EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Volume 1

Dennis G. Zill
Michael R. Cullen
Loyola Marymount University

Tradução
Antonio Zumpano, Ph. D.
Professor de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais

Revisão Técnica
Antonio Pertence Jr.
Professor Titular de Matemática da Faculdade de Sabará (MG)
Pós-graduado em Educação Matemática pela UNI-BH
Membro Efetivo da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)

PEARSON
Makron Books

São Paulo

Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha
Guatemala México Peru Porto Rico Venezuela

Sumário

Volume 2

Capítulo 4

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE ORDEM SUPERIOR

Conceitos Importantes

Problema de valor inicial
Condições iniciais
Problema de valor de contorno
Condições de contorno
Dependência linear
Independência linear
Wronskiano
Equação homogênea
Equação não-homogênea
Princípio de superposição
Conjunto fundamental de soluções
Solução geral
Solução completa
Solução particular
Função complementar
Redução de ordem
Equação auxiliar
Equação característica
Fórmula de Euler
Coeficientes indeterminados
Operador diferencial
Operador anulador
Variação dos parâmetros

Examinaremos agora soluções para equações diferenciais de ordem dois ou maior. Embora possamos resolver algumas equações não-lineares de primeira ordem através de técnicas consideradas no Capítulo 2, equações não-lineares de ordem maior geralmente resistem à solução. Isso não significa que uma equação não-linear não tenha solução, mas sim que não existem regras ou métodos pelos quais sua solução possa ser exibida em termos de funções elementares ou outros tipos. Como uma conseqüência, na tentativa de resolver equações de ordem maior, devemos deter-nos às equações lineares.

Começamos este capítulo primeiramente examinando a teoria subjacente às equações lineares. Como fizemos na Seção 2.5, colocamos condições na equação diferencial sob as quais podemos obter sua solução geral. Lembramos que uma *solução geral* contém todas as soluções para a equação em algum intervalo. No restante do capítulo, desenvolvemos métodos para obter uma solução geral para uma equação linear com *coeficientes constantes*. Veremos que nossa habilidade para resolver uma equação diferencial de n-ésima ordem com coeficientes constantes depende de nossa habilidade para resolver uma equação polinomial de grau n. O método de solução para equações lineares com coeficientes não-constantes será visto no Capítulo 6.

4.1 TEORIA PRELIMINAR

Começamos a discussão sobre equações diferenciais de ordem maior, como fizemos com equações de primeira ordem, com a noção de um problema de valor inicial. Porém, concentramos nossa atenção nas equações diferenciais lineares.

4.1.1 Problemas de valor inicial e de valor de contorno

Problema de valor inicial

Para uma equação diferencial de n-ésima ordem, o problema

$$\textit{Resolva}: \; a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\textit{Sujeita a}: \; y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{1}$$

em que $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ são constantes arbitrárias, é chamado de um **problema de valor inicial**. Os valores específicos $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ são chamados de **condições iniciais**. Procuramos uma solução em algum intervalo I contendo x_0.

No caso de uma equação linear de segunda ordem, uma solução para o problema de valor inicial

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0',$$

é uma função que satisfaça a equação diferencial em I cujo gráfico passa pelo ponto (x_0, y_0) com inclinação igual a y_0'. Veja a Figura 4.1.

O próximo teorema nos fornece condições suficientes para a existência de uma única solução para (1).

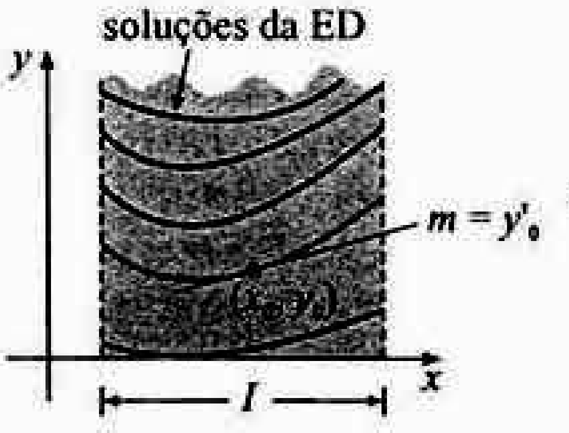

Figura 4.1

TEOREMA 4.1 Existência de uma Única Solução

Sejam $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, ..., $a_1(x)$, $a_0(x)$ e $g(x)$ contínuas em um intervalo I com $a_n(x) \neq 0$ para todo x neste intervalo. Se $x = x_0$ é algum ponto deste intervalo, então existe uma única solução $y(x)$ para o problema de valor inicial (1) neste intervalo.

EXEMPLO 1

Você deve verificar que a função $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ é uma solução para o problema de valor inicial

$$y'' - 4y = 12x, \quad y(0) = 4, \; y'(0) = 1.$$

Agora, a equação diferencial é linear, os coeficientes, bem como $g(x) = 12x$, são contínuos e $a_2(x) = 1 \neq 0$ em qualquer intervalo contendo $x = 0$. Concluímos a partir do Teorema 4.1 que a função dada é a única solução. ■

EXEMPLO 2

O problema de valor inicial

$$3y''' + 5y'' - y' + 7y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0,$$

possui a solução trivial $y = 0$. Como a equação de terceira ordem é linear com coeficientes constantes, segue-se que todas as condições do Teorema 4.1 são satisfeitas. Logo, $y = 0$ é a única solução em qualquer intervalo contendo $x = 1$. ■

EXEMPLO 3

A função $y = \frac{1}{4}$ sen $4x$ é uma solução para o problema de valor inicial

$$y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Segue-se do Teorema 4.1 que, em qualquer intervalo contendo $x = 0$, a solução é única. ■

No Teorema 4.1, a continuidade de $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2, ..., n$ e a hipótese $a_n(x) \neq 0$ para todo x em I são ambas importantes. Especificamente, se $a_n(x) = 0$ para algum x no intervalo, então a solução para um problema de valor inicial linear pode não ser única ou nem mesmo existir.

EXEMPLO 4

Verifique que a função $y = cx^2 + x + 3$ é uma solução para o problema de valor inicial

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 6, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1,$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$ para qualquer escolha do parâmetro c.

Solução Como $y' = 2cx + 1$ e $y'' = 2c$, segue-se que

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2(2c) - 2x(2cx + 1) + 2(cx^2 + x + 3)$$
$$= 2cx^2 - 4cx^2 - 2x + 2cx^2 + 2x + 6 = 6.$$

Ainda, $$y(0) = c(0)^2 + 0 + 3 = 3$$

e $$y'(0) = 2c(0) + 1 = 1.$$ ■

Embora a equação diferencial do Exemplo 4 seja linear e os coeficientes e $g(x) = 6$ sejam contínuos em toda a reta, as dificuldades óbvias são que $a_2(x) = x^2$ se anula em $x = 0$ e que condições iniciais são impostas também no ponto $x = 0$.

Problema de Valor de Contorno

Um outro tipo de problema consiste em resolver uma equação diferencial de ordem dois ou maior na qual a variável dependente y ou suas derivadas são especificadas em *pontas diferentes*. Um problema como

$$\textit{Resolva}: \; a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\textit{Sujeita a}: \; y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1$$

é chamado de **problema de valor de contorno**. Os valores especificados $y(a) = y_0$ e $y(b) = y_1$ são chamados de **condições de contorno** ou **de fronteira**. Uma solução para o problema em questão é uma função que satisfaça a equação diferencial em algum intervalo I, contendo a e b, cujo gráfico passa pelos pontos (a, y_0) e (b, y_1). Veja a Figura 4.2

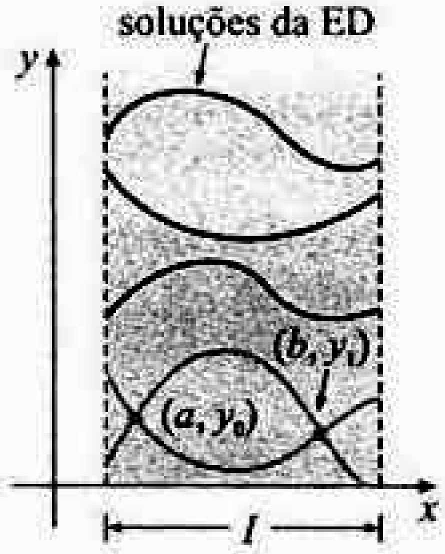

Figura 4.2

EXEMPLO 5

Você deve verificar que, no intervalo $(0, \infty)$, a função $y = 3x^2 - 6x + 3$ satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno do problema de valor de contorno

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 6, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 3. \quad \blacksquare$$

Para uma equação diferencial de segunda ordem, outras condições de contorno podem ser

$$y'(a) = y_0', \quad y(b) = y_1;$$

$$y(a) = y_0, \quad y'(b) = y_1';$$

ou

$$y'(a) = y_0', \quad y'(b) = y_1',$$

em que y_0, y_0', y_1 e y_1' denotam constantes arbitrárias. Estes três pares de condições são casos especiais das condições gerais de contorno

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2.$$

Os próximos exemplos mostram que, mesmo quando as condições do Teorema 4.1 são satisfeitas, um problema de valor de contorno pode ter

(i) várias soluções (como mostrado na Figura 4.2),

(ii) uma única solução, ou

(iii) nenhuma solução.

EXEMPLO 6

No Exemplo 6 da Seção 1.1, vimos que uma família a dois parâmetros de soluções para a equação diferencial $y'' + 16y = 0$ é

$$y = c_1 \cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x.$$

Suponha agora que queiramos determinar aquela solução para a equação que também satisfaça as condições de contorno

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Observe que a primeira condição

$$0 = c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0$$

implica $c_1 = 0$; assim, $y = c_2$ sen $4x$. Mas, quando $x = \pi/2$, temos

$$0 = c_2 \text{ sen } 2\pi.$$

Como sen $2\pi = 0$, esta última condição é satisfeita com qualquer escolha de c_2. Segue-se então que uma solução para o problema

$$y'' + 16y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

é a família a um parâmetro

$$y = c_2 \text{ sen } 4x.$$

Como a Figura 4.3 mostra, há uma infinidade de funções satisfazendo a equação diferencial cujos gráficos passam pelos pontos (0, 0) e ($\pi/2$, 0).

Se as condições de contorno fossem $y(0) = 0$ e $y(\pi/8) = 0$, então necessariamente c_1 e c_2 deveriam ser ambas nulas. Logo, $y = 0$ seria uma solução para esse novo problema de valor de contorno. De fato, como veremos mais tarde nesta seção, ela é a única solução.

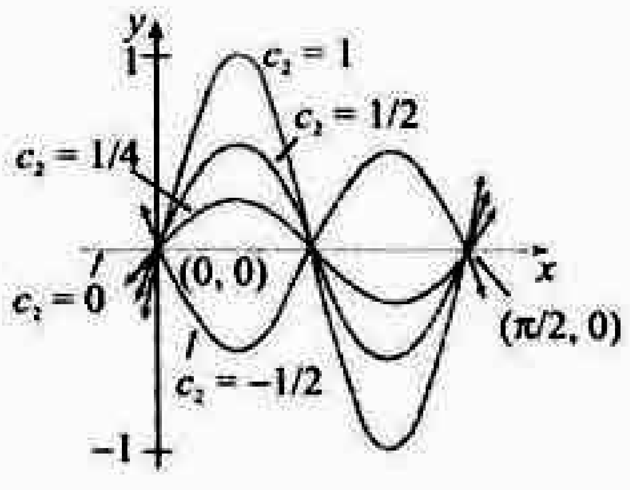

Figura 4.3

EXEMPLO 7

O problema de valor de contorno

$$y'' + 16y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

não possui solução na família $y = c_1 \cos 4x + c_2$ sen $4x$. Como o Exemplo 6, a condição $y(0) = 0$ ainda implica $c_1 = 0$. Logo, $y = c_2$ sen $4x$ e, quando $x = \pi/2$, obtemos a contradição $1 = c_2 \times 0 = 0$. ■

Problemas de valor de contorno são freqüentemente encontrados nas aplicações de equações diferenciais parciais.

4.1.2 Dependência Linear e Independência Linear

Os dois próximos conceitos são básicos para o estudo de equações diferenciais lineares.

DEFINIÇÃO 4.1 Dependência Linear

Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ é **linearmente dependente** em um intervalo I se existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ não todas nulas, tais que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$$

para todo x no intervalo.

DEFINIÇÃO 4.2 Independência Linear

Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ é **linearmente independente** em um intervalo I se ele não é linearmente dependente no intervalo.

Em outras palavras, um conjunto de funções é linearmente independente em um intervalo se as únicas constantes para as quais

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0,$$

para todo x no intervalo, são $c_1 = c_2 = \ldots c_n = 0$.

É fácil de entender essas definições no caso de duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Se as funções são linearmente dependentes em um intervalo, então existem constantes c_1 e c_2, que não são ambas nulas, tais que, para todo x no intervalo,

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0.$$

Portanto, se supomos $c_1 \neq 0$, segue-se que

$$f_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} f_2(x);$$

isto é, *se duas funções são linearmente dependentes, então uma é simplesmente uma constante múltipla da outra*. Reciprocamente, se $f_1(x) = c_2 f_2(x)$ para alguma constante c, então

$$(-1) \times f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

para todo x em algum intervalo. Logo, as funções são linearmente dependentes, pois pelo menos uma das constantes (a saber $c_1 = -1$) não é nula. Concluímos que *duas funções são linearmente independentes quando nenhuma delas é múltipla da outra* em um intervalo.

EXEMPLO 8

As funções $f_1(x) = \text{sen}\,2x$ e $f_2(x) = \text{sen}\,x\,\cos x$ são linearmente dependentes no intervalo $(-\infty, \infty)$, pois

$$c_1\,\text{sen}\,2x + c_2\,\text{sen}\,x\,\cos x = 0$$

é satisfeita para todo x real se $c_1 = 1/2$ e $c_2 = -1$. (Lembre-se da identidade trigonométrica $\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x\,\cos x$.) ■

EXEMPLO 9

As funções $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = |x|$ são linearmente independentes no intervalo $(-\infty, \infty)$. Inspecionando a Figura 4.4, convencemo-nos de que nenhuma função é múltipla da outra. Logo, para ter $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) = 0$ para todo x real, devemos escolher $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$. ■

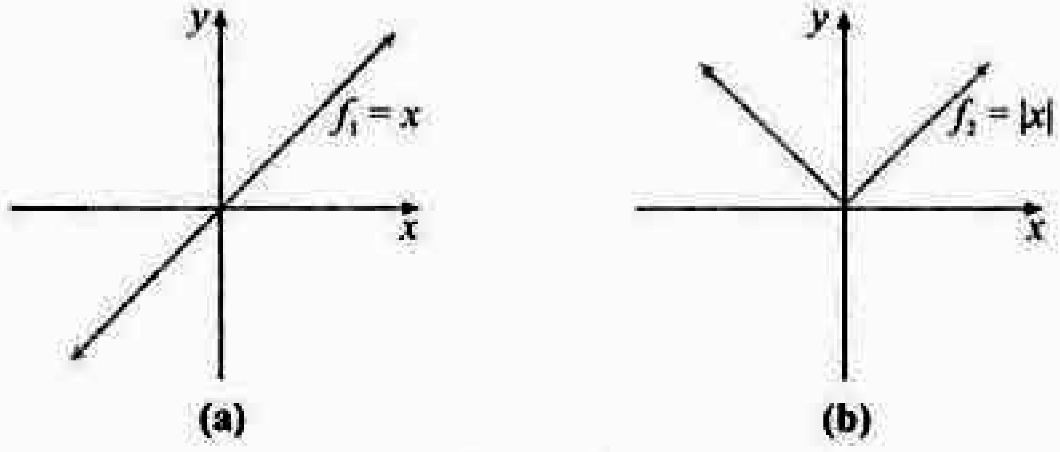

Figura 4.4

Na consideração de dependência linear ou independência linear, o intervalo no qual as funções são definidas é importante. As funções $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = |x|$ do Exemplo 9 são linearmente dependentes no intervalo $(0, \infty)$, pois

$$c_{1x} + c_2|x| = c_1x + c_2x = 0$$

é satisfeita se, por exemplo, $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$.

EXEMPLO 10

As funções $f_1(x) = \cos^2 x, f_2(x) = \text{sen}^2 x, f_3(x) = \sec^2 x, f_4(x) = \text{tg}^2 x$ são linearmente dependentes no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, pois

$$c_1\cos^2 x + c_2\,\text{sen}^2 x + c_3\sec^2 x + c_4\,\text{tg}^2 x = 0,$$

quando $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$. Observamos que $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$ e $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$.

■

Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ é linearmente dependente em um intervalo se pelo menos uma função pode ser expressa como uma combinação linear das outras funções.

EXEMPLO 11

As funções $f_1(x) = \sqrt{x} + 5$, $f_2(x) = \sqrt{x} + 5x$, $f_3(x) = x - 1$, $f_4(x) = x^2$ são linearmente dependentes no intervalo $(0, \infty)$, pois f_2 pode ser escrita como uma combinação linear de f_1, f_3 e f_4. Observe que

$$f_2(x) = 1 \times f_1(x) + 5 \times f_3(x) + 0 \times f_4(x)$$

para todo x no instante $(0, \infty)$. ■

Wronskiano

O seguinte teorema proporciona condição suficiente para a independência linear de n funções em um intervalo. Supomos que cada função seja diferenciável pelo menos $n - 1$ vezes.

TEOREMA 4.2 Critério para Independência Linear de Funções

Suponha que $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ sejam diferenciáveis pelo menos $n - 1$ vezes. Se o determinante

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

for diferente de zero em pelo menos um ponto do intervalo I, então as funções $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ serão linearmente independentes no intervalo.

O determinante do teorema precedente é denotado por

$$W(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

e é chamado o **Wronskiano*** das funções.

* **Josef Maria Hoëne Wronski** (1778-1853) Nascido na Polônia e educado na Alemanha, Wronski passou a maior parte de sua vida na França. Mais um filósofo do que um matemático, ele acreditou que a verdade absoluta poderia ser alcançada através da matemática. Sua única contribuição digna de nota à matemática foi o determinante acima. Sempre um excêntrico, eventualmente tinha crises de insanidade.

Demonstração Provamos o Teorema 4.2 por contradição no caso em que $n = 2$. Suponha que $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$ para um x_0 fixado no intervalo I e que, $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sejam linearmente dependentes no intervalo. O fato de que as funções são linearmente dependentes significa que existem constantes c_1 e c_2, não ambas nulas, para as quais

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

para todo x em I. Derivando essa combinação, temos

$$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0.$$

Obtemos então um sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) &= 0 \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Mas a dependência linear de f_1 e f_2 implica que (2) possui uma solução não trivial para cada x no intervalo. Logo,

$$W(f_1(x), f_2(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0$$

para todo x em I.* Isso contradiz a suposição de que $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$. Concluímos que f_1 e f_2 são linearmente independentes. □

COROLÁRIO

Se $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ possuem pelo menos $n - 1$ derivadas e são linearmente dependentes em I, então

$$W(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) = 0$$

para todo x no intervalo

EXEMPLO 12

As funções $f_1(x) = \operatorname{sen}^2 x$ e $f_2(x) = 1 - \cos 2x$ são linearmente dependentes em $(-\infty, \infty)$. (Por quê?) Pelo corolário precedente, $W(\operatorname{sen}^2 x,\ 1 - \cos 2x) = 0$ para todo número real. Para ver isso, fazemos o seguinte cálculo:

$$W(\operatorname{sen}^2 x,\ 1 - \cos 2x) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 x & 1 - \cos 2x \\ 2 \operatorname{sen} x \cos x & 2 \operatorname{sen} 2x \end{vmatrix}$$

* Veja o Apêndice III para obter uma revisão sobre determinantes.

$$= 2\,\text{sen}^2 x\ \text{sen}\,2x - 2\,\text{sen}\,x\ \cos x$$
$$+ 2\,\text{sen}\,x\ \cos x\ \cos 2x$$
$$= \text{sen}\,2x[2\,\text{sen}^2 x - 1 + \cos 2x]$$
$$= \text{sen}\,2x[2\,\text{sen}^2 x - 1 + \cos^2 x - \text{sen}^2 x]$$
$$= \text{sen}\,2x[\text{sen}^2 x + \cos^2 x - 1] = 0$$

Aqui, usamos as identidades trigonométricas $\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x\ \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ e $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. ■

EXEMPLO 13

Para $f_1(x) = e^{m_1 x}$, $f_2(x) = e^{m_2 x}$, $m_1 \neq m_2$,

$$W(e^{m_1 x}, e^{m_2 x}) = \begin{vmatrix} e^{m_1 x} & e^{m_2 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} \end{vmatrix} = (m_2 - m_1)e^{(m_1 + m_2)x} \neq 0$$

para todo valor real de x. Logo, f_1 e f_2 são linearmente independentes em qualquer intervalo do eixo x. ■

EXEMPLO 14

Se α e β são números reais, $\beta \neq 0$, então $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $y_2 = e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x$ são linearmente independentes em qualquer intervalo do eixo x, pois

$$W(e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x \\ -\beta e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x + \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x & \beta e^{\alpha x}\cos\beta x + \alpha e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x \end{vmatrix}$$
$$= \beta e^{2\alpha x}(\cos^2\beta x + \text{sen}^2\beta x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0.$$

Observe que, quando $\alpha = 0$, $\cos\beta x$ e $\text{sen}\,\beta x$, $\beta \neq 0$, são também linearmente independentes em qualquer intervalo do eixo x. ■

EXEMPLO 15

As funções $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = xe^x$ e $f_3(x) = x^2 e^x$ são linearmente independentes em qualquer intervalo do eixo x, pois

$$W(e^x, xe^x, x^2e^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & xe^x + e^x & x^2e^x + 2xe^x \\ e^x & xe^x + 2e^x & x^2e^x + 4xe^x + 2e^x \end{vmatrix} = 2e^{3x}$$

não se anula em ponto algum. ■

EXEMPLO 16

No Exemplo 9, vimos que $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = |x|$ são linearmente independentes em $(-\infty, \infty)$; porém, não podemos calcular o Wronskiano, pois f_2 não é diferenciável em $x = 0$. ■

Deixamos como exercício mostrar que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ pode ser linearmente independente em algum intervalo, mesmo que o Wronskiano seja nulo. Veja o Problema 30. Em outras palavras, se $W(f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)) = 0$ para todo x em um intervalo, isso não implica necessariamente que as funções sejam linearmente dependentes.

4.1.3 Soluções para Equações Lineares

Equações Homogêneas

Uma equação diferencial de n-ésima ordem da forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{3}$$

é chamada **homogênea**, enquanto

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{4}$$

com $g(x)$ não identicamente zero, é chamada de **não-homogênea.**

A palavra homogênea neste contexto não se refere aos coeficientes como sendo funções homogêneas. Veja a Seção 2.3.

EXEMPLO 17

(a) A equação $$2y'' + 3y' - 5y = 0$$

é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem homogênea.

(b) A equação $$x^3y''' - 2xy'' + 5y' + 6y = e^x$$

é uma equação diferencial ordinária linear de terceira ordem não-homogênea.

Veremos na última parte desta seção, e também nas seções subseqüentes deste capítulo, que, para resolver uma equação não-homogênea (4), devemos primeiro resolver a equação homogênea associada (3).

Nota Para evitar repetições desnecessárias no decorrer deste texto, faremos sempre as seguintes suposições importantes com relação às equações lineares (3) e (4). Em algum intervalo I,

- os coeficientes $a_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, são contínuos;
- a função $g(x)$ é contínua; e
- $a_n(x) \neq 0$ para todo x no intervalo.

Princípio de Superposição

No próximo teorema, vemos que a soma, ou **superposição**, de duas ou mais soluções para uma equação diferencial linear homogênea é também uma solução.

TEOREMA 4.3 Princípio da Superposição – Equações Homogêneas

Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_k$ soluções para a equação diferencial linear de n-ésima ordem homogênea (3) em um intervalo I. Então, a combinação linear

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ky_k(x), \tag{5}$$

em que os c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo.

Demonstração Provaremos o caso $n = k = 2$. Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções para

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Se definirmos $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, então

$$\begin{aligned} &a_2(x)[c_1y_1'' + c_2y_2''] + a_1(x)[c_1y_1' + c_2y_2'] + a_0(x)[c_1y_1 + c_2y_2] \\ &= c_1\underbrace{[a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1]}_{\boxed{\text{zero}}} + c_2\underbrace{[a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2]}_{\boxed{\text{zero}}} \\ &= c_1 \times 0 + c_2 \times 0 = 0. \end{aligned}$$

□

COROLÁRIOS

(A) Um múltiplo $y = c_1y_1(x)$ de uma solução $y_1(x)$ para uma equação diferencial linear homogênea é também uma solução.

(B) Uma equação diferencial linear homogênea sempre possui a solução trivial $y = 0$

O princípio da superposição definido por (5) e seu caso especial dado no Corolário (A) são propriedades que equações diferenciais não-lineares, em geral, não possuem. Veja os Problemas 31 e 32.

EXEMPLO 18

As funções
$$y_1 = x^2 \text{ e } y^2 = x^2 \ln x$$
são ambas soluções para a equação homogênea de terceira ordem
$$x^3y''' - 2xy' + 4y = 0$$
no intervalo $(0, \infty)$. Pelo princípio da superposição, a combinação linear
$$y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x$$
é também uma solução para a equação no intervalo. ■

EXEMPLO 19

As funções $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ e $y_3 = e^{3x}$ satisfazem a equação homogênea
$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0$$
em $(-\infty, \infty)$. Pelo Teorema 4.3, uma outra solução é
$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}.$$
■

EXEMPLO 20

A função $y = x^2$ é uma solução para a equação linear homogênea
$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$$
em $(0, \infty)$. Portanto, $y = cx^2$ é também uma solução. Para vários valores de c, vemos que $y = 3x^2$, $y = ex^2$, $y = 0$, ... são todas soluções para a equação no intervalo. ■

Soluções Linearmente Independentes

Estamos interessados em determinar quando n soluções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ para a equação diferencial **homogênea** (3) são linearmente independentes. Surpreendentemente, o Wronskiano não nulo de um conjunto de n soluções em um intervalo I é necessário e suficiente para a independência linear.

TEOREMA 4.4 Critério para Independência Linear de Soluções

Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n soluções para a equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem (3) em um intervalo I. Então, o conjunto de soluções é linearmente independente em I se e somente se

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$$

para todo x no intervalo.

Demonstração Provemos o Teorema 4.4 no caso $n = 2$. Primeiro, se $W(y_1, y_2) \neq 0$ para todo x em I, segue-se imediatamente do Teorema 4.2 que y_1 e y_2 são linearmente independentes. Agora, devemos mostrar que, se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes para uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem, então $W(y_1, y_2) \neq 0$ para todo x em I. Para ver isso, vamos supor que y_1 e y_2 sejam linearmente independentes e que exista um ponto x_0 em I para o qual $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$. Logo, existem c_1 e c_2, não nulas, tais que

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) &= 0 \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Se definirmos $$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

então, em vista de (6), $y(x)$ satisfaz também

$$y(x_0) = 0, \qquad y'(x_0) = 0. \tag{7}$$

Mas a função identicamente nula satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais (7). Portanto, pelo Teorema 4.1, ela é a única solução. Em outras palavras, $y = 0$, ou seja,

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$$

para todo x em I. Isso contradiz a suposição de que y_1 e y_2 são linearmente independentes no intervalo. □

Da discussão acima, concluímos que, quando $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são n soluções para (3) em um intervalo I, o wronskiano é identicamente nulo ou nunca se anula no intervalo.

DEFINIÇÃO 4.3 Conjunto Fundamental de Soluções

Qualquer conjunto $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem (3) em um intervalo I é chamado de conjunto fundamental de soluções no intervalo.

TEOREMA 4.5

Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem (3) em um intervalo I. Então, toda solução $Y(x)$ para (3) é uma combinação linear das n soluções independentes $y_1, y_2, \ldots, y_n$, ou seja, podemos encontrar constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, tais que

$$Y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x).$$

Demonstração Provamos o caso $n = 2$. Seja Y uma solução e sejam y_1, y_2 duas soluções linearmente independentes para

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

em um intervalo I. Suponha que $x = t$ seja um ponto desse intervalo para o qual $W(y_1(t), y_2(t)) \neq 0$. Suponha também que os valores de $Y(t)$ e $Y'(t)$ sejam dados por

$$Y(t) = k_1, \qquad Y'(t) = k_2.$$

Se examinarmos agora o sistema de equações

$$C_1y_1(t) + C_2y_2(t) = k_1$$

$$C_1y_1'(t) + C_2y_2'(t) = k_2,$$

segue-se que podemos determinar C_1 e C_2 de maneira única, desde que o determinante dos coeficientes satisfaça

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Mas esse determinante é simplesmente o wronskiano calculado no ponto $x = t$ e, por hipótese, $W \neq 0$. Definindo então a função,

$$G(x) = C_1y_1(x) + C_2y_{2(x)}$$

observamos que:

(i) $G(x)$ satisfaz a equação diferencial, pois ela é a superposição de duas soluções y1 e y2.

(ii) $G(x)$ satisfaz as condições iniciais

$$G(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) = k_1$$

$$G'(t) = C_1y_1'(t) + C_2y_2'(t) = k_2.$$

(iii) $Y(x)$ satisfaz a *mesma* equação linear e as *mesmas* condições iniciais.

Como a solução para esse problema linear de valor inicial é única (Teorema 4.1), temos $Y(x) = G(x)$, ou

$$Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x). \qquad \square$$

A questão básica de existência de um conjunto fundamental para uma equação linear é respondida no próximo teorema.

TEOREMA 4.6 Existência de um Conjunto Fundamental

Existe um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem (3) em um intervalo I.

A prova deste resultado segue-se do Teorema 4.1. A justificativa do Teorema 4.6 no caso especial de equações de segunda ordem é derivada como exercício.

Como mostramos que qualquer solução para (3) é obtida por uma combinação linear de funções em um conjunto fundamental de soluções, podemos dar a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 4.4 Solução Geral – Equações Homogêneas

Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem (3) em um intervalo I. A solução geral para a equação no intervalo é definida por

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x),$$

em que os c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ são constantes arbitrárias.

Lembre-se de que a solução geral, como definida na Seção 1.1, é também chamada de **solução completa** para a equação diferencial.

EXEMPLO 21

A equação de segunda ordem $y'' - 9y = 0$ possui duas soluções

$$y_1 = e^{3x} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{-3x}.$$

Como
$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

para todo valor de x, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções em $(-\infty, \infty)$. A solução geral para a equação diferencial no intervalo é

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}. \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 22

Você deve verificar que a função $y = 4 \operatorname{senh} 3x - 5e^{-3x}$ também satisfaz a equação diferencial do Exemplo 21. Escolhendo $c_1 = 2$, $c_2 = -7$ na solução geral $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$, obtemos

$$\begin{aligned} y &= 2e^{3x} - 7e^{-3x} \\ &= 2e^{3x} - 2e^{-3x} - 5e^{-3x} \\ &= 4\left(\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}\right) - 5e^{-3x} \\ &= 4 \operatorname{senh} 3x - 5e^{-3x}. \end{aligned}$$

■

EXEMPLO 23

As funções $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ e $y_3 = e^{3x}$ satisfazem a equação de terceira ordem

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

Como
$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0$$

para todo valor real de x, y_1, y_2 e y_3 formam um conjunto fundamental de soluções em $(-\infty, \infty)$. Concluímos que

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$$

é a solução geral para a equação diferencial no intervalo. ■

Equações Não-homogêneas

Voltamos agora nossa atenção para a definição de solução geral para uma equação linear **não-homogênea**. Qualquer função y_p, independente de parâmetros, que satisfaça (4) é chamada de **solução particular** para a equação (algumas vezes é chamada de **integral particular**).

EXEMPLO 24

(a) Uma solução particular para

$$y'' + 9y = 27$$

é $y_p = 3$ pois $y_p'' = 0$ e $0 + 9y_p = 9(3) = 27$.

(b) $y_p = x - x$ é uma solução particular para

$$x^2y'' + 2xy' - 8y = 4x^3 + 6x$$

pois $y_p' = 3x^2 - 1$, $y_p'' = 6x$, e

$$x^2y_p'' + 2xy_p' - 8y_p = x^{2(6x)} + 2x(3x^2 - 1) - 8\ (x^3 - x) = 4x^3 + 6x. \qquad \blacksquare$$

TEOREMA 4.7

Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluções para a equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem (3) em um intervalo I e seja y_p qualquer solução para a equação não-homogênea (4) no mesmo intervalo. Então,

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ky_k(x) + y_p(x)$$

é também uma solução para a equação não-homogênea no intervalo para quaisquer constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Podemos agora provar o análogo do Teorema 4.5 para as equações diferenciais não-homogêneas.

TEOREMA 4.8

Seja y_p uma dada solução para a equação diferencial linear não-homogênea de n-ésima ordem (4) em um intervalo I e sejam $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ um conjunto fundamental de soluções para a equação homogênea associada (3) no intervalo. Então, para qualquer solução $Y(x)$ de (4) em I, podemos encontrar constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tais que

$$Y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) + y_p(x).$$

Demonstração Provamos o caso $n = 2$. Suponha que Y e y_p sejam ambas soluções para

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Se definirmos uma função u por $u(x) = Y(x) - y_p(x)$, então

$$\begin{aligned} &a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u \\ &= a_2(x)[Y'' - y_p''] + a_1(x)[Y' - y_p'] + a_0(x)[Y - y_p] \\ &= a_2(x)Y'' + a_1(x)Y' + a_0(x)Y - [a_2(x)y_p'' + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p] \\ &= g(x) - g(x) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, em vista da Definição 4.4 e do Teorema 4.5, podemos escrev

$$u(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

$$Y(x) - y_p(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

ou

$$Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x). \qquad \square$$

Logo, chegamos à última definição desta seção.

DEFINIÇÃO 4.5 Solução Geral – Equações Não-homogêneas

Seja y_p uma dada solução para a equação diferencial linear não-homogênea de n-ésima ordem (4) em um intervalo I e seja

$$y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$$

a solução geral para a equação homogênea associada (3) no intervalo. A **solução geral** para a equação não-homogênea no intervalo é definida por

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x) + y_p(x) = y_c(x) + y_p(x).$$

Função Complementar

Na Definição 4.5, a combinação linear

$$y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x),$$

que é a solução geral para (3), é chamada de **função complementar** para a equação (4). Em outras palavras, a solução geral para uma equação diferencial linear não-homogênea é

$$y = \textbf{\textit{função complementar + qualquer solução particular.}}$$

EXEMPLO 25

Por substituição, verificamos facilmente que a função $y_p = -\frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$ é uma solução particular para a equação não-homogênea

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 3x. \qquad \textbf{(8)}$$

Para escrever a solução geral para (8), devemos também ser capazes de resolver a equação homogênea associada

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

Mas no Exemplo 23 vimos que a solução geral para essa última equação no intervalo $(-\infty, \infty)$ era

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}.$$

Portanto, a solução geral para (8) no intervalo é

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} - \frac{11}{12} - \frac{1}{2}x. \qquad \blacksquare$$

Outro Princípio de Superposição

O último teorema dessa discussão será útil na Seção 4.4, quando considerarmos um método para encontrar soluções particulares para equações não-homogêneas.

TEOREMA 4.9 Princípio de Superposição – Equações Não-homogêneas

Sejam $y_{p1}, y_{p2}, \ldots, y_{pk}$ k soluções particulares para a equação diferencial linear de n-ésima ordem (4) em um intervalo I, correspondendo a k funções distintas $g_1, g_2, \ldots, g_k$. Isto é, suponha que y_{pi} seja uma solução particular para a equação diferencial correspondente

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_i(x),$$

em que $i = 1, 2, \ldots, k$. Então,

$$y_p = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \ldots + y_{pk}(x)$$

é uma solução particular para

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$
$$= g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_k(x).$$

Deixamos a prova desse resultado quando $k = 2$ como exercício. Veja o Problema 50.

E X E M P L O 26

Você deve verificar que

$y_{p1} = -4x^2$ é uma solução particular para $y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8$

$y_{p2} = e^{2x}$ é uma solução particular para $y'' - 3y' + 4y = 2e^{2x}$

$y_{p3} = xe^x$ é uma solução particular para $y'' - 3y' + 4y = 2xe^x - e^x$.

Segue-se do Teorema 4.9 que a superposição de y_{p1}, y_{p2} e y_{p3},

$$y = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} = -4x^2 + e^{2x} + xe^x,$$

é uma solução para

$$y'' - 3y' + 4y = \underbrace{-16x^{2x} + 24x - 8}_{g_1(x)} + \underbrace{2e^{2x}}_{g_2(x)} + \underbrace{2xe^x - e^x}_{g_3(x)}.$$

■

Antes de realmente começarmos a resolver equações diferenciais homogêneas e não-homogêneas, precisamos ainda da teoria adicional apresentada na próxima seção.

Nota Um sistema físico que varia com o tempo e cujo modelo matemático é uma equação diferencial linear

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

é chamado de **sistema linear**. Os valores das variáveis $y(t)$, $y'(t)$, ..., $y^{(n-1)}(t)$ em um tempo específico t_0 descrevem o **estado** do sistema. A função g é chamada de **função aplicada**, **função de força** ou **função de excitação**. Uma solução $y(t)$ para a equação diferencial é chamada de **saída** ou **resposta** do sistema. A dependência da resposta à função aplicada é ilustrada na Figura 4.5.

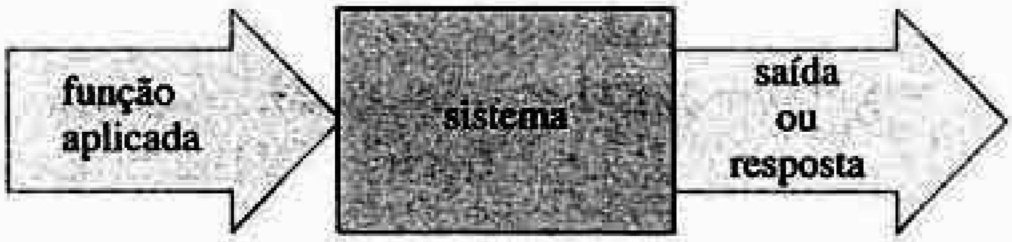

Figura 4.5

Para que um sistema físico seja um sistema linear, é necessário que o princípio de superposição (Teorema 4.9) seja válido no sistema; isto é, a resposta do sistema a uma superposição de aplicações é uma superposição de respostas.

4.1 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão nas páginas 448 a 450.

[4.1.1]

1. Sabe-se que $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$

   é uma família a dois parâmetros de soluções para $y'' - y = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Encontre um membro dessa família satisfazendo as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2. Encontre uma solução para a equação diferencial do Problema 1 satisfazendo as condições de contorno $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

3. Sabe-se que $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}$

   é uma família a dois parâmetros de soluções para $y'' - 3y' - 4y = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Encontre um membro dessa família que satisfaça as condições iniciais $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

4. Sabe-se que $\quad y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$

   é uma família a três parâmetros de soluções para $y''' + y' = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Encontre um membro dessa família que satisfaça as condições iniciais $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 2$, $y''(\pi) = -1$.

5. Sabe-se que $\quad y = c_1x + c_2x \ln x$

   é uma família a dois parâmetros de soluções para $x^2y'' - xy' + y = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Encontre um membro dessa família que satisfaça as condições iniciais $y(1) = 3$, $y'(1) = -1$.

6. Sabe-se que $\quad y = c_1 + c_2x^2$

   é uma família a dois parâmetros de soluções para $xy'' - y' = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Mostre que não existem constantes c_1 e c_2 para que um membro dessa família satisfaça as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Explique por que isso não constitui uma violação do Teorema 4.1.

7. Encontre dois membros da família de soluções para $xy'' - y' = 0$ dada no Problema 6, que satisfaçam as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

8. Encontre um membro da família de soluções para $xy'' - y' = 0$ dada no Problema 6, que satisfaça as condições de contorno $y(0) = 1$, $y'(1) = 6$. O Teorema 4.1 garante que esta solução é única?

9. Sabe-se que $\quad y = c_1e^x \cos x + c_2e^x \operatorname{sen} x$

   é uma família a dois parâmetros de soluções para $y'' - 2y' + 2y = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Encontre, se existir, um membro dessa família que satisfaça as condições

   (a) $y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 0$ $\qquad$ **(b)** $y(0) = 1$, $\quad y(\pi) = -1$

   (c) $y(0) = 1$, $\quad y(\pi/2) = 1$ $\qquad$ **(d)** $y(0) = 0$, $\quad y(\pi) = 0$.

10. Sabe-se que $\quad y = c_1x^2 + c_2x^4 + 3$

    é uma família a dois parâmetros de soluções para $x^2y'' - 5xy' + 8y = 24$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Encontre, se existir, um membro dessa família que satisfaça as condições

    (a) $y(-1) = 0$, $\quad y(1) = 4$ $\qquad$ **(b)** $y(0) = 1$, $\quad y(1) = 2$

    (c) $y(0) = 3$, $\quad y(1) = 0$ $\qquad$ **(d)** $y(0) = 3$, $\quad y(2) = 15$.

Nos Problemas 11 e 12, encontre um intervalo em torno de $x = 0$ no qual o problema de valor inicial dado tenha uma única solução.

11. $(x - 2)y'' + 3y = x$; $\quad y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

12. $y'' + (\operatorname{tg} x)y = e^x$; $\quad y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

13. Sabe-se que $y = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x$ é uma família de soluções para a equação diferencial $y'' + \lambda^2 y = 0$. Determine os valores de parâmetro λ para os quais o problema de valor de contorno

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(\pi) = 0,$$

possua soluções não triviais.

14. Determine os valores do parâmetro λ para os quais o problema de valor de contorno

$$y'' + \lambda^2 y \lambda 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(5) = 0,$$

possua soluções não triviais. Veja o Problema 13.

[4.1.2]

Nos Problemas 15-22, determine se as funções dadas são linearmente independentes ou dependentes em $(-\infty, \infty)$.

15. $f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = 4x - 3x^2$

16. $f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = e^x$

17. $f_1(x) = 5, \quad f_2(x) = \cos^2, \quad f_3(x) = \operatorname{sen}^2 x$

18. $f_1(x) = \cos 2x, \quad f_2(x) = 1, \quad f_3(x) = \cos^2 x$

19. $f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x - 1, \quad f_3(x) = x + 3$

20. $f_1(x) = 2 + x, \quad f_2(x) = 2 + |x|,$

21. $f_1(x) = 1 + x, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^2$

22. $f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^{-x}, \quad f_3(x) = \operatorname{senh} x$

Nos Problemas 23-28, mostre, calculando o Wronskiano, que as funções dadas são linearmente independentes no intervalo indicado.

23. $x^{1/2}, x^2;\ (0, \infty)$

24. $1 + x, x^3;\ (-\infty, \infty)$

25. $\operatorname{sen} x, \operatorname{cosc} x;\ (0, \pi)$

26. $\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x;\ (0, \pi/2)$

27. $e^x, e^{-x}, e^{4x};\ (-\infty, \infty)$

28. $x, x \ln x, x^2 \ln x;\ (0, \infty)$

29. Observe que, para as funções $f_1(x) = 2$ e $f_2(x) = e^x$,

$$1 \times f_1(0) - 2 \times f_2(0) = 0.$$

Isso implica que as funções f_1 e f_2 são linearmente dependentes em qualquer intervalo contendo $x = 0$?

30. **(a)** Mostre graficamente que $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x|x|$ são linearmente independentes em $(-\infty, \infty)$.

(b) Mostre que $W(f_1(x), f_2(x)) = 0$ para todo número real.

[4.1.3]

31. (a) Verifique que $y = 1/x$ é uma solução para a equação diferencial não-linear $y'' = 2y^3$ no intervalo $(0, \infty)$.

(b) Mostre que um múltiplo $y = c/x$ não é uma solução para a equação quando $c \neq 0, \pm 1$.

32. (a) Verifique que $y_1 = 1$ e $y_2 = \ln x$ são soluções para a equação diferencial não-linear $y'' + (y')^2 = 0$ no intervalo $(0, \infty)$.

(b) $y_1 + y_2$ é uma solução para a equação? $c_1y_1 + c_2y_2$, c_1 e c_2 constantes arbitrárias, é uma solução para a equação?

Nos Problemas 33-40, verifique que as funções dadas formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial no intervalo indicado. Forme a solução geral.

33. $y'' - y' - 12y = 0$; e^{-3x}, e^{4x}, $(-\infty, \infty)$

34. $y'' - 4y = 0$; $\cosh 2x$, $\operatorname{senh} 2x$, $(-\infty, \infty)$

35. $y'' - 2y' + 5y = 0$; $e^x \cos 2x$, $e^x \operatorname{sen} 2x$, $(-\infty, \infty)$

36. $4y'' - 4y' + y = 0$; $e^{x/2}$, $xe^{x/2}$, $(-\infty, \infty)$

37. $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$; x^3, x^4, $(0, \infty)$

38. $x^2y'' + xy' + y = 0$; $\cos(\ln x)$, $\operatorname{sen}(\ln x)$, $(0, \infty)$

39. $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$; x, x^{-2}, $x^{-2} \ln x$, $(0, \infty)$

40. $y^{(4)} + y'' = 0$; 1, x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $(-\infty, \infty)$

Nos Problemas 41-44, verifique que a dada família a dois parâmetros de funções é a solução geral para a equação diferencial não-homogênea no intervalo indicado.

41. $y'' - 7y' + 10y = 24e^x$
$y = c_1e^{2x} + c_2e^{5x} + 6e^x$, $(-\infty, \infty)$

42. $y'' - y = \sec x$
$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + (\cos x) \ln(\cos x)$, $(-\pi/2, \pi/2)$

43. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4x - 12$
$y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + x^2e^{2x} + x - 2$, $(-\infty, \infty)$

44. $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$
$y = c_1x^{-1/2} + c_2x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x$, $(0, \infty)$

45. (a) Verifique que $y_1 = x^3$ e $y_2 = |x|^3$ são linearmente independentes da equação diferencial $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ em $(-\infty, \infty)$.

(b) Mostre que $W(y_1, y_2) = 0$ para todo número real.

(c) O resultado da parte (b) viola o Teorema 4.4?

(d) Verifique que $Y_1 = x^3$ e $Y_2 = x^2$ são também soluções linearmente independentes para a equação diferencial no intervalo $(-\infty, \infty)$.

(e) Encontre uma solução para a equação que satisfaça $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

(f) Pelo princípio da superposição ambas as combinações lineares

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \quad \text{e} \quad y = c_1Y_1 + c_2Y_2$$

são soluções para a equação diferencial. Qual delas é a solução geral para a equação diferencial em $(-\infty, \infty)$?

46. Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{9}$$

em que $a_2(x)$, $a_1(x)$ e $a_0(x)$ são contínuas em um intervalo I e $a_2(x) \neq 0$ para todo x no intervalo. Pelo Teorema 4.1, existe somente uma solução y_1 para a equação que satisfaça $y(x_0) = 1$ e $y'(x_0) = 0$, em que x_0 é um ponto de I. Da mesma forma, existe uma única solução y_2 para a equação que satisfaça $y(x_0) = 0$ e $y'(x_0) = 1$. Mostre que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial no intervalo I.

47. Sejam y_1 e y_2 duas soluções para (9).

(a) Se $W(y_1, y_2)$ é o Wronskiano de y_1 e y_2, mostre que

$$a_2(x)\frac{dW}{dx} + a_1(x)W = 0.$$

(b) Deduza a **fórmula de Abel***

$$W = ce^{-\int [a_1(x)/a_2(x)]dx}$$

em que c é uma constante.

---

* **Niels Henrik Abel** (1802-1829) Abel foi um brilhante matemático norueguês cuja morte trágica aos 26 anos, devida à tuberculose, representou uma perda inestimável para a matemática. Seu grande feito foi a solução para um problema que confundiu os matemáticos por séculos: ele mostrou que uma equação polinomial geral para quinta ordem não pode ser resolvida algebricamente – isto é, em termos de radicais. Contemporâneo de Abel, o francês Evariste Galois, então provou que era impossível resolver qualquer equação geral para grau maior que quatro algebricamente. Galois é outra figura trágica na história da matemática; ativista político, foi morto em um duelo aos 22 anos de idade.

(c) Usando uma forma alternativa da fórmula de Abel

$$W = ce^{-\int_{x_0}^{x} [a_1(t)/a_2(t)]dt},$$

para x_0 em I, mostre que

$$W(y_1, y_2) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} [a_1(t)/a_2(t)]dt}.$$

(d) Mostre que, se $W(x_0) = 0$, então $W = 0$ para todo x em I, enquanto, se $W(x_0) \neq 0$, então $W \neq 0$ para todo x no intervalo.

Nos Problemas 48 e 49, use os resultados do Problema 47.

48. Se y_1 e y_2 são duas soluções para

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

em $(-1, 1)$, mostre que $W(y_1, y_2) = c/(1 - x^2)$, em que c é uma constante.

49. No Capítulo 6, veremos que as soluções y_1 e y_2 para $xy'' + y' + xy = 0$, $0 < x < \infty$, são séries infinitas. Suponha que consideremos as condições iniciais

$$y_1(x_0) = k_1, \quad y_1'(x_0) = k_2$$

e

$$y_2(x_0) = k_3, \quad y_2'(x_0) = k_4$$

para $x_0 > 0$. Mostre que

$$W(y_1, y_2) = \frac{(k_1k_4 - k_2k_3)x_0}{x}.$$

50. Suponha que um modelo matemático de um sistema linear seja dado por

$$a_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)\,y = E(t)$$

Se y_1 é uma resposta do sistema a uma aplicação $E_1(t)$ e y_2 é uma resposta do mesmo sistema a uma aplicação $E_2(t)$, mostre que, $y_1 + y_2$ é uma resposta do sistema à aplicação $E_1(t) + E_2(t)$.

4.2 CONSTRUINDO UMA SEGUNDA SOLUÇÃO A PARTIR DE UMA SOLUÇÃO CONHECIDA

Redução de Ordem

Um dos fatos mais interessantes e importantes no estudo de equações diferenciais lineares de *segunda ordem* é que podemos construir uma segunda solução a partir de uma solução *conhecida*. Suponha que $y_1(x)$ seja uma solução não trivial para a equação

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{1}$$

Supomos, como fizemos na seção precedente, que os coeficientes em (1) são contínuos e $a_2(x) \neq 0$ para todo x em um intervalo I. O processo que usaremos para encontrar uma segunda solução $y_2(x)$ consiste em **reduzir a ordem** da equação (1), transformando-a em uma equação de primeira ordem. Por exemplo, verifica-se facilmente que $y_1 = e^x$ satisfaz a equação diferencial $y'' - y = 0$. Se tentarmos determinar uma solução da forma $y = u(x)e^x$ então

$$y' = ue^x + e^x u'$$

$$y'' = ue^x + 2e^x u' + e^x u''$$

assim $$y'' - y = e^x(u'' + 2u') = 0.$$

Como $e^x \neq 0$, esta última equação implica que $u'' + 2u' = 0$.

Se fizermos $w = u'$, então a equação acima será uma equação linear de primeira ordem em w, $w' + 2w = 0$. Usando o fator de integração e^{2x}, podemos escrever,

$$\frac{d}{dx}[e^{2x}w] = 0$$

$$w = c_1e^{-2x} \quad \text{ou} \quad u' = c_1e^{-2x}.$$

Logo, $$u = -\frac{c_1}{2}e^{-2x} + c_2$$

assim, $$y = u(x)e^x = -\frac{c_1}{2}e^{-x} + c_2e^x.$$

Escolhendo $c_2 = 0$ e $c_1 = -2$, obtemos a segunda solução $y_2 = e^{-x}$. Como $W(e^x, e^{-x}) \neq 0$ para todo x, as soluções são linearmente independentes em $(-\infty, \infty)$, portanto a expressão para y é de fato a solução geral para a equação dada.

EXEMPLO 1

Sabendo-se que $y_1 = x^3$ é uma solução para $x^2y'' - 6y = 0$, use redução de ordem para encontrar uma segunda solução no intervalo $(0, \infty)$.

Solução Defina $y = u(x)x^3$

em que $$y' = 3x^2u + x^3u'$$

$$y'' = x^3u'' + 6x^2u' + 6xu$$

$$x^2y'' - 6y = x^2(x^3u'' + 6x^2u' + 6xu) - 6ux^3$$

$$= x^5u'' + 6x^4u' = 0$$

desde que $u(x)$ seja uma solução para

$$x^5u'' + 6x^4u' = 0 \quad \text{ou} \quad u'' + \frac{6}{x}u' = 0.$$

Se $w = u'$, obtemos uma equação linear de primeira ordem

$$w' + \frac{6}{x}w = 0,$$

a qual possui o fator de integração $e^{6\int dx/x} = e^{6\ln x} = x^6$. Agora,

$$\frac{d}{dx}[x^6w] = 0 \quad \text{implica} \quad x^6w = c_1.$$

Portanto,

$$w = u' = \frac{c_1}{x^6}$$

$$u = -\frac{c_1}{5x^5} + c_2$$

$$y = u(x)x^3 = -\frac{c_1}{5x^2} + c_2x^3.$$

Escolhendo $c_2 = 0$ e $c_1 = -5$, obtemos a segunda solução $y_2 = 1/x^2$. ■

Caso Geral

Dividindo a equação (1) por $a_2(x)$, esta toma a forma padrão

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{2}$$

em que $P(x)$ e $Q(x)$ são contínuas em algum intervalo I. Vamos supor ainda que $y_1(x)$ seja uma solução conhecida para (2) em I e que $y_1(x) \neq 0$ para todo x no intervalo. Se definirmos $y = u(x)y_1(x)$, segue-se que

$$y' = uy_1' + y_1u'$$

$$y'' = uy_1'' + 2y_1'u' + y_1u''$$

$$y'' + Py' + Qy = u\underbrace{[y_1'' + Py_1' + Qy_1]}_{\boxed{\text{zero}}} + y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0.$$

Isso implica que devemos ter

$$y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0$$

ou

$$y_1w' + (2y_1' + Py_1)w = 0, \tag{3}$$

em que substituímos $w = u'$. Observe que a equação (3) é linear e separável. Aplicando esta última técnica, obtemos

$$\frac{dw}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1}dx + P\,dx = 0$$

$$\ln|w| + 2\ln|y_1| = -\int P\,dx + c$$

$$\ln|wy_1^2| = -\int P\,dx + c$$

$$wy_1^2 = c_1 e^{-\int P\,dx}$$

$$w = u' = c_1\frac{e^{-\int P\,dx}}{y_1^2}.$$

Integrando novamente $\quad u = c_1\displaystyle\int \frac{e^{-\int P\,dx}}{y_1^2}dx + c_2, \quad$ e portanto

$$y = u(x)y_1(x) = c_1 y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2(x)}dx + c_2 y_1(x).$$

Escolhendo $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$, concluímos que uma segunda solução para a equação (2) é

$$y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2(x)}dx. \tag{4}$$

É um bom exercício de derivação começar com a fórmula (4) e verificar que a equação (2) é satisfeita.

Agora, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes, pois

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1\displaystyle\int \frac{e^{-\int P\,dx}}{y_1^2}dx \\ y_1' & \dfrac{e^{-\int P\,dx}}{y_1} + y_1'\displaystyle\int \frac{e^{-\int P\,dx}}{y_1^2}dx \end{vmatrix} = e^{-\int P\,dx}$$

é diferente de zero em qualquer intervalo em que $y_1(x)$ seja diferente de zero.*

* Uma maneira alternativa é: se $y_2 = u(x)y_1$, então $W(y_1, y_2) = u'(y_1)^2 \neq 0$, pois, $y_1 \neq 0$ para todo x em algum intervalo. Se $u' = 0$, então $u' =$ constante.

EXEMPLO 2

A função $y_1 = x^2$ é uma solução para $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$. Encontre a solução geral no intervalo $(0, \infty)$.

Solução Como a equação pode ser escrita na forma alternativa

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0,$$

obtemos de (4)

$$y_2 = x^2 \int \frac{e^{3\int dx/x}}{x^4}\,dx \qquad \boxed{e^{3\int dx/x} = e^{\ln x^3} = x^3}$$

$$= x^2 \int \frac{dx}{x} = x^2 \ln x.$$

A solução geral em $(0, \infty)$ é dada por $y = c_1y_1 + c_2y_2$; isto é,

$$y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x.$$

■

EXEMPLO 3

Pode ser verificado que $y_1 = \dfrac{\text{sen } x}{\sqrt{x}}$ é uma solução para $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ em $(0, \pi)$. Encontre uma segunda solução.

Solução Primeiro, ponha a equação na forma

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0.$$

Então, de (4) temos

$$y_2 = \frac{\text{sen } x}{\sqrt{x}} \int \frac{e^{-\int dx/x}}{\left(\dfrac{\text{sen } x}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx \qquad \boxed{e^{-\int dx/x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}}$$

$$= \frac{\text{sen } x}{\sqrt{x}} \int \text{cosec}^2 x\,dx$$

$$= \frac{\text{sen } x}{\sqrt{x}}(-\text{cotg}\, x) = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

Como a equação diferencial é homogênea, podemos desconsiderar o sinal negativo e obter a segunda solução $y_2 = (\cos x)/\sqrt{x}$.

■

Observe que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ no Exemplo 3 são soluções linearmente independentes da equação diferencial dada no intervalo maior $(0, \infty)$.

Observação Deduzimos e ilustramos como usar (4) porque você verá essa fórmula novamente na Seção 6.1. Usamos (4) simplesmente para economizar tempo na obtenção do resultado desejado. Seu professor irá dizer-lhe se você deve memorizar (4) ou se deve saber os primeiros princípios de redução de ordem.

4.2 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 450.

Nos Problemas 1-30, encontre uma segunda solução para cada equação diferencial. Use redução de ordem ou a fórmula (4) como ensinada. Suponha um intervalo apropriado.

1. $y'' + 5y' = 0;\ y_1 = 1$

2. $y'' - y' = 0;\ y_1 = 1$

3. $y'' - 4y' + 4y = 0;\ y_1 = e^{2x}$

4. $y'' + 2y^1 + y = 0;\ y_1 = xe^{-x}$

5. $y'' + 16y = 0;\ y_1 = \cos 4x$

6. $y'' + 9y = 0;\ y_1 = \operatorname{sen} 3x$

7. $y'' - y = 0;\ y_1 = \cosh x$

8. $y'' - 25y = 0;\ y_1 = e^{5x}$

9. $9y'' - 12y' + 4y = 0;\ y_1 = e^{2x/3}$

10. $6y'' + y' - y = 0;\ y_1 - e^{x/3}$

11. $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0;\ y_1 = x^4$

12. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0;\ y_1 = x^2$

13. $xy'' + y' = 0;\ y_1 = \ln x$

14. $4x^2y'' + y = 0;\ x^{1/2}\ln x$

15. $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0;\ y_1 = x + 1$

16. $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0;\ y_1 = 1$

17. $x^2y'' - xy' + 2y = 0;\ y_1 = x\operatorname{sen}(\ln x)$

18. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0;\ y_1 = x^2\cos(\ln x)$

19. $(1 + 2x)y'' + 4xy' - 4y = 0;\ y_1 = e^{-2x}$

20. $(1 + x)y'' + xy' - y = 0;\ y_1 = x$

21. $x^2y'' - xy' + y = 0;\ y_1 = x$

22. $x^2y'' - 20y = 0;\ y_1 = x^{-4}$

23. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0;\ y_1 = x^3\ln x$

24. $x^2y'' + xy' + y = 0;\ y_1 = \cos(\ln x)$

25. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0;\ y_1 = x^2 + x^3$

26. $x^2y'' - 7xy' - 20y = 0;\ y_1 = x^{10}$

27. $(3x + 1)y'' - (9x + 6)y' + 9y = 0;\ y_1 = e^{3x}$

28. $xy'' - (x + 1)y' + y = 0;\ y_1 = e^x$

29. $y'' - 3(\operatorname{tg} x)y' = 0;\ y_1 = 1$

30. $xy'' - (2 + x)y' = 0;\ y_1 = 1$

Nos Problemas 31-34, use o método de redução de ordem para encontrar uma solução para a equação não-homogênea dada. A função indicada $y_1(x)$ é uma solução para a equação homogênea associada. Determine uma segunda solução para a equação homogênea e uma solução particular da equação não-homogênea.

31. $y'' - 4y = 2;\ y_1 = e^{-2x}$

32. $y'' + y' = 1;\ y_1 = 1$

33. $y'' - 3y' + 2y = 5e^{3x};\ y_1 = e^x$

34. $y'' - 4y' + 3y = x;\ y_1 = e^x$

35. Verifique por substituição direta que a fórmula (4) satisfaz a equação (2).

4.3 EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Vimos que a equação linear de primeira ordem $dy/dx + ay = 0$, em que a é uma constante, possui a solução exponencial $y = c_1e^{-ax}$ em $(-\infty, \infty)$. Portanto, é natural procurar determinar se soluções exponenciais existem em $(-\infty, \infty)$ para equações de ordem maior como

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0, \tag{1}$$

em que os a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ são constantes. O fato surpreendente é que *todas* as soluções para (1) são funções exponenciais ou construídas a partir de funções exponenciais. Começamos considerando o caso especial da equação de segunda ordem

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Equação Auxiliar

Se tentarmos uma solução da forma $y = e^{mx}$, então $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2e^{mx}$; assim a equação (2) torna-se

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \quad \text{ou} \quad e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

Como e^{mx} nunca se anula para valores reais de x, então a única maneira de fazer essa função exponencial satisfazer a equação diferencial é escolher m de tal forma que ele seja raiz da equação quadrática

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{3}$$

Essa última equação é chamada de **equação auxiliar** ou **equação característica** da equação diferencial (2). Consideramos três casos, a saber: as soluções para a equação auxiliar correspondem a raízes reais distintas, raízes reais iguais e raízes complexas conjugadas.

CASO I Raízes Reais Distintas Com a hipótese de que a equação auxiliar (3) possui duas raízes reais distintas m_1 e m_2, encontramos duas soluções

$$y_1 = e^{m_1x} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{m_2x}.$$

Vimos que essas funções são linearmente independentes em $(-\infty, \infty)$ (veja Exemplo 13, Seção 1.4) e portanto formam um conjunto fundamental. Segue-se que a solução geral para (2) nesse intervalo é

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}. \tag{4}$$

CASO II Raízes Reais Iguais Quando $m_1 = m_2$, obtemos somente uma solução exponencial $y_1 = e^{m_1 x}$. Porém, segue-se imediatamente da discussão da Seção 4.2 que uma segunda solução é

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{-(b/a)x}}{e^{2m_1 x}}\, dx. \tag{5}$$

Mas, da forma quadrática, temos que $m_1 = -b/2a$, pois a única maneira de ter $m_1 = m_2$ é ter $b^2 - 4ac = 0$. Em vista do fato de que $2m_1 = -b/a$, (5) torna-se

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}}\, dx = e^{m_1 x} \int dx = x e^{m_1 x}.$$

A solução geral para (2) é então

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}. \tag{6}$$

CASO III Raízes Complexas Conjugadas Se m_1 e m_2 são complexas, então podemos escrever

$$m_1 = \alpha + i\beta \quad \text{e} \quad m_2 = \alpha - i\beta,$$

em que α e $\beta > 0$ são reais e $i^2 = -1$. Formalmente, não há diferença entre este caso e o Caso 1, em que

$$y = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

Porém, na prática, preferimos trabalhar com funções reais em vez de exponenciais complexas. Para este fim, usamos a fórmula de Euler:*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta,$$

---

* **Leonhard Euler** (1707-1783) Um homem com uma memória prodigiosa e um poder de concentração fenomenal, Euler teve interesses universais; foi teólogo, físico, astrônomo, lingüista, psicólogo, conhecedor dos clássicos e, principalmente matemático. Euler foi considerado um verdadeiro gênio do século. Em matemática, fez contribuições permanentes para a álgebra, trigonometria, geometria analítica, cálculo, cálculo das variações, equações diferenciais, variável complexa, teoria dos números e topologia. Sua produção matemática parece não ter sido afetada pelos 13 filhos ou pela cegueira que o acometeu em seus 17 últimos anos de vida. Euler escreveu mais de 700 trabalhos e 32 livros sobre matemática e foi responsável pela introdução de muitos símbolos (tais como e, π e $i = \sqrt{-1}$) e notações que ainda são usadas (como $f(x)$, Σ, sen x e cos x). Euler nasceu em Basiléia, Suíça, em 15 de abril de 1707 e morreu de derrame cerebral em São Petersburgo em 18 de setembro de 1783, quando trabalhava na corte da imperatriz russa Catarina, a Grande.

Veja o Apêndice IV para obter uma revisão sobre números complexos e uma dedução da fórmula de Euler.

em que θ é qualquer número real. Segue-se desta fórmula que

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\,\mathrm{sen}\,\beta x \quad \text{e} \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\,\mathrm{sen}\,\beta x, \tag{7}$$

em que usamos $\cos(-\beta x) = \cos\beta x$ e $\mathrm{sen}(-\beta x) = -\mathrm{sen}\,\beta x$. Note que somando e depois subtraindo as duas equações em (7), obtemos, respectivamente,

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos\beta x \quad \text{e} \quad e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i\,\mathrm{sen}\,\beta x.$$

Como $y = C_1e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2e^{(\alpha-i\beta)x}$ é uma solução para (2) para qualquer escolha das constantes C_1 e C_2, fazendo $C_1 = C_2 = 1$ e $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, temos, nesta ordem, duas soluções:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Mas, $\quad y_1 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x$

e $\quad y_2 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x.$

Portanto, pelo Corolário (A) e o Teorema 4.3, os dois últimos resultados mostram que as funções $e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x$ são soluções para (2). Ainda, do Exemplo 14 da Seção 4.1, temos que $W(e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x), = \beta e^{2\alpha x} \neq 0, \beta > 0$, e daí podemos concluir que as duas funções formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial em $(-\infty, \infty)$. Pelo princípio de superposição, a solução geral é

$$\begin{aligned} y &= c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x \\ &= e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\,\mathrm{sen}\,\beta x). \end{aligned} \tag{8}$$

EXEMPLO 1

Resolva as seguintes equações diferenciais

(a) $2y'' - 5y' - 3y = 0$

(b) $y'' - 10y' - 25y = 0$

(c) $y'' + y' + y = 0$

Solução (a) $2m^2 - 5m - 3 = (2m + 1)(m - 3) = 0$

$$m_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad m_2 = 3$$

$$y = c_1e^{-x/2} + c_2e^{3x}$$

(b) $m^2 - 10m + 25 = (m - 5)^2 = 0$

$$m_1 = m_2 = 5$$

$$y = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x}$$

(c) $m^2 + m + 1 = 0$

$$m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$y = e^{-x/2}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$ ■

EXEMPLO 2

Resolva o problema de valor inicial

$$y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2.$$

Solução As raízes da equação auxiliar $m^2 - 4m + 13 = 0$ são $m_1 = 2 + 3i$ e $m_2 = 2 - 3i$. Logo,

$$y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x).$$

A condição $y(0) = -1$ implica

$$-1 = e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0) = c_1,$$

assim podemos escrever

$$y = e^{2x}(-\cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x).$$

Derivando essa última expressão e usando $y'(0) = 2$, obtemos

$$y' = e^{2x}(3 \operatorname{sen} 3x + 3c_2 \cos 3x) + 2e^{2x}(-\cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$$

$$2 = 3c_2 - 2$$

e $c_2 = 4/3$. Portanto,

$$y = e^{2x}\left(-\cos 3x + \frac{4}{3} \operatorname{sen} 3x\right).$$ ■

EXEMPLO 3

As duas equações

$$y'' + k^2y = 0 \tag{9}$$

$$y'' - k^2y = 0 \tag{10}$$

são encontradas freqüentemente no estudo de matemática aplicada. Para a primeira equação diferencial, a equação auxiliar $m^2 + k^2 = 0$ tem raízes $m_1 = ki$ e $m_2 = -ki$. Segue-se de (8) que a solução geral para (9) é

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \operatorname{sen} kx. \tag{11}$$

A equação diferencial (10) tem a equação auxiliar $m^2 - k^2 = 0$, cujas raízes são $m_1 = k$ e $m_2 = -k$. Daí, a solução geral é

$$y = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}. \tag{12}$$

Note que, se escolhermos $c_1 = c_2 = 1/2$ em (12), então

$$y = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = \cosh kx$$

é também uma solução para (10). Ainda, se $c_1 = 1/2$ e $c_2 = -½$, então (12) torna-se

$$y = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \operatorname{senh} kx.$$

Como $\cosh kx$ e $\operatorname{senh} kx$ são linearmente independentes em qualquer intervalo do eixo x, elas formam um conjunto fundamental. Logo, uma forma alternativa para a solução geral para (10) é

$$y = c_1 \cosh kx + c_2 \operatorname{senh} kx. \tag{13}$$

■

Equações de Ordem Superior

No caso geral, para resolver uma equação diferencial de n-ésima ordem

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0. \tag{14}$$

em que os a_i, $i = 0, 1, \dots, n$, são constantes reais, devemos resolver uma equação polinomial de grau n

$$a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + \dots + a_2m^2 + a_1m + a_0 = 0 \tag{15}$$

Se todas as raízes de (15) são reais e distintas, então a solução geral para (14) é

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \dots + c_ne^{m_nx}. \tag{16}$$

É um pouco mais difícil resumir os análogos dos Casos II e III porque as raízes de uma equação auxiliar de grau maior que dois podem ocorrer com várias combinações. Por exemplo, uma equação de grau cinco pode ter cinco raízes reais distintas, ou três raízes reais distintas e duas complexas, ou uma raiz real e quatro complexas, ou cinco raízes reais e iguais, ou cinco raízes reais, mas duas delas iguais etc. Quando m_1 é uma raiz de multiplicidade k de uma equação auxiliar de grau n (isto é, k raízes são iguais a m_1), pode ser mostrado que as soluções linearmente independentes são

$$e^{m_1x},\ xe^{m_1},\ x^2e^{m_1x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{m_1x}$$

e a solução geral tem de conter a combinação linear

$$c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x} + c_3x^2e^{m_1x} + \ldots + c_kx^{k-1}e^{m_1x}.$$

Por último, devemos lembrar que, quando os coeficientes são reais, raízes complexas de uma equação auxiliar sempre aparecem em pares conjugados. Logo, por exemplo, uma equação polinomial cúbica pode ter no máximo duas raízes complexas.

EXEMPLO 4

Resolva $$y''' + 3y'' - 4y = 0.$$

Solução Por inspeção, verificamos que

$$m^3 + 3m^2 - 4 = 0$$

é raiz de $m_1 = 1$. Agora, se dividirmos $m^3 + 3m^2 - 4$ por $m - 1$, encontramos

$$m^3 + 3m^2 - 4 = (m - 1)(m^2 + 4m + 4) = (m - 1)(m + 2)^2,$$

logo, as outras raízes são $m_2 = m3 = -2$. A solução geral é portanto

$$y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3xe^{-2x}.$$ ■

É claro que a maior dificuldade na resolução para equações com coeficientes constantes é encontrar as raízes das equações auxiliares de grau maior que dois. Como ilustrado no Exemplo 4, uma maneira de resolver uma equação é "adivinhar" uma raiz m_1. Se tivermos encontrado uma raiz m_1, então sabemos pelo **teorema de fatoração** que $m - m_1$ é um fator do polinômio. Dividindo o polinômio por $m - m_1$, obtemos a fatoração $(m - m_1)Q(m)$. Tentamos então encontrar as raízes do quociente $Q(m)$. A técnica algébrica de **divisão sintética** é também muito útil para encontrar raízes **racionais** de equações polinomiais. Especificamente, se $m_1 = p/q$ é uma **raiz racional** (p e q inteiros primos entre si) de uma equação auxiliar

$$a_nm^n + \ldots + a_1m + a_0 = 0$$

com coeficientes inteiros, então p é um fator de a_0 e q é um fator de a_n. Logo, para determinar se uma equação polinomial possui raízes racionais, precisamos examinar somente as razões entre cada fator de a_0 e cada fator de a_n. Dessa maneira, construímos uma lista de todas as possíveis raízes racionais da equação. Testamos cada um desses números por divisão sintética. Se o resto é zero, o número m_1 testado é uma raiz da equação, assim, $m - m_1$ é um fator do polinômio.

O próximo exemplo ilustra esse método.

EXEMPLO 5

Resolva $$3y''' + 5y'' + 10y' - 4y = 0.$$

Solução A equação auxiliar é

$$3m^3 + 5m^2 + 10m - 4 = 0.$$

Os fatores de $a_0 = -4$ e $a_n = 3$ são

$$p: \pm 1, \pm 2, \pm 4 \quad \text{e} \quad q: \pm 1, \pm 3,$$

respectivamente. Portanto, as possíveis raízes racionais da equação auxiliar são

$$\frac{p}{q}: -1, 1, -2, 2, -4, 4, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}.$$

Testando cada um desses números por divisão sintética, encontramos

coeficientes da equação auxiliar

$\frac{1}{3}$	3	5	10	-4	
		1	2	4	
	3	6	12	0	resto

Conseqüentemente, $m_1 = 1/3$ é uma raiz. Ainda, você deve verificar que ela é a *única* raiz racional. Os números 3, 6 e 12 na divisão acima são os coeficientes do quociente. Logo, a equação auxiliar pode ser escrita como

$$\left(m - \frac{1}{3}\right)(3m^2 + 6m + 12) = 0 \quad \text{ou} \quad (3m - 1)(m^2 + 2m + 4) = 0.$$

Resolvendo $m^2 + 2m + 4 = 0$ pela fórmula quadrática, encontramos as raízes complexas $m_2 = -1 + \sqrt{3}i$ e $m_3 = -1 - \sqrt{3}i$. Portanto, a solução geral para a equação diferencial é

$$y = c_1 e^{x/3} + e^{-x}(c_2 \cos \sqrt{3}x + c_3 \operatorname{sen} \sqrt{3}x).$$ ■

EXEMPLO 6

Resolva $$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Solução A equação auxiliar

$$m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2 = 0$$

possui raízes $m_1 = m_3 = i$ e $m_2 = m_4 = -i$. Logo, pelo Caso III, a solução é

$$y = C_1e^{ix} + C_2e^{-ix} + C_3xe^{ix} + C_4xe^{-ix}.$$

Pela fórmula de Euler, $C_1e^{ix} + C_2e^{-ix}$ pode ser reescrito como

$$c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

após uma troca de constantes. Analogamente, $x(C_3e^{ix} + C_4e^{-ix})$ pode ser expresso como $x(c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x)$. Então, a solução geral é

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3x \cos x + c_4x \operatorname{sen} x. \qquad \blacksquare$$

O Exemplo 6 ilustra um caso especial quando a equação auxiliar possui raízes complexas repetidas. No caso geral, se $m_1 = \alpha + i\beta$ é uma raiz complexa de multiplicidade k de uma equação auxiliar com coeficientes reais, então seu conjugado $m_2 = \alpha - i\beta$ é também uma raiz de multiplicidade k. A partir das $2k$ soluções complexas

$$e^{(\alpha + i\beta)x},\ xe^{(\alpha + i\beta)x},\ x^2e^{(\alpha + i\beta)x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{(\alpha + i\beta)x}$$
$$e^{(\alpha - i\beta)x},\ xe^{(\alpha - i\beta)x},\ x^2e^{(\alpha - i\beta)x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{(\alpha - i\beta)x}$$

concluímos, com a ajuda da fórmula de Euler, que a solução geral para a equação diferencial correspondente tem então de conter uma combinação linear das 2k soluções reais linearmente independentes

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}, \cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$e^{\alpha x}\, sen\,\beta x,\ xe^{\alpha x}, sen\,\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\, sen\,\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\, sen\,\beta x$$

No Exemplo 6, temos $k = 2$, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$.

4.3 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão nas páginas 450 e 451.

Nos Problemas 1-36, encontre a solução geral para a equação diferencial dada.

1. $4y'' + y' = 0$

2. $2y'' - 5y' = 0$

3. $y'' - 36y = 0$

4. $y'' - 8y = 0$

5. $y'' + 9y = 0$

6. $3y'' + y = 0$

7. $y'' - y' - 6y = 0$

8. $y'' - 3y' + 2y = 0$

9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8\dfrac{dy}{dx} + 16y = 0$

10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 10\dfrac{dy}{dx} + 25y = 0$

11. $y'' + 3y' - 5y = 0$

12. $y'' + 4y' - y = 0$

13. $12y'' - 5y' - 2y = 0$

14. $8y'' + 2y' - y = 0$

15. $y'' - 4y' + 5y = 0$

16. $2y'' - 3y' + 4y = 0$

17. $3y'' + 2y' + y = 0$

18. $2y'' + 2y' + y = 0$

19. $y''' - 4y'' - 5y' = 0$

20. $4y''' + 4y'' + y' = 0$

21. $y''' - y = 0$

22. $y''' + 5y'' = 0$

23. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$

24. $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$

25. $y''' + y'' - 2y = 0$

26. $y''' + y'' - 4y = 0$

27. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

28. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

29. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + \dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$

30. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

31. $16\dfrac{d^4y}{dx^4} + 24\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$

32. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 7\dfrac{d^2y}{dx^2} - 18y = 0$

33. $\dfrac{d^5y}{dx^5} - 16\dfrac{dy}{dx} = 0$

34. $\dfrac{d^5y}{dx^5} - 2\dfrac{d^4y}{dx^4} + 17\dfrac{d^3x}{dx^3} = 0$

35. $\dfrac{d^5y}{dx^5} + 5\dfrac{d^4y}{dx^4} - 2\dfrac{d^3y}{dx^3} - 10\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$

36. $2\dfrac{d^5y}{dx^5} - 7\dfrac{d^4y}{dx^4} + 12\dfrac{d^3y}{dx^3} + 8\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$

Nos Problemas 37-52, resolva a equação diferencial dada sujeita às condições iniciais indicadas.

37. $y'' + 16y = 0,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = -2$

38. $y'' - y = 0,\ \ y(0) = y'(0) = 1$

39. $y'' + 6y' + 5y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 3$

40. $y'' - 8y' + 17y = 0,\ \ y(0) = 4,\ y'(0) = -1$

41. $2y'' - 2y' + y = 0,\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 0$

42. $y'' - 2y' + y = 0,\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = 10$

43. $y'' + y' + 2y = 0,\ \ y(0) = y'(0) = 0$

44. $4y'' - 4y' - 3y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 5$

45. $y'' - 3y' + 2y = 0,\ \ y(1) = 0,\ \ y'(1) = 1$

46. $y'' + y = 0,\ \ y(\pi/3) = 0,\ \ y'(\pi/3) = 2$

47. $y''' + 12y'' + 36y' = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1,\ \ y''(0) = -7$

48. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0,\ \ y(0) = y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 1$

49. $y''' - 8y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = -1,\ \ y''(0) = 0$

50. $\dfrac{d^4y}{dx^4} = 0,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 3,\ \ y''(0) = 4,\ \ y'''(0) = 5$

51. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 3\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 0,\ \ y(0) = y'(0) = 0,\ \ y''(0) = y'''(0) = 1$

52. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - y = 0,\ \ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\ \ y'''(0) = 1$

Nos Problemas 53-56, resolva a equação diferencial dada sujeita às condições de contorno indicadas.

53. $y'' - 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$

54. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

55. $y'' + y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$

56. $y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(1) = 0$

57. As raízes de uma equação auxiliar são $m_1 = 4$, $m_2 = m_3 = -5$. Qual é a equação diferencial correspondente?

58. As raízes de uma equação auxiliar são $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = 3 + i$, $m_3 = 3 - i$. Qual é a equação auxiliar correspondente?

Nos Problemas 59 e 60, encontre a solução geral para a equação dada, em que y_1 é uma solução conhecida.

59. $y''' - 9y'' + 25y' - 17y = 0; \quad y_1 = e^x$

60. $y''' + 6y'' + y' - 34y = 0; \quad y_1 = e^{-4x} \cos x$

Nos Problemas 61-64, determine uma equação diferencial linear homogênea com coeficientes constantes que tenham a solução dada.

61. $4e^{6x}, \ 3e^{-3x}$

62. $10 \cos 4x, \ -5 \operatorname{sen} 4x$

63. $3, \ 2x, \ -e^{7x}$

64. $8 \operatorname{senh} 3x, \ 12 \cosh 3x$

65. Use as identidades

$$i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\right)^2 \quad \text{e} \quad -i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\right)^2$$

para resolver a equação diferencial

$$\frac{d^4y}{dx^4} = y = 0.$$

[*Sugestão:* Escreva a equação auxiliar $m^4 + 1 = 0$ como $(m^2 + 1)^2 - 2m^2 = 0$. Veja o que acontece quando você fatora.]

4.4 COEFICIENTES INDETERMINADOS – ABORDAGEM POR SUPERPOSIÇÃO

Para o professor Nesta seção, o método dos coeficientes indeterminados é desenvolvido do ponto de vista do princípio de superposição para equações diferenciais não-homogêneas (Teorema 4.9). Na Seção 4.6, uma abordagem inteiramente diferente desse método será apresentada, utilizando o conceito de operadores diferenciais anuladores. Faça sua escolha.

Para obter a solução geral para uma equação diferencial linear não-homogênea temos que fazer duas coisas:

(i) Encontrar a função complementar y_c.

(ii) Encontrar *qualquer* solução particular y_p da equação não-homogênea.

Lembre-se da discussão da Seção 4.1 de que uma solução particular é qualquer função, independente de parâmetros, que satisfaz a equação diferencial identicamente. A solução geral para uma equação não-homogênea em um intervalo é então $y = y_c + y_p$.

Como na Seção 4.3 começamos com equações de segunda ordem, agora veremos o caso de equações não-homogêneas da forma

$$ay'' + by' + cy = g(x), \tag{1}$$

em que a, b e c são constantes. Embora o **método dos coeficientes indeterminados** apresentado nesta seção não se limite a equações de segunda ordem, ele se limita a equações lineares não-homogêneas .

- que têm coeficientes constantes, e
- em que $g(x)$ é uma constante k, uma função polinomial, uma função exponencial $e^{\alpha x}$, $\operatorname{sen}\beta x$, $\cos\beta x$, ou somas e produtos dessas funções.

Nota Para ser preciso, $g(x) = k$ (constante) é uma função polinomial. Como uma função constante não é provavelmente a primeira coisa que vem em mente quando você pensa em uma função polinomial, continuaremos, para enfatizar, usando a redundância, "função constante, polinomial,..."

O que segue são exemplos de tipos de funções aplicadas $g(x)$ que são apropriadas para essa discussão:

$$g(x) = 10$$

$$g(x) = x^2 - 5x$$

$$g(x) = 15x - 6 + 8e^{-4x}$$

$$g(x) = \operatorname{sen} 3x - 5x \cos 2x$$

$$g(x) = e^x \cos x - (3x^2 - 1)e^{-x}$$

Ou seja, $g(x)$ é uma combinação linear de funções do tipo

$$\boldsymbol{k}\ \textbf{(constante)},\ x^n,\ x^ne^{\alpha x},\ x^ne^{\alpha x}\ \textbf{cos}\ \beta x\ \ \textbf{e}\ \ x^ne^{\alpha x}\ \textbf{sen}\ \beta x,$$

em que n é um inteiro não negativo e α e β são números reais. O método dos coeficientes indeterminados não se aplica a equações da forma (1) quando, por exemplo,

$$g(x) = \ln x,\quad g(x) = \frac{1}{x},\quad g(x) = \operatorname{tg} x,\quad g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x.$$

Equações diferenciais com esses tipos de funções aplicadas serão consideradas na Seção 4.7.

O conjunto de funções que consiste em constantes, polinômios, exponenciais $e^{\alpha x}$, senos, co-senos, tem a notável propriedade: derivadas de suas somas e produtos são ainda somas e produtos de constantes, polinômios, exponenciais $e^{\alpha x}$, senos e co-senos. Como a combinação linear das derivadas $ay_p'' + by_p' + cy_p$ tem de ser identicamente igual a $g(x)$, parece razoável supor então que y_p *tem a mesma forma que* $g(x)$. Essa suposição poderia ser mais bem caracterizada como uma boa conjectura. Os dois próximos exemplos ilustram o método básico.

EXEMPLO 1

Resolva
$$y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6. \tag{2}$$

Solução

Passo 1. Primeiramente, resolvemos a equação homogênea associada $y'' + 4y' - 2y = 0$. Pela fórmula quadrática deduzimos que as raízes da equação auxiliar $m^2 + 4m - 2 = 0$ são $m_1 = -2 - \sqrt{6}$ e $m_2 = -2 + \sqrt{6}$. Então, a função complementar é

$$y_c = c_1e^{-(2 + \sqrt{6})x} + c_2e^{(-2 + \sqrt{6})x}.$$

Passo 2. Agora, como a função aplicada $g(x)$ é um polinômio quadrático, vamos supor uma solução particular que tenha também a forma de um polinômio quadrático:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Devemos determinar coeficientes *específicos* A, B e C para os quais y_p seja uma solução particular para (2). Substituindo y_p e as derivadas

$$y_p' = 2Ax + B \quad \text{e} \quad y_p'' = 2A$$

na equação diferencial (2) obtemos,

$$y_p'' + 4y_p' - 2y_p = 2A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = 2x^2 - 3x + 6.$$

Como a última equação é supostamente uma identidade, os coeficientes de potências iguais de x devem ser iguais:

igual

$$\boxed{-2A}x^2 + \boxed{8A - 2B}x + \boxed{2A + 4B - 2C} = 2x^2 - 3x + 6.$$

ou seja,
$$-2A = 2$$
$$8A - 2B = -3$$
$$2A + 4B - 2C = 6.$$

Resolvendo esse sistema de equações obtemos os valores $A = -1$, $B = -5/2$ e $C = -9$. Logo, uma solução particular é

$$y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$

Passo 3. A solução geral para a equação dada é:

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9. \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 2

Encontre uma solução particular para $y'' - y' + y = 2\ \text{sen}\ 3x$.

Solução Um palpite natural para uma solução particular seria $A\ \text{sen}\ 3x$. Mas, como derivações sucessivas de sen $3x$ produzem sen $3x$ *e* cos $3x$, somos persuadidos a procurar uma solução particular que inclua ambos os termos

$$y_p = A\cos 3x + B\ \text{sen}\ 3x.$$

Derivando y_p e substituindo os resultados na equação diferencial, obtemos, depois de reagrupar,

$$y_p'' - y_p' + y_p = (-8A - 3B)\cos 3x + (3A - 8B)\ \text{sen}\ 3x = 2\ \text{sen}\ 3x$$

ou

igual

$$\boxed{-8A - 3B}\cos 3x + \boxed{3A - 8B}\ \text{sen}\ 3x = 0\cos 3x + 2\ \text{sen}\ 3x.$$

Do sistema resultante de equações

$$-8A - 3B = 0$$

$$3A - 8B = 2$$

obtemos $A = 6/73$ e $B = -16/73$. Uma solução particular para a equação é

$$Y_p = \frac{6}{73}\cos 3x - \frac{16}{73}\ \text{sen}\ 3x.$$

Como mencionamos, a forma que escolhemos para a solução particular y_p é plausível; não é uma adivinhação às cegas. Essa escolha deve levar em consideração não somente o tipo de funções que formam $g(x)$, mas também, como veremos no Exemplo 4, as funções que formam a função complementar y_c. $\blacksquare$

EXEMPLO 3

Resolva
$$y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}. \tag{3}$$

Solução

Passo 1. Primeiramente, a solução para a equação homogênea associada $y'' - 2y' - 3y = 0$ é $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$.

Passo 2. Agora, a presença de $4x - 5$ em $g(x)$ sugere que a solução particular tenha um polinômio linear. Ainda, como a derivada do produto xe^{2x} produz $2xe^{2x}$ e e^{2x}, supomos também que a solução particular inclua ambas, xe^{2x} e e^{2x}. Em outras palavras, g é a soma de dois tipos de funções básicas:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = \textit{polinomial} + \textit{exponenciais}.$$

De maneira correspondente, o princípio da superposição para equações não-homogêneas (Teorema 4.9) sugere que procuremos uma solução particular

$$y_p = y_{p1} + y_{p2},$$

em que $y_{p1} = Ax + B$ e $y_{p2} = Cxe^{2x} + De^{2x}$. Substituindo,

$$y_p = Ax + B + Cxe^{2x} + De^{2x}$$

na equação (3) e agrupando os termos, temos,

$$y_p'' - 2y_p' - 3y_p = -3Ax - 2A - 3B - 3Cxe^{2x} + (2C - 3D)e^{2x} = 4x - 5 + 6xe^{2x}. \tag{4}$$

Desta identidade, obtemos um sistema de quatro equações e quatro incógnitas:

$$-3A = 4$$

$$-2A - 3B = -5$$

$$-3C = 6$$

$$2C - 3D = 0.$$

A última equação deste sistema resulta do fato do coeficiente de e^{2x} do membro direito de (4) ser zero. Resolvendo, encontramos $A = -4/3$, $B = 23/9$, $C = -2$ e $D = -4/3$. Conseqüentemente,

$$y_p = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$

Passo 3. A solução geral para a equação é

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - \left(2x + \frac{4}{3}\right)e^{2x}.$$

■

Em vista do princípio da superposição (Teorema 4.9), podemos também solucionar o Exemplo 3, dividindo-o em dois problemas mais simples. Você deve verificar que substituindo

$$y_{p1} = Ax + B \quad \text{em} \quad y'' - 2y' - 3y = 4x - 5$$

e

$$y_{p2} = Cxe^{2x} + De^{2x} \quad \text{em} \quad y'' - 2y' - 3y = 6xe^{2x}$$

acarreta $y_{p1} = -(4/3)x + 23/9$ e $y_{p2} = -(2x + 4/3)e^{2x}$. Uma solução particular para (3) é portanto $y_p = y_{p1} + y_{p2}$.

O próximo exemplo mostra que algumas vezes a escolha "óbvia" para a forma de y_p não é a escolha correta.

EXEMPLO 4

Encontre uma solução particular para $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

Solução A derivação de e^x não produz novas funções. Logo, procedendo como antes, podemos simplesmente supor uma solução particular da forma

$$y_p = Ae^x.$$

Mas, neste caso, a substituição dessa expressão na equação diferencial conduz à afirmação contraditória

$$0 = 8e^x,$$

e, portanto, concluímos que fizemos a escolha errada para y_p.

A dificuldade aqui fica clara depois de examinarmos a função complementar $y_c = c_1e^x + c_2e^{4x}$. Observe que nossa escolha Ae^x já se encontra presente em y_c. Isso significa que e^x é uma solução para a equação diferencial homogênea associada, e um múltiplo Ae^x quando substituído na equação diferencial necessariamente anula esta identicamente.

Qual deve ser então a forma de y_p? Examinando o Caso II da Seção 4.3, veremos se podemos encontrar uma solução particular da forma

$$y_p = Ae^x.$$

Usando $\quad y_p' = Axe^x + Ae^x$ e $y_p'' = Axe^x + 2Ae^x$, obtemos

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p = Axe^x + 2Ae^x - 5Axe^x - 5Ae^x + 4Axe^x = 8e^x$$

ou

$$-3Ae^x = 8e^x.$$

Desta última equação, vemos que o valor de A é agora determinado por $A = -8/3$. Portanto,

$$y_p = -\frac{8}{3}xe^x$$

tem de ser uma solução particular para a equação dada. ■

A diferença nos procedimentos usados nos Exemplos 1-3 e no Exemplo 4 sugere que consideremos dois casos. O primeiro deles reflete a situação dos Exemplos 1-3.

CASO I *Nenhuma função da suposta solução particular é uma solução para a equação diferencial homogênea associada.*

Na tabela seguinte, ilustramos alguns exemplos específicos de $g(x)$ em (1) juntamente com a forma correspondente da solução particular. Estamos, evidentemente, tomando por garantia que nenhuma função da suposta solução particular y_p faça parte da função complementar y_c.

Tentativas para Soluções Particulares

$g(x)$		Forma de y_p
1.	1 (qualquer constante)	A
2.	$5x + 7$	$Ax + B$
3.	$3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4.	$x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
5.	$\operatorname{sen} 4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
6.	$\cos 4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
7.	e^{5x}	Ae^{5x}
8.	$(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9.	x^2e^{5x}	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10.	$e^{3x} \operatorname{sen} 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \operatorname{sen} 4x$
11.	$5x^2 \operatorname{sen} 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Dx^2 + Ex + F) \operatorname{sen} 4x$
12.	$xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + D)e^{3x} \operatorname{sen} 4x$

EXEMPLO 5

Determine a forma de uma solução particular para

(a) $y'' - 8y' + 25y = 5x^3e^{-x} - 7e^{-x}$ e (b) $y'' + 4y = x \cos x$.

Solução (a) Podemos escrever

$$g(x) = (5x^3 - 7)e^{-x}.$$

Usando o número 9 da tabela como modelo, escolhemos uma solução particular da forma

$$y_p = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{-x}.$$

Note que não há duplicação entre os termos em y_p e os termos na função complementar $y_c = e^{4x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$.

(b) A função $g(x) = x \cos x$ é semelhante à entrada 11 na tabela, exceto, é claro, pelo uso de um polinômio linear em vez de quadrático e $\cos x$ e *sen* x em vez de cos 4x e sen 4x na forma de y_p:

$$y_p = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\,\mathrm{sen}\, x.$$

Observe novamente que não há duplicação de termos entre y_p e $y_c = c_1 \cos 2x + c_2\,\mathrm{sen}\, 2x$. ■

Se $g(x)$ consiste na soma de, digamos, m termos do tipo listado na tabela, então (como no Exemplo 3) a suposição para uma solução particular y_p consiste na soma das formas escolhidas $y_{p1}, y_{p2}, \ldots, y_{pm}$ correspondente a esses termos:

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} + \ldots + y_{pm}.$$

Posto de um outro modo:

A forma de y_p é uma combinação linear de todas as funções linearmente independentes que são geradas por repetidas derivações $g(x)$.

EXEMPLO 6

Determine a forma de uma solução particular para

$$y'' - 9y' + 14y = 3x^2 - 5\,\mathrm{sen}\, 2x + 7xe^{6x}.$$

Solução

Correspondendo a $3x^2$, escolhemos: $y_{p1} = Ax^2 + Bx + C$

Correspondendo a -5 sen $2x$ escolhemos: $y_{p2} = D\cos 2x + E\,\mathrm{sen}\, 2x$

Correspondendo a $7xe^{6x}$ escolhemos: $y_{p3} = (Fx + G)e^{6x}$

A escolha para a solução particular é portanto

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} = Ax^2 + Bx + C + D\cos 2x + E\,\mathrm{sen}\, 2x + (Fx + G)e^{6x}.$$

Nenhum termo dessa escolha duplica um termo em $y_c = c_1e^{2x} + c_2e^{7x}$. ■

CASO II *Uma função na solução particular escolhida é também uma solução para a equação diferencial homogênea associada.*

O próximo exemplo é semelhante ao Exemplo 4.

EXEMPLO 7

Encontre uma solução particular para $y'' - 2y' + y = e^x$.

Solução A função complementar é $y_c = c_1e^x + c_2xe^x$. Como no Exemplo 4, a escolha $y_p = Ae^x$ não funciona, pois é evidente a partir de y_c que e^x é uma solução para a equação homogênea associada $y'' - 2y' + y = 0$. Ainda, não seremos capazes de encontrar uma solução particular da forma $y_p = Axe^x$, pois o termo xe^x é também parte de y_c. Tentamos então

$$y_p = Ax^2e^x.$$

Substituindo na equação diferencial dada, obtemos

$$2Ae^x = e^x \quad \text{e daí} \quad A = 1/2.$$

Logo, uma solução particular é

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^x. \qquad \blacksquare$$

Suponha novamente que $g(x)$ consista de m termos do tipo dado na tabela e suponha ainda que a suposição usual para uma solução particular seja

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} + \dots + y_{pm},$$

em que os y_{pi}, $i = 1, 2, \dots, m$, são as formas de soluções particulares tentadas correspondentes a esses termos. Sob a circunstância descrita no Caso II, podemos formular a seguinte **regra geral**:

> *Se alguma y_{pi} contém termos que duplicam termos em y_c, então, esta y_{pi} tem de ser multiplicada por x^n, em que n é o menor inteiro positivo que elimina essa duplicação.*

EXEMPLO 8

Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + y = 4x + 10 \text{ sen } x, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 2.$$

Solução A solução da equação homogênea associada $y'' + y = 0$ é

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \text{ sen } x.$$

Agora, como $g(x)$ é a soma de um polinômio linear e uma função seno, nossa escolha normal para y_p das entradas 2 e 5 da tabela de tentativas de soluções seria a soma de $y_{p1} = Ax + B$ e $y_{p2} = C \cos x + D \text{ sen } x$:

$$y_p = Ax + B + C \cos x + D \text{ sen } x. \tag{5}$$

Mas há uma óbvia duplicação dos termos $\cos x$ e $\text{sen } x$ nesta forma escolhida e dois termos na função complementar. Essa duplicação pode ser eliminada simplesmente multiplicando y_{p2} por x. Em vez de (5) usamos agora

$$y_p = Ax + B + Cx \cos x + Dx \text{ sen } x. \tag{6}$$

Derivando essa expressão e substituindo os resultados na equação diferencial, temos

$$y''+y_p = Ax + B - 2C \text{ sen } x + 2D \cos x = 4x + 10 \text{ sen } x$$

e daí,

$$\begin{aligned} A &= 4 \\ B &= 0 \\ -2C &= 10 \\ 2D &= 0. \end{aligned}$$

As soluções do sistema são imediatas: $A = 4$, $B = 0$, $C = -5$ e $D = 0$. Portanto, de (6) obtemos

$$y_p = 4x - 5x \cos x.$$

A solução geral da equação dada é

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \text{ sen } x + 4x - 5x \cos x.$$

Agora, aplicamos as condições iniciais prescritas à solução geral para a equação. Primeiro, $y(\pi) = c_1 \cos \pi + c_2 \text{ sen } \pi + 4\pi - 5\pi \cos \pi = 0$ implica $c_1 = 9\pi$ pois $\cos \pi = -1$ e $\text{sen } \pi = 0$. Prosseguindo, da derivada

$$y' = -9\pi \text{ sen } x + c_2 \cos x + 4 + 5x \text{ sen } x - 5 \cos x$$

e $$y'(\pi) = -9\pi \text{ sen } \pi + c_2 \cos \pi + 4 + 5\pi \text{ sen } \pi - 5 \cos \pi = 2$$

encontramos $c_2 = 7$. A solução para o problema de valor inicial é então

$$y = 9\pi \cos x + 7 \text{ sen } x + 4x - 5x \cos x.$$ ■

EXEMPLO 9

Resolva $$y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}.$$

Solução A função complementar é

$$y_c = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

e baseado nas entradas 3 e 7 da tabela, a escolha usual para uma solução particular seria

$$y_p = \underbrace{Ax^2 + Bx + C}_{\boxed{y_{p_1}}} + \underbrace{De^{3x}}_{\boxed{y_{p_2}}}.$$

Inspecionando essas funções, vemos que um termo em y_{p2} coincide com um termo de y_c. Se multiplicarmos y_{p2} por x, notamos que o termo xe^{3x} é ainda parte de y_c. Mas multiplicando y_{p2} por x^2, eliminamos todas as duplicações. Logo, a forma eficaz de uma solução particular é

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Dx^2e^{3x}.$$

Derivando esta última forma, substituindo na equação diferencial e agrupando os termos, obtemos,

$$y_p'' - 6y_p' + 9y_p = 9Ax^2 + (-12A + 9B)x + 2A - 6B + 9C + 2De^{3x}$$
$$= 6x^2 + 2 - 12e^{3x}.$$

Segue-se desta identidade que $A = 2/3$, $B = 8/9$, $C = 2/3$ e $D = -6$. Logo, a solução geral $y = y_c + y_p$ é

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{2}{3} - 6x^2e^{3x}.$$ ■

Equações de Ordem Superior

O método dos coeficientes indeterminados dado aqui não é restrito a equações de segunda ordem; mas pode ser usado com equações de ordem superior

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = g(x)$$

com coeficientes constantes. Só é necessário que $g(x)$ consista nos tipos próprios de funções discutidas acima.

EXEMPLO 10

Resolva $$y''' + y'' = e^x \cos x.$$

Solução As raízes da equação característica $m^3 + m^2 = 0$ são $m_1 = m_2 = 0$ e $m_3 = -1$. Então, a solução complementar para a equação é $y_c = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}$. Com $g(x) = e^x \cos x$ vemos na entrada 10 da tabela de tentativas de soluções particulares que devemos escolher

$$y_p = Ae^x \cos x + Be^x \operatorname{sen} x.$$

Como não há nenhuma função em y_p que coincida com funções da solução complementar, procedemos da maneira usual. De

$$y_p''' + y_p'' = (-2A + 4B)e^x \cos x + (-4A - 2B)e^x \operatorname{sen} x = e^x \cos x$$

obtemos
$$-2A + 4B = 1$$
$$-4A - 2B = 0.$$

Desse sistema, determinamos $A = -1/10$ e $B = 1/5$. Logo, uma solução particular é

$$y_p = -\frac{1}{10}e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x \operatorname{sen} x.$$

A solução geral para a equação é

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} - \frac{1}{10}e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x \operatorname{sen} x. \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 11

Determine a forma de uma solução particular para

$$y(4) + y''' = 1 - e^{-x}.$$

Solução Comparando a função complementar

$$y_c = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x}$$

com nossa escolha normal para uma solução particular

$$y_p = \underbrace{A}_{\boxed{y_{p_1}}} + \underbrace{Be^{-x}}_{\boxed{y_{p_2}}},$$

vemos que as duplicações entre y_c e y_p são eliminadas quando y_{p_1} é multiplicada por x^3 e y_{p_2} é multiplicada por x. Logo, a escolha correta para uma solução particular é

$$y_p = Ax^3 + Bxe^{-x}.$$

4.4 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 451.

Nos Problemas 1-26, resolva a equação diferencial dada pelo método dos coeficientes indeterminados.

1. $y'' + 3y' + 2y = 6$

2. $4y'' + 9y = 15$

3. $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$

4. $y'' + y' - 6y = 2x$

5. $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$

6. $y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26xe^x$

7. $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$

8. $4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$

9. $y'' - y' = -3$

10. $y'' + 2y' = 2x + 5 - e^{-2x}$

11. $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{x/2}$

12. $y'' - 16y = 2e^{4x}$

13. $y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} 2x$

14. $y'' + 4y = (x^2 - 3) \operatorname{sen} 2x$

15. $y'' + y = 2x \operatorname{sen} x$

16. $y'' - 5y' = 2x^3 - 4x^2 - x + 6$

17. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$

18. $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}(\cos x - 3 \operatorname{sen} x)$

19. $y'' + 2y' + y = \operatorname{sen} x + 3 \cos 2x$

20. $y'' + 2y' - 24y = 16 - (x + 2)e^{4x}$

21. $y''' - 6y'' = 3 - \cos x$

22. $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6xe^{2x}$

23. $y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^x$

24. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 5 - e^x + e^{2x}$

25. $y^{(4)} + 2y'' + y = (x - 1)^2$

26. $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$

Nos Problemas 27 e 28, use uma identidade trigonométrica como auxílio para encontrar uma solução particular para a equação diferencial dada.

27. $y'' + y = 8 \operatorname{sen}^2 x$

28. $y'' + y = \operatorname{sen} x \cos 2x$

Nos Problemas 29-40, resolva a equação diferencial dada sujeita às condições iniciais indicadas.

29. $y'' + 4y = -2$, $y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{2}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 2$

30. $2y'' + 3y' - 2y = 14x^2 - 4x - 11$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

31. $5y'' + y' = -6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -10$

32. $y'' + 4y' + 4y = (3 + x)e^{-2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$

33. $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$

34. $y'' - y = \cosh x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 12$

35. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \omega t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$

36. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$

37. $y'' + y = \cos x - \operatorname{sen} 2x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

38. $y'' - 2y' - 3y = 2\cos^2 x$, $y(0) = -\dfrac{1}{3}$, $y'(0) = 0$

39. $y''' - 2y'' + y' = 2 - 24e^x + 40e^{5x}$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$, $y'(0) = \dfrac{5}{2}$, $y''(0) = -\dfrac{9}{2}$

40. $y''' + 8y = 2x - 5 + 8e^{-2x}$, $y(0) = -5$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = -4$

Nos Problemas 41 e 42, resolva a equação diferencial dada sujeita às condições de contorno indicadas.

41. $y'' + y = x^2 + 1$, $y(0) = 5$, $y(1) = 0$

42. $y'' - 2y' + 2y = 2x - 2$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = \pi$

43. Na prática, a função aplicada g(x) é freqüentemente descontínua. Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + 4y = g(x),\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 2,$$

em que
$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0, & x > \pi/2 \end{cases}.$$

[*Sugestão:* Resolva o problema nos dois intervalos e então encontre uma solução de tal forma que y e y' sejam contínuas em $x = \pi/2$.]

4.5 OPERADORES DIFERENCIAIS

Em cálculo, usamos freqüentemente a letra maiúscula D para denotar derivação; isto é,

$$\frac{dy}{dx} = Dy.$$

O símbolo D é chamado de **operador diferencial**; ele transforma uma função diferenciável em outra função; por exemplo,

$$D(e^{4x}) = 4e^{4x}, \quad D(5x^3 - 6x^2) = 15x^2 - 12x, \quad D(\cos 2x) = -2 \operatorname{sen} 2x.$$

O operador diferencial D também possui uma propriedade de linearidade; D operando em uma combinação linear de duas funções diferenciáveis é o mesmo que a combinação linear de D operando nas funções individualmente. Em símbolos, isso significa

$$D\,\{af(x) + bg(x)\} = a\,Df(x) + b\,Dg(x), \tag{1}$$

em que a e b são constantes. Por causa da igualdade (1), dizemos que D é um **operador diferencial linear**.

Derivadas de Ordem Superior

Derivadas de ordem superior podem ser expressas em termos de D de uma maneira natural:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = D(Dy) = D^2y \quad \text{e no caso geral} \quad \frac{d^ny}{dx^n} = D^ny,$$

em que y representa uma função suficientemente diferenciável. Expressões polinomiais envolvendo D, tais como

$$D + 3, \quad D^2 + 3D - 4, \quad \text{e} \quad 5D^3 - 6D^2 + 4D + 9$$

são também operadores diferenciais lineares.

Equações Diferenciais

Qualquer equação diferencial linear pode ser expressa em termos de D. Por exemplo, uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes $ay'' + by' + cy = g(x)$ pode ser escrita como

$$aD^2y + bDy + cy = g(x) \text{ ou } (aD^2 + bD + c)y = g(x).$$

Se definirmos $L = aD^2 + bD + c$, então a última equação pode ser escrita de maneira compacta como

$$L(y) = g(x).$$

O operador $L = aD^2 + bD + c$ é chamado de **operador diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes.**

EXEMPLO 1

A equação diferencial $y'' + y' + 2y = 5x - 3$ pode ser escrita como

$$(D^2 + D + 2)y = 5x - 3$$ ■

Um **operador diferencial linear de n-ésima ordem**

$$L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0$$

com coeficientes constantes pode ser fatorado quando o polinômio característico $a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + \ldots + a_1m + a_0$ também se fatora.* Por exemplo, se tratamos D como uma quantidade algébrica, então $D^2 + 5D + 6$ pode ser fatorado como $(D + 2)(D + 3)$ ou como $(D + 3)(D + 2)$. Em outras palavras, para uma função $y = f(x)$ duas vezes diferenciável

$$(D^2 + 5D + 6)y = (D + 2)(D + 3)y = (D + 3)(D + 2)y.$$

Para ver por que isso funciona assim, seja $w = (D + 3)y = y' + 3y$, então

$$(D + 2)w = Dw + 2w = \underbrace{(y'' + 3y')}_{\boxed{Dw}} + \underbrace{(2y' + 6y)}_{\boxed{2w}} = y'' + 5y' + 6y$$

Analogamente, se colocarmos $w = (D + 2)y = y' + 2y$, então

$$(D + 3)w = Dw + 3w = \underbrace{(y'' + 2y')}_{\boxed{Dw}} + \underbrace{(3y' + 6y)}_{\boxed{3w}} = y'' + 5y' + 6y.$$

Isso ilustra uma propriedade geral:

Fatores de um operador diferencial linear com coeficientes constantes comutam.

* Se desejarmos usar números complexos, então um operador diferencial com coeficientes constantes pode ser *sempre* fatorado. Estamos, porém, primeiramente preocupados em escrever equações diferenciais em forma de operador com coeficientes reais.

EXEMPLO 2

(a) O operador $D^2 - 1$ pode ser escrita como

$$(D + 1)(D - 1) \quad \text{ou} \quad (D - 1)(D + 1).$$

(b) O operador $D^2 + D + 2$ do Exemplo 1 não se fatora com números reais. ■

EXEMPLO 3

A equação diferencial $y'' + 4y' + 4y = 0$ pode ser escrita como

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0 \quad \text{ou} \quad (D + 2)(D + 2)y = 0 \quad \text{ou} \quad (D + 2)^2 y = 0.$$ ■

Operador Anulador

Se L é um operador diferencial com coeficientes constantes e $y = f(x)$ é uma função suficientemente diferenciável, tal que

$$L(y) = 0,$$

então dizemos que L é um anulador da função. Por exemplo, se $y = k$ (uma constante), então $Dk = 0$. Ainda, $D^2x = 0$, $D^3x^2 = 0$ e assim por diante.

O operador diferencial D^n anula cada uma das funções
$$\mathbf{1, x, x^2, ..., n^{n-1}}. \tag{2}$$

Como conseqüência imediata de (2) e do fato de que a derivação pode ser feita termo a termo, um polinômio

$$c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1}$$

é anulado por um operador que anula a maior potência de x.

EXEMPLO 4

Encontre um operador diferencial que anula $1 - 5x^2 + 8x^3$.

Solução Por (2), sabemos que $D^4x^3 = 0$, e daí segue-se que

$$D^4(1 - 5x^2 + 8x^3) = 0.$$ ■

Nota As funções que são anuladas por um operador diferencial linear de n-ésima ordem L são simplesmente aquelas que podem ser obtidas a partir da solução geral para a equação diferencial homogênea $L(y) = 0$.

O operador diferencial $(D - \alpha)^n$ anula cada uma das funções

$$e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x},\ x^2e^{\alpha x},\ \ldots,\ x^{n-1}e^{\alpha x}. \tag{3}$$

Para ver isso, note que a equação auxiliar da equação homogênea $(D - \alpha)^n y = 0$ é $(m - \alpha)^n = 0$. Como α é uma raiz de multiplicidade n, a solução geral é

$$y = c_1e^{\alpha x} + c_2xe^{\alpha x} + \ldots + c_nx^{n-1}e^{\alpha x}. \tag{4}$$

EXEMPLO 5

Encontre um operador anulador para

(a) e^{5x} e **(b)** $4e^{2x} - 6xe^{2x}$.

Solução **(a)** Por (3), com $\alpha = 5$ e $n = 1$, vemos que

$$(D - 5)e^{5x} = 0.$$

(b) Por (3) e (4), com $\alpha = 2$ e $n = 2$, vemos que

$$(D - 2)^2(4e^{2x} - 6xe^{2x}) = 0.$$ ■

Quando α e β são números reais, a fórmula quadrática mostra que $[m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2)]^n = 0$possui raízes complexas $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, ambas de multiplicidade n. Da discussão do final da Seção 4.3, temos o próximo resultado.

O operador diferencial $(D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2))^n$anula cada uma das funções

$$\begin{gathered} e^{\alpha x},\ \cos \beta x,\ xe^{\alpha x} \cos \beta x,\ x^2e^{\alpha x} \cos \beta x\ \ldots,\ x^{n-1}e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x},\ \operatorname{sen} \beta x,\ xe^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,\ x^2e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x\ \ldots,\ x^{n-1}e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x. \end{gathered} \tag{5}$$

EXEMPLO 6

Por (5), com $\alpha = -1$, $\beta = 2$ e $n = 1$, vemos que

$$(D^2 + 2D + 5)e^{-x} \cos 2x = 0 \quad \text{e} \quad (D^2 + 2D + 5)e^{-x} \operatorname{sen} 2x = 0.$$ ■

Como $y_1(x) = e^{-x} \cos 2x$ e $y_2(x) = e^{-x} \operatorname{sen} 2x$ são duas funções linearmente independentes na solução geral para $(D^2 + 2D + 5)y = 0$, o operador linear $D^2 + 2D + 5$ também anula qualquer combinação linear dessas funções, tal como $5e^{-x} \cos 2x - 9e^{-x} \operatorname{sen} 2x$.

EXEMPLO 7

Por (5), com $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e $n = 2$, vemos que o operador diferencial $(D^2 + 1)^2$ ou $D^4 + 2D^2 + 1$ anula $\cos x$, $x \cos x$, $\operatorname{sen} x$ e $x \operatorname{sen} x$. Ainda, $(D^2 + 1)^2$ anula qualquer combinação linear dessas funções. ■

Quando $\alpha = 0$ e $n = 1$, um caso especial de (5) é

$$(D^2 + \beta^2)\begin{cases}\cos \beta x \\ \operatorname{sen} \beta x\end{cases} = 0. \tag{6}$$

Estamos interessados em anuladores da soma de duas ou mais funções. Como vimos nos Exemplos 4-7, se L é um operador diferencial linear tal que $L(y_1) = 0$ e $L(y_2) = 0$, então L anula a combinação linear $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Isso é uma conseqüência direta do Teorema 4.3. Vamos supor agora que L_1 e L_2 são operadores diferenciais lineares com coeficientes constantes tais que, L_1 anula $y_1(x)$ e L_2 anula $y_2(x)$, mas $L_1(y_2) \neq 0$ e $L_2(y_1) \neq 0$. Então, o *produto* dos operadores diferenciais L_1L_2 anula a soma $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Podemos facilmente demonstrar isso usando linearidade e o fato de que $L_1L_2 = L_2L_1$:

$$\begin{aligned} L_1L_2(y_1 + y_2) &= L_1L_2(y_1) + L_1L_2(y_2) \\ &= L_2L_1(y_1) + L_1L_2(y_2) \\ &= L_2\underbrace{[L_1(y_1)]}_{\boxed{\text{zero}}} + L_1\underbrace{[L_2(y_2)]}_{\boxed{\text{zero}}} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

EXEMPLO 8

Encontre um operador diferencial que anula $7 - x + 6 \operatorname{sen} 3x$.

Solução Por (2) e (6) temos, respectivamente,

$$D^2(7 - x) = 0 \quad \text{e} \quad (D^2 + 9) \operatorname{sen} 3x = 0.$$

Segue-se de (7) que o operador $D^2(D^2 + 9)$ anula a combinação linear dada. ■

EXEMPLO 9

Encontre um operador diferencial que anula $e^{-3x} + xe^x$.

Solução Por (3),

$$(D + 3)e^{-3x} = 0 \quad \text{e} \quad (D - 1)^2xe^x = 0.$$

Logo, o produto dos dois operadores $(D + 3)(D - 1)^2$anula a combinação linear dada. ■

Observação O operador diferencial que anula uma função não é único. Por exemplo, sabemos que $D - 5$ anula e^{5x}, mas também os operadores diferenciais de ordem superior, como $(D - 5)(D + 1)$ e $(D - 5)D^2$, anulam essa função. (Verifique isso.) Quando procuramos um anulador diferencial para uma função $y = f(x)$, queremos o operador de menor ordem possível que faça este trabalho.

4.5 EXERCÍCIOS

As respostas dso exercícios selecionados estão na página 451.

Nos Problemas 1-6, a equação diferencial é dada na forma $L(y) = g(x)$, em que L é um operador diferencial com coeficientes constantes.

1. $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 9\,\text{sen}\,x$

2. $4\dfrac{dy}{dx} + 8y = x + 3$

3. $3y'' - 5y' + y = e^x$

4. $y''' - 2y'' + 7y' - 6y = 1 - \text{sen}\,x$

5. $y''' - 4y'' + 5y' = 4x$

6. $y^{(4)} - 2y'' + y = e^{-3x} + e^{2x}$

Nos Problemas 7-16, se possível, fatore o operador diferencial dado.

7. $9D^2 - 4$

8. $D^2 - 5$

9. $D^2 - 4D - 12$

10. $2D^2 - 3D - 2$

11. $D^3 + 10D^2 + 25D$

12. $D^3 + 4D$

13. $D^3 + 2D^2 - 13D + 10$

14. $D^3 + 4D^2 + 3D$

15. $D^4 + 8D$

16. $D^4 - 8D^2 + 16$

Nos Problemas 17-20, verifique que o operador diferencial dado anula a função indicada.

17. D^4; $y = 10x^3 - 2x$

18. $2D - 1$; $y = 4e^{x/2}$

19. $(D - 2)(D + 5)$; $y = 4e^{2x}$

20. $D^2 + 64$; $y = 2\cos 8x - 5\,\text{sen}\,8x$

Nos Problemas 21-32, encontre um operador diferencial que anule a função dada.

21. $1 + 6x - 2x^3$

22. $x^3(1 - 5x)$

23. $1 + 7e^{2x}$

24. $x + 3xe^{6x}$

25. $\cos 2x$

26. $1 + \text{sen}\,x$

27. $13x + 9x^2 - \text{sen}\,4x$

28. $8x - \text{sen}\,x + 10\cos 5x$

29. $e^{-x} + 2xe^x - x^2e^x$

30. $(2 - e^x)^2$

31. $3 + e^x\cos 2x$

32. $e^{-x}\,\text{sen}\,x - e^{2x}\cos x$

Nos Problemas 33-40 encontre funções linearmente independentes que são anuladas pelo operador diferencial dado.

33. D^5

34. $D^2 + 4D$

35. $(D - 6)(2D + 3)$

36. $D^2 - 9D - 36$

37. $D^2 + 5$

38. $D^2 - 6D + 10$

39. $D^3 - 10D^2 + 25D$

40. $D^2(D - 5)(D - 7)$

4.6 COEFICIENTES INDETERMINADOS – ABORDAGEM POR ANULADORES

Para obter a solução geral para uma equação diferencial linear não-homogênea devemos fazer duas coisas:

(i) Encontrar a função complementar y_c.

(ii) Encontrar uma solução particular y_p para a equação não-homogênea.

Lembre-se da discussão da Seção 4.1 de que uma solução particular é qualquer função, independente de constantes, que satisfaça a equação diferencial identicamente. A solução geral para uma equação não-homogênea em um intervalo é então $y = y_c + y_p$.

Se L denota um operador diferencial linear da forma $a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0$, então uma equação diferencial linear não-homogênea pode ser escrita simplesmente como

$$L(y) = g(x) \tag{1}$$

O **método dos coeficientes indeterminados** apresentado nesta seção limita-se a equações lineares não-homogêneas

- que têm coeficientes constantes, e
- em que $g(x)$ é uma constante k, uma função polinomial, uma função exponencial $e^{\alpha x}$, $\operatorname{sen}\beta x$, $\cos\beta x$ ou somas e produtos finitos dessas funções.

Nota Precisamente, $g(x) = k$, (uma constante) é uma função polinomial. Como uma função constante não é provavelmente a primeira coisa que lhe vem à mente quando você pensa em funções polinomiais, para enfatizar, continuamos a usar a redundância "funções constantes, polinomiais,..."

O que segue são alguns exemplos de tipos de funções aplicadas $g(x)$ que são apropriados para essa discussão:

$$g(x) = 10$$

$$g(x) = x^2 - 5x$$

$$g(x) = 15x - 6 + 8e^{4x}$$

$$g(x) = \operatorname{sen} 3x - 5x \cos 2x$$

$$g(x) = e^x \cos x - (3x^2 - 1)e^{-x}$$

e assim por diante. Em outras palavras, $g(x)$ é uma combinação linear de funções da forma

$$\mathbf{k\,(constante)},\ x^m,\ x^m e^{\alpha x},\ x^m e^{\alpha x}\cos\beta,\quad \mathbf{e}\quad x^m e^{\alpha x}\,\mathbf{sen}\,\beta x,$$

em que m é um inteiro não negativo e α e β são números reais. O método dos coeficientes indeterminados não se aplica a equações da forma (1) quando, por exemplo,

$$g(x) = \ln x,\quad g(x) = \frac{1}{x},\quad g(x) = \operatorname{tg} x,\quad g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x.$$

Equações diferenciais com este último tipo de função aplicada serão consideradas na Seção 4.7.

Como vimos na Seção 4.5, uma combinação linear de funções do tipo k, x^m, $x^m e^{\alpha x}$, $x^m e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $x^m e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ é precisamente o tipo de função que pode ser anulada por um operador L_1 (de menor ordem) consistindo em um produto de operadores tais como D^n, $(D-\alpha)^n$ e $(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2)^n$. Aplicando L_1 a ambos os membros de (1), obtemos

$$L_1 L(y) = L_1(g(x)) = 0 \tag{2}$$

Resolvendo a *equação homogênea de ordem maior* $L_1 L(y) = 0$, podemos descobrir a forma de uma solução particular y_p para a equação não-homogênea original $L(y) = g(x)$.

Os vários exemplos seguintes ilustram o método. A solução geral para cada equação está definida no intervalo $(-\infty, \infty)$.

EXEMPLO 1

Resolva
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 2y = 4x^2. \tag{3}$$

Solução

Passo 1. Primeiramente resolvemos a equação homogênea

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 2y = 0.$$

Da equação auxiliar $m^2 + 3m + 2 = (m+1)(m+2) = 0$, encontramos $m_1 = -1$ e $m_2 = -2$, assim a função complementar é

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}.$$

Passo 2. Em vista de (2) da Seção 4.5, (3) pode se tornar homogênea se derivarmos três vezes cada lado da equação. Em outras palavras,

$$D^3(D^2 + 3D + 2)y = 4D^3x^2 = 0, \tag{4}$$

desde que $D^3x^2 = 0$

A equação auxiliar de (4),

$$m^3(m^2 + 3m + 2) = 0 \quad \text{ou} \quad m^3(m + 1)(m + 2) = 0,$$

tem raízes 0, 0, 0, -1 e -2. Logo, sua solução geral é

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + c_5e^{-2x}. \tag{5}$$

Os dois últimos termos em (5) constituem a função complementar da equação original (3). Podemos então argumentar que uma solução particular y_p de (3) deve também satisfazer a equação (4). Isso significa que os termos remanescentes em (5) devem ser a estrutura básica de y_p:

$$y_p = A + Bx + Cx^2, \tag{6}$$

em que, por conveniência, trocamos c_1, c_2 e c_3 por A, B e C, respectivamente. Para (6) ser uma solução particular para (3), é necessário encontrar coeficientes específicos A, B e C. Derivando (6), temos

$$y_p' = B + 2Cx, \quad y_p'' = 2C,$$

e substituindo em (3), obtemos

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 2C + 3B + 6Cx + 2A + 2Bx + 2Cx^2 = 4x^2.$$

Como a última equação deve ser uma identidade, os coeficientes das potências iguais de x devem ser iguais:

igual

$$\boxed{2C}\,x^2 + \boxed{2B + 6C}\,x + \boxed{2A + 3B + 2C} = 4x^2 + 0x + 0.$$

Isto é,

$$\begin{aligned} 2C &= 4 \\ 2B + 6C &= 0 \\ 2A + 3B + 2C &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Resolvendo (7), temos $A = 7$, $B = -6$ e $C = 2$. Logo, $y_p = 7 - 6x + 2x^2$.

Passo 3. A solução geral para (3) é $y = y_c + y_p$ ou

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + 7 - 6x + 2x^2.$$ ■

EXEMPLO 2

Resolva
$$y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4 \text{ sen } x. \tag{8}$$

Solução

Passo 1. A equação auxiliar para a equação homogênea $y'' - 3y' = 0$ é $m(m - 3) = 0$, assim

$$y_c = c_1 + c_2e^{3x}.$$

Passo 2. Agora, como $(D - 3)e^{3x} = 0$ e $(D^2 + 1)\text{ sen } x = 0$, aplicamos o operador diferencial $(D - 3)(D^2 + 1)$ a ambos os lados de (8):

$$(D - 3)(D^2 + 1)(D^2 - 3D)y = 0 \tag{9}$$

A equação auxiliar de (9) é

$$(m - 3)(m^2 + 1)(m^2 - 3m) = 0 \quad \text{ou} \quad m(m - 3)^2(m^2 + 1) = 0.$$

Logo,
$$y = c_1 + c_2e^{3x} + c_3xe^{3x} + c_4 \cos x + c_5 \text{ sen } x. \tag{10}$$

Depois, excluindo a combinação linear dos dois primeiros termos que corresponde a y_c, chegamos à forma de y_p:

$$y_p = Axe^{3x} + B \cos x + C \text{ sen } x.$$

Substituindo y_p em (8) e simplificando, temos

$$\begin{aligned} y_p'' - 3y_p' &= 3Ae^{3x} + (-B - 3C) \cos x + (3B - C) \text{ sen } x \\ &= 8e^{3x} + 4 \text{ sen } x. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes, obtemos

$$\begin{aligned} 3A &= 8 \\ -B - 3C &= 0 \\ 3B - C &= 4. \end{aligned}$$

Assim, $A = 8/3$, $B = 6/5$, $C = -2/5$ e, conseqüentemente,

$$y_p = \frac{8}{3}xe^{3x} + \frac{6}{5} \cos x - \frac{2}{5} \text{ sen } x.$$

Passo 3. A solução geral para (8) é, portanto,

$$y = c_1 + c_2e^{3x} + \frac{8}{3} xe^{3x} + \frac{6}{5} \cos x - \frac{2}{5} \text{ sen } x.$$

■

EXEMPLO 3

Resolva $$y' + 8y = 5x + 2e^{-x}. \tag{11}$$

Solução Por (2) e (3) da Seção 4.5, sabemos que $D^2x = 0$ e $(D + 1)e^{-x} = 0$, respectivamente. Então, aplicamos $D^2(D + 1)$ a (11):

$$D^2(D + 1)(D^2 + 8)y = 0.$$

Verificamos que

$$y = \boxed{c_1 \cos 2\sqrt{2}x + c_2 \operatorname{sen} 2\sqrt{2}x} + c_3 + c_4x + c_5e^{-x}$$

assim $$y_p = A + Bx + Ce^{-x}.$$

Substituindo y_p em (11), temos

$$y_p'' + 8y_p = 8A + 8Bx + 9Ce^{-x} = 5x + 2e^{-x}.$$

Isso implica $A = 0$, $B = 5/8$ e $C = 2/9$, assim, a solução geral para (11) é

$$y = c_1 \cos 2\sqrt{2}x + c_2 \operatorname{sen} 2\sqrt{2}x + \frac{5}{8}x + \frac{2}{9}e^{-x}.$$ ■

EXEMPLO 4

Resolva $$y'' + y = x \cos x - \cos x. \tag{12}$$

Solução No Exemplo 7 da Seção 4.5, vimos que $x \cos x$ e $\cos x$ são anulados pelo operador $(D^2 + 1)^2$. Logo,

$$(D^2 + 1)^2(D^2 + 1)y = 0 \quad \text{ou} \quad (D^2 + 1)^3y = 0.$$

Como i e $-i$ são ambas raízes complexas de multiplicidade 3 da equação auxiliar da última equação diferencial, concluímos que

$$y = \boxed{c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x} + c_3 x \cos x + c_4 \operatorname{sen} x + c_5 x^2 \cos x + c_6 x^2 \operatorname{sen} x.$$

Substituímos

$$y_p = Ax \cos x + Bx \operatorname{sen} x + Cx^2 \cos x + Ex^2 \operatorname{sen} x$$

em (12) e simplificamos:

$$y_p'' + y_p = 4Ex \cos x - 4Cx \operatorname{sen} x + (2B + 2C) \cos x + (-2A + 2E) \operatorname{sen} x$$
$$= x \cos x - \cos x.$$

Igualando os coeficientes, obtemos as equações

$$4E = 1$$

$$-4C = 0$$

$$2B + 2C = -1$$

$$-2A + 2E = 0,$$

das quais encontramos $E = 1/4$, $C = 0$, $B = -1/2$ e $A = 1/4$. Logo, a solução geral para (12) é

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{4}x \cos x - \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x + \frac{1}{4}x^2 \operatorname{sen} x. \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 5

Determine a forma de uma solução particular para

$$y'' - 2y' + y = 10e^{-2x} \cos x \tag{13}$$

Solução A função complementar para a equação dada é $y_c = c_1e^x + c_2xe^x$.

Agora, por (5) da Seção 4.5, com $\alpha = -2$, $\beta = 1$ e $n = 1$, sabemos que

$$(D^2 + 4D + 5)e^{-2x} \cos x = 0.$$

Aplicando o operador $D^2 + 4D + 5$ a (13), temos

$$(D^2 + 4D + 5)(D^2 - 2D + 1)y = 0. \tag{14}$$

Como as raízes da equação auxiliar de (14) são $-2 - i$, $-2 + i$, 1 e 1,

$$y = \boxed{c_1e^x + c_2xe^x} + c_3e^{-2x} \cos x + c_4 e^{-2x} \operatorname{sen} x.$$

Logo, uma solução particular para (13) pode ser encontrada com a forma

$$y_p = Ae^{-2x} \cos x + Be^{-2x} \operatorname{sen} x. \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 6

Determine a forma de uma solução particular para

$$y''' - 4y'' + 4y' = 5x^2 - 6x + 4x^2e^{2x} + 3e^{5x}. \tag{15}$$

Solução Observe que

$$D^3(5x^2 - 6x) = 0, \quad (D - 2)^3x^2e^{2x} = 0, \quad \text{e} \quad (D - 5)e^{5x} = 0.$$

Portanto, $D^3(D - 2)^3(D - 5)$ aplicado a (15) resulta

$$D^3(D - 2)^3(D - 5)(D^3 - 4D^2 + 4D)y = 0$$

ou

$$D^4(D - 2)^5(D - 5)y = 0.$$

As raízes da equação auxiliar para a última equação diferencial são 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2 e 5. Logo,

$$y = \boxed{c_1} \quad c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + \boxed{c_5e^{2x} \; c_6xe^{2x}} \quad c_7x^2e^{2x} + c^8x^3e^{2x} + c_9x^4e^{2x} + c_{10}e^{5x}. \tag{16}$$

Como a combinação linear $c_1 + c_5e^{2x} + c_6xe^{2x}$ pode ser vista como a função complementar de (15), os outros termos em (16) fornecem a forma de uma solução particular para a equação diferencial:

$$y_p = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Ex^2e^{2x} + Fx^3e^{2x} + Gx^4e^{2x} + He^{5x}.$$ ■

Resumo do Método

Para sua conveniência, o método dos coeficientes indeterminados está aqui resumido:

Coeficientes Indeterminados – Abordagem por Anuladores

A equação diferencial $L(y) = g(x)$ tem coeficientes constantes e a função consiste em somas e produtos finitos de constantes, funções polinomiais, funções exponenciais $e^{\alpha x}$, senos e co-senos.

(i) Encontre a solução complementar y_c para a equação homogênea $L(y) = 0$.

(ii) Opere em ambos os lados da equação não-homogênea $L(y) = g(x)$ com um operador diferencial L_1, que anula a função $g(x)$.

(iii) Encontre a solução geral para a equação diferencial homogênea de maior ordem $L_1L(y) = 0$.

(iv) Desconsidere todos os termos da solução encontrada em (iii) que estão duplicados na solução complementar y_c encontrada em (i). Forme uma combinação linear y_p dos termos restantes. Essa é a forma de uma solução particular para $L(y) = g(x)$.

(v) Substitua y_p encontrada em (iv) na equação $L(y) = g(x)$. Agrupe os coeficientes das funções em cada lado da igualdade e resolva o sistema resultante de equações para os coeficientes indeterminados em y_p.

(vi) Com a solução particular encontrada em (v), forme a solução geral $y = y_c + y_p$ para a equação diferencial dada.

4.6 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 452.

Nos Problemas 1-32, resolva a equação diferencial dada pelo método dos coeficientes indeterminados.

1. $y'' - 9y = 54$

2. $2y'' - 7y' + 5y = -29$

3. $y'' + y' = 3$

4. $y'' + 2y'' + y' = 10$

5. $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$

6. $y'' + 3y' = 4x - 5$

7. $y''' + y'' = 8x^2$

8. $y'' - 2y' + y = x^3 + 4x$

9. $y'' - y' - 12y = e^{4x}$

10. $y'' + 2y' + 2y = 5e^{6x}$

11. $y'' - 2y' - 3y = 4e^x - 9$

12. $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x} + 2x$

13. $y'' + 25y = 6 \operatorname{sen} x$

14. $y'' + 4y = 4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x - 8$

15. $y'' + 6y' + 9y = -xe^{4x}$

16. $y'' + 3y' - 10y = x(e^x + 1)$

17. $y'' - y = x^2e^x + 5$

18. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}$

19. $y'' - 2y' + 5y = e^x \operatorname{sen} x$

20. $y'' + y' + \frac{1}{4}y = e^x(\operatorname{sen} 3x - \cos 3x)$

21. $y'' + 25y = 20 \operatorname{sen} 5x$

22. $y'' + y = 4 \cos x - \operatorname{sen} x$

23. $y'' + y' + y = x \operatorname{sen} x$

24. $y'' + 4y = \cos^2 x$

25. $y'' + 8y'' = -6x^2 + 9x + 2$

26. $y''' - y'' + y' - y = xe^x - e^{-x} + 7$

27. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$

28. $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$

29. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x + 1$

30. $y^{(4)} - 4y''' = 5x^2 - e^{2x}$

31. $16y^{(4)} - y = e^{x/2}$

32. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 2 \cosh x - 6$

Nos Problemas 33-40, resolva a equação diferencial dada sujeita às condições iniciais indicadas.

33. $y'' - 64y = 16$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

34. $y'' + y' = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

35. $y'' - 5y' = x - 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

36. $y'' + 5y' - 6y = 10e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

37. $y'' + y = 8 \cos 2x - 4 \operatorname{sen} x$, $y(\pi/2) = -1$, $y'(\pi/2) = 0$

38. $y''' - 2y'' + y' = xe^x + 5$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -1$

39. $y'' - 4y' + 8y = x^3$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$

40. $y^{(4)} - y''' = x + e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$

Nos Problemas 41 e 42, determine a forma de uma solução particular para a equação diferencial dada.

41. $y'' - y = e^x(2 + 3x \cos 2x)$

42. $y'' + y' = 9 - e^{-x} + x^2 \operatorname{sen} x$

43. Mostre que o operador $(xD - 1)(D + 4)$ é diferente do operador $(D + 4)(xD - 1)$.

44. Prove que a equação diferencial

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = k,$$

k uma constante, $a_0 \neq 0$, tem como solução particular a função $y_p = k/a_0$.

4.7 VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

Revisão de Equações Lineares de Primeira Ordem

No Capítulo 2, vimos que a solução geral para a equação diferencial linear de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x), \tag{1}$$

em que $P(x)$ e $f(x)$ são contínuas em um intervalo I, é

$$y = e^{-\int P(x)\,dx} \int e^{\int P(x)\,dx} f(x)\,dx + c_1 e^{-\int P(x)\,dx}. \tag{2}$$

Agora, (2) tem a forma $y = y_c + y_p$, em que $y_c = c_1 e^{-\int P(x)\,dx}$ é uma solução para

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{3}$$

e

$$y_p = e^{-\int P(x)\,dx} \int e^{\int P(x)\,dx} f(x)\,dx \tag{4}$$

é uma solução particular para (1). Para motivar um método adicional para resolver equações lineares não-homogêneas de ordem superior, vamos novamente deduzir (4), agora por um método conhecido como **variação dos parâmetros**. O procedimento básico é essencialmente aquele usado na Seção 4.2.

Suponha que y_1 seja uma solução conhecida para (3); isto é,

$$\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 = 0.$$

Provamos na Seção 2.5 que $y_1 = e^{-\int P(x)\,dx}$ é uma solução e, como a equação diferencial é linear sua solução geral é $y = c_1y_1(x)$. Variação dos parâmetros consiste em encontrar uma função u_1 tal que

$$y_p = u_1(x)y_1(x)$$

seja uma solução particular para (1). Em outras palavras, trocamos o parâmetro c_1 por uma variável u_1.

Substituindo $y_p = u_1y_1$ em (1), obtemos

$$\frac{d}{dx}[u_1y_1] + P(x)u_1y_1 = f(x)$$

$$u_1\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{du_1}{dx} + P(x)u_1y_1 = f(x)$$

$$u_1\underbrace{\left[\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1\right]}_{\boxed{\text{zero}}} + y_1\frac{du_1}{dx} = f(x)$$

assim

$$y_1\frac{du_1}{dx} = f(x).$$

Separando as variáveis, encontramos

$$du_1 = \frac{f(x)}{y_1(x)}dx \quad \text{e} \quad u_1 = \int\frac{f(x)}{y_1(x)}dx,$$

segue-se então que

$$y = u_1y_1 = y_1\int\frac{f(x)}{y_1(x)}dx.$$

Pela definição de y_1, vemos que o último resultado é idêntico a (4).

Equações de Segunda Ordem

Para adaptar o procedimento precedente a equações diferenciais lineares de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \tag{5}$$

colocamos (5) na forma padrão

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{6}$$

dividindo por $a_2(x)$. Aqui, supomos que $P(x)$, $Q(x)$ e $f(x)$ são contínuas em algum intervalo I. A equação (6) é análoga a (1). Como sabemos, quando $P(x)$ e $Q(x)$ são constantes, não temos nenhuma dificuldade em escrever y_c.

Suponha que y_1 e y_2 formem um conjunto fundamental de soluções em I da forma homogênea associada (6); isto é,

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0 \quad \text{e} \quad y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0.$$

Agora, perguntamos: podemos encontrar duas funções u_1 e u_2 tais que

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

seja uma solução particular para (6)? Note que nossa suposição para y_p é a mesma que $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$, mas substituímos c_1 e c_2 pelos "parâmetros variáveis" u_1 e u_2. Como queremos determinar duas funções desconhecidas, a razão nos diz que precisamos de duas equações. Como na discussão introdutória que resultou na descoberta de (4), uma dessas equações resulta da substituição $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ na equação diferencial dada (6). A outra equação que impomos é

$$y_1u_1' + y_2u_2' = 0. \tag{7}$$

Essa equação é uma suposição que fazemos para simplificar a primeira derivada e, conseqüentemente, a segunda derivada de y_p. Usando a regra do produto para derivar y_p, obtemos

$$y_p' = u_1y_1' + y_1u_1' + y_2y_2' = u_1y_1' + u_2y_2' + \overbrace{\boldsymbol{y_1u_1' + y_2u_2'}}^{\boxed{\text{zero de (7)}}} \tag{8}$$

assim $\qquad y_p' = u_1y_1' + u_2y_2'.$

Continuando, encontramos $\qquad y_p'' = u_1y_1'' + y_1'u_1' + u_2y_2'' + y_2'u_2'.$

Substituindo esses resultados em (6), temos

$$\begin{aligned} y_p'' + Py_p' + Qy_p &+ u_1y_1'' + y_1'u_1' + u_2y_2'' + y_2'u_2' + Pu_1y_1' + Pu_2y_2' + Qu_1y_1 + Qu_2y_2 \\ &= u_1\underbrace{[y_1'' + Py_1' + Qy_1]}_{\boxed{\textbf{zero}}} + u_2\underbrace{[y_2'' + Py_2' + Qy_2]}_{\boxed{\textbf{zero}}} + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x). \end{aligned}$$

Em outras palavras, u_1 e u_2 têm de ser funções que também satisfaçam a condição

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x) \tag{9}$$

As equações (7) e (9) constituem um sistema linear de equações para determinar as derivadas u_1' e u_2'. Pela regra de Cramer,* a solução para

* Veja o Apêndice III para obter uma revisão sobre a regra de Cramer.

$$y_1u_1' + y_2u_2' = 0$$

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$$

pode ser expressa em termos de determinantes:

$$u_1' + \frac{W_1}{W} \quad \text{e} \quad u_2' + \frac{W_2}{W}, \tag{10}$$

em que

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \quad \text{e} \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} \tag{11}$$

O determinante W é o Wronskiano de y_1 e y_2. Pela independência linear de y_1 e y_2 em I, sabemos que $W(x) \neq 0$ para todo x no intervalo.

Resumo do Método

Em geral, não é uma boa idéia memorizar fórmulas em vez de entender o processo. Porém, o procedimento precedente é muito longo e complicado de usar cada vez que queremos resolver uma equação diferencial. Neste caso, é mais eficiente simplesmente usar as fórmulas de (10). Então, para resolver $a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$, primeiro encontre a função complementar $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ e então calcule o Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Dividindo por a_2, colocamos a equação na forma $y'' + Py' + Qy = f(x)$ para determinar $f(x)$. Encontramos u_1 e u_2 integrando $u_1' = W_1/W$ e $u_2' = W_2/W$, em que W_1 e W_2 estão definidos em (11). Uma solução particular é $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$. A solução geral para a equação é portanto $y = y_c + y_p$.

EXEMPLO 1

Resolva $$y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{2x}.$$

Solução Como a equação auxiliar é $m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 = 0$, temos

$$y_c = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}.$$

Identificando $y_1 = e^{2x}$ e $y_2 = xe^{2x}$, calculamos o Wronskiano

$$W(e^{2x}, xe^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}.$$

Como a equação diferencial dada já está na forma (6) (isto é, o coeficiente de y'' é 1), identificamos $f(x) = (x + 1)e^{2x}$. Por (11), obtemos

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ (x+1)e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = -(x+1)xe^{4x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x+1)e^{2x} \end{vmatrix} = (x+1)e^{4x}$$

e então, por (10),

$$u_1' = -\frac{(x+1)xe^{4x}}{e^{4x}} = -x^2 - x, \quad u_2' = \frac{(x+1)e^{4x}}{e^{4x}} = x + 1.$$

Segue-se que

integrar u_1' e u_2'...

$$u_1 = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{x^2}{2} + x.$$

Portanto,

$$y_p = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)xe^{2x}$$

$$= \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x}.$$

Logo,

$$y = y_c + y_p = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x}.$$ ■

EXEMPLO 2

Resolva

$$4y'' + 36y = \text{cosec } 3x.$$

Solução Primeiro, colocamos a equação na forma padrão (6), dividindo por 4:

$$y'' + 9y = \frac{1}{4} \cos 3x.$$

Como as raízes da equação auxiliar $m^2 + 9 = 0$ são $m_1 = 3i$ e $m_2 = -3i$, a função complementar é

$$y_c = c_1 \cos 3x + c_2 \text{ sen } 3x.$$

Usando $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \text{sen } 3x$ e $f(x) = (1/4)$ cosec $3x$, encontramos

$$W(\cos 3x, \text{ sen } 3x) = \begin{vmatrix} \cos 3x & \text{sen } 3x \\ -3 \text{ sen } 3x & 3 \cos 3x \end{vmatrix} = 3$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} 3x \\ \frac{1}{4}\operatorname{cosec} 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\operatorname{cosec} 3x = \frac{1}{\operatorname{sen} 3x}}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3\operatorname{sen} 3x & \frac{1}{4}\operatorname{cosec} 3x \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}.$$

Integrando,

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{1}{12} \quad \text{e} \quad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{12}\frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}$$

obtemos

$$u_1 = -\frac{1}{12}x \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{36}\ln|\operatorname{sen} 3x|.$$

Então, uma solução particular é

$$y_p = -\frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}(\operatorname{sen} 3x)\ln|\operatorname{sen} 3x|.$$

A solução geral para a equação é

$$y = y_c + y_p = c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}(\operatorname{sen} 3x)\ln|\operatorname{sen} 3x|. \tag{12}$$

■

A equação (12) representa a solução geral para a equação diferencial no intervalo $(0, \pi/6)$.

Constantes de Integração

Quando calculamos as integrais indefinidas u_1' e u_2', não precisamos introduzir constantes. Isso ocorre porque

$$\begin{aligned} y = y_c + y_p &= c_1y_1 + c_2y_2 + (u_1 + a_1)y_1 + (u_2 + b_1)y_2 \\ &= (c_1 + a_1)y_1 + (c_2 + b_1)y_2 + u_1y_1 + u_2y_2 \\ &= C_1y_1 + C_2y_2 + u_1y_1 + u_2y_2. \end{aligned}$$

EXEMPLO 3

Resolva
$$y'' - y = \frac{1}{x}.$$

Solução A equação auxiliar $m^2 - 1 = 0$ tem raízes $m_1 = -1$ e $m_2 = 1$. Portanto

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

$$W(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$$

$$u_1' = -\frac{e^{-x}(1/x)}{-2}, \qquad u_1 = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

$$u_2' = \frac{e^{x}(1/x)}{-2}, \qquad u_2 = -\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}\,dt.$$

É sabido que as integrais que definem u_1 e u_2 não podem ser expressas em termos de funções elementares. Então, escrevemos

$$y_p = \frac{1}{2}e^x \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \frac{1}{2}e^{-x}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}\,dt,$$

assim

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}e^x \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \frac{1}{2}e^{-x}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}\,dt. \qquad \blacksquare$$

No Exemplo 3, podemos integrar em qualquer intervalo $x_0 \leq t \leq x$ que não contenha a origem.

Equações de Ordem Superior

O método que acabamos de examinar para equações diferenciais não-homogêneas de segunda ordem pode ser generalizado para equações lineares de n-ésima ordem que tenham sido colocadas na forma

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_1(x)y' + P_0(x)y = f(x). \tag{13}$$

Se $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$ é a função complementar de (13), então uma solução particular é

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x),$$

em que os u_k', $k = 1, 2, \ldots, n$ são determinados pelas n equações

$$\begin{aligned} y_1u_1' + \quad & y_2u_2' + \ldots + \quad & y_nu_n' = 0 \\ y_1'u_1' + \quad & y_2'u_1' + \ldots + \quad & y_n'u_n' = 0 \\ & \vdots & \\ y_1^{(n-1)}u_1' + & y_2^{(n-1)}u_2' + \ldots + & y_n^{(n-1)}u_n' = f(x). \end{aligned}$$

As primeiras $n - 1$ equações do sistema, como em (7), são suposições feitas para simplificar as primeiras $n - 1$ derivadas de y_p. A última equação do sistema resulta da substituição da n-ésima derivada de y_p e as derivadas de ordem menor simplificadas em (13). Neste caso, a regra de Cramer nos dá

$$u_k' = \frac{W_k}{W}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

em que W é o Wronskiano de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ e W_k é o determinante obtido substituindo a k-ésima coluna do Wronskiano pela coluna

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x). \end{matrix}$$

Quando $n = 2$, obtemos (10) e (11).

Observação (i) A variação dos parâmetros tem uma vantagem sobre o método dos coeficientes indeterminados. Ela *sempre* produz uma solução particular y_p, desde que a equação homogênea associada possa ser resolvida. O presente método não se limita a uma função $f(x)$ que seja combinação linear dos quatro tipos de funções listadas na página 183. Ainda, a variação dos parâmetros se aplica a equações diferenciais com coeficientes variáveis.

Nos problemas que seguem, não hesite em simplificar a forma de y_p. Dependendo de como as antiderivadas de u_1' e u_2' forem encontradas, você pode não obter a mesma y_p dada na seção de respostas. Por exemplo, no Problema 3, $y_p = (\operatorname{sen} x - x\cos x)/2$ e $y_p = (\operatorname{sen} x)/4 - (x\cos x)/2$ são respostas válidas. Em qualquer caso, a solução geral $y = y_c + y_p$ pode ser simplificada, ou seja, $y = c_1\cos x + c_2\,sen\,x - (x\cos x)/2$. Por quê?

(ii) Nos Problemas 25-28, pede-se para resolver os problemas de valor inicial. Certifique-se de aplicar as condições iniciais à solução geral $y = y_c + y_p$. Estudantes freqüentemente cometem o erro de aplicar as condições iniciais somente à função complementar y_c, pois ela é a parte da solução que contém as constantes. Faça uma revisão do Exemplo 8 da Seção 4.4 para o correto procedimento.

4.7 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão nas páginas 452 e 453.

Nos Problemas 1-24, resolva cada equação diferencial pelo método da variação dos parâmetros. Defina um intervalo no qual a solução geral seja válida.

1. $y'' + y = \sec x$

2. $y'' + y = \operatorname{tg} x$

3. $y'' + y = \operatorname{sen} x$

4. $y'' + y = \sec x \operatorname{tg} x$

5. $y'' + y = \cos^2 x$

6. $y'' + y = \sec^2 x$

7. $y'' - y = \cosh x$

8. $y'' - y = \operatorname{senh} 2x$

9. $y'' - 4y = e^{2x}/x$

10. $y'' - 9y = 9x/e^{3x}$

11. $y'' + 3y' + 2y = 1/(1 + e^x)$

12. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}/(1 + e^x)$

13. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen} e^x$

14. $y'' - 2y' + y = e^x \operatorname{arctg} x$

15. $y'' - 2y' + y = e^{-x}/(1 + x^2)$

16. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sec x$

17. $y'' - 2y' + y = e^{-x} \ln x$

18. $y'' + 10y' + 25y = e^{-10x}/x^2$

19. $3y'' - 6y' + 30y = e^x \operatorname{tg} 3x$

20. $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1 - x^2}$

21. $y''' + y' = \operatorname{tg} x$

22. $y''' + 4y' = \sec 2x$

23. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{3x}$

24. $y''' - 6y'' = x^2$

Nos Problemas 25-28, resolva cada equação diferencial pelo método da variação dos parâmetros, sujeita à condição inicial $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

25. $4y'' - y = xe^{x/2}$

26. $2y'' + y' - y = x + 1$

27. $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$

28. $y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)e^{2x}$

29. Sabendo que $y_1 = x$ e $y_2 = x \ln x$ formam um conjunto fundamental de soluções para $x^2y'' - xy' + y = 0$ em $(0, \infty)$, encontre a solução geral para

$$x^2y'' - xy' + y = 4x \ln x.$$

30. Sabendo que $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^3$ formam um conjunto fundamental de soluções para $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ em $(0, \infty)$, encontre a solução geral para

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = \frac{1}{x}.$$

31. Sabendo que $y_1 = x^{-1/2} \cos x$ e $y_2 = x^{-1/2} \operatorname{sen} x$ formam um conjunto fundamental de soluções para $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ em $(0, \infty)$, encontre a solução geral para

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2}.$$

32. Sabendo que $y_1 = \cos(\ln x)$ e $y_2 = \operatorname{sen}(\ln x)$ são soluções linearmente independentes para $x^2y'' + xy' + y = 0$ em $(0, \infty)$:

(a) Encontre uma solução particular para

$$x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x).$$

(b) Dê a solução geral para a equação e defina um intervalo em que esta seja válida. [*Sugestão:* Não é $(0, \infty)$. Por quê?]

33. (a) Use o método dos coeficientes indeterminados para encontrar uma solução particular para

$$y'' + 2y' + y = 4x^2 - 3.$$

(b) Use o método da variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular para

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$$

(c) Use o princípio de superposição (Teorema 4.9) para encontrar uma solução particular para

$$y'' + 2y' + y = 4x^2 - 3 + \frac{e^{-x}}{x}.$$

34. Use o método delineado no Problema 33 para encontrar uma solução particular para

$$y'' + y = 2x - e^{3x} + \operatorname{cotg} x.$$

Capítulo 4 *REVISÃO*

Resumimos os resultados importantes deste capítulo para equações diferenciais **lineares de segunda ordem.**

A equação

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{1}$$

é homogênea, enquanto

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \tag{2}$$

$g(x)$ não identicamente nula é **não-homogênea.** Na consideração de equações lineares (1) e (2), supomos que $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ e $g(x)$ são contínuas em um intervalo I e que $a_2(x) \neq 0$ para todo x no intervalo. Sob essas hipóteses, existe uma única solução para (2) que satisfaça a **condição inicial** $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, em que x_0 é um ponto em I.

O **Wronskiano** de duas funções diferenciáveis $f_1(x)$ e $f_2(x)$ é o determinante

$$W(f_1(x), f_2(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Quando $W \neq 0$ em pelo menos um ponto no intervalo, as funções são **linearmente independentes** no intervalo. Se as funções são **linearmente dependentes** no intervalo, então $W = 0$ para todo x no intervalo.

Na resolução da equação homogênea (1), queremos soluções linearmente independentes. Uma condição necessária e suficiente para duas soluções y_1 e y_2 serem linearmente independentes em I é $W(y_1, y_2) \neq 0$ para todo x em I. Dizemos que y_1 e y_2 formam um **conjunto fundamental** em I quando elas são soluções linearmente independentes de (1) no intervalo. Para quaisquer duas soluções y_1 e y_2, o **princípio de superposição** diz que a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ é também uma solução para (1). Quando y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental, a função $y = c_1y_1 + c_2y_2$ é chamada de **solução geral** para (1). A **solução geral** para (2) é $y = y_c + y_p$, em que yc é a **função complementar**, ou solução geral, para (1) e y_p é qualquer **solução particular** para (2).

Para resolver (1) no caso $ay'' + by' + cy = 0$, a, b e c constantes, primeiro resolvemos a **equação auxiliar** $am^2 + bm + c = 0$. Há três formas de solução geral, dependendo das três possibilidades das raízes da equação auxiliar.

Raízes	Solução Geral
1. m_1 e m_2: reais e distintas	$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$
2. m_1 e m_2: reais mas $m_1 = m_2$	$y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x}$
3. m_1 e m_2: complexas	
$m_1 = \alpha + i\beta,\ m_2 = \alpha - i\beta$	$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$

Para resolver uma equação diferencial não-homogênea, usamos ou o método dos **coeficientes indeterminados**, ou o método da **variação dos parâmetros**, para encontrar uma solução particular y_p. O primeiro procedimento limita-se a equações diferenciais $ay'' + by' + cy = g(x)$, em que a, b e c são constantes e $g(x)$ é uma constante, um polinômio, $e^{\alpha x}$, $\cos \beta x$, $\operatorname{sen} \beta x$, ou somas e produtos finitos dessas funções.

Capítulo 4 *EXERCÍCIOS DE REVISÃO*

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 453.

Responda aos Problemas 1-10 sem consultar o texto. Preencha os espaços ou responda verdadeiro/falso. Em alguns casos, pode haver mais de uma resposta correta.

1. A única solução para $y'' + x^2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ é __________.

2. Se duas funções diferenciáveis $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são linearmente independentes em um intervalo, então $W(f_1(x), f_2(x)) \neq 0$ para pelo menos um ponto do intervalo. __________

3. Duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são linearmente independentes em um intervalo se uma não é múltipla da outra. __________

4. As funções $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 1 - x^2$ e $f_3(x) = 2 + x^2$ são linearmente __________ no intervalo $(-\infty, \infty)$.

5. As funções $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x|x|$ são linearmente independentes no intervalo __________, mas elas são linearmente dependentes no intervalo __________.

6. Duas soluções y_1 e y_2 de $y'' + y' + y = 0$ são linearmente dependentes se $W(y_1, y_2) = 0$ para todo valor real de x. __________

7. Um múltiplo de uma solução para uma equação diferencial é também uma solução. __________

8. Um conjunto fundamental de duas soluções para $(x - 2)y'' + y = 0$ existe em qualquer intervalo que não contenha o ponto__________.

9. No método dos coeficientes indeterminados, a forma da solução particular y_p para $y'' - y = 1 + e^x$ é __________.

10. Um operador diferencial que anula $e^{2x}(x + \operatorname{sen} x)$ é __________.

Nos Problemas 11 e 12, encontre uma segunda solução para a equação diferencial se $y_1(x)$ é uma dada solução.

11. $y'' + 4y = 0$, $y_1 = \cos 2x$

12. $xy'' - 2(x + 1)y' + (x + 2)y = 0$, $y_1 = e^x$

Nos Problemas 13-18, encontre a solução geral para cada equação diferencial.

13. $y'' - 2y' - 2y = 0$

14. $2y'' + 2y' + 3y = 0$

15. $y''' + 10y'' + 25y' = 0$

16. $2y''' + 9y'' + 12y' + 5y = 0$

17. $3y''' + 10y'' + 15y' + 4y = 0$

18. $2\dfrac{d^4y}{dx^4} + 3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$

Nos Problemas 19-22, resolva cada equação diferencial pelo método dos coeficientes indeterminados.

19. $y'' - 3y' + 5y = 4x^3 - 2x$

20. $y'' - 2y' + y = x^2e^x$

21. $y''' - 5y'' + 6y = 2 \operatorname{sen} x + 8$

22. $y''' - y'' = 6$

Nos Problemas 23 e 24, resolva a equação diferencial dada sujeita às condições indicadas.

23. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(\pi/2) = 0$, $y(\pi) = -1$

24. $y'' - y = x + \operatorname{sen} x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$

Nos Problemas 25 e 26, resolva cada equação diferencial pelo método da variação dos parâmetros.

25. $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{tg} x$

26. $y'' - y' = 2e^x/(e^x + e^{-x})$

Nos Problemas 27 e 28, resolva a equação diferencial dada sujeita às condições indicadas.

27. $(2D^3 - 13D^2 + 24D - 9)y = 36$, $y(0) = -4$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{5}{2}$

28. $y'' + y = \sec^3 x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{1}{2}$

ENSAIO

Caos

John H. Hubbard
Departamento de Matemática
Cornell University

Uma história famosa de ficção científica conta que um político, após ter ganho uma eleição, realizou uma viagem em uma máquina do tempo de volta à era dos dinossauros. Enquanto estava lá, tomou todo o cuidado para não perturbar nada. Mesmo assim, ele pisou sem querer em uma folha de grama e a entortou. Quando voltou ao seu tempo, descobriu que neste mundo modificado ele tinha perdido a eleição.

Isto é o que os matemáticos têm em mente quando dizem que um sistema apresenta caos: mínimas variações na condição inicial de um sistema podem decisivamente afetar o resultado. Estamos falando do efeito borboleta. O bater das asas de uma borboleta no Japão pode ter um efeito decisivo no tempo, um mês depois, nos Estados Unidos?

A maioria das pessoas consideraria essa questão absurda, ridícula, sem pensar duas vezes. Mas eu acho que é uma questão relevante, se o intervalo de tempo for de pelo menos seis meses, e proponho aqui dar algumas razões quantitativas para minhas conclusões.

Uma justificativa para o efeito borboleta não é de maneira alguma óbvia. Não temos uma máquina do tempo disponível; não podemos voltar no tempo seis semanas, pegar uma borboleta (sem perturbar nada, qualquer que seja o significado disto) e então retornar e observar as conseqüências. Precisamos tomar outro caminho.

Para ajudá-lo a acompanhar a idéia, descreverei um "modelo lúdico" que mostra claramente o "efeito borboleta", através do qual as idéias que serão apresentadas podem ser entendidas.

Considere o sistema (puramente matemático) no qual, a cada tique do relógio, um ângulo é dobrado. Um estado do sistema é um ângulo, e ele evolui dobrando seu valor a cada instante. Em símbolos, você pode descrever o sistema como uma seqüência de ângulos

$$\theta_0, \theta_1, \ldots,$$

em que θ_0 é o estado inicial do sistema e $\theta_{n+1} = 2\theta_n$.

Esse sistema representa o comportamento do efeito borboleta. Se θ_0 for perturbado por um bilionésimo de uma volta, então o estado após 30 tiques do relógio é completamente desconhecido. Na verdade, a incerteza em nosso conhecimento sobre o estado do sistema dobra a cada tique; após 30 tiques, nossa incerteza é agora de

$$\frac{2^{30}}{1.000.000.000},$$

Ou seja, mais de uma volta; nada mais sabemos.

O exemplo acima traz uma noção-chave em todas as descrições de caos: entropia. Isso é essencialmente a taxa de dissipação de informação. Há várias maneiras de descrever essa taxa com precisão, e elas têm vários nomes (por exemplo, exponencial de Lyapunov), mas, para o propósito deste texto, vou me contentar com o tempo de duplicação: **o tempo necessário para uma pequena incerteza se duplicar**.

Como faríamos para estimar esse tempo no sistema formado pelos fatores meteorológicos? É claro que não podemos "escolher dois estados iniciais separados um do outro por um épsilon e medir a taxa em que divergem", mas podemos fazer alguma coisa parecida com isso. Podemos verificar épocas passadas com condições meteorológicas semelhantes. Então podemos ver quanto tempo levou para uma mudança dessas condições. Isso tem sido feito, proporcionando o cálculo de um tempo de duplicação de dois dias e meio.

Você também pode ir ao departamento de meteorologia de um grande instituto de pesquisa (por exemplo, o Institut de Météorologie de l'université de Paris -VI) e perguntar qual é o tempo de duplicação calculado por suas melhores simulações computacionais. Você obterá o mesmo valor.

A próxima questão com que devemos nos deparar é: o que corresponde ao número um bilionésimo acima? Qual proporção do sistema (a atmosfera) representa nosso distúrbio (uma borboleta)? Uma maneira (talvez contestável) de estimar isso é simplesmente medir a razão das massas. O peso de uma borboleta grande é cerca de 1 grama, e a massa da atmosfera pesa 5×10^{21} gramas.

A pressão atmosférica é de aproximadamente 1 kg/cm^2, ou seja, há 1 kg de ar acima de todo centímetro quadrado da terra. A área de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$, e o raio da terra é de cerca de 6000 km. Então, o peso da massa atmosférica é

$$1000 \times 4 \times \pi \times (6 \times 10^8)^2 \text{ gramas.}$$

Logo, uma borboleta não é um bilionésimo do tamanho do sistema; ela é precisamente mil-bilhão-bilionésimo.

Como 5×10^{21} é aproximadamente 2^{72}, deve levar cerca de 72 períodos de duplicação para os efeitos de uma única borboleta induzirem perturbações em uma escala global.

Uma conseqüência dessa análise é que previsões do tempo para períodos longos são completamente impossíveis. É inconcebível que alguém possa saber o estado da atmosfera como conseqüência do efeito de uma borboleta, ou mesmo em uma escala mil bilhões de vezes maior. Perturbações dessa escala decisivamente afetam a atmosfera em um mês.

Físicos, químicos, astrônomos e matemáticos estão mostrando agora que uma enorme quantidade de sistemas apresentam "caos", no sentido de que estão se expandindo e têm um tempo de duplicação para erros.

Um exemplo foi dado pelo meteorologista E. Lorenz, cuja descoberta pode ter sido o começo dessa linha inteira de pensamentos. Em 1961, ele estava realizando uma simulação meteorológica. Os computadores da época eram primitivos, por isso os dados tinham de ser drasticamente simplificados, para tornar possível o trabalho computacional. Ele observou vários comportamentos a partir de seu modelo, aparentemente bem satisfatórios, até o dia em que decidiu examinar alguma coisa que ele já tinha computado durante um período de tempo mais longo. Ele registrou o que pensou ser as condições iniciais originais, foi tomar uma xícara de café e quando voltou percebeu que seu novo tempo não estava de acordo com a previsão anterior de seu modelo.

Ele notou que registrara as condições iniciais com menos decimais que as condições iniciais da simulação anterior; e isso causara a discrepância. Após simplificar ainda mais seu modelo, Lorenz descobriu que o seguinte sistema de equações diferenciais exibia o mesmo tipo caótico de comportamento:

$$x' = 10(y - x)$$

$$y' = 28x - y - xz$$

$$z' = \frac{8}{3}z + xy.$$

Trabalhos posteriores nessas equações e outras em $\mathbf{R}^3$ mostraram que comportamento caótico e atratores fractais são comuns.

A presença de caos tem um efeito devastador sobre as previsões, mas algumas vezes é útil; às vezes, o caos pode ser controlado.

A NASA não é capaz de construir foguetes com combustível suficiente para alcançar grandes distâncias. Então, eles fizeram com que o foguete tocasse delicadamente em Vênus, roubando dele um pouco da energia potencial necessária para alcançar a fantástica velocidade requerida. Apenas uma pequena variação na trajetória pode provocar uma grande variação na velocidade do foguete, e trajetória é um projeto factível. Mas imagine como isso dificulta previsões para longas trajetórias como órbitas de cometas, por exemplo.

A presença de caos também tem conseqüências filosóficas, como, por exemplo, o conflito entre determinismo e contingência. Como o ser humano pode ser livre se o universo é completamente governado por leis determinísticas?

Se as equações exibem caos, então segue-se que você não pode saber se são determinísticas, não importa o tempo que observe o sistema. Se você fosse observar uma seqüência de ângulos, cada um com 15 decimais, nunca poderia saber se está observando uma seqüência de duplicações exatas de um ângulo ou o mesmo sistema perturbado em uma escala menor que 10^{-15} (tal como erro de arredondamento)

Analogamente, se o cérebro não estivesse seguindo exatamente as leis da física, mas se encontrasse perturbado (por forças espirituais, liberdade, deus) em uma escala imensurável, sem afetar drasticamente o sistema (eu duvido que alguém reaja da mesma forma com eletrodos em seu cérebro), então, embora você nunca soubesse, em talvez 4 segundos, poderia decisivamente alterar todas as decisões. Precisamente, seria necessário o conhecimento sobre o tempo de duplicação do cérebro. A introspecção me diz que isso deve ser talvez 0,1 segundo, o tempo de uma compreensão elementar. Talvez, algum dia, os neurologistas cheguem a uma estimativa mais confiável. Se isso for acurado, então 4 segundos serão 40 tempos de duplicação, e $2^{40} \approx 10^{12}$ é aproximadamente o número de neurônios do cérebro.

Pessoalmente, não acho que haja um deus atrapalhando as leis físicas em meu cérebro, mas isso não é possível saber. O caos nos impede de saber tais coisas.

De modo mais geral, embora eu tenha a segurança que você poderia esperar de um cientista, acho que o mundo é essencialmente incompreensível, com toda sorte de pequenos eventos tendo enormes conseqüências sem nenhuma esperança de previsão ou entendimento.

Se você acha absurda a idéia de que suas menores ações provavelmente influenciam todo o mundo futuro, pense no seguinte fato: a menor variação no comportamento sexual de qualquer pessoa no ano 800 d.C., teria certamente afetado o mundo de várias maneiras incalculáveis.