{-1}$
31. $ty'' - (1 + t)y' + y = t^2e^{2t}$, $t > 0$; $y_1(t) = 1 + t$ (veja o Problema 15)
32. $(1 - t)y'' + ty' - y = 2(t - 1)^2e^{-t}$, $0 < t < 1$; $y_1(t) = e^t$ (veja o Problema 16)

3.7 Vibrações Mecânicas e Elétricas

Uma das razões por que vale a pena estudar equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes é que elas servem como modelos matemáticos de alguns processos físicos importantes. Duas áreas importantes de aplicações são os campos de vibrações mecânicas e elétricas. Por exemplo, o movimento de uma massa presa em uma mola, as torções de uma haste com um volante, o fluxo de corrente elétrica em um circuito simples em série e muitos outros problemas físicos são bem descritos pela solução de um problema de valor inicial da forma

$$ay'' + by' + cy = g(t), \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'. \tag{1}$$

Isso ilustra uma relação fundamental entre a matemática e a física: *muitos problemas físicos têm o mesmo modelo matemático*. Assim, quando sabemos resolver o problema de valor inicial (1), basta interpretar apropriadamente as constantes a, b e c, e as funções y e g para obter soluções de problemas físicos diferentes.

Estudaremos o movimento de uma massa presa a uma mola porque uma compreensão do comportamento desse sistema simples é o primeiro passo na investigação de sistemas vibratórios mais complexos. Além disso, os princípios envolvidos são os mesmos para muitos problemas. Considere uma massa m pendurada em uma das extremidades de uma mola vertical com comprimento original l, como mostra a Figura 3.7.1. A massa causa um alongamento L da mola para baixo (no sentido positivo). Existem duas forças agindo sobre o ponto onde a massa está presa à mola; veja a Figura 3.7.2. A força gravitacional, ou peso da massa, puxa para baixo e tem módulo igual a mg, onde g é a aceleração da gravidade. Existe também uma força, F_m, devido à mola, que puxa para cima. Se supusermos que o alongamento L da mola é pequeno, a força da mola fica muito próxima de ser proporcional a L; isso é conhecido como a lei de Hooke.[8] Assim, escrevemos $F_m = -kL$, onde a constante de proporcionalidade k é chamada de constante da mola e o sinal de menos é devido ao fato de que a força da mola puxa para cima (no sentido negativo). Como a massa está em equilíbrio, as duas forças estão balanceadas, o que significa que

$$mg - kL = 0. \tag{2}$$

Para um dado peso $w = mg$, pode-se medir L e depois usar a Eq. (2) para determinar k. Note que k tem unidades de força/comprimento.

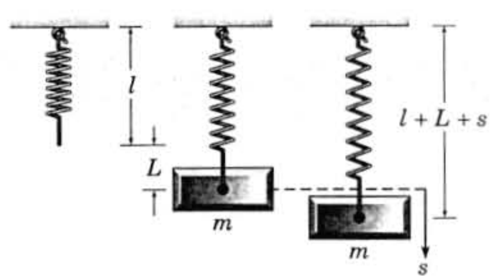

FIGURA 3.7.1 Um sistema mola-massa.

[8]Robert Hooke (1635-1703) foi um cientista inglês com interesses variados. Seu livro mais importante, *Micrographia*, foi publicado em 1665 e descreve uma variedade de observações microscópicas. Hooke publicou sua lei sobre o comportamento elástico pela primeira vez em 1676 como um anagrama: *ceiiinosssttuv*; em 1678 ele deu a solução como *ut tensio sic vis*, o que significa, *grosso modo*, "como a força, assim é o deslocamento".

No problema dinâmico correspondente, estamos interessados em estudar o movimento da massa, seja na presença de uma força externa ou sob um deslocamento inicial. Denote por $s(t)$, medido positivamente no sentido para baixo, o deslocamento da massa a partir de sua posição de equilíbrio no instante t; veja a Figura 3.7.1. Então $s(t)$ está relacionado às forças que agem sobre a massa pela lei do movimento de Newton,

$$ms''(t) = f(t), \tag{3}$$

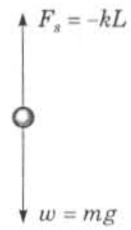

FIGURA 3.7.2 Diagrama de forças para um sistema mola-massa.

onde s'' é a aceleração da massa e f é a força total agindo sobre a massa. Note que tanto s quanto f são funções do tempo. Existem quatro forças separadas que têm que ser consideradas para se determinar f:

1. O peso $w = mg$ da massa sempre age para baixo.
2. A força da mola F_m é tida como proporcional ao alongamento total $L + s$ da mola e sempre age para restaurar a mola à sua posição natural. Se $L + s > 0$, então a mola está distendida e a força da mola está direcionada para cima. Neste caso,

$$F_m = -k(L + s). \tag{4}$$

Por outro lado, se $L + s < 0$, então a mola está comprimida de uma distância $|L + s|$ e a força da mola, agora direcionada para baixo, é dada por $F_m = k\,|L + s|$. No entanto, quando $L + s < 0$, segue que $|L + s| = -(L + s)$, de modo que F_m é dada, novamente, pela Eq. (4). Assim, independentemente da posição da massa, a força exercida pela mola sempre é dada pela Eq. (4).

3. A força de amortecimento, ou resistência F_d, sempre age no sentido oposto ao sentido de movimento da massa. Essa força pode aparecer de diversas fontes: resistência do ar ou de outro meio onde a massa se movimenta, dissipação de energia interna devido à extensão ou compressão da mola, atrito entre a massa e qualquer guia (se existir) que limite seu movimento a uma dimensão, ou um dispositivo mecânico (amortecedor) que gere uma força de resistência ao movimento da massa. Em qualquer caso, supomos que essa força de resistência é proporcional à velocidade escalar $|ds/dt|$ da massa; em geral, isso é chamado de amortecimento viscoso. Se $ds/dt > 0$, u está aumentando, de modo que a massa está se movendo para baixo. Então F_d aponta para cima e é dada por

$$F_d(t) = -\gamma s'(t), \tag{5}$$

onde γ é uma constante positiva de proporcionalidade conhecida como a constante de amortecimento. Por outro lado, se $ds/dt < 0$, então s está diminuindo, de modo que a massa está se movendo para cima e F_d aponta para baixo. Nesse caso, $F_d = \gamma|s'(t)|$; como $|s'(t)| = -s'(t)$, segue que a força F_d é dada, novamente, pela Eq. (5). Assim, independentemente do sentido de movimento da massa, a força de amortecimento sempre é dada pela Eq. (5).

A força de amortecimento pode ser bastante complicada, e a hipótese de que ela é modelada adequadamente pela Eq. (5) é discutível. Alguns amortecedores funcionam como a Eq. (5) descreve, e se as outras fontes de dissipação forem pequenas pode ser possível ignorá-las todas, ou ajustar a constante de amortecimento γ de modo a aproximá-las. Um grande benefício da hipótese (5) é que ela nos leva a uma equação diferencial linear (em vez de não linear). Isso, por sua vez, significa que pode ser feita uma análise completa do sistema diretamente, como mostraremos nesta e na próxima seção.

4. Pode ser aplicada uma força externa $F(t)$ apontando para baixo ou para cima, dependendo se $F(t)$ é positiva ou negativa. Isso poderia ser uma força devida ao movimento da estrutura onde está presa a mola, ou poderia ser uma força aplicada diretamente na massa. Muitas vezes a força externa é periódica.

Levando em consideração essas forças, podemos reescrever a lei de Newton (3) como

$$\begin{aligned} ms''(t) &= mg + F(t) + F_d(t) + F(t) \\ &= mg - m[L + s(t)] - \gamma s'(t) + F(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Como $mg - kL = 0$ pela Eq. (2), segue que a equação de movimento da massa é

$$ms''(t) + \gamma s'(t) + ks(t) = F(t), \tag{7}$$

onde as constantes m, γ e k são positivas. Note que a Eq. (7) tem a mesma forma que a Eq. (1).

É importante compreender que a Eq. (7) é apenas uma equação aproximada para o deslocamento $s(t)$. Em particular, as Eqs. (4) e (5) devem ser vistas como aproximações para a força da mola e a força de amortecimento, respectivamente. Também não levamos em consideração na nossa dedução a massa da mola, supondo-a desprezível perto da massa do corpo preso a ela.

A formulação completa do problema de vibração requer que especifiquemos duas condições iniciais, a saber, a posição inicial s_0 e a velocidade inicial v_0 da massa:

$$s(0) = s_0, \qquad s'(0) = v_0. \tag{8}$$

Segue do Teorema 3.2.1 que essas condições fazem com que o problema matemático tenha uma única solução. Isso é consistente com nossa intuição física de que, se a massa é colocada em movimento com deslocamento e velocidade iniciais, então sua posição estará unicamente determinada em todos os instantes futuros. A posição da massa é dada (aproximadamente) pela solução da Eq. (7), sujeita às condições iniciais dadas (8).

EXEMPLO 1

Uma massa pesando 4 libras (cerca de 1,8 kg) estica uma mola de 2 in (cerca de 5 cm). Suponha que a massa é deslocada 6 in adicionais no sentido positivo e depois é solta. A massa está em um meio que exerce uma resistência viscosa de 6 lb quando a massa está a uma velocidade de 3 ft/s (cerca de 91 cm/s). Sob as hipóteses discutidas nesta seção, formule o problema de valor inicial que governa o movimento da massa.

O problema de valor inicial pedido consiste na equação diferencial (7) com condições iniciais (8), de modo que nossa tarefa é determinar as diversas constantes que aparecem nessas equações. O primeiro passo é escolher as unidades de medida. Da forma como foi enunciado o problema, é natural usar as medidas inglesas no lugar do sistema métrico de unidades. A única unidade de tempo mencionada é o segundo, de modo que mediremos t em segundos. Por outro lado, o enunciado contém tanto pés quanto polegadas como unidades de comprimento. Não importa qual a medida a ser usada, mas, uma vez escolhida a medida, é importante que se seja consistente. Para definir, vamos medir o deslocamento em pés (um pé tem 12 in).

Como nada foi dito no enunciado do problema sobre uma força externa, vamos supor que $F(t) = 0$. Para determinar m, note que

$$m = \frac{w}{g} = \frac{4\ \text{lb}}{32\ \text{pé/s}^2} = \frac{1}{8}\ \frac{\text{lb}\cdot\text{s}^2}{\text{pé}}.$$

O coeficiente de amortecimento γ é determinado pela afirmação de que $\gamma s'$ é igual a 6 lb quando s' tem o valor de 3 ft/s. Logo,

$$\gamma = \frac{6\ \text{lb}}{3\ \text{ft/s}} = 2\ \frac{\text{lb}\cdot\text{s}}{\text{pé}}.$$

A constante da mola k é encontrada a partir da afirmação de que a massa estica a mola por 2 in, ou 1/6 ft. Portanto,

$$k = \frac{4\ \text{lb}}{1/6\ \text{ft}} = 24\ \frac{\text{lb}}{\text{pé}}.$$

Em consequência, a Eq. (7) fica

$$\tfrac{1}{8}s'' + 2s' + 24s = 0,$$

ou

$$s'' + 16s' + 192s = 0. \tag{9}$$

As condições iniciais são

$$s(0) = \tfrac{1}{2}, \qquad s'(0) = 0. \tag{10}$$

A segunda condição inicial é implicada pela palavra "solta" no enunciado do problema, que interpretamos como a massa sendo colocada em movimento sem velocidade inicial.

Vibrações Livres Não Amortecidas. Se não existe força externa, então $F(t) = 0$ na Eq. (7). Vamos supor, também, que não há amortecimento, de modo que $\gamma = 0$; essa é uma configuração idealizada do sistema, que dificilmente (se alguma vez) acontece na prática. No entanto, se o amortecimento for muito pequeno, a hipótese de que não há amortecimento pode dar resultados satisfatórios em intervalos de tempo pequenos ou até moderados. Nesse caso, a equação de movimento (7) se reduz a

$$ms'' + ks = 0. \tag{11}$$

A solução geral da Eq. (11) é

$$s = A\cos\omega_0 t + B\,\text{sen}\,\omega_0 t, \tag{12}$$

onde

$$\omega_0^2 = k/m. \tag{13}$$

As constantes arbitrárias A e B podem ser determinadas se forem dadas condições iniciais da forma (8).

Ao discutir a solução da Eq. (11), é conveniente escrever a Eq. (12) na forma

$$s = R\cos(\omega_0 t - \delta), \tag{14}$$

ou

$$s = R\cos\delta\cos\omega_0 t + R\,\text{sen}\,\delta\,\text{sen}\,\omega_0 t. \tag{15}$$

Comparando as Eqs. (15) e (12), vemos que as constantes A, B, R e δ estão relacionadas pelas equações

$$A = R\cos\delta, \qquad B = R\,\text{sen}\,\delta. \tag{16}$$

Assim,

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \qquad \tan\delta = B/A. \tag{17}$$

Ao calcular δ é preciso tomar cuidado para se escolher o quadrante correto; isso pode ser feito verificando-se os sinais de $\cos\delta$ e $\text{sen}\,\delta$ nas Eqs. (16).

O gráfico da função na Eq. (14), ou na equação equivalente (12), para um conjunto típico de condições iniciais aparece na Figura 3.7.3. O gráfico é uma onda senoidal deslocada que descreve um movimento periódico, ou harmônico simples, da massa. O **período** do movimento é

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}. \tag{18}$$

A frequência circular $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, medida em radianos por unidade de tempo, é chamada de **frequência natural** da vibração. O deslocamento máximo R da massa a partir de sua posição de equilíbrio é a **amplitude** do movimento. O parâmetro adimensional δ é chamado de **fase**, ou ângulo de fase, e mede o deslocamento da onda a partir de sua posição normal correspondente a $\delta = 0$.

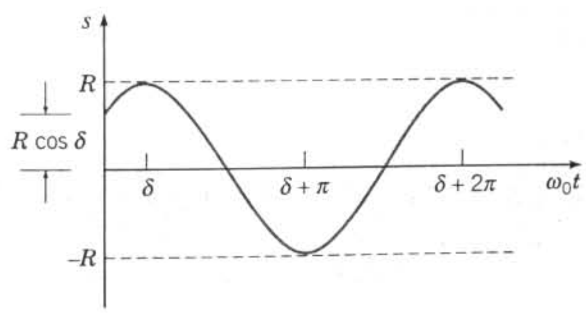

FIGURA 3.7.3 Movimento harmônico simples; $s = R\cos(\omega_0 t - \delta)$.

Note que o movimento descrito pela Eq. (14) tem amplitude constante, que não diminui com o tempo. Isso reflete o fato de que, na ausência de amortecimento, o sistema não tem como dissipar a energia dada pelo deslocamento e pela velocidade iniciais. Além disso, para uma massa m e uma constante de mola k dadas, o sistema sempre vibra à mesma frequência ω_0, independente das condições iniciais. No entanto, as condições iniciais ajudam a determinar a amplitude do movimento. Finalmente, note que, pela Eq. (18), T aumenta quando m aumenta, de modo que massas maiores vibram mais lentamente. Por outro lado, T diminui quando k aumenta, o que significa que molas mais duras fazem com que o sistema vibre mais rapidamente.

EXEMPLO 2

Suponha que uma massa pesando 10 lb (cerca de 4,5 kg) estique uma mola de 2 in (cerca de 5 cm). Se a massa for deslocada 2 in a mais e depois colocada em movimento com uma velocidade inicial apontando para cima de 1 ft/s (cerca de 30 cm/s), determine a posição da massa em qualquer instante posterior. Determine, também, o período, a amplitude e a fase do movimento.

A constante da mola é k = 10 lb/2 in = 60 lb/ft e a massa é $m = \omega/g$ = 10/32 lb · s²/ft*. Logo, a equação de movimento se reduz a

$$s'' + 192s = 0, \tag{19}$$

e a solução geral é

$$s = A\cos(8\sqrt{3}t) + B\,\text{sen}(8\sqrt{3}t).$$

A solução que satisfaz as condições iniciais $s(0) = 1/6$ ft e $s'(0) = -1$ ft/s é

$$s = \frac{1}{6}\cos(8\sqrt{3}t) - \frac{1}{8\sqrt{3}}\,\text{sen}\,(8\sqrt{3}t) \tag{20}$$

A frequência natural é $\omega_0 = \sqrt{192} \cong 13{,}856$ rad/s, de modo que o período é $T = 2\pi/\omega_0 \cong 0{,}45345$ s. A amplitude R e a fase δ são dadas pelas Eqs. (17). Temos

$$R^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{192} = \frac{19}{576}, \quad \text{logo} \quad R \cong 0{,}18162 \text{ ft}.$$

A segunda das Eqs. (17) nos dá $\tan\delta = -\sqrt{3}/4$. Existem duas soluções desta equação, uma no segundo quadrante e outra no quarto. No problema atual, $\cos\delta > 0$ e $\text{sen}\,\delta < 0$, logo δ está no quarto quadrante e temos

$$\delta = -\arctan(\sqrt{3}/4) \cong -0{,}40864 \text{ rad}.$$

O gráfico da solução (20) está ilustrado na Figura 3.7.4.

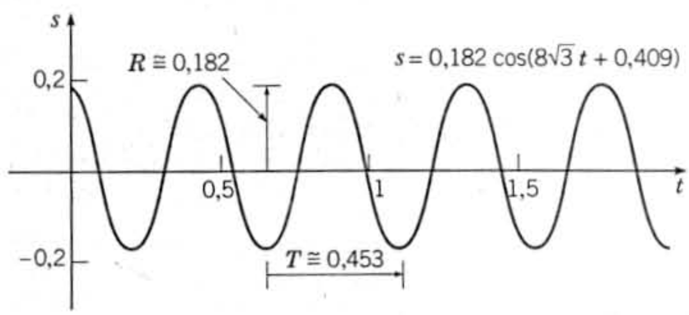

FIGURA 3.7.4 Uma vibração livre não amortecida; $s'' + 192s = 0$, $s(0) = 1/6$, $s'(0) = -1$.

Vibrações Livres Amortecidas. Se incluirmos o efeito do amortecimento, a equação diferencial que governa o movimento da massa é

$$ms'' + \gamma s' + ks = 0. \tag{21}$$

Estamos especialmente interessados em examinar o efeito da variação na constante de amortecimento γ para valores dados da massa m e da constante da mola k. As raízes da equação característica correspondente são

$$r_1, r_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m} = \frac{\gamma}{2m}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4km}{\gamma^2}}\right). \tag{22}$$

Dependendo do sinal de $\gamma^2 - 4km$, a solução s tem uma das seguintes formas:

$$\gamma^2 - 4km > 0, \qquad s = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}; \tag{23}$$

$$\gamma^2 - 4km = 0, \qquad s = (A + Bt)e^{-\gamma t/2m}; \tag{24}$$

$$\gamma^2 - 4km < 0, \qquad s = e^{-\gamma t/2m}(A\cos\mu t + B\,\text{sen}\,\mu t), \quad \mu = \frac{(4km - \gamma^2)^{1/2}}{2m} > 0. \tag{25}$$

*A aceleração da gravidade nas medidas inglesas é de 32 ft/s². (N.T.)

Como m, γ e k são positivos, $\gamma^2 - 4km$ é sempre menor do que γ^2. Então, se $\gamma^2 - 4km \geq 0$, os valores de r_1 e r_2 dados pela Eq. (22) são *negativos*. Se $\gamma^2 - 4km < 0$, então os valores de r_1 e r_2 são complexos, mas com parte real *negativa*. Assim, em todos os casos a solução s tende a zero quando $t \to \infty$; isso ocorre independentemente dos valores das constantes arbitrárias A e B, ou seja, independentemente das condições iniciais. Isso confirma nossa expectativa intuitiva, a saber, que o amortecimento dissipa, gradualmente, a energia do sistema e, em consequência, o movimento vai parando com o passar do tempo.

O caso mais importante é o terceiro, que ocorre quando o amortecimento é pequeno. Fazendo $A = R\cos\delta$ e $B = R \operatorname{sen}\delta$ na Eq. (25), obtemos

$$s = Re^{-\gamma t/2m}\cos(\mu t - \delta). \tag{26}$$

O deslocamento s fica entre as curvas $s = \pm Re^{-\gamma t/2m}$; logo, parece-se com uma onda senoidal cuja amplitude diminui quando t aumenta. Um exemplo típico está esboçado na Figura 3.7.5. O movimento é chamado de oscilação amortecida, ou vibração amortecida. O fator R na amplitude depende de m, γ, k e das condições iniciais.

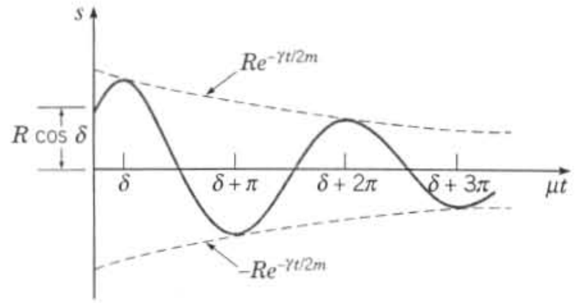

FIGURA 3.7.5 Vibração amortecida; $s = Re^{-\gamma t/2m}\cos(\mu t - \delta)$.

Embora o movimento não seja periódico, o parâmetro μ determina a frequência segundo a qual a massa oscila para cima e para baixo; em consequência, μ é chamada de **quase frequência**. Comparando μ com a frequência ω_0 do movimento sem amortecimento, vemos que

$$\frac{\mu}{\omega_0} = \frac{(4km - \gamma^2)^{1/2}/2m}{\sqrt{k/m}} = \left(1 - \frac{\gamma^2}{4km}\right)^{1/2} \cong 1 - \frac{\gamma^2}{8km}. \tag{27}$$

A última aproximação é válida quando $\gamma^2/4km$ é pequeno; referimo-nos a essa situação como "pouco amortecida" ou com "amortecimento pequeno". Assim, o efeito de um amortecimento pequeno é reduzir, ligeiramente, a frequência da oscilação. Por analogia com a Eq. (18), a quantidade $T_d = 2\pi/\mu$ é chamada de **quase período**. É o tempo entre dois máximos ou dois mínimos sucessivos da posição da massa, ou entre passagens sucessivas da massa por sua posição de equilíbrio indo no mesmo sentido. A relação entre T_d e T é dada por

$$\frac{T_d}{T} = \frac{\omega_0}{\mu} = \left(1 - \frac{\gamma^2}{4km}\right)^{-1/2} \cong \left(1 + \frac{\gamma^2}{8km}\right), \tag{28}$$

onde, novamente, a última aproximação é válida quando $\gamma^2/4km$ é pequeno. Assim, um amortecimento pequeno aumenta o quase período.

As Eqs. (27) e (28) reforçam o significado da razão adimensional $\gamma^2/4km$. Não é apenas o tamanho de γ que determina se o movimento é pouco ou muito amortecido, mas o tamanho de γ^2 comparado com $4km$. Quando $\gamma^2/4km$ é pequeno, o amortecimento afeta pouco a quase frequência e o quase período do movimento. Por outro lado, se quisermos estudar o movimento detalhado da massa em todos os instantes, então *nunca* podemos desprezar a força de amortecimento, não importa o quão pequena.

Quando $\gamma^2/4km$ aumenta, a quase frequência μ diminui e o quase período T_d aumenta. De fato, $\mu \to 0$ e $T_d \to \infty$ quando $\gamma \to 2\sqrt{km}$. Como indicado pelas Eq. (23), (24) e (25), a natureza da solução muda quando γ passa pelo valor $2\sqrt{km}$. Esse valor é conhecido como **amortecimento crítico**, enquanto para valores maiores de γ o movimento é dito **superamortecido**. Nesses casos, dados pelas Eqs. (24) e (23), respectivamente, a massa volta à sua posição de equilíbrio mas não oscila em torno dela, como para γ pequeno. A Figura 3.7.6 mostra dois exemplos típicos de movimento com amortecimento crítico, e a situação é mais discutida nos Problemas 21 e 22.

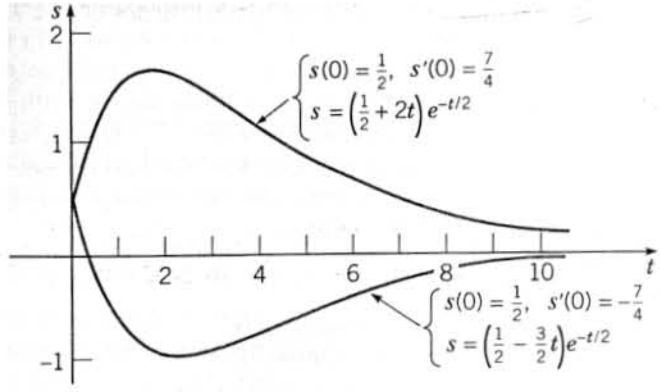

FIGURA 3.7.6 Movimentos criticamente amortecidos: $s'' + s' + 0{,}25s = 0$; $s = (A + Bt)e^{-t/2}$.

EXEMPLO 3

O movimento de determinado sistema mola-massa é governado pela equação diferencial

$$s'' + 0{,}125s' + s = 0, \tag{29}$$

onde s está medido em pés e t em segundos. Se $s(0) = 2$ e $s'(0) = 0$, determine a posição da massa em qualquer instante. Encontre a quase frequência e o quase período, assim como o instante no qual a massa passa pela primeira vez pela sua posição de equilíbrio. Encontre, também, o instante τ tal que $|s(t)| < 0{,}1$ para todo $t > \tau$.

A solução da Eq. (29) é

$$s = e^{-t/16}\left[A\cos\frac{\sqrt{255}}{16}t + B\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{255}}{16}t\right].$$

Para satisfazer as condições iniciais, precisamos escolher $A = 2$ e $B = 2/\sqrt{255}$; logo, a solução do problema de valor inicial é

$$s = e^{-t/16}\left(2\cos\frac{\sqrt{255}}{16}t + \frac{2}{\sqrt{255}}\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{255}}{16}t\right)$$

$$= \frac{32}{\sqrt{255}}e^{-t/16}\cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}t - \delta\right), \tag{30}$$

onde $\tan\delta = 1/\sqrt{255}$, de modo que $\delta \cong 0{,}06254$. A Figura 3.7.7 mostra o deslocamento da massa em função do tempo. Para efeitos de comparação, mostramos, também, o movimento no caso em que o amortecimento é desprezado.

A quase frequência é $\mu = \sqrt{255}/16 \cong 0{,}998$ e o quase período é $T_d = 2\pi/\mu \cong 6{,}295$ s. Esses valores diferem apenas ligeiramente dos valores correspondentes (1 e 2π, respectivamente) para a oscilação sem amortecimen-

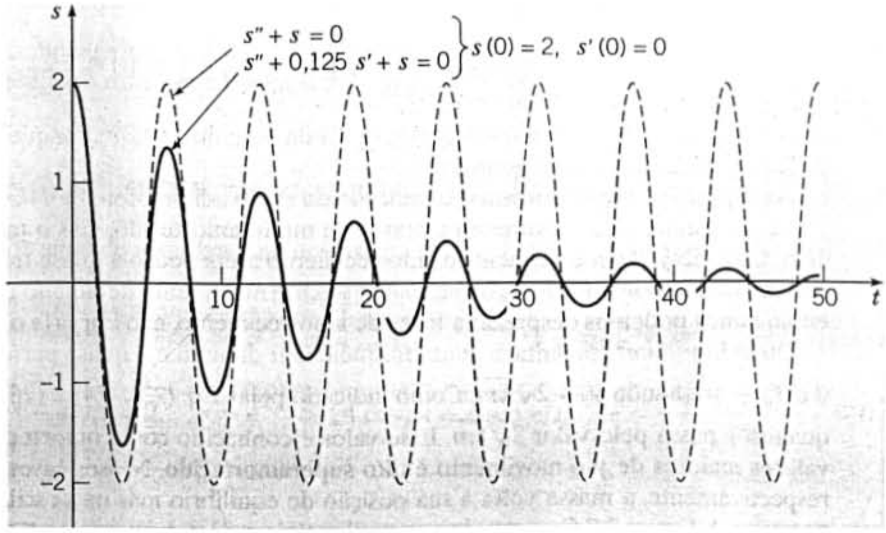

FIGURA 3.7.7 Vibração com pouco amortecimento (curva sólida) e sem amortecimento (curva tracejada).

to. Isso também é evidente dos gráficos na Figura 3.7.7, que sobem e descem praticamente juntos. O coeficiente de amortecimento é pequeno neste exemplo, apenas um dezesseis avos do valor crítico, de fato. Não obstante, a amplitude da oscilação é rapidamente reduzida. A Figura 3.7.8 mostra o gráfico da solução para $40 \leq t \leq 60$, junto com os gráficos de $s = \pm 0{,}1$. Pelo gráfico, τ parece estar em torno de 47,5, e um cálculo mais preciso mostra que $\tau \cong 47{,}5149$ s.

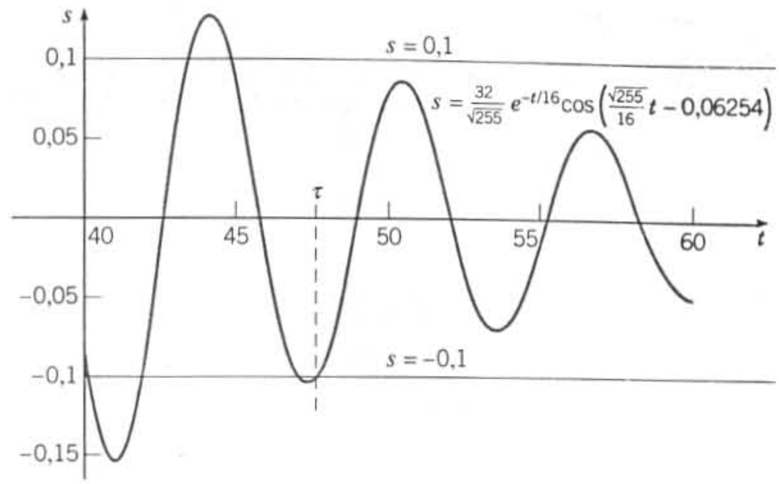

FIGURA 3.7.8 Solução do Exemplo 3; determinação de τ.

Para encontrar o instante no qual a massa passa, pela primeira vez, pela sua posição de equilíbrio, referimo-nos à Eq. (30) e igualamos $\sqrt{255}t/16 - \delta$ a $\pi/2$, o menor zero positivo da função cosseno. Então, resolvendo para t, obtemos

$$t = \frac{16}{\sqrt{255}}\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) \cong 1{,}637 \text{ s}.$$

Circuitos Elétricos. Um segundo exemplo da ocorrência de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes é como modelo do fluxo de corrente elétrica no circuito simples ilustrado na Figura 3.7.9. A corrente I, medida em ampères (A), é uma função do tempo t. A resistência R em ohms (Ω), a capacitância C em farads (F) e a indutância L em henrys (H) são todas constantes positivas que supomos conhecidas. A tensão aplicada E em volts (V) é uma função do tempo dada. Outra quantidade física que entra na discussão é a carga total Q em coulombs (C) no capacitor no instante t. A relação entre a carga Q e a corrente I é

$$I = dQ/dt. \tag{31}$$

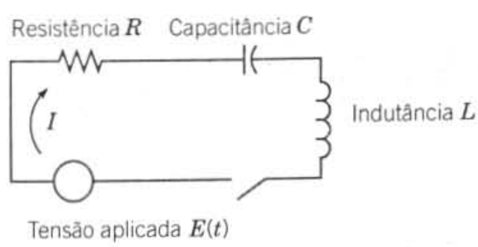

FIGURA 3.7.9 Um circuito elétrico simples.

O fluxo de corrente no circuito é governado pela segunda lei de Kirchhoff[9]: *Em um circuito fechado, a tensão aplicada é igual à soma das quedas de tensão no resto do circuito.*

[9]Gustav Kirchhoff (1824-1887), professor em Breslau, Heidelberg e Berlim, foi um dos físicos mais importantes do século XIX. Ele descobriu as leis básicas dos circuitos elétricos em torno de 1845, enquanto estudante em Königsberg. É, também, famoso por seu trabalho fundamental em absorção e emissão eletromagnéticas, e foi um dos fundadores da espectroscopia.

De acordo com as leis elementares da eletricidade, sabemos que

A queda de tensão no resistor é IR.
A queda de tensão no capacitor é Q/C.
A queda de tensão no indutor é LdI/dt.

Portanto, pela lei de Kirchhoff,

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t). \tag{32}$$

As unidades foram escolhidas de modo que 1 volt = 1 ohm · 1 ampère = 1 coulomb/1 farad = 1 henry · 1 ampère/1 segundo.

Substituindo I pela expressão na Eq. (31), obtemos a equação diferencial

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t) \tag{33}$$

para a carga Q. As condições iniciais são

$$Q(t_0) = Q_0, \qquad Q'(t_0) = I(t_0) = I_0. \tag{34}$$

Logo, precisamos saber a carga no capacitor e a corrente no circuito em algum instante inicial t_0.

De outro modo, podemos obter uma equação diferencial para a corrente I diferenciando a Eq. (33) em relação a t e depois usando a Eq. (31) para substituir dQ/dt. O resultado é

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t), \tag{35}$$

com as condições iniciais

$$I(t_0) = I_0, \qquad I'(t_0) = I_0'. \tag{36}$$

Da Eq. (32), segue que

$$I_0' = \frac{E(t_0) - RI_0 - (1/C)Q_0}{L}. \tag{37}$$

Portanto, I_0' também é determinado pela carga e pela corrente iniciais, que são quantidades fisicamente mensuráveis.

A conclusão mais importante dessa discussão é que o fluxo de corrente no circuito é descrito por um problema de valor inicial que tem precisamente a mesma forma que aquele que descreve o movimento de um sistema mola-massa. Este é um bom exemplo do papel unificador da matemática: uma vez que você sabe como resolver equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, você pode interpretar os resultados em termos de vibrações mecânicas, circuitos elétricos ou qualquer outra situação física que leve ao mesmo problema.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, determine ω_0, R e δ de modo a escrever a expressão dada na forma $s = R\cos(\omega_0 t - \delta)$.

1. $s = 3\cos 2t + 4\,\mathrm{sen}\,2t$
2. $s = -\cos t + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,t$
3. $s = 4\cos 3t - 2\,\mathrm{sen}\,3t$
4. $s = -2\cos \pi t - 3\,\mathrm{sen}\,\pi t$
5. Uma massa pesando 2 lb (cerca de 900 g) estica uma mola de 6 in (cerca de 15 cm). Se a massa é puxada 3 in adicionais para baixo e depois é solta, e se não há amortecimento, determine a posição s da massa em qualquer instante t. Faça o gráfico de s em função de t. Encontre a frequência, o período e a amplitude do movimento.
6. Uma massa de 100 g estica uma mola de 5 cm. Se a massa é colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio com uma velocidade apontando para baixo de 10 cm/s e se não há amortecimento, determine a posição u da massa em qualquer instante t. Quando a massa retorna pela primeira vez à sua posição de equilíbrio?
7. Uma massa pesando 3 lb (cerca de 1,36 kg) estica uma mola de 3 in (cerca de 7,6 cm). Se a massa é empurrada para cima, contraindo a mola de 1 in, e depois colocada em movimento com uma velocidade para baixo de 2 ft*/s (cerca de 61 cm/s), e se não há amortecimento, encontre a posição s da massa em qualquer instante t. Determine a frequência, o período, a amplitude e a fase do movimento.

*1 ft = 12 in. (N.T.)

8. Um circuito em série tem um capacitor de $0{,}25 \times 10^{-6}$ F e um indutor de 1 H. Se a carga inicial no capacitor é de 10^{-6} C e não há corrente inicial, encontre a carga Q no capacitor em qualquer instante t.

9. Uma massa de 20 g estica uma mola de 5 cm. Suponha que a massa também está presa a um amortecedor viscoso com uma constante de amortecimento de 400 dinas · s/cm. Se a massa é puxada para baixo mais 2 cm e depois solta, encontre sua posição s em qualquer instante t. Faça o gráfico de s em função de t. Determine a quase frequência e o quase período. Determine a razão entre o quase período e o período do movimento correspondente sem amortecimento. Encontre, também, o instante τ tal que $|s(t)| < 0{,}05$ cm para todo $t > \tau$.

10. Uma massa pesando 16 lb (cerca de 7 kg) estica uma mola de 3 polegadas (cerca de 7,5 cm). A massa está presa a um amortecedor viscoso com constante de amortecimento de 2 lb · s/ft. Se a massa é colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio com uma velocidade para baixo de 3 in/s, encontre sua posição u em qualquer instante t. Faça o gráfico de s em função de t. Determine quando a massa retorna pela primeira vez à sua posição de equilíbrio. Encontre, também, o instante τ tal que $|s(t)| < 0{,}01$ in para todo $t > \tau$.

11. Uma mola é esticada 10 cm por uma força de 3 N. Uma massa de 2 kg é pendurada da mola e presa a um amortecedor viscoso que exerce uma força de 3 N quando a velocidade da massa é de 5 m/s. Se a massa é puxada 5 cm abaixo de sua posição de equilíbrio e recebe uma velocidade inicial para baixo de 10 cm/s, determine sua posição s em qualquer instante t. Encontre a quase frequência μ e a razão entre μ e a frequência natural do movimento correspondente sem amortecimento.

12. Um circuito em série tem um capacitor de 10^{-5} F, um resistor de $3 \times 10^2\ \Omega$ e um indutor de 0,2 H. A carga inicial no capacitor é 10^{-6} C e não há corrente inicial. Encontre a carga Q no capacitor em qualquer instante t.

13. Certo sistema vibrando satisfaz a equação $s'' + \gamma s' + s = 0$. Encontre o valor do coeficiente de amortecimento γ para o qual o quase período do movimento amortecido é 50% maior do que o período do movimento correspondente sem amortecimento.

14. Mostre que o período do movimento de uma vibração não amortecida de uma massa pendurada em uma mola vertical é $2\pi\sqrt{L/g}$, onde L é o alongamento da mola devido à massa e g é a aceleração da gravidade.

15. Mostre que a solução do problema de valor inicial

$$ms'' + \gamma s' + ks = 0, \qquad s(t_0) = s_0, \quad s'(t_0) = s_0'$$

pode ser expressa como a soma $s = v + \omega$, onde v satisfaz as condições iniciais $v(t_0) = s_0$, $v'(t_0) = 0$, ω satisfaz as condições iniciais $\omega(t_0) = 0$, $\omega'(t_0) = s'_0$ e ambas as funções v e ω satisfazem a mesma equação diferencial que s. Esse é outro exemplo de superposição de soluções de problemas mais simples para se obter a solução de um problema mais geral.

16. Mostre que $A \cos \omega_0 t + B \operatorname{sen} \omega_0 t$ pode ser escrito na forma $r \operatorname{sen}(\omega_0 t - \theta)$. Determine r e θ em função de A e B. Se $R \cos(\omega_0 t - \delta) = r \operatorname{sen}(\omega_0 t - \theta)$, determine a relação entre R, r, δ e θ.

17. Uma massa pesando 8 lb (cerca de 3,6 kg) estica uma mola de 1 polegada e meia (cerca de 3,8 cm). A massa também está presa a um amortecedor com coeficiente γ. Determine o valor de γ para o qual o sistema tenha amortecimento crítico; certifique-se de colocar as unidades de γ.

18. Se um circuito em série tem um capacitor de $C = 0{,}8 \times 10^{-6}$ F e um indutor de $L = 0{,}2$ H, encontre a resistência R para que o circuito tenha amortecimento crítico.

19. Suponha que o sistema descrito pela equação $ms'' + \gamma s' + ks = 0$ tem amortecimento crítico ou está superamortecido. Mostre que a massa pode passar por sua posição de equilíbrio no máximo uma vez, independentemente das condições iniciais.

Sugestão: Determine todos os valores possíveis de t para os quais $s = 0$.

20. Suponha que o sistema descrito pela equação $ms'' + \gamma s' + ks = 0$ tem amortecimento crítico e que as condições iniciais são $s(0) = s_0$, $s'(0) = v_0$. Se $v_0 = 0$, mostre que $s \to 0$ quando $t \to \infty$, mas que s nunca se anula. Se s_0 for positivo, determine uma condição sobre v_0 que garanta que a massa vai passar pela sua posição de equilíbrio após o instante inicial.

21. **Decremento Logarítmico.** (a) Para a oscilação amortecida descrita pela Eq. (26), mostre que o intervalo de tempo entre os máximos sucessivos é de $T_d = 2\pi/\mu$.

(b) Mostre que a razão entre os deslocamentos em dois máximos sucessivos é dada por $\exp(\gamma T_d/2m)$. Note que essa razão não depende do par de máximos sucessivos escolhido. O logaritmo neperiano dessa razão é chamado de decremento logarítmico e denotado por Δ.

(c) Mostre que $\Delta = \pi\gamma/m\mu$. Como m, μ e Δ são quantidades facilmente mensuráveis em um sistema mecânico, esse resultado fornece um método conveniente e *prático* para determinar a constante de amortecimento do sistema, que é mais difícil de medir diretamente. Em particular, para o movimento de uma massa vibrando em um fluido viscoso a constante de amortecimento depende da viscosidade do fluido; para formas geométricas simples, a forma dessa dependência é conhecida e a relação precedente permite a determinação da viscosidade experimentalmente. Essa é uma das maneiras mais precisas de se determinar a viscosidade de um gás a altas pressões.

22. Tendo em vista o Problema 21, encontre o decremento logarítmico do sistema no Problema 10.

23. Para o sistema no Problema 17, suponha que $\Delta = 3$ e $T_d = 0{,}3$ s. Tendo em vista o Problema 21, determine o valor do coeficiente de amortecimento γ.

24. A posição de um determinado sistema mola-massa satisfaz o problema de valor inicial

$$\tfrac{3}{2}s'' + ks = 0, \qquad s(0) = 2, \quad s'(0) = v.$$

Se é observado que o período e a amplitude do movimento resultante são π e 3, respectivamente, determine os valores de k e v.

25. Considere o problema de valor inicial

$$s'' + \gamma s' + s = 0, \qquad s(0) = 2, \quad s'(0) = 0.$$

Queremos explorar o quão longo é o intervalo de tempo necessário para que a solução se torne "desprezível" e como esse intervalo depende do coeficiente de amortecimento γ. Mais precisamente, vamos procurar o instante τ tal que $|s(t)| < 0{,}01$ para todo $t > \tau$. Note que o amortecimento crítico para este problema ocorre quando $\gamma = 2$.

(a) Seja $\gamma = 0{,}25$ e determine τ ou, pelo menos, estime-o de forma razoavelmente precisa a partir de um gráfico da solução.

(b) Repita o item (a) para diversos outros valores de γ no intervalo $0 < \gamma < 1{,}5$. Note que τ sempre decresce quando γ cresce, para γ nesse intervalo.

(c) Obtenha um gráfico de τ em função de γ colocando os pares de valores encontrados nos itens (a) e (b). O gráfico parece ser uma curva suave?

(d) Repita o item (b) para valores de γ entre 1,5 e 2. Mostre que τ continua a diminuir até que γ atinja um determinado valor crítico γ_0, após o qual τ aumenta. Encontre γ_0 e o valor mínimo correspondente de τ com duas casas decimais.

(e) Outra maneira de proceder é escrever a solução do problema de valor inicial na forma (26). Despreze o fator cosseno e considere, apenas, o fator exponencial e a amplitude R. Depois, encontre uma expressão para τ em função de γ. Compare os resultados aproximados obtidos desse modo com os valores determinados nos itens (a), (b) e (d).

26. Considere o problema de valor inicial

$$ms'' + \gamma s' + ks = 0, \qquad s(0) = s_0, \quad s'(0) = v_0.$$

Suponha que $\gamma^2 < 4km$.

(a) Resolva o problema de valor inicial.

(b) Escreva a solução na forma $s(t) = R\exp(-\gamma t/2m)\cos(\mu t - \delta)$. Determine R em função de m, γ, k, u_0 e v_0.

(c) Investigue a dependência de R no coeficiente de amortecimento γ para valores fixos dos outros parâmetros.

27. Um bloco cúbico de lado l e densidade de massa ρ por unidade de volume está flutuando em um fluido com densidade de massa ρ_0 por unidade de volume, onde $\rho_0 > \rho$. Se o bloco é mergulhado ligeiramente e depois solto, ele oscila na posição vertical. Supondo que é possível desprezar o amortecimento viscoso do fluido e a resistência do ar, deduza a equação diferencial do movimento e determine o período do movimento.

Sugestão: use o princípio de Arquimedes. Um objeto completa ou parcialmente submerso em um fluido sofre a ação de uma força empurrando-o para cima (o empuxo) de módulo igual ao peso do fluido deslocado.

28. A posição de um determinado sistema mola-massa satisfaz o problema de valor inicial

$$s'' + 2s = 0, \qquad s(0) = 0, \quad s'(0) = 2.$$

(a) Encontre a solução desse problema de valor inicial.

(b) Faça os gráficos de s e de s' em função de t no mesmo par de eixos.

(c) Faça o gráfico com s' em um dos eixos e s no outro; isto é, faça o gráfico paramétrico de $s(t)$ e $s'(t)$ usando t como parâmetro. Esse tipo de gráfico é conhecido como um retrato de fase, e o plano ss' é chamado de plano de fase. Note que uma curva fechada no plano de fase corresponde a uma solução periódica $s(t)$. Qual o sentido do movimento (trigonométrico ou horário) no retrato de fase quando t aumenta?

29. A posição de determinado sistema mola-massa satisfaz o problema de valor inicial

$$s'' + \tfrac{1}{4}s' + 2s = 0, \qquad s(0) = 0, \quad s'(0) = 2.$$

(a) Encontre a solução deste problema de valor inicial.

(b) Faça os gráficos de s e de s' em função de t no mesmo par de eixos.

(c) Faça o gráfico de s' em função de s no plano de fase (veja o Problema 28). Identifique diversos pontos correspondentes nas curvas dos itens (b) e (c). Qual o sentido do movimento no plano de fase quando t aumenta?

30. Na ausência de amortecimento, o movimento de um sistema mola-massa satisfaz o problema de valor inicial

$$ms'' + ks = 0, \qquad s(0) = a, \quad s'(0) = b.$$

(a) Mostre que a energia cinética dada inicialmente à massa é $mb^2/2$ e que a energia potencial armazenada inicialmente na mola é $ka^2/2$, de modo que a energia total inicial do sistema é $(ka^2 + mb^2)/2$.

(b) Resolva o problema de valor inicial dado.

(c) Usando a solução no item (b), determine a energia total no sistema em qualquer instante t. Seu resultado deve confirmar o princípio de conservação de energia para este sistema.

31. Suponha que uma massa m desliza sem atrito em uma superfície horizontal. A massa está presa a uma mola com constante k, como ilustrado na Figura 3.7.10, e está sujeita, também, à resistência viscosa do ar com coeficiente γ. Mostre que o deslocamento $s(t)$ da massa a partir de sua posição de equilíbrio satisfaz a Eq. (21). Como a dedução da equação de movimento neste caso difere da dedução dada no texto?

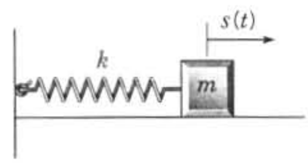

FIGURA 3.7.10 Um sistema mola-massa.

32. No sistema mola-massa do Problema 31, suponha que a força exercida pela mola não é dada pela lei de Hooke, mas, em vez disso, satisfaz a relação

$$F_m = -(ks + \epsilon s^3),$$

onde $k > 0$ e ϵ é pequeno em módulo, mas pode ter qualquer sinal. A mola é considerada "dura" se $\epsilon > 0$ e "mole" se $\epsilon < 0$. Por que esses termos são apropriados?

(a) Mostre que o deslocamento $s(t)$ da massa a partir de sua posição de equilíbrio satisfaz a equação diferencial

$$ms'' + \gamma s' + ks + \epsilon s^3 = 0.$$

Suponha que as condições iniciais são

$$s(0) = 0, \quad s'(0) = 1.$$

No restante deste problema, suponha que $m = 1$, $k = 1$ e $\gamma = 0$.

(b) Encontre $s(t)$ quando $\epsilon = 0$ e determine, também, a amplitude e o período do movimento.

(c) Seja $\epsilon = 0{,}1$. Faça o gráfico de uma aproximação numérica da solução. Esse movimento parece ser periódico? Se for, estime a amplitude e o período.

(d) Repita o item (c) para $\epsilon = 0{,}2$ e $\epsilon = 0{,}3$.

(e) Coloque em um gráfico os valores estimados da amplitude A e do período T em função de ϵ. Descreva a maneira segundo a qual A e T, respectivamente, dependem de ϵ.

(f) Repita os itens (c), (d) e (e) para valores negativos de ϵ.

3.8 Vibrações Forçadas

Investigaremos agora a situação em que uma força externa periódica é aplicada a um sistema mola-massa. O comportamento desse sistema simples modela o de muitos sistemas oscilatórios sob a ação de uma força externa, devido, por exemplo, a um motor preso ao sistema. Consideraremos primeiro o caso em que há amortecimento e consideraremos mais tarde o caso particular ideal onde se supõe que não há amortecimento.

Vibrações Forçadas com Amortecimento. Os cálculos algébricos podem ser bem complicados nesse tipo de problema, de modo que começaremos com um exemplo relativamente simples.

EXEMPLO 1

Suponha que o movimento de determinado sistema mola-massa satisfaz a equação diferencial

$$s'' + s' + 1{,}25s = 3\cos t \tag{1}$$

e as condições iniciais

$$s(0) = 2, \qquad s'(0) = 3. \tag{2}$$

Encontre a solução deste problema de valor inicial e descreva o comportamento da solução para valores grandes de t.

A equação homogênea associada à Eq. (1) tem equação característica $r^2 + r + 1{,}25 = 0$ com raízes $r = -0{,}5 \pm i$. Assim, a solução geral $s_c(t)$ desta equação homogênea é

$$s_c(t) = c_1 e^{-t/2}\cos t + c_2 e^{-t/2}\operatorname{sen} t. \tag{3}$$

Uma solução particular da Eq. (1) tem a forma $S(t)\ A\cos t + B\operatorname{sen} t$, onde A e B são encontrados substituindo-se s na Eq. (1) por $S(t)$. Temos $S'(t) = -A\operatorname{sen} t + B\cos t$ e $S''(t) = -A\cos t - B\operatorname{sen} t$. Logo, da Eq. (1), obtemos

$$(0{,}25A + B)\cos t + (-A + 0{,}25B)\operatorname{sen} t = 3\cos t.$$

Em consequência, A e B têm que satisfazer as equações

$$0.25A + B = 3, \qquad -A + 0{,}25B = 0,$$

com o resultado que $A = 12/17$ e $B = 48/17$. Portanto, a solução particular é

$$S(t) = \tfrac{12}{17}\cos t + \tfrac{48}{17}\operatorname{sen} t, \tag{4}$$

e a solução geral da Eq. (1) é

$$s = s_c(t) + S(t) = c_1 e^{-t/2}\cos t + c_2 e^{-t/2}\operatorname{sen} t + \tfrac{12}{17}\cos t + \tfrac{48}{17}\operatorname{sen} t. \tag{5}$$

As constantes restantes c_1 e c_2 são determinadas pelas condições iniciais (2). Da Eq. (5), temos

$$s(0) = c_1 + \tfrac{12}{17} = 2, \qquad s'(0) = -\tfrac{1}{2}c_1 + c_2 + \tfrac{48}{17} = 3,$$

de modo que $c_1 = 22/17$ e $c_2 = 14/17$. Assim, obtemos finalmente a solução do problema de valor inicial dado, a saber,

$$s = \tfrac{22}{17}e^{-t/2}\cos t + \tfrac{14}{17}e^{-t/2}\operatorname{sen} t + \tfrac{12}{17}\cos t + \tfrac{48}{17}\operatorname{sen} t. \tag{6}$$

O gráfico da solução (6) está ilustrado pela curva em preto na Figura 3.8.1.

É importante notar que a solução tem duas partes distintas. As duas primeiras parcelas contêm o fator exponencial $e^{-t/2}$; o resultado é que elas se aproximam rapidamente de zero. Costuma-se chamar essa parte de transiente. As parcelas restantes na Eq. (6) só envolvem senos e cossenos e, portanto, representam uma oscilação que continua para sempre. Referimo-nos a elas como estado estacionário. As curvas azuis na Figura 3.8.1, a sólida e a tracejada, representam as partes transiente e estado estacionário, respectivamente, da solução. A parte transiente vem da solução da equação homogênea associada à Eq. (1) e é necessária para satisfazer as condições iniciais. O estado estacionário é a solução particular da equação não homogênea completa. Depois de um tempo razoavelmente curto a parte transiente fica muito pequena, quase desaparecendo, e a solução fica essencialmente indistinguível do estado estacionário.

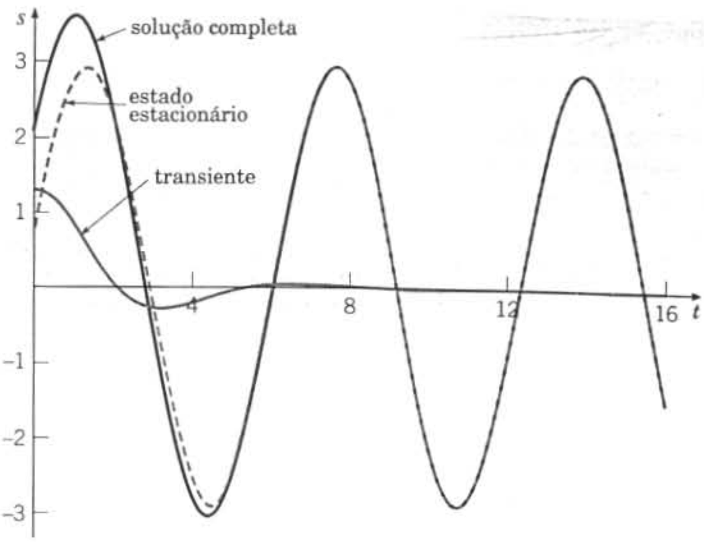

FIGURA 3.8.1 Solução do problema de valor inicial (1), (2).

A equação de movimento de um sistema mola-massa geral sujeito a uma força externa $F(t)$ é [Eq. (7) da Seção 3.7]

$$ms''(t) + \gamma s'(t) + ks(t) = F(t), \tag{7}$$

onde m, γ e k são, respectivamente, a massa, o coeficiente de amortecimento e a constante da mola do sistema mola-massa. Suponha agora que a força externa é dada por $F_0 \cos \omega t$, onde F_0 e ω são constantes positivas representando a amplitude e a frequência, respectivamente, da força. A Eq. (7) fica, então,

$$ms'' + \gamma s' + ks = F_0 \cos \omega t. \tag{8}$$

As soluções da Eq. (8) se comportam de maneira muito semelhante à solução do exemplo precedente. A solução geral da Eq. (8) tem a forma

$$s = c_1 s_1(t) + c_2 s_2(t) + A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t = s_c(t) + S(t). \tag{9}$$

As duas primeiras parcelas na Eq. (9) formam a solução geral $s_c(t)$ da equação homogênea associada à Eq. (8), enquanto as duas últimas parcelas formam uma solução particular $S(t)$ da equação não homogênea completa. Os coeficientes A e B podem ser encontrados, como de hábito, substituindo essas parcelas na equação diferencial (8), enquanto as constantes arbitrárias c_1 e c_2 estão disponíveis para satisfazer as condições iniciais, se houver. As soluções $s_1(t)$ e $s_2(t)$ da equação homogênea dependem das raízes r_1 e r_2 da equação característica $mr^2 + \gamma r + k = 0$. Como m, γ e k são constantes positivas, segue que r_1 e r_2 são raízes reais e negativas ou são complexas conjugadas com parte real negativa. Em qualquer dos casos, $s_1(t)$ e $s_2(t)$ tendem a zero quando $t \to \infty$. Como $s_c(t)$ vai desaparecendo quando t aumenta, ela é chamada de **solução transiente**. Em muitas aplicações ela tem pouca importância, e (dependendo do valor de γ) pode ser praticamente indetectável depois de apenas alguns segundos.

As parcelas restantes na Eq. (9), a saber, $S(t) = A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t$, não desaparecem quando t aumenta, mas persistem indefinidamente ou enquanto a força externa estiver sendo aplicada. Elas representam uma oscilação estacionária na mesma frequência da força externa e são chamadas de **solução estado estacionário** ou **resposta forçada**. A solução transiente nos permite satisfazer quaisquer condições iniciais que sejam impostas; quando o tempo vai passando, a energia colocada no sistema pelo deslocamento e pela velocidade iniciais é dissipada pela força de amortecimento, e o movimento torna-se, então, a resposta do sistema à força externa. Sem amortecimento, o efeito das condições iniciais persistiria para sempre.

É conveniente expressar $S(t)$ como uma única função trigonométrica, em vez de uma soma. Lembre-se de que fizemos isso para outras expressões semelhantes na Seção 3.7. Escrevemos, então,

$$S(t) = R\cos(\omega t - \delta). \tag{10}$$

A amplitude R e a fase δ dependem diretamente de A e de B e indiretamente dos parâmetros na equação diferencial (8). É possível mostrar, por cálculos diretos, porém um tanto longos, que

$$R = \frac{F_0}{\Delta}, \qquad \cos\delta = \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{\Delta}, \qquad \operatorname{sen}\delta = \frac{\gamma\omega}{\Delta}, \tag{11}$$

onde

$$\Delta = \sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad \text{e} \quad \omega_0^2 = k/m. \tag{12}$$

Lembre-se de que ω_0 é a frequência natural do sistema sem força externa e sem amortecimento.

Vamos investigar agora como a amplitude R da oscilação estado estacionário depende da frequência ω da força externa. Substituindo a Eq. (12) na expressão para R na Eq. (11) e fazendo algumas manipulações algébricas, encontramos

$$\frac{Rk}{F_0} = 1 \Bigg/ \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \Gamma\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^{1/2}, \tag{13}$$

onde $\Gamma = \gamma^2/mk$. Note que a quantidade Rk/F_0 é a razão entre a amplitude R da resposta forçada e o deslocamento estático da mola F_0/k produzido por uma força F_0.

Para excitações de baixa frequência, ou seja, quando $\omega \to 0$, segue da Eq. (13) que $Rk/F_0 \to 1$ ou $R \to F_0/k$. No outro extremo, para excitações de frequência muito alta, a Eq. (13) implica que $R \to 0$ quando $\omega \to \infty$. Em algum valor intermediário de ω, a amplitude pode atingir um máximo. Para encontrar esse ponto de máximo, podemos diferenciar R em relação a ω e igualar o resultado a zero. Dessa maneira vemos que a amplitude máxima ocorre quando $\omega = \omega_{\text{máx}}$, onde

$$\omega_{\text{máx}}^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2m^2} = \omega_0^2\left(1 - \frac{\gamma^2}{2mk}\right). \tag{14}$$

Note que $\omega_{\text{máx}} < \omega_0$ e que $\omega_{\text{máx}}$ está próximo de ω_0 quando γ é pequeno. O valor máximo de R é

$$R_{\text{máx}} = \frac{F_0}{\gamma\omega_0\sqrt{1 - (\gamma^2/4mk)}} \cong \frac{F_0}{\gamma\omega_0}\left(1 + \frac{\gamma^2}{8mk}\right), \tag{15}$$

onde a última expressão é uma aproximação para γ pequeno. Se $\gamma^2/mk > 2$, então $\omega_{\text{máx}}$ dado pela Eq. (14) é imaginário; nesse caso, o valor máximo de R ocorre para $\omega = 0$ e R é uma função monótona decrescente de ω. Lembre-se de que o amortecimento crítico ocorre quando $\gamma^2/mk = 4$.

Para γ pequeno, segue da Eq. (15) que $R_{\text{máx}} \cong F_0/\gamma\omega_0$. Assim, para sistemas levemente amortecidos, a amplitude R da resposta forçada quando ω está próximo de ω_0 é bem grande, mesmo para forças externas relativamente pequenas, e quanto menor for o valor de γ, mais pronunciado será esse efeito. Esse fenômeno é conhecido como **ressonância** e é frequentemente um ponto importante a considerar em um projeto. A ressonância pode ser boa ou ruim, dependendo das circunstâncias. Ela tem que ser levada seriamente em consideração no projeto de estruturas, como edifícios e pontes, onde pode produzir instabilidade levando, possivelmente, a falhas catastróficas da estrutura. Por outro lado, a ressonância pode ser útil no projeto de instrumentos, como o sismógrafo, feito para detectar sinais periódicos fracos.

A Figura 3.8.2 contém alguns gráficos representativos de Rk/F_0 em função de ω/ω_0 para diversos valores de $\Gamma = \gamma^2/mk$. O gráfico correspondente a $\Gamma = 0{,}015625$ está incluído porque este é o valor de Γ que ocorre no Exemplo 2 abaixo. Observe especialmente o pico pontudo na curva correspondente a

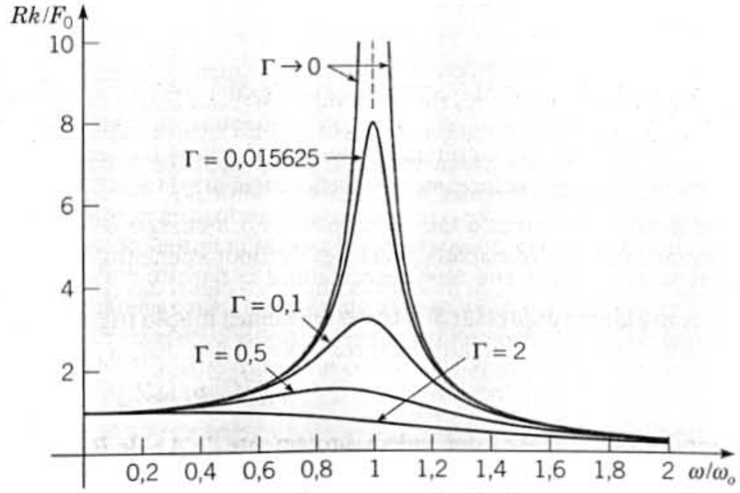

FIGURA 3.8.2 Vibração forçada com amortecimento: amplitude da resposta estado estacionário em função da força externa; $\Gamma = \gamma^2/mk$.

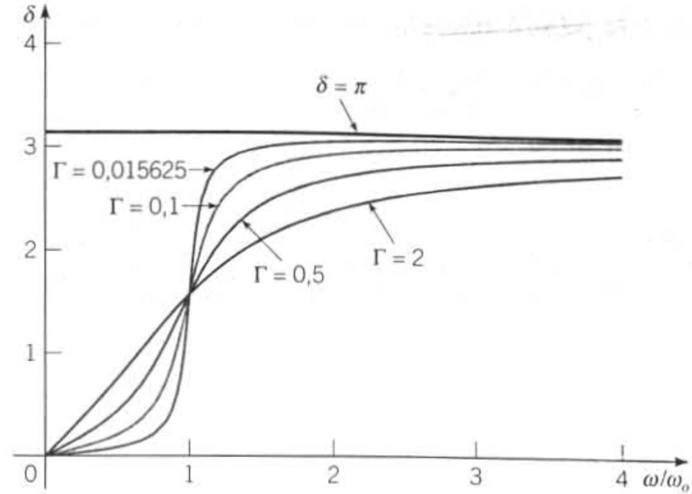

FIGURA 3.8.3 Vibração forçada com amortecimento: fase da resposta estado estacionário em função da frequência da força externa; $\Gamma = \gamma^2/mk$.

$\Gamma = 0{,}015625$ perto de $\omega/\omega_0 = 1$. O caso-limite quando $\Gamma \to 0$ também é mostrado. Segue da Eq. (13), ou das Eqs. (11) e (12), que $R \to F_0/m|\omega_0^2 - \omega^2|$ quando $\gamma \to 0$ e, portanto, Rk/F_0 é assintótico à reta vertical $\omega = \omega_0$, como mostra a figura. Quando o amortecimento no sistema aumenta, o pico na resposta diminui gradativamente.

A Figura 3.8.2 também ilustra a utilidade de variáveis adimensionais. Você pode verificar facilmente que cada uma das quantidades Rk/F_0, ω/ω_0 e Γ é adimensional. A importância desta observação é que o número de parâmetros significativos no problema foi reduzido a três, em vez dos cinco que aparecem na Eq. (8). Assim, basta uma família de curvas, algumas delas ilustradas na Figura 3.8.2, para descrever o comportamento da resposta em função da frequência de todos os sistemas governados pela Eq. (8).

O ângulo de fase δ também depende de ω de maneira interessante. Para ω próximo de zero, segue das Eqs. (11) e (12) que $\cos\delta \cong 1$ e $\operatorname{sen}\delta \cong 0$. Logo, $\delta \cong 0$ e a resposta está quase em fase com a excitação, o que significa que sobem e descem juntas e, em particular, atingem seus respectivos máximos e mínimos praticamente ao mesmo tempo. Para $\omega = \omega_0$, vemos que $\cos\delta = 0$ e $\operatorname{sen}\delta = 1$, de modo que $\delta = \pi/2$. Nesse caso, a resposta fica atrasada, em relação à excitação, de $\pi/2$; ou seja, os picos da resposta ocorrem $\pi/2$ mais tarde do que os da excitação, e analogamente para os vales. Finalmente, para ω muito grande temos $\cos\delta \cong -1$ e $\operatorname{sen}\delta \cong 0$. Logo, $\delta \cong \pi$, de modo que a resposta está quase que completamente defasada em relação à excitação; isso significa que a resposta é mínima quando a excitação é máxima, e vice-versa. A Figura 3.8.3 mostra os gráficos de δ em função de ω/ω_0 para diversos valores de Γ. Para pouco amortecimento, a transição de fase de perto de $\delta = 0$ para perto de $\delta = \pi$ ocorre de maneira um tanto abrupta, enquanto para valores grandes do parâmetro de amortecimento a transição se dá de forma mais gradual.

EXEMPLO 2

Considere o problema de valor inicial

$$s'' + 0{,}125s' + s = 3\cos\omega t, \qquad s(0) = 2, \quad s'(0) = 0. \tag{16}$$

Mostre gráficos da solução para valores diferentes da frequência da força externa ω e compare-os com os gráficos correspondentes da força externa.

Para este sistema, temos $\omega_0 = 1$ e $\Gamma = 1/64 = 0{,}015625$. Seu movimento sem força externa foi discutido no Exemplo 3 da Seção 3.7, e a Figura 3.7.7 mostra o gráfico da solução do problema na ausência de força. As Figuras 3.8.4, 3.4.5 e 3.8.6 mostram a solução do problema com força externa (16) para $\omega = 0{,}3$, $\omega = 1$ e $\omega = 2$, respectivamente. Cada figura mostra, também, o gráfico da força externa. Neste exemplo, o deslocamento estático F_0/k é igual a 3.

A Figura 3.8.4 mostra o caso de baixa frequência, $\omega/\omega_0 = 0{,}3$. Depois de a resposta inicial transiente ser amortecida substancialmente, a resposta estado estacionário restante está essencialmente em fase com a excitação, e a amplitude da resposta é um pouco maior do que o deslocamento estático. Especificamente, $R \cong 3{,}2939$ e $\delta \cong 0{,}041185$.

O caso ressonante, $\omega/\omega_0 = 1$, está ilustrado na Figura 3.8.5. Aqui a amplitude da resposta estado estacionário é oito vezes o deslocamento estático e a figura também mostra o atraso da fase previsto de $\pi/2$ em relação à força externa.

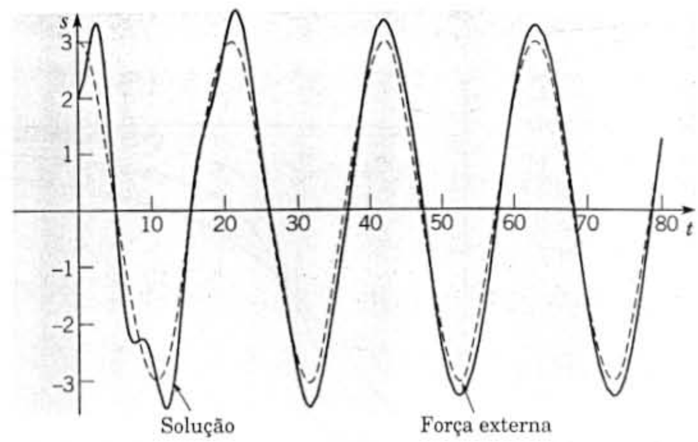

FIGURA 3.8.4 Uma vibração forçada com amortecimento: solução de $s'' + 0{,}125s' + s = 3\cos 0{,}3t$, $s(0) = 2$, $s'(0) = 0$.

O caso da frequência de excitação razoavelmente alta está ilustrado na Figura 3.8.6. Note que a amplitude da resposta estado estacionário é aproximadamente um terço do deslocamento estático e que a diferença de fase entre a excitação e a resposta é aproximadamente π. Mais precisamente, temos que $R \cong 0{,}99655$ e $\delta \cong 3{,}0585$.

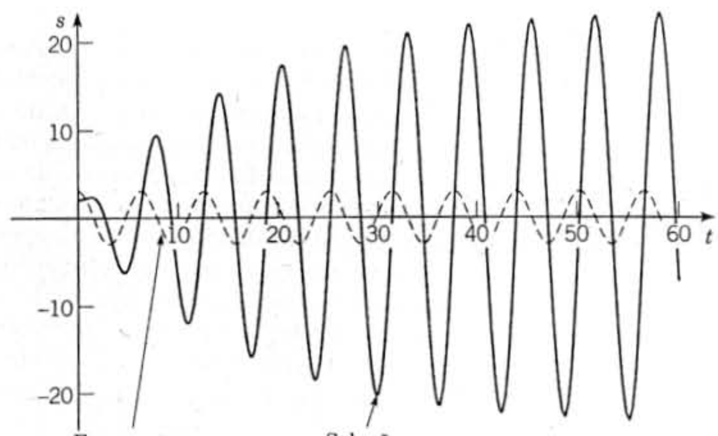

FIGURA 3.8.5 Uma vibração forçada com amortecimento; solução de $s'' + 0{,}125s' + s = 3\cos t$, $s(0) = 2$, $s'(0) = 0$.

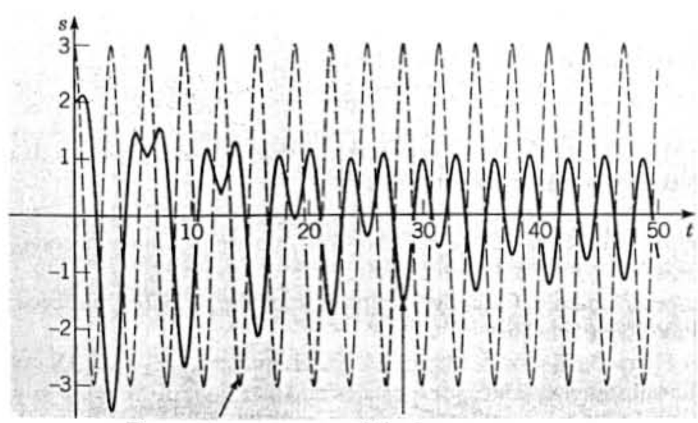

FIGURA 3.8.6 Uma vibração forçada com amortecimento; solução de $s'' + 0{,}125s' + s = 3\cos 2t$, $s(0) = 2$, $s'(0) = 0$.

Vibrações Forçadas sem Amortecimento. Vamos supor agora que $\gamma = 0$ na Eq. (8), obtendo assim a equação de movimento de um oscilador forçado sem amortecimento

$$ms'' + ks = F_0 \cos \omega t. \tag{17}$$

A forma da solução geral da Eq. (17) é diferente, dependendo de se a frequência ω da força externa é diferente ou é igual à frequência natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ do sistema sem força externa. Considere primeiro o caso $\omega \neq \omega_0$; então, a solução geral da Eq. (17) é

$$s = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \tag{18}$$

As constantes c_1 e c_2 são determinadas pelas condições iniciais. O movimento resultante é, em geral, a soma de dois movimentos periódicos com frequências diferentes (ω_0 e ω) e amplitudes diferentes também.

É particularmente interessante supor que a massa está inicialmente em repouso, de modo que as condições iniciais são $s(0) = 0$ e $s'(0) = 0$. Então a energia impulsionando o sistema vem inteiramente da força externa, sem contribuição das condições iniciais. Nesse caso as constantes c_1 e c_2 na Eq. (18) são dadas por

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \qquad c_2 = 0, \tag{19}$$

e a solução da Eq. (17) fica

$$s = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \tag{20}$$

Essa é a soma de duas funções periódicas com períodos diferentes, mas com mesma amplitude. Usando as identidades trigonométricas para $\cos(A \pm B)$ com $A = (\omega_0 + \omega)t/2$ e $B = (\omega_0 - \omega)t/2$, podemos escrever a Eq. (20) na forma

$$s = \left[\frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}\right] \operatorname{sen} \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}. \tag{21}$$

Se $|\omega_0 - \omega|$ é pequeno, então $\omega_0 + \omega$ é muito maior do que $|\omega_0 - \omega|$. Em consequência, $\operatorname{sen}(\omega_0 + \omega)t/2$ é uma função oscilando rapidamente, se comparada com $\operatorname{sen}(\omega_0 - \omega)t/2$. Então o movimento é uma oscilação rápida com frequência $(\omega_0 + \omega)/2$, mas com uma amplitude senoidal variando lentamente

$$\frac{2F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|} \left|\operatorname{sen} \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}\right|.$$

Esse tipo de movimento, com uma variação periódica da amplitude, exibe o que é chamado de um **batimento**. Por exemplo, tal fenômeno ocorre em acústica quando dois diapasões de frequência praticamente iguais são usados simultaneamente. Nesse caso, a variação periódica da amplitude pode ser notada com facilidade pelo ouvido sem recursos extras. Em eletrônica, a variação da amplitude em relação ao tempo é chamada de **modulação da amplitude**.

EXEMPLO 3

Resolva o problema de valor inicial

$$s'' + s = 0{,}5 \cos 0{,}8t, \qquad s(0) = 0, \quad s'(0) = 0, \tag{22}$$

e faça o gráfico da solução

Nesse caso $\omega_0 = 1$, $\omega = 0{,}8$ e $F_0 = 0{,}5$, de modo que, pela Eq. (21), a solução do problema dado é

$$s = 2{,}77778(\operatorname{sen} 0{,}1t)(\operatorname{sen} 0{,}9t). \tag{23}$$

A Figura 3.8.7 mostra um gráfico desta solução. A variação de amplitude tem uma frequência baixa de 0,1 e um período lento correspondente de 20π. Note que um meio período de 10π corresponde a um único ciclo de amplitude crescente e depois decrescente. O deslocamento do sistema mola-massa oscila com uma frequência relativamente rápida de 0,9, que só é ligeiramente menor do que a frequência natural ω_0.

Imagine agora que a frequência ω da força externa é ainda mais aumentada, digamos para $\omega = 0{,}9$. Então a frequência baixa é cortada pela metade para 0,05 e o meio período lento correspondente dobra para 20π. O multiplicador 2,7778 também aumenta substancialmente para 5,2632. No entanto, a frequência rápida aumenta pouco, para 0,95. Você pode visualizar o que acontece quando ω vai assumindo valores cada vez mais próximos da frequência natural $\omega_0 = 1$?

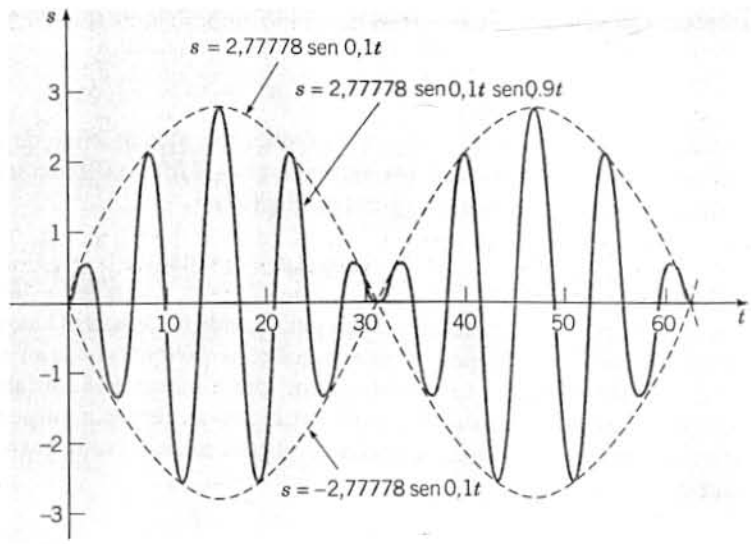

FIGURA 3.8.7 Um batimento; solução de $s'' + s = 0{,}5 \cos 0{,}8t$, $s(0) = 0$, $s'(0) = 0$; $s = 2{,}77778(\text{sen } 0{,}1t)(\text{sen } 0{,}9t)$.

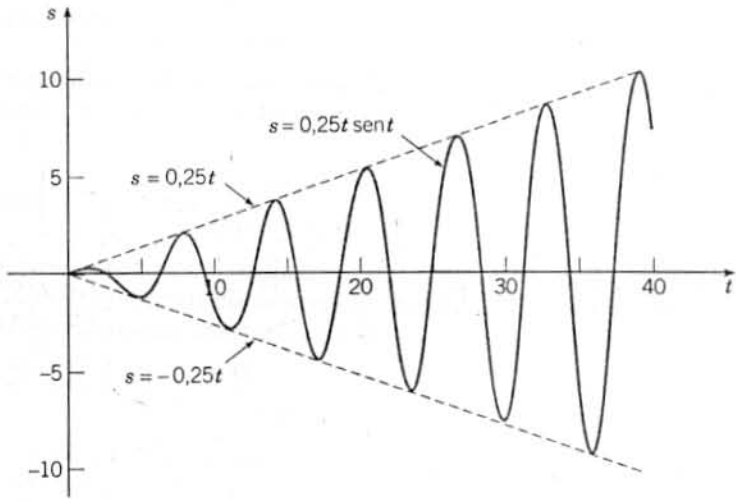

FIGURA 3.8.8 Ressonância; solução de $s'' + s = 0{,}5 \cos t$, $s(0) = 0$, $s'(0) = 0$; $s = 0{,}25t \text{ sen } t$.

Vamos voltar para a Eq. (17) e considerar o caso da ressonância, onde $\omega = \omega_0$, ou seja, a frequência da função externa é igual à frequência natural do sistema. Então o termo não homogêneo $F_0 \cos \omega t$ é uma solução da equação homogênea associada. Nesse caso, a solução da Eq. (17) é

$$s = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \text{sen } \omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \text{ sen } \omega_0 t. \tag{24}$$

Por causa do termo $t \text{ sen } \omega_0 t$, a solução (24) prevê que o movimento ficará ilimitado quando $t \to \infty$, independentemente dos valores de c_1 e c_2; veja a Figura 3.8.8 para um exemplo típico. É claro que oscilações ilimitadas não ocorrem na vida real. Quando s fica grande, o modelo matemático no qual a Eq. (17) se baseia não é mais válido, já que a hipótese de que a força da mola depende linearmente do deslocamento requer que s seja pequeno. Como vimos, se o amortecimento é incluído no modelo, o movimento previsto permanece limitado; no entanto, a resposta à função de entrada $F_0 \cos \omega t$ pode ser muito grande se o amortecimento é pequeno e ω está próximo de ω_0.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, escreva a expressão dada como um produto de duas funções trigonométricas com frequências diferentes.

1. $\cos 9t - \cos 7t$
2. $\operatorname{sen} 7t - \operatorname{sen} 6t$
3. $\cos \pi t + \cos 2\pi t$
4. $\operatorname{sen} 3t + \operatorname{sen} 4t$
5. Uma massa pesando 4 lb (cerca de 1,8 kg) estica uma mola de 1,5 in (cerca de 5 cm). A massa é deslocada 2 in no sentido positivo a partir de sua posição de equilíbrio e solta sem velocidade inicial. Supondo que não há amortecimento e que a massa sofre a ação de uma força externa de $2 \cos t$ lb, formule o problema de valor inicial que descreve o movimento dessa massa.
6. Uma massa de 5 kg estica uma mola de 10 cm. A massa sofre a ação de uma força externa de $10 \operatorname{sen}(t/2)$ N (newtons) e se move em um meio que amortece o movimento com uma força viscosa de 2 N quando a velocidade da massa é de 4 cm/s. Se a massa é colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio com uma velocidade inicial de 3 cm/s, formule o problema de valor inicial que descreve o movimento da massa.
7. (a) Encontre a solução do Problema 5.
   (b) Faça o gráfico da solução.
   (c) Se a força externa dada for substituída por uma força $4 \operatorname{sen} \omega t$ com a mesma frequência ω, encontre o valor de ω para o qual ocorre ressonância.
8. (a) Encontre a solução do problema de valor inicial no Problema 6.
   (b) Identifique as partes transiente e estado estacionário da solução.
   (c) Faça o gráfico da solução estado estacionário.
   (d) Se a força externa dada for substituída por uma força $2 \cos \omega t$ com frequência ω, encontre o valor de ω para o qual a amplitude da resposta forçada é máxima.
9. Se um sistema mola-massa não amortecido com uma massa pesando 6 lb (cerca de 2,7 kg) e uma constante da mola de 1 lb/in é colocado em movimento de repente, no instante $t = 0$, por uma força externa de $4 \cos 7t$ lb, determine a posição da massa em qualquer instante e desenhe o gráfico de seu deslocamento em função de t.
10. Uma massa pesando 8 lb (cerca de 3,6 kg) estica uma mola de 6 in (cerca de 15 cm). Uma força externa de $8 \operatorname{sen} 8t$ lb age sobre o sistema. Se a massa é puxada 3 in para baixo e depois solta, determine a posição da massa em qualquer instante de tempo. Determine os quatro primeiros instantes em que a velocidade da massa é nula.
11. Uma mola é esticada 6 in (cerca de 15 cm) por uma massa pesando 8 lb (cerca de 3,6 kg). A massa está presa a um mecanismo amortecedor que tem uma constante de amortecimento de 0,25 lb s/ft e está sob a ação de uma força externa igual a $4 \cos 2t$ lb.
    (a) Determine a resposta estado estacionário desse sistema.
    (b) Se a massa dada é substituída por uma massa m, determine o valor de m para o qual a amplitude da resposta estado estacionário é máxima.
12. A mola de um sistema mola-massa tem constante de 3 N/m. É presa uma massa de 2 kg na mola e o movimento se dá em um fluido viscoso que oferece uma resistência numericamente igual ao módulo da velocidade instantânea. Se o sistema sofre a ação de uma força externa de $(3 \cos 3t - 2 \operatorname{sen} 3t)$ N, determine a resposta estado estacionário. Expresse sua resposta na forma $R \cos(\omega t - \delta)$.
13. Neste problema, pedimos que você forneça alguns dos detalhes na análise de um oscilador forçado com amortecimento.
    (a) Deduza as Eqs. (10), (11) e (12) para a solução estado estacionário da Eq. (8).
    (b) Deduza a expressão na Eq. (13) para Rk/F_0.
    (c) Mostre que $\omega^2_{\text{máx}}$ e $R_{\text{máx}}$ são dados pelas Eqs. (14) e (15), respectivamente.
14. Encontre a velocidade da resposta estado estacionário dada pela Eq. (10). Depois mostre que a velocidade é máxima quando $\omega = \omega_0$.
15. Encontre a solução do problema de valor inicial

$$s'' + s = F(t), \qquad s(0) = 0, \quad s'(0) = 0,$$

onde

$$F(t) = \begin{cases} F_0 t, & 0 \le t \le \pi, \\ F_0(2\pi - t), & \pi < t \le 2\pi, \\ 0, & 2\pi < t. \end{cases}$$

Sugestão: Trate separadamente cada intervalo de tempo e iguale as soluções nos intervalos diferentes supondo que s e s' são funções contínuas de t.

16. Um circuito em série tem um capacitor de $0{,}25 \times 10^{-6}$ F, um resistor de $5 \times 10^3\ \Omega$ e um indutor de 1 H. A carga inicial no capacitor é zero. Se uma bateria de 12 volts é conectada ao circuito e o circuito é fechado

em $t = 0$, determine a carga no capacitor em $t = 0{,}001$ s, em $t = 0{,}01$ s e em qualquer instante t. Determine, também, a carga limite quando $t \to \infty$.

17. Considere um sistema vibratório descrito pelo problema de valor inicial

$$s'' + \tfrac{1}{4}s' + 2s = 2\cos\omega t, \qquad s(0) = 0, \quad s'(0) = 2.$$

(a) Determine a parte estado estacionário da solução deste problema.
(b) Encontre a amplitude A da solução estado estacionário em função de ω.
(c) Faça o gráfico de A em função de ω.
(d) Encontre o valor máximo de A e a frequência ω onde ele ocorre.

18. Considere o sistema forçado, mas não amortecido, descrito pelo problema de valor inicial

$$s'' + s = 3\cos\omega t, \qquad s(0) = 0, \quad s'(0) = 0.$$

(a) Encontre a solução $s(t)$ para $\omega \neq 1$.
(b) Faça o gráfico da solução $s(t)$ em função de t para $\omega = 0{,}7$, $\omega = 0{,}8$ e $\omega = 0{,}9$. Descreva como a resposta $s(t)$ muda quando ω varia nesse intervalo. O que acontece se ω assume valores cada vez mais próximos de 1? Note que a frequência natural do sistema sem a força externa é $\omega_0 = 1$.

19. Considere o sistema vibratório descrito pelo problema de valor inicial

$$s'' + s = 3\cos\omega t, \qquad s(0) = 1, \quad s'(0) = 1.$$

(a) Encontre a solução para $\omega \neq 1$.
(b) Faça o gráfico da solução $s(t)$ em função de t para $\omega = 0{,}7$, $\omega = 0{,}8$ e $\omega = 0{,}9$. Compare os resultados com os do Problema 18, ou seja, descreva o efeito das condições iniciais não nulas.

20. Para o problema de valor inicial no Problema 18, faça o gráfico de s' em função de s para $\omega = 0{,}7$, $\omega = 0{,}8$ e $\omega = 0{,}9$. Tal gráfico é chamado de retrato de fase. Use um intervalo de tempo suficientemente longo para que o retrato de fase apareça como uma curva fechada. Coloque setas na sua curva indicando o sentido de percurso quando t aumenta.

Os Problemas de 21 a 23 tratam do problema de valor inicial

$$s'' + 0{,}125s' + 4s = F(t), \qquad s(0) = 2, \quad s'(0) = 0.$$

Em cada um desses problemas:

(a) Faça os gráficos da função externa $F(t)$ e da solução $u(t)$ em função de t usando o mesmo conjunto de eixos. Use um intervalo de tempo suficientemente longo para que a solução transiente seja substancialmente reduzida. Observe a relação entre a amplitude e a fase da força externa e a amplitude e a fase da solução. Note que $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 2$.
(b) Faça o retrato de fase da solução, ou seja, o gráfico de s' em função de s.

21. $F(t) = 3\cos(t/4)$
22. $F(t) = 3\cos 2t$
23. $F(t) = 3\cos 6t$
24. Um sistema mola-massa com uma mola dura (Problema 32 da Seção 3.7) sofre a ação de uma força externa periódica. Na ausência de amortecimento, suponha que o deslocamento da massa satisfaz o problema de valor inicial

$$s'' + s + \tfrac{1}{5}s^3 = \cos\omega t, \qquad s(0) = 0, \quad s'(0) = 0.$$

(a) Seja $\omega = 1$ e gere, em um computador, a solução do problema dado. O sistema exibe batimento?
(b) Faça o gráfico da solução para diversos valores de ω entre 1/2 e 2. Descreva como a solução varia quando ω aumenta.

25. Suponha que o sistema do Problema 24 é modificado para incluir amortecimento e que o problema de valor inicial resultante é

$$s'' + \tfrac{1}{5}s' + s + \tfrac{1}{5}s^3 = \cos\omega t, \qquad s(0) = 0, \quad s'(0) = 0.$$

(a) Gere, em um computador, o gráfico da solução do problema dado para diversos valores de ω entre 1/2 e 2 e estime a amplitude R da resposta estado estacionário em cada caso.
(b) Usando os dados encontrados em (a), faça o gráfico de R em função de ω. Para que frequência ω a amplitude é máxima?
(c) Compare os resultados dos itens (a) e (b) com os resultados correspondentes para a mola linear.

REFERÊNCIAS Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1961; New York: Dover, 1989).

Existem muitos livros sobre vibrações mecânicas e circuitos elétricos. Um que trata de ambos é
Close, C. M., and Frederick, D. K., *Modeling and Analysis of Dynamic Systems* (3rd ed.) (New York: Wiley, 2001).

Um livro clássico sobre vibrações mecânicas é
Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations* (4th ed.) (New York: McGraw-Hill, 1956; New York; Dover, 1985).

Um livro de nível intermediário mais recente é
Thomson, W. T., *Theory of Vibrations with Applications* (5th ed.) (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1997).

Um livro elementar sobre circuitos elétricos é
Bobrow, L. S., *Elementary Linear Circuit Analysis* (New York: Oxford University Press, 1996).