

NONA EDIÇÃO

Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno

William E. Boyce

Professor Emérito da cátedra Edward P. Hamilton

Richard C. DiPrima

*Anteriormente Professor da cátedra Eliza Ricketts Foundation do
Departamento de Ciências Matemáticas do
Rensselaer Polytechnic Institute*

Tradução e Revisão Técnica

Valéria de Magalhães Iório

Fundação Educacional Serra dos Órgãos, Teresópolis



Os autores e a editora empenharam-se para citar adequadamente e dar o devido crédito a todos os detentores dos direitos autorais de qualquer material utilizado neste livro, dispondo-se a possíveis acertos caso, inadvertidamente, a identificação de algum deles tenha sido omitida.

Não é responsabilidade da editora nem dos autores a ocorrência de eventuais perdas ou danos a pessoas ou bens que tenham origem no uso desta publicação.

ELEMENTARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND BOUNDARY VALUE
PROBLEMS, NINTH EDITION

Copyright © 2009 John Wiley & Sons, Inc.

All Rights Reserved. This translation is published under license.

Direitos exclusivos para a língua portuguesa

Copyright © 2010 by

LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.

Uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional

Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na internet ou outros), sem permissão expressa da Editora.

Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ – CEP 20040-040
Tel.: 21-3543-0770 / 11-5080-0770
Fax: 21-3543-0896
ltc@grupogen.com.br
www.ltceditora.com.br

Capa: Olga Loureiro

Editoração Eletrônica:  ANTHARES

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ

B784e

Boyce, William E., 1930-
Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno / William E. Boyce,
Richard C. DiPrima ; tradução e revisão Valéria de Magalhães Iório. - Rio de Janeiro :
LTC, 2010.

Tradução de: Elementary differential equations and boundary value problems, 9th ed

Apêndices

Inclui exercícios e respectivas respostas

Inclui índice

ISBN 978-5-216-1756-3

1. Equações diferenciais. 2. Problemas de valores de contorno. I. DiPrima, Richard C. II.
Título.

10-1666.

CDD: 515.35

CDU: 517.9

SUMÁRIO

	Capítulo 1	Introdução 1
		1.1 Alguns Modelos Matemáticos Básicos; Campos de Direção 1
		1.2 Soluções de Algumas Equações Diferenciais 8
		1.3 Classificação de Equações Diferenciais 15
		1.4 Notas Históricas 20
1	}	Capítulo 2
		Equações Diferenciais de Primeira Ordem 23
		2.1 Equações Lineares; Método dos Fatores Integrantes 23
		2.2 Equações Separáveis 31
		2.3 Modelagem com Equações de Primeira Ordem 38
		2.4 Diferenças entre Equações Lineares e Não Lineares 52
		2.5 Equações Autônomas e Dinâmica Populacional 60
		2.6 Equações Exatas e Fatores Integrantes 72
		2.7 Aproximações Numéricas: o Método de Euler 77
		2.8 O Teorema de Existência e Unicidade 85
		2.9 Equações de Diferenças de Primeira Ordem 93
		Capítulo 3
		Equações Lineares de Segunda Ordem 105
		3.1 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes 105
		3.2 Soluções de Equações Lineares Homogêneas: o Wronskiano 111
		3.3 Raízes Complexas da Equação Característica 121
		3.4 Raízes Repetidas; Redução de Ordem 127
2		3.5 Equações Não Homogêneas; Método dos Coeficientes Indeterminados 134
		3.6 Variação dos Parâmetros 143
		3.7 Vibrações Mecânicas e Elétricas 148
		3.8 Vibrações Forçadas 160
		Capítulo 4
		Equações Lineares de Ordem Mais Alta 171
		4.1 Teoria Geral para Equações Lineares de Ordem n 171
		4.2 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes 176
		4.3 O Método dos Coeficientes Indeterminados 183
		4.4 O Método de Variação dos Parâmetros 186
		Capítulo 5
		Soluções em Série para Equações Lineares de Segunda Ordem 191
		5.1 Revisão de Séries de Potências 191
		5.2 Soluções em Série Perto de um Ponto Ordinário, Parte I 196
		5.3 Soluções em Série Perto de um Ponto Ordinário, Parte II 204
		5.4 Equações de Euler; Pontos Singulares Regulares 209
3		5.5 Soluções em Série Perto de um Ponto Singular Regular, Parte I 217
		5.6 Soluções em Série Perto de um Ponto Singular Regular, Parte II 222
		5.7 Equação de Bessel 228
		Capítulo 6
		A Transformada de Laplace 239
		6.1 Definição da Transformada de Laplace 239
		6.2 Solução de Problemas de Valores Iniciais 245
		6.3 Funções Degrau 253
		6.4 Equações Diferenciais sob a Ação de Funções Descontínuas 259
4		6.5 Funções de Impulso 265
		6.6 A Convolução 270

Capítulo 7	Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem 277
	7.1 Introdução 277
	7.2 Revisão de Matrizes 283
5	7.3 Sistemas de Equações Lineares Algébricas; Independência Linear, Autovalores, Autovetores 291
	7.4 Teoria Básica de Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem 299
	7.5 Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes 303
	7.6 Autovalores Complexos 312
	7.7 Matrizes Fundamentais 322
	7.8 Autovalores Repetidos 328
	7.9 Sistemas Lineares Não Homogêneos 336
Capítulo 8	Métodos Numéricos 345
	8.1 O Método de Euler ou Método da Reta Tangente 345
	8.2 Aprimoramentos no Método de Euler 353
	8.3 O Método de Runge-Kutta 358
	8.4 Métodos de Passos Múltiplos 361
	8.5 Mais sobre Erros; Estabilidade 366
	8.6 Sistemas de Equações de Primeira Ordem 373
Capítulo 9	Equações Diferenciais Não Lineares e Estabilidade 377
	9.1 O Plano de Fase: Sistemas Lineares 377
	9.2 Sistemas Autônomos e Estabilidade 386
	9.3 Sistemas Localmente Lineares 393
	9.4 Espécies em Competição 403
	9.5 Equações Predador-Presa 413
	9.6 O Segundo Método de Liapunov 420
	9.7 Soluções Periódicas e Círculos Limites 428
	9.8 Caos e Atratores Estranhos: as Equações de Lorenz 438
Capítulo 10	Equações Diferenciais Parciais e Séries de Fourier 447
	10.1 Problemas de Valores de Contorno para Fronteiras com Dois Pontos 447
	10.2 Séries de Fourier 452
	10.3 O Teorema de Convergência de Fourier 460
	10.4 Funções Pares e Ímpares 466
	10.5 Separação de Variáveis; Condução de Calor em uma Barra 472
	10.6 Outros Problemas de Condução de Calor 478
	10.7 A Equação de Onda: Vibrações de uma Corda Elástica 486
	10.8 A Equação de Laplace 497
	Apêndice A Dedução da Equação de Calor 505
	Apêndice B Dedução da Equação de Onda 508
Capítulo 11	Problemas de Valores de Contorno e Teoria de Sturm-Liouville 511
	11.1 A Ocorrência de Problema de Valores de Contorno em Fronteiras com Dois Pontos 511
	11.2 Problemas de Valores de Contorno de Sturm-Liouville 517
	11.3 Problemas de Valores de Contorno Não Homogêneos 527
	11.4 Problemas de Sturm-Liouville Singulares 538
	11.5 Observações Adicionais sobre o Método de Separação de Variáveis: uma Expansão em Funções de Bessel 543
	11.6 Séries de Funções Ortogonais: Convergência na Média 548
	Respostas dos Problemas 555
	Índice 605

Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Este capítulo trata de equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (1)$$

onde f é uma função dada de duas variáveis. Qualquer função diferenciável $y = \phi(t)$ que satisfaz essa equação para todo t em algum intervalo é chamada de solução. Nosso objetivo é determinar se tal função existe e, nesse caso, desenvolver métodos para encontrá-la. Infelizmente, não existe método geral para resolver a equação em termos de funções elementares para uma função arbitrária f . Em vez disso, descreveremos diversos métodos, cada um deles aplicável a determinada subclasse de equações de primeira ordem. As mais importantes delas são as equações lineares (Seção 2.1), as equações separáveis (Seção 2.2) e as equações exatas (Seção 2.6). Outras seções deste capítulo descrevem algumas das aplicações importantes de equações diferenciais de primeira ordem, introduzem a ideia de aproximar uma solução por cálculos numéricos e discutem algumas questões teóricas relacionadas à existência e à unicidade de soluções. A última seção inclui um exemplo de soluções caóticas no contexto de equações de diferenças finitas de primeira ordem, que têm alguns pontos importantes de semelhança com equações diferenciais e são mais simples de investigar.

2.1 Equações Lineares; Método dos Fatores Integrantes

Se a função f na Eq. (1) depender linearmente da variável dependente y , então a Eq. (1) é dita uma equação linear de primeira ordem. Nas Seções 1.1 e 1.2 discutimos um tipo restrito de equações lineares de primeira ordem, aquelas com coeficientes constantes. Um exemplo típico é

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b, \quad (2)$$

onde a e b são constantes dadas. Lembre-se de que uma equação dessa forma descreve o movimento de um objeto em queda na atmosfera. Vamos considerar agora a equação linear de primeira ordem mais geral, obtida substituindo-se os coeficientes a e b na Eq. (2) por funções arbitrárias de t . Em geral escreveremos a **equação linear de primeira ordem** geral na forma-padrão

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \quad (3)$$

onde p e g são funções dadas da variável independente t .

A Eq. (2) pode ser resolvida pelo método de integração introduzido na Seção 1.2. Ou seja, se $a \neq 0$ e $y \neq b/a$, podemos escrever a equação na forma

$$\frac{dy/dt}{y - (b/a)} = -a. \quad (4)$$

Então, integrando, obtemos

$$\ln |y - (b/a)| = -at + C,$$

donde segue que a solução geral da Eq. (2) é

$$y = (b/a) + ce^{-at}, \quad (5)$$

onde c é uma constante arbitrária.

Infelizmente, esse método direto de solução não pode ser usado para resolver a equação geral (3), de modo que precisaremos de um método diferente. Esse método é devido a Leibniz; ele envolve a multiplicação da equação diferencial (3) por uma determinada função $\mu(t)$ escolhida de modo que a equação resultante seja facilmente integrável. A função $\mu(t)$ é chamada de **fator integrante**, e a principal dificuldade é determinar como encontrá-la. Vamos introduzir esse método em um exemplo simples e mostrar mais adiante como estendê-lo a outras equações lineares de primeira ordem, incluindo a equação geral (3).

EXEMPLO

1

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}. \quad (6)$$

Desenhe o gráfico de diversas soluções e encontre a solução particular cujo gráfico contém o ponto $(0, 1)$.

O primeiro passo é multiplicar a Eq. (6) por uma função $\mu(t)$, ainda a determinar; assim

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}\mu(t)y = \frac{1}{2}\mu(t)e^{t/3}. \quad (7)$$

Precisamos agora saber se podemos escolher $\mu(t)$ de tal modo que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (7) seja reconhecida como a derivada de alguma expressão particular. Se for possível, poderemos integrar a Eq. (7) mesmo sem conhecer a função y . Para orientar a escolha do fator integrante $\mu(t)$, pergunte a si mesmo onde, em cálculo, você já viu uma expressão contendo um termo da forma $\mu(t)dy/dt$. Você está na pista certa se isso lhe lembra a regra do produto para a diferenciação. Vamos tentar, então, determinar $\mu(t)$ de modo que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (7) seja a derivada do produto $\mu(t)y$. Comparando a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (7) com a fórmula de diferenciação

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t) \frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y, \quad (8)$$

observamos que serão iguais se escolhermos $\mu(t)$ de modo que

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \frac{1}{2}\mu(t). \quad (9)$$

Portanto, nossa busca por um fator integrante terá sucesso se pudermos encontrar uma solução para a Eq. (9). Talvez você possa identificar imediatamente uma função que satisfaz a Eq. (9): que função bem conhecida no cálculo tem derivada igual à metade da função original? De maneira mais sistemática, podemos reescrever a Eq. (9) como

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = \frac{1}{2}, \quad (10)$$

que é equivalente a

$$\frac{d}{dt} \ln |\mu(t)| = \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Segue então que

$$\ln |\mu(t)| = \frac{1}{2}t + C, \quad (12)$$

ou

$$\mu(t) = ce^{t/2}. \quad (13)$$

A função $\mu(t)$ dada pela Eq. (13) é um fator integrante para a Eq. (6). Como não precisamos do fator integrante mais geral possível, escolheremos c igual a um na Eq. (13) e usaremos $\mu(t) = e^{t/2}$.

Vamos voltar para a Eq. (6) e multiplicá-la pelo fator integrante $e^{t/2}$ para obter

$$e^{t/2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} e^{t/2} y = \frac{1}{2} e^{5t/6}. \quad (14)$$

Pela escolha que fizemos do fator integrante, a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (14) é a derivada de $e^{t/2}y$, de modo que a Eq. (14) fica

$$\frac{d}{dt}(e^{t/2}y) = \frac{1}{2} e^{5t/6}. \quad (15)$$

Integrando a Eq. (15), obtemos

$$e^{t/2}y = \frac{3}{5} e^{5t/6} + c, \quad (16)$$

onde c é uma constante arbitrária. Finalmente, resolvendo a Eq. (16) para y , obtemos a solução geral da Eq. (6), a saber,

$$y = \frac{3}{5} e^{t/3} + c e^{-t/2}. \quad (17)$$

Para encontrar a solução cujo gráfico contém o ponto $(0, 1)$, fazemos $t = 0$ e $y = 1$ na Eq. (17), obtendo $1 = (3/5) + c$. Logo, $c = 2/5$ e a solução desejada é

$$y = \frac{3}{5} e^{t/3} + \frac{2}{5} e^{-t/2}. \quad (18)$$

A Figura 2.1.1 inclui os gráficos da Eq. (17) para diversos valores de c com um campo de direções ao fundo. A solução contendo o ponto $(0, 1)$ está indicada por uma linha mais grossa.

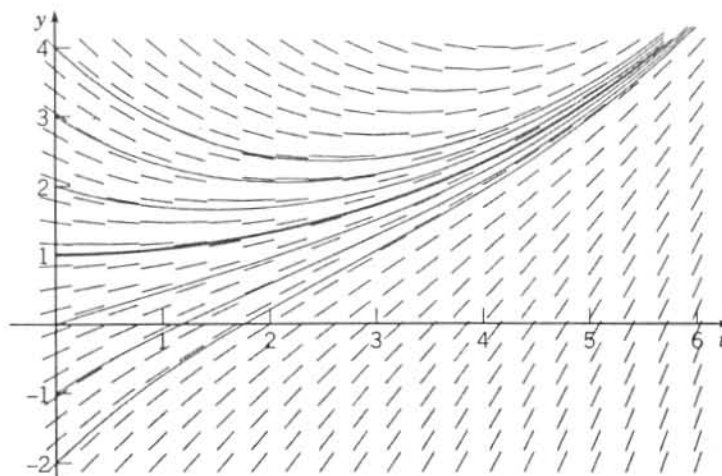


FIGURA 2.1.1 Curvas integrais da equação $y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}$.

Vamos agora estender o método dos fatores integrantes a equações da forma

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t), \quad (19)$$

onde a é uma constante dada e $g(t)$ é uma função dada. Procedendo como no Exemplo 1, vemos que o fator integrante $\mu(t)$ tem que satisfazer

$$\frac{d\mu}{dt} = a\mu, \quad (20)$$

em vez da Eq. (9). Logo, o fator integrante é $\mu(t) = e^{at}$. Multiplicando a Eq. (19) por $\mu(t)$, obtemos

$$e^{at} \frac{dy}{dt} + ae^{at}y = e^{at}g(t),$$

ou

$$\frac{d}{dt}(e^{at}y) = e^{at}g(t). \quad (21)$$

Integrando a Eq. (21), encontramos

$$e^{at}y = \int e^{at}g(t) dt + c, \quad (22)$$

onde c é uma constante arbitrária. Para muitas funções simples $g(t)$ podemos calcular a integral na Eq. (22) e expressar a solução y em termos de funções elementares, como no Exemplo 1. No entanto, para funções $g(t)$ mais complicadas, pode ser necessário deixar a solução em forma integral. Nesse caso,

$$y = e^{-at} \int_{t_0}^t e^{as}g(s) ds + ce^{-at}. \quad (23)$$

Note que denotamos por s a variável de integração na Eq. (23), para distingui-la da variável independente t , e escolhemos algum valor conveniente t_0 para o limite inferior de integração.

EXEMPLO

2

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} - 2y = 4 - t \quad (24)$$

e desenhe gráficos de diversas soluções. Discuta o comportamento das soluções quando $t \rightarrow \infty$.

A Eq. (24) é da forma (19) com $a = -2$; logo, o fator integrante é $\mu(t) = e^{-2t}$. Multiplicando a equação diferencial (24) por $\mu(t)$, obtemos

$$e^{-2t} \frac{dy}{dt} - 2e^{-2t}y = 4e^{-2t} - te^{-2t}, \quad (25)$$

ou

$$\frac{d}{dt}(e^{-2t}y) = 4e^{-2t} - te^{-2t}. \quad (26)$$

Integrando a equação diferencial, temos

$$e^{-2t}y = -2e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + c,$$

onde usamos integração por partes no último termo da Eq. (26). Logo, a solução geral da Eq. (24) é

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + ce^{2t}. \quad (27)$$

A Figura 2.1.2 mostra um campo de direções e gráficos da solução (27) para diversos valores de c . O comportamento das soluções para valores grandes de t é determinado pelo termo ce^{2t} . Se $c \neq 0$, a solução cresce exponencialmente em módulo com o mesmo sinal que c . Portanto, a solução diverge quando t se torna muito grande. A fronteira entre soluções que divergem positivamente e que divergem negativamente ocorre quando $c = 0$. Se escolhermos $c = 0$ na Eq. (27) e fizermos $t = 0$, veremos que $y = -7/4$ é o ponto de separação no eixo dos y . Note que para esse valor inicial a solução é $y = -7/4 + \frac{1}{2}t$; essa solução cresce positivamente, mas linearmente e não exponencialmente.

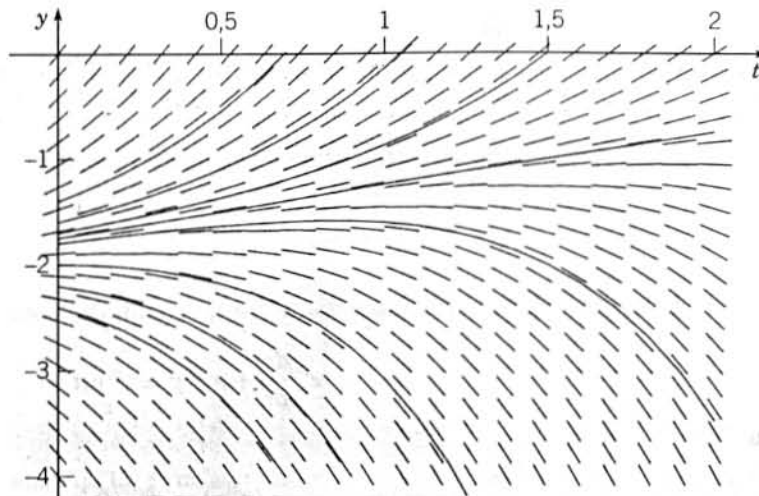


FIGURA 2.1.2 Curvas integrais para $y' - 2y = 4 - t$.

Vamos voltar para a equação linear geral de primeira ordem (3)

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t),$$

onde p e g são funções dadas. Para determinar um fator integrante apropriado, multiplicamos a Eq. (3) por uma função $\mu(t)$ a ser determinada, obtendo

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t). \quad (28)$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio do Exemplo 1, vemos que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (28) é a derivada de um produto $\mu(t)y$, desde que $\mu(t)$ satisfaça a equação

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t). \quad (29)$$

Supondo temporariamente que $\mu(t)$ é positiva, temos

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = p(t),$$

e, em consequência,

$$\ln \mu(t) = \int p(t) dt + k.$$

Escolhendo a constante arbitrária k como zero, obtemos a função mais simples possível para μ , a saber,

$$\mu(t) = \exp \int p(t) dt. \quad (30)$$

Note que $\mu(t)$ é positiva para todo t , como supusemos. Voltando para a Eq. (28), temos

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t). \quad (31)$$

Portanto,

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t) dt + c, \quad (32)$$

onde c é uma constante arbitrária. Algumas vezes a integral na Eq. (32) pode ser calculada em termos de funções elementares. No entanto, isso não é possível, em geral, de modo que a solução geral da Eq. (3) é

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int_{t_0}^t \mu(s)g(s) ds + c \right], \quad (33)$$

onde, mais uma vez, t_0 é algum limite inferior de integração conveniente. Observe que a Eq. (33) envolve duas integrações, uma para obter $\mu(t)$ da Eq. (30) e outra para determinar y da Eq. (33).

EXEMPLO

3

Resolva o problema de valor inicial

$$ty' + 2y = 4t^2, \quad (34)$$

$$y(1) = 2. \quad (35)$$

Para determinar $p(t)$ e $g(t)$ corretamente, precisamos primeiro colocar a Eq. (34) na forma-padrão (3). Temos

$$y' + (2/t)y = 4t, \quad (36)$$

de modo que $p(t) = 2/t$ e $g(t) = 4t$. Para resolver a Eq. (36), primeiro calculamos o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2 \ln |t|} = t^2.$$

Multiplicando a Eq. (36) por $\mu(t) = t^2$, obtemos

$$t^2 y' + 2ty = (t^2 y)' = 4t^3,$$

e, portanto,



$$t^2 y' = t^4 + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. Segue que

$$y = t^2 + \frac{c}{t^2} \quad (37)$$

é a solução geral da Eq. (34). A Figura 2.1.3 mostra curvas integrais para a Eq. (34) para diversos valores de c . Para satisfazer a condição inicial (35), é necessário escolher $c = 1$; assim,

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \quad t > 0 \quad (38)$$

é a solução do problema de valor inicial (34), (35). Essa solução corresponde à curva mais grossa na Figura 2.1.3. Note que ela se torna ilimitada e se aproxima assintoticamente do semieixo positivo dos y quando $t \rightarrow 0$ pela direita. Esse é o efeito da descontinuidade infinita do coeficiente $p(t)$ na origem. A função $y = t^2 + (1/t^2)$ para $t < 0$ não é parte da solução desse problema de valor inicial.

Esse é o primeiro exemplo no qual a solução não existe para alguns valores de t . Novamente, isso é devido à descontinuidade infinita de $p(t)$ em $t = 0$, que restringe a solução ao intervalo $0 < t < \infty$.

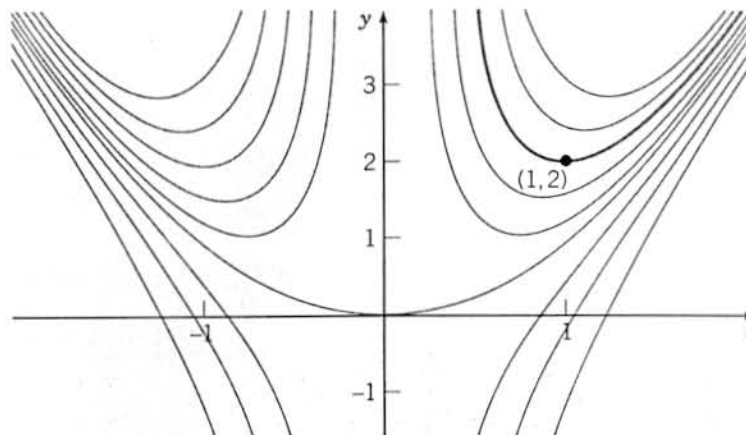


FIGURA 2.1.3 Curvas integrais para $ty' + 2y = 4t^2$.

Olhando novamente para a Figura 2.1.3, vemos que algumas soluções (aquelas para as quais $c > 0$) são assintóticas ao semieixo positivo dos y quando $t \rightarrow 0$ pela direita, enquanto outras soluções (para as quais $c < 0$) são assintóticas ao semieixo negativo dos y . A solução para a qual $c = 0$, a saber, $y = t^2$, permanece limitada e diferenciável até em $t = 0$. Se generalizarmos a condição inicial (35) para

$$y(1) = y_0, \quad (39)$$

então $c = y_0 - 1$ e a solução (38) fica

$$y = t^2 + \frac{y_0 - 1}{t^2}, \quad t > 0 \text{ se } y_0 \neq 1. \quad (40)$$

Como no Exemplo 2, este é outro caso particular onde existe um valor inicial crítico, a saber, $y_0 = 1$, que separa soluções que se comportam de duas maneiras bem diferentes.

EXEMPLO

4

Resolva o problema de valor inicial

$$2y' + ty = 2, \quad (41)$$

$$y(0) = 1. \quad (42)$$

Para colocar a equação diferencial (41) na forma-padrão (3) precisamos dividir por 2, obtendo

$$y' + (t/2)y = 1. \quad (43)$$

Logo, $p(t) = t/2$ e o fator integrante é $\mu(t) = \exp(t^2/4)$. Então multiplique a Eq. (43) por $\mu(t)$, de modo que

$$e^{t^2/4} y' + \frac{t}{2} e^{t^2/4} y = e^{t^2/4}. \quad (44)$$

A expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (44) é a derivada de $e^{t^2/4}y$, portanto, integrando a Eq. (44) obtemos

$$e^{t^2/4}y = \int e^{t^2/4} dt + c. \quad (45)$$

A integral na Eq. (45) não pode ser calculada em termos das funções elementares usuais, de modo que a deixamos em forma integral. No entanto, escolhendo o limite inferior de integração como o ponto inicial $t = 0$ podemos substituir a Eq. (45) por

$$e^{t^2/4}y = \int_0^t e^{s^2/4} ds + c, \quad (46)$$

onde c é uma constante arbitrária. Segue, então, que a solução geral y da Eq. (41) é dada por

$$y = e^{-t^2/4} \int_0^t e^{s^2/4} ds + ce^{-t^2/4}. \quad (47)$$

A condição inicial (42) requer que $c = 1$.

O principal objetivo deste exemplo é ilustrar que algumas vezes a solução tem que ser deixada em função de uma integral. Em geral, isso é no máximo ligeiramente inconveniente, e não um obstáculo sério. Para um dado valor de t , a integral na Eq. (47) é uma integral definida, e pode ser aproximada com qualquer precisão desejada usando-se integradores numéricos facilmente disponíveis. Repetindo esse processo para muitos valores de t e colocando os resultados em um gráfico, você pode obter um gráfico da solução. De maneira alternativa, você pode usar um método numérico de aproximação, como os discutidos no Capítulo 8, que partem diretamente da equação diferencial e não precisam de uma expressão para a solução. Pacotes de programas como Maple e Mathematica executam rapidamente tais procedimentos e produzem gráficos de soluções de equações diferenciais.

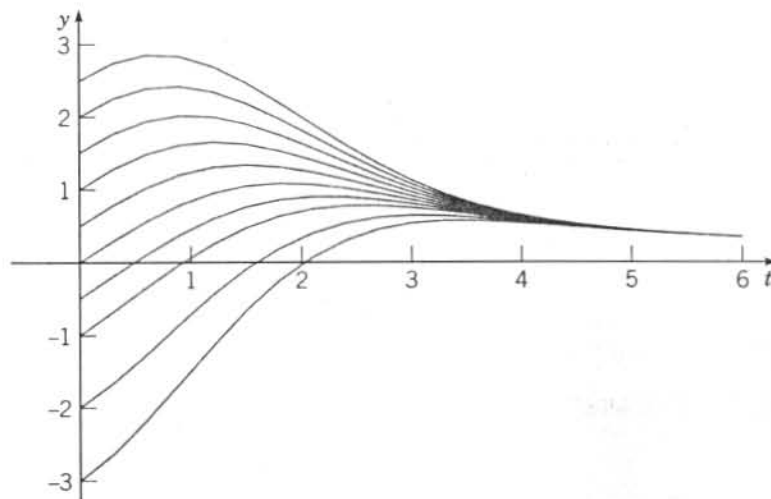


FIGURA 2.1.4 Curvas integrais para $2y' + ty = 2$.

A Figura 2.1.4 mostra gráficos das soluções (47) para diversos valores de c . Da figura, parece plausível conjecturar que todas as soluções tendem a um limite quando $t \rightarrow \infty$. O limite pode ser encontrado analiticamente (veja o Problema 32).

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 12:

- Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada.
- Baseado em uma análise do campo de direções, descreva o comportamento das soluções para valores grandes de t .
- Encontre a solução geral da equação diferencial dada e use-a para determinar o comportamento das soluções quando $t \rightarrow \infty$.

1. $y' + 3y = t + e^{-2t}$
 3. $y' + y = te^{-t} + 1$
 5. $y' - 2y = 3e^t$

2. $y' - 2y = t^2 e^{2t}$
 4. $y' + (1/t)y = 3 \cos 2t, \quad t > 0$
 6. $ty' + 2y = \operatorname{sen} t, \quad t > 0$

7. $y' + 2y + 2te^{-t^2}$
 9. $2y' + y = 3t$
 11. $y' + y = 5 \sin 2t$

8. $(1 + t^2)y' + 4ty = (1 + t^2)^{-2}$
 10. $ty' - y = t^2e^{-t}, \quad t > 0$
 12. $2y' + y = 3t^2$

Em cada um dos Problemas de 13 a 20, encontre a solução do problema de valor inicial dado.

13. $y' - y = 2te^{2t}, \quad y(0) = 1$
 14. $y' + 2y = te^{-2t}, \quad y(1) = 0$
 15. $ty' + 2y = t^2 - t + 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad t > 0$
 16. $y' + (2/t)y = (\cos t)/t^2, \quad y(\pi) = 0, \quad t > 0$
 17. $y' - 2y = e^{2t}, \quad y(0) = 2$
 18. $ty' + 2y = \sin t, \quad y(\pi/2) = 1, \quad t > 0$
 19. $t^3y' + 4t^2y = e^{-t}, \quad y(-1) = 0, \quad t < 0$
 20. $ty' + (t + 1)y = t, \quad y(\ln 2) = 1, \quad t > 0$

Em cada um dos Problemas de 21 a 23:

- (a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Como parece que as soluções se comportam quando t assume valores grandes? O comportamento depende da escolha do valor inicial a ? Seja a_0 o valor de a no qual ocorre a transição de um tipo de comportamento para outro. Estime o valor de a_0 .
 (b) Resolva o problema de valor inicial e encontre precisamente o valor crítico a_0 .
 (c) Descreva o comportamento da solução correspondente ao valor inicial a_0 .

21. $y' - \frac{1}{2}y = 2 \cos t, \quad y(0) = a$
 22. $2y' - y = e^{t/3}, \quad y(0) = a$
 23. $3y' - 2y = e^{-\pi t/2}, \quad y(0) = a$

Em cada um dos Problemas de 24 a 26:

- (a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Como parece que as soluções se comportam quando $t \rightarrow 0$? O comportamento depende da escolha do valor inicial a ? Seja a_0 o valor de a no qual ocorre a transição de um tipo de comportamento para outro. Estime o valor de a_0 .
 (b) Resolva o problema de valor inicial e encontre precisamente o valor crítico a_0 .
 (c) Descreva o comportamento da solução correspondente ao valor inicial a_0 .

24. $ty' + (t + 1)y = 2te^{-t}, \quad y(1) = a, \quad t > 0$
 25. $ty' + 2y = (\sin t)/t, \quad y(-\pi/2) = a, \quad t < 0$
 26. $(\sin t)y' + (\cos t)y = e^t, \quad y(1) = a, \quad 0 < t < \pi$

27. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \frac{1}{2}y = 2 \cos t, \quad y(0) = -1.$$

Encontre as coordenadas do primeiro ponto de máximo local da solução para $t > 0$.

28. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \frac{2}{3}y = 1 - \frac{1}{2}t, \quad y(0) = y_0.$$

Encontre o valor de y_0 para o qual a solução toca, mas não cruza, o eixo dos t .

29. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \frac{1}{4}y = 3 + 2 \cos 2t, \quad y(0) = 0.$$

- (a) Encontre a solução deste problema de valor inicial e descreva seu comportamento para valores grandes de t .
 (b) Determine o valor de t para o qual a solução intersecta pela primeira vez a reta $y = 12$.

30. Encontre o valor de y_0 para o qual a solução do problema de valor inicial

$$y' - y = 1 + 3 \sin t, \quad y(0) = y_0$$

permanece finita quando $t \rightarrow \infty$.

31. Considere o problema de valor inicial

$$y' - \frac{3}{2}y = 3t + 2e^t, \quad y(0) = y_0.$$

Encontre o valor de y_0 que separa as soluções que crescem positivamente quando $t \rightarrow \infty$ das que crescem em módulo, mas permanecem negativas. Como a solução que corresponde a esse valor crítico de y_0 se comporta quando $t \rightarrow \infty$?

32. Mostre que todas as soluções de $2y' + ty = 2$ [veja a Eq. (41) do texto] tendem a um limite quando $t \rightarrow \infty$ e encontre esse limite.

Sugestão: considere a solução geral, Eq. (47), e use a regra de L'Hospital no primeiro termo.

33. Mostre que, se a e λ são constantes positivas e se b é um número real arbitrário, então toda solução da equação

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

tem a propriedade de que $y \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Sugestão: Considere os casos $a = \lambda$ e $a \neq \lambda$ separadamente.

Em cada um dos Problemas de 34 a 37, construa uma equação diferencial linear de primeira ordem cujas soluções têm o comportamento descrito quando $t \rightarrow \infty$. Depois resolva sua equação e confirme que todas as soluções têm, de fato, a propriedade especificada.

34. Todas as soluções têm limite 3 quando $t \rightarrow \infty$.
 35. Todas as soluções são assintóticas à reta $y = 3 - t$ quando $t \rightarrow \infty$.
 36. Todas as soluções são assintóticas à reta $y = 2t - 5$ quando $t \rightarrow \infty$.
 37. Todas as soluções se aproximam da curva $y = 4 - t^2$ quando $t \rightarrow \infty$.
 38. **Variação dos Parâmetros.** Considere o seguinte método de resolução da equação linear de primeira ordem geral:

$$y' + p(t)y = g(t). \quad (i)$$

- (a) Se $g(t) = 0$ para todo t , mostre que a solução é

$$y = A \exp \left[- \int p(t) dt \right], \quad (ii)$$

onde A é uma constante.

- (b) Se $g(t)$ não é identicamente nula, suponha que a solução da Eq. (i) é da forma

$$y = A(t) \exp \left[- \int p(t) dt \right], \quad (iii)$$

onde A agora é uma função de t . Substituindo y na equação diferencial por essa expressão, mostre que $A(t)$ tem que satisfazer a condição

$$A'(t) = g(t) \exp \left[\int p(t) dt \right]. \quad (iv)$$

- (c) Encontre $A(t)$ da Eq. (iv). Depois substitua $A(t)$ na Eq. (iii) por essa solução para determinar y . Verifique que a solução obtida dessa maneira é igual à solução da Eq. (33) no texto. Essa técnica é conhecida como o método de **variação dos parâmetros**; é discutida em detalhes na Seção 3.6 em conexão com equações lineares de segunda ordem.

Em cada um dos Problemas de 39 a 42, use o método do Problema 38 para resolver a equação diferencial dada.

39. $y' - 2y = t^2 e^{2t}$

40. $y' + (1/t)y = 3 \cos 2t, \quad t > 0$

41. $ty' + 2y = \sin t, \quad t > 0$

42. $2y' + y = 3t^2$

2.2 Equações Separáveis

Nas Seções 1.2 e 2.1 usamos um processo de integração direta para resolver equações lineares de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dt} = ay + b, \quad (1)$$

onde a e b são constantes. Vamos mostrar agora que esse processo pode ser aplicado, de fato, a uma classe muito maior de equações.

Vamos usar x , em vez de t , para denotar a variável independente nesta seção por duas razões. Em primeiro lugar, letras diferentes são utilizadas com frequência para as variáveis em uma equação diferencial, e você não deve ficar acostumado a um único par. Em particular, a letra x é muito usada para a variável independente. Além disso, queremos reservar t para outra coisa mais adiante na seção.

A equação geral de primeira ordem é

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (2)$$

Consideramos equações lineares na seção precedente, mas se a Eq. (2) não for linear, então não existe método universalmente aplicável. Vamos considerar aqui uma subclasse das equações de primeira ordem que podem ser resolvidas por integração direta.

Para identificar essa classe de equações, vamos primeiro colocar a Eq. (2) na forma

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (3)$$

Sempre é possível fazer isso definindo $M(x, y) = -f(x, y)$ e $N(x, y) = 1$, mas também existem outras maneiras. Se acontecer que M só depende de x e que N só depende de y , então a Eq. (3) fica

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (4)$$

Tal equação é dita **separável** porque, se for escrita na forma diferencial

$$M(x) dx + N(y) dy = 0, \quad (5)$$

então, se você quiser, as parcelas envolvendo cada variável podem ser colocadas em lados opostos do sinal de igualdade. A forma diferencial (5) também é mais simétrica e tende a diminuir a diferença entre a variável independente e a dependente.

Uma equação separável pode ser resolvida integrando-se as funções M e N . Vamos ilustrar o processo em um exemplo e depois discuti-lo em geral para a Eq. (4).

EXEMPLO

1

Mostre que a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2} \quad (6)$$

é separável e depois encontre uma equação para suas curvas integrais.

Se colocarmos a Eq. (6) na forma

$$-x^2 + (1 - y^2) \frac{dy}{dx} = 0, \quad (7)$$

ela tem a forma (4) e é, portanto, separável. Lembre-se do cálculo que, se y é uma função de x , então, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx} f(y) = \frac{d}{dy} f(y) \frac{dy}{dx} = f'(y) \frac{dy}{dx}.$$

Por exemplo, se $f(y) = y - y^3/3$, então

$$\frac{d}{dx} (y - y^3/3) = (1 - y^2) \frac{dy}{dx}.$$

Logo, o segundo termo na Eq. (7) é a derivada de $y - y^3/3$ em relação a x e o primeiro é a derivada de $-x^3/3$. Assim, a Eq. (7) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{x^3}{3} \right) + \frac{d}{dx} \left(y - \frac{y^3}{3} \right) = 0,$$

ou

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{x^3}{3} + y - \frac{y^3}{3} \right) = 0.$$

Portanto, integrando, obtemos

$$-x^3 + 3y - y^3 = c, \quad (8)$$

onde c é uma constante arbitrária. A Eq. (8) é uma equação para as curvas integrais da Eq. (6). A Figura 2.2.1 mostra um campo de direções e diversas curvas integrais. Qualquer função diferenciável $y = \phi(x)$ que satisfaz a Eq. (8) é uma solução da Eq. (6). Uma equação para a curva integral que contém um ponto particular (x_0, y_0) pode ser encontrada substituindo-se x e y , respectivamente, por x_0 e y_0 na Eq. (8) para determinar o valor correspondente de c .

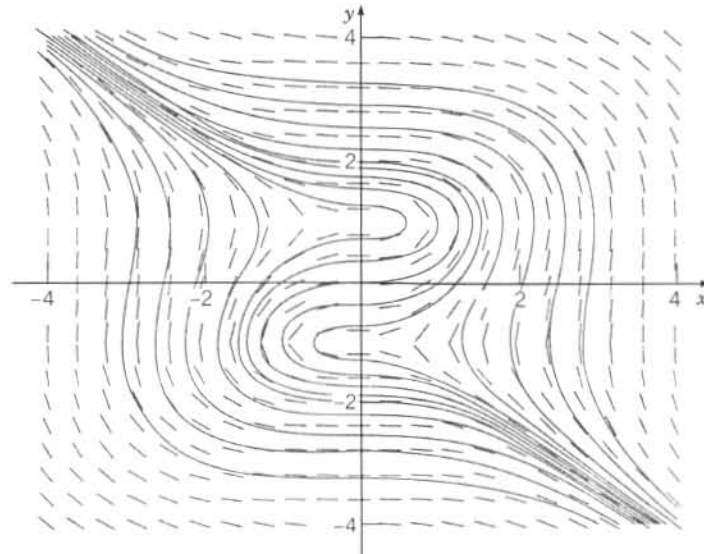


FIGURA 2.2.1 Campo de direções e curvas integrais para $y' = x^2/(1 - y^2)$.

Essencialmente o mesmo procedimento pode ser seguido para qualquer equação separável. Voltando à Eq. (4), sejam H_1 e H_2 duas primitivas quaisquer de M e N , respectivamente. Logo

$$H_1'(x) = M(x), \quad H_2'(y) = N(y), \quad (9)$$

e a Eq. (4) fica

$$H_1'(x) + H_2'(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (10)$$

De acordo com as regra da cadeia,

$$H_2'(y) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy} H_2(y) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} H_2(y). \quad (11)$$

Em consequência, podemos escrever a Eq. (10) como

$$\frac{d}{dx} [H_1(x) + H_2(y)] = 0. \quad (12)$$

Integrando a Eq. (12), obtemos

$$H_1(x) + H_2(y) = c, \quad (13)$$

onde c é uma constante arbitrária. Qualquer função diferenciável $y = \phi(x)$ que satisfaz a Eq. (13) é uma solução da Eq. (4); em outras palavras, a Eq. (13) define a solução implicitamente, em vez de explicitamente. Na prática a Eq. (13) é obtida, em geral, da Eq. (5) integrando-se a primeira parcela em relação a x e a segunda em relação a y .

A equação diferencial (4), junto com uma condição inicial

$$y(x_0) = y_0, \quad (14)$$

forma um problema de valor inicial. Para resolver esse problema de valor inicial, precisamos determinar o valor apropriado da constante c na Eq. (13). Esse valor é obtido fazendo-se $x = x_0$ e $y = y_0$ na Eq. (13), resultando em

$$c = H_1(x_0) + H_2(y_0). \quad (15)$$

Substituindo c na Eq. (13) por esse valor e observando que

$$H_1(x) - H_1(x_0) = \int_{x_0}^x M(s) ds, \quad H_2(y) - H_2(y_0) = \int_{y_0}^y N(s) ds,$$

obtemos

$$\int_{x_0}^x M(s) ds + \int_{y_0}^y N(s) ds = 0. \quad (16)$$

A Eq. (16) é uma representação implícita da solução da equação diferencial (4) que satisfaz a condição inicial (14). Você deve ter em mente o fato de que, para obter uma fórmula explícita para a solução, é preciso resolver a Eq. (16) para y como função de x . Infelizmente, muitas vezes isso é impossível analiticamente; em tais casos, você pode apelar para métodos numéricos para encontrar valores aproximados de y para valores dados de x .

EXEMPLO 2

Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1, \quad (17)$$

e determine o intervalo no qual a solução existe.

A equação diferencial pode ser escrita como

$$2(y-1) dy = (3x^2 + 4x + 2) dx.$$

Integrando a expressão à esquerda do sinal de igualdade em relação a y e a expressão à direita em relação a x , obtemos

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c, \quad (18)$$

onde c é uma constante arbitrária. Para determinar a solução que satisfaz a condição inicial dada, fazemos $x = 0$ e $y = -1$ na Eq. (18), obtendo $c = 3$. Logo a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3. \quad (19)$$

Para obter a solução explícita, precisamos resolver a Eq. (19) para y em função de x . Isso é fácil neste caso, já que a Eq. (19) é do segundo grau em y ; obtemos então

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}. \quad (20)$$

A Eq. (20) nos fornece duas soluções da equação diferencial, mas apenas uma delas satisfaz a condição inicial. Essa é a solução correspondente ao sinal de menos na Eq. (20), de modo que, finalmente, obtemos

$$y = \phi(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \quad (21)$$

como solução do problema de valor inicial (17). Note que, se o sinal de mais fosse escolhido erradamente na Eq. (20), obteríamos a solução da mesma equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(0) = 3$. Finalmente, para determinar o intervalo no qual a solução (21) é válida, precisamos encontrar o intervalo no qual a expressão dentro da raiz quadrada é positiva. O único zero real dessa expressão é $x = -2$, de modo que o intervalo desejado é $x > -2$. A solução do problema de valor inicial e algumas outras curvas integrais da equação diferencial estão ilustradas na Figura 2.2.2. Observe que a fronteira do intervalo de validade da solução (21) é determinado pelo ponto $(-2, 1)$ no qual a reta tangente é vertical.

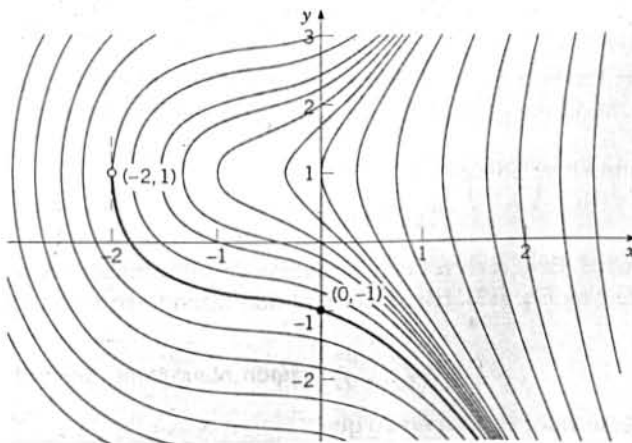


FIGURA 2.2.2 Curvas integrais para $y' = (3x^2 + 4x + 2)/[2(y - 1)]$.

EXEMPLO

3

Resolva a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - x^3}{4 + y^3} \quad (22)$$

e desenhe gráficos de diversas curvas integrais. Encontre, também, a solução que contém o ponto (0,1) e determine seu intervalo de validade.

Colocando a Eq. (22) na forma

$$(4 + y^3) dy = (4x - x^3) dx,$$

integrando, multiplicando por 4 e arrumando os termos, obtemos

$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = c, \quad (23)$$

onde c é uma constante arbitrária. Qualquer função diferenciável $y = \phi(x)$ que satisfaz a Eq. (23) é uma solução da equação diferencial (22). A Figura 2.2.3 mostra gráficos da Eq. (23) para diversos valores de c .

Para encontrar a solução particular que contém o ponto (0,1), fazemos $x = 0$ e $y = 1$ na Eq. (23), obtendo $c = 17$. Logo, a solução em pauta é dada implicitamente por

$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = 17. \quad (24)$$

Ela corresponde à curva mais grossa na Figura 2.2.3. O intervalo de validade dessa solução estende-se dos dois lados do ponto inicial enquanto a função permanecer diferenciável. Da figura, vemos que o intervalo termina quando encontramos pontos onde a tangente é vertical. Segue da equação diferencial (22) que esses pontos correspondem a $4 + y^3 = 0$, ou $y = (-4)^{1/3} \cong -1,5874$. Da Eq. (24), os valores correspondentes de x são $x \cong \pm 3,3488$. Esses pontos estão marcados na Figura 2.2.3.

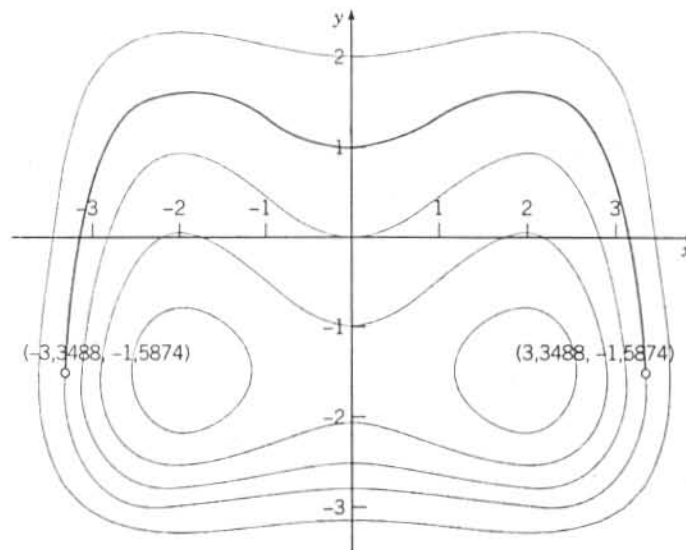


FIGURA 2.2.3 Curvas integrais para $y' = (4x - x^3)/(4 + y^3)$. A curva mais grossa corresponde à solução contendo o ponto (0, 1).

Nota 1: Algumas vezes uma equação da forma (2),

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

tem uma solução constante $y = y_0$. Em geral, tal solução é fácil de encontrar porque, se $f(x, y_0) = 0$ para algum valor de y_0 e para todo x , então a função constante $y = y_0$ é solução da equação diferencial (2). Por exemplo, a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y - 3) \cos x}{1 + 2y^2} \quad (25)$$

tem a solução constante $y = 3$. Outras soluções dessa equação podem ser obtidas separando-se as variáveis e integrando-se.

Nota 2: A investigação de uma equação não linear de primeira ordem pode ser facilitada, algumas vezes, considerando-se tanto x quanto y como funções de uma terceira variável t . Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad (26)$$

Se a equação diferencial é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)}, \quad (27)$$

então, comparando os numeradores e denominadores nas Eqs. (26) e (27) obtemos o sistema

$$dx/dt = G(x, y), \quad dy/dt = F(x, y). \quad (28)$$

À primeira vista pode parecer estranho que um problema possa ser simplificado substituindo-se uma única equação por duas, mas de fato o sistema (28) pode ser mais simples de analisar do que a Eq. (27). O Capítulo 9 trata de sistemas não lineares da forma (28).

Nota 3: Não foi difícil, no Exemplo 2, resolver explicitamente para y em função de x . No entanto, essa situação é excepcional e, muitas vezes, é melhor deixar a solução em forma implícita, como nos Exemplos 1 e 3. Assim, nos problemas a seguir e em outras seções onde aparecem equações não lineares as palavras “resolva a equação diferencial a seguir” significam encontrar a solução explicitamente se for conveniente, mas, caso contrário, encontrar uma equação que defina a solução implicitamente.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 8, resolva a equação diferencial dada.

1. $y' = x^2/y$
2. $y' = x^2/y(1+x^3)$
3. $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$
4. $y' = (3x^2 - 1)(3 + 2y)$
5. $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$
6. $xy' = (1 - y^2)^{1/2}$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 + y^2}$

Em cada um dos Problemas de 9 a 20:

- (a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado em forma explícita.
- (b) Desenhe o gráfico da solução.
- (c) Determine (pelo menos aproximadamente) o intervalo no qual a solução está definida.

9. $y' = (1 - 2x)y^2, \quad y(0) = -1/6$
10. $y' = (1 - 2x)/y, \quad y(1) = -2$
11. $x dx + ye^{-x} dy = 0, \quad y(0) = 1$
12. $dr/d\theta = r^2/\theta, \quad r(1) = 2$
13. $y' = 2x/(y + x^2y), \quad y(0) = -2$
14. $y' = xy^3(1 + x^2)^{-1/2}, \quad y(0) = 1$
15. $y' = 2x/(1 + 2y), \quad y(2) = 0$
16. $y' = x(x^2 + 1)/4y^3, \quad y(0) = -1/\sqrt{2}$
17. $y' = (3x^2 - e^x)/(2y - 5), \quad y(0) = 1$
18. $y' = (e^{-x} - e^x)/(3 + 4y), \quad y(0) = 1$
19. $\operatorname{sen} 2x dx + \cos 3y dy = 0, \quad y(\pi/2) = \pi/3$
20. $y^2(1 - x^2)^{1/2} dy = \operatorname{arcsen} x dx, \quad y(0) = 1$

Alguns dos resultados pedidos nos Problemas de 21 a 28 podem ser obtidos resolvendo-se a equação dada analiticamente ou gerando-se gráficos de aproximações numéricas das soluções. Tente formar uma opinião sobre as vantagens e desvantagens de cada abordagem.

21. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = (1 + 3x^2)/(3y^2 - 6y), \quad y(0) = 1$$

e determine o intervalo de validade da solução.

Sugestão: Para encontrar o intervalo de validade, procure pontos onde a curva integral tem uma tangente vertical.

22. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 3x^2/(3y^2 - 4), \quad y(1) = 0$$

e determine o intervalo de validade da solução.

Sugestão: Para encontrar o intervalo de validade, procure pontos onde a curva integral tem uma tangente vertical.

23. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2y^2 + xy^2, \quad y(0) = 1$$

e determine onde a solução atinge seu valor mínimo.

24. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = (2 - e^x)/(3 + 2y), \quad y(0) = 0$$

e determine onde a solução atinge seu valor máximo.

25. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2 \cos 2x/(3 + 2y), \quad y(0) = -1$$

e determine onde a solução atinge seu valor máximo.

26. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2(1 + x)(1 + y^2), \quad y(0) = 0$$

e determine onde a solução atinge seu valor mínimo.

27. Considere o problema de valor inicial

$$y' = ty(4 - y)/3, \quad y(0) = y_0.$$

(a) Determine o comportamento da solução em função do valor inicial y_0 quando t aumenta.

(b) Suponha que $y_0 = 0,5$. Encontre o instante T no qual a solução atinge, pela primeira vez, o valor 3,98.

28. Considere o problema de valor inicial

$$y' = ty(4 - y)/(1 + t), \quad y(0) = y_0 > 0.$$

(a) Determine o comportamento da solução quando $t \rightarrow \infty$.

(b) Se $y_0 = 2$, encontre o instante T no qual a solução atinge, pela primeira vez, o valor 3,99.

(c) Encontre o intervalo de valores iniciais para os quais a solução fica no intervalo $3,99 < y < 4,01$ no instante $t = 2$.

29. Resolva a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay + b}{cy + d},$$

onde a, b, c e d são constantes.

Equações Homogêneas. Se a função f na equação $dy/dx = f(x, y)$ puder ser expressa como uma função só de y/x , então a equação é dita homogênea¹. Tais equações sempre podem ser transformadas em equações separáveis por uma mudança da variável dependente. O Problema 30 ilustra como resolver equações homogêneas de primeira ordem.

30. Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 4x}{x - y} \quad (i)$$

(a) Mostre que a Eq. (i) pode ser colocada na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y/x) - 4}{1 - (y/x)} \quad (ii)$$

logo, a Eq. (i) é homogênea.

(b) Introduza uma nova variável dependente v de modo que $v = y/x$, ou $y = xv(x)$. Expresse dy/dx em função de x, v e dv/dx .

¹A palavra "homogênea" tem significados diferentes em contextos matemáticos distintos. As equações homogêneas consideradas aqui não têm nada a ver com as equações homogêneas que aparecerão no Capítulo 3 e em outros lugares.

- (c) Substitua y e dy/dx na Eq. (ii) pelas expressões no item (b) envolvendo v e dv/dx . Mostre que a equação diferencial resultante é

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{v - 4}{1 - v},$$

ou

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 4}{1 - v}. \quad (\text{iii})$$

Note que a Eq. (iii) é separável.

- (d) Resolva a Eq. (iii) obtendo v implicitamente como função de x .
 (e) Encontre a solução da Eq. (i) substituindo v por y/x na solução encontrada no item (d).
 (f) Desenhe um campo de direções e algumas curvas integrais para a Eq. (i). Lembre-se de que a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (i) depende, de fato, apenas da razão y/x . Isso significa que as curvas integrais têm a mesma inclinação em todos os pontos pertencentes a uma mesma reta contendo a origem, embora essa inclinação varie de uma reta para outra. Portanto, o campo de direções e as curvas integrais são simétricos em relação à origem. Essa propriedade de simetria é evidente em seus gráficos?

O método esboçado no Problema 30 pode ser usado em qualquer equação homogênea. Isto é, a substituição $y = xv(x)$ transforma uma equação homogênea em uma equação separável. Essa última equação pode ser resolvida por integração direta e depois a substituição de v por y/x fornece a solução da equação original. Em cada um dos Problemas de 31 a 38:

- (a) Mostre que a equação dada é homogênea.
 (b) Resolva a equação diferencial.
 (c) Desenhe um campo de direções e algumas curvas integrais. Elas são simétricas em relação à origem?

31. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

32. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$

33. $\frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x}{2x - y}$

34. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y}{2x + y}$

35. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{x - y}$

36. $(x^2 + 3xy + y^2) dx - x^2 dy = 0$

37. $\frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - 3y^2}{2xy}$

38. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$

2.3 Modelagem com Equações de Primeira Ordem

Equações diferenciais são de interesse para não matemáticos, principalmente por causa da possibilidade de serem usadas para investigar uma variedade de problemas nas ciências físicas, biológicas e sociais. Uma razão para isso é que modelos matemáticos e suas soluções levam a equações que relacionam as variáveis e os parâmetros no problema. Essas equações permitem, muitas vezes, fazer previsões sobre como os processos naturais se comportarão em diversas circunstâncias. Muitas vezes é fácil permitir a variação dos parâmetros no modelo matemático em um amplo intervalo, enquanto isso poderia levar muito tempo ou ser muito caro, se não impossível, em um ambiente experimental. De qualquer modo, a modelagem matemática e a experimentação ou observação são criticamente importantes e têm papéis um tanto complementares nas investigações científicas. Modelos matemáticos são validados comparando-se suas previsões com resultados experimentais. Por outro lado, análises matemáticas podem sugerir as direções mais promissoras para exploração experimental e podem indicar, com boa precisão, que dados experimentais serão mais úteis.

Nas Seções 1.1 e 1.2 formulamos e investigamos alguns modelos matemáticos simples. Vamos começar recordando e expandindo algumas das conclusões a que chegamos naquelas seções. Independente do campo específico de aplicação, existem três passos identificáveis que estão sempre presentes na modelagem matemática.

Construção do Modelo. Neste estágio você traduz a situação física em expressões matemáticas, muitas vezes usando os passos listados no final da Seção 1.1. Talvez o ponto mais crítico neste estágio seja enunciar claramente o(s) princípio(s) físico(s) que, acredita-se, governam o processo. Por exemplo, foi observado em algumas circunstâncias que o calor passa de um corpo mais quente para um mais frio a uma taxa proporcional à diferença de temperaturas, que objetos se movem de acordo com a lei do movimento de Newton e que populações isoladas de insetos crescem a uma taxa proporcional à população atual. Cada uma dessas afirmações envolve uma taxa de variação (derivada) e, em consequência, quando expressas matematicamente levam a uma equação diferencial. A equação diferencial é um modelo matemático do processo.

É importante compreender que as equações matemáticas são, quase sempre, apenas uma descrição aproximada do processo real. Por exemplo, corpos movimentando-se a velocidades próximas à velocidade da luz não são governados pelas leis de Newton, as populações de insetos não crescem indefinidamente como enunciado devido a limitações de comida ou de espaço, e a transferência de calor é afetada por outros fatores além da diferença de temperatura. Assim, você deve estar sempre atento às limitações do modelo, de modo a só usá-lo quando for razoável acreditar em sua precisão. De maneira alternativa, você poderia adotar o ponto de vista de que as equações matemáticas descrevem exatamente as operações de um modelo físico simplificado ou ideal, que foi construído (ou imaginado) de maneira a incorporar as características mais importantes do processo real. Algumas vezes o processo de modelagem matemática envolve a substituição conceitual de um processo discreto por um contínuo. Por exemplo, o número de elementos em uma população de insetos varia em quantidades discretas; no entanto, se a população for muito grande, pode parecer razoável considerá-la como uma variável contínua e até falar de sua derivada.

Análise do Modelo. Uma vez formulado matematicamente o problema, você encontra, muitas vezes, o problema de resolver equações diferenciais ou, se não for possível, descobrir tudo que for possível sobre as propriedades da solução. Pode acontecer que o problema matemático seja muito difícil e, nesse caso, podem ser necessárias outras aproximações neste estágio que tornem o problema tratável matematicamente. Por exemplo, uma equação não linear pode ser aproximada por uma linear, ou um coeficiente que varia vagarosamente pode ser substituído por uma constante. É claro que tais aproximações também têm que ser examinadas sob o ponto de vista físico, para se ter certeza de que o problema matemático simplificado ainda reflete as características essenciais do processo físico que está sendo investigado. Ao mesmo tempo, um conhecimento profundo da física do problema pode sugerir aproximações matemáticas razoáveis que tornarão o problema matemático mais suscetível a análises. Esse jogo entre a compreensão do fenômeno físico e o conhecimento das técnicas matemáticas e de suas limitações é característico da matemática aplicada em sua melhor forma e é indispensável na construção de modelos matemáticos úteis e de sucesso para processos físicos complicados.

Comparação com Experimentos ou Observações. Finalmente, tendo obtido a solução (ou, pelo menos, alguma informação sobre ela) você precisa interpretar essa informação no contexto do problema. Em particular, você sempre deve verificar se a solução matemática parece ser fisicamente razoável. Se possível, calcule os valores da solução em pontos selecionados e compare-os com valores observados experimentalmente. Ou pergunte se o comportamento da solução depois de um longo período de tempo é consistente com as observações. Ou examine as soluções correspondentes a determinados valores particulares dos parâmetros do problema. É claro que o fato de que a solução matemática parece ser razoável não garante que está correta. No entanto, se as previsões do modelo matemático estão seriamente inconsistentes com as observações do sistema físico que o modelo supostamente deve descrever, isso sugere que foram cometidos erros na resolução do problema matemático, que o modelo matemático propriamente dito precisa ser refinado ou que as observações devem ser feitas com mais cuidado.

Os exemplos nesta seção são típicos de aplicações nas quais aparecem equações diferenciais de primeira ordem.

EXEMPLO**1****Mistura**

No instante $t = 0$ um tanque contém Q_0 libras de sal dissolvidos em 100 galões de água; veja a Figura 2.3.1. Suponha que está entrando no tanque, a uma taxa de r galões por minuto, água contendo $\frac{1}{4}$ de libra de sal por galão[†] e que a mistura bem mexida está saindo do tanque à mesma taxa. Escreva o problema de valor inicial que descreve esse fluxo. Encontre a quantidade de sal $Q(t)$ no tanque em qualquer instante t e encontre, tam-

[†] Uma libra é da ordem de 435,5 gramas e um galão americano corresponde a 3,785 litros, de modo que essa taxa corresponde a aproximadamente 0,3 g/L. (N.T.)

bém, a quantidade limite Q_L presente após um período de tempo bem longo. Se $r = 3$ e $Q_0 = 2Q_L$, encontre o instante T após o qual o nível de sal está a 2% de Q_L . Encontre, também, a taxa de fluxo necessária para que o valor de T não seja maior do que 45 minutos.

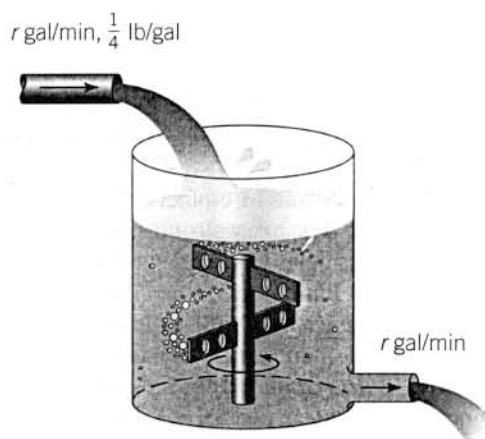


FIGURA 2.3.1 O tanque de água do Exemplo 1.

Vamos supor que o sal não é criado nem destruído no tanque. Portanto, as variações na quantidade de sal são devidas somente aos fluxos de entrada e de saída do tanque. Mais precisamente, a taxa de variação de sal no tanque, dQ/dt , é igual à taxa segundo a qual o sal está entrando menos a taxa segundo a qual ele está saindo. Em símbolos,

$$\frac{dQ}{dt} = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída.} \quad (1)$$

A taxa de entrada de sal no tanque é a concentração $\frac{1}{4}$ lb/gal (libra por galão) vezes a taxa de fluxo r gal/min (galões por minuto), ou $(r/4)$ lb/min. Para encontrar a taxa segundo a qual o sal deixa o tanque precisamos multiplicar a concentração de sal no tanque pela taxa de fluxo, r gal/min. Como as taxas de fluxo de saída e de entrada são iguais, o volume de água no tanque permanece constante e igual a 100 gal: como a mistura está "bem mexida", a concentração é uniforme no tanque, a saber, $[Q(t)/100]$ lb/gal. Portanto, a taxa de saída do sal no tanque é $[rQ(t)/100]$ lb/min. Logo, a equação diferencial que governa esse processo é

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{rQ}{100}. \quad (2)$$

A condição inicial é

$$Q(0) = Q_0. \quad (3)$$

Pensando no problema fisicamente, poderíamos antecipar que em alguma hora a mistura original será essencialmente substituída pela mistura que está entrando, cuja concentração é $\frac{1}{4}$ lb/gal. Em consequência, poderíamos esperar que a quantidade de sal no tanque finalmente devesse ficar bem próxima de 25 lb. Também podemos encontrar a quantidade limite $Q_L = 25$ fazendo dQ/dt igual a zero na Eq. (2) e resolvendo a equação algébrica resultante para Q .

Para resolver o problema de valor inicial (2), (3) analiticamente, note que a Eq. (2) é tanto linear quanto separável. Colocando-a na forma-padrão para uma equação linear, temos

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}. \quad (4)$$

Assim, o fator integrante é $e^{rt/100}$ e a solução geral é

$$Q(t) = 25 + ce^{-rt/100}, \quad (5)$$

onde c é uma constante arbitrária. Para satisfazer a condição inicial (3) precisamos escolher $c = Q_0 - 25$. Portanto, a solução do problema de valor inicial (2), (3) é

$$Q(t) = 25 + (Q_0 - 25)e^{-rt/100}, \quad (6)$$

ou

$$Q(t) = 25(1 - e^{-rt/100}) + Q_0e^{-rt/100}. \quad (7)$$

Da Eq. (6) ou da (7) você pode ver que $Q(t) \rightarrow 25$ (lb) quando $t \rightarrow \infty$, de modo que o valor limite Q_L é 25, confirmando nossa intuição física. Além disso, $Q(t)$ se aproxima desse limite mais rapidamente quando r aumenta. Ao interpretar a solução (7), note que a segunda parcela à direita do sinal de igualdade é a porção do sal original que permanece no tanque no instante t , enquanto a primeira parcela fornece a quantidade de sal no tanque devida à ação dos fluxos. Gráficos das soluções para $r = 3$ e diversos valores de Q_0 estão ilustrados na Figura 2.3.2.

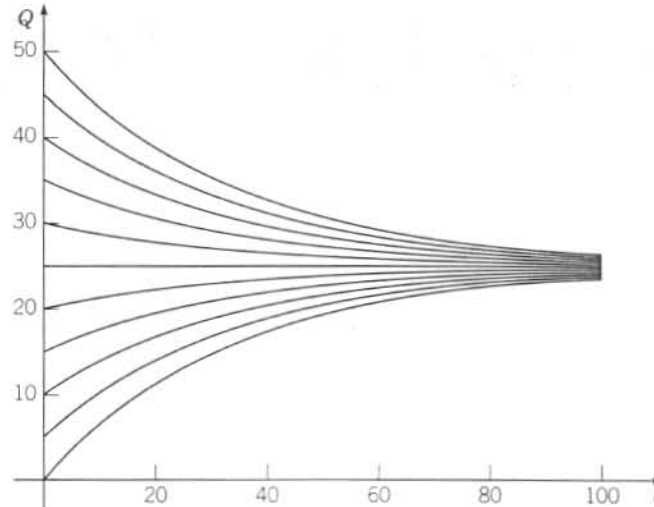


FIGURA 2.3.2 Soluções do problema de valor inicial (2), (3) para $r = 3$ e diversos valores de Q_0 .

Suponha agora que $r = 3$ e $Q_0 = 2Q_L = 50$; então a Eq. (6) fica

$$Q(t) = 25 + 25e^{-0,03t}. \quad (8)$$

Como 2% de 25 é 0,5, queremos encontrar o instante T no qual $Q(t)$ tem o valor 25,5. Fazendo $t = T$ e $Q = 25,5$ na Eq. (8) e resolvendo para T , obtemos

$$T = (\ln 50)/0,03 \cong 130,4 \text{ (min)}. \quad (9)$$

Para determinar r de modo que $T = 45$, vamos voltar à Eq. (6), fazer $t = 45$, $Q_0 = 50$, $Q(t) = 25,5$ e resolver para r . O resultado é

$$r = (100/45) \ln 50 \cong 8,69 \text{ gal/min}. \quad (10)$$

Como esse exemplo é hipotético, a validade do modelo não está em discussão. Se as taxas de fluxo são como enunciadas e se a concentração de sal no tanque é uniforme, então a equação diferencial (1) é uma descrição precisa do processo de fluxo. Embora esse exemplo particular não tenha significado especial, modelos desse tipo são usados muitas vezes em problemas envolvendo poluentes em um lago ou um remédio em um órgão do corpo, por exemplo, em vez de um tanque com água salgada. Nesses casos, as taxas de fluxo podem não ser fáceis de determinar ou podem variar com o tempo. De maneira semelhante, a concentração pode estar longe de ser uniforme em alguns casos. Finalmente, as taxas de fluxo de entrada e de saída podem ser diferentes, o que significa que a variação de líquido no problema também tem que ser levada em consideração.

EXEMPLO

2

Juros Compostos

Suponha que é depositada uma quantia em dinheiro em um banco que paga juros a uma taxa anual r . O valor $S(t)$ do investimento em qualquer instante t depende tanto da frequência de capitalização dos juros quanto da taxa de juros. As instituições financeiras têm políticas variadas em relação à capitalização: em algumas a capitalização é mensal, em outras é semanal e algumas até capitalizam diariamente. Se supusermos que a capitalização é feita *continuamente*, podemos montar um problema de valor inicial simples que descreve o crescimento do investimento.

A taxa de variação do valor do investimento é dS/dt , e essa quantidade é igual à taxa segundo a qual os juros acumulam, que é a taxa de juros r vezes o valor atual do investimento $S(t)$. Então,

$$dS/dt = rS \quad (11)$$

é a equação diferencial que governa o processo. Suponha que sabemos também o valor do investimento em algum instante particular, digamos

$$S(0) = S_0. \quad (12)$$

Então a solução do problema de valor inicial (11), (12) fornece o saldo total $S(t)$ na conta em qualquer instante t . Esse problema de valor inicial pode ser resolvido facilmente, já que a equação diferencial (11) é linear e separável. Logo, resolvendo as Eqs. (11) e (12), encontramos

$$S(t) = S_0 e^{rt}. \quad (13)$$

Portanto, uma conta bancária com juros capitalizados continuamente cresce exponencialmente.

Vamos agora comparar os resultados desse modelo contínuo com a situação em que a capitalização acontece em intervalos finitos de tempo. Se os juros são capitalizados uma vez por ano, depois de t anos

$$S(t) = S_0(1+r)^t.$$

Se os juros são capitalizados duas vezes por ano, ao final de seis meses o valor do investimento é $S_0[1 + (r/2)]$, e ao final do primeiro ano é $S_0[1 + (r/2)]^2$. Então, depois de t anos temos

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}.$$

Em geral, se os juros são capitalizados m vezes por ano, então

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}. \quad (14)$$

A relação entre as fórmulas (13) e (14) fica mais clara se lembrarmos do cálculo que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = S_0 e^{rt}.$$

O mesmo modelo também pode ser aplicado a investimentos mais gerais, onde podem ser acumulados dividendos e ganhos de capital, além dos juros. Em reconhecimento desse fato, vamos nos referir a r como sendo a taxa de retorno.

A Tabela 2.3.1 mostra o efeito da mudança na frequência da capitalização para uma taxa de retorno r de 8%. As segunda e terceira colunas foram calculadas da Eq. (14) para capitalização trimestral e diária, respectivamente, enquanto a quarta coluna foi calculada da Eq. (13) para capitalização contínua. Os resultados mostram que a frequência de capitalização não é tão importante na maioria dos casos. Por exemplo, durante um período de 10 anos a diferença entre capitalização trimestral e diária é de R\$17,50 por R\$1.000,00 investidos, ou menos de R\$2,00 por ano. A diferença seria um pouco maior para taxas de retorno maiores e menor para taxas menores. Da primeira linha na tabela, vemos que para uma taxa de retorno de 8% o rendimento anual com capitalização trimestral é de 8,24%, e com capitalização diária ou contínua é de 8,33%.

TABELA 2.3.1 Crescimento de Capital para uma Taxa de Retorno $r = 8\%$ para Diversos Tipos de Capitalização

Anos	$S(t)/S(t_0)$ da Eq. (14)		$S(t)/S(t_0)$ da Eq. (13)
	$m = 4$	$m = 365$	
1	1,0824	1,0833	1,0833
2	1,1717	1,1735	1,1735
5	1,4859	1,4918	1,4918
10	2,2080	2,2253	2,2253
20	4,8754	4,9522	4,9530
30	10,7652	11,0203	11,0232
40	23,7699	24,5239	24,5325

Retornando ao caso de capitalização contínua, vamos supor que podem existir depósitos ou retiradas, além do acúmulo de juros, dividendos ou ganhos de capital. Se supusermos que os depósitos ou retiradas ocorrem a uma taxa constante k , então a Eq. (11) é substituída por

$$dS/dt = rS + k,$$

ou, em forma-padrão,

$$dS/dt - rS = k, \quad (15)$$

onde k é positivo para depósitos e negativo para retiradas.

A Eq. (15) é linear com fator integrante e^{-rt} , de modo que sua solução geral é

$$S(t) = ce^{rt} - (k/r),$$

onde c é uma constante arbitrária. Para satisfazer a condição inicial (12), precisamos escolher $c = S_0 + (k/r)$. Logo, a solução do problema de valor inicial (15), (12) é

$$S(t) = S_0 e^{rt} + (k/r)(e^{rt} - 1). \quad (16)$$

A primeira parcela na expressão (16) é a parte devida à acumulação de retornos na quantidade inicial S_0 , e a segunda parcela é a parte referente a depósitos ou retiradas a uma taxa k .

A vantagem de enunciar o problema desse modo geral, sem valores específicos para S_0 , r ou k , é a generalidade da fórmula resultante (16) para $S(t)$. Com essa fórmula, podemos imediatamente comparar resultados de diferentes programas de investimento ou taxas de retorno diferentes.

Por exemplo, suponha que alguém abre uma conta para um plano de previdência privada (PPP) aos 25 anos com investimentos anuais de R\$2.000,00 continuamente. Supondo uma taxa de retorno de 8%, qual será o saldo no PPP aos 65 anos? Temos $S_0 = 0$, $r = 0,08$, $k = \text{R}\$2.000,00$ e queremos determinar $S(40)$. Da Eq. (16), temos

$$S(40) = (25.000)(e^{3,2} - 1) = \text{R}\$588.313,00. \quad (17)$$

É interessante notar que a quantidade total investida é R\$80.000,00, de modo que a quantia restante de R\$508.313,00 resulta do retorno acumulado do investimento. O saldo depois de 40 anos também é bastante sensível à taxa. Por exemplo, $S(40) = \text{R}\$508.948,00$ se $r = 0,075$ e $S(40) = \text{R}\$681.508,00$ se $r = 0,085$.

Vamos examinar as hipóteses que foram usadas no modelo. Primeiro, supusemos que o retorno é capitalizado continuamente e que o capital adicional é investido continuamente. Nenhuma dessas hipóteses é verdadeira em uma situação financeira real. Também supusemos que a taxa de retorno r é constante por todo o período envolvido, quando, de fato, ela provavelmente flutuará bastante. Embora não possamos prever taxas futuras com confiança, podemos usar a expressão (16) para determinar o efeito aproximado de projeções de taxas diferentes. Também é possível considerar r e k na Eq. (15) como funções de t , em vez de constantes; nesse caso, é claro que a solução pode ser muito mais complicada do que a Eq. (16).

O problema de valor inicial (15), (12) e a solução (16) também podem ser usados para analisar diversas outras situações financeiras, incluindo financiamentos para a casa própria, hipotecas e financiamentos para a compra de carros.

EXEMPLO

3

Produtos Químicos em uma Lagoa

Considere uma lagoa que contém, inicialmente, 10 milhões de galões de água fresca. A água de um rio contendo um produto químico indesejável flui para a lagoa a uma taxa de 5 milhões de galões por ano, e a mistura sai da lagoa através de um canal à mesma taxa. A concentração $\gamma(t)$ do produto químico na água que entra varia periodicamente com o tempo t de acordo com a expressão $\gamma(t) = 2 + \sin(2t)$ g/gal (gramas por galão). Construa um modelo matemático desse fluxo e determine a quantidade de produto químico na lagoa em qualquer instante. Desenhe o gráfico da solução e descreva em palavras o efeito da variação na concentração da água que entra na lagoa.

Como os fluxos de entrada e de saída de água são iguais, a quantidade de água na lagoa permanece constante, com 10^7 galões. Vamos denotar o tempo por t , medido em anos, e a massa do produto químico por $Q(t)$, medida em gramas. Este exemplo é semelhante ao Exemplo 1, e o mesmo princípio de entrada/saída pode ser aplicado. Assim,

$$\frac{dQ}{dt} = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída},$$

onde "taxa de entrada" e "taxa de saída" referem-se às taxas segundo as quais o produto químico flui para dentro e para fora da lagoa, respectivamente. A taxa segundo a qual o produto químico entra na lagoa é dada por

$$\text{taxa de entrada} = (5 \times 10^6) \text{ gal/ano} (2 + \sin 2t) \text{ g/gal}. \quad (18)$$

A concentração de produto químico na lagoa é de $Q(t)/10^7$ g/gal, de modo que a taxa de saída é

$$\text{taxa de saída} = (5 \times 10^6) \text{ gal/ano} [Q(t)/10^7] \text{ g/gal} = Q(t)/2 \text{ g/ano}. \quad (19)$$

Obtemos, então, a equação diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = (5 \times 10^6)(2 + \sin 2t) - \frac{Q(t)}{2}, \quad (20)$$

onde cada termo tem unidades de g/ano.

Para tornar os coeficientes mais facilmente administráveis, é conveniente introduzir uma nova variável dependente definida por $q(t) = Q(t)/10^6$ ou $Q(t) = 10^6 q(t)$. Isso significa que $q(t)$ é medida em milhões de grama, ou megagramas (toneladas). Se fizermos essa substituição na Eq. (20), então cada termo contém o fator 10^6 , que pode ser cancelado. Se também transpusermos o termo envolvendo $q(t)$ para o lado esquerdo do sinal de

igualdade, temos, finalmente,

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{2}q = 10 + 5 \text{sen } 2t. \tag{21}$$

Originalmente não havia produto químico na lagoa, de modo que a condição inicial é

$$q(0) = 0. \tag{22}$$

A Eq. (21) é linear e, embora a expressão à direita do sinal de igualdade seja uma função de t , o coeficiente de q é constante. Logo, o fator integrante é $e^{t/2}$. Multiplicando a Eq. (21) por esse fator e integrando a equação resultante, obtemos a solução geral

$$q(t) = 20 - \frac{40}{17} \cos 2t + \frac{10}{17} \text{sen } 2t + ce^{-t/2}. \tag{23}$$

A condição inicial (22) obriga $c = -300/17$, de modo que a solução do problema de valor inicial (21), (22) é

$$q(t) = 20 - \frac{40}{17} \cos 2t + \frac{10}{17} \text{sen } 2t - \frac{300}{17} e^{-t/2}. \tag{24}$$

A Figura 2.3.3 mostra um gráfico da solução (24), junto com a reta $q = 20$. O termo exponencial na solução é importante para valores pequenos de t , mas diminui rapidamente quando t aumenta. Mais tarde, a solução vai consistir em uma oscilação, devido aos termos $\text{sen}(2t)$ e $\cos(2t)$, em torno do nível constante $q = 20$. Note que se o termo $\text{sen}(2t)$ não estivesse presente na Eq. (21), então $q = 20$ seria a solução de equilíbrio daquela equação.

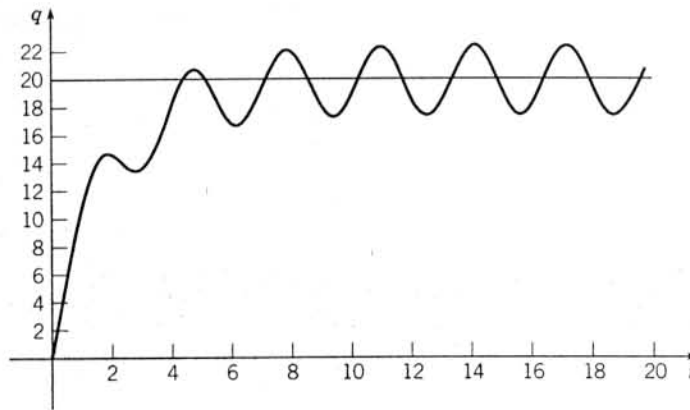


FIGURA 2.3.3 Solução do problema de valor inicial (21), (22).

Vamos considerar, agora, o quão adequado é o modelo matemático para esse problema. O modelo baseia-se em diversas hipóteses que ainda não foram enunciadas explicitamente. Em primeiro lugar, a quantidade de água na lagoa é inteiramente controlada pelas taxas de entrada e saída—nada se perde por evaporação ou por absorção pelo solo, e nada se ganha com a chuva. O mesmo é verdade do produto químico; ele entra e sai da lagoa, mas nada é absorvido por peixes ou outros organismos que vivem na lagoa. Além disso, supusemos que a concentração do produto químico é uniforme em toda a lagoa. Se os resultados obtidos com esse modelo são precisos ou não vai depender fortemente da validade dessas hipóteses simplificadoras.

EXEMPLO

4

Velocidade de Escape

Um corpo de massa constante m é projetado da Terra em uma direção perpendicular à superfície da Terra com uma velocidade inicial v_0 . Supondo que não há resistência do ar, mas levando em consideração a variação do campo gravitacional da terra com a distância, encontre uma expressão para a velocidade durante o movimento resultante. Encontre, também, a velocidade inicial necessária para levantar o corpo até uma altitude máxima ξ acima da superfície da Terra e encontre a menor velocidade inicial para a qual o corpo não retornará à superfície; esta última é a **velocidade de escape**.

Coloque o semieixo positivo dos x apontando para fora do centro da Terra ao longo da linha de movimento, com $x = 0$ correspondendo à superfície da Terra; veja a Figura 2.3.4. A figura está desenhada horizontalmente para lembrar você de que a gravidade está direcionada para o centro da terra, que não é necessariamente para baixo se olhado de uma perspectiva de longe da superfície da Terra. A força gravitacional agindo no corpo (isto é, seu peso) é inversamente proporcional ao quadrado da distância do centro da Terra e é dada por $w(x) = -k/(x + R)^2$, onde k é uma constante, R é o raio da Terra e o sinal de menos significa que $w(x)$ está orientada no sentido negativo do eixo dos x . Sabemos que na superfície da Terra $w(0)$ é dada por $-mg$, onde g é a aceleração devida à gravidade no nível do mar. Portanto $k = mgR^2$ e

$$w(x) = -\frac{mgR^2}{(R + x)^2}. \tag{25}$$

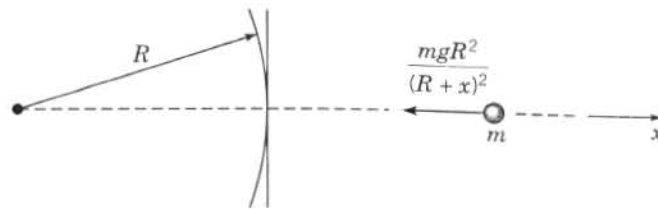


FIGURA 2.3.4 Um corpo no campo gravitacional da Terra.

Como não há outras forças agindo sobre o corpo, a equação de movimento é

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{mgR^2}{(R+x)^2}, \quad (26)$$

e a condição inicial é

$$v(0) = v_0. \quad (27)$$

Infelizmente, a Eq. (26) envolve variáveis demais, já que depende de t , x e v . Para consertar essa situação vamos eliminar t da Eq. (26) pensando em x , em vez de t , como a variável independente. Então, podemos expressar dv/dt em função de dv/dx pela regra da cadeia; portanto,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx},$$

e a Eq. (26) é substituída por

$$v \frac{dv}{dx} = - \frac{gR^2}{(R+x)^2}. \quad (28)$$

A Eq. (28) é separável, mas não linear, de modo que, separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{R+x} + c. \quad (29)$$

Como $x = 0$ quando $t = 0$, a condição inicial (27) em $t = 0$ pode ser substituída pela condição $v = v_0$ quando $x = 0$. Logo $c = (v_0^2/2) - gR$ e

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{R+x}}. \quad (30)$$

Note que a Eq. (30) fornece a velocidade como função da altitude, em vez do tempo. Deve-se escolher o sinal de mais se o corpo está subindo e o sinal de menos se está caindo.

Para determinar a altitude máxima ξ que o corpo alcança, fazemos $v = 0$ e $x = \xi$ na Eq. (30), e depois resolvemos para ξ , obtendo

$$\xi = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}. \quad (31)$$

Resolvendo a Eq. (31) para v_0 , encontramos a velocidade inicial necessária para levantar o corpo até a altitude ξ , a saber,

$$v_0 = \sqrt{2gR \frac{\xi}{R+\xi}}. \quad (32)$$

A velocidade de escape v_e é encontrada, então, fazendo $\xi \rightarrow \infty$. Logo,

$$v_e = \sqrt{2gR}. \quad (33)$$

O valor numérico de v_e é aproximadamente 6,9 mi/s (milhas por segundo), ou 11,1 km/s.

O cálculo precedente da velocidade de escape não leva em consideração o efeito da resistência do ar, de modo que a velocidade de escape real (incluindo o efeito da resistência do ar) é um pouco maior. Por outro lado, a velocidade de escape efetiva pode ser significativamente reduzida se o corpo for transportado a uma altura considerável acima do nível do mar antes de ser lançado. Ambas as forças, gravitacional e de atrito, são reduzidas; a resistência do ar, em particular, diminui muito rapidamente com o aumento da altitude. Você deve ter em mente, também, que pode muito bem ser impraticável dar uma velocidade inicial instantaneamente muito grande; veículos espaciais, por exemplo, recebem sua aceleração inicial durante alguns minutos.

PROBLEMAS

1. Considere um tanque usado em determinados experimentos em hidrodinâmica. Depois de um experimento, o tanque contém 200 litros de uma solução de tinta com uma concentração de 1 grama por litro. Para preparar o tanque para o próximo experimento, ele é lavado com água fresca fluindo a uma taxa de 2 litros por minuto, e a solução bem misturada flui para fora à mesma taxa. Encontre o tempo gasto até a concentração de tinta no tanque atingir 1% de seu valor original.
2. Um tanque contém inicialmente 120 litros de água pura. Uma mistura contendo uma concentração de γ gramas por litro de sal entra no tanque a uma taxa de 2 litros por minuto, e a mistura bem mexida sai do tanque à mesma taxa. Encontre uma expressão para a quantidade de sal no tanque em qualquer instante t em termos de γ . Encontre, também, a quantidade limite de sal no tanque quando $t \rightarrow \infty$.
3. Um tanque contém inicialmente 100 galões de água fresca. Joga-se, então, água contendo $\frac{1}{2}$ libra de sal por galão a uma taxa de 2 galões por minuto e permite-se que a mistura saia do tanque à mesma taxa. Após 10 minutos, para-se o processo e joga-se água fresca no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto, com a mistura deixando o tanque, novamente, à mesma taxa. Encontre a quantidade de sal no tanque ao final de 10 minutos adicionais.
4. Um tanque, com capacidade de 500 galões, contém originalmente 200 galões de água com uma solução de 100 libras de sal. Está entrando no tanque, a uma taxa de 3 galões por minuto, água contendo 1 libra de sal por galão, e permite-se que a mistura saia do tanque a uma taxa de 2 galões por minuto. Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante antes do momento em que a solução começa a transbordar. Encontre a concentração de sal (em libras por galão) no tanque no instante em que vai começar a transbordar. Compare essa concentração com a concentração-limite teórica se o tanque tivesse capacidade infinita.
5. Um tanque contém 100 galões de água e 50 onças¹ de sal. Água contendo uma concentração de sal de $(\frac{1}{4}) [1 + (\frac{1}{2})\sin t]$ onças por galão entra no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto, e a mistura sai do tanque à mesma taxa.
 - (a) Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante.
 - (b) Desenhe o gráfico da solução por um período de tempo longo o suficiente para que você veja o comportamento final do gráfico.
 - (c) O comportamento da solução para períodos longos de tempo é uma oscilação em torno de um nível constante. Qual é esse nível? E qual é a amplitude da oscilação?
6. Suponha que um tanque contendo um determinado líquido tem uma saída perto do fundo. Seja $h(t)$ a altura da superfície do líquido acima da saída no instante t . O princípio de Torricelli² diz que a velocidade v do fluxo na saída é igual à velocidade de uma partícula em queda livre (sem atrito) caindo da altura h .
 - (a) Mostre que $v = \sqrt{2gh}$, onde g é a aceleração da gravidade.
 - (b) Igualando a taxa de saída à taxa de variação de líquido no tanque, mostre que $h(t)$ satisfaz a equação

$$A(h) \frac{dh}{dt} = -\alpha a \sqrt{2gh}, \quad (i)$$
 onde $A(h)$ é a área da seção reta do tanque na altura h e a é a área da saída. A constante α é um coeficiente de contração responsável pelo fato observado de que a seção reta do fluxo (suave) de saída é menor do que a . O valor de α para a água é cerca de 0,6.
 - (c) Considere um tanque de água em forma de um cilindro circular reto 3 m (metros) acima da saída. O raio do tanque é 1 m e o raio da saída circular é 0,1 m. Se o tanque está inicialmente cheio de água, determine quanto tempo vai levar para esvaziar o tanque até o nível da saída.
7. Suponha que determinada quantia S_0 está investida a uma taxa anual de retorno r capitalizada continuamente.
 - (a) Encontre o tempo T necessário para a soma original dobrar de valor em função de r .
 - (b) Determine T se $r = 7\%$.
 - (c) Encontre a taxa de retorno que precisa ser alcançada se o investimento inicial deve dobrar em 8 anos.
8. Uma pessoa jovem, sem capital inicial, investe k reais por ano a uma taxa anual de retorno r . Suponha que os investimentos são feitos continuamente e que o retorno é capitalizado continuamente.
 - (a) Determine a quantia $S(t)$ acumulada em qualquer instante t .

¹Uma onça tem aproximadamente 28 gramas, de modo que 50 onças têm aproximadamente 1417g. (N.T.)

²Evangelista Torricelli (1608-1647), sucessor de Galileu como matemático da corte em Florença, publicou esse resultado em 1644. Ele também é conhecido por ter construído o primeiro barômetro de mercúrio e por contribuições importantes em geometria.

- (b) Se $r = 7,5\%$, determine k de modo que 1 milhão de reais esteja disponível para a aposentadoria em 40 anos.
- (c) Se $k = \text{R\$ } 2.000,00$ por ano, determine qual deve ser a taxa de retorno r para se ter 1 milhão de reais em 40 anos.
9. Um determinado universitário pede um empréstimo de $\text{R\$ } 8.000,00$ para comprar um carro. A financeira cobra juros de 10% ao ano. Supondo que os juros são capitalizados continuamente e que os pagamentos são feitos continuamente a uma taxa anual constante k , determine a taxa de pagamento necessária para quitar o empréstimo em 3 anos. Determine, também, quanto é pago de juros durante esses 3 anos.
10. O comprador de uma casa não pode gastar mais de $\text{R\$ } 800,00$ por mês pelo seu financiamento. Suponha que a taxa de juros é de 9% ao ano e que o financiamento é em 20 anos. Suponha que os juros são capitalizados continuamente e que os pagamentos também são feitos continuamente.
- (a) Determine a quantia máxima que esse comprador pode financiar.
- (b) Determine os juros totais pagos durante o financiamento.
11. Um recém-formado pegou emprestados $\text{R\$ } 100.000,00$ a uma taxa de juros de 9% ao ano para comprar um apartamento. Prevendo constantes aumentos de salário, ele espera pagar a uma taxa mensal de $800(1 + t/120)$, onde t é o número de meses desde o início do empréstimo.
- (a) Supondo que o programa de pagamento pode ser mantido, quando o empréstimo estará quitado?
- (b) Supondo o mesmo programa de pagamento, qual deve ser a quantia emprestada para que seja paga em exatamente 20 anos?
12. Uma ferramenta importante em pesquisa arqueológica é a datação por carbono radioativo, desenvolvida pelo químico americano Willard F. Libby¹. Esse é um meio para determinar a idade de determinados resíduos de madeira e plantas, portanto de ossos de animais ou homens, ou artefatos encontrados enterrados nos mesmos níveis. A datação por carbono radioativo baseia-se no fato de que alguns restos de madeira ou plantas contêm quantidades residuais de carbono-14, um isótopo radioativo do carbono. Esse isótopo se acumula durante a vida da planta e começa a decair na sua morte. Como a meia-vida do carbono-14 é longa (aproximadamente 5730 anos²), quantidades mensuráveis de carbono-14 permanecem depois de muitos milhares de anos. Se mesmo uma fração mínima da quantidade original de carbono-14 ainda está presente, então, através de medidas apropriadas em laboratório pode-se determinar com precisão a *proporção* da quantidade original de carbono-14 que permanece. Em outras palavras, se $Q(t)$ é a quantidade de carbono-14 no instante t e Q_0 é a quantidade original, então a razão $Q(t)/Q_0$ pode ser determinada, pelo menos se essa quantidade não for pequena demais. Técnicas atuais de medida permitem o uso desse método por períodos de tempo de 50.000 anos ou mais.
- (a) Supondo que Q satisfaz a equação diferencial $Q' = -rQ$, determine a constante de decaimento r para o carbono-14.
- (b) Encontre uma expressão para $Q(t)$ em qualquer instante t se $Q(0) = Q_0$.
- (c) Suponha que determinados restos foram descobertos nos quais a quantidade residual atual de carbono-14 é de 20% da quantidade original. Determine a idade desses restos.
13. A população de mosquitos em determinada área aumenta a uma taxa proporcional à população atual e, na ausência de outros fatores, a população dobra a cada semana. Inicialmente há 200.000 mosquitos na área e predadores (pássaros, morcegos, etc.) comem 20.000 mosquitos por dia. Determine a população de mosquitos na área em qualquer instante t .
14. Suponha que determinada população tem uma taxa de crescimento que varia com o tempo e que essa população satisfaz a equação diferencial

$$dy/dt = (0,5 + \text{sen } t)y/5.$$

- (a) Se $y(0) = 1$, encontre (ou estime) o instante τ no qual a população dobrou. Escolha outras condições iniciais e determine se o tempo de duplicação τ depende da população inicial.
- (b) Suponha que a taxa de crescimento é substituída pelo seu valor médio $1/10$. Determine o tempo de duplicação τ neste caso.
- (c) Suponha que o termo $\text{sen } t$ na equação diferencial é substituído por $\text{sen}(2\pi t)$; ou seja, a variação na taxa de crescimento tem uma frequência substancialmente mais alta. Que efeito isso tem no tempo de duplicação τ ?
- (d) Faça o gráfico das soluções obtidas nos itens (a), (b) e (c) em um único conjunto de eixos.

¹Willard F. Libby (1908-1980) nasceu na zona rural do estado de Colorado, nos Estados Unidos, e recebeu sua educação na Universidade da Califórnia em Berkeley. Desenvolveu o método de datação por carbono radioativo a partir de 1947, quando estava na Universidade de Chicago. Recebeu o Prêmio Nobel de química em 1960 por esse trabalho.

²McGraw-Hill Encyclopedia of Science and Technology (8th ed.) (New York: McGraw-Hill, 1997), Vol. 5, p. 48.

15. Suponha que uma determinada população satisfaz o problema de valor inicial

$$dy/dt = r(t)y - k, \quad y(0) = y_0,$$

onde a taxa de crescimento $r(t)$ é dada por $r(t) = (1 + \sin t)/5$ e k representa a taxa predatória.

- (a) Suponha que $k = 1/5$. Faça gráficos de y em função de t para diversos valores de y_0 entre 1/2 e 1.
 (b) Estime a população inicial crítica y_c abaixo da qual a população será extinta.
 (c) Escolha outros valores de k e encontre a população crítica correspondente y_c para cada um deles.
 (d) Use os dados encontrados nos itens (b) e (c) para fazer o gráfico de y_c em função de k .
16. A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto varia a uma razão proporcional à diferença entre sua temperatura e a temperatura ambiente. Suponha que a temperatura de uma xícara de café obedece à lei do resfriamento de Newton. Se o café está a uma temperatura de 200°F quando colocado na xícara e 1 minuto depois esfriou e está a 190°F em uma sala à temperatura de 70°F, determine quando o café alcança a temperatura de 150°F.
17. O calor transferido de um corpo para seu ambiente por radiação, baseado na lei de Stefan-Boltzman⁵, é descrito pela equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = -\alpha(u^4 - T^4), \quad (i)$$

onde $u(t)$ é a temperatura absoluta do corpo no instante t , T é a temperatura absoluta do ambiente e α é uma constante que depende dos parâmetros físicos do corpo. No entanto, se u for muito maior do que T , as soluções da Eq. (i) podem ser bem aproximadas por soluções da equação mais simples

$$\frac{du}{dt} = -\alpha u^4. \quad (ii)$$

Suponha que um corpo, a uma temperatura inicial de 2000 K, está em um meio à temperatura de 300 K e que $\alpha = 2,0 \times 10^{-12} \text{ K}^{-3}/\text{s}$.

- (a) Determine a temperatura do corpo em um instante qualquer resolvendo a Eq. (ii).
 (b) Faça o gráfico de u em função de t .
 (c) Encontre o instante τ no qual $u(\tau) = 600$, ou seja, o dobro da temperatura ambiente. Até esse instante, o erro ao se usar a Eq. (ii) para aproximar as soluções da Eq. (i) não é maior do que 1%.
18. Considere uma caixa isolada termicamente (um prédio, talvez) com temperatura interna $u(t)$. De acordo com a lei do resfriamento de Newton, u satisfaz a equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = -k[u - T(t)], \quad (i)$$

onde $T(t)$ é a temperatura do ambiente (externo). Suponha que $T(t)$ varia como uma senoide; por exemplo, suponha que $T(t) = T_0 + T_1 \cos(\omega t)$.

- (a) Resolva a Eq. (i) e expresse $u(t)$ em termos de t, k, T_0, T_1 e ω . Observe que parte de sua solução tende a zero quando t fica muito grande; essa é chamada de parte transiente. O restante da solução é chamado de estado estacionário; denote-o por $S(t)$.
 (b) Suponha que t está medido em horas e que $\omega = \pi/12$, correspondendo a um período de 24 horas para $T(t)$. Além disso, sejam $T_0 = 60^\circ\text{F}$, $T_1 = 15^\circ\text{F}$ e $k = 0,2/\text{h}$. Desenhe gráficos de $S(t)$ e de $T(t)$ em função de t nos mesmos eixos. A partir de seu gráfico, estime a amplitude R da parte oscilatória de $S(t)$. Estime, também, a diferença de tempo τ entre os máximos correspondentes de $T(t)$ e de $S(t)$.
 (c) Sejam k, T_0, T_1 e ω não especificados. Escreva a parte oscilatória de $S(t)$ na forma $R \cos[\omega(t - \tau)]$. Use identidades trigonométricas para encontrar expressões para R e τ . Suponha que T_1 e ω têm os valores dados no item (b) e desenhe gráficos de R e τ em função de k .
19. Considere um lago de volume constante V contendo, no instante t , uma quantidade $Q(t)$ de poluentes distribuídos uniformemente em todo o lago com uma concentração $c(t)$, onde $c(t) = Q(t)/V$. Suponha que está entrando no lago água contendo uma concentração k de poluentes a uma taxa r e que está saindo água do lago à mesma taxa. Suponha também que são adicionados poluentes diretamente no lago a uma taxa constante P . Note que as hipóteses feitas não consideram uma série de fatores que podem ser importantes em alguns casos—por exemplo, a água que é adicionada ou perdida devido à precipitação, à absorção ou à evaporação; a estratificação em consequência das diferenças de temperatura em um lago profundo; a produção de baías protegidas, por causa de irregularidades na borda; e o fato de que os poluentes não

⁵A fórmula para conversão de Fahrenheit para Celsius é $(F - 32) \cdot 9 = C \cdot 5$. Então 200°F é, aproximadamente, 93°C. (N.T.)

⁶Jozef Stefan (1835-1893), professor de física em Viena, enunciou a lei de radiação empiricamente em 1879. Seu aluno Ludwig Boltzman (1844-1906) deduziu-a teoricamente dos princípios da termodinâmica em 1884. Boltzman é mais conhecido por seu trabalho pioneiro em mecânica estatística.

são depositados uniformemente em todo o lago (em geral), mas em pontos isolados em sua periferia. Os resultados a seguir têm que ser interpretados levando em consideração que não foram contemplados esses fatores.

- Se a concentração de poluentes no instante $t = 0$ é c_0 , encontre uma expressão para a concentração $c(t)$ em qualquer instante t . Qual a concentração limite quando $t \rightarrow \infty$?
- Se a adição de poluentes no lago termina ($k = 0$ e $P = 0$ para $t > 0$), determine o intervalo de tempo T necessário para que a concentração de poluentes seja reduzida a 50% de seu valor original; e a 10% de seu valor original.
- A Tabela 2.3.2 contém dados⁶ para os Grandes Lagos⁷. Usando esses dados, determine a partir do item (b) o tempo T necessário para reduzir a contaminação desses lagos a 10% de seu valor original.

TABELA 2.3.2 Dados sobre Volume e Fluxo dos Grandes Lagos

Lago	V ($\text{km}^3 \times 10^3$)	r (km^3/ano)
Superior	12,2	65,2
Michigan	4,9	158
Erie	0,46	175
Ontário	1,6	209

20. Uma bola com a massa de 0,15 kg é jogada para cima com velocidade inicial de 20 m/s do teto de um prédio com 30 m de altura. Não leve em consideração a resistência do ar.

 - Encontre a altura máxima acima do solo alcançada pela bola.
 - Supondo que a bola não atinge o prédio quando desce, encontre o instante em que ela bate no chão.
 - Desenhe os gráficos da velocidade e da posição em função do tempo.
21. Suponha que as condições são como no Problema 20, exceto que existe uma força devido à resistência do ar de $|v|/30$, onde v é medida em m/s.

 - Encontre a altura máxima acima do solo alcançada pela bola.
 - Encontre o instante em que ela bate no chão.
 - Desenhe os gráficos da velocidade e da posição em função do tempo. Compare esses gráficos com os gráficos correspondentes no Problema 20.
22. Suponha que as condições são como no Problema 20, exceto que existe uma força devido à resistência do ar de $v^2/1325$, onde v é medida em m/s.

 - Encontre a altura máxima acima do solo alcançada pela bola.
 - Encontre o instante em que ela bate no chão.
 - Desenhe os gráficos da velocidade e da posição em função do tempo. Compare esses gráficos com os gráficos correspondentes nos Problemas 20 e 21.
23. Um paraquedista pesando 180 lb (incluindo o equipamento) cai verticalmente de uma altura de 5000 pés^{††} e abre o paraquedas depois de 10 s de queda livre. Suponha que a força de resistência do ar é de $0,75|v|$ quando o paraquedas está fechado e de $12|v|$ quando está aberto, onde a velocidade v está em pés/s.

 - Encontre a velocidade do paraquedista quando o paraquedas abre.
 - Encontre a distância percorrida até o paraquedas abrir.
 - Qual a velocidade limite v_L depois que o paraquedas abre?
 - Determine quanto tempo o paraquedista fica no ar depois que o paraquedas abre.
 - Desenhe o gráfico da velocidade em função do tempo desde o início da queda até o paraquedista atingir o solo.
24. Um trenó-foguete, com velocidade inicial de 150 milhas/h, é freado por um canal de água. Suponha que, enquanto está sendo freado, a aceleração a do trenó é dada por $a(v) = -\mu v^2$, onde v é a velocidade e μ é uma constante.

 - Como no Exemplo 4 do texto, use a relação $dv/dt = v(dv/dx)$ para escrever a equação de movimento em termos de v e de x .

⁶Esse problema baseia-se no artigo "Natural Displacement of Pollution from the Great Lakes", de R. H. Rainey, publicado em *Science* 155(1967), pp.1242-1243; a informação na tabela foi tirada dessa fonte.

⁷Esses lagos ficam na fronteira entre os Estados Unidos e o Canadá. (N.T.)

^{††}Um pé é da ordem de 30,5 centímetros, de modo que 5000 pés é aproximadamente 1524 m. (N.T.)

- (b) Se for necessária uma distância de 2000 pés para diminuir a velocidade do tremó para 15 milhas/h, determine o valor de μ .
- (c) Encontre o tempo τ necessário para diminuir a velocidade do tremó para 15 milhas/h.
25. Um corpo de massa m é projetado verticalmente para cima com uma velocidade inicial v_0 em um meio que oferece uma resistência $k|v|$, onde k é constante. Não leve em consideração variações na força gravitacional.
- (a) Encontre a altura máxima x_m alcançada pelo corpo e o instante t_m no qual essa altura máxima é atingida.
- (b) Mostre que, se $kv_0/mg < 1$, então t_m e x_m podem ser expressos como
- $$t_m = \frac{v_0}{g} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{3} \left(\frac{kv_0}{mg} \right)^2 - \dots \right],$$
- $$x_m = \frac{v_0^2}{2g} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{2} \left(\frac{kv_0}{mg} \right)^2 - \dots \right].$$
- (c) Mostre que a quantidade kv_0/mg é adimensional.
26. Um corpo de massa m é projetado verticalmente para cima com uma velocidade inicial v_0 em um meio que oferece uma resistência $k|v|$, onde k é constante. Suponha que a atração gravitacional da Terra é constante.
- (a) Encontre a velocidade $v(t)$ do corpo em qualquer instante t .
- (b) Use o resultado do item (a) para calcular o limite de $v(t)$ quando $k \rightarrow 0$, ou seja, quando a resistência tende a zero. Esse resultado é igual à velocidade de uma massa m projetada para cima com uma velocidade inicial v_0 no vácuo?
- (c) Use o resultado do item (a) para calcular o limite de $v(t)$ quando $m \rightarrow 0$, isso é, quando a massa se aproxima de zero.
27. Um corpo caindo em um fluido relativamente denso, óleo, por exemplo, está sob a ação de três forças (veja a Figura 2.3.5): uma força de resistência R , um empuxo B e seu peso w devido à gravidade. O empuxo é igual ao peso do fluido deslocado pelo objeto. Para um corpo esférico de raio a se movimentando lentamente, a força de resistência é dada pela lei de Stokes, $R = 6\pi\mu a|v|$, onde v é a velocidade do corpo e μ é o coeficiente de viscosidade do fluido⁷.

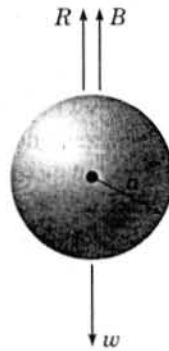


FIGURA 2.3.5 Um corpo caindo em um fluido denso.

- (a) Encontre a velocidade limite de uma esfera sólida de raio a e densidade ρ caindo livremente em um meio de densidade ρ' e coeficiente de viscosidade μ .
- (b) Em 1910, R. A. Millikan⁸ estudou o movimento de gotículas de óleo caindo em um campo elétrico. Um campo de intensidade E exerce uma força Ee em uma gotícula com carga e . Suponha que E foi ajustado de modo que a gotícula é mantida estacionária ($v = 0$) e que w e B são dados como acima. Encontre uma expressão para e . Millikan repetiu esse experimento muitas vezes e, a partir dos dados coletados, deduziu a carga de um elétron.

⁷George Gabriel Stokes (1819-1903), professor em Cambridge, foi um dos primeiros matemáticos aplicados do século XIX. As equações básicas da mecânica dos fluidos (equações de Navier-Stokes) são nomeadas em parte em sua homenagem, e um dos teoremas fundamentais do cálculo vetorial leva seu nome. Ele também foi um dos pioneiros na utilização de séries divergentes (assintóticas), um assunto de grande interesse e importância hoje em dia.

⁸Robert A. Millikan (1868-1953) estudou na Faculdade de Oberlin e na Universidade de Columbia. Mais tarde foi professor na Universidade de Chicago e no Instituto de Tecnologia da Califórnia. Publicou em 1910 um trabalho contendo a determinação da carga do elétron. Recebeu o Prêmio Nobel em 1923 por esse trabalho e por outros estudos sobre o efeito fotoelétrico.

28. Uma massa de 0,25 kg cai a partir do repouso em um meio que oferece uma resistência de $0,2|v|$, onde v está em m/s.
- Se a massa cai de uma altura de 30 m, encontre sua velocidade ao atingir o solo.
 - Se a massa não pode atingir uma velocidade maior do que 10 m/s, encontre a altura máxima da qual ela pode ser largada.
 - Suponha que a força de resistência é $k|v|$, onde v está em m/s e k é constante. Se a massa cai de uma altura de 30 m e tem que atingir o solo com uma velocidade menor ou igual a 10 m/s, determine o coeficiente de resistência k necessário.
29. Suponha que um foguete é lançado verticalmente a partir da superfície da Terra com velocidade inicial $v_0 = \sqrt{2gR}$, onde R é o raio da Terra. Não considere a resistência do ar.
- Encontre uma expressão para a velocidade v em função da distância x da superfície da Terra.
 - Encontre o tempo necessário para o foguete atingir 240.000 milhas (a distância aproximada da Terra à Lua). Suponha que $R = 4000$ milhas.

30. Sejam $v(t)$ e $w(t)$ as componentes horizontal e vertical, respectivamente, da velocidade de uma bola de beisebol rebatida (ou lançada). Na ausência de resistência do ar, v e w satisfazem as equações

$$dv/dt = 0, \quad dw/dt = -g.$$

- (a) Mostre que

$$v = u \cos A, \quad w = -gt + u \sin A,$$

onde u é a velocidade escalar inicial da bola e A é o ângulo inicial de elevação.

- Sejam $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, as coordenadas horizontal e vertical da bola no instante t . Se $x(0) = 0$ e $y(0) = h$, encontre $x(t)$ e $y(t)$ em qualquer instante t .
 - Sejam $g = 32$ pés/s², $u = 125$ pés/s e $h = 3$ pés. Desenhe a trajetória da bola para diversos valores do ângulo A , ou seja, faça os gráficos de $x(t)$ e $y(t)$ parametricamente.
 - Suponha que o muro que delimita o campo está a uma distância L e tem altura H . Encontre uma relação entre u e A que tem que ser satisfeita se a bola passa por cima do muro.
 - Suponha que $L = 350$ pés e $H = 10$ pés. Usando a relação no item (d), encontre (ou estime a partir de um gráfico) o intervalo de valores de A que correspondem a uma velocidade escalar inicial $u = 110$ pés/s.
 - Para $L = 350$ e $H = 10$, encontre a velocidade escalar mínima u e o ângulo ótimo correspondente A para o qual a bola passa por cima do muro.
31. Um modelo mais realista (do que o no Problema 30) para a trajetória de uma bola de beisebol inclui o efeito da resistência do ar. Nesse caso as equações de movimento são

$$dv/dt = -rv, \quad dw/dt = -g - rw,$$

onde r é o coeficiente de resistência.

- Determine $v(t)$ e $w(t)$ em termos da velocidade escalar inicial u e do ângulo inicial de elevação A .
 - Encontre $x(t)$ e $y(t)$ se $x(0) = 0$ e $y(0) = h$.
 - Desenhe as trajetórias da bola para $r = 1/5$, $u = 125$, $h = 3$ e para diversos valores de A . Como essas trajetórias diferem das do Problema 31 com $r = 0$?
 - Supondo $r = 1/5$ e $h = 3$, encontre a velocidade inicial mínima u e o ângulo ótimo correspondente A para o qual a bola passa por cima de um muro a uma distância de 350 pés com 10 pés de altura. Compare esse resultado com o do Problema 30(f).
32. **O Problema da Braquistócrona.** Um dos problemas famosos na história da matemática é o problema da braquistócrona⁹: encontrar uma curva ao longo da qual uma partícula desliza sem atrito em um tempo mínimo de um ponto dado P até outro ponto Q , onde o segundo ponto está mais baixo do que o primeiro, mas não diretamente debaixo (veja a Figura 2.3.6). Este problema foi proposto por Johann Bernoulli em 1696 como um desafio para os matemáticos da época. Johann Bernoulli e seu irmão Jakob Bernoulli, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e o Marquês de L'Hospital encontraram soluções corretas. O problema da braquistócrona é importante no desenvolvimento da matemática como um dos precursores do cálculo das variações.

Ao resolver este problema, é conveniente colocar a origem no ponto superior P e orientar os eixos conforme ilustrado na Figura 2.3.6. O ponto mais baixo Q tem coordenadas (x_0, y_0) . É possível mostrar, então, que a curva de tempo mínimo é dada por uma função $y = \phi(x)$ que satisfaz a equação diferencial

⁹A palavra "braquistócrona" vem das palavras gregas *brachisto*, que significa a mais curta, e *chronos*, que significa tempo.

$$(1 + y'^2)y = k^2, \quad (i)$$

onde k^2 é uma certa constante positiva a ser determinada mais tarde.

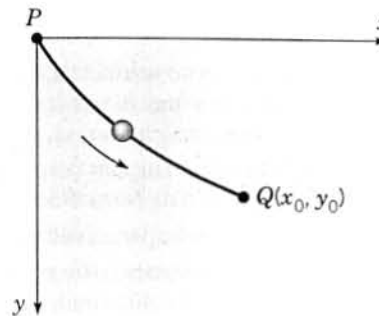


FIGURA 2.3.6 A braquistócrona.

- (a) Resolva a Eq. (i) para y' . Por que é necessário escolher a raiz quadrada positiva?
 (b) Introduza uma nova variável t pela relação

$$y = k^2 \operatorname{sen}^2 t. \quad (ii)$$

Mostre que a equação encontrada no item (a) fica, então, na forma

$$2k^2 \operatorname{sen}^2 t \, dt = dx. \quad (iii)$$

- (c) Fazendo $\theta = 2t$, mostre que a solução da Eq. (iii) para a qual $x = 0$ quando $y = 0$ é dada por

$$x = k^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)/2, \quad y = k^2(1 - \cos\theta)/2. \quad (iv)$$

As Equações (iv) são equações paramétricas da solução da Eq. (i), que contém o ponto $(0,0)$. O gráfico das Eq. (iv) é chamado de **cicloide**.

- (d) Se fizermos uma escolha apropriada da constante k , então a cicloide também contém o ponto (x_0, y_0) e é a solução do problema da braquistócrona. Encontre k se $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$.

2.4 Diferenças entre Equações Lineares e Não Lineares

Até agora estivemos basicamente interessados em mostrar que equações de primeira ordem podem ser usadas para investigar muitos tipos diferentes de problemas nas ciências naturais e em apresentar métodos para resolver tais equações se forem lineares ou separáveis. Agora está na hora de considerar algumas questões mais gerais de equações diferenciais e explorar com mais detalhes algumas diferenças importantes entre equações lineares e não lineares.

Existência e Unicidade de Soluções. Até agora discutimos uma série de problemas de valor inicial, cada um dos quais tinha uma solução e, aparentemente, apenas uma. Isso levanta a questão sobre se isso é verdade para todos os problemas de valor inicial para equações de primeira ordem. Em outras palavras, todo problema de valor inicial tem exatamente uma solução? Esse é um ponto importante até para não-matemáticos. Se você encontrar um problema de valor inicial ao investigar algum problema físico, você pode querer saber se ele tem solução antes de gastar muito tempo e esforço tentando resolvê-lo. Além disso, se você encontrar uma solução você pode estar interessado em saber se deve continuar a busca por outras soluções possíveis ou se pode ter certeza de que não existem outras soluções. Para equações lineares, as respostas para essas questões são dadas pelo teorema fundamental a seguir.

Teorema 2.4.1 Se as funções p e q são contínuas em um intervalo aberto $I: \alpha < t < \beta$ contendo o ponto $t = t_0$, então existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação diferencial

$$y' + p(t)y = q(t) \quad (1)$$

para cada t em I e que também satisfaz a condição inicial

$$y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

onde y_0 é um valor inicial arbitrário dado.

Observe que o Teorema 2.4.1 diz que o problema de valor inicial dado *tem* uma solução e também que o problema tem *apenas uma* solução. Em outras palavras, o teorema afirma tanto a *existência* quanto a *unicidade* da solução do problema de valor inicial (1), (2). Além disso, ele diz que a solução existe em qualquer intervalo I contendo o ponto inicial t_0 e no qual os coeficientes p e q são contínuos. Isto é, a solução pode ser descontínua ou deixar de existir apenas em pontos onde pelo menos uma das funções p ou q é descontínua. Frequentemente tais pontos podem ser identificados de modo fácil.

A demonstração desse teorema está parcialmente contida na discussão na Seção 2.1 que nos levou à fórmula [Eq. (32) na Seção 2.1]

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t) dt + c, \quad (3)$$

onde [Eq. (30) na Seção 2.1]

$$\mu(t) = \exp \int p(t) dt. \quad (4)$$

A dedução dessas fórmulas na Seção 2.1 mostra que se a Eq. (1) tem solução, então ela tem que ser dada pela Eq. (3). Analisando um pouco melhor aquela dedução, também podemos concluir que a equação diferencial (1) tem que ter, de fato, uma solução. Como p é contínua para $\alpha < t < \beta$, segue que μ está definida nesse intervalo e é uma função diferenciável que nunca se anula. Multiplicando a Eq. (1) por $\mu(t)$, obtemos

$$[\mu(t)y]' = \mu(t)g(t). \quad (5)$$

Como μ e g são contínuas, a função μg é integrável e a Eq. (3) segue da Eq. (5). Além disso, a integral de μg é diferenciável, de modo que y dado pela Eq. (3) existe e é diferenciável no intervalo $\alpha < t < \beta$. Substituindo a expressão para y da Eq. (3) na Eq. (1) ou (5), você pode verificar que essa expressão satisfaz a equação diferencial no intervalo $\alpha < t < \beta$. Finalmente, a condição inicial (2) determina a constante c unicamente, de modo que o problema de valor inicial só tem uma solução, o que completa a demonstração.

A Eq. (4) determina o fator integrante $\mu(t)$ a menos de um fator multiplicativo que depende do limite inferior de integração. Se escolhermos esse limite como sendo t_0 , então

$$\mu(t) = \exp \int_{t_0}^t p(s) ds, \quad (6)$$

e segue que $\mu(t_0) = 1$. Usando o fator integrante dado pela Eq. (6) e escolhendo também como t_0 o limite inferior de integração na Eq. (3), obtemos a solução geral da Eq. (1) na forma

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int_{t_0}^t \mu(s)g(s) ds + c \right]. \quad (7)$$

Para satisfazer a condição inicial (2), precisamos escolher $c = y_0$. Portanto, a solução do problema de valor inicial (1), (2) é

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int_{t_0}^t \mu(s)g(s) ds + y_0 \right], \quad (8)$$

onde $\mu(t)$ é dado pela Eq. (6).

Voltando nossa atenção para equações diferenciais não lineares, precisamos substituir o Teorema 2.4.1 por um teorema mais geral, como a seguir.

Teorema 2.4.2

Suponha que as funções f e $\partial f/\partial y$ são contínuas em algum retângulo $\alpha < t < \beta$, $\gamma < y < \delta$ contendo o ponto (t_0, y_0) . Então, em algum intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$ contido em $\alpha < t < \beta$ existe uma única solução do problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (9)$$

Observe que as hipóteses no Teorema 2.4.2 se reduzem às do Teorema 2.4.1 se a equação diferencial for linear. De fato, $f(t, y) = -p(t)y + g(t)$ e $\partial f / \partial y = -p(t)$, de modo que a continuidade de f e de $\partial f / \partial y$ é equivalente à continuidade de p e de g nesse caso. A demonstração do Teorema 2.4.1 foi relativamente simples porque se baseou na expressão (3), que fornece a solução de uma equação linear arbitrária. Não existe expressão correspondente para a solução da equação diferencial em (9), de modo que a demonstração do Teorema 2.4.2 é muito mais difícil. Ela é discutida até certo ponto na Seção 2.8 e, em mais profundidade, em livros mais avançados de equações diferenciais.

Observamos aqui que as condições enunciadas no Teorema 2.4.2 são suficientes para garantir a existência de uma única solução do problema de valor inicial (9) em algum intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$, mas elas não são necessárias. Em outras palavras, a conclusão permanece verdadeira sob hipóteses ligeiramente mais fracas sobre a função f . De fato, a existência de uma solução (mas não sua unicidade) pode ser estabelecida supondo-se apenas a continuidade de f .

Uma consequência geométrica importante da unicidade nos Teoremas 2.4.1 e 2.4.2 é que os gráficos de duas soluções não podem se intersectar. Caso contrário, existiriam duas soluções satisfazendo a condição inicial correspondente no ponto de interseção, em violação do Teorema 2.4.1 ou 2.4.2.

Vamos ver alguns exemplos.

EXEMPLO

1

Use o Teorema 2.4.1 para encontrar um intervalo no qual o problema de valor inicial

$$ty' + 2y = 4t^2, \quad (10)$$

$$y(1) = 2 \quad (11)$$

tem uma única solução.

Colocando a Eq. (10) na forma-padrão (1), temos

$$y' + (2/t)y = 4t,$$

de modo que $p(t) = 2/t$ e $g(t) = 4t$. Logo, para essa equação g é contínua para todo t , enquanto p só é contínua para $t < 0$ ou $t > 0$. O intervalo $t > 0$ contém o ponto inicial; portanto, o Teorema 2.4.1 garante que o problema (10), (11) tem uma única solução no intervalo $0 < t < \infty$. No Exemplo 3 da Seção 2.1, vimos que a solução desse problema de valor inicial é

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \quad t > 0. \quad (12)$$

Suponha agora que mudamos a condição inicial (11) para $y(-1) = 2$. Então o Teorema 2.4.1 afirma que existe uma única solução para $t < 0$. Como você pode verificar facilmente, a solução é dada, de novo pela Eq. (12), só que agora no intervalo $-\infty < t < 0$.

EXEMPLO

2

Aplique o Teorema 2.4.2 ao problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1. \quad (13)$$

Note que o Teorema 2.4.1 não é aplicável neste caso, já que a equação diferencial não é linear. Para aplicar o Teorema 2.4.2, observe que

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)^2}.$$

Assim, cada uma dessas funções é contínua em toda parte, exceto na reta $y = 1$. Logo, podemos desenhar um retângulo em torno do ponto inicial $(0, -1)$ no qual as funções f e $\partial f / \partial y$ são contínuas. Portanto, o Teorema 2.4.2 garante que o problema de valor inicial tem uma única solução em algum intervalo em torno de $x = 0$. No entanto, embora o retângulo possa ser esticado indefinidamente para x positivo e negativo isso não significa, necessariamente, que a solução existe para todo x . De fato, o problema de valor inicial (13) foi resolvido no Exemplo 2 da Seção 2.2, e a solução só existe para $x > -2$.

Suponha que mudamos a condição inicial para $y(0) = 1$. O ponto inicial agora está na reta $y = 1$, de modo que não podemos desenhar nenhum retângulo em torno dele no qual f e $\partial f / \partial y$ sejam contínuas. Então o Teorema 2.4.2 não diz nada sobre soluções possíveis para esse problema modificado. No entanto, se separarmos as variáveis e integrarmos, como na Seção 2.2, veremos que

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c.$$

Além disso, se $x = 0$ e $y = 1$, então $c = -1$. Finalmente, resolvendo para y , obtemos

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}. \quad (14)$$

A Eq. (14) nos dá duas funções que satisfazem a equação diferencial para $x > 0$ e também satisfazem a condição inicial $y(0) = 1$.

EXEMPLO

3

Considere o problema de valor inicial

$$y' = y^{1/3}, \quad y(0) = 0 \quad (15)$$

para $t \geq 0$. Aplique o Teorema 2.4.2 a este problema de valor inicial e depois resolva o problema.

A função $f(t, y) = y^{1/3}$ é contínua em toda a parte, mas $\partial f / \partial y$ não existe quando $y = 0$, logo não é contínua aí. Assim, o Teorema 2.4.2 não pode ser aplicado a este problema, e não podemos tirar nenhuma conclusão a partir dele. No entanto, pela observação após o Teorema 2.4.2 a continuidade de f garante a existência de soluções, mas não sua unicidade.

Para compreender melhor a situação, vamos resolver o problema, o que é fácil, já que a equação é separável. Temos

$$y^{-1/3} dy = dt,$$

de modo que

$$\frac{2}{3} y^{2/3} = t + c$$

e

$$y = \left[\frac{3}{2}(t + c) \right]^{3/2}.$$

A condição inicial é satisfeita se $c = 0$, logo

$$y = \phi_1(t) = \left(\frac{2}{3}t \right)^{3/2}, \quad t \geq 0 \quad (16)$$

satisfaz ambas as Eqs. (15). Por outro lado, a função

$$y = \phi_2(t) = -\left(\frac{2}{3}t \right)^{3/2}, \quad t \geq 0 \quad (17)$$

também é solução do problema de valor inicial. Além disso, a função

$$y = \psi(t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (18)$$

é mais uma solução. De fato, para qualquer t_0 positivo, as funções

$$y = \chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < t_0, \\ \pm \left[\frac{2}{3}(t - t_0) \right]^{3/2}, & \text{se } t \geq t_0 \end{cases} \quad (19)$$

são contínuas, diferenciáveis (em particular em $t = t_0$) e são soluções do problema de valor inicial (15). Portanto, este problema tem uma família infinita de soluções; veja a Figura 2.4.1, onde estão ilustradas algumas dessas soluções.

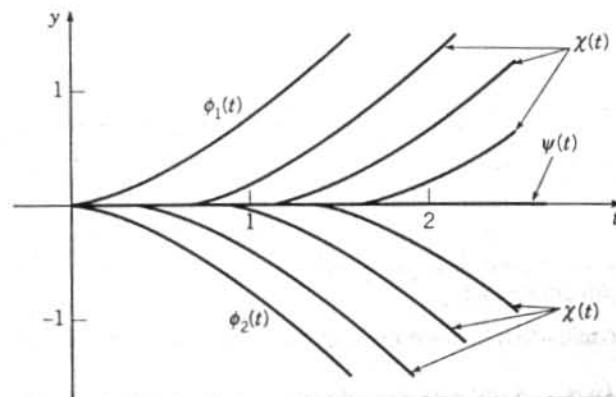


FIGURA 2.4.1 Diversas soluções do problema de valor inicial $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$.

Como já observamos, a falta de unicidade de soluções do problema (15) não contradiz o teorema de existência e unicidade, já que ele não é aplicável se o ponto inicial pertencer ao eixo dos t . Se (t_0, y_0) é qualquer ponto que não pertence ao eixo dos t , no entanto, o teorema garante que existe uma única solução da equação diferencial $y' = y^{1/3}$ que contém o ponto (t_0, y_0) .

Intervalo de Definição. De acordo com o Teorema 2.4.1, a solução de uma equação linear (1)

$$y' + p(t)y = g(t),$$

sujeita à condição inicial $y(t_0) = y_0$, existe em qualquer intervalo em torno de t_0 no qual as funções p e g são contínuas. Assim, assíntotas verticais ou outras descontinuidades da solução só podem ocorrer em pontos de descontinuidade de p ou de g . Por exemplo, as soluções no Exemplo 1 (com uma exceção) são assintóticas ao eixo dos y , correspondendo à descontinuidade em $t = 0$ do coeficiente $p(t) = 2/t$, mas nenhuma das soluções tem outro ponto onde ela não existe ou não é diferenciável. A solução excepcional mostra que as soluções podem permanecer contínuas, às vezes, mesmo em pontos de descontinuidade dos coeficientes.

Por outro lado, para um problema de valor inicial não linear satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.4.2, o intervalo onde a solução existe pode ser difícil de determinar. A solução $y = \phi(t)$ certamente existe enquanto o ponto $[t, \phi(t)]$ permanece em uma região na qual as hipóteses do Teorema 2.4.2 são satisfeitas. Isso é o que determina o valor de h no teorema. No entanto, como $\phi(t)$ não é conhecida em geral, pode ser impossível localizar o ponto $[t, \phi(t)]$ em relação a essa região. De qualquer modo, o intervalo de existência da solução pode não ter uma relação simples com a função f na equação diferencial $y' = f(t, y)$. Isso está ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO

4

Resolva o problema de valor inicial

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1, \quad (20)$$

e determine o intervalo no qual a solução existe.

O Teorema 2.4.2 garante que este problema tem uma única solução, já que $f(t, y) = y^2$ e $\partial f / \partial y = 2y$ são contínuas em toda parte. Para encontrar a solução, separamos as variáveis e integramos, com o resultado que

$$y^{-2} dy = dt \quad (21)$$

e

$$-y^{-1} = t + c.$$

Então, resolvendo para y , temos

$$y = -\frac{1}{t + c}. \quad (22)$$

Para satisfazer a condição inicial, precisamos escolher $c = -1$, de modo que

$$y = \frac{1}{1 - t} \quad (23)$$

é a solução do problema de valor inicial dado. É claro que a solução torna-se ilimitada quando $t \rightarrow 1$; portanto, a solução só existe no intervalo $-\infty < t < 1$. Não há nenhuma indicação na equação diferencial propriamente dita, entretanto, que mostre que o ponto $t = 1$ é diferente de alguma maneira. Além disso, se a condição inicial for substituída por

$$y(0) = y_0, \quad (24)$$

então a constante c na Eq. (22) tem que ser igual a $c = -1/y_0$ e segue que

$$y = \frac{y_0}{1 - y_0 t} \quad (25)$$

é a solução do problema de valor inicial com condição inicial (24). Observe que a solução (25) torna-se ilimitada quando $t \rightarrow 1/y_0$, de modo que o intervalo de existência da solução é $-\infty < t < 1/y_0$ se $y_0 > 0$ e é $1/y_0 < t < \infty$ se $y_0 < 0$. Este exemplo ilustra outra característica de problemas de valor inicial para equações não lineares, a saber, que as singularidades da solução podem depender, de maneira essencial, tanto da condição inicial quanto da equação diferencial.

Solução Geral. Outro aspecto no qual as equações lineares e não lineares diferem está relacionado ao conceito de solução geral. Para uma equação linear de primeira ordem é possível obter uma solução contendo uma constante arbitrária, de onde podem ser obtidas todas as soluções possíveis atribuindo-se valores a essa constante. Isso pode não ocorrer para equações não lineares; mesmo que seja possível encontrar uma solução contendo uma constante arbitrária, podem existir outras soluções que não podem ser obtidas atribuindo-se valores a essa constante. Por exemplo, para a equação diferencial $y' = y^2$ no Exemplo 4, a expressão na Eq. (22) contém uma constante arbitrária, mas não inclui todas as soluções da

equação diferencial. Para mostrar isso, observe que a função $y = 0$ para todo t é, certamente, uma solução da equação diferencial, mas não pode ser obtida da Eq. (22) atribuindo-se um valor para c . Poderíamos prever, nesse exemplo, que algo desse tipo poderia ocorrer porque, para colocar a equação diferencial original na forma (21), tivemos que supor que y não se anula. Entretanto, a existência de soluções “adicionais” não é incomum para equações não lineares; um exemplo menos óbvio é dado no Problema 22. Assim, só usaremos a expressão “solução geral” quando discutirmos equações lineares.

Soluções Implícitas. Lembre-se novamente de que, para um problema de valor inicial para uma equação linear de primeira ordem, a Eq. (8) fornece uma fórmula explícita para a solução $y = \phi(t)$. Desde que seja possível encontrar as primitivas necessárias, o valor da solução em qualquer ponto pode ser determinado substituindo-se simplesmente o valor apropriado de t na equação. A situação para equações não lineares é muito menos satisfatória. Em geral, o melhor que podemos esperar é encontrar uma equação da forma

$$F(t, y) = 0 \quad (26)$$

envolvendo t e y que é satisfeita pela solução $y = \phi(t)$. Mesmo isso só pode ser feito para equações de certos tipos particulares, entre as quais as equações separáveis são as mais importantes. A Eq. (26) é chamada uma integral, ou primeira integral, da equação diferencial, e (como já observamos) seu gráfico é uma curva integral ou, talvez, uma família de curvas integrais. A Eq. (26), supondo que possa ser encontrada, define a solução implicitamente; isto é, para cada valor de t , precisamos resolver a Eq. (26) para encontrar o valor correspondente de y . Se a Eq. (26) for suficientemente simples, pode ser possível resolvê-la analiticamente para y , obtendo assim uma fórmula explícita para a solução. No entanto, com maior frequência isso não será possível, e você terá que recorrer a cálculos numéricos para determinar o valor (aproximado) de y para um valor dado de t . Uma vez calculados diversos pares de valores de t e de y , muitas vezes é útil colocá-los em um gráfico e depois esboçar a curva integral que os contém. Você deveria usar um computador para isso, se possível.

Os Exemplos 2, 3 e 4 são problemas não lineares nos quais é fácil encontrar uma fórmula explícita para a solução $y = \phi(t)$. Por outro lado, os Exemplos 1 e 3 na Seção 2.2 são casos nos quais é melhor deixar a solução em forma implícita e usar métodos numéricos para calculá-la para valores particulares da variável independente. Essa última situação é mais típica; a menos que a relação implícita seja quadrática em y ou tenha alguma outra forma particularmente simples, provavelmente não será possível resolvê-la exatamente por métodos analíticos. De fato, com frequência é impossível até encontrar uma expressão implícita para a solução de uma equação não linear de primeira ordem.

Construção Gráfica ou Numérica de Curvas Integrais. Devido à dificuldade em obter soluções analíticas exatas de equações não lineares, métodos que geram soluções aproximadas ou outras informações qualitativas sobre as soluções acabam tendo uma importância maior. Já descrevemos, na Seção 1.1, como o campo de direções de uma equação diferencial pode ser construído. O campo de direções pode mostrar, muitas vezes, a forma qualitativa das soluções, e também pode ser útil na identificação das regiões no plano ty onde as soluções exibem propriedades interessantes, que merecem uma investigação mais detalhada, analítica ou numérica. Métodos gráficos para equações de primeira ordem são mais discutidos na Seção 2.5. Uma introdução a métodos de aproximação numérica para equações de primeira ordem é dada na Seção 2.7, e uma discussão mais sistemática de métodos numéricos aparece no Capítulo 8. Entretanto, não é necessário estudar os algoritmos numéricos propriamente ditos para usar eficazmente um dos muitos pacotes de programas que geram e fazem gráficos de aproximações numéricas de soluções de problemas de valor inicial.

Sumário. A equação linear $y' + p(t)y = g(t)$ tem diversas propriedades boas que podem ser resumidas nas afirmações a seguir:

1. Supondo que os coeficientes são contínuos, existe uma solução geral, contendo uma constante arbitrária, que inclui todas as soluções da equação diferencial. Uma solução particular que satisfaz uma condição inicial dada pode ser encontrada escolhendo-se o valor apropriado para a constante arbitrária.
2. Existe uma expressão para a solução, a saber, Eq. (7) ou (8). Além disso, embora envolva duas integrações, a expressão fornece uma solução explícita para a solução $y = \phi(t)$, em vez de implícita.
3. Os possíveis pontos de descontinuidade, ou singularidades, da solução podem ser identificados (sem resolver o problema) simplesmente encontrando os pontos de descontinuidade dos coeficientes. Assim, se os coeficientes forem contínuos para todo t , a solução também existe e é contínua para todo t .

Nenhuma das afirmações acima é verdadeira, em geral, para equações não lineares. Embora uma equação não linear possa ter uma solução envolvendo uma constante arbitrária, também podem existir outras

soluções. Não existe fórmula geral para soluções de equações não lineares. Se você for capaz de integrar uma equação não linear, provavelmente vai obter uma equação definindo soluções implicitamente, em vez de explicitamente. Finalmente, as singularidades das soluções de equações não lineares só podem ser encontradas, em geral, resolvendo-se a equação e examinando-se a solução. É provável que as singularidades dependam tanto da condição inicial quanto da equação diferencial.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, determine (sem resolver o problema) um intervalo no qual a solução do problema de valor inicial dado certamente existe.

1. $(t-3)y' + (\ln t)y = 2t$, $y(1) = 2$
2. $t(t-4)y' + y = 0$, $y(2) = 1$
3. $y' + (\tan t)y = \sec t$, $y(\pi) = 0$
4. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2$, $y(-3) = 1$
5. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2$, $y(1) = -3$
6. $(\ln t)y' + y = \cot t$, $y(2) = 3$

Em cada um dos Problemas de 7 a 12, diga onde, no plano ty , as hipóteses do Teorema 2.4.2 são satisfeitas.

7. $y' = \frac{t-y}{2t+5y}$
8. $y' = (1-t^2-y^2)^{1/2}$
9. $y' = \frac{\ln|ty|}{1-t^2+y^2}$
10. $y' = (t^2+y^2)^{3/2}$
11. $\frac{dy}{dt} = \frac{1+t^2}{3y-y^2}$
12. $\frac{dy}{dt} = \frac{(\cot t)y}{1+y}$

Em cada um dos Problemas de 13 a 16, resolva o problema de valor inicial dado e determine como o intervalo no qual a solução existe depende do valor inicial y_0 .

13. $y' = -4t/y$, $y(0) = y_0$
14. $y' = 2ty^2$, $y(0) = y_0$
15. $y' + y^3 = 0$, $y(0) = y_0$
16. $y' = t^2/y(1+t^3)$, $y(0) = y_0$

Em cada um dos Problemas de 17 a 20, desenhe um campo de direções e desenhe (ou esboce) o gráfico de diversas soluções da equação diferencial dada. Descreva como as soluções parecem se comportar quando t aumenta e como seus comportamentos dependem do valor inicial y_0 quando $t = 0$.

17. $y' = ty(3-y)$
18. $y' = y(3-ty)$
19. $y' = -y(3-ty)$
20. $y' = t-1-y^2$

21. Considere o problema de valor inicial $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$, do Exemplo 3 no texto.
 - (a) Existe uma solução que contém o ponto $(1,1)$? Se existe, encontre-a.
 - (b) Existe uma solução que contém o ponto $(2,1)$? Se existe, encontre-a.
 - (c) Considere todas as soluções possíveis do problema de valor inicial dado. Determine o conjunto de valores que essas soluções têm em $t = 2$.
22. (a) Verifique que ambas as funções $y_1(t) = 1-t$ e $y_2(t) = -t^2/4$ são soluções do problema de valor inicial

$$y' = \frac{-t + (t^2 + 4y)^{1/2}}{2}, \quad y(2) = -1.$$

Onde essas soluções são válidas?

- (b) Explique por que a existência de duas soluções para o problema dado não contradiz a unicidade no Teorema 2.4.2.
- (c) Mostre que $y = ct + c^2$, onde c é uma constante arbitrária, satisfaz a equação diferencial no item (a) para $t \geq -2c$. Se $c = -1$, a condição inicial também é satisfeita e obtemos a solução $y = y_1(t)$. Mostre que não existe escolha de c que fornece a segunda solução $y = y_2(t)$.
23. (a) Mostre que $\phi(t) = e^{2t}$ é uma solução de $y' - 2y = 0$ e que $y = c\phi(t)$ também é solução dessa equação para qualquer valor da constante c .
 - (b) Mostre que $\phi(t) = 1/t$ é uma solução de $y' + y^2 = 0$ para $t > 0$, mas que $y = c\phi(t)$ não é solução dessa equação, a menos que $c = 0$ ou $c = 1$. Note que a equação no item (b) é não linear, enquanto a no item (a) é linear.
24. Mostre que se $y = \phi(t)$ é uma solução de $y' + p(t)y = 0$, então $y = c\phi(t)$ também é solução para qualquer valor da constante c .
25. Seja $y = y_1(t)$ uma solução de

$$y' + p(t)y = 0, \quad (i)$$

e seja $y = y_2(t)$ uma solução de

$$y' + p(t)y = g(t). \quad (\text{ii})$$

Mostre que $y = y_1(t) + y_2(t)$ também é solução da Eq. (ii).

26. (a) Mostre que a solução (7) da equação linear geral (1) pode ser colocada na forma

$$y = cy_1(t) + y_2(t), \quad (\text{i})$$

onde c é uma constante arbitrária. Identifique as funções y_1 e y_2 .

- (b) Mostre que y_1 é uma solução da equação diferencial

$$y' + p(t)y = 0. \quad (\text{ii})$$

correspondente a $g(t) = 0$.

- (c) Mostre que y_2 é solução da equação linear geral (1). Veremos mais tarde (por exemplo, na Seção 3.5) que soluções de equações lineares de ordem mais alta têm um padrão semelhante ao da Eq. (i).

Equações de Bernoulli. Algumas vezes é possível resolver uma equação não linear fazendo uma mudança da variável dependente que a transforma em uma equação linear. O exemplo mais importante de tal equação é da forma

$$y' + p(t)y = q(t)y^n,$$

e é chamada de equação de Bernoulli em honra a Jakob Bernoulli. Os Problemas de 27 a 31 tratam de equações desse tipo.

27. (a) Resolva a equação de Bernoulli quando $n = 0$ e $n = 1$.
 (b) Mostre que, se $n \neq 0$ e $n \neq 1$, então a substituição $v = y^{1-n}$ reduz a equação de Bernoulli a uma equação linear. Esse método de solução foi encontrado por Leibniz em 1696.

Em cada um dos Problemas de 28 a 31 é dada uma equação de Bernoulli. Em cada caso, resolva-a usando a substituição mencionada no Problema 27(b).

28. $t^2 y' + 2ty - y^3 = 0, \quad t > 0$
 29. $y' = ry - ky^2, \quad r > 0$ e $k > 0$. Esta equação é importante em dinâmica populacional, e é discutida em detalhes na Seção 2.5.
 30. $y' = \varepsilon y - \sigma y^3, \quad \varepsilon > 0$ e $\sigma > 0$. Esta equação aparece no estudo da estabilidade do fluxo de fluidos.
 31. $dy/dt = (\Gamma \cos t + T)y - y^3$, onde Γ e T são constantes. Esta equação também aparece no estudo da estabilidade do fluxo de fluidos.

Coefficientes Descontínuos. Algumas vezes ocorrem equações diferenciais lineares com uma ou ambas as funções p e g tendo descontinuidades do tipo salto. Se t_0 é tal ponto de descontinuidade, é necessário resolver a equação separadamente para $t < t_0$ e para $t > t_0$. Depois, junta-se as duas soluções de modo que y seja contínua em t_0 . Isso é feito por uma escolha apropriada das constantes arbitrárias. Os dois problemas a seguir ilustram essa situação. Note em cada caso que é impossível fazer y' contínua em t_0 .

32. Resolva o problema de valor inicial

$$y' + 2y = g(t), \quad y(0) = 0,$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

33. Resolva o problema de valor inicial

$$y' + p(t)y = 0, \quad y(0) = 1,$$

onde

$$p(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

2.5 Equações Autônomas e Dinâmica Populacional

Uma classe importante de equações de primeira ordem consiste naquelas nas quais a variável independente não aparece explicitamente. Tais equações são ditas **autônomas**, e têm a forma

$$dy/dt = f(y). \quad (1)$$

Vamos discutir essas equações no contexto de crescimento ou declínio populacional de uma espécie dada, um assunto importante em campos que vão da medicina à ecologia, passando pela economia global. Algumas outras aplicações são mencionadas em alguns dos problemas. Lembre-se de que consideramos, nas Seções 1.1 e 1.2, o caso especial da Eq. (1) no qual $f(y) = ay + b$.

A Eq. (1) é separável, de modo que podemos aplicar a discussão feita na Seção 2.2, mas o objetivo principal desta seção é mostrar como métodos geométricos podem ser usados para se obter informação qualitativa importante sobre as soluções diretamente da equação diferencial sem resolvê-la. Os conceitos de estabilidade e instabilidade de soluções de equações diferenciais são fundamentais nesse esforço. Essas ideias foram introduzidas informalmente no Capítulo 1, mas sem usar essa terminologia. Vamos discuti-las mais aqui, e examiná-las em maior profundidade e em um contexto mais geral no Capítulo 9.

Crescimento Exponencial. Seja $y = \phi(t)$ a população de uma determinada espécie no instante t . A hipótese mais simples em relação à variação de população é que a taxa de variação de y é proporcional¹⁰ ao valor atual de y ; ou seja,

$$dy/dt = ry, \quad (2)$$

onde a constante de proporcionalidade r é chamada de **taxa de crescimento ou declínio**, dependendo se é positiva ou negativa. Vamos supor aqui que $r > 0$, de modo que a população está crescendo.

Resolvendo a Eq. (2) sujeita à condição inicial

$$y(0) = y_0, \quad (3)$$

obtemos

$$y = y_0 e^{rt}. \quad (4)$$

Assim, o modelo matemático que consiste no problema de valor inicial (2), (3) com $r > 0$ prevê que a população vai crescer exponencialmente todo o tempo, como mostra a Figura 2.5.1 para diversos valores de y_0 . Sob condições ideais, observou-se que a Eq. (4) é razoavelmente precisa para muitas populações, pelo menos por períodos limitados de tempo. Entretanto, é claro que tais condições ideais não podem continuar indefinidamente; alguma hora um fator como limitações de espaço, suprimento de comida ou de outros recursos reduzirá a taxa de crescimento e terminará com o crescimento exponencial ilimitado.

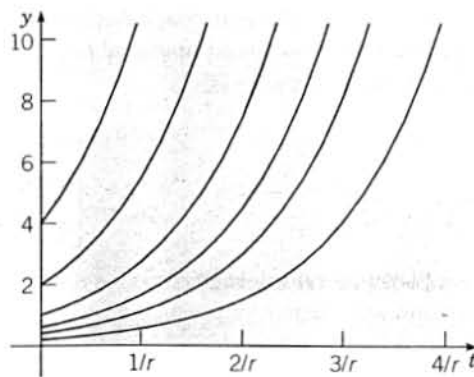


FIGURA 2.5.1 Crescimento exponencial: y em função de t para $dy/dt = ry$.

Crescimento Logístico. Para levar em consideração o fato de que a taxa de crescimento da população depende, de fato, da população, substituímos a constante r na Eq. (2) por uma função $h(y)$ e obtivemos, então, a equação modificada

¹⁰Aparentemente, foi o economista inglês Thomas Malthus (1766-1834) quem observou primeiro que muitas populações biológicas aumentam a uma taxa proporcional à população. Seu primeiro artigo sobre populações apareceu em 1798.

$$dy/dt = h(y)y. \quad (5)$$

Agora queremos escolher $h(y)$ tal que $h(y) \equiv r > 0$ quando y é pequeno, $h(y)$ diminui quando y aumenta e $h(y) < 0$ quando y é suficientemente grande. A função mais simples que tem essas propriedades é $h(y) = r - ay$, onde a também é uma constante positiva. Usando essa função na Eq. (5), obtemos

$$dy/dt = (r - ay)y. \quad (6)$$

A Eq. (6) é conhecida como a equação de Verhulst¹¹ ou **equação logística**. É muitas vezes conveniente escrever a equação logística na forma equivalente

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y, \quad (7)$$

onde $K = r/a$. A constante r é chamada de **taxa de crescimento intrínseca**, isto é, a taxa de crescimento na ausência de qualquer fator limitador. A interpretação de K ficará clara em breve.

Iremos investigar as soluções da Eq. (7) em detalhe mais tarde nesta seção. Antes disso, no entanto, vamos mostrar como você pode desenhar facilmente um esboço *qualitativamente correto* das soluções. Os mesmos métodos também se aplicam à equação mais geral (1).

Vamos primeiro procurar soluções da Eq. (7) do tipo mais simples possível, ou seja, funções constantes. Para tal solução, $dy/dt = 0$ para todo t , de modo que qualquer solução constante da Eq. (7) tem que satisfazer a equação algébrica

$$r(1 - y/K)y = 0.$$

Logo, as soluções constantes são $y = \phi_1(t) = 0$ e $y = \phi_2(t) = K$. Essas soluções são chamadas de **soluções de equilíbrio** da Eq. (7), já que não há variação ou mudança no valor de y quando t aumenta. Da mesma forma, soluções de equilíbrio da equação mais geral (1) podem ser encontradas localizando-se as raízes de $f(y) = 0$. Os zeros de $f(y)$ também são chamados de **pontos críticos**.

Para visualizar outras soluções da Eq. (7) e esboçar seus gráficos rapidamente podemos começar desenhando o gráfico de $f(y)$ em função de y . No caso da Eq. (7), $f(y) = r(1 - y/K)y$, logo o gráfico é a parábola ilustrada na Figura 2.5.2. As interseções com os eixos são $(0, 0)$ e $(K, 0)$, correspondendo aos pontos críticos da Eq. (7), e o vértice da parábola está em $(K/2, rK/4)$. Note que $dy/dt > 0$ para $0 < y < K$; portanto y é uma função crescente de t quando y está nesse intervalo; isso está indicado na Figura 2.5.2 pelas setas próximas ao eixo dos y apontando para a direita. Analogamente, se $y > K$, então $dy/dt < 0$, logo y é decrescente, como indicado pela seta apontando para a esquerda na Figura 2.5.2.

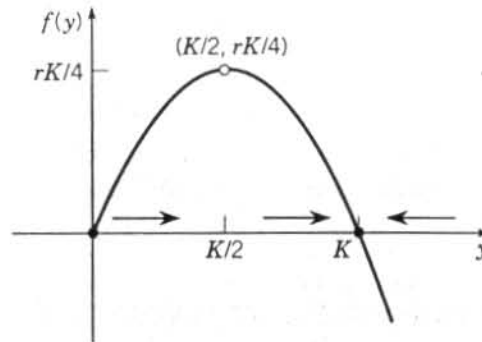


FIGURA 2.5.2 $f(y)$ em função de y para $dy/dt = r(1 - y/K)y$.

Nesse contexto, o eixo dos y é chamado muitas vezes de **reta de fase** e está reproduzido em sua orientação vertical usual na Figura 2.5.3a. Os pontos em $y = 0$ e $y = K$ são os pontos críticos, ou soluções de equilíbrio. As setas indicam novamente que y é crescente sempre que $0 < y < K$ e que y é decrescente quando $y > K$.

¹¹P. F. Verhulst (1804-1849) foi um matemático belga que introduziu a Eq. (6) como um modelo para o crescimento populacional em 1838. Ele referiu-se a ele como crescimento logístico; por isso a Eq. (6) é chamada muitas vezes de equação logística. Ele não foi capaz de testar a precisão de seu modelo devido a dados inadequados de censo e não recebeu muita atenção até muitos anos depois. R. Pearl (1930) demonstrou concordância razoável com dados experimentais para populações de *drosophila melanogaster* (mosca da fruta), e G. F. Gause (1935) fez o mesmo para populações de *paramecium* e de *tribolium* (besouro castanho).

Além disso, da Figura 2.5.2 note que se y está próximo de zero ou de K , então a inclinação $f(y)$ está próxima de zero, de modo que as curvas-solução têm tangentes próximas da horizontal. Elas se tornam mais inclinadas quando o valor de y fica mais longe de zero ou de K .

Para esboçar os gráficos das soluções da Eq. (7) no plano ty , começamos com as soluções de equilíbrio $y = 0$ e $y = K$; depois desenhamos outras curvas que são crescentes quando $0 < y < K$, decrescentes quando $y > K$ e cujas tangentes se aproximam da horizontal quando y se aproxima de 0 ou de K . Logo, os gráficos das soluções da Eq. (7) devem ter a forma geral ilustrada na Figura 2.5.5b, independentemente dos valores de r e de K .

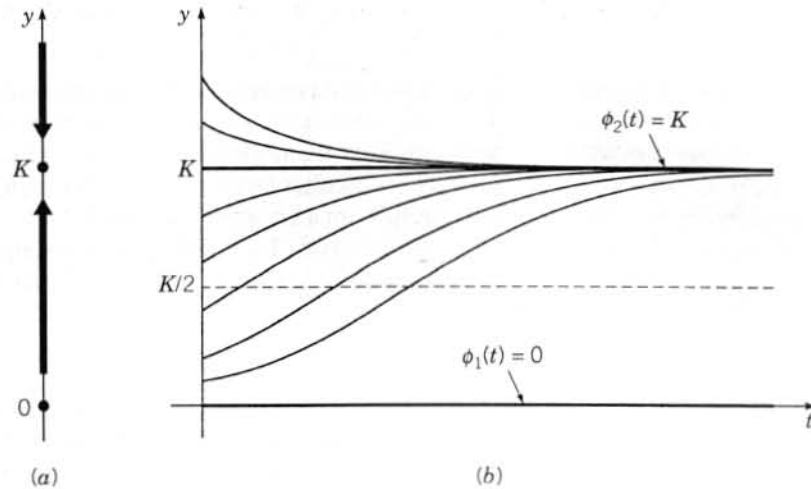


FIGURA 2.5.3 Crescimento logístico: $dy/dt = r(1 - y/K)y$. (a) A reta de fase. (b) Gráficos de y em função de t .

A Figura 2.5.3b parece mostrar que outras soluções intersectam a solução de equilíbrio $y = K$, mas isso é possível? Não, a parte de unicidade do Teorema 2.4.2, o teorema fundamental de existência e unicidade, diz que apenas uma solução pode conter um ponto dado no plano ty . Assim, embora outras soluções possam ser assintóticas à solução de equilíbrio quando $t \rightarrow \infty$, elas não podem intersectá-la em tempo finito.

Para ir um pouco mais fundo na investigação, podemos determinar a concavidade das curvas-solução e a localização dos pontos de inflexão calculando d^2y/dt^2 . Da equação diferencial (1), obtemos (usando a regra da cadeia)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} f(y) = f'(y) \frac{dy}{dt} = f'(y)f(y). \quad (8)$$

O gráfico de y em função de t é convexo quando $y'' > 0$, isto é, quando f e f' têm o mesmo sinal, e é côncavo quando $y'' < 0$, o que ocorre quando f e f' têm sinais contrários. Os sinais de f e de f' podem ser identificados facilmente do gráfico de $f(y)$ em função de y . Podem ocorrer pontos de inflexão quando $f'(y) = 0$.

No caso da Eq. (7), as soluções são convexas para $0 < y < K/2$, onde f é positiva e crescente (veja a Figura 2.5.2), de modo que f e f' são positivas. As soluções também são convexas para $y > K$, onde f é negativa e decrescente (f e f' são negativas). Para $K/2 < y < K$, as soluções são côncavas, já que f é positiva e decrescente, de modo que f é positiva e f' é negativa. Toda vez que o gráfico de y em função de t cruza a reta $y = K/2$, aí há um ponto de inflexão. Os gráficos na Figura 2.5.3b exibem essas propriedades.

Finalmente, note que K é a cota superior que é aproximada, mas nunca excedida, por populações crescentes começando abaixo desse valor. Então, é natural nos referirmos a K como sendo o **nível de saturação**, ou **capacidade de sustentação ambiental**, para a espécie em questão.

Uma comparação entre as Figuras 2.5.1 e 2.5.3b revela que soluções da equação não linear (7) são muito diferentes das soluções da equação linear (1), pelo menos para valores grandes de t . Independentemente do valor de K , isto é, não importa quão pequeno seja o termo não linear na Eq. (7), as soluções dessa equação tendem a um valor finito quando $t \rightarrow \infty$, enquanto as soluções da Eq. (1) crescem (exponencialmente) sem limite quando $t \rightarrow \infty$. Assim, mesmo um termo não linear minúsculo na equação diferencial (7) tem um efeito decisivo na solução para valores grandes de t .

Em muitas situações, basta obter a informação qualitativa ilustrada na Figura 2.5.3b sobre uma solução $y = \phi(t)$ da Eq. (7). Essa informação foi inteiramente obtida a partir do gráfico de $f(y)$ como função de y , sem resolver a equação diferencial (7). Entretanto, se quisermos ter uma descrição mais detalhada

do crescimento logístico – por exemplo, se quisermos saber o número de elementos na população em um instante particular – então precisaremos resolver a Eq. (7) sujeita à condição inicial (3). Se $y \neq 0$ e $y \neq K$, podemos escrever (7) na forma

$$\frac{dy}{(1 - y/K)y} = r dt.$$

Usando uma expansão em frações parciais na expressão à esquerda do sinal de igualdade, obtemos

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1/K}{1 - y/K}\right) dy = r dt.$$

Integrando, temos

$$\ln |y| - \ln \left|1 - \frac{y}{K}\right| = rt + c, \quad (9)$$

onde c é uma constante arbitrária de integração a ser determinada da condição inicial $y(0) = y_0$. Já observamos que, se $0 < y_0 < K$, então y permanece nesse intervalo para todo o tempo. Então, nesse caso, podemos remover as barras de módulo na Eq. (9) e, calculando a exponencial de todos os termos na Eq. (9), vemos que

$$\frac{y}{1 - (y/K)} = Ce^{rt}, \quad (10)$$

onde $C = e^c$. Para que a condição inicial $y(0) = y_0$ seja satisfeita, precisamos escolher $C = y_0/[1 - (y_0/K)]$. Usando esse valor de C na Eq. (10) e resolvendo para y , obtemos

$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}. \quad (11)$$

Deduzimos a solução (11) sob a hipótese de que $0 < y_0 < K$. Se $y_0 > K$, os detalhes ao tratar com a Eq. (9) ficam ligeiramente diferentes, e deixamos a cargo do leitor mostrar que a Eq. (11) também é válida nesse caso. Finalmente, note que a Eq. (11) também contém as soluções de equilíbrio $y = \phi_1(t) = 0$ e $y = \phi_2(t) = K$ correspondendo às condições iniciais $y_0 = 0$ e $y_0 = K$, respectivamente.

Todas as conclusões qualitativas a que chegamos anteriormente por raciocínios geométricos podem ser confirmadas examinando-se a solução (11). Em particular, se $y_0 = 0$, então a Eq. (11) confirma que $y(t) = 0$ para todo t . Se $y_0 > 0$ e se fizermos $t \rightarrow \infty$ na Eq. (11), obteremos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0 K / y_0 = K.$$

Assim, para cada $y_0 > 0$ a solução tende à solução de equilíbrio $y = \phi_2(t) = K$ assintoticamente quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, a solução constante $\phi_2(t) = K$ é dita uma **solução assintoticamente estável** da Eq. (7), ou o ponto $y = K$ é dito um ponto de equilíbrio, ou ponto crítico, assintoticamente estável. Depois de muito tempo a população está próxima de seu nível de saturação K , independentemente do tamanho inicial da população, desde que seja positivo. Outras soluções tendem à solução de equilíbrio mais rapidamente quando r aumenta.

Por outro lado, a situação para a solução de equilíbrio $y = \phi_1(t) = 0$ é bem diferente. Mesmo soluções que começam muito próximas de zero crescem quanto t aumenta e, como vimos, tendem a K quando $t \rightarrow \infty$. Dizemos que $\phi_1(t) = 0$ é uma **solução de equilíbrio instável** ou que $y = 0$ é um ponto de equilíbrio, ou ponto crítico, instável. Isso significa que a única maneira de garantir que a solução permaneça próxima de zero é fazer com que seu valor inicial seja *exatamente* igual a zero.

EXEMPLO

1

O modelo logístico tem sido aplicado ao crescimento natural da população de linguados gigantes em determinadas áreas do Oceano Pacífico.¹² Seja y , medido em quilogramas, a massa total, ou biomassa, da população de linguado gigante no instante t . Estima-se que os parâmetros na equação logística tenham os valores $r = 0,71$ por ano e $K = 80,5 \times 10^6$ kg. Se a biomassa inicial é $y_0 = 0,25K$, encontre a biomassa dois anos depois. Encontre, também, o instante τ para o qual $y(\tau) = 0,75K$.

¹²Uma boa fonte de informação sobre dinâmica populacional e economia envolvidas no uso eficiente de um recurso renovável, com ênfase em pesca, é o livro de Clark listado nas referências ao final deste capítulo. Os valores dos parâmetros usados aqui estão na página 53 daquele livro e foram obtidos de um estudo de H. S. Mohring.

É conveniente mudar a escala da solução (11), dividindo-a pela capacidade de sustentação K ; assim, colocamos a Eq. (11) na forma

$$\frac{y}{K} = \frac{y_0/K}{(y_0/K) + [1 - (y_0/K)]e^{-rt}} \quad (12)$$

Usando os dados do problema, encontramos

$$\frac{y(2)}{K} = \frac{0,25}{0,25 + 0,75e^{-1,42}} \cong 0,5797.$$

Em consequência, $y(2) \cong 46,7 \times 10^6$ kg.

Para encontrar τ , resolvemos primeiro a Eq. (12) para t . Obtemos

$$e^{-rt} = \frac{(y_0/K)[1 - (y/K)]}{(y/K)[1 - (y_0/K)]};$$

logo,

$$t = -\frac{1}{r} \ln \frac{(y_0/K)[1 - (y/K)]}{(y/K)[1 - (y_0/K)]} \quad (13)$$

Usando os valores dados para r e y_0/K e fazendo $y/K = 0,75$, encontramos

$$\tau = -\frac{1}{0,71} \ln \frac{(0,25)(0,25)}{(0,75)(0,75)} = \frac{1}{0,71} \ln 9 \cong 3,095 \text{ anos.}$$

A Figura 2.5.4 mostra os gráficos de y/K em função de t para os valores dados dos parâmetros e diversas condições iniciais.

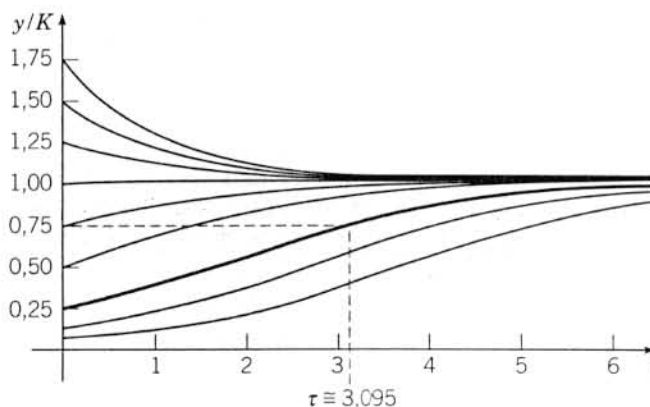


FIGURA 2.5.4 y/K em função de t para o modelo populacional de linguados gigantes no Oceano Pacífico.

Um Limiar Crítico. Vamos considerar agora a equação

$$\frac{dy}{dt} = -r \left(1 - \frac{y}{T}\right) y, \quad (14)$$

onde r e T são constantes positivas dadas. Observe que (exceto pela substituição de K por T) essa equação só difere da equação logística (7) pela presença do sinal de menos na expressão à direita do sinal de igualdade. No entanto, como veremos, o comportamento das soluções da Eq. (14) é muito diferente das soluções da Eq. (7).

Para a Eq. (14) o gráfico de $f(y)$ em função de y é a parábola ilustrada na Figura 2.5.5. As interseções com o eixo dos y são os pontos críticos $y = 0$ e $y = T$, correspondendo às soluções de equilíbrio $\phi_1(t) = 0$ e $\phi_2(t) = T$. Se $0 < y < T$, então $dy/dt < 0$ e y é decrescente como função de t . Por outro lado, se $y > T$, então $dy/dt > 0$ e y é crescente como função de t . Assim, $\phi_1(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio assintoticamente estável e $\phi_2(t) = T$ é instável. Além disso, $f'(y)$ é negativa para $0 < y < T/2$ e positiva para $T/2 < y < T$, de modo que o gráfico de y em função de t é, respectivamente, convexo e côncavo nesses intervalos. Temos que $f'(y)$ é positiva para $y > T$, de modo que o gráfico de y em função de t também é convexo aqui.

A Figura 2.5.6a mostra a reta de fase (o eixo dos y) para a Eq. (14). Os pontos em $y = 0$ e $y = T$ são os pontos críticos, ou soluções de equilíbrio, e as setas indicam onde as soluções são crescentes ou decrescentes.

As curvas-solução da Eq. (14) agora podem ser esboçadas rapidamente. Primeiro desenhe as soluções de equilíbrio $y = 0$ e $y = T$. Depois esboce curvas na faixa $0 < y < T$ decrescentes e mude a concavidade

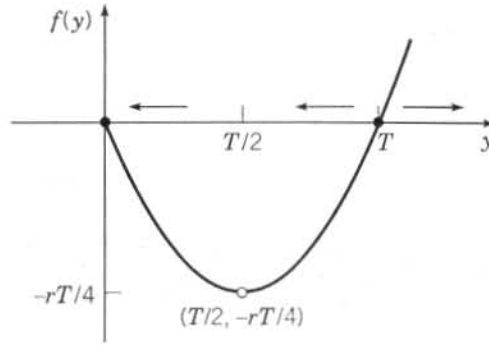


FIGURA 2.5.5 $f(y)$ em função de y para $dy/dt = -r(1 - y/T)y$.

quando y cruza a reta $y = T/2$. A seguir, desenhe curvas acima de $y = T$ que aumentam cada vez mais rapidamente quando y e t aumentam. Certifique-se de que todas as curvas têm tangentes próximas da horizontal quando t está próximo de zero ou de T . O resultado é a Figura 2.5.6b, que é um esboço qualitativamente preciso de soluções da Eq. (14) para quaisquer valores de r e T . Dessa figura, parece que quando t aumenta y tende a zero ou cresce sem limite, dependendo se o valor inicial y_0 é menor ou maior do que T . Assim, T é um **limiar**, abaixo do qual não há crescimento.

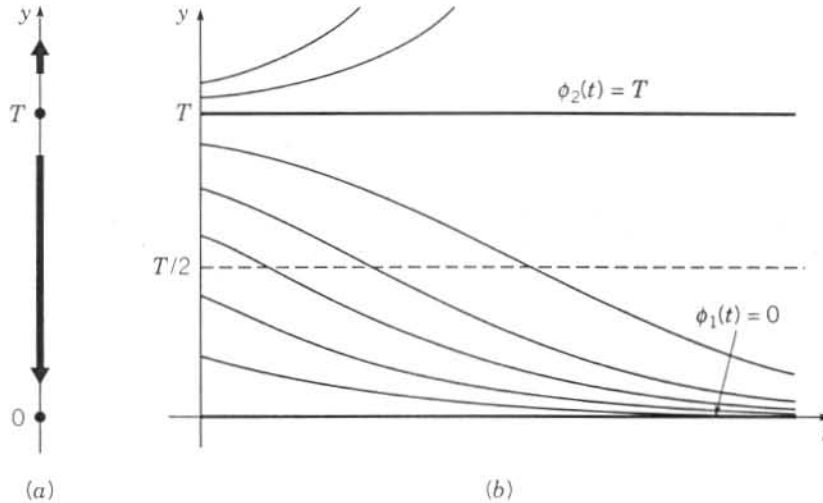


FIGURA 2.5.6 Crescimento com um limiar: $dy/dt = -r(1 - y/T)y$. (a) A reta de fase. (b) Gráficos de y em função de t .

Podemos confirmar as conclusões a que chegamos por meios geométricos resolvendo a equação diferencial (14). Isso pode ser feito por separação de variáveis e integração, exatamente como fizemos para a Eq. (7). Entretanto, se notarmos que a Eq. (14) pode ser obtida da Eq. (7) substituindo-se K por T e r por $-r$, podemos fazer as mesmas substituições na solução (11) para obter

$$y = \frac{y_0 T}{y_0 + (T - y_0)e^{rt}}, \tag{15}$$

que é a solução da Eq. (14) sujeita à condição inicial $y(0) = y_0$.

Se $0 < y_0 < T$, segue da Eq. (15) que $y \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Isso está de acordo com nossa análise geométrica qualitativa. Se $y_0 > T$, então o denominador na expressão à direita do sinal de igualdade da Eq. (15) se anula para um determinado valor finito de t . Vamos denotar esse valor por t^* e calculá-lo da fórmula

$$y_0 - (y_0 - T)e^{rt^*} = 0,$$

que nos dá

$$t^* = \frac{1}{r} \ln \frac{y_0}{y_0 - T}. \tag{16}$$

Assim, se a população inicial y_0 está acima do limiar T , o modelo com limiar prevê que o gráfico de y em função de t tem uma assíntota vertical em $t = t^*$. Em outras palavras, a população torna-se ilimitada em um tempo finito que depende de y_0, T e r . A existência e a localização dessa assíntota não apareceram na nossa análise geométrica, de modo que nesse caso a solução explícita forneceu uma informação importante qualitativa, e não só quantitativa.

A população de algumas espécies exibe o fenômeno de existência de limiar. Se estiverem presentes muito poucos, então a espécie não pode se propagar com sucesso e a população é extinta. No entanto, se uma população é maior do que o limiar, ela cresce ainda mais. É claro que a população não pode ficar ilimitada, de modo que alguma hora a Eq. (14) tem que ser modificada para levar isso em consideração.

Limiars críticos também ocorrem em outras circunstâncias. Por exemplo, em mecânica dos fluidos as equações da forma (7) ou (14) muitas vezes governam pequenos distúrbios y em um fluxo laminar (ou suave). Por exemplo, se a Eq. (14) é válida e $y < T$, então o distúrbio é amortecido e o fluxo laminar persiste. No entanto, se $y > T$, então o distúrbio aumenta e o fluxo laminar torna-se turbulento. Nesse caso, T é chamado de *amplitude crítica*. Pesquisadores falam em manter o nível de distúrbio em um túnel de vento suficientemente baixo para que possam estudar o fluxo laminar em um aerofólio, por exemplo.

Crescimento Logístico com Limiar. Como mencionamos na última subseção, o modelo com limiar (14) pode precisar ser modificado de modo a evitar crescimento ilimitado quando y está acima do limiar T . A maneira mais simples de fazer isso é introduzir outro fator que tornará dy/dt negativo para y grande. Vamos considerar, então,

$$\frac{dy}{dt} = -r \left(1 - \frac{y}{T}\right) \left(1 - \frac{y}{K}\right) y, \tag{17}$$

onde $r > 0$ e $0 < T < K$.

A Figura 2.5.7 mostra o gráfico de $f(y)$ em função de y . Neste problema existem três pontos críticos, $y = 0, y = T$ e $y = K$, correspondendo às soluções de equilíbrio $\phi_1(t) = 0, \phi_2(t) = T$ e $\phi_3(t) = K$, respectivamente. É claro da Figura 2.5.7 que $dy/dt > 0$ para $T < y < K$ e, portanto, y é crescente aí. Temos $dy/dt < 0$ para $y < T$ e para $y > K$, logo y é decrescente nesses intervalos. Em consequência, as soluções de equilíbrio $\phi_1(t)$ e $\phi_3(t)$ são assintoticamente estáveis, enquanto que a solução $\phi_2(t)$ é instável.

A reta de fase para a Eq. (17) está ilustrada na Figura 2.5.8a, e os gráficos de algumas soluções estão esboçados na Figura 2.5.8b. Você deve se certificar de que compreende a relação entre essas duas figuras, assim como a relação entre as Figuras 2.5.7 e 2.5.8a. Da Figura 2.5.8b vemos que se y começa abaixo do limiar T , então y declina até à extinção. Por outro lado, se y começa acima de T , então y acaba, finalmente, se aproximando da capacidade de sustentação K . Os pontos de inflexão nos gráficos de y em função de t na Figura 2.5.8b correspondem aos pontos de máximo e mínimo relativos, y_1 e y_2 , respectivamente, no gráfico de $f(y)$ em função de y na Figura 2.5.7. Esses valores podem ser obtidos diferenciando-se a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (17) em relação a y , igualando o resultado a zero e resolvendo para y . Obtemos

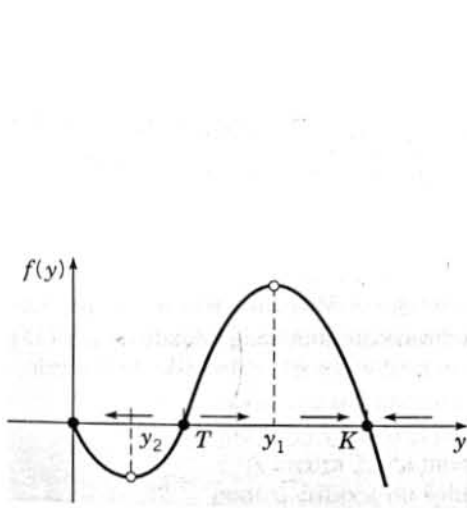


FIGURA 2.5.7 $f(y)$ em função de y para $dy/dt = -r(1 - y/T)(1 - y/K)y$.

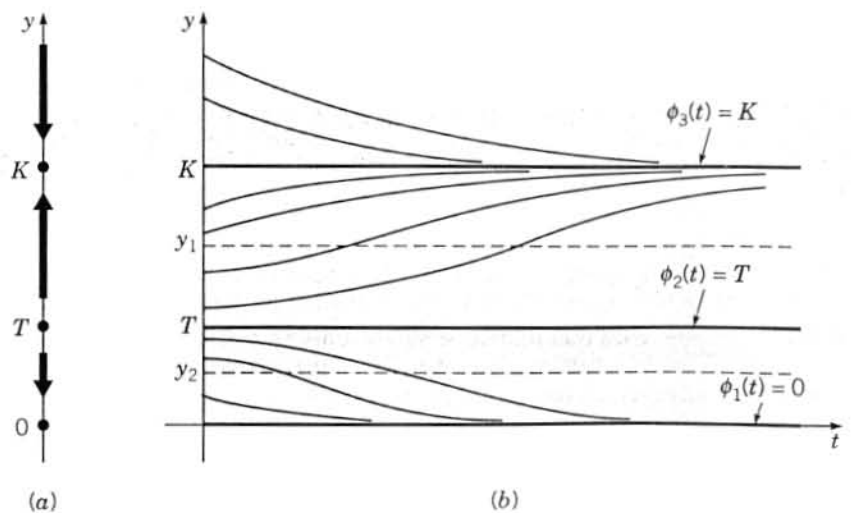


FIGURA 2.5.8 Crescimento logístico com limiar: $dy/dt = -r(1 - y/T)(1 - y/K)y$. (a) A reta de fase. (b) Gráficos de y em função de t .

$$y_{1,2} = (K + T \pm \sqrt{K^2 - KT + T^2})/3, \quad (18)$$

onde o sinal de mais corresponde a y_1 e o de menos a y_2 .

Aparentemente, um modelo desse tipo descreve a população dos pombos viajantes,¹³ presentes nos Estados Unidos em vastas quantidades até o final do século XIX. Foram muito caçados para comida e como esporte e, em consequência, por volta de 1880 seu número estava drasticamente reduzido. Parece que infelizmente os pombos viajantes só podiam se reproduzir quando presentes em uma grande concentração, correspondendo a um limiar relativamente alto T . Embora ainda existisse um número razoavelmente grande de pássaros no final da década de 1880, não havia uma quantidade suficiente em um único lugar para permitir a reprodução, e a população declinou rapidamente até a extinção. O último sobrevivente morreu em 1914. O declínio precipitado na população de pombos viajantes de números enormes até a extinção em poucas décadas foi um dos fatores iniciais que contribuíram para a preocupação com a conservação naquele país.

PROBLEMAS

Os Problemas de 1 a 6 envolvem equações da forma $dy/dt = f(y)$. Em cada problema, esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y , determine os pontos críticos (de equilíbrio) e classifique cada um como sendo assintoticamente estável ou instável. Desenhe a reta de fase e esboce diversos gráficos de soluções no plano ty .

- $dy/dt = ay + by^2$, $a > 0$, $b > 0$, $y_0 \geq 0$
- $dy/dt = ay + by^2$, $a > 0$, $b > 0$, $-\infty < y_0 < \infty$
- $dy/dt = y(y-1)(y-2)$, $y_0 \geq 0$
- $dy/dt = e^y - 1$, $-\infty < y_0 < \infty$
- $dy/dt = e^{-y} - 1$, $-\infty < y_0 < \infty$
- $dy/dt = -2(\arctan y)/(1+y^2)$, $-\infty < y_0 < \infty$

7. **Soluções de Equilíbrio Semiestável.** Algumas vezes uma solução de equilíbrio constante tem a propriedade de que soluções de um lado da solução de equilíbrio tendem a se aproximar dela, enquanto soluções do outro lado tendem a se afastar (veja a Figura 2.5.9). Nesse caso, a solução de equilíbrio é dita **semiestável**.

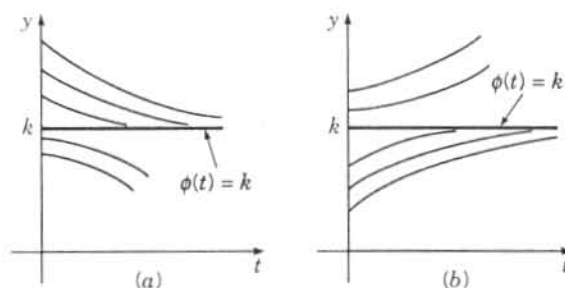


FIGURA 2.5.9 Em ambos os casos a solução de equilíbrio $\phi(t) = k$ é semiestável. (a) $dy/dt \leq 0$; (b) $dy/dt \geq 0$.

- (a) Considere a equação

$$dy/dt = k(1-y)^2, \quad (i)$$

onde k é uma constante positiva. Mostre que $y = 1$ é o único ponto crítico, correspondendo à solução de equilíbrio $\phi(t) = 1$.

- (b) Esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y . Mostre que y é uma função crescente de t para $y < 1$ e para $y > 1$. A reta de fase tem setas apontando tanto acima quanto abaixo de $y = 1$. Assim, soluções abaixo da solução de equilíbrio aproximam-se dela, enquanto as soluções acima se afastam dela. Portanto, $\phi(t) = 1$ é semiestável.
- (c) Resolva a Eq. (i) sujeita à condição inicial $y(0) = y_0$ e confirme as conclusões do item (b).

Os Problemas de 8 a 13 envolvem equações da forma $dy/dt = f(y)$. Em cada problema, esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y , determine os pontos críticos (de equilíbrio) e classifique cada um como sendo assintoti-

¹³Veja, por exemplo, Oliver L. Austin Jr., *Birds of the World* (New York: Golden Press, 1983), pp. 143-145.

camente estável, instável ou semiestável (veja o Problema 7). Desenhe a reta de fase e esboce diversos gráficos de soluções no plano ty .

8. $dy/dt = -k(y-1)^2$, $k > 0$, $-\infty < y_0 < \infty$
9. $dy/dt = y^2(y^2 - 1)$, $-\infty < y_0 < \infty$
10. $dy/dt = y(1 - y^2)$, $-\infty < y_0 < \infty$
11. $dy/dt = ay - b\sqrt{y}$, $a > 0$, $b > 0$, $y_0 \geq 0$
12. $dy/dt = y^2(4 - y^2)$, $-\infty < y_0 < \infty$
13. $dy/dt = y^2(1 - y)^2$, $-\infty < y_0 < \infty$
14. Considere a equação $dy/dt = f(y)$ e suponha que y_1 é um ponto crítico, isto é, $f(y_1) = 0$. Mostre que a solução de equilíbrio $\phi(t) = y_1$ é assintoticamente estável se $f'(y_1) < 0$ e é assintoticamente instável se $f'(y_1) > 0$.
15. Suponha que determinada população obedece à equação logística $dy/dt = ry[1 - (y/K)]$.
 - (a) Se $y_0 = K/3$, encontre o instante τ no qual a população inicial dobrou. Encontre o valor de τ para $r = 0,025$ por ano.
 - (b) Se $y_0/K = \alpha$, encontre o instante T no qual $y(T)/K = \beta$, onde $0 < \alpha, \beta < 1$. Observe que $T \rightarrow \infty$ quando $\alpha \rightarrow 0$ ou $\beta \rightarrow 1$. Encontre o valor de T para $r = 0,025$ por ano, $\alpha = 0,1$ e $\beta = 0,9$.
16. Outra equação usada para modelar o crescimento populacional é a equação de Gompertz¹⁴

$$dy/dt = ry \ln(K/y),$$

onde r e K são constantes positivas.

- (a) Esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y , encontre os pontos críticos e determine se cada um deles é assintoticamente estável ou instável.
 - (b) Para $0 \leq y \leq K$, determine onde o gráfico de y em função de t é convexo e onde é côncavo.
 - (c) Para cada y tal que $0 < y \leq K$, mostre que dy/dt , como dado pela equação de Gompertz, nunca é menor do que dy/dt , como dado pela equação logística.
17. (a) Resolva a equação de Gompertz

$$dy/dt = ry \ln(K/y),$$

sujeita à condição inicial $y(0) = y_0$.

Sugestão: você pode querer definir $u = \ln(y/K)$.

- (b) Para os dados no Exemplo 1 do texto ($r = 0,71$ por ano, $K = 80,5 \times 10^6$ kg, $y_0/K = 0,25$), use o modelo de Gompertz para encontrar o valor previsto de $y(2)$.
 - (c) Para os mesmo dados do item (b), use o modelo de Gompertz para encontrar o instante τ no qual $y(\tau) = 0,75K$.
18. Um lago é formado quando a água se acumula em uma depressão cônica de raio a e profundidade h . Suponha que a água flui para dentro a uma taxa constante k e é perdida por evaporação a uma taxa proporcional à área de superfície.
- (a) Mostre que o volume $V(t)$ de água no lago em qualquer instante t satisfaz a equação diferencial

$$dV/dt = k - \alpha\pi(3a/\pi h)^{2/3}V^{2/3},$$

onde α é o coeficiente de evaporação.

- (b) Encontre a profundidade de equilíbrio de água no lago. Esse equilíbrio é assintoticamente estável?
 - (c) Encontre uma condição que tem que ser satisfeita para o lago não transbordar.
19. Considere um tanque de água cilíndrico de seção reta constante A . Água é bombeada para o tanque a uma taxa constante k e sai através de um pequeno furo de área a no fundo do tanque. Do princípio de Torricelli em hidrodinâmica (veja o Problema 6 na Seção 2.3), segue que a taxa de fluxo da água através do furo é $\alpha a\sqrt{2gh}$, onde h é a profundidade atual da água, g é a aceleração devido à gravidade e α é um coeficiente de contração que satisfaz $0,5 \leq \alpha \leq 1,0$.
- (a) Mostre que a profundidade de água no tanque em qualquer instante satisfaz a equação

$$dh/dt = (k - \alpha a\sqrt{2gh})/A.$$

- (b) Determine a profundidade de equilíbrio h_e da água e mostre que ela é assintoticamente estável. Observe que h_e não depende de A .

¹⁴Benjamin Gompertz (1779-1865) foi um atuário inglês. Ele desenvolveu seu modelo de crescimento populacional, publicado em 1825, durante a construção de tabelas de mortalidade para sua companhia de seguros.

Administrando um Recurso Renovável. Suponha que a população y de determinada espécie de peixe (por exemplo, atum ou linguado gigante) em certa área do oceano é descrita pela equação logística

$$dy/dt = r(1 - y/K)y.$$

Embora seja desejável utilizar essa fonte de alimento, intuitivamente é claro que a população de peixes pode ser reduzida a um nível abaixo do útil, se forem pescados peixes demais, podendo até ser levada à extinção. Os Problemas 20 e 21 exploram algumas das questões envolvidas na formulação de uma estratégia racional para administrar a pescaria.¹⁵

20. Para determinado nível de empenho, é razoável supor que a taxa segundo a qual são pegos os peixes depende da população y ; quanto mais peixes existirem, mais fácil será pegá-los. Vamos supor então que a taxa segundo a qual os peixes são pegos é dada por Ey , onde E é uma constante positiva, com unidades iguais ao inverso do tempo, que mede o empenho total feito para administrar a espécie de peixe em consideração. Para incluir esse efeito, a equação logística é substituída por

$$dy/dt = r(1 - y/K)y - Ey. \quad (i)$$

Essa equação é conhecida como **modelo de Schaefer**, em honra ao biologista M. B. Schaefer, que a aplicou a populações de peixes.

- Mostre que, se $E < r$, então existem dois pontos de equilíbrio, $y_1 = 0$ e $y_2 = K(1 - E/r) > 0$.
 - Mostre que $y = y_1$ é instável e que $y = y_2$ é assintoticamente estável.
 - Uma produção sustentável Y de pescaria é uma taxa segundo a qual os peixes podem ser pescados indefinidamente. É o produto do empenho E com a população assintoticamente estável y_2 . Encontre Y em função do esforço E ; o gráfico desta função é conhecido como a curva produção-empenho.
 - Determine E de modo a maximizar Y encontrando, assim, a **produção máxima sustentável** Y_m .
21. Neste problema vamos supor que os peixes são pegos a uma taxa constante h independentemente do tamanho da população. Então y satisfaz

$$dy/dt = r(1 - y/K)y - h. \quad (i)$$

A hipótese de que a taxa de pesca h é constante pode ser razoável quando y é muito grande, mas torna-se menos razoável quando y é pequeno.

- Se $h < rK/4$, mostre que a Eq. (i) tem dois pontos de equilíbrio y_1 e y_2 com $y_1 < y_2$; determine esses pontos.
- Mostre que y_1 é instável e que y_2 é assintoticamente estável.
- Analisando o gráfico de $f(y)$ em função de y , mostre que se a população inicial $y_0 > y_1$, então $y \rightarrow y_2$ quando $t \rightarrow \infty$, mas se $y_0 < y_1$ então y diminui quando t aumenta. Note que $y = 0$ não é um ponto de equilíbrio, de modo que se $y_0 < y_1$ a população será extinta em um tempo finito.
- Se $h > rK/4$, mostre que y diminui até zero quando t aumenta, independentemente do valor de y_0 .
- Se $h = rK/4$, mostre que existe um único ponto de equilíbrio $y = K/2$ e que este ponto é semiestável (veja o Problema 7). Logo, a produção máxima sustentável é $h_m = rK/4$, correspondendo ao valor de equilíbrio $y = K/2$. Note que h_m tem o mesmo valor que Y_m no Problema 20(d). A pescaria é considerada superexplorada se y se reduzir a um nível abaixo de $K/2$.

Epidemias. A utilização de métodos matemáticos para estudar a disseminação de doenças contagiosas vem desde a década de 1760, pelo menos, quando Daniel Bernoulli fez um trabalho relativo à varíola. Em anos mais recentes, muitos modelos matemáticos foram propostos e estudados para diversas doenças diferentes.¹⁶ Os Problemas de 22 a 24 tratam alguns dos modelos mais simples, e as conclusões que podem ser tiradas deles. Modelos semelhantes também têm sido usados para descrever a disseminação de boatos e produtos de consumo.

22. Suponha que uma dada população pode ser dividida em duas partes: os que têm uma determinada doença e podem infectar outros, e os que não têm, mas são suscetíveis. Seja x a proporção de indivíduos suscetíveis e y a proporção de indivíduos infectados; então $x + y = 1$. Suponha que a doença se espalha através do contato entre os elementos doentes da população e os são, e que a taxa de disseminação dy/dt é proporcional ao número de tais contatos. Além disso, suponha que os elementos de ambos os grupos movem-se livre-

¹⁵Um excelente tratamento desse tipo de problema, que vai muito mais longe do esboçado aqui, pode ser encontrado no livro de Clark mencionado anteriormente, em especial nos dois primeiros capítulos. Diversas referências adicionais são citadas ali.

¹⁶Uma fonte-padrão é o livro de autoria de Bailey, listado nas referências. Os modelos nos Problemas de 22 a 24 estão discutidos neste livro nos Capítulos 5, 10 e 20, respectivamente.

mente, de modo que o número de contatos é proporcional ao produto de x e y . Como $x = 1 - y$, obtemos o problema de valor inicial

$$dy/dt = \alpha y(1 - y), \quad y(0) = y_0, \quad (i)$$

onde α é um fator de proporcionalidade positivo e y_0 é a proporção inicial de indivíduos infectados.

- (a) Encontre os pontos de equilíbrio para a equação diferencial (i) e determine se cada um deles é assintoticamente estável, semiestável ou instável.
- (b) Resolva o problema de valor inicial (i) e verifique que as conclusões a que você chegou no item (a) estão corretas. Mostre que $y(t) \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow \infty$, o que significa que, finalmente, a população inteira ficará doente.
23. Algumas doenças (como tifo) são disseminadas por *portadores*, indivíduos que podem transmitir a doença, mas que não exibem sintomas aparentes. Sejam x e y , respectivamente, as proporções de suscetíveis e portadores na população. Suponha que os portadores são identificados e removidos da população a uma taxa β , de modo que

$$dy/dt = -\beta y. \quad (i)$$

Suponha, também, que a doença se espalha a uma taxa proporcional ao produto de x e y ; logo,

$$dx/dt = -\alpha xy. \quad (ii)$$

- (a) Determine y em qualquer instante de tempo t resolvendo a Eq. (i) sujeita à condição inicial $y(0) = y_0$.
- (b) Use o resultado do item (a) para encontrar x em qualquer instante t resolvendo a Eq. (ii) sujeita à condição inicial $x(0) = x_0$.
- (c) Encontre a proporção da população que escapa da epidemia encontrando o valor-limite de x quando $t \rightarrow \infty$.
24. O trabalho de Daniel Bernoulli em 1760 tinha como objetivo avaliar o quão efetivo estava sendo um programa controverso de inoculação contra a varíola, que era um grande problema de saúde pública na época. Seu modelo se aplica igualmente bem a qualquer outra doença que, uma vez adquirida, se o paciente sobreviver ganha imunidade para o resto da vida.

Considere o conjunto de indivíduos nascidos em um dado ano ($t = 0$) e seja $n(t)$ o número desses indivíduos que sobrevivem t anos depois. Seja $x(t)$ o número de elementos desse conjunto que ainda não tiveram varíola até o ano t e que são, portanto, suscetíveis. Seja β a taxa segundo a qual indivíduos suscetíveis contraem varíola e seja v a taxa segundo a qual pessoas que contraem varíola morrem da doença. Finalmente, seja $\mu(t)$ a taxa de morte por qualquer outro motivo diferente da varíola. Então dx/dt , a taxa segundo a qual o número de indivíduos suscetíveis varia, é dada por

$$dx/dt = -[\beta + \mu(t)]x. \quad (i)$$

O primeiro termo na expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (i) é a taxa segundo a qual os indivíduos suscetíveis contraem a doença, e o segundo termo é a taxa segundo a qual eles morrem de outras causas. Temos também

$$dn/dt = -v\beta x - \mu(t)n, \quad (ii)$$

onde dn/dt é a taxa de mortalidade do conjunto inteiro e os dois termos à direita do sinal de igualdade são devidos à varíola e às outras causas, respectivamente.

- (a) Seja $z = x/n$, e mostre que z satisfaz o problema de valor inicial

$$dz/dt = -\beta z(1 - vz), \quad z(0) = 1. \quad (iii)$$

Observe que o problema de valor inicial (iii) não depende de $\mu(t)$.

- (b) Encontre $z(t)$ resolvendo a Eq. (iii).
- (c) Bernoulli estimou que $v = \beta = 1/8$. Usando esses valores, determine a proporção de indivíduos com 20 anos que ainda não tiveram varíola.

Nota: baseado no modelo que acabamos de descrever e nos melhores dados de mortalidade disponíveis na época, Bernoulli calculou que se as mortes devidas à varíola pudessem ser eliminadas ($v = 0$), então se poderia adicionar aproximadamente 3 anos à expectativa média de vida (em 1760) de 26 anos e 7 meses. Portanto, ele apoiou o programa de inoculação.

Pontos de Bifurcação. Para uma equação da forma

$$dy/dt = f(a, y), \quad (i)$$

onde a é um parâmetro real, os pontos críticos (soluções de equilíbrio) dependem, em geral, do valor de a . Quando a aumenta ou diminui constantemente, acontece muitas vezes que para um determinado valor de a , chamado de **ponto de bifurcação**, os pontos críticos se juntam ou se separam, e soluções de equilíbrio podem ser perdidas ou podem aparecer. Pontos de bifurcação são de grande interesse em muitas aplicações porque, perto deles, a natureza das soluções da equação diferencial subjacente muda bruscamente. Por exemplo, em mecânica dos fluidos um fluxo suave (laminar) pode se dispersar e se tornar turbulento. Ou uma coluna com carga axial pode empenar, subitamente, e exibir um grande deslocamento lateral. Ou, quando a quantidade de um dos produtos químicos em uma mistura aumentar, podem aparecer subitamente padrões de diversas cores em ondas espirais em um fluido originalmente quieto. Os Problemas de 25 a 27 descrevem três tipos de bifurcação que podem ocorrer em equações simples da forma (i).

25. Considere a equação

$$dy/dt = a - y^2. \quad (\text{ii})$$

- Encontre todos os pontos críticos da Eq. (ii). Note que não existem pontos críticos se $a < 0$, existe um ponto crítico se $a = 0$ e existem dois pontos críticos se $a > 0$.
- Desenhe a reta de fase em cada caso e determine se cada ponto crítico é assintoticamente estável, semiestável ou instável.
- Em cada caso, desenhe diversas soluções da Eq. (ii) no plano ty .
- Se fizermos o gráfico da localização dos pontos críticos em função de a no plano ay , obteremos a Figura 2.5.10, chamada de **diagrama de bifurcação** para a Eq. (ii). A bifurcação em $a = 0$ é chamada de bifurcação **nó de sela**. Esse nome é mais natural no contexto de sistemas de segunda ordem, que serão discutidos no Capítulo 9.

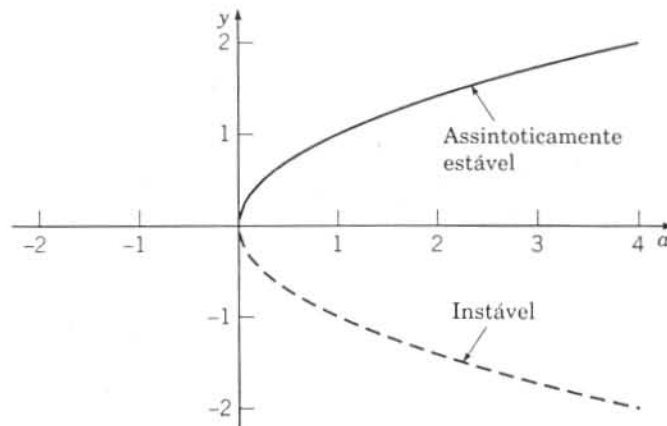


FIGURA 2.5.10 Diagrama de bifurcação para $y' = a - y^2$.

26. Considere a equação

$$dy/dt = ay - y^3 = y(a - y^2). \quad (\text{iii})$$

- Considere, novamente, os casos $a < 0$, $a = 0$ e $a > 0$. Em cada caso, encontre os pontos críticos, desenhe a reta de fase e determine se cada ponto crítico é assintoticamente estável, semiestável ou instável.
- Em cada caso, esboce diversas soluções da Eq. (iii) no plano ty .
- Desenhe o diagrama de bifurcação para a Eq. (iii), isto é, faça o gráfico da localização dos pontos críticos em função de a . Para a Eq. (iii), o ponto de bifurcação em $a = 0$ é chamado de **bifurcação tridente**; seu diagrama pode sugerir porque este nome é apropriado.

27. Considere a equação

$$dy/dt = ay - y^2 = y(a - y). \quad (\text{iv})$$

- Considere, novamente, os casos $a < 0$, $a = 0$ e $a > 0$. Em cada caso, encontre os pontos críticos, desenhe a reta de fase e determine se cada ponto crítico é assintoticamente estável, semiestável ou instável.
- Em cada caso, esboce diversas soluções da Eq. (iv) no plano ty .
- Desenhe o diagrama de bifurcação para a Eq. (iv). Note que, para a Eq. (iv), o número de pontos críticos é o mesmo para $a < 0$ e para $a > 0$, mas mudou a estabilidade deles. Para $a < 0$, a solução de equilíbrio $y = 0$ é assintoticamente estável e $y = a$ é instável, enquanto para $a > 0$ a situação se inverte.

Logo, há uma **mudança de estabilidade** quando a passa pelo ponto de bifurcação $a = 0$. Esse tipo de bifurcação é chamado de **bifurcação transcritical**.

28. **Reações Químicas.** Uma reação química de segunda ordem envolve a interação (colisão) de uma molécula de uma substância P com uma molécula de uma substância Q para produzir uma molécula de uma nova substância X ; isso é denotado por $P + Q \rightarrow X$. Suponha que p e q , onde $p \neq q$, são as concentrações iniciais de P e de Q , respectivamente, e seja $x(t)$ a concentração de X no instante t . Então, $p - x(t)$ e $q - x(t)$ são as concentrações de P e de Q no instante t , e a taxa segundo a qual a reação ocorre é dada pela equação

$$dx/dt = \alpha(p - x)(q - x), \quad (\text{i})$$

onde α é uma constante positiva.

- (a) Se $x(0) = 0$, determine o valor limite de $x(t)$ quando $t \rightarrow \infty$ sem resolver a equação diferencial. Depois resolva o problema de valor inicial e encontre $x(t)$ para qualquer t .
 (b) Se as substâncias P e Q são idênticas, então $p = q$ e a Eq. (i) é substituída por

$$dx/dt = \alpha(p - x)^2. \quad (\text{ii})$$

Se $x(0) = 0$, determine o valor-limite de $x(t)$ quando $t \rightarrow \infty$ sem resolver a equação diferencial. Depois resolva o problema de valor inicial e encontre $x(t)$ para qualquer t .

2.6 Equações Exatas e Fatores Integrantes

Para equações de primeira ordem existem diversos métodos de integração aplicáveis a várias classes de problemas. As mais importantes são as equações lineares e as separáveis, que discutimos anteriormente. Vamos considerar aqui uma classe de equações, conhecidas como equações exatas, para as quais também existe um método bem definido de solução. Lembre-se, no entanto, de que essas equações de primeira ordem que podem ser resolvidas por métodos de integração elementares são bastante especiais; a maioria das equações de primeira ordem não pode ser resolvida dessa maneira.

EXEMPLO

1

Resolva a equação diferencial

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0. \quad (1)$$

A equação não é linear nem separável, de modo que não podemos aplicar aqui os métodos adequados para esses tipos de equações. Entretanto, note que a função $\psi(x, y) = x^2 + xy^2$ tem a propriedade que

$$2x + y^2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad 2xy = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (2)$$

Portanto, a equação diferencial pode ser escrita como

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (3)$$

Supondo que y é uma função de x e usando a regra da cadeia, podemos escrever a Eq. (3) na forma equivalente

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + xy^2) = 0. \quad (4)$$

Portanto,

$$\psi(x, y) = x^2 + xy^2 = c, \quad (5)$$

onde c é uma constante arbitrária, é uma equação que define as soluções da Eq. (1) implicitamente.

Ao resolver a Eq. (1), o passo-chave foi o reconhecimento de que existe uma função ψ que satisfaz a Eq. (2). Mais geralmente, considere a equação diferencial

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0. \quad (6)$$

Suponha que podemos identificar uma função ψ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) = N(x, y), \quad (7)$$

e tal que $\psi(x, y) = c$ define $y = \phi(x)$ implicitamente como uma função diferenciável de x . Então

$$M(x, y) + N(x, y)y' = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \psi[x, \phi(x)]$$

e a equação diferencial (6) fica

$$\frac{d}{dx} \psi[x, \phi(x)] = 0. \quad (8)$$

Nesse caso, a Eq. (6) é dita uma equação diferencial **exata**. Soluções da Eq. (6), ou da equação equivalente (8), são dadas implicitamente por

$$\psi(x, y) = c, \quad (9)$$

onde c é uma constante arbitrária.

No Exemplo 1 foi relativamente fácil ver que a equação diferencial era exata e, de fato, foi fácil encontrar sua solução reconhecendo-se a função desejada ψ . Para equações mais complicadas pode não ser possível fazer isso tão facilmente. O teorema a seguir nos fornece um modo sistemático de determinar se uma determinada equação diferencial é exata.

Teorema 2.6.1

Suponha que as funções M, N, M_y e N_x , onde os índices denotam derivadas parciais, são contínuas em uma região retangular¹⁷ $R: \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$. Então a Eq. (6)

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

é uma equação diferencial exata em R se, e somente se,

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \quad (10)$$

em cada ponto de R . Isto é, existe uma função ψ satisfazendo as Eqs. (7),

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \quad \psi_y(x, y) = N(x, y),$$

se, e somente se, M e N satisfazem a Eq. (10).

A demonstração desse teorema tem duas partes. Primeiro, vamos mostrar que, se existe uma função ψ tal que as Eqs. (7) são verdadeiras, então a Eq. (10) é satisfeita. Calculando M_y e N_x das Eqs. (7), obtemos

$$M_y(x, y) = \psi_{xy}(x, y), \quad N_x(x, y) = \psi_{yx}(x, y). \quad (11)$$

Como M_y e N_x são contínuas, segue que ψ_{xy} e ψ_{yx} também são. Isso garante a igualdade dessas funções, e a Eq. (10) segue.

Vamos mostrar agora que se M e N satisfazem a Eq. (10), então a Eq. (6) é exata. A demonstração envolve a construção de uma função ψ satisfazendo as Eqs. (7)

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \quad \psi_y(x, y) = N(x, y).$$

Começamos integrando a primeira das Eqs. (7) em relação a x , mantendo y constante. Obtemos

$$\psi(x, y) = Q(x, y) + g(y), \quad (12)$$

onde $Q(x, y)$ é qualquer função diferenciável tal que $\partial Q(x, y)/\partial x = M(x, y)$. Por exemplo, poderíamos escolher

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y) ds, \quad (13)$$

onde x_0 é alguma constante especificada com $\alpha < x_0 < \beta$. A função g na Eq. (12) é uma função diferenciável arbitrária de y , fazendo o papel da constante de integração. Agora precisamos mostrar que sempre

¹⁷Não é essencial que a região seja retangular, só que seja simplesmente conexa. Em duas dimensões isso significa que não há buracos em seu interior. Assim, por exemplo, regiões circulares ou retangulares são simplesmente conexas, mas regiões anulares não. Maiores detalhes podem ser encontrados na maioria dos livros de cálculo avançado.

é possível escolher $g(y)$ de modo que a segunda das equações em (7) seja satisfeita, isto é, que $\psi_y = N$. Derivando a Eq. (12) em relação a y e igualando o resultado a $N(x,y)$, obtemos

$$\psi_y(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) + g'(y) = N(x,y).$$

Então, resolvendo para $g'(y)$, temos

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y). \quad (14)$$

Para que possamos determinar $g(y)$ da Eq. (14), a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (14), apesar de sua aparência, tem que ser uma função só de y . Para verificar que isso é verdade, podemos derivar a quantidade em questão em relação a x , obtendo

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y). \quad (15)$$

Trocando a ordem das derivadas na segunda parcela da Eq. (15), temos

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y),$$

ou, como $\partial Q/\partial x = M$,

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y),$$

que é zero devido à Eq. (10). Logo, apesar de sua forma aparente, a expressão à direita da Eq. (14) não depende, de fato, de x . Assim, encontramos $g(y)$ integrando a Eq. (14); substituindo essa função na Eq. (12), obtemos a função desejada $\psi(x,y)$. Isso completa a demonstração do Teorema 2.6.1.

É possível obter uma expressão explícita para $\psi(x,y)$ em termos de integrais (veja o Problema 17), mas ao resolver equações exatas específicas em geral é mais simples e fácil repetir o procedimento usado na demonstração precedente. Ou seja, integramos $\psi_x = M$ em relação a x , incluímos uma função arbitrária $g(y)$ em vez de uma constante arbitrária, depois diferenciamos o resultado em relação a y e o igualamos a N . Finalmente, usamos essa última equação para resolver para $g(y)$. O próximo exemplo ilustra esse procedimento.

EXEMPLO

2

Resolva a equação diferencial

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\sen x + x^2e^y - 1)y' = 0. \quad (16)$$

Calculando M_y e N_x , vemos que

$$M_y(x,y) = \cos x + 2xe^y = N_x(x,y),$$

de modo que a equação dada é exata. Então existe uma $\psi(x,y)$ tal que

$$\psi_x(x,y) = y \cos x + 2xe^y,$$

$$\psi_y(x,y) = \sen x + x^2e^y - 1.$$

Integrando a primeira dessas equações em relação a x , obtemos

$$\psi(x,y) = y \sen x + x^2e^y + g(y). \quad (17)$$

Fazendo $\psi_y = N$, temos

$$\psi_y(x,y) = \sen x + x^2e^y + h'(y) = \sen x + x^2e^y - 1.$$

Assim, $g'(y) = -1$ e $g(y) = -y$. A constante de integração pode ser omitida, já que qualquer solução da equação diferencial precedente é satisfatória; não queremos a mais geral possível. Substituindo $g(y)$ na Eq. (17), obtemos

$$\psi(x,y) = y \sen x + x^2e^y - y.$$

Portanto, as soluções da Eq. (16) são dadas implicitamente por

$$y \sen x + x^2e^y - y = c. \quad (18)$$

EXEMPLO

3

Resolva a equação diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0. \quad (19)$$

Temos

$$M_y(x, y) = 3x + 2y, \quad N_x(x, y) = 2x + y;$$

já que $M_y \neq N_x$, a equação dada não é exata. Para ver que ela não pode ser resolvida pelo procedimento descrito aqui, vamos procurar uma função ψ tal que

$$\psi_x(x, y) = 3xy + y^2, \quad \psi_y(x, y) = x^2 + xy. \quad (20)$$

Integrando a primeira das Eqs. (20) obtemos

$$\psi(x, y) = \frac{3}{2}x^2y + xy^2 + g(y), \quad (21)$$

onde g é uma função arbitrária que só depende de y . Para tentar satisfazer a segunda das Eqs. (20), calculamos ψ_y da Eq. (21) e a igualamos a N , obtendo

$$\frac{3}{2}x^2 + 2xy + g'(y) = x^2 + xy$$

ou

$$g'(y) = -\frac{1}{2}x^2 - xy. \quad (22)$$

Como a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (22) depende tanto de x quanto de y , é impossível resolver a Eq. (22) para $g(y)$. Logo, não há função $\psi(x, y)$ que satisfaça ambas as Eqs. (20).

Fatores Integrantes. Algumas vezes é possível converter uma equação diferencial que não é exata em uma exata multiplicando-se a equação por um fator integrante apropriado. Lembre-se de que esse foi o procedimento que usamos para resolver equações lineares na Seção 2.1. Para investigar a possibilidade de usar essa ideia em um contexto mais geral, vamos multiplicar a equação

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (23)$$

por uma função μ e depois tentar escolher μ de modo que a equação resultante

$$\mu(x, y)M(x, y) dx + \mu(x, y)N(x, y) dy = 0 \quad (24)$$

seja exata. Pelo Teorema 2.6.1, a Eq. (24) é exata se e somente se

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x. \quad (25)$$

Como M e N são funções dadas, a Eq. (25) diz que o fator integrante μ tem que satisfazer a equação diferencial parcial de primeira ordem

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0. \quad (26)$$

Se pudermos encontrar uma função μ satisfazendo a Eq. (26), então a Eq. (24) será exata. A solução da Eq. (24) pode ser obtida, então, pelo método descrito na primeira parte desta seção. A solução encontrada desse modo também satisfaz a Eq. (23), já que podemos dividir a Eq. (24) pelo fator integrante μ .

Uma equação diferencial parcial da forma (26) pode ter mais de uma solução. Nesse caso, qualquer uma delas pode ser usada como um fator integrante para a Eq. (23). Essa possibilidade de não unicidade do fator integrante está ilustrada no Exemplo 4.

Infelizmente, a Eq. (26) que determina o fator integrante μ é, em muitos casos, pelo menos tão difícil de resolver quanto a equação original (23). Portanto, embora em princípio o método de fatores integrantes seja uma ferramenta poderosa para resolver equações diferenciais, na prática só pode ser usado em casos especiais. As situações mais importantes nas quais fatores integrantes simples podem ser encontrados ocorrem quando μ é uma função de só uma das variáveis x ou y , em vez de ambas. Vamos determinar condições necessárias sobre M e N para que a Eq. (23) tenha um fator integrante que só depende de x . Supondo que μ é uma função só de x , temos

$$(\mu M)_y = \mu M_y, \quad (\mu N)_x = \mu N_x + N \frac{d\mu}{dx}.$$

Assim, se $(\mu M)_y$ é igual a $(\mu N)_x$, é necessário que

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N} \mu. \quad (27)$$

Se $(M_y - N_x)/N$ é uma função só de x , então existe um fator integrante μ que também só depende de x . Além disso, μ pode ser encontrado resolvendo-se a Eq. (27), que é linear e separável.

Um procedimento semelhante pode ser usado para se determinar uma condição sob a qual a Eq. (23) tenha um fator integrante que depende só de y ; veja o Problema 23.

EXEMPLO**4**

Encontre um fator integrante para a equação

$$(3xy + y^3) + (x^2 + xy)y' = 0 \quad (19)$$

e depois resolva a equação.

Mostramos, no Exemplo 3, que esta equação não é exata. Vamos determinar se ela tem um fator integrante que só depende de x . Calculando $(M_y - N_x)/N$, vemos que

$$\frac{M_y(x, y) - N_x(x, y)}{N(x, y)} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}. \quad (28)$$

Logo, existe um fator integrante μ que só depende de x e satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}. \quad (29)$$

Então

$$\mu(x) = x. \quad (30)$$

Multiplicando a Eq. (19) por esse fator integrante, obtemos

$$(3x^2y + xy^3) + (x^3 + x^2y)y' = 0. \quad (31)$$

Essa última equação é exata, e é fácil mostrar que suas soluções são dadas implicitamente por

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = c. \quad (32)$$

Soluções explícitas também podem ser encontradas prontamente, já que a Eq. (32) é quadrática em y .

Você pode verificar, também, que um segundo fator integrante para a Eq. (19) é

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xy(2x + y)},$$

e que a mesma solução é obtida, embora com mais dificuldade, se este fator integrante for usado (veja o Problema 32).

PROBLEMAS

Para cada equação nos Problemas de 1 a 12, determine se é ela exata. Se for, encontre a solução.

1. $(2x + 3) + (2y - 2)y' = 0$
2. $(2x + 4y) + (2x - 2y)y' = 0$
3. $(3x^2 - 2xy + 2) dx + (6y^2 - x^2 + 3) dy = 0$
4. $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)y' = 0$
5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax + by}{bx + cy}$
6. $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax - by}{bx - cy}$
7. $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x) dx + (e^x \cos y + 2 \cos x) dy = 0$
8. $(e^x \operatorname{sen} y + 3y) dx - (3x - e^x \operatorname{sen} y) dy = 0$
9. $(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x) dx + (xe^{xy} \cos 2x - 3) dy = 0$
10. $(y/x + 6x) dx + (\ln x - 2) dy = 0, \quad x > 0$
11. $(x \ln y + xy) dx + (y \ln x + xy) dy = 0; \quad x > 0, \quad y > 0$
12. $\frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$

Em cada um dos Problemas 13 e 14, resolva o problema de valor inicial dado e determine, pelo menos aproximadamente, onde a solução é válida.

13. $(2x - y) dx + (2y - x) dy = 0, \quad y(1) = 3$
14. $(9x^2 + y - 1) dx - (4y - x) dy = 0, \quad y(1) = 0$

Em cada um dos Problemas 15 e 16, encontre o valor de b para o qual a equação dada é exata e depois a resolva usando este valor de b .

15. $(xy^2 + bx^2y) dx + (x + y)x^2 dy = 0$

16. $(ye^{2xy} + x) dx + bxe^{2xy} dy = 0$

17. Suponha que a Eq. (6) satisfaz as condições do Teorema 2.6.1 em um retângulo R e é, portanto, exata. Mostre que uma função $\psi(x, y)$ possível é

$$\psi(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y N(x, t) dt,$$

onde (x_0, y_0) é um ponto em R .

18. Mostre que qualquer equação separável

$$M(x) + N(y)y' = 0$$

também é exata.

Em cada um dos Problemas de 19 até 22, mostre que a equação dada não é exata, mas torna-se exata quando multiplicada por um fator integrante. Depois resolva a equação.

19. $x^2y^3 + x(1 + y^2)y' = 0, \quad \mu(x, y) = 1/xy^3$

20. $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right) dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right) dy = 0, \quad \mu(x, y) = ye^x$

21. $y dx + (2x - ye^y) dy = 0, \quad \mu(x, y) = y$

22. $(x + 2)\sin y dx + x \cos y dy = 0, \quad \mu(x, y) = xe^x$

23. Mostre que, se $(N_x - M_y)/M = Q$, onde Q é uma função só de y , então a equação diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tem um fator integrante da forma

$$\mu(y) = \exp \int Q(y) dy.$$

24. Mostre que, se $(N_x - M_y)/(xM - yN) = R$, onde R só depende do produto xy , então a equação diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tem um fator integrante da forma $\mu(xy)$. Encontre uma fórmula geral para este fator integrante.

Em cada um dos Problemas de 25 a 31, encontre um fator integrante e resolva a equação.

25. $(3x^2y + 2xy + y^3) dx + (x^2 + y^2) dy = 0$

26. $y' = e^{2t} + y - 1$

27. $dx + (x/y - \sin y) dy = 0$

28. $y dx + (2xy - e^{-2y}) dy = 0$

29. $e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y) dy = 0$

30. $[4(x^3/y^2) + (3/y)] dx + [3(x/y^2) + 4y] dy = 0$

31. $\left(3x + \frac{6}{y}\right) + \left(\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = 0$

Sugestão: veja o Problema 24.

32. Resolva a equação diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

usando o fator integrante $\mu(x, y) = [xy(2x + y)]^{-1}$. Verifique que a solução é a mesma obtida no Exemplo 4 com um fator integrante diferente.

2.7 Aproximações Numéricas: o Método de Euler

Lembre dois fatos importantes sobre o problema de valor inicial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1)$$

Primeiro, se f e $\partial f / \partial y$ são contínuas, então o problema de valor inicial (1) tem uma única solução $y = \phi(t)$ em algum intervalo contendo o ponto inicial $t = t_0$. Segundo, não é possível, em geral, encontrar a solução

ϕ por manipulações simbólicas da equação diferencial. Consideramos, até agora, as principais exceções a essa última afirmação: equações diferenciais que são lineares, separáveis ou exatas, ou que podem ser transformadas em um desses tipos. Apesar disso, ainda é verdade que soluções da grande maioria de problemas de valor inicial de primeira ordem não podem ser encontradas por métodos analíticos como os considerados na primeira parte deste capítulo.

É importante, portanto, ser capaz de abordar o problema de outras maneiras. Como já vimos, uma dessas maneiras é desenhar o campo de direções para a equação diferencial (o que não envolve resolver a equação) e depois visualizar o comportamento das soluções a partir do campo de direções. Esse método tem a vantagem de ser relativamente simples, mesmo para equações diferenciais complicadas. No entanto, não serve para cálculos quantitativos ou comparações, o que é, muitas vezes, uma deficiência crítica.

Por exemplo, a Figura 2.7.1 mostra um campo de direções para a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 3 - 2t - \frac{1}{2}y. \quad (2)$$

Do campo de direções você pode visualizar o comportamento de soluções no retângulo ilustrado na figura. Uma solução começando em um ponto no eixo dos y inicialmente aumenta com t , mas logo atinge um valor máximo e começa a diminuir enquanto t continua aumentando.

Você também pode observar na Figura 2.7.1 que muitos segmentos de retas tangentes em valores sucessivos de t quase se tocam. Basta só um pouco de imaginação para, começando em um ponto no eixo dos y e unindo os segmentos para valores sucessivos de t na malha, produzir um gráfico linear por partes. Tal gráfico seria aparentemente uma aproximação de uma solução da equação diferencial. Para transformar essa ideia em um método útil de geração de soluções aproximadas precisamos responder a diversas perguntas, inclusive às seguintes:

1. Podemos efetuar essa união de segmentos de retas tangentes de modo sistemático e direto?
2. Em caso afirmativo, a função linear por partes resultante fornece uma aproximação para a solução de fato da equação diferencial?
3. Em caso afirmativo, podemos descobrir a precisão da aproximação? Ou seja, podemos estimar o quão longe a aproximação está da solução?

Ocorre que a resposta a cada uma dessas perguntas é afirmativa. O método resultante foi desenvolvido por Euler em torno de 1768, e é conhecido como o **método da reta tangente**, ou **método de Euler**. Vamos tratar as duas primeiras perguntas nesta seção, mas adiaremos uma discussão sistemática da terceira pergunta até o Capítulo 8.

Para ver como o método de Euler funciona, vamos considerar como poderíamos usar retas tangentes para aproximar a solução $y = \phi(t)$ das Eqs. (1) perto de $t = t_0$. Sabemos que a solução contém o ponto inicial (t_0, y_0) , e da equação diferencial também sabemos que a inclinação nesse ponto é $f(t_0, y_0)$. Podemos então escrever uma equação para a reta tangente à curva-solução em (t_0, y_0) , a saber,

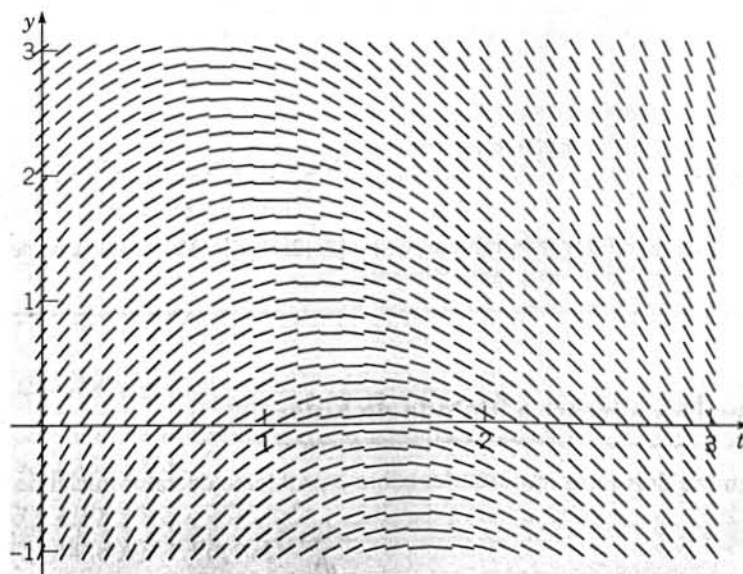


FIGURA 2.7.1 Um campo de direções para a Eq. (2).

$$y = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0). \quad (3)$$

A reta tangente é uma boa aproximação da curva-solução em um intervalo suficientemente pequeno, de modo que a inclinação da solução não varie apreciavelmente de seu valor no ponto inicial; veja a Figura 2.7.2. Ou seja, se t_1 está suficientemente próximo de t_0 , podemos aproximar $\phi(t_1)$ pelo valor y_1 determinado substituindo-se $t = t_1$ na aproximação pela reta tangente em $t = t_0$; assim,

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0). \quad (4)$$

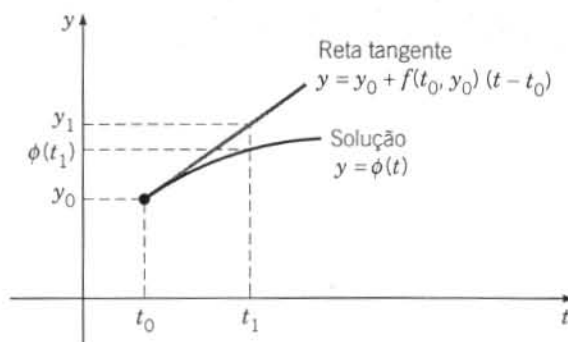


FIGURA 2.7.2 Aproximação pela reta tangente.

Para prosseguir, vamos tentar repetir o processo. Infelizmente não sabemos o valor $\phi(t_1)$ da solução em t_1 . O melhor que podemos fazer é usar o valor aproximado y_1 . Assim, construímos a reta que contém (t_1, y_1) com coeficiente angular $f(t_1, y_1)$,

$$y = y_1 + f(t_1, y_1)(t - t_1). \quad (5)$$

Para aproximar o valor de $\phi(t)$ em um ponto próximo t_2 , usamos a Eq. (5), obtendo

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)(t_2 - t_1). \quad (6)$$

Continuando dessa maneira, usamos o valor de y calculado em cada passo para determinar o coeficiente angular para o próximo passo. A expressão geral para a reta tangente começando em (t_n, y_n) é

$$y = y_n + f(t_n, y_n)(t - t_n); \quad (7)$$

portanto, o valor aproximado y_{n+1} em t_{n+1} em termos de t_n, t_{n+1} e y_n é

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Se introduzirmos a notação $f_n = f(t_n, y_n)$, podemos escrever a Eq. (8) como

$$y_{n+1} = y_n + f_n \cdot (t_{n+1} - t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Finalmente, se supusermos que o tamanho do passo h é constante entre os pontos t_0, t_1, t_2, \dots , então $t_{n+1} = t_n + h$ para cada n e obteríamos a fórmula de Euler na forma

$$y_{n+1} = y_n + f_n h, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Para usar o método de Euler, simplesmente calcule a Eq. (10) ou a Eq. (9) repetidamente, dependendo se o tamanho do passo é constante ou não, usando o resultado de cada passo para executar o próximo passo. Desse modo, você gera uma sequência de valores y_1, y_2, y_3, \dots que aproximam os valores da solução $\phi(t)$ nos pontos t_1, t_2, t_3, \dots . Se você precisa de uma função, em vez de uma sequência de pontos, para aproximar a solução $\phi(t)$, você pode usar a função linear por partes construída da coleção de segmentos de retas tangentes. Ou seja, y é dada no intervalo $[t_0, t_1]$ pela Eq. (7) com $n = 0$, y é dada no intervalo $[t_1, t_2]$ pela Eq. (7) com $n = 1$, e assim por diante.

EXEMPLO

1

Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 3 - 2t - \frac{1}{2}y, \quad y(0) = 1. \quad (11)$$

Use o método de Euler com passos de tamanho $h = 0,02$ para encontrar valores aproximados da solução das Eqs. (11) em $t = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ e 1 . Compare-os com os valores correspondentes da solução exata do problema de valor inicial.

Note que a equação diferencial no problema de valor inicial dado é a que está na Eq. (2). Essa equação é linear, de modo que pode ser resolvida, como na Seção 2.1, usando o fator integrante $e^{t/2}$. A solução resultante do problema de valor inicial (11) é

$$y = \phi(t) = 14 - 4t - 13e^{-t/2}. \quad (12)$$

Para aproximar essa solução pelo método de Euler, note que $f(t, y) = 3 - 2t - y/2$ nesse caso. Usando os valores iniciais $t_0 = 0$ e $y_0 = 1$, encontramos

$$f_0 = f(t_0, y_0) = f(0, 1) = 3 - 0 - 0,5 = 2,5$$

e então, da Eq. (3), a aproximação pela reta tangente perto de $t = 0$ é

$$y = 1 + 2,5(t - 0) = 1 + 2,5t. \quad (13)$$

Fazendo $t = 0,2$ na Eq. (13), encontramos o valor aproximado y_1 da solução em $t = 0,2$, a saber,

$$y_1 = 1 + (2,5)(0,2) = 1,5.$$

No próximo passo, temos

$$f_1 = f(0,2; 1,5) = 3 - 2(0,2) - (0,5)(1,5) = 3 - 0,4 - 0,75 = 1,85.$$

Então a aproximação pela reta tangente perto de $t = 0,2$ é

$$y = 1,5 + 1,85(t - 0,2) = 1,13 + 1,85t. \quad (14)$$

Calculando a expressão na Eq. (14) para $t = 0,4$, obtemos

$$y_2 = 1,13 + 1,85(0,4) = 1,87.$$

Repetindo esse procedimento mais três vezes, obtemos os resultados na Tabela 2.7.1.

A primeira coluna contém os valores de t que aumentam conforme o tamanho do passo $h = 0,2$. A terceira coluna mostra os valores correspondentes de y , calculados pela fórmula de Euler (10). Na quarta coluna estão as aproximações pela reta tangente dadas pela Eq. (7). A segunda coluna contém os valores da solução (12) do problema de valor inicial (11), correta até cinco casas decimais. A solução (12) e a aproximação pela reta tangente também estão desenhadas na Figura 2.7.3.

Da Tabela 2.7.1 e da Figura 2.7.3, vemos que as aproximações dadas pelo método de Euler para este problema são maiores do que os valores correspondentes da solução de fato. Isso ocorre porque o gráfico da solução é côncavo e, portanto, a aproximação pela reta tangente fica acima do gráfico.

TABELA 2.7.1 Resultados do Método de Euler com $h = 0,2$ para $y' = 3 - 2t - \frac{1}{2}y$, $y(0) = 1$

t	Exata	Euler com $h = 0,2$	Reta Tangente
0,0	1,00000	1,00000	$y = 1 + 2,5t$
0,2	1,43711	1,50000	$y = 1,13 + 1,85t$
0,4	1,75650	1,87000	$y = 1,364 + 1,265t$
0,6	1,96936	2,12300	$y = 1,6799 + 0,7385t$
0,8	2,08584	2,27070	$y = 2,05898 + 0,26465t$
1,0	2,11510	2,32363	

A precisão das aproximações neste exemplo não é boa o suficiente para ser satisfatória em uma aplicação científica ou de engenharia típica. Por exemplo, em $t = 1$ o erro na aproximação é $2,32363 - 2,11510 = 0,20853$, que é um erro percentual em torno de 9,86% em relação à solução exata. Um modo de obter resultados mais precisos é usar um tamanho de passo menor, com um aumento correspondente no número de passos a serem calculados. Exploraremos essa possibilidade no próximo exemplo.

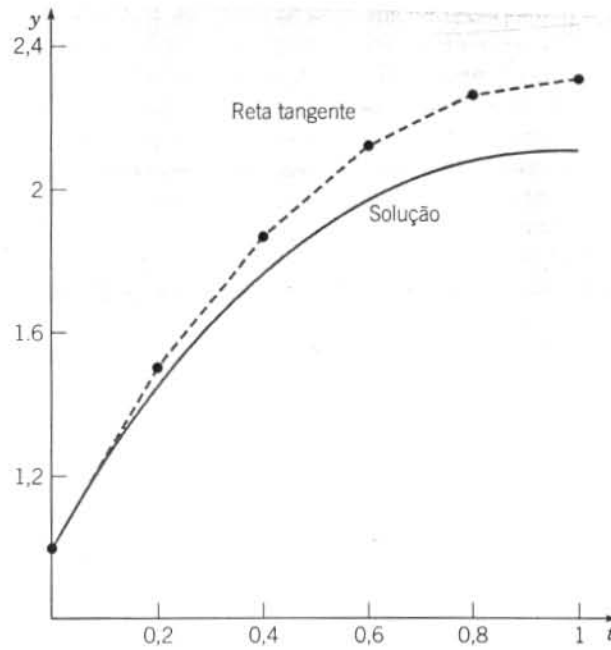


FIGURA 2.7.3 Gráficos da solução e da aproximação pela reta tangente para o problema de valor inicial (11).

É claro que cálculos como os do Exemplo 1 e dos outros exemplos nesta seção são feitos, em geral, em um computador. Alguns pacotes incluem código para o método de Euler, outros não. De qualquer jeito, pode-se escrever facilmente um programa de computador que faça os cálculos necessários para produzir resultados como os da Tabela 2.7.1. Basicamente, o que precisamos é de um laço que calcule a Eq. (10) repetidamente, junto com instruções adequadas para entrada e saída. A saída pode ser uma lista de números, como na Tabela 2.7.1, ou um gráfico, como na Figura 2.7.3. As instruções específicas podem ser escritas em qualquer linguagem de programação de alto nível que você conheça.

EXEMPLO

2

Considere novamente o problema de valor inicial (11)

$$\frac{dy}{dt} = 3 - 2t - \frac{1}{2}y, \quad y(0) = 1.$$

Use o método de Euler com diversos tamanhos de passos para calcular valores aproximados da solução para $0 \leq t \leq 5$. Compare os resultados calculados com os valores correspondentes da solução exata (12)

$$y = \phi(t) = 14 - 4t - 13e^{-t/2}.$$

Usamos passos de tamanho $h = 0,1; 0,05; 0,025$ e $0,01$, correspondendo, respectivamente, a 50, 100, 200 e 500 passos para ir de $t = 0$ até $t = 5$. Os resultados desses cálculos estão apresentados na Tabela 2.7.2, junto com os valores da solução exata. Todos os elementos foram arredondados para quatro casas decimais, embora tenham sido utilizadas mais casas decimais nos cálculos intermediários.

TABELA 2.7.2 Comparação entre a Solução Exata e os Resultados do Método de Euler para Diversos Tamanhos de Passos h para $y' = 3 - 2t - \frac{1}{2}y$, $y(0) = 1$

t	Exata	$h = 0,1$	$h = 0,05$	$h = 0,025$	$h = 0,01$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,0	2,1151	2,2164	2,1651	2,1399	2,1250
2,0	1,2176	1,3397	1,2780	1,2476	1,2295
3,0	-0,9007	-0,7903	-0,8459	-0,8734	-0,8898
4,0	-3,7594	-3,6707	-3,7152	-3,7373	-3,7506
5,0	-7,0671	-7,0003	-7,0337	-7,0504	-7,0604

Que conclusões podemos tirar dos dados na Tabela 2.7.2? A observação mais importante é que para um valor fixo de t os valores aproximados tornam-se mais precisos quando o tamanho do passo h diminui. Você pode

ver isso lendo uma determinada linha na tabela da esquerda para a direita. É claro que isso é o que esperávamos, mas é encorajador que os dados confirmem nossa expectativa. Por exemplo, para $t = 2$ o valor aproximado com $h = 0,1$ é maior por 0,1221 (em torno de 10%), enquanto o valor com $h = 0,01$ é maior por apenas 0,0119 (cerca de 1%). Nesse caso, dividir o tamanho do passo por 10 (executando 10 vezes mais cálculos) também divide o erro por cerca de 10. Comparando os erros para outros pares de valores na tabela, você pode verificar que essa relação entre tamanho do passo e erro também é válida para eles: dividir o tamanho do passo por um número também divide o erro por aproximadamente o mesmo número. Isso significa que, para o método de Euler, o erro é aproximadamente proporcional ao tamanho do passo? É claro que um exemplo não estabelece tal resultado geral, mas é uma conjectura interessante, pelo menos.¹⁸

Uma segunda observação que podemos fazer a partir da Tabela 2.7.2 é que, para um tamanho de passo dado h , as aproximações tornam-se mais precisas quando t aumenta, pelo menos para $t > 2$. Por exemplo, para $h = 0,1$, o erro em $t = 5$ é só de 0,0668, pouco mais de metade do erro em $t = 2$. Voltaremos a esse assunto mais tarde, nesta seção.

O método de Euler parece funcionar bem para este problema. São obtidos resultados razoavelmente bons mesmo para um tamanho de passo moderadamente grande $h = 0,1$, e a aproximação pode ser melhorada diminuindo-se h .

Vamos ver outro exemplo.

EXEMPLO

3

Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 4 - t + 2y, \quad y(0) = 1. \quad (15)$$

A solução geral desta equação diferencial foi encontrada no Exemplo 2 da Seção 2.1, e a solução do problema de valor inicial (15) é

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{11}{4}e^{2t}. \quad (16)$$

Use o método de Euler com diversos tamanhos de passos para encontrar valores aproximados da solução no intervalo $0 \leq t \leq 5$. Compare os resultados com os valores correspondentes da solução (16).

Usando os mesmos tamanhos de passos que no Exemplo 2, obtemos os resultados apresentados na Tabela 2.7.3.

TABELA 2.7.3 Comparação entre a Solução Exata e os Resultados do Método de Euler para Diversos Tamanhos de Passos h para $y' = 4 - t + 2y$, $y(0) = 1$

t	Exata	$h = 0,1$	$h = 0,05$	$h = 0,025$	$h = 0,01$
0,0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
1,0	19,06990	15,77728	17,25062	18,10997	18,67278
2,0	149,3949	104,6784	123,7130	135,5440	143,5835
3,0	1109,179	652,5349	837,0745	959,2580	1045,395
4,0	8197,884	4042,122	5633,351	6755,175	7575,577
5,0	60573,53	25026,95	37897,43	47555,35	54881,32

Os dados na Tabela 2.7.3 confirmam, novamente, nossa expectativa de que para um valor dado de t a precisão aumenta quando o tamanho do passo é reduzido. Por exemplo, para $t = 1$ o erro percentual diminui de 17,3% quando $h = 0,1$ para 2,1% quando $h = 0,01$. Entretanto, o erro aumenta razoavelmente rápido quando t aumenta para um h fixo. Mesmo para $h = 0,01$, o erro em $t = 5$ é de 9,4% e é muito maior para tamanhos de passos maiores. É claro que a precisão necessária depende dos objetivos, mas os erros na Tabela 2.7.3 são grandes demais para a maioria das aplicações em ciências ou engenharia. Para melhorar a situação, poder-se-ia tentar passos menores ou restringir os cálculos a um intervalo bem curto contendo o ponto inicial. Apesar disso, é claro que o método de Euler é muito menos eficaz neste exemplo do que no Exemplo 2.

Para entender melhor o que está acontecendo nesses exemplos, vamos considerar de novo o método de Euler para o problema de valor inicial geral (1)

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

¹⁸Uma discussão mais detalhada dos erros ao se utilizar o método de Euler aparece no Capítulo 8.

cuja solução denotaremos por $\phi(t)$. Lembre-se de que uma equação diferencial de primeira ordem tem uma família infinita de soluções, indexada por uma constante arbitrária c , e que a condição inicial seleciona um elemento dessa família, determinando o valor de c . Assim, na família infinita de soluções, $\phi(t)$ é a que satisfaz a condição inicial $\phi(t_0) = y_0$.

No primeiro passo, o método de Euler usa a aproximação pela reta tangente ao gráfico de $y = \phi(t)$ que contém o ponto inicial (t_0, y_0) , e isso produz o valor aproximado y_1 em t_1 . Em geral, $y_1 \neq \phi(t_1)$, de modo que, no segundo passo, o método de Euler não usa a reta tangente à solução $y = \phi(t)$, usa a reta tangente a uma solução próxima $y = \phi_1(t)$ que contém o ponto (t_1, y_1) . E isso acontece nos passos seguintes. O método de Euler usa uma sucessão de aproximações pelas retas tangentes a uma sequência de soluções diferentes $\phi(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \dots$ da equação diferencial. Em cada passo constrói-se a reta tangente a uma solução contendo o ponto determinado pelo resultado do passo precedente, como ilustrado na Figura 2.7.4. A qualidade da aproximação depois de muitos passos depende fortemente do comportamento do conjunto de soluções contendo os pontos (t_n, y_n) para $n = 1, 2, 3, \dots$

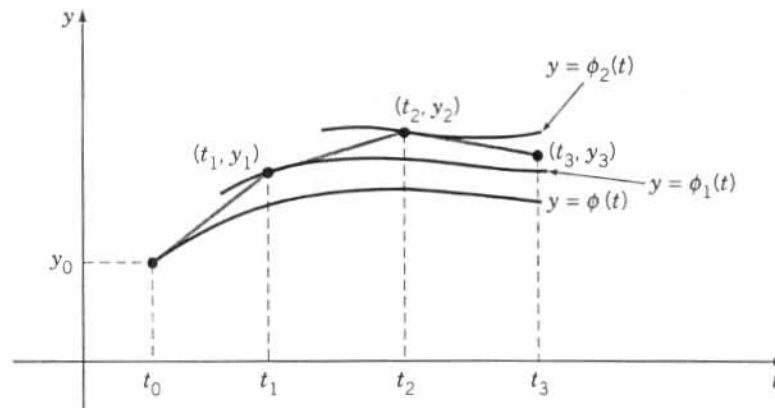


FIGURA 2.7.4 O método de Euler.

No Exemplo 2 a solução geral da equação diferencial era

$$y = 14 - 4t + ce^{-t/2} \quad (17)$$

e a solução do problema de valor inicial (11) correspondia a $c = -13$. A família de soluções (17) é uma família convergente, já que o termo envolvendo a constante arbitrária tende a zero quando $t \rightarrow \infty$. Não faz muita diferença quais soluções estão sendo usadas para o cálculo das retas tangentes no método de Euler, já que todas as soluções estão ficando cada vez mais próximas quando t aumenta.

Por outro lado, no Exemplo 3 a solução geral da equação diferencial era

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + ce^{2t}, \quad (18)$$

e essa é uma família divergente. Note que as soluções correspondendo a dois valores próximos de c tornam-se arbitrariamente longe uma da outra quando t aumenta. Tentamos seguir a solução para $c = 11/4$ no Exemplo 3, mas ao usar o método de Euler em cada passo estávamos seguindo outra solução que se afastava da solução desejada cada vez mais rapidamente com o aumento de t . Isso explica por que os erros no Exemplo 3 são tão maiores que os existentes no Exemplo 2.

Ao usar um procedimento numérico como o método de Euler, você tem que sempre ter em mente o problema da precisão da aproximação, se ela é suficientemente boa para ser útil. Nos exemplos precedentes, a precisão do método numérico pôde ser determinada diretamente por comparação com a solução obtida analiticamente. É claro que, em geral, não existe uma solução analítica disponível quando se usa um método numérico, de modo que é necessário obter cotas, ou, pelo menos, estimativas para o erro que não dependam do conhecimento da solução exata. Você também deve se lembrar de que o melhor que podemos esperar de uma aproximação numérica é que ela reflita o comportamento da solução. Assim, um elemento de uma família divergente de soluções será sempre mais difícil de ser aproximado de que um elemento de uma família convergente.

Se quiser saber mais sobre aproximações numéricas de soluções de problemas de valor inicial, você pode ir diretamente para o Capítulo 8. Apresentamos ali alguma informação sobre a análise de erros e discutimos, também, diversos algoritmos muito mais eficientes computacionalmente do que o método de Euler.

PROBLEMAS

Muitos dos problemas nesta seção requerem cálculos numéricos bastante extensos. A quantidade de cálculos razoável para você depende fortemente do tipo de equipamento computacional que tem. Alguns poucos passos dos cálculos necessários podem ser feitos em praticamente todas as calculadoras – ou até à mão, se necessário. Para fazer mais, será desejável pelo menos uma calculadora programável. E para alguns problemas pode ser necessária a utilização de um computador.

Lembre-se também de que resultados numéricos podem variar um pouco, dependendo de como seu programa foi desenvolvido e de como seu computador calcula as operações aritméticas, os arredondamentos, etc. Pequenas variações na última casa decimal podem aparecer por essas causas, e não indicam que alguma coisa está necessariamente errada. As respostas ao final do livro são dadas com seis casas decimais na maioria dos casos, embora os cálculos intermediários tenham sido feitos com mais casas decimais.

Em cada um dos Problemas de 1 a 4:

- Encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0,1; 0,2; 0,3$ e $0,4$ usando o método de Euler com $h = 0,1$.
- Repita o item (a) com $h = 0,05$. Compare os resultados com os encontrados no item (a).
- Repita o item (a) com $h = 0,025$. Compare os resultados com os encontrados nos itens (a) e (b).
- Encontre a solução $y = \phi(t)$ do problema dado e calcule $\phi(t)$ em $t = 0,1; 0,2; 0,3$ e $0,4$. Compare esses valores com os resultados de (a), (b) e (c).

$$\begin{array}{ll} 1. y' = 3 + t - y, & y(0) = 1 \\ 2. y' = 2y - 1, & y(0) = 1 \\ 3. y' = 0,5 - t + 2y, & y(0) = 1 \\ 4. y' = 3 \cos t - 2y, & y(0) = 0 \end{array}$$

Em cada um dos Problemas de 5 a 10, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada e diga se as soluções estão convergindo ou divergindo.

$$\begin{array}{ll} 5. y' = 5 - 3\sqrt{y} & 6. y' = y(3 - ty) \\ 7. y' = (4 - ty)/(1 + y^2) & 8. y' = -ty + 0,1y^3 \\ 9. y' = t^2 + y^2 & 10. y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2) \end{array}$$

Em cada um dos Problemas de 11 a 14, use o método de Euler para encontrar valores aproximados da solução do problema de valor inicial em $t = 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5$ e 3 .

- Com $h = 0,1$.
- Com $h = 0,05$.
- Com $h = 0,025$.
- Com $h = 0,01$.

$$\begin{array}{ll} 11. y' = 5 - 3\sqrt{y}, & y(0) = 2 \\ 12. y' = y(3 - ty), & y(0) = 0,5 \\ 13. y' = (4 - ty)/(1 + y^2), & y(0) = -2 \\ 14. y' = -ty + 0,1y^3, & y(0) = 1 \end{array}$$

15. Considere o problema de valor inicial

$$y' = 3t^2/(3y^2 - 4), \quad y(1) = 0$$

- Use o método de Euler com $h = 0,1$ para obter valores aproximados da solução em $t = 1,2; 1,4; 1,6$ e $1,8$.
- Repita o item (a) com $h = 0,05$.
- Compare os resultados dos itens (a) e (b). Note que eles estão razoavelmente próximos para $t = 1,2; 1,4$ e $1,6$, mas são muito diferentes para $t = 1,8$. Note também (da equação diferencial) que a reta tangente à solução é paralela ao eixo dos y quando $y = \pm 2/\sqrt{3} \approx \pm 1,155$. Explique como isso pode acarretar tal diferença nos valores calculados.

16. Considere o problema de valor inicial

$$y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 1.$$

Use o método de Euler com $h = 0,1; 0,05; 0,025$ e $0,01$ para explorar a solução deste problema para $0 \leq t \leq 1$. Qual sua melhor estimativa para o valor da solução em $t = 0,8$? E em $t = 1$? Seus resultados estão consistentes com o campo de direções no Problema 9?

17. Considere o problema de valor inicial

$$y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2), \quad y(1) = 2.$$

Use o método de Euler com $h = 0,1; 0,05; 0,025$ e $0,01$ para explorar a solução deste problema para $1 \leq t \leq 3$. Qual sua melhor estimativa para o valor da solução em $t = 2,5$? E em $t = 3$? Seus resultados estão consistentes com o campo de direções no Problema 10?

18. Considere o problema de valor inicial

$$y' = -ty + 0,1y^3, \quad y(0) = \alpha,$$

onde α é um número dado.

- (a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial (ou examine de novo o campo no Problema 8). Observe que existe um valor crítico de α no intervalo $2 \leq \alpha \leq 3$ que separa as soluções convergentes das divergentes. Chame esse valor crítico de α_0 .
- (b) Use o método de Euler com $h = 0,01$ para estimar α_0 . Faça isso restringindo α_0 a um intervalo $[a, b]$ onde $b - a = 0,01$.

19. Considere o problema de valor inicial

$$y' = y^2 - t^2, \quad y(0) = \alpha,$$

onde α é um número dado.

- (a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial. Observe que existe um valor crítico de α no intervalo $0 \leq \alpha \leq 1$ que separa as soluções convergentes das divergentes. Chame esse valor crítico de α_0 .
- (b) Use o método de Euler com $h = 0,01$ para estimar α_0 . Faça isso restringindo α_0 a um intervalo $[a, b]$ onde $b - a = 0,01$.

20. **Convergência do Método de Euler.** Pode-se mostrar que, sob condições adequadas para f , a aproximação numérica gerada pelo método de Euler para o problema de valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ converge para a solução exata quando o tamanho h do passo diminui. Isso está ilustrado no exemplo a seguir. Considere o problema de valor inicial

$$y' = 1 - t + y, \quad y(t_0) = y_0.$$

- (a) Mostre que a solução exata é $y = \phi(t) = (y_0 - t_0)e^{t-t_0} + t$.
- (b) Usando a fórmula de Euler, mostre que

$$y_k = (1 + h)y_{k-1} + h - ht_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

- (c) Observando que $y_1 = (1 + h)(y_0 - t_0) + t_1$, mostre por indução que

$$y_n = (1 + h)^n(y_0 - t_0) + t_n \quad (i)$$

para cada inteiro positivo n .

- (d) Considere um ponto fixo $t > t_0$ e, para n dado, escolha $h = (t - t_0)/n$. Então $t_n = t$ para todo n . Note também que $h \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Substituindo h na Eq. (i) e fazendo $n \rightarrow \infty$, mostre que $y_n \rightarrow \phi(t)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Sugestão: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a/n)^n = e^a$.

Em cada um dos Problemas de 21 a 23, use a técnica discutida no Problema 20 para mostrar que a aproximação obtida pelo método de Euler converge para a solução exata em qualquer ponto fixo quando $h \rightarrow 0$.

21. $y' = y, \quad y(0) = 1$

22. $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$ *Sugestão:* $y_1 = (1 + 2h)/2 + 1/2$

23. $y' = \frac{1}{2} - t + 2y, \quad y(0) = 1$ *Sugestão:* $y_1 = (1 + 2h) + t_1/2$

2.8 O Teorema de Existência e Unicidade

Vamos discutir, nesta seção, a demonstração do Teorema 2.4.2, o teorema fundamental de existência e unicidade para problemas de valor inicial de primeira ordem. Este teorema diz que, sob certas condições sobre $f(t, y)$, o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (1)$$

tem uma única solução em algum intervalo contendo o ponto t_0 .

Em alguns casos (por exemplo, se a equação diferencial for linear), a existência de uma solução para o problema de valor inicial (1) pode ser estabelecida diretamente resolvendo-se o problema e exibindo-se uma fórmula para a solução. No entanto, essa abordagem não é factível em geral, pois não existe um método de resolução de equações diferenciais que se aplique a todos os casos. Portanto, para o caso geral

é necessário adotar uma abordagem indireta que demonstre a existência de uma solução para as Eq. (1), mas que, normalmente, não fornece um modo prático para encontrá-la. O ponto crucial desse método é a construção de uma sequência de funções que converge a uma função limite satisfazendo o problema de valor inicial, embora os elementos individuais da sequência não o satisfaçam. Como regra geral, é impossível calcular explicitamente mais do que alguns poucos elementos da sequência; portanto, a função limite só pode ser determinada em casos raros. Apesar disso, sob as restrições sobre $f(t, y)$ enunciadas no Teorema 2.4.2 é possível mostrar que a sequência em questão converge e que a função limite tem as propriedades desejadas. O argumento é razoavelmente complicado e depende, em parte, de técnicas e resultados normalmente encontrados pela primeira vez em cursos de cálculo avançado. Em consequência, não entraremos em todos os detalhes da demonstração aqui; indicaremos, no entanto, suas características principais e apontaremos algumas das dificuldades envolvidas.

Em primeiro lugar, note que é suficiente considerar o problema no qual o ponto inicial (t_0, y_0) é a origem; ou seja, vamos considerar o problema

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0. \quad (2)$$

Se for dado algum outro ponto inicial, então sempre podemos fazer uma mudança de variáveis preliminar, correspondendo à translação dos eixos coordenados, que leva o ponto dado (t_0, y_0) para a origem. O teorema de existência e unicidade pode ser enunciado agora da seguinte forma.

Teorema 2.8.1

Se f e $\partial f / \partial y$ são contínuas em um retângulo $R: |t| \leq a, |y| \leq b$, então existe algum intervalo $|t| \leq h \leq a$ no qual existe uma única solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial (2).

Para provar esse teorema, é necessário colocar o problema de valor inicial (2) em uma forma mais conveniente. Se supusermos, temporariamente, que existe uma função $y = \phi(t)$ que satisfaz o problema de valor inicial, então $f[t, \phi(t)]$ é uma função contínua que só depende de t . Logo, podemos integrar $y' = f(t, y)$ do ponto inicial $t = 0$ até um valor arbitrário de t , obtendo

$$\phi(t) = \int_0^t f[s, \phi(s)] ds, \quad (3)$$

onde usamos a condição inicial $\phi(0) = 0$. Usamos também s para denotar a variável de integração.

Como a Eq. (3) contém uma integral da função desconhecida ϕ , ela é chamada de **equação integral**. Essa equação integral não é uma fórmula para a solução do problema de valor inicial, mas fornece outra relação que é satisfeita por qualquer solução das Eq. (2). Reciprocamente, suponha que existe uma função contínua $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação integral (3); então essa função também satisfaz o problema de valor inicial (2). Para mostrar isso, substituamos, primeiro, t por zero na Eq. (3), o que mostra que a condição inicial é satisfeita. Além disso, como o integrando na Eq. (3) é contínuo, segue do teorema fundamental do cálculo que ϕ é diferenciável e $\phi'(t) = f[t, \phi(t)]$. Portanto, o problema de valor inicial e a equação integral são equivalentes, no sentido de que qualquer solução de um desses problemas também é solução do outro. É mais conveniente mostrar que existe uma única solução da equação integral em algum intervalo $|t| \leq h$. A mesma conclusão será válida, então, para o problema de valor inicial.

Um método para mostrar que a equação integral (3) tem uma única solução é conhecido como **método das aproximações sucessivas** ou **método de iteração** de Picard.¹⁹ Ao usar esse método, começamos escolhendo uma função inicial ϕ_0 , arbitrária ou que aproxima, de alguma forma, a solução do problema de valor inicial. A escolha mais simples é

$$\phi_0(t) = 0; \quad (4)$$

então ϕ_0 pelo menos satisfaz a condição inicial nas Eqs. (2), embora, presume-se, não satisfaça a equação diferencial. A próxima aproximação, ϕ_1 , é obtida substituindo-se $\phi_0(s)$ por $\phi(s)$ na integral na Eq. (3) e chamando o resultado dessa operação $\phi_1(t)$. Assim,

$$\phi_1(t) = \int_0^t f[s, \phi_0(s)] ds. \quad (5)$$

¹⁹Charles-Émile Picard (1856-1914), talvez o matemático francês mais importante de sua geração, depois de Henri Poincaré, foi professor da Sorbonne antes dos 30 anos. É conhecido por teoremas importantes em variáveis complexas e geometria algébrica, além de equações diferenciais. Um caso particular do método de aproximações sucessivas foi publicado primeiro por Liouville em 1838. No entanto, o crédito do método é dado em geral a Picard, que o estabeleceu em generalidade e de forma amplamente aplicável em uma série de artigos começando em 1890.

Analogamente, ϕ_2 é obtida de ϕ_1 :

$$\phi_2(t) = \int_0^t f[s, \phi_1(s)] ds, \quad (6)$$

e, em geral,

$$\phi_{n+1}(t) = \int_0^t f[s, \phi_n(s)] ds. \quad (7)$$

Desse modo geramos a sequência de funções $\{\phi_n\} = \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n, \dots$. Cada elemento da sequência satisfaz a condição inicial, mas em geral nenhum deles satisfaz a equação diferencial. No entanto, se em algum estágio, por exemplo, para $n = k$, encontrarmos que $\phi_{k+1}(t) = \phi_k(t)$, então segue que ϕ_k é uma solução da equação integral (3). Portanto, ϕ_k também é solução do problema de valor inicial (2) e a sequência para nesse ponto. Isso não acontece em geral, e é necessário considerar toda a sequência infinita.

Para estabelecer o Teorema 2.8.1, temos que responder a quatro perguntas importantes:

1. Existem todos os elementos da sequência $\{\phi_n\}$, ou o processo pode ter que ser interrompido em algum estágio?
2. A sequência converge?
3. Quais são as propriedades da função limite? Em particular, ela satisfaz a equação integral (3) e, portanto, o problema de valor inicial (2)?
4. Essa é a única solução ou podem existir outras?

Vamos mostrar primeiro como essas perguntas podem ser respondidas em um exemplo específico relativamente simples e comentar, depois, algumas dificuldades que podem ser encontradas no caso geral.

EXEMPLO

1

Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2t(1 + y), \quad y(0) = 0 \quad (8)$$

pelo método de aproximações sucessivas.

Note primeiro que se $y = \phi(t)$, a equação integral correspondente é

$$\phi(t) = \int_0^t 2s[1 + \phi(s)] ds. \quad (9)$$

Se a aproximação inicial for $\phi_0(t) = 0$, temos que

$$\phi_1(t) = \int_0^t 2s[1 + \phi_0(s)] ds = \int_0^t 2s ds = t^2. \quad (10)$$

Analogamente,

$$\phi_2(t) = \int_0^t 2s[1 + \phi_1(s)] ds = \int_0^t 2s[1 + s^2] ds = t^2 + \frac{t^4}{2} \quad (11)$$

e

$$\phi_3(t) = \int_0^t 2s[1 + \phi_2(s)] ds = \int_0^t 2s \left[1 + s^2 + \frac{s^4}{2} \right] ds = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{2 \cdot 3}. \quad (12)$$

As Eqs. (10), (11) e (12) sugerem que

$$\phi_n(t) = t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \dots + \frac{t^{2n}}{n!} \quad (13)$$

para cada $n \geq 1$, e esse resultado pode ser estabelecido por indução matemática da seguinte maneira. A Eq. (13) é certamente verdadeira para $n = 1$; veja a Eq. (10). Precisamos mostrar que, se ela for válida para $n = k$, então também será válida para $n = k + 1$. Temos

$$\begin{aligned} \phi_{k+1}(t) &= \int_0^t 2s[1 + \phi_k(s)] ds \\ &= \int_0^t 2s \left(1 + s^2 + \frac{s^4}{2!} + \dots + \frac{s^{2k}}{k!} \right) ds \\ &= t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \dots + \frac{t^{2k+2}}{(k+1)!}, \end{aligned} \quad (14)$$

e a demonstração por indução está completa.

Os gráficos dos quatro primeiros iterados $\phi_1(t), \dots, \phi_4(t)$ estão ilustrados na Figura 2.8.1. Quando k aumenta, os iterados parecem permanecer próximos em um intervalo gradualmente crescente, sugerindo convergência para uma função limite.

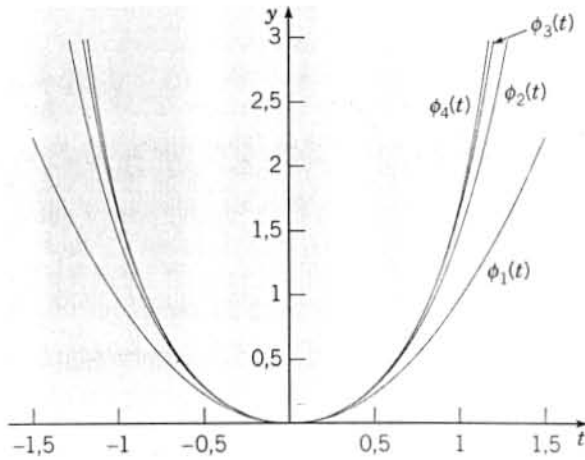


FIGURA 2.8.1 Gráficos de $\phi_1(t), \dots, \phi_4(t)$ para o Exemplo 1.

Segue da Eq. (13) que $\phi_n(t)$ é a n -ésima soma parcial da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!}; \tag{15}$$

logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t)$ existe se e somente se a série (15) converge. Aplicando o teste da razão, vemos que, para cada t ,

$$\left| \frac{t^{2k+2}}{(k+1)!} \frac{k!}{t^{2k}} \right| = \frac{t^2}{k+1} \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty. \tag{16}$$

Logo a série (15) converge para todo t , e sua soma $\phi(t)$ é o limite da sequência $\{\phi_n(t)\}$. Além disso, como a série (15) é uma série de Taylor, ela pode ser diferenciada ou integrada termo a termo desde que t permaneça no intervalo de convergência que, nesse caso, é todo o eixo dos t . Portanto, podemos verificar por cálculos diretos que $\phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^{2k}/k!$ é solução da equação integral (9). De outro modo, substituindo y por $\phi(t)$ nas Eqs. (8) podemos verificar que essa função satisfaz o problema de valor inicial. Nesse exemplo também é possível, a partir da série (15), identificar ϕ em termos de funções elementares, a saber, $\phi(t) = e^{t^2} - 1$. No entanto, isso não é necessário para a discussão de existência e unicidade.

O conhecimento explícito de $\phi(t)$ não torna possível visualizar a convergência da sequência de iterados mais claramente do que fazendo o gráfico de $\phi(t) - \phi_k(t)$ para diversos valores de k . A Figura 2.8.2 mostra essa diferença para $k = 1, \dots, 4$. Essa figura mostra claramente o intervalo gradualmente crescente sobre o qual aproximações sucessivas fornecem uma boa aproximação da solução do problema de valor inicial.

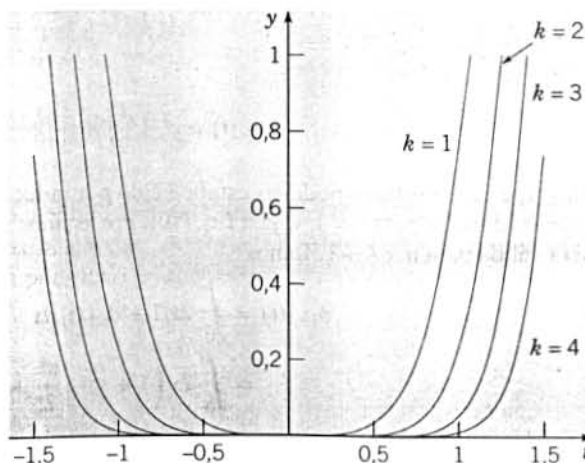


FIGURA 2.8.2 Gráficos de $\phi(t) - \phi_k(t)$ para o Exemplo 1 com $k = 1, \dots, 4$.

Finalmente, para tratar a questão de unicidade, vamos supor que o problema de valor inicial tenha duas soluções, ϕ e ψ . Como ambas, ϕ e ψ , satisfazem a equação integral (9), subtraindo, obtemos

$$\phi(t) - \psi(t) = \int_0^t 2s[\phi(s) - \psi(s)] ds.$$

Tomando valores absolutos, temos, se $t > 0$,

$$|\phi(t) - \psi(t)| = \left| \int_0^t 2s[\phi(s) - \psi(s)] ds \right| \leq \int_0^t 2s|\phi(s) - \psi(s)| ds.$$

Restringindo t ao intervalo $0 \leq t \leq A/2$, onde A é arbitrário, temos $2t \leq A$ e

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq A \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)| ds. \tag{17}$$

Agora é conveniente definir a função U por

$$U(t) = \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)| ds. \tag{18}$$

Então, segue imediatamente que

$$U(0) = 0, \tag{19}$$

$$U(t) \geq 0, \text{ para } t \geq 0. \tag{20}$$

Além disso, U é diferenciável e $U'(t) = |\phi(t) - \psi(t)|$. Portanto, pela Eq. (17),

$$U'(t) - AU(t) \leq 0. \tag{21}$$

A multiplicação da Eq. (21) pela quantidade positiva e^{-At} fornece

$$[e^{-At}U(t)]' \leq 0. \tag{22}$$

Então, integrando a Eq. (22) de zero a t e usando a Eq. (19), obtemos

$$e^{-At}U(t) \leq 0 \text{ para } t \geq 0.$$

Portanto, $U(t) \leq 0$ para $t \geq 0$ e, juntando com a Eq. (20), isso implica que $U(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Assim, $U'(t) \equiv 0$ e, então, $\psi(t) \equiv \phi(t)$, o que contradiz a hipótese original. Em consequência, não pode haver duas soluções diferentes do problema de valor inicial para $t \geq 0$. Uma ligeira modificação desse argumento leva à mesma conclusão para $t \leq 0$.

Voltando ao problema geral de resolução da equação integral (3), vamos considerar rapidamente cada uma das questões levantadas anteriormente:

- Existem todos os elementos da sequência $\{\phi_n\}$? No exemplo, f e $\partial f/\partial y$ eram contínuas em todo o plano ty e cada elemento da sequência podia ser calculado explicitamente. Em contraste, no caso geral supusemos que f e $\partial f/\partial y$ eram contínuas apenas em um retângulo $R: |t| \leq a, |y| \leq b$ (veja a Figura 2.8.3). Além disso, os elementos da sequência não podem, normalmente, ser calculados de modo explícito. O perigo é que em alguma etapa, por exemplo, $n = k$, o gráfico de $y = \phi_k(t)$ contenha pontos fora do retângulo R . Portanto, no próximo passo – no cálculo de $\phi_{k+1}(t)$ – seria necessário calcular a função $f(t, y)$ em pontos onde não sabemos se ela é contínua, ou mesmo se existe. Assim, o cálculo de $\phi_{k+1}(t)$ poderia ser impossível.

Para evitar esse perigo, pode ser necessário restringir t a um intervalo menor do que $|t| \leq a$. Para encontrar tal intervalo, usamos o fato de que uma função contínua em uma região fechada limitada é limitada. Portanto, f é limitada em R ; logo, existe um número positivo M tal que

$$|f(t, y)| \leq M, \quad (t, y) \text{ em } R. \tag{23}$$

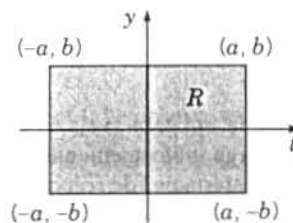


FIGURA 2.8.3 Região de definição para o Teorema 2.8.1.

Mencionamos anteriormente que

$$\phi_n(0) = 0$$

para cada n . Como $f[t, \phi_k(t)]$ é igual a $\phi'_{k+1}(t)$, o coeficiente angular máximo, em valor absoluto, para as retas tangentes ao gráfico da função $y = \phi_{k+1}(t)$ é M . Como esse gráfico contém $(0, 0)$, ele tem que estar contido nas regiões triangulares sombreadas na Figura 2.8.4. Portanto, o ponto $[t, \phi_{k+1}(t)]$ permanece em R , pelo menos enquanto R contiver as regiões triangulares, o que ocorre se $|t| \leq b/M$. Daqui para a frente, vamos considerar apenas o retângulo $D: |t| \leq h, |y| \leq b$, onde h é igual ao menor dos números a ou b/M . Com essa restrição, todos os elementos da sequência $\{\phi_n(t)\}$ existem. Note que, sempre que $b/M < a$, você pode tentar obter um valor maior para h encontrando uma cota melhor (isto é, menor) M para $|f(t, y)|$, se possível.

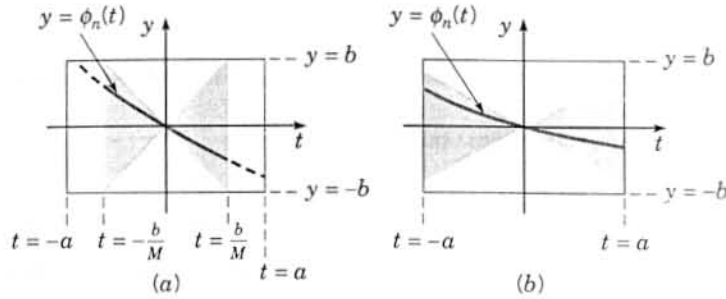


FIGURA 2.8.4 Região na qual estão iterados sucessivos. (a) $b/M < a$; (b) $b/M > a$.

2. A sequência $\{\phi_n\}$ converge? Como no exemplo, podemos identificar $\phi_n(t) = \phi_1(t) + [\phi_2(t) - \phi_1(t)] + \dots + [\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)]$ como a n -ésima soma parcial da série

$$\phi_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)]. \tag{24}$$

A convergência da sequência $\{\phi_n(t)\}$ é estabelecida mostrando-se que a série (24) converge. Para isso, é necessário estimar o módulo $|\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)|$ do termo geral. O argumento usado para isso está indicado nos Problemas de 15 a 18 e será omitido aqui. Supondo que a sequência converge, denotamos a função-limite por ϕ , de modo que

$$\phi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t). \tag{25}$$

3. Quais as propriedades da função limite ϕ ? Em primeiro lugar, gostaríamos de saber que ϕ é contínua. Isso não é, no entanto, uma consequência necessária da convergência da sequência $\{\phi_n(t)\}$, mesmo que cada membro da sequência seja contínuo. Algumas vezes uma sequência de funções contínuas converge a uma função descontínua. Um exemplo simples desse fenômeno é dado no Problema 13. Um modo de provar que ϕ é contínua é mostrar não só que a sequência $\{\phi_n\}$ converge, mas que ela converge de certo modo específico, conhecido como convergência uniforme. Não vamos discutir essa questão aqui; observamos, apenas, que o argumento a que nos referimos no parágrafo 2 é suficiente para estabelecer a convergência uniforme da sequência $\{\phi_n\}$ e, portanto, a continuidade da função limite ϕ no intervalo $|t| \leq h$.

Vamos voltar à Eq. (7)

$$\phi_{n+1}(t) = \int_0^t f[s, \phi_n(s)] ds.$$

Fazendo n tender a ∞ , obtemos

$$\phi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f[s, \phi_n(s)] ds. \tag{26}$$

Gostaríamos de trocar a ordem da integral e do limite na expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (26), de modo a obter

$$\phi(t) = \int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} f[s, \phi_n(s)] ds. \tag{27}$$

Tal troca não é permitida, em geral (veja o Problema 14, por exemplo), mas, mais uma vez, o fato de que a sequência $\{\phi_n(t)\}$ converge uniformemente é suficiente para nos permitir colocar o limite dentro do sinal de integral. A seguir, gostaríamos de colocar o limite dentro da função f , o que nos daria

$$\phi(t) = \int_0^t f[s, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(s)] ds \tag{28}$$

e, portanto,

$$\phi(t) = \int_0^t f[s, \phi(s)] ds. \quad (29)$$

A afirmação

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[s, \phi_n(s)] = f[s, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(s)]$$

é equivalente ao fato de que f é contínua em sua segunda variável, o que é conhecido por hipótese. Logo, a Eq. (29) é válida e a função ϕ satisfaz a equação integral (3). Portanto, ϕ também é solução do problema de valor inicial (2).

4. Existem outras soluções da equação integral (3) além de $y = \phi(t)$? Para mostrar a unicidade da solução $y = \phi(t)$, vamos proceder de maneira semelhante à do exemplo. Primeiro, suponha a existência de outra solução $y = \psi(t)$. Então, é possível mostrar (veja o Problema 19) que a diferença $\phi(t) - \psi(t)$ satisfaz a desigualdade

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq A \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)| ds \quad (30)$$

para $0 \leq t \leq h$ e um número positivo apropriado A . A partir desse ponto o argumento é idêntico ao dado no exemplo, e concluímos que não existe outra solução do problema de valor inicial (2) além da gerada pelo método de aproximações sucessivas.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas 1 e 2, transforme o problema de valor inicial dado em um problema equivalente com ponto inicial na origem.

1. $dy/dt = t^2 + y^2, \quad y(1) = 2$ 2. $dy/dt = 1 - y^3, \quad y(-1) = 3$


Em cada um dos Problemas de 3 a 6, defina $\phi_0(t) = 0$ e use o método das aproximações sucessivas para resolver o problema de valor inicial dado.

- (a) Determine $\phi_n(t)$ para um valor arbitrário de n .
 (b) Faça o gráfico de $\phi_n(t)$ para $n = 1, \dots, 4$. Observe se os iterados parecem estar convergindo.
 (c) Expresse $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \phi(t)$ em termos de funções elementares, isto é, resolva o problema de valor inicial dado.
 (d) Faça o gráfico de $|\phi(t) - \phi_n(t)|$ para $n = 1, \dots, 4$. Para $\phi_1(t), \dots, \phi_4(t)$, estime o intervalo onde cada uma dessas funções é uma aproximação razoavelmente boa para a solução exata.

 3. $y' = 2(y + 1), \quad y(0) = 0$  4. $y' = -y - 1, \quad y(0) = 0$
 5. $y' = -y/2 + t, \quad y(0) = 0$  6. $y' = y + 1 - t, \quad y(0) = 0$

Em cada um dos Problemas 7 e 8, defina $\phi_0(t) = 0$ e use o método das aproximações sucessivas para resolver o problema de valor inicial dado.

- (a) Determine $\phi_n(t)$ para um valor arbitrário de n .
 (b) Faça o gráfico de $\phi_n(t)$ para $n = 1, \dots, 4$. Observe se os iterados parecem estar convergindo.

 7. $y' = ty + 1, \quad y(0) = 0$  8. $y' = t^2y - t, \quad y(0) = 0$

Em cada um dos Problemas 9 e 10, defina $\phi_0(t) = 0$ e use o método das aproximações sucessivas para aproximar a solução do problema de valor inicial dado.

- (a) Calcule $\phi_1(t), \dots, \phi_3(t)$.
 (b) Faça o gráfico de $\phi_1(t), \dots, \phi_3(t)$ e observe se os iterados parecem estar convergindo.

 9. $y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 0$  10. $y' = 1 - y^3, \quad y(0) = 0$

Em cada um dos Problemas 11 e 12, defina $\phi_0(t) = 0$ e use o método das aproximações sucessivas para aproximar a solução do problema de valor inicial dado.

- (a) Calcule $\phi_1(t), \dots, \phi_4(t)$ ou (se necessário) aproximações de Taylor desses iterados. Mantenha termos até a sexta ordem.
 (b) Faça o gráfico das funções encontradas em (a) e observe se elas parecem estar convergindo.

 11. $y' = -\sen y + 1, \quad y(0) = 0$  12. $y' = (3t^2 + 4t + 2)/2(y - 1), \quad y(0) = 0$

13. Seja $\phi_n(x) = x^n$ para $0 \leq x \leq 1$ e mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Este exemplo mostra que uma sequência de funções contínuas pode convergir a uma função limite que é descontínua.

14. Considere a sequência $\phi_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$, $0 \leq x \leq 1$.

(a) Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = 0$ para $0 \leq x < 1$; logo,

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) dx = 0.$$

(b) Mostre que $\int_0^1 2nxe^{-nx^2} dx = 1 - e^{-n}$; então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \phi_n(x) dx = 1.$$

Assim, nesse exemplo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n(x) dx \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) dx,$$

embora $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x)$ exista e seja contínuo.

Nos Problemas de 15 a 18, indicamos como provar que a sequência $\{\phi_n(t)\}$, definida pelas equações de (4) a (7), converge.

15. Se $\partial f / \partial y$ é contínua no retângulo D , mostre que existe uma constante positiva K tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|, \quad (i)$$

onde (t, y_1) e (t, y_2) são dois pontos em D com a mesma coordenada t . Essa desigualdade é conhecida como condição de Lipschitz.²⁰

Sugestão: mantenha t fixo e use o teorema do valor médio em f como função só de y . Escolha K como sendo o valor máximo de $|\partial f / \partial y|$ em D .

16. Se $\phi_{n-1}(t)$ e $\phi_n(t)$ são elementos da sequência $\{\phi_n(t)\}$, use o resultado do Problema 15 para mostrar que

$$|f[t, \phi_n(t)] - f[t, \phi_{n-1}(t)]| \leq K|\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)|.$$

17. (a) Mostre que, se $|t| \leq h$, então

$$|\phi_1(t)| \leq M|t|,$$

onde M é escolhido de modo que $|f(t, y)| \leq M$ para (t, y) em D .

- (b) Use os resultados do Problema 16 e o item (a) deste problema para mostrar que

$$|\phi_2(t) - \phi_1(t)| \leq \frac{MK|t|^2}{2}.$$

- (c) Mostre, por indução matemática, que

$$|\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)| \leq \frac{MK^{n-1}|t|^n}{n!} \leq \frac{MK^{n-1}h^n}{n!}.$$

18. Note que

$$\phi_n(t) = \phi_1(t) + [\phi_2(t) - \phi_1(t)] + \cdots + [\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)].$$

- (a) Mostre que

$$|\phi_n(t)| \leq |\phi_1(t)| + |\phi_2(t) - \phi_1(t)| + \cdots + |\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)|.$$

- (b) Use os resultados do Problema 17 para mostrar que

$$|\phi_n(t)| \leq \frac{M}{K} \left[Kh + \frac{(Kh)^2}{2!} + \cdots + \frac{(Kh)^n}{n!} \right].$$

- (c) Mostre que a soma no item (b) converge quando $n \rightarrow \infty$ e, portanto, a soma no item (a) também converge quando $n \rightarrow \infty$. Conclua, então, que a sequência $\{\phi_n(t)\}$ converge, já que é a sequência das somas parciais de uma série convergente infinita.

²⁰Rudolf Lipschitz (1832-1903), professor da Universidade de Bonn por muitos anos, trabalhou em diversas áreas da matemática. A desigualdade (i) pode substituir a hipótese de continuidade de $\partial f / \partial y$ no Teorema 2.8.1; isso resulta em um teorema ligeiramente mais forte.

19. Vamos tratar, neste problema, a questão de unicidade de solução para a equação integral (3)

$$\phi(t) = \int_0^t f[s, \phi(s)] ds.$$

(a) Suponha que ϕ e ψ são duas soluções da Eq. (3). Mostre que, para $t \geq 0$,

$$\phi(t) - \psi(t) = \int_0^t [f[s, \phi(s)] - f[s, \psi(s)]] ds.$$

(b) Mostre que

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq \int_0^t |f[s, \phi(s)] - f[s, \psi(s)]| ds.$$

(c) Use o resultado do Problema 15 para mostrar que

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq K \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)| ds,$$

onde K é uma cota superior para $|\partial f/\partial y|$ em D . Essa equação é igual à Eq. (30), e o resto da demonstração pode ser feita como indicado no texto.

2.9 Equações de Diferenças de Primeira Ordem

Enquanto um modelo contínuo que leva a uma equação diferencial é razoável e atraente para muitos problemas, existem alguns casos em que um modelo discreto pode ser mais natural. Por exemplo, o modelo contínuo para juros compostos usado na Seção 2.3 é apenas uma aproximação do processo real, que é discreto. Analogamente, algumas vezes o crescimento populacional pode ser descrito de modo mais preciso por um modelo discreto, em vez de contínuo. Isso é verdade, por exemplo, para espécies cujas gerações não se sobrepõem e que se propagam a intervalos regulares, tais como em épocas específicas do ano. Então a população y_{n+1} da espécie no ano $n+1$ é uma função de n e da população y_n do ano anterior, ou seja,

$$y_{n+1} = f(n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

A Eq. (1) é chamada de **equação de diferenças de primeira ordem**. Ela é de primeira ordem porque o valor de y_{n+1} depende do valor de y_n , mas não de valores anteriores, como y_{n-1} , y_{n-2} , e assim por diante. Como para as equações diferenciais, a equação de diferenças (1) é **linear** se f for uma função linear de y_n ; caso contrário, ela é **não linear**. Uma **solução** da equação de diferenças (1) é uma sequência de números y_0, y_1, y_2, \dots que satisfazem a equação para cada n . Além da equação de diferenças, pode também haver uma **condição inicial**

$$y_0 = \alpha \quad (2)$$

que fornece o valor do primeiro elemento da sequência solução.

Vamos supor, temporariamente, que a função f na Eq. (1) depende apenas de y_n , mas não de n . Nesse caso,

$$y_{n+1} = f(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Se y_0 for dado, então os elementos sucessivos da solução podem ser encontrados pela Eq. (3). Assim,

$$y_1 = f(y_0),$$

e

$$y_2 = f(y_1) = f[f(y_0)].$$

A quantidade $f[f(y_0)]$ é chamada de segunda iterada da equação de diferenças e é, algumas vezes, denotada por $f^2(y_0)$. Analogamente, o terceiro iterado y_3 é dado por

$$y_3 = f(y_2) = f[f[f(y_0)]] = f^3(y_0),$$

e assim por diante. Em geral, o n -ésimo iterado y_n é

$$y_n = f(y_{n-1}) = f^n(y_0).$$

Referimo-nos a esse procedimento como a iteração da equação de diferenças. É muitas vezes de interesse primordial determinar o comportamento de y_n quando $n \rightarrow \infty$; em particular, saber se y_n tende a um limite e, se for o caso, encontrá-lo.

Soluções para as quais y_n tem o mesmo valor para todo n são chamadas de **soluções de equilíbrio**. Elas têm, com frequência, importância especial, como no estudo de equações diferenciais. Se existirem soluções de equilíbrio podemos achá-las fazendo y_{n-1} igual a y_n na Eq. (3) e resolvendo a equação resultante

$$y_n = f(y_n) \quad (4)$$

para y_n .

Equações Lineares. Suponha que a população de determinada espécie em uma dada região no ano $n + 1$, denotada por y_{n+1} , é um múltiplo positivo ρ_n da população y_n no ano n , ou seja,

$$y_{n+1} = \rho_n y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Note que a taxa de reprodução ρ_n pode variar de ano para ano. A equação de diferenças (5) é linear e pode ser facilmente resolvida por iteração. Obtemos

$$\begin{aligned} y_1 &= \rho_0 y_0, \\ y_2 &= \rho_1 y_1 = \rho_1 \rho_0 y_0, \end{aligned}$$

e, em geral,

$$y_n = \rho_{n-1} \cdots \rho_0 y_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Assim, se a população inicial y_0 é dada, então a população de cada geração subsequente é determinada pela Eq. (6). Embora, para um problema populacional, ρ_n seja intrinsecamente positivo, a solução (6) também é válida se ρ_n for negativo para alguns ou todos os valores de n . Note, no entanto, que se ρ_n for zero para algum n , então y_{n+1} e todos os valores a seguir de y são nulos; em outras palavras, a espécie torna-se extinta.

Se a taxa de reprodução ρ_n tiver o mesmo valor ρ para todo n , então a equação de diferenças (5) fica

$$y_{n+1} = \rho y_n \quad (7)$$

e sua solução é

$$y_n = \rho^n y_0. \quad (8)$$

A Eq. (7) também tem uma solução de equilíbrio, a saber, $y_n = 0$ para todo n , correspondendo ao valor inicial $y_0 = 0$. O comportamento limite de y_n é fácil de determinar da Eq. (8). De fato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \begin{cases} 0, & \text{se } |\rho| < 1; \\ y_0, & \text{se } \rho = 1; \\ \text{não existe,} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (9)$$

Em outras palavras, a solução de equilíbrio $y_n = 0$ é assintoticamente estável se $|\rho| < 1$ e instável se $|\rho| > 1$.

Vamos modificar, agora, o modelo populacional representado pela Eq. (5) para incluir o efeito de imigração ou emigração. Se b_n é o aumento total da população no ano n devido à imigração, então a população no ano $n + 1$ é a soma dos aumentos devidos à reprodução natural e à imigração. Assim,

$$y_{n+1} = \rho y_n + b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

onde estamos supondo, agora, que a taxa de reprodução ρ é constante. Podemos resolver a Eq. (10) iterando como antes. Temos

$$\begin{aligned} y_1 &= \rho y_0 + b_0, \\ y_2 &= \rho(\rho y_0 + b_0) + b_1 = \rho^2 y_0 + \rho b_0 + b_1, \\ y_3 &= \rho(\rho^2 y_0 + \rho b_0 + b_1) + b_2 = \rho^3 y_0 + \rho^2 b_0 + \rho b_1 + b_2, \end{aligned}$$

e assim por diante. Em geral, obtemos

$$y_n = \rho^n y_0 + \rho^{n-1} b_0 + \cdots + \rho b_{n-2} + b_{n-1} = \rho^n y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{n-1-j} b_j. \quad (11)$$

Note que a primeira parcela na Eq. (11) representa os descendentes da população original, enquanto as outras parcelas representam a população no ano n resultante da imigração em todos os anos precedentes.

No caso especial em que $b_n = b \neq 0$ para todo n , a equação de diferenças é

$$y_{n+1} = \rho y_n + b, \quad (12)$$

cujas soluções, pela Eq. (11), é

$$y_n = \rho^n y_0 + (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{n-1})b. \quad (13)$$

Se $\rho \neq 1$, podemos escrever essa solução na forma mais compacta

$$y_n = \rho^n y_0 + \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} b, \quad (14)$$

onde, novamente, as duas parcelas na expressão à direita do sinal de igualdade representam os efeitos da população original e da imigração, respectivamente. Reescrevendo a Eq. (14) na forma

$$y_n = \rho^n \left(y_0 - \frac{b}{1 - \rho} \right) + \frac{b}{1 - \rho} \quad (15)$$

fica mais evidente o comportamento de y_n a longo prazo. Segue da Eq. (15) que $y_n \rightarrow b/(1 - \rho)$ se $|\rho| < 1$. Se $|\rho| > 1$ ou se $\rho = -1$, então y_n não tem limite a menos que $y_0 = b/(1 - \rho)$. A quantidade $b/(1 - \rho)$, para $\rho \neq 1$, é uma solução de equilíbrio da Eq. (12), como pode ser visto diretamente daquela equação. É claro que a Eq. (14) não é válida para $\rho = 1$. Para tratar esse caso, precisamos voltar à Eq. (13) e fazer $\rho = 1$ af. Segue que

$$y_n = y_0 + nb, \quad (16)$$

de modo que, nesse caso, y_n torna-se ilimitada quando $n \rightarrow \infty$.

O mesmo modelo fornece, também, um arcabouço para resolver muitos problemas de natureza financeira. Em tais problemas, y_n é o saldo na conta no n -ésimo período de tempo, $\rho_n = 1 + r_n$, onde r_n é a taxa de juros para aquele período, e b_n é a quantia depositada ou retirada. O exemplo a seguir é típico.

EXEMPLO

1

Um recém-graduado da faculdade faz um empréstimo de R\$10.000 para comprar um carro. Se a taxa de juros é de 12% ao ano, quais os pagamentos mensais necessários para ele pagar o empréstimo em 4 anos?

A equação de diferenças relevante é a Eq. (12), onde y_n é o saldo do empréstimo no n -ésimo mês, $\rho = 1 + r$, onde r é a taxa de juros mensal e b é o efeito do pagamento mensal. Note que $\rho = 1,01$, correspondendo a uma taxa de juros de 1% ao mês. Como pagamentos reduzem o saldo do empréstimo, b tem que ser negativo; o pagamento de fato é $|b|$.

A solução da equação de diferenças (12) com esse valor de ρ e a condição inicial $y_0 = 10.000$ é dada pela Eq. (15), ou seja,

$$y_n = (1,01)^n (10.000 + 100b) - 100b. \quad (17)$$

O pagamento b necessário para que o empréstimo seja pago em 4 anos é encontrado fazendo-se $y_{48} = 0$ e resolvendo para b . Isso nos dá

$$b = -100 \frac{(1,01)^{48}}{(1,01)^{48} - 1} = -263,34. \quad (18)$$

O pagamento total do empréstimo é 48 vezes $|b|$, ou R\$12.640,32. Desse total, R\$10.000 são o pagamento do principal e os R\$2.640,32 restantes correspondem aos juros.

Equações Não Lineares. Equações de diferenças não lineares são muito mais complicadas e têm soluções muito mais variadas do que as equações lineares. Vamos restringir nossa atenção a uma única equação, a equação de diferenças logística

$$y_{n+1} = \rho y_n \left(1 - \frac{y_n}{k} \right), \quad (19)$$

que é análoga à equação diferencial logística

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K} \right) \quad (20)$$

discutida na Seção 2.5. Note que se a derivada dy/dt na Eq. (20) for substituída pela diferença $(y_{n+1} - y_n)/h$, então a Eq. (20) se reduz à Eq. (19) com $\rho = 1 + hr$ e $k = (1 + hr)K/hr$. Para simplificar a Eq. (19) um pouco

mais, podemos fazer uma mudança de escala na variável y_n definindo uma nova variável $u_n = y_n/k$. Então a Eq. (19) fica

$$u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n), \quad (21)$$

onde ρ é um parâmetro positivo.

Começamos nossa investigação da Eq. (21) procurando as soluções de equilíbrio, ou constantes. Elas podem ser encontradas igualando-se u_{n+1} a u_n na Eq. (21), o que corresponde a fazer dy/dt igual a zero na Eq. (20). A equação resultante é

$$u_n = \rho u_n - \rho u_n^2, \quad (22)$$

de modo que as soluções de equilíbrio da Eq. (21) são

$$u_n = 0, \quad u_n = \frac{\rho - 1}{\rho}. \quad (23)$$

A próxima pergunta é se as soluções de equilíbrio são assintoticamente estáveis ou instáveis. Ou seja, para uma condição inicial próxima a uma das soluções de equilíbrio, a sequência solução resultante se aproxima ou se afasta da solução de equilíbrio? Um modo de examinar essa questão é aproximar a Eq. (21) por uma equação linear na vizinhança de uma solução de equilíbrio. Por exemplo, próximo à solução de equilíbrio $u_n = 0$ a quantidade u_n^2 é pequena, comparada a u_n , logo podemos supor desprezível a parcela quadrática na Eq. (21) em comparação com as parcelas lineares. Isso nos deixa com uma equação de diferenças linear

$$u_{n+1} = \rho u_n, \quad (24)$$

que é, presume-se, uma boa aproximação para a Eq. (21) para u_n suficientemente próximo de zero. No entanto, a Eq. (24) é igual à Eq. (7) e já concluímos, na Eq. (9), que $u_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ se e somente se $|\rho| < 1$ ou (como ρ tem que ser positivo) se $0 < \rho < 1$. Assim, a solução de equilíbrio $u_n = 0$ é assintoticamente estável para a aproximação linear (24) para esse conjunto de valores de ρ , logo concluímos que é, também, assintoticamente estável para a equação não linear completa (21). Essa conclusão está correta, embora nosso argumento não esteja completo. O que está faltando é um teorema que diz que as soluções da equação não linear (21) se parecem com as da equação linear (24) próximas à solução de equilíbrio $u_n = 0$. Não vamos discutir essa questão aqui; a mesma questão é tratada, para equações diferenciais, na Seção 9.3.

Vamos considerar agora a outra solução de equilíbrio $u_n = (\rho - 1)/\rho$. Para estudar soluções em uma vizinhança desse ponto, escrevemos

$$u_n = \frac{\rho - 1}{\rho} + v_n, \quad (25)$$

onde supomos que v_n é pequeno. Substituindo a Eq. (25) na Eq. (21) e simplificando a equação resultante, obtemos, ao final,

$$v_{n+1} = (2 - \rho)v_n - \rho v_n^2. \quad (26)$$

Como v_n é pequeno, desprezamos novamente o termo quadrático em comparação com os lineares e obtemos, assim, a equação linear

$$v_{n+1} = (2 - \rho)v_n. \quad (27)$$

Referindo-nos, mais uma vez, à Eq. (9), vemos que $v_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ para $|2 - \rho| < 1$, isso é, $1 < \rho < 3$. Portanto, concluímos que, para esse conjunto de valores de ρ , a solução de equilíbrio $u_n = (\rho - 1)/\rho$ é assintoticamente estável.

A Figura 2.9.1 contém os gráficos das soluções da Eq. (21) para $\rho = 0,8$, $\rho = 1,5$ e $\rho = 2,8$, respectivamente. Observe que a solução converge para zero quando $\rho = 0,8$ e converge para a solução de equilíbrio diferente de zero quando $\rho = 1,5$ e $\rho = 2,8$. A convergência é monótona para $\rho = 0,8$ e $\rho = 1,5$, e é oscilatória para $\rho = 2,8$. Embora estejam ilustrados os gráficos para condições iniciais particulares, os gráficos para outras condições iniciais são semelhantes.

Outra maneira de apresentar a solução de uma equação de diferenças está ilustrada na Fig. 2.9.2. Em cada parte dessa figura aparecem os gráficos da parábola $y = \rho x(1 - x)$ e da reta $y = x$. As soluções de equilíbrio correspondem aos pontos de interseção dessas duas curvas. O gráfico linear por partes, consistindo em segmentos de retas verticais e horizontais sucessivos, é chamado algumas vezes de diagrama-escada, e representa a sequência solução. A sequência começa no ponto u_0 no eixo dos x . O segmento de reta

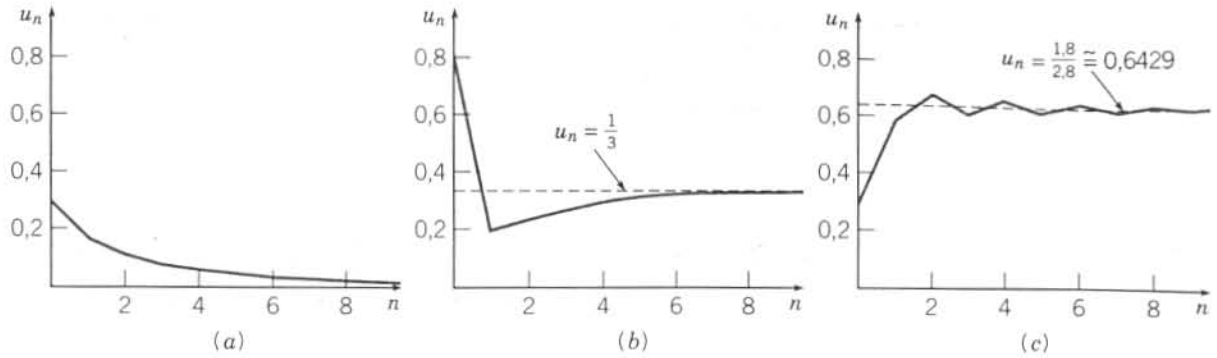


FIGURA 2.9.1 Soluções de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$: (a) $\rho = 0,8$; (b) $\rho = 1,5$; (c) $\rho = 2,8$.

vertical desenhado em u_0 até a parábola corresponde ao cálculo de $\rho u_0(1 - u_0) = u_1$. Esse valor é transferido, então, do eixo dos y para o eixo dos x ; esse passo é representado pelo segmento de reta horizontal da parábola à reta $y = x$. O processo é, então, repetido indefinidamente. É claro que a sequência converge para a origem na Figura 2.9.2a e para a solução de equilíbrio não nula nos dois outros casos.

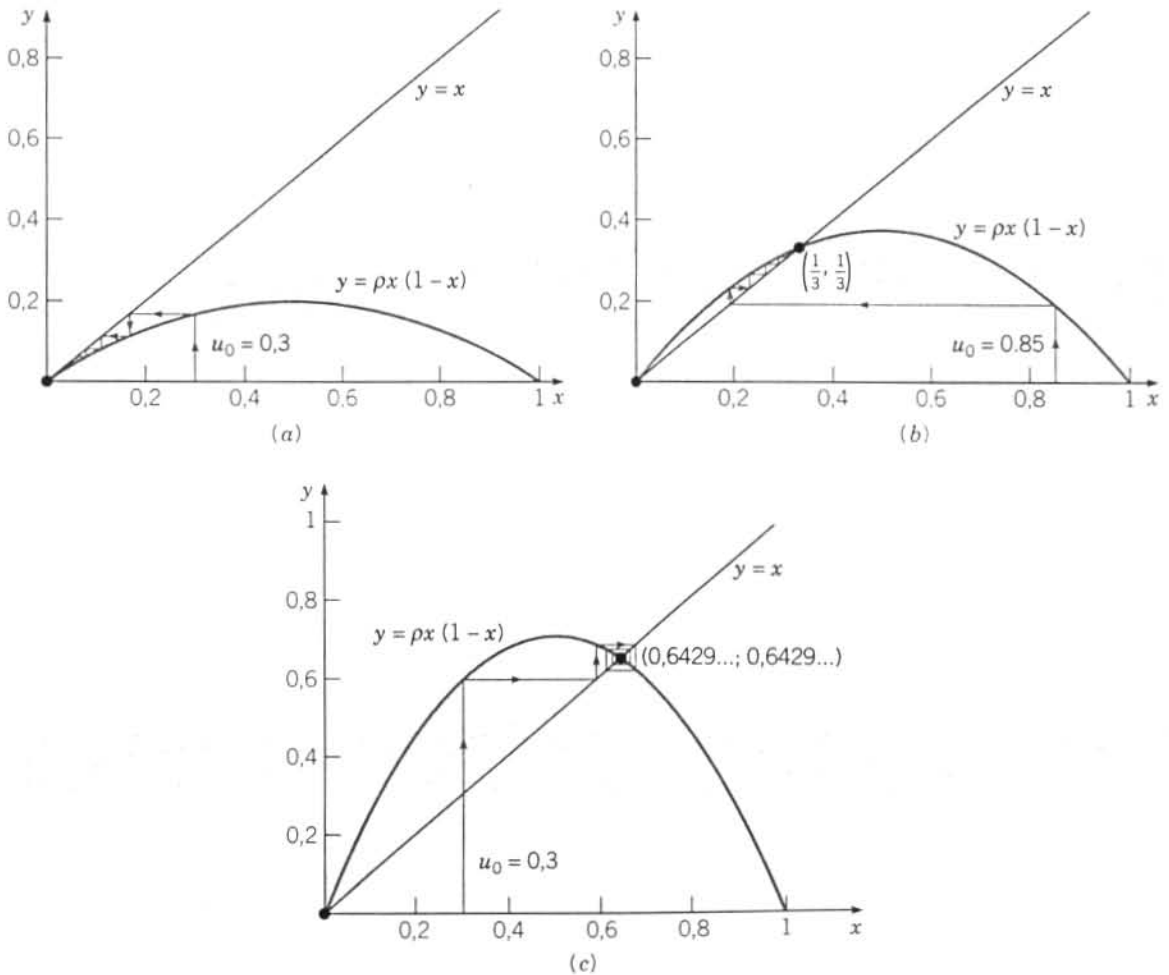


FIGURA 2.9.2 Iterados de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$. (a) $\rho = 0,8$; (b) $\rho = 1,5$; (c) $\rho = 2,8$.

Para resumir nossos resultados até agora: a equação de diferenças (21) tem duas soluções de equilíbrio, $u_n = 0$ e $u_n = (\rho - 1)/\rho$; a primeira é assintoticamente estável para $0 \leq \rho < 1$ e a segunda é assintoticamente estável para $1 < \rho < 3$. Quando $\rho = 1$, as duas soluções de equilíbrio coincidem em $u = 0$; pode-se mostrar que essa solução é assintoticamente estável. O parâmetro ρ na Figura 2.9.3 está no eixo horizontal e u no eixo vertical. Estão ilustradas as soluções de equilíbrio $u = 0$ e $u = (\rho - 1)/\rho$. Os intervalos em que cada

uma delas é estável estão indicados pelas partes sólidas das curvas. Há uma **mudança de estabilidade** de uma solução de equilíbrio para a outra.

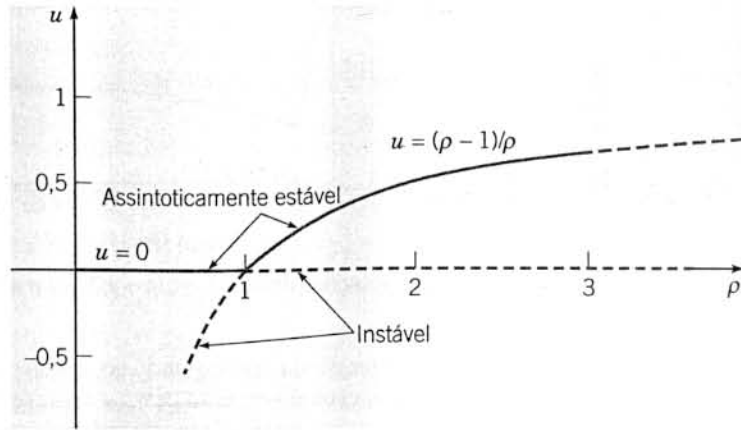


FIGURA 2.9.3 Mudança de estabilidade para $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$.

Para $\rho > 3$, nenhuma das soluções de equilíbrio é estável, e as soluções da Eq. (21) exibem complexidade cada vez maior quando ρ aumenta. Para ρ um pouco maior do que 3, a sequência u_n aproxima-se rapidamente de uma oscilação estacionária de período 2, isso é, u_n oscila entre dois valores distintos. A Fig. 2.9.4 mostra a solução para $\rho = 3,2$. Para n maior do que cerca de 20 os valores da solução se alternam

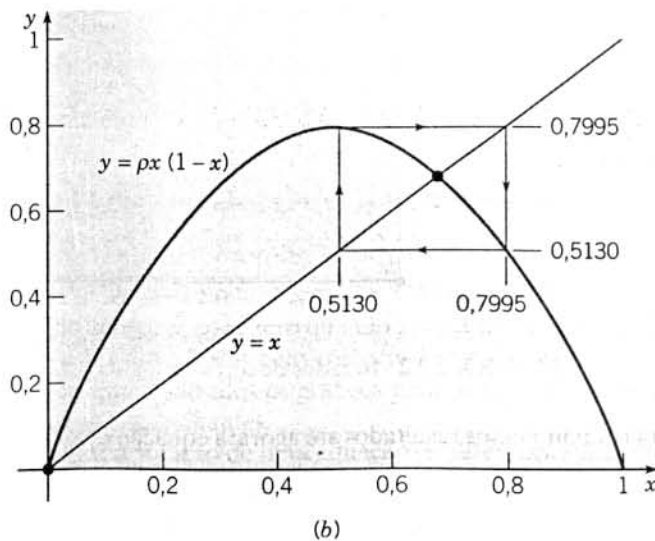
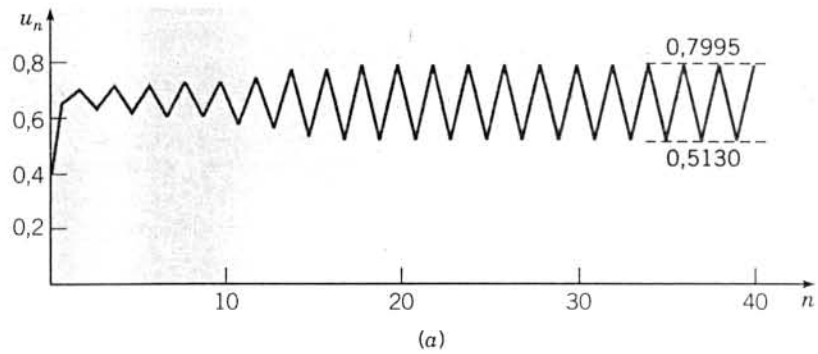


FIGURA 2.9.4 Uma solução de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$ para $\rho = 3,2$; período 2. (a) u_n em função de n ; (b) um ciclo de período 2.

entre 0,5130 e 0,7995. O gráfico foi feito para a condição inicial particular $u_0 = 0,3$, mas é semelhante para todos os outros valores iniciais entre 0 e 1. A Figura 2.9.4b também mostra a mesma oscilação estacionária como um caminho retangular percorrido repetidamente no sentido horário.

Para ρ aproximadamente igual a 3,449, cada estado na oscilação de período 2 se divide em dois estados distintos e a solução torna-se periódica com período 4; veja a Fig. 2.9.5, que mostra uma solução de período quatro para $\rho = 3,5$. Quando ρ continua crescendo, aparecem soluções periódicas com períodos 8, 16, ... A aparição de uma nova solução em um determinado valor do parâmetro é chamada de **bifurcação**.

Os valores de ρ nos quais ocorrem as sucessivas duplicações de período tendem a um limite que é aproximadamente igual a 3,57. Para $\rho > 3,57$, as soluções possuem alguma regularidade mas não dá para discernir um padrão detalhado para a maioria dos valores de ρ . Por exemplo, a Fig. 2.9.6 mostra uma solução para $\rho = 3,65$. Ela oscila entre 0,3 e 0,9 aproximadamente, mas sua estrutura mais fina é imprevisível. A expressão **caótica** é usada para descrever essa situação. Uma das características de soluções caóticas é sua extrema sensibilidade às condições iniciais. Isso está ilustrado na Fig. 2.9.7, onde aparecem duas soluções da Eq. (21) para $\rho = 3,65$. Uma solução é a mesma que aparece na Fig. 2.9.6 e tem valor inicial $u_0 = 0,3$, enquanto a outra solução tem valor inicial $u_0 = 0,305$. Por aproximadamente 15 iterações as duas soluções permanecem próximas e são difíceis de distinguir uma da outra na figura. Depois disso, embora elas continuem circulando aproximadamente no mesmo conjunto de valores, seus gráficos são bem diferentes. Certamente não seria possível usar uma dessas soluções para estimar o valor da outra para valores de n maiores do que cerca de 15.

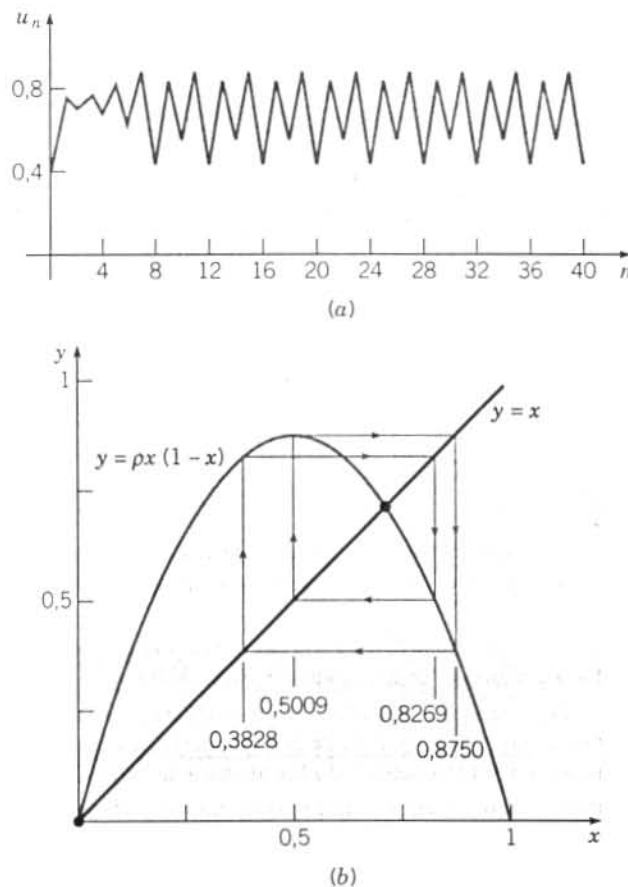


FIGURA 2.9.5 Uma solução de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$ para $\rho = 3,5$; período 4. (a) u_n em função de n ; (b) um ciclo de período 4.

Apenas nos últimos anos é que as soluções caóticas de equações de diferenças e diferenciais tornaram-se amplamente conhecidas. A Eq. (20) foi um dos primeiros exemplos de caos matemático a ser encontrado e estudado em detalhe, por Robert May²¹ em 1974. Baseado em sua análise dessa equação como um

²¹R. M. May, "Biological Populations with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos", *Science* 186(1974) pp. 645-647; "Biological Populations Obeying Difference Equations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos", *Journal of Theoretical Biology* 51 (1975) pp. 511-524.

modelo para a população de determinada espécie de inseto, May sugeriu que, se a taxa de crescimento ρ é grande demais, será impossível fazer previsões efetivas em longo prazo sobre essas populações de insetos. A ocorrência de soluções caóticas em problemas simples estimulou uma enorme quantidade de pesquisa em anos recentes, mas muitas perguntas permanecem sem resposta. É cada vez mais claro, no entanto, que soluções caóticas são muito mais comuns do que se suspeitava inicialmente, e podem fazer parte da investigação de um amplo leque de fenômenos.

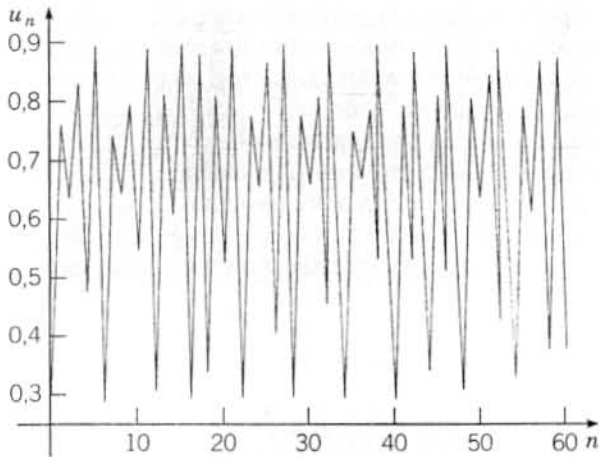


FIGURA 2.9.6 Uma solução de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$ para $\rho = 3,65$; uma solução caótica.

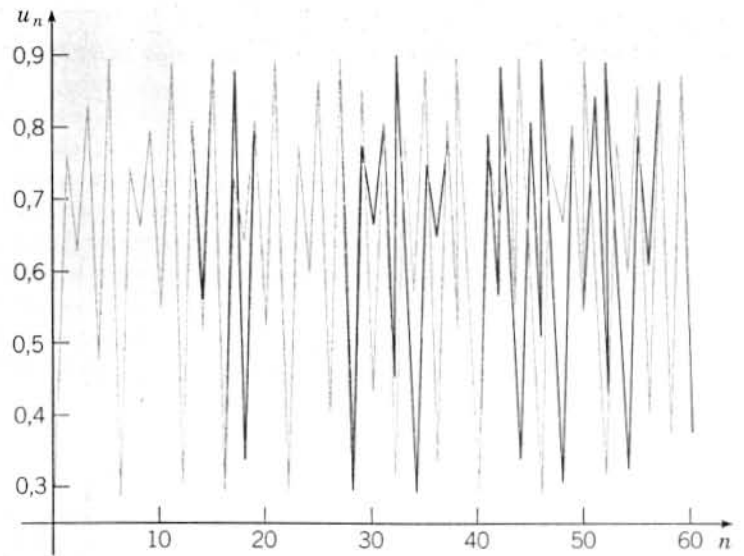


FIGURA 2.9.7 Duas soluções de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$ para $\rho = 3,65$; $u_0 = 0,3$ e $u_0 = 0,305$.

PROBLEMAS

Em cada um dos problemas de 1 a 6, resolva a equação de diferenças dada em função do valor inicial y_0 . Descreva o comportamento da solução quando $n \rightarrow \infty$.

1. $y_{n+1} = -0,9y_n$
2. $y_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}y_n$
3. $y_{n+1} = \sqrt{\frac{n+3}{n+1}}y_n$
4. $y_{n+1} = (-1)^{n+1}y_n$
5. $y_{n+1} = 0,5y_n + 6$
6. $y_{n+1} = -0,5y_n + 6$
7. Encontre o rendimento efetivo anual de uma conta bancária que paga juros a uma taxa de 7% ao ano composta diariamente, isto é, encontre a razão da diferença entre os saldos final e inicial dividida pelo saldo inicial.
8. Um investidor deposita R\$1.000,00 em uma conta que rende juros de 8% ao ano compostos mensalmente e faz, também, depósitos adicionais de R\$25,00 por mês. Encontre o saldo na conta após 3 anos.
9. Um recém-formado faz um empréstimo de R\$8.000,00 para comprar um carro. O empréstimo é feito com juros anuais de 10%. Que taxa de pagamento mensal é necessária para liquidar o empréstimo em 3 anos? Compare seu resultado com o do Problema 9 da Seção 2.3.
10. Uma pessoa deseja comprar um imóvel com financiamento de R\$100.000,00 para ser pago em 30 anos. Qual o pagamento mensal necessário se a taxa de juros anual é (a) 9%, (b) 10%, (c) 12%?
11. Uma pessoa recebe um financiamento de R\$100.000,00 para comprar um imóvel com taxa de juros anuais de 9%. Qual o pagamento mensal necessário para quitar o empréstimo em 30 anos? E em 20 anos? Qual a quantia total paga em cada um desses casos?
12. Se a taxa de juros, em um financiamento de 20 anos, permanece fixa em 10% e se um pagamento mensal de R\$1.000,00 é o máximo que o comprador pode pagar, qual o empréstimo máximo que pode ser feito sob essas condições?
13. Uma pessoa gostaria de comprar um imóvel com financiamento de R\$95.000,00 pagável em 20 anos. Qual a maior taxa de juros que o comprador pode pagar se os pagamentos mensais não podem exceder R\$900,00?

A Equação de Diferenças Logística. Os Problemas de 14 a 19 tratam da equação de diferenças (21), $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$.

14. Faça os detalhes para a análise de estabilidade linear da solução de equilíbrio $u_n = (\rho - 1)/\rho$, isto é, deduza a equação de diferenças (26) no texto para a perturbação v_n .
15. (a) Para $\rho = 3,2$, faça o gráfico ou calcule a solução da equação logística (21) para diversas condições iniciais, por exemplo, $u_0 = 0,2; 0,4; 0,6$ e $0,8$. Observe que em cada caso a solução se aproxima de uma oscilação estacionária entre os mesmos dois valores. Isso ilustra que o comportamento em longo prazo da solução é independente do valor inicial.
- (b) Faça cálculos semelhantes e verifique que a natureza da solução para n grande é independente da condição inicial para outros valores de ρ , como $2,6; 2,8$ e $3,4$.
16. Suponha que $\rho > 1$ na Eq. (21).
- (a) Desenhe um diagrama-escada qualitativamente correto mostrando, assim, que se $u_0 < 0$, então $u_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$.
- (b) De maneira análoga, determine o que acontece quando $n \rightarrow \infty$ se $u_0 > 1$.
17. As soluções da Eq. (21) mudam de seqüências convergentes para oscilações periódicas de período dois quando o parâmetro ρ passa pelo valor 3. Para ver mais claramente como isso ocorre, efetue os cálculos indicados a seguir.
- (a) Faça o gráfico ou calcule a solução para $\rho = 2,9; 2,95$ e $2,99$, respectivamente, usando um valor inicial u_0 de sua escolha no intervalo $(0, 1)$. Estime, em cada caso, quantas iterações são necessárias para a solução tornar-se "muito próxima" do valor limite. Use qualquer interpretação conveniente para o significado de "muito próxima" na frase anterior.
- (b) Faça o gráfico ou calcule a solução para $\rho = 3,01; 3,05$ e $3,1$, respectivamente, usando a mesma condição inicial do item (a). Estime, em cada caso, quantas iterações são necessárias para se atingir uma solução estado estacionário. Encontre ou estime, também, os dois valores na oscilação estado estacionário.
18. Calculando ou fazendo o gráfico da solução da Eq. (21) para valores diferentes de ρ , estime o valor de ρ para o qual a solução muda de uma oscilação de período dois para uma de período quatro. De modo análogo, estime o valor de ρ para o qual a solução muda de período quatro para período oito.
19. Seja ρ_k o valor de ρ para o qual a solução da Eq. (21) muda do período 2^{k-1} para o período 2^k . Então, como observado no texto, $\rho_1 = 3$, $\rho_2 \approx 3,449$ e $\rho_3 \approx 3,544$.
- (a) Usando esses valores para ρ_1, ρ_2 e ρ_3 , ou os que você encontrou no Problema 18, calcule $(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_3 - \rho_2)$.
- (b) Seja $\delta_n = (\rho_n - \rho_{n-1})/(\rho_n - \rho_n)$. Foi demonstrado que δ_n tende a um limite δ quando $n \rightarrow \infty$, onde $\delta \approx 4,6692$ é conhecido como número de Feigenbaum.²² Determine a diferença percentual entre o valor limite δ e δ_2 , como calculado no item (a).
- (c) Suponha que $\delta_3 = \delta$ e use essa relação para estimar ρ_4 , o valor de ρ para o qual aparecem soluções de período 16.
- (d) Fazendo o gráfico ou calculando soluções próximas para o valor de ρ_4 encontrado no item (c), tente detectar a aparição de uma solução de período 16.
- (e) Observe que

$$\rho_n = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) + (\rho_3 - \rho_2) + \cdots + (\rho_n - \rho_{n-1}).$$

Supondo que $(\rho_4 - \rho_3) = (\rho_3 - \rho_2)\delta^{-1}$, $(\rho_5 - \rho_4) = (\rho_3 - \rho_2)\delta^{-2}$, e assim por diante, expresse ρ_n como uma soma geométrica. Depois encontre o limite de ρ_n quando $n \rightarrow \infty$. Isso é uma estimativa do valor de ρ no qual começa a aparecer um comportamento caótico na solução da equação logística (21).

PROBLEMAS

Problemas Variados. Uma das dificuldades em resolver equações de primeira ordem é que existem diversos métodos de resolução, cada um dos quais podendo ser usado em certos tipos de equações. Pode-se levar algum tempo para se adquirir experiência em escolher o método melhor para uma equação. Os 32 primeiros proble-

²²Esse resultado para a equação de diferenças logística foi descoberto por Mitchell Feigenbaum (1944-) em agosto de 1975, enquanto trabalhava no Laboratório Nacional de Los Alamos. Em um espaço de algumas poucas semanas ele estabeleceu que o mesmo valor limite aparece também em uma grande classe de equações de diferenças com duplicação de períodos. Feigenbaum, que tem doutorado em física pelo M.I.T. (Instituto de Tecnologia de Massachussets), trabalha atualmente na Universidade Rockefeller.

mas a seguir são apresentados de modo que você obtenha alguma prática na identificação do método ou métodos aplicáveis a uma equação dada. Os problemas restantes envolvem certos tipos de equações que podem ser resolvidos por métodos especializados.

Em cada um dos Problemas de 1 a 32, resolva a equação diferencial. Se for dada uma condição inicial, encontre, também, a solução que a satisfaz.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 2y}{x}$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \cos x}{2 - \sin y}$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{3 + 3y^2 - x}, \quad y(0) = 0$

4. $\frac{dy}{dx} = 3 - 6x + y - 2xy$

5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + y^2 + 1}{x^2 + 2xy}$

6. $x \frac{dy}{dx} + xy = 1 - y, \quad y(1) = 0$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 + 1}{y(2 + 3y)}$

8. $x \frac{dy}{dx} + 2y = \frac{\sin x}{x}, \quad y(2) = 1$

9. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + 1}{x^2 + 2y}$

10. $(x^2y + xy - y) dx + (x^2y - 2x^2) dy = 0$

11. $(x^2 + y) dx + (x + e^y) dy = 0$

12. $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{1 + e^x}$

13. $\frac{dy}{dx} = 1 + 2x + y^2 + 2xy^2$

14. $(x + y) dx + (x + 2y) dy = 0, \quad y(2) = 3$

15. $(e^x + 1) \frac{dy}{dx} = y - ye^x$

16. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x} \cos y - e^{2y} \cos x}{-e^{-x} \sin y + 2e^{2y} \sin x}$

17. $\frac{dy}{dx} = e^{2x} + 3y$

18. $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x^2 - 2x}, \quad y(0) = 3$

19. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2y - y^3}{2x + 3xy^2}$

20. $y' = e^{x+y}$

21. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y^2 + 6xy - 4}{3x^2 + 4xy + 3y^2} + 0$

22. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{y^2 + 1}, \quad y(-1) = 1$

23. $t \frac{dy}{dt} + (t + 1)y = e^{2t}$

24. $2 \sin y \sin x \cos x dx + \cos y \sin^2 x dy = 0$

25. $\left(2 \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{y^2}\right) dy = 0$

26. $xy' = y + xe^{y/x}$

27. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3}$ *Sugestão:* Defina $u = x^2$.

28. $(2y + 3x) dx = -x dy$

29. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$

30. $(3y^2 + 2xy) dx - (2xy + x^2) dy = 0$

31. $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y + y^2}{2x^3 + 3xy}, \quad y(1) = -2$

32. $xy' + y - y^2e^{2x} = 0, \quad y(1) = 2$

33. **Equações de Riccati.** A equação

$$\frac{dy}{dt} = q_1(t) + q_2(t)y + q_3(t)y^2$$

é conhecida como equação de Riccati.²³ Suponha que é conhecida alguma solução particular y_1 desta equação. Uma solução mais geral contendo uma constante arbitrária pode ser obtida pela substituição

$$y = y_1(t) + \frac{1}{v(t)}.$$

²³O nome equações de Riccati é em homenagem a Jacopo Francesco Riccati (1676-1754), um nobre de Veneza que rejeitou propostas de universidades na Itália, na Áustria e na Rússia para fazer seus estudos matemáticos com privacidade em casa. Riccati estudou extensivamente essas equações; no entanto, o resultado enunciado neste problema foi descoberto por Euler (em 1760).

Mostre que $v(t)$ satisfaz a equação *linear* de primeira ordem

$$\frac{dv}{dt} = -(q_2 + 2q_3y_1)v - q_3.$$

Note que $v(t)$ vai conter uma única constante arbitrária.

34. Usando o método do Problema 33 e a solução particular dada, resolva cada uma das equações de Riccati a seguir:

(a) $y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2$; $y_1(t) = t$

(b) $y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} + y^2$; $y_1(t) = \frac{1}{t}$

(c) $\frac{dy}{dt} = \frac{2\cos^2 t - \sin^2 t + y^2}{2\cos t}$; $y_1(t) = \sin t$

35. A propagação de uma única ação em uma população grande (por exemplo, motoristas ligando os faróis ao pôr do sol) muitas vezes depende parcialmente de circunstâncias externas (o escurecer) e parcialmente de uma tendência de imitar os outros que já executaram a ação em questão. Nesse caso, a proporção $y(t)$ de pessoas que já executaram a ação pode ser descrita²⁴ pela equação

$$dy/dt = (1 - y)[x(t) + by], \quad (i)$$

onde $x(t)$ mede o estímulo externo e b é o coeficiente de imitação.

- (a) Note que a Eq. (i) é uma equação de Riccati e que $y_1(t) = 1$ é uma solução. Use a transformação sugerida no Problema 33 e encontre a equação linear satisfeita por $v(t)$.
 (b) Encontre $v(t)$ no caso em que $x(t) = at$, onde a é constante. Deixe sua resposta em forma integral.

Algumas Equações de Segunda Ordem Especiais. Equações de segunda ordem envolvem a derivada segunda de uma função desconhecida e têm a forma geral $y'' = f(t, y, y')$. Em geral tais equações não podem ser resolvidas por métodos projetados para equações de primeira ordem. No entanto, existem dois tipos de equações de segunda ordem que podem ser transformados em equações de primeira ordem por uma mudança de variável apropriada. As equações resultantes podem ser resolvidas, algumas vezes, pelos métodos apresentados neste capítulo. Os Problemas de 36 a 51 tratam desses tipos de equações.

Equações sem a Variável Dependente. Para uma equação diferencial de segunda ordem da forma $y'' = f(t, y')$, a substituição $v = y'$, $v' = y''$ leva a uma equação de primeira ordem da forma $v' = f(t, v)$. Se essa equação puder ser resolvida para v , então y pode ser obtida integrando-se $dy/dt = v$. Ao resolver a equação de primeira ordem para v obtém-se uma constante arbitrária, e uma segunda constante é obtida na integração para encontrar y . Em cada um dos Problemas de 36 a 41, use essa substituição para resolver a equação dada.

36. $t^2y'' + 2ty' - 1 = 0$, $t > 0$

37. $ty'' + y' = 1$, $t > 0$

38. $y'' + t(y')^2 = 0$

39. $2t^2y'' + (y')^3 = 2ty'$, $t > 0$

40. $y'' + y' = e^{-t}$

41. $t^2y'' = (y')^2$, $t > 0$

Equações sem a Variável Independente. Considere equações diferenciais de segunda ordem da forma $y'' = f(y, y')$, na qual a variável independente t não aparece explicitamente. Se definirmos $v = y'$, obtemos $dv/dt = f(y, v)$. Como a expressão à direita do sinal de igualdade depende de y e v , em vez de t e v , essa equação contém variáveis demais. No entanto, se pensarmos em y como sendo a variável independente, pela regra da cadeia temos $dv/dt = (dv/dy)(dy/dt) = v(dv/dy)$. Portanto, a equação diferencial original pode ser escrita como $v(dv/dy) = f(y, v)$. Se essa equação de primeira ordem puder ser resolvida, obtemos v como função de y . Então podemos obter uma relação entre y e t resolvendo $dy/dt = v(y)$, que é uma equação separável. Novamente, o resultado final contém duas constantes arbitrárias. Em cada um dos Problemas de 42 a 47, use esse método para resolver a equação diferencial dada.

42. $yy'' + (y')^2 = 0$

43. $y'' + y = 0$

44. $y'' + y(y')^3 = 0$

45. $2y^2y'' + 2y(y')^2 = 1$

46. $yy'' - (y')^3 = 0$

47. $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$

Sugestão: no Problema 47 a equação transformada é uma equação de Bernoulli. Veja o Problema 27 na Seção 2.4.

²⁴Veja Anatol Rapoport, "Contribution of the Mathematical Theory of Mass Behavior: I. The Propagation of Single Acts", *Bulletin of Mathematical Biophysics* 14(1952)159-169 e John Z. Hearon, "Note on the Theory of Mass Behavior", *Bulletin of Mathematical Biophysics* 17(1955)7-13.

Em cada um dos Problemas de 48 até 51, resolva o problema de valor inicial dado usando os métodos dos Problemas de 36 a 47.

$$48. y'y'' = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

$$49. y'' - 3y^2 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$$

$$50. (1 + t^2)y'' + 2ty' + 3t^{-2} = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1$$

$$51. y'y'' - t = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$$

REFERÊNCIAS

Os livros mencionados na Seção 2.5 são

Bailey, N. T. J., *The Mathematical Theory of Infectious Diseases and Its Applications* (2nd ed.) (New York: Hafner Press, 1975).

Clark, Colin W., *Mathematical Bioeconomics* (2nd ed.) (New York: Wiley-Interscience, 1990).

Uma boa introdução geral à dinâmica populacional é

Frauenthal, J. C., *Introduction to Population Modeling* (Boston: Birkhauser, 1980).

Uma discussão mais completa da demonstração do teorema fundamental de existência e unicidade pode ser encontrada em livros mais avançados sobre equações diferenciais. Dois que são razoavelmente acessíveis para leitores sem muita bagagem matemática são

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1961; New York: Dover, 1989).

Brauer, F., and Nohel, J., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations* (New York: Benjamin, 1969; New York: Dover, 1989).

Um compêndio valioso de métodos de resolução de equações diferenciais é

Zwillinger, D., *Handbook of Differential Equations* (3rd ed.) (San Diego: Academic Press, 1998).

Para mais discussões e exemplos de fenômenos não lineares, incluindo bifurcações e caos, veja

Strogatz, Steven H., *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1994).

Uma referência geral sobre equações de diferenças é

Mickens, R. E., *Difference Equations, Theory and Applications* (2nd ed.) (New York: Van Nostrand Reinhold, 1990).

Um tratamento elementar de soluções caóticas de equações de diferenças pode ser encontrado em

Devaney, R. L., *Chaos, Fractals, and Dynamics* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1990).