EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Volume 1

Dennis G. Zill
Michael R. Cullen
Loyola Marymount University

Tradução
Antonio Zumpano, Ph. D.
Professor de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais

Revisão Técnica
Antonio Pertence Jr.
Professor Titular de Matemática da Faculdade de Sabará (MG)
Pós-graduado em Educação Matemática pela UNI-BH
Membro Efetivo da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)

PEARSON
Makron Books

São Paulo

Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha
Guatemala México Peru Porto Rico Venezuela

ABDR
Universidade Feder...
Biblioteca

Sumário

Capítulo 2

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Conceitos Importantes

Problema de valor inicial
Condição inicial
Existência de uma solução
Unicidade de uma solução
Separação de variáveis
Função homogênea
Equação homogênea
Diferencial exata
Equação exata
Fator de integração
Equação linear
Solução geral

Estamos agora em posição de resolver algumas equações diferenciais. Começamos com as equações diferenciais de primeira ordem.

Se uma equação diferencial de primeira ordem puder ser resolvida, veremos que a técnica ou método para resolvê-la depende do tipo da equação de primeira ordem com que estamos lidando. Durante anos, muitos matemáticos se esforçaram para resolver diversos tipos particulares de equações. Por isso, há vários métodos de solução; o que funciona para um tipo de equação de primeira ordem não se aplica necessariamente a outros tipos de equação. Embora consideremos métodos de solução para sete tipos clássicos de equações neste capítulo, centralizamos nossa atenção em quatro tipos de equações. Alguns desses quatro tipos são importantes nas aplicações.

2.1 TEORIA PRELIMINAR

Problema de Valor Inicial

Estamos interessados em resolver um equação diferencial de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

sujeita à condição inicial $y(x_0) = y_0$, em que x_0 é um número no intervalo I e y_0 é um número real arbitrário. O problema

$$\begin{aligned} &\textit{Resolva:}\ \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ &\textit{Sujeito a:}\ y(x_0) = y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

é chamado de **problema de valor inicial**. Em termos geométricos, estamos procurando uma solução para a equação diferencial, definida em algum intervalo I tal que o gráfico da solução passe por um ponto (x_0, y_0) determinado *a priori*. Veja a Figura 2.1.

EXEMPLO 1

Vimos (páginas 9-10) que $y = ce^x$ é uma família a um parâmetro de soluções para $y' = y$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Se especificarmos, digamos, $y(0) = 3$, então substituindo $x = 0$, $y = 3$ na família, obteremos $3 = ce^0 = c$. Logo, como mostrado na Figura 2.2, a função

$$y = 3e^x$$

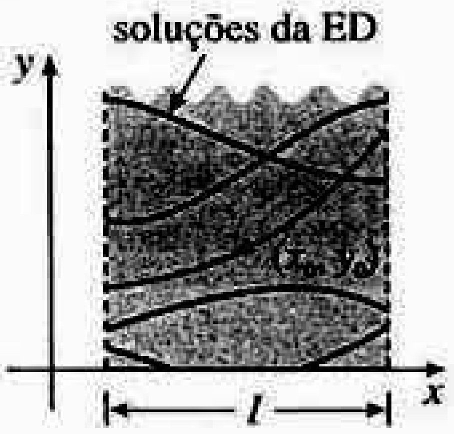

Figura 2.1

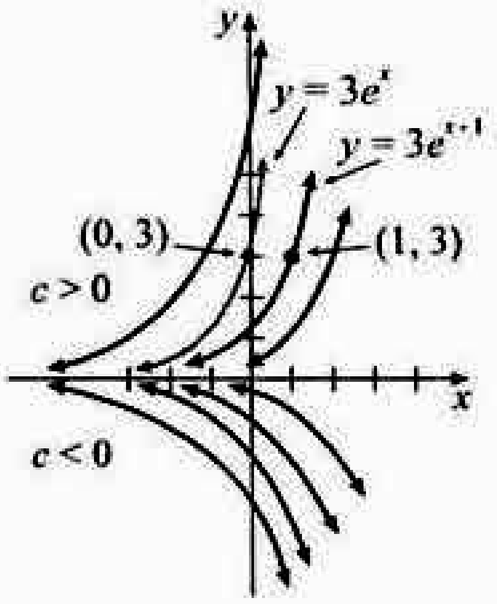

Figura 2.2

* Neste texto, supomos que uma equação diferencial $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ possa ser colocada na forma $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Há exceções.

é uma solução para o problema de valor inicial

$$y' = y, \quad y(0) = 3.$$

Se tivéssemos pedido um solução de $y' = y$ que passasse pelo ponto (1, 3) em vez de (0, 3), então $y(1) = 3$ iria nos dar $c = 3e^{-1}$, e daí, $y = 3e^{x-1}$. O gráfico dessa solução está também indicado na Figura 2.2. ■

A questão fundamental surge quando consideramos um problema de valor inicial como (2):

Existe uma solução para o problema?
Se existe uma solução, ela é única?

Em outras palavras, a equação diferencial $dy/dx = f(x, y)$ possui uma solução cujo gráfico passa pelo ponto (x_0, y_0)? E será que essa solução, se existir, é única?

Como os próximos exemplos mostrarão, a resposta à segunda questão é: algumas vezes não.

EXEMPLO 2

Você deve verificar que cada uma das funções $y = 0$ e $y = x^4/16$ satisfaça a equação diferencial e a condição inicial no problema

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0.$$

Como ilustrado na Figura 2.3, os gráficos de ambas as funções passam pelo ponto (0, 0).

Em geral, deseja-se saber, antes de considerar um problema de valor inicial, se uma solução existe e, quando existe, se é a única solução para o problema. O segundo teorema, devido a Picard,* nos dá condições suficientes para garantir existência e unicidade de soluções.

TEOREMA 2.1 Existência de uma Única Solução

Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x, y)$ e $\partial f/\partial y$ são contínuas em R, então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida em I que satisfaz o problema de valor inicial (2).

* **Charles Émile Picard** (1856-1941) Picard foi um dos proeminentes matemáticos franceses do final do século passado e começo deste século. Fez significativas contribuições nas áreas de equações diferenciais e variável complexa. Em 1899, Picard lecionou na Universidade Clark em Worcester, estado de Massachusetts, Estados Unidos.

O resultado anterior é um dos mais populares teoremas de existência e unicidade para equações diferenciais de primeira ordem, porque os critérios de continuidade de $f(x, y)$ e $\partial f/\partial y$ são relativamente fáceis de ser verificados. Em geral, não é possível determinar um intervalo específico I no qual uma solução está definida sem realmente resolver a equação diferencial (veja Problema 16). A geometria do Teorema 2.1 está ilustrada na Figura 2.4. ■

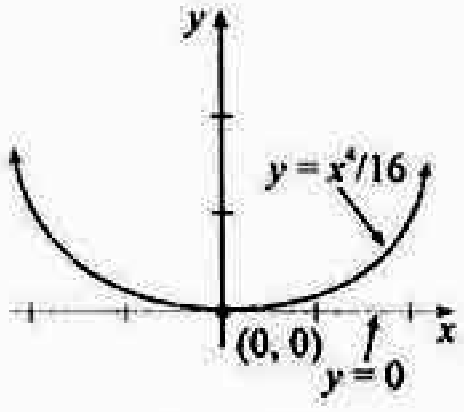

Figura 2.3

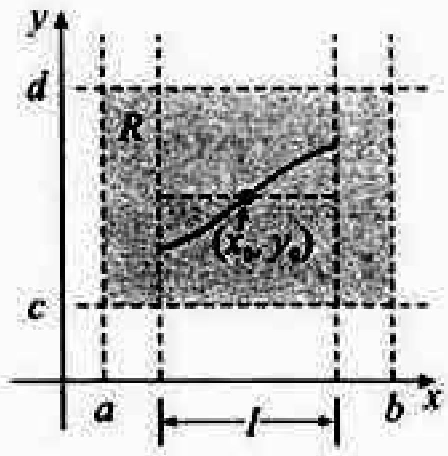

Figura 2.4

EXEMPLO 3

Vimos no Exemplo 2 que a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$$

possui pelo menos duas soluções cujos gráficos passam por (0, 0). As funções

$$f(x, y) = xy^{1/2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$$

são contínuas no semiplano superior definido por $y > 0$. Concluímos do Teorema 2.1 que, dado um ponto qualquer (x_0, y_0) com $y_0 > 0$ (por exemplo, (0, 1), existe algum intervalo em torno de x_0 no qual a equação diferencial dada possui uma única solução $y(t)$, tal que $y(x_0) = y_0$. ■

EXEMPLO 4

O Teorema 2.1 garante que existe um intervalo contendo $x = 0$ no qual $y = 3e^x$ é a única solução para o problema de valor inicial do Exemplo 1:

$$y' = y, \quad y(0) = 3.$$

Isso segue-se do fato de que $f(x, y) = y$ e $\partial f/\partial y = 1$ são contínuas em todo o plano xy. Pode ser mostrado ainda que esse intervalo seja $(-\infty, \infty)$. ■

EXEMPLO 5

Para

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

observamos que $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $\partial f/\partial y = 2y$ são contínuas em todo o plano xy. Logo, por qualquer ponto (x_0, y_0) passa uma e somente uma solução para a equação diferencial.

Nota **(i)** Devemos estar cientes da distinção entre a *existência* de uma solução e *poder exibir* tal solução. Evidentemente, se encontramos uma solução exibindo-a, podemos dizer que ela existe, mas, por outro lado, uma solução pode existir e não ser possível expressá-la. Pelo Exemplo 5, sabemos que uma solução para o problema $dy/dx = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$ existe em algum intervalo em torno de $x = 0$ e é única. Porém, a equação não pode ser resolvida em termos de funções elementares; podemos expressar uma solução aproximada usando os métodos do Capítulo 9.

(ii) As condições enunciadas no Teorema 2.1 são *suficientes*, mas não *necessárias*. Quando $f(x, y)$ e $\partial f/\partial y$ são contínuas em uma região retangular R, segue-se sempre que existe uma única solução para (2) quando (x_0, y_0) é um ponto interior a R. Porém, se as condições enunciadas nas hipóteses do teorema não são satisfeitas, então o problema de valor inicial (2) pode ter ou não solução, ter mais de uma solução ou ter uma única solução. Ainda, a condição de continuidade de $\partial f/\partial y$ pode ser enfraquecida um pouco sem alteração da conclusão do teorema. Este resultado é uma forma mais forte do teorema, mas infelizmente sua aplicabilidade não é tão fácil quanto a do Teorema 2. Na verdade, se não estamos interessados em unicidade, então um famoso teorema elaborado pelo matemático italiano Giuseppe Peano diz que a continuidade de $f(x, y)$ em R é suficiente para garantir a existência de pelo menos uma solução para $dy/dx = f(x, y)$ passando por um ponto (x_0, y_0) interior a R.

2.1 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 441.

Nos Problemas 1-10, determine uma região do plano xy para a qual a equação diferencial teria uma única solução passando por um ponto (x_0, y_0) na região.

1. $\dfrac{dy}{dx} = y^{2/3}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

3. $x\dfrac{dy}{dx} = y$

4. $\dfrac{dy}{dx} - y = x$

5. $(4 - y^2)y' = x^2$

6. $(1 + y^3)y' = x^2$

7. $(x^2 + y^2)y' = y^2$

8. $(y - x)y' = y + x$

9. $\frac{dy}{dx} = x^3 \cos y$

10. $\frac{dy}{dx} = (x - 1)e^{y/(x-1)}$

Nos Problemas 11 e 12, determine, por inspeção, pelo menos duas soluções para o problema de valor inicial dado.

11. $y' = 3y^{2/3}, \; y(0) = 0$

12. $x\frac{dy}{dx} = 2y, \; y(0) = 0$

13. Por inspeção, determine uma solução para a equação diferencial não-linear $y' = y^3$ que satisfaça $y(0) = 0$. A solução é única?

14. Por inspeção, encontre uma solução para o problema de valor inicial

$$y' = |y - 1|, \quad y(0) = 1.$$

Diga por que as condições do Teorema 2.1 não são satisfeitas para essa equação diferencial. Embora não possamos provar, a solução para esse problema de valor inicial é única.

15. Verifique que $y = cx$ é uma solução para a equação diferencial $xy' = y$ para todo valor do parâmetro c. Encontre pelo menos duas soluções para o problema de valor inicial

$$xy' = y, \quad y(0) = 0.$$

Observe que a função definida por partes

$$y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

satisfaz a condição $y(0) = 0$. Ela é uma solução para o problema de valor inicial?

16. **(a)** Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2.$$

Determine uma região do plano xy tal que a equação tenha uma única solução passando por um ponto (x_0, y_0) da região.

(b) Formalmente, mostre que $y = \operatorname{tg} x$ satisfaz a equação diferencial e a condição inicial $y(0) = 0$.

(c) Explique por que $y = \operatorname{tg} x$ não é uma solução para o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y(0) = 0,$$

no intervalo $(-2, 2)$.

(d) Explique por que $y = \operatorname{tg} x$ é uma solução para o problema de valor inicial da parte (c) no intervalo $(-1, 1)$.

Nos Problemas 17-20, verifique se o Teorema 2.1 garante unicidade de solução para a equação diferencial $y' = \sqrt{y^2 - 9}$, passando pelo ponto dado.

17. $(1, 4)$

18. $(5, 3)$

19. $(2, -3)$

20. $(-1, 1)$

2.2 VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Nota ao estudante: Na resolução para uma equação diferencial, você terá freqüentemente que utilizar, digamos, integração por partes, frações parciais ou possivelmente uma substituição. Será proveitoso gastar alguns minutos de seu tempo na revisão de algumas técnicas de integração.

Começamos nosso estudo da metodologia de resolução de equações de primeira ordem com a mais simples de todas as equações.

Se $g(x)$ é uma função contínua dada, então a equação de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{1}$$

pode ser resolvida por integração. A solução para (1) é

$$y = \int g(x)\,dx + c.$$

EXEMPLO 1

Resolva (a) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + e^{2x}$ e (b) $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x.$

Solução Como ilustrado acima, ambas as equações podem ser resolvidas por integração.

(a) $y = \int (1 + e^{2x})\,dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + c$

(b) $y = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$ ■

A equação (1), bem como seu método de resolução, é apenas um caso especial do seguinte:

DEFINIÇÃO 2.1 Equação Separável

Uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

é chamada **separável** ou tem **variáveis separáveis**.

Observe que uma equação separável pode ser escrita como

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x). \tag{2}$$

É imediato que (2) se reduz a (1) quando $h(y) = 1$.

Agora, se $y = f(x)$ denota uma solução para (2), temos

$$h(f(x))f'(x) = g(x),$$

logo,

$$\int h(f(x))f'(x)\,dx = \int g(x)\,dx + c. \tag{3}$$

Mas $dy = f'(x)\,dx$, assim (3) é o mesmo que

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx + c. \tag{4}$$

Método de Solução

A equação (4) indica o procedimento na resolução para equações diferenciais separáveis. Uma família a um parâmetro de soluções, em geral parada implicitamente, é obtida integrando ambos os lados de $h(y)\,dy = g(x)\,dx$.

Nota Não há necessidade de usar duas constantes na integração de uma equação separável pois,

$$\int h(y)\,dy + c_1 = \int g(x)\,dx + c_2$$

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx + c_2 - c_1 = \int g(x)\,dx + c,$$

em que c é completamente arbitrária. Em várias instâncias, no decorrer dos capítulos seguintes, não hesitaremos em indexar constantes de uma maneira que possa ser mais conveniente para uma dada equação. Por exemplo, múltiplos de constantes ou combinações de constantes podem ser trocados por uma única constante.

EXEMPLO 2

Resolva $(1 + x)\,dy - y\,dx = 0.$

Solução Dividindo por $(1 + x)y$, podemos escrever, $dy/y = dx/(1 + x)$, da qual se segue que

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1 + x}.$$

$$\ln|y| = \ln|1 + x| + c_1$$

$$y = e^{\ln|1 + x| + c_1}$$

$$= e^{\ln|1 + x|} \times e^{c_1}$$

$$= |1 + x|e^{c_1}.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} |1 + x| = 1 + x,\ x \geq -1 \\ |1 + x| = -(1 + x),\ x < -1 \end{array}}$$

$$= \pm e^{c_1}(1 + x)$$

Trocando $\pm e^{c_1}$ por c, temos, $y = c(1 + x)$.

Solução Alternativa Como cada integral resulta em um logaritmo, uma escolha conveniente para a constante de integração seria $\ln|c|$ em vez de c:

$$\ln|y| = \ln|1 + x| + \ln|c|$$

ou

$$\ln|y| = \ln|c(1 + x)|$$

assim,

$$y = c(1 + x)$$

Mesmo que as integrais indefinidas não sejam *todas* logarítmicas, ainda pode ser vantajoso usar $\ln|c|$. Porém, nenhuma regra pode ser dada. ■

EXEMPLO 3

Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(4) = 3.$$

Solução De $y\,dy = -x\,dx$, obtemos

$$\int y\,dy = -\int x\,dx \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_1.$$

Essa solução pode ser escrita como $x^2 + y^2 = c^2$, trocando as constantes $2c_1$ por c^2. A solução representa uma família de círculos concêntricos.

Agora, quando $x = 4$, $y = 3$ temos $16 + 9 = 25 = c^2$. Logo, o problema de valor inicial determina $x^2 + y^2 = 25$. Em vista do Teorema 2.1, podemos concluir que este é o único círculo da família que passa pelo ponto (4, 3). Veja a Figura 2.5. ■

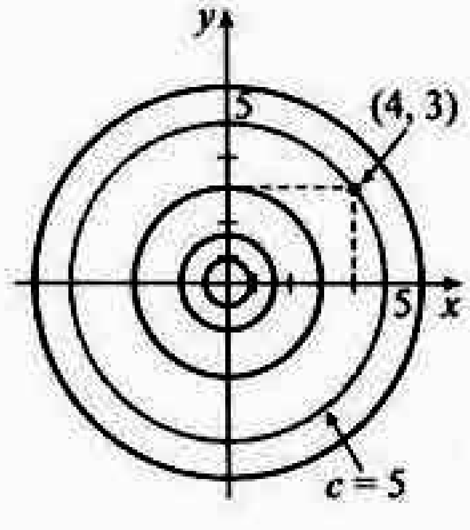

Figura 2.5

EXEMPLO 4

Resolva
$$xe^{-y}\operatorname{sen} x\,dx - y\,dy = 0.$$

Solução Depois de multiplicar por e^{y}, obtemos
$$x\operatorname{sen} x\,dx = ye^{y}\,dy.$$

A integração por partes em ambos os lados da equação resulta em
$$-x\cos x + \operatorname{sen} x = ye^{y} - e^{y} + c.$$

■

EXEMPLO 5

Resolva
$$xy^4\,dx + (y^2 + 2)e^{-3x}\,dy = 0. \tag{5}$$

Solução Multiplicando a equação dada por e^{3x} e dividindo por y^4, obtemos
$$xe^{3x}\,dx + \frac{y^2 + 2}{y^4}\,dy = 0 \text{ ou } xe^{3x}\,dx + (y^{-2} + 2y^{-4})\,dy = 0. \tag{6}$$

Usando integração por partes no primeiro termo, temos
$$\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} - y^{-1} - \frac{2}{3}y^{-3} = c_1.$$

A família a um parâmetro de soluções pode também ser escrita como
$$e^{3x}(3x - 1) = \frac{9}{y} + \frac{6}{y^3} + c, \tag{7}$$

em que a constante $9c_1$ foi trocada por c. ■

Dois pontos devem ser mencionados neste instante. Primeiro, a menos que seja importante ou conveniente, não há necessidade de tentar resolver y como função de x em uma expressão que representa uma família de soluções. A equação (7) mostra que essa tarefa pode apresentar problemas que vão além da enfadonha manipulação de símbolos. Como conseqüência, é freqüente o caso em que o intervalo no qual uma solução é válida não é aparente. Segundo, deve-se estar atento à separação de variável para ter certeza de que os divisores não são nulos. Uma solução constante pode facilmente ser esquecida no embaralhamento do processo de resolução para o problema. No Exemplo 5, observe que $y = 0$ é uma solução para (5), mas não pertence ao conjunto de soluções definido em (7).

EXEMPLO 6

Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4, \quad y(0) = -2.$$

Solução Colocamos a equação na forma

$$\frac{dy}{y^2 - 4} = dx \tag{8}$$

e usamos frações parciais no lado esquerdo. Temos

$$\left[\frac{-\frac{1}{4}}{y + 2} + \frac{\frac{1}{4}}{y - 2}\right] dy = dx \tag{9}$$

assim
$$-\frac{1}{4}\ln|y + 2| + \frac{1}{4}\ln|y - 2| = x + c_1. \tag{10}$$

Logo,
$$\ln\left|\frac{y - 2}{y + 2}\right| = 4x + c_2$$

e
$$\frac{y - 2}{y + 2} = ce^{4x},$$

em que trocamos $4c_1$ por c_2 e e^{c_2} por c. Finalmente, resolvendo y na última equação, obtemos

$$y = 2\frac{1 + ce^{4x}}{1 - ce^{4x}}. \tag{11}$$

A substituição $x = 0$, $y = -2$ acarreta o seguinte dilema

$$-2 = 2\frac{1 + c}{1 - c}$$

$$-1 + c = 1 + c \quad \text{ou} \quad -1 = 1.$$

Examinaremos a equação diferencial mais cuidadosamente. O fato é: a equação

$$\frac{dy}{dx} = (y + 2)(y - 2)$$

é satisfeita por duas funções constantes, a saber, $y = -2$ e $y = 2$. Inspecionando as equações (8), (9) e (10), vemos que as soluções $y = -2$ e $y = 2$ não foram consideradas (pois anulariam o denominador). Mas é interessante observar que a solução $y = 2$ pode ser subseqüentemente recuperada fazendo $c = 0$ em (11). Porém nenhum valor de c nos dará a solução $y = -2$. Esta última função constante é a única solução para o problema de valor inicial. Veja a Figura 2.6. ■

Se, no Exemplo 6, tivéssemos usado $\ln|c|$ como a constante de integração, então a expressão da família a um parâmetro de soluções seria

$$y = 2\frac{c + e^{4x}}{c - e^{4x}}. \tag{12}$$

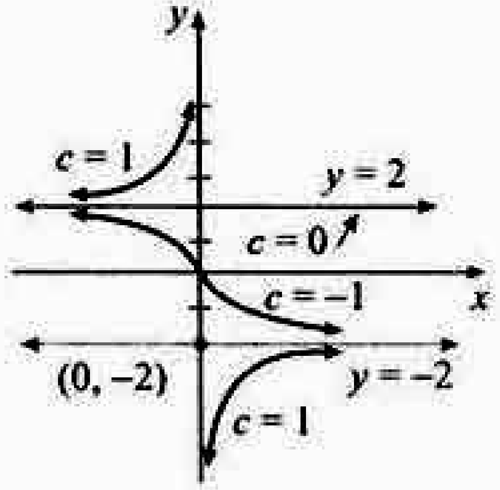

Figura 2.6

Note que (12) se reduz a $y = -2$ quando $c = 0$, mas agora nenhum valor de c nos dará a solução constante $y = 2$.

Quando uma solução para um problema de valor inicial pode ser obtida escolhendo um parâmetro particular em uma família a um parâmetro de soluções para uma equação diferencial de primeira ordem, os estudantes (e os professores) naturalmente se contentam com isso. Na Seção 2.1, vimos porém que uma solução para um problema de valor inicial pode não ser única. Por exemplo, o problema

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0, \tag{13}$$

possui pelo menos duas soluções, a saber, $y = 0$ e $y = x^4/16$. Estamos agora em posição de resolver a equação. Separando as variáveis

$$y^{-1/2}\,dy = x\,dx$$

e integrando temos

$$2y^{1/2} = \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \text{ou} \quad y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2.$$

Quando $x = 0$, $y = 0$, então necessariamente $c = 0$. Logo, $y = x^4/16$. A solução $y = 0$ foi desconsiderada quando dividimos por $y^{1/2}$. Ainda, o problema de valor inicial (13) possui infinitas soluções, pois, para cada escolha do parâmetro $a \geq 0$, a função definida por partes

$$y = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{(x^2 - a^2)^2}{16}, & x \geq a \end{cases}$$

satisfaz o problema de valor inicial. Veja a Figura 2.7

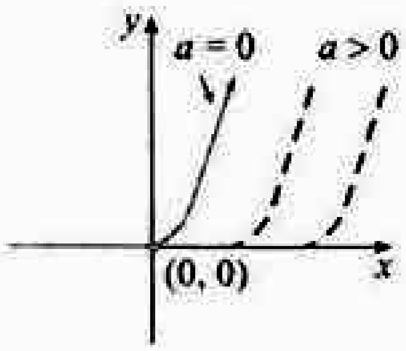

Figura 2.7

Nota Vimos em alguns exemplos que a constante na família a um parâmetro de soluções para uma equação diferencial de primeira ordem pode ser trocada quando conveniente. Também, pode facilmente acontecer que duas maneiras distintas de resolução levem a respostas diferentes. Por exemplo, por separação de variáveis, podemos mostrar que

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = c \text{ ou } \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} c \text{ ou } \frac{x+y}{1-xy} = c.$$

são famílias a um parâmetro de soluções para $(1 + y^2)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$. Quando você estiver estudando as próximas seções, tenha em mente o fato de que famílias de soluções podem ser *equivalentes* no seguinte sentido: uma família pode ser obtida de outra por uma troca de constante ou por manipulação algébrica e trigonométrica.

2.2 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 441.

Nos Problemas 1-40, resolva a equação diferencial dada por separação de variável.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 5x$

2. $\dfrac{dy}{dx} = (x+1)^2$

3. $dx + e^{3x}\,dy = 0$

4. $dx - x^2\,dy = 0$

5. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = x + 6$

6. $e^x \dfrac{dy}{dx} = 2x$

7. $xy' = 4y$

8. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{x^2}$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+1}{x}$

11. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x^2y^2}{1+x}$

12. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1+2y^2}{y \operatorname{sen} x}$

13. $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

14. $e^x y \dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

15. $(4y + yx^2)\,dy = (2x + xy^2)\,dx = 0$

16. $(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)\,dy = y^2\,dx$

17. $2y(x + 1)\,dy = x\,dx$

18. $x^2y^2\,dy = (y + 1)\,dx$

19. $y \ln x \dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$

20. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2y+3}{4x+5}\right)^2$

21. $\dfrac{dS}{dr} = kS$

22. $\dfrac{dQ}{dt} = k(Q - 70)$

23. $\dfrac{dP}{dt} = P - P^2$

24. $\dfrac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$

25. $\sec^2 x\,dy + \operatorname{cosec} y\,dx = 0$

26. $\operatorname{sen} 3x\,dx + 2y\cos^3 3x\,dy = 0$

27. $e^y \operatorname{sen} 2x\,dx + \cos x(e^{2y} - y)\,dy = 0$

28. $\sec x\,dy = x \operatorname{cotg} y\,dx$

29. $(e^y + 1)^2 e^{-y}\,dx + (e^x + 1)^3 e^{-x}\,dy = 0$

30. $\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dx} = (1 + x^2)^{-1/2}(1 + y^2)^{1/2}$

31. $(y - yx^2)\dfrac{dy}{dx} = (y + 1)^2$

32. $2\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{2x}{y}$

33. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$

34. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$

35. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x(\cos 2y - \cos^2 y)$

36. $\sec y \dfrac{dy}{dx} + \operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}(x + y)$

37. $x\sqrt{1 - y^2}\,dx = dy$

38. $y(4 - x^2)^{1/2}\,dy = \left(4 + y^2\right)^{1/2} dx$

39. $(e^x + e^{-x})\dfrac{dy}{dx} = y^2$

40. $(x + \sqrt{x})\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{y}$

Nos Problemas 41-48, resolva a equação diferencial dada sujeita à condição inicial indicada.

41. $(e^{-y} + 1)\operatorname{sen} x\,dx = (1 + \cos x)\,dy$, $y(0) = 0$

42. $(1 + x^4)\,dy + x(1 + 4y^2)\,dx = 0$, $y(1) = 0$

43. $y\,dy = 4x(y^2 + 1)^{1/2}\,dx$, $y(0) = 1$

44. $\dfrac{dy}{dt} + ty = y$, $y(1) = 3$

45. $\dfrac{dx}{dy} = 4(x^2 + 1)$, $x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

46. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - 1}{x^2 - 1}$, $y(2) = 2$

47. $x^2 y' = y - xy$, $y(-1) = -1$

48. $y' + 2y = 1$, $y(0) = \dfrac{5}{2}$

Nos Problemas 49 e 50, encontre uma solução para a equação diferencial dada que passe pelos pontos indicados.

49. $\dfrac{dy}{dx} - y^2 = -9$

(a) $(0, 0)$ **(b)** $(0, 3)$ **(c)** $\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$

50. $x\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y$

(a) $(0, 1)$ **(b)** $(0, 0)$ **(c)** $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

51. Encontre uma solução singular para a equação do Problema 37.

52. Encontre uma solução singular para a equação do Problema 39.

A uma pequena mudança (perturbação) na condição inicial ou na própria equação, freqüentemente corresponde uma mudança radical na solução para uma equação diferencial. Nos Problemas 53-56, compare as soluções dos problemas de valor inicial dados.

53. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2, \; y(0) = 1$

54. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2, \; y(0) = 1{,}01$

55. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2 + 0{,}01, \; y(0) = 1$

56. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2 - 0{,}01, \; y(0) = 1$

Uma equação diferencial da forma $dy/dx = f(ax + by + c)$, $b \neq 0$, pode sempre ser reduzida a uma equação com variáveis separáveis por meio da substituição $u = ax + by + c$. Use este procedimento para resolver os Problemas 57-62.

57. $\dfrac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$

58. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x - y}{x + y}$

59. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}^2(x + y)$

60. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x + y)$

61. $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$

62. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + e^{y - x + 5}$

2.3 EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

Antes de considerar o conceito de equação **diferencial homogênea de primeira ordem** e seu método de solução, precisamos primeiro examinar de perto a natureza de uma **função homogênea**. Começamos com a definição deste conceito.

DEFINIÇÃO 2.2 Função Homogênea

Se uma função f satisfaz

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \tag{1}$$

para algum número real n, então dizemos que f é uma **função homogênea de grau** n.

EXEMPLO 1

(a) $f(x, y) = x^2 - 3xy + 5y^2$

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2 - 3(tx)(ty) + 5(ty)^2 \\ &= t^2x^2 - 3t^2xy + 5t^2y^2 \\ &= t^2[x^2 - 3xy + 5y^2] = t^2 f(x, y) \end{aligned}$$

A função é homogênea de grau dois.

(b) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

$$f(tx, ty) = \sqrt[3]{t^2x^2 + t^2y^2} = t^{2/3}\sqrt[3]{x^2 + y^2} = t^{2/3} f(x, y)$$

A função é homogênea de grau 2/3.

(c) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 1$

$$f(tx, ty) = t^3x^3 + t^3y^3 + 1 \neq t^3 f(x, y)$$

pois $t^3 f(x, y) = t^3x^3 + t^3y^3 + t^3$. A função não é homogênea.

(d) $f(x, y) = \dfrac{x}{2y} + 4$

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{2ty} + 4 = \frac{x}{2y} + 4 = t^0 f(x, y)$$

A função é homogênea de grau zero. ■

Como as partes (c) e (d) do Exemplo 1 mostram, uma constante adicionada à função destrói a homogeneidade, a menos que a função seja homogênea de grau zero. Ainda, muitas vezes uma função homogênea pode ser reconhecida examinando o **grau** de cada termo.

EXEMPLO 2

(a) $f(x, y) = \overbrace{6xy^3}^{\substack{\text{grau 1} \\ \text{grau 3}}\ \text{grau 4}} - \underbrace{x^2y^2}_{\substack{\text{grau 2} \\ \text{grau 2}}\ \text{grau 4}}$

A função é homogênea de grau quatro.

(b) $f(x, y) = \overset{\text{grau 2}}{x^2} - \underset{\text{grau 1}}{y}$ graus diferentes

A função não é homogênea, pois os graus dos dois termos são diferentes. ■

Se $f(x, y)$ for uma função homogênea de grau n, note que poderemos escrever

$$f(x, y) = x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad \text{e} \quad f(x, y) = y^n f\left(\frac{x}{y}, 1\right), \tag{2}$$

em que $f(1, y/x)$ e $f(x/y, 1)$ são ambas homogêneas de grau zero.

EXEMPLO 3

Vemos que $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ é homogênea de grau dois. Logo,

$$f(x, y) = x^2\left[1 + 3\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] = x^2 f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

$$f(x, y) = y^2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y}\right) + 1\right] = y^2 f\left(\frac{x}{y}, 1\right).$$ ■

Uma equação diferencial homogênea de primeira ordem é definida em termos das funções homogêneas.

DEFINIÇÃO 2.3 Equação Homogênea

Uma equação diferencial da forma

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{3}$$

é chamada de **homogênea** se ambos os coeficientes M e N são funções homogêneas do mesmo grau.

Em outras palavras, $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ é homogênea se

$$M(tx, ty) = t^n M(x, y) \quad \text{e} \quad N(tx, ty) = t^n N(x, y).$$

Método de Solução

Uma equação diferencial homogênea $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ pode ser resolvida por meio de uma substituição algébrica. Especificamente, a substituição $y = ux$ ou $x = vy$, em que u e v são as novas variáveis independentes, *transformará a equação em uma equação diferencial de primeira ordem separável*. Para ver isso, seja $y = ux$; então, sua diferencial $dy = u\,dx + x\,du$. Substituindo em (3), temos

$$M(x, ux)\,dx + N(x, ux)[u\,dx + x\,du] = 0.$$

Agora, pela propriedade de homogeneidade dada em (2), podemos escrever

$$x^n M(1, u)\,dx + x^n N(1, u)[u\,dx + x\,du] = 0$$

ou $$[M(1, u) + uN(1, u)]\,dx + xN(1, u)\,du = 0,$$

assim, $$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, u)\,du}{M(1, u) + uN(1, u)} = 0.$$

A fórmula acima não deve ser memorizada. O melhor *é repetir o processo sempre que for necessário*. A prova que a substituição $x = vy$ em (3) também leva a uma equação separável é deixada como exercício. Veja o Problema 45.

EXEMPLO 4

Resolva $$(x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0.$$

Solução Tanto $M(x, y)$ quanto $N(x, y)$ são homogêneas de grau dois. Se fizermos $y = ux$, segue-se que

$$(x^2 + u^2x^2)\,dx + (x^2 - ux^2)[u\,dx + x\,du] = 0$$

$$x^2(1 + u)\,dx + x^3(1 - u)\,du = 0$$

$$\frac{1 - u}{1 + u}\,du + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\left[-1 + \frac{2}{1 + u}\right]du + \frac{dx}{x} = 0$$

Depois de integrar a última linha, obtemos

$$-u + 2\ln|1 + u| + \ln|x| = \ln|c|$$

$$\frac{-y}{x} + 2\ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + \ln|x| = \ln|c|.$$

Usando as propriedades do logaritmo, podemos escrever a solução precedente como

$$\ln\left|\frac{(x+y)^2}{cx}\right| = \frac{y}{x}.$$

A definição de um logaritmo implica

$$(x+y)^2 = cxe^{y/x}. \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 5

Resolva $$(2\sqrt{xy} - y)\,dx - x\,dy = 0.$$

Solução Os coeficientes $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são homogêneos de grau um. Se $y = ux$, a equação diferencial torna-se, depois de simplificada,

$$\frac{du}{2 - 2u^{1/2}} + \frac{dx}{x} = 0.$$

A integral do primeiro termo pode ser calculada substituindo $t = u^{1/2}$. O resultado é,

$$\frac{dt}{t-1} + \frac{dx}{x} = 0.$$

Integrando, temos

$$\ln|t-1| + \ln|x| = \ln|c|$$

$$\ln\left|\sqrt{\frac{y}{x}} - 1\right| + \ln|x| = \ln|c| \qquad \Leftarrow \boxed{t = u^{1/2} \text{ e } u = y/x}$$

$$x\left(\sqrt{\frac{y}{x}} - 1\right) = c$$

$$\sqrt{xy} - x = c. \qquad \blacksquare$$

Você poderia perguntar agora: quando a substituição $x = vy$ deve ser usada? Embora ela possa ser usada em qualquer equação diferencial homogênea, na prática tentamos $x = vy$ quando a função $M(x, y)$ é mais simples que $N(x, y)$. Para resolver $(x^2+y^2)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$, por exemplo, sabemos que não há diferença significativa entre M e N; logo, $y = ux$ ou $x = vy$ pode ser usada. Também pode acontecer que, depois de fazer uma substituição, encontremos integrais que são difíceis ou impossíveis de serem calculadas; uma outra substituição pode resultar em problemas mais fáceis.

EXEMPLO 6

Resolva
$$2x^3y\,dx + (x^4 + y^4)\,dy = 0.$$

Solução Cada coeficiente é uma função homogênea de grau quatro. Como o coeficiente de dx é um pouco mais simples que o coeficiente de dy, tentamos $x = vy$. Depois de substituir, simplificamos a equação

$$2v^3y^4[v\,dy + y\,dv] + (v^4y^4 + y^4)\,dy = 0$$

para
$$\frac{2v^3\,dv}{3v^4 + 1} + \frac{dy}{y} = 0.$$

A integração acarreta

$$\frac{1}{6}\ln(3v^4 + 1) + \ln|y| = \ln|c_1| \quad \text{ou} \quad 3x^4y^2 + y^6 = c,$$

em que $c = c_1^6$. Se a substituição $y = ux$ tivesse sido usada, então

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^4 + 1}{u^5 + 3u}\,du = 0.$$

Você deve pensar agora em como calcular a integral do segundo termo da última equação. ■

Uma equação diferencial homogênea pode sempre ser expressa na forma alternativa

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Para ver isso, suponha que escrevamos a equação $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ como $dy/dx = f(x, y)$, em que

$$f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}.$$

A função $f(x, y)$ deve ser necessariamente homogênea de grau zero quando M e N são homogêneas de grau n. De (2), segue-se que

$$f(x, y) = -\frac{x^nM\left(1, \frac{y}{x}\right)}{x^nN\left(1, \frac{y}{x}\right)} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)}.$$

A última razão é uma função da forma $F(y/x)$. Deixamos como exercício a demonstração de que uma equação diferencial homogênea pode também ser escrita como $dy/dx = G(x/y)$. Veja o Problema 47.

EXEMPLO 7

Resolva o problema de valor inicial

$$x\frac{dy}{dx} = y + xe^{y/x}, \quad y(1) = 1.$$

Solução Escrevendo a equação na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + xe^{y/x},$$

vemos que a função da direita da igualdade é homogênea de grau zero. Pela forma dessa função, somos induzidos a usar $u = y/x$. Depois de derivar $y = ux$ pela regra do produto e substituir, obtemos

$$u + x\frac{du}{dx} = u + e^{u} \quad \text{ou} \quad e^{-u}du = \frac{dx}{x}.$$

Integrando e substituindo $u = y/x$, temos

$$-e^{-u} + c = \ln|x|$$

$$-e^{-y/x} + c = \ln|x|.$$

Como $y = 1$ quando $x = 1$, temos $-e^{-1} + c = 0$ ou $c = e^{-1}$. Logo, a solução para o problema de valor inicial é

$$e^{-1} - e^{-y/x} = \ln|x|. \qquad \blacksquare$$

2.3 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 442.

Nos Problemas 1-10, determine se a função dada é homogênea. Especifique o grau de homogeneidade quando for o caso.

1. $x^3 + 2xy^2 - y^4/x$
2. $\sqrt{x + y}(4x + 3y)$
3. $\dfrac{x^3y - x^2y^2}{(x + 8y)^2}$
4. $\dfrac{x}{y^2 + \sqrt{x^4 + y^4}}$

5. $\cos \dfrac{x^2}{x+y}$

6. $\operatorname{sen} \dfrac{x}{x+y}$

7. $\ln x^2 - 2\ln y$

8. $\dfrac{\ln x^3}{\ln y^3}$

9. $(x^{-1} + y^{-1})^2$

10. $(x + y + 1)^2$

Nos Problemas 11-30, resolva a equação diferencial dada usando uma substituição apropriada.

11. $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$

12. $(x + y)\,dx + x\,dy = 0$

13. $x\,dx + (y - 2x)\,dy = 0$

14. $y\,dx = 2(x + y)\,dy$

15. $(y^2 + yx)\,dx - x^2dy = 0$

16. $(y^2 + yx)\,dx + x^2dy = 0$

17. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x}{y + x}$

18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y}{3x + y}$

19. $-y\,dx + (x + \sqrt{xy})\,dy = 0$

20. $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

21. $2x^2y\,dx = (3x^3 + y^3)\,dy$

22. $(x^4 + y^4)\,dx - 2x^3y\,dy = 0$

23. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$

24. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x^2}{y^2} + 1$

25. $y\dfrac{dx}{dy} = x + 4ye^{-2x/y}$

26. $(x^2e^{-y/x} + y^2)\,dx = xy\,dy$

27. $\left(y + \operatorname{cotg}\dfrac{y}{x}\right)dx - x\,dy = 0$

28. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$

29. $(x^2 + xy - y^2)\,dx - xy\,dy = 0$

30. $(x^2 + xy - 3y^2)\,dx - (x^2 + 2xy)\,dy = 0$

Nos Problemas 31-44, resolva a equação diferencial dada sujeita à condição inicial indicada.

31. $xy^2\dfrac{dy}{dx} = y^3 - x^3,\ y(1) = 2$

32. $(x^2 + 2y^2)\,dx = xy\,dy,\ y(-1) = 1$

33. $2x^2\dfrac{dy}{dx} = 3xy + y^2,\ y(1) = -2$

34. $xy\,dx - x^2dy = y\sqrt{x^2 + y^2}\,dy,\ y(0) = 1$

35. $(x + ye^{y/x})\,dx - xe^{y/x}\,dy = 0,\ y(1) = 0$

36. $y\,dx + \left(y\cos\dfrac{x}{y} - x\right)dy = 0,\ y(0) = 2$

37. $(y^2 + 3xy)\,dx = (4x^2 + xy)\,dy,\ y(1) = 1$

38. $y^3dx = 2x^3dy - 2x^2y\,dx,\ y(1) = \sqrt{2}$

39. $(x + \sqrt{xy})\dfrac{dy}{dx} + x - y = x^{-1/2}y^{3/2},\ y(1) = 1$

40. $y\,dx + x(\ln x - \ln y - 1)\,dy = 0,\ y(1) = e$

41. $y^2dx + (x^2 + xy + y^2)\,dy = 0,\ y(0) = 1$

42. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2dx = x\,dy,\ y(1) = 0$

43. $(x + \sqrt{y^2 - xy})\dfrac{dy}{dx} = y,\ y(\tfrac{1}{2}) = 1$

44. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = \cosh\dfrac{y}{x},\ y(1) = 0$

45. Suponha que $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ seja uma equação homogênea. Mostre que a substituição $x = vy$ transforma a equação em uma com variáveis separáveis.

46. Suponha que $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ seja uma equação homogênea. Mostre que a substituição $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ leva a uma equação separável.

47. Suponha que $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ seja uma equação homogênea. Mostre que a equação pode ser escrita na forma alternativa $dy/dx = G(x, y)$.

48. Seja $f(x, y)$ uma função homogênea de grau n. Mostre que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf.$$

2.4 EQUAÇÕES EXATAS

Embora a equação

$$y\,dx + x\,dy = 0$$

seja separável e homogênea, podemos ver que ela é também equivalente à diferencial do produto de x e y; isto é

$$y\,dx + x\,dy = d(xy) = 0.$$

Por integração, obtemos imediatamente a solução implícita $xy = c$.

Você deve se lembrar do cálculo que, se $z = f(x, y)$ é uma função com derivadas parciais contínuas em uma região R do plano xy, então sua *diferencial total* é

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{1}$$

Agora, se $f(x, y) = c$, segue-se de (1) que

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0. \tag{2}$$

Em outras palavras, dada uma família de curvas $f(x, y) = c$, podemos gerar uma equação diferencial de primeira ordem, calculando a diferencial total.

EXEMPLO 1

Se $x^2 - 5xy + y^3 = c$, então por (2)

$$(2x - 5y)\,dx + (-5x + 3y^2)\,dy = 0 \text{ ou } \frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{-5x + 3y^2}.$$ ■

Para nossos propósitos, é mais importante inverter o problema, isto é, dada uma equação como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{-5x + 3y^2}, \tag{3}$$

podemos identificar a equação como sendo equivalente a

$$d(x^2 - 5xy + y^3) = 0?$$

Note que a equação (3) não é separável nem homogênea.

DEFINIÇÃO 2.4 Equação Exata

Uma expressão diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

é uma **diferencial exata** em uma região R do plano xy se ela corresponde à diferencial total de alguma função $f(x, y)$. Uma equação diferencial da forma

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

é chamada de uma **equação exata** se a expressão do lado esquerdo é uma diferencial exata.

EXEMPLO 2

A equação $x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$ é exata, pois

$$d(\tfrac{1}{3}x^3y^3) = x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy.$$ ■

O teorema seguinte é um teste para uma diferencial exata.

TEOREMA 2.2 Critério para uma Diferencial Exata

Sejam $M(x, y)$ e $N(x, y)$ funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região retangular R definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Então, uma condição necessária e suficiente para que

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

seja uma diferencial exata é

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{4}$$

Prova de que a Condição é Necessária Para simplificar, suponha que $M(x, y)$ e $N(x, y)$ tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em todo plano (x, y). Agora, se a expressão $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ é exata, existe alguma função f tal que

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

para todo (x, y) em R. Logo,

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y},$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

A igualdade das derivadas parciais mistas é uma conseqüência da continuidade das derivadas parciais de primeira ordem de $M(x, y)$ e $N(x, y)$. □

A prova de que a condição do Teorema 2.2 é suficiente consiste em mostrar que existe uma função f tal que $\partial f/\partial x = M(x, y)$ e $\partial f/\partial x = N(x, y)$. A construção de tal função na verdade reflete um procedimento básico na resolução para equações exatas.

Método de Solução

Dada a equação

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{5}$$

mostre primeiro que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Depois suponha que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$$

daí podemos encontrar f integrando $M(x, y)$ com relação a x, considerando y constante. Escrevemos,

$$f(x, y) = \int M(x, y)\,dx + g(y), \tag{6}$$

em que a função arbitrária $g(y)$ é a constante de integração. Agora, derivando (6) com relação a y e supondo $\partial f/\partial y = N(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\,dx + g'(y) = N(x, y).$$

Assim,
$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\,dx. \tag{7}$$

Finalmente, integre (7) com relação a y e substitua o resultado em (6). A solução para a equação é $f(x, y) = c$.

Nota Algumas observações são necessárias. Primeira, é importante perceber que a expressão $N(x, y) - (\partial/\partial y)\int M(x, y)\,dx$ em (7) independe de x, pois

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\,dx\right] &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x, y)\,dx\right)\\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.\end{aligned}$$

Segunda, poderíamos também começar o procedimento acima com a suposição de que $\partial f/\partial y = N(x, y)$. Depois, integrando N com relação a y e derivando o resultado, encontramos o análogo de (6) e (7), que seria, respectivamente,

$$f(x, y) = \int N(x, y)\,dy + h(x) \quad \text{e} \quad h'(x) = M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x, y)dy.$$

Em qualquer caso, *nenhuma dessas fórmulas deve ser memorizada.* Ainda, para verificar se uma equação é exata ou não, assegure-se de que ela seja da forma (5). Freqüentemente, uma equação diferencial é escrita na forma $G(x, y)\,dx = H(x, y)\,dy$. Neste caso, escreva a equação na forma $G(x, y)\,dx - H(x, y)\,dy = 0$ e aí identifique $M(x, y) = G(x, y)$ e $N(x, y) = -H(x, y)$.

EXEMPLO 3

Resolva
$$2xy\,dx + (x^2 - 1)\,dy = 0.$$

Solução Com $M(x, y) = 2xy$ e $N(x, y) = x^2 - 1$, temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Logo, a equação é exata e, pelo Teorema 2.2, existe uma função $f(x, y)$, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1.$$

Da primeira dessas equações, obtemos, depois de integrar,

$$f(x, y) = x^2y + g(y).$$

Derivando a última expressão com relação a y e igualando o resultado a $N(x, y)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 1.$$

Segue-se que $$g'(y) = -1 \quad \text{e} \quad g(y) = -y.$$ $\Leftarrow \boxed{N(x, y)}$

A constante de integração não precisa ser incluída, pois a solução é $f(x, y) = c$. Algumas curvas da família $x^2y - y = c$ são mostradas na Figura 2.8.

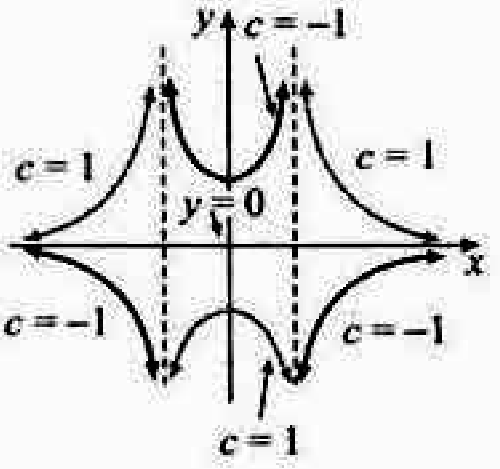

Figura 2.8

Nota A solução para a equação *não* é $f(x, y) = x^2y - y$. Antes, a solução é $f(x, y) = c$ ou $f(x, y) = 0$, se uma constante é usada na integração de $g'(y)$. Observe que a equação poderia também ser resolvida por separação de variáveis. ■

EXEMPLO 4

Resolva $$(e^{2y} - y\cos xy)\,dx + (2xe^{2y} - x\cos xy + 2y)\,dy = 0.$$

Solução A equação não é nem separável nem homogênea, mas exata, pois

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} + xy\,\text{sen}\,xy - \cos xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Logo, existe uma função $f(x, y)$ tal que

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Agora, para variar, começaremos supondo $\partial f/\partial y = N(x, y)$;

isto é, $$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} - x\cos xy + 2y$$

$$f(x, y) = 2x\int e^{2y}dy - x\int \cos xy\,dy + 2\int y\,dy.$$

Lembre-se: a razão de podermos tirar o x de frente do símbolo de integral é que, na integração em relação a y, x é considerado como uma constante. Segue-se que

$$f(x, y) = xe^{2y} - \operatorname{sen} xy + y^2 + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2y} - y\cos xy + h'(x) = e^{2y} - y\cos xy, \qquad \Leftarrow \boxed{M(x, y)}$$

assim
$$h'(x) = 0 \ \text{ e } \ h(x) = c.$$

Logo, uma família a um parâmetro de soluções é dada por

$$xe^{2y} - \operatorname{sen} xy + y^2 + c = 0.$$ ■

EXEMPLO 5

Resolva o problema de valor inicial

$$(\cos x \ \operatorname{sen} x - xy^2)\,dx + y(1 - x^2)\,dy = 0, \ \ y(0) = 2.$$

Solução A equação é exata, pois

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Agora,
$$\frac{\partial f}{\partial y} = y(1 - x^2)$$

$$f(x, y) = \frac{y^2}{2}(1 - x^2) + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -xy^2 + h'(x) = \cos x \operatorname{sen} x - xy^2.$$

A última equação implica

$$h'(x) = \cos x \ \operatorname{sen} x$$

$$h(x) = -\int (\cos x)(-\operatorname{sen} x\,dx) = -\frac{1}{2}\cos^2 x.$$

Logo,
$$\frac{y^2}{2}(1 - x^2) - \frac{1}{2}\cos^2 x = c_1$$

ou
$$y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = c,$$

em que $2c_1$ foi trocado por c. A condição inicial $y = 2$ quando $x = 0$ demanda que $4(1) - \cos^2(0) = c$, ou seja, $c = 3$. Portanto, a solução para o problema é

$$y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = 3. \qquad \blacksquare$$

Fator de Integração

Algumas vezes, é possível converter uma equação diferencial não exata em uma equação exata multiplicando-a por uma função $\mu(x, y)$ chamada **fator de integração**. Porém, a equação exata resultante

$$\mu M(x, y)\,dx + \mu N(x, y)\,dy = 0$$

pode não ser equivalente à original no sentido de que a solução para uma é também a solução para a outra. A multiplicação pode ocasionar perdas ou ganhos de soluções.

EXEMPLO 6

Resolva $\quad (x + y)\,dx + x \ln x\,dy = 0$, usando $\mu(x, y) = \dfrac{1}{x}$ em $(0, \infty)$.

Solução Sejam $M(x, y) = x + y$ e $N(x, y) = x \ln x$. Daí, $\partial M/\partial y = 1$ e $\partial N/\partial x = 1 + \ln x$. A equação não é exata. Porém, se multiplicarmos a equação por $\mu(x, y) = 1/x$, obtemos

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right)dx + \ln x\,dy = 0.$$

Segue-se desta última forma que escrevemos as identificações:

$$M(x, y) = 1 + \frac{y}{x}, \quad N(x, y) = \ln x, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Portanto, a segunda equação diferencial é exata. Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{y}{x} = M(x, y)$$

$$f(x, y) = x + y \ln x + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \ln x + g'(y) = \ln x$$

assim $\quad g'(y) = 0$ e $g(y) = c$.

Então, $f(x, y) = x + y \ln x + c$. Verifica-se facilmente que

$$x + y \ln x + c = 0$$

é uma solução para ambas as equações em $(0, \infty)$. $\blacksquare$

2.4 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados etão na página 442 e 443.

Nos Problemas 1-24, verifique se a equação dada é exata. Se for, resolva.

1. $(2x - 1)\,dx + (3y + 7)\,dy = 0$

2. $(2x - y)\,dx - (x + 6y)\,dy = 0$

3. $(5x + 4y)\,dx + (4x - 8y^3)\,dy = 0$

4. $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)\,dx + (\cos x + x \cos y - y)\,dy = 0$

5. $(2y^2x - 3)\,dx + (2yx^2 + 4)\,dy = 0$

6. $\left(2y - \dfrac{1}{x} + \cos 3x\right)\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \operatorname{sen} 3x = 0$

7. $(x + y)(x - y)\,dx + x(x - 2y)\,dy = 0$

8. $\left(1 + \ln x + \dfrac{y}{x}\right)dx = (1 - \ln x)\,dy$

9. $(y^3 - y^2 \operatorname{sen} x - x)\,dx + (3xy^2 + 2y \cos x)\,dy = 0$

10. $(x^3 + y^3)\,dx + 3xy^2 dy = 0$

11. $(y \ln y - e^{-xy})\,dx + \left(\dfrac{1}{y} + x \ln y\right)dy = 0$

12. $\dfrac{2x}{y}\,dx - \dfrac{x^2}{y^2}\,dy = 0$

13. $x\dfrac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$

14. $(3x^2y + e^y)\,dx + (x^3 + xe^y - 2y)\,dy = 0$

15. $\left(1 - \dfrac{3}{x} + y\right)dx + \left(1 - \dfrac{3}{y} + x\right)dy = 0$

16. $(e^y + 2xy \cosh x)y' + xy^2 \operatorname{senh} x + y^2 \cosh x = 0$

17. $\left(x^2y^3 - \dfrac{1}{1 + 9x^2}\right)\dfrac{dx}{dy} + x^3y^2 = 0$

18. $(5y - 2x)y' - 2y = 0$

19. $(\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dx + \cos x \cos y\,dy = 0$

20. $(3x \cos 3x + \operatorname{sen} 3x - 3)\,dx + (2y + 5)\,dy = 0$

21. $(1 - 2x^2 - 2y)\dfrac{dy}{dx} = 4x^3 + 4xy$

22. $(2y \operatorname{sen} x \cos x - y + 2y^2e^{xy^2})\,dx = (x - \operatorname{sen}^2 x - 4xye^{xy^2})\,dy$

23. $(4x^3y - 15x^2 - y)\,dx + (x^4 + 3y^2 - x)\,dy = 0$

24. $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(ye^y + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$

Nos Problemas 25-30, resolva a equação diferencial dada sujeita à condição inicial indicada.

25. $(x + y)^2\,dx + (2xy + x^2 - 1)\,dy = 0,\ y(1) = 1$

26. $(e^x + y)\,dx + (2 + x + ye^y)\,dy = 0,\ y(0) = 1$

27. $(4y + 2x - 5)\,dx + (6y + 4x - 1)\,dy = 0,\ y(-1) = 2$

28. $\left(\dfrac{3y^2 - x^2}{y^5}\right)\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{2y^4} = 0,\ y(1) = 1$

29. $(y^2\cos x - 3x^2y - 2x)\,dx + (2y\,\mathrm{sen}\,x - x^3 + \ln y)\,dy = 0,\ y(0) = e$

30. $\left(\dfrac{1}{1+y^2} + \cos x - 2xy\right)\dfrac{dy}{dx} = y(y + \mathrm{sen}\,x),\ y(0) = 1$

Nos Problemas 31-34, encontre o valor de k para que a equação diferencial dada seja exata.

31. $(y^3 + kxy^4 - 2x)\,dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)\,dy = 0$

32. $(2x - y\,\mathrm{sen}\,xy + ky^4)\,dx - (20xy^3 + x\,\mathrm{sen}\,xy)\,dy = 0$

33. $(2xy^2 + ye^x)\,dx + (2x^2y + ke^x - 1)\,dy = 0$

34. $(6xy^3 + \cos y)\,dx + (kx^2y^2 - x\,\mathrm{sen}\,y)\,dy = 0$

35. Determine uma função $M(x, y)$ para que a seguinte equação diferencial seja exata:

$$M(x, y)\,dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}\right)dy = 0.$$

36. Determine uma função $N(x, y)$ para que a seguinte equação diferencial seja exata:

$$\left(y^{1/2}x^{-1/2} + \frac{x}{x^2 + y}\right)dx + N(x, y)\,dy = 0.$$

Nos Problemas 37-42, resolva a equação diferencial dada, verificando que a função indicada $\mu(x, y)$ seja um fator de integração.

37. $6xy\,dx + (4y + 9x^2)\,dy = 0,\ \mu(x, y) = y^2$

38. $-y^2\,dx + (x^2 + xy)\,dy = 0,\ \mu(x, y) = 1/x^2y$

39. $(-xy\,\mathrm{sen}\,x + 2y\cos x)\,dx + 2x\cos x\,dy = 0,\ \mu(x, y) = xy$

40. $y(x + y + 1)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0,\ \mu(x, y) = e^x$

41. $(2y^2 + 3x)\,dx + 2xy\,dy = 0,\quad \mu(x, y) = x$

42. $(x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (y^2 + 2xy - x^2)\,dy = 0,\ \mu(x, y) = (x + y)^{-2}$

43. Mostre que qualquer equação diferencial separável de primeira ordem na forma $h(y)\,dy - g(x)\,dx = 0$ é também exata.

2.5 EQUAÇÕES LINEARES

No Capítulo 1, definimos a forma geral para uma equação diferencial linear de ordem n como,

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Lembre-se de que linearidade significa que todos os coeficientes são funções de x somente e que y e todas as suas derivadas são elevadas à primeira potência. Agora, quando $n = 1$, obtemos uma equação linear de primeira ordem.

DEFINIÇÃO 2.5 Equação Linear

Uma equação diferencial da forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

é chamada de **equação linear**.

Dividindo pelo coeficiente $a_1(x)$, obtemos uma forma mais útil de uma equação linear:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \tag{1}$$

Procuramos uma solução para (1) em um intervalo I no qual as funções $P(x)$ e $f(x)$ são contínuas. Na discussão a seguir, supomos tacitamente que (1) possui uma solução.

Fator de Integração

Usando diferenciais, podemos escrever a equação (1) como

$$dy + [P(x)y - f(x)]\,dx = 0 \tag{2}$$

Equações lineares possuem a agradável propriedade através da qual podemos sempre encontrar uma função $\mu(x)$ em que

$$\mu(x)\,dy + \mu(x)[P(x)y - f(x)]\,dx = 0 \tag{3}$$

é uma equação diferencial exata. Pelo Teorema 2.2, o lado esquerdo da equação (3) é uma diferencial exata se

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)[P(x)y - f(x)] \tag{4}$$

ou

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P(x).$$

Esta é uma equação separável em que podemos determinar $\mu(x)$. Temos

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)\,dx$$

$$\ln|\mu| = \int P(x)\,dx \tag{5}$$

assim

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}. \tag{6}$$

A função $\mu(x)$ definida em (6) é um **fator de integração** para a equação linear. Note que não precisamos usar uma constante de integração em (5), pois (3) não se altera se a multiplicarmos por uma constante. Ainda, $\mu(x) \neq 0$ para todo x em I, e é contínua e diferenciável.

É interessante observar que a equação (3) é ainda uma equação diferencial exata mesmo quando $f(x) = 0$. Na verdade, $f(x)$ não desempenha papel algum na determinação de $\mu(x)$, pois vemos de (4) que $(\partial / \partial y)\mu(x)f(x) = 0$. Logo, ambas

$$e^{\int P(x)\,dx}dy + e^{\int P(x)\,dx}[P(x)y - f(x)]\,dx$$

e

$$e^{\int P(x)\,dx}dy + e^{\int P(x)\,dx}P(x)y\,dx$$

são diferenciais exatas. Agora, escrevemos (3) na forma

$$e^{\int P(x)\,dx}dy + e^{\int P(x)\,dx}P(x)y\,dx = e^{\int P(x)\,dx}f(x)\,dx$$

e verificamos que podemos escrevê-la como

$$d[e^{\int P(x)\,dx}y] = e^{\int P(x)\,dx}f(x)\,dx.$$

Integrando a última equação, temos

$$e^{\int P(x)\,dx}y = \int e^{\int P(x)\,dx}f(x)\,dx + c$$

ou

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\int e^{\int P(x)\,dx}f(x)\,dx + ce^{-\int P(x)\,dx}. \tag{7}$$

Em outras palavras, se (1) tiver uma solução, ela deverá ser da forma (7). Reciprocamente, é imediato que (7) constitui uma família a um parâmetro de soluções para a equação (1).

Resumo do Método

Nenhum esforço deve ser feito para memorizar a fórmula dada em (7). O procedimento deve ser repetido sempre, logo, por conveniência, resumimos os resultados.

Resolvendo uma Equação Linear de Primeira Ordem

(i) Para resolver uma equação linear de primeira ordem, primeiro coloque-a na forma (1); isto é, faça o coeficiente de *dy/dxümçìdyçì ç"*

(ii) Identifique $P(x)$ e encontre o fator de integração

$$e^{\int P(x)\,dx}.$$

(iii) Multiplique a equação obtida em (i) pelo fator de integração:

$$e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)\,dx}y = e^{\int P(x)\,dx}f(x).$$

(iv) O lado esquerdo da equação em (iii) é a derivada do produto do fator de integração e a variável dependente y; isto é,

$$\frac{d}{dx}[e^{\int P(x)\,dx}y] = e^{\int P(x)\,dx}f(x)\text{7Ç)çR).é}$$

(v) Integre ambos os lados da equação encontrada em (iv).

EXEMPLO 1

Resolva
$$x\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^6e^x.$$

Solução Escreva a equação como

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5e^x \tag{8}$$

dividindo por x. Como $P(x) = -4/x$, o fator de integração é

$$e^{-4\int dx/x} = e^{-4\ln|x|} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}.$$

Aqui, usamos a identidade básica $b^{\log_b N} = N$, $N > 0$. Agora, multiplicamos (8) por este termo

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - 4x^{-5}y = xe^x \tag{9}$$

e obtemos
$$\frac{d}{dx}[x^{-4}y] = xe^x.* \tag{10}$$

Segue-se da integração por partes que

$$x^{-4}y = xe^x - e^x + c$$

ou
$$y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4.$$
■

EXEMPLO 2

Resolva
$$\frac{dy}{dx} - 3y = 0.$$

Solução A equação já está na forma (1). Logo, o fator de integração é

$$e^{\int(-3)\,dx} = e^{-3x}.$$

* Você deve calcular muitas vezes as derivadas indicadas para ficar convencido de que todas as equações, tais como (8), (9) e (10), são formalmente equivalentes.

Portanto,

$$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 0$$

$$\frac{d}{dx}[e^{-3x}y] = 0$$

$$e^{-3x}\, y = c$$

assim,

$$y = ce^{3x}. \qquad \blacksquare$$

Solução Geral

Por hipótese, $P(x)$ e $f(x)$ são contínuas em um intervalo I e x_0 é um ponto desse intervalo. Então, segue-se do Teorema 2.1 que existe uma única solução para o problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0. \tag{11}$$

Mas vimos antes que (1) possui uma família de soluções e que toda solução para a equação no intervalo I tem a forma (7). Logo, obter a solução para (11) é uma simples questão de encontrar um valor apropriado de c em (7). Conseqüentemente, estamos certos em chamar (7) de **solução geral** da equação diferencial. Você deve se lembrar de que em várias ocasiões encontramos soluções singulares para equações não-lineares. Isso não pode acontecer no caso de uma equação linear em que $P(x)$ e $f(x)$ são contínuas.

EXEMPLO 3

Encontre a solução geral para

$$(x^2 + 9)\frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

Solução Escrevemos

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{x^2+9}y = 9.$$

A função $P(x) = x/(x^2 + 9)$ é contínua em $(-\infty, \infty)$. O fator de integração para a equação é

$$e^{\int x\,dx/(x^2+9)} = e^{1/2\int 2x\,dx/(x^2+9)} = e^{1/2\ln(x^2+9)} = \sqrt{x^2+9}$$

assim

$$\sqrt{x^2+9}\,\frac{dy}{dx} + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}y = 0$$

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{x^2+9}\,y] = 0$$

$$\sqrt{x^2+9}\,y = c.$$

Portanto, a solução geral no intervalo é

$$y = \frac{c}{\sqrt{x^2+9}}.$$

■

EXEMPLO 4

Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x, \quad y(0) = -3.$$

Solução As funções $P(x) = 2x$ e $f(x) = x$ são contínuas em $(-\infty,\infty)$. O fator de integração é

$$e^{2\int x\,dx} = e^{x^2}$$

assim

$$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xe^{x^2}y = xe^{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}[e^{x^2}y] = xe^{x^2}$$

$$e^{x^2}y = \int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$$

Portanto, a solução geral para a equação diferencial é

$$y = \frac{1}{2} + ce^{-x^2}.$$

A condição $y(0) = -3$ corresponde a $c = -7/2$, logo a solução para o problema de valor inicial no intervalo é

$$y = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}e^{-x^2}.$$

Veja a Figura 2.9, na próxima página. ■

EXEMPLO 5

Resolva o problema de valor inicial

$$x\frac{dy}{dx} + y = 2x, \quad y(1) = 0.$$

Solução Escreva a equação na forma

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 2$$

e observe que $P(x) = 1/x$ é contínua em qualquer intervalo que não contenha a origem. Tendo em vista a condição inicial, resolvemos o problema no intervalo $(0, \infty)$.

O fator de integração é

$$e^{\int dx/x} = e^{\ln|x|} = x$$

e daí

$$\frac{d}{dx}[xy] = 2x$$

implica

$$xy = x^2 + c.$$

A solução geral para a equação é

$$y = x + \frac{c}{x}. \tag{12}$$

Mas, $y(1) = 0$ implica $c = -1$. Logo, obtemos

$$y = x - \frac{1}{x}, \quad 0 < x < \infty. \tag{13}$$

Considerada como uma família a um parâmetro de curvas, o gráfico de (12) está representado na Figura 2.10. A solução (13) para o problema de valor inicial é indicada pela porção acinzentada do gráfico. ■

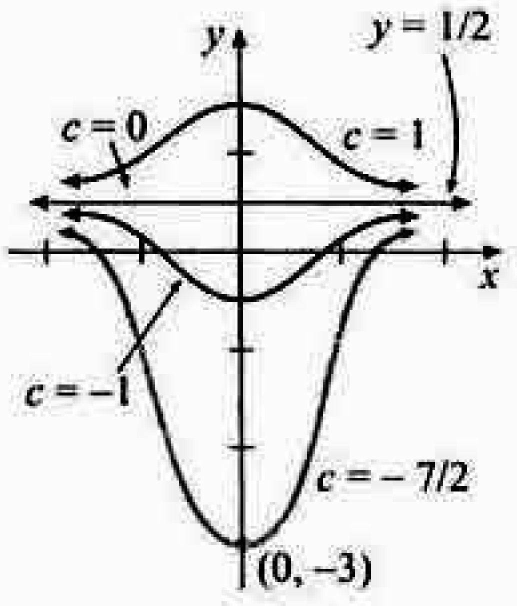

Figura 2.9

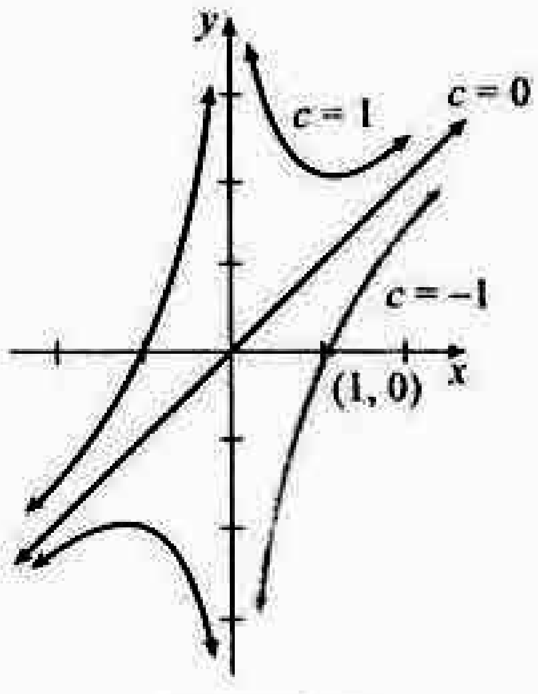

Figura 2.10

EXEMPLO 6

Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y^2}, \quad y(-2) = 0.$$

Solução Esta equação diferencial não é separável, homogênea, exata ou linear na variável y. Porém, se invertermos as variáveis, teremos

$$\frac{dx}{dy} = x + y^2 \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dy} - x = y^2.$$

Esta última equação é linear em x, assim o fator de integração correspondente é $e^{-\int dy} = e^{-y}$. Logo,

$$\frac{d}{dy}[e^{-y}x] = y^2e^{-y}$$

$$e^{-y}x = \int y^2e^{-y}\,dy.$$

Integrando duas vezes por partes, obtemos

$$e^{-y}x = -y^2e^{-y} - 2ye^{-y} - 2e^{-y} + c$$

$$x = -y^2 - 2y - 2 + ce^{y}.$$

Quando $x = -2$, $y = 0$, encontramos $c = 0$ e daí

$$x = -y^2 - 2y - 2.$$

■

O próximo exemplo ilustra uma maneira de resolver (1) quando a função f é descontínua.

EXEMPLO 7

Encontre uma solução contínua satisfazendo

$$\frac{dy}{dx} + y = f(x), \text{ em que } f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

e a condição inicial $y(0) = 0$.

Solução Pela Figura 2.11, vemos que f é descontínua em $x = 1$. Conseqüentemente, resolvemos o problema em duas partes. Para $0 \le x \le 1$, temos

$$\frac{dy}{dx} + y = 1$$

$$\frac{d}{dx}[e^{x}y] = e^{x}$$

$$y = 1 + c_1e^{-x}.$$

Como $y(0) = 0$, devemos ter $c_1 = -1$, portanto

$$y = 1 - e^{-x}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Para $x > 1$, temos $$\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

o que implica $$y = c_2e^{-x}.$$

Logo, podemos escrever $$y = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ c_2e^{-x}, & x > 1 \end{cases}.$$

Agora, para y ser uma função contínua, certamente devemos ter $\lim_{x \to 1^+} y(x) = y(1)$. Para isso, $c_2e^{-1} = 1 - e^{-1}$, ou seja, $c_2 = e - 1$. Como mostra a Figura 2.12, a função

$$y = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ (e - 1)e^{-x}, & x > 1 \end{cases}$$

é contínua, mas não diferenciável em $x = 1$. ■

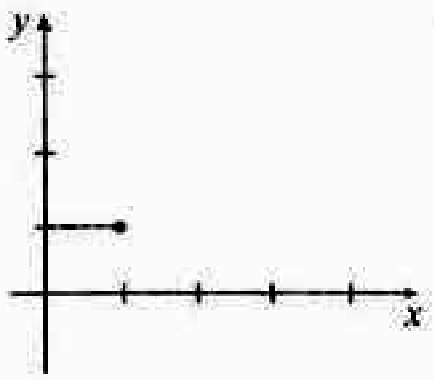

Figura 2.11

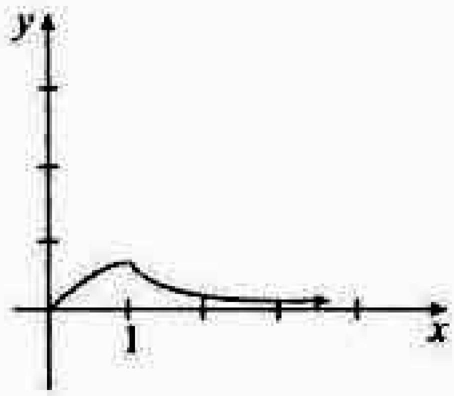

Figura 2.12

Nota A fórmula (7), representando a solução geral para (1), consiste na soma de duas soluções. Definimos

$$y = y_c + y_p, \tag{14}$$

em que

$$y_c = ce^{-\int P(x)\,dx} \text{ e } y_p = e^{-\int P(x)\,dx} \int e^{\int P(x)\,dx} f(x)\,dx.$$

A função y_c é a solução geral para $y' + P(x)y = 0$, e y_p é uma solução particular para $y' + P(x)y = f(x)$. Como veremos no Capítulo 4, a propriedade aditiva de soluções (14) para formar uma solução é uma propriedade intrínseca de equações lineares de qualquer ordem.

2.5 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados começam na página 443.

Nos Problemas 1-40, encontre a solução geral para a equação diferencial dada. Especifique um intervalo no qual a solução geral é definida.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 5y$

2. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

3. $3\dfrac{dy}{dx} + 12y = 4$

4. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$

5. $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

6. $\dfrac{dy}{dx} = y + e^{x}$

7. $y' = 3x^2y = x^2$

8. $y' + 2xy = x^3$

9. $x^2y' + xy = 1$

10. $y' = 2y + x^2 + 5$

11. $(x + 4y^2)\,dy + 2y\,dx = 0$

12. $\dfrac{dx}{dy} = x + y$

13. $x\,dy = (x \operatorname{sen} x - y)\,dx$

14. $(1 + x^2)\,dy + (xy + x^3 + x)\,dx = 0$

15. $(1 + e^x)\dfrac{dy}{dx} + e^xy = 0$

16. $(1 - x^3)\dfrac{dy}{dx} = 3x^2y$

17. $\cos x\dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{sen} x = 1$

18. $\dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{cotg} x = 2\cos x$

19. $x\dfrac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$

20. $(1 + x)y' - xy = x + x^2$

21. $x^2y' + x(x + 2)y = e^x$

22. $xy' + (1 + x)y = e^{-x} \operatorname{sen} 2x$

23. $\cos^2 x \operatorname{sen} x\,dy + (y\cos^3 x - 1)\,dx = 0$

24. $(1 - \cos x)\,dy + (2y \operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x)\,dx = 0$

25. $y\,dx + (xy + 2x - ye^y)\,dy = 0$

26. $(x^2 + x)\,dy = (x^5 + 3xy + 3y)\,dx$

27. $x\dfrac{dy}{dx} + (3x + 1)y = e^{-3x}$

28. $(x + 1) = \dfrac{dy}{dx} + (x + 2)y = 2xe^{-x}$

29. $y\,dx - 4(x + y^6)\,dy = 0$

30. $xy' + 2y = e^x + \ln x$

31. $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}}$

32. $\dfrac{dy}{dx} - y = \operatorname{senh} x$

33. $y\,dx + (x + 2xy^2 - 2y)\,dy = 0$

34. $y\,dx = (ye^y - 2x)\,dy$

35. $\dfrac{dr}{d\theta}\ r \sec\theta = \cos\theta$

36. $\dfrac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$

37. $(x + 2)^2 \dfrac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$

38. $(x^2 - 1)\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x + 1)^2$

39. $y' = (10 - y)\cosh x$

40. $dx = (3e^y - 2x)\,dy$

Nos Problemas 41-54, resolva a equação diferencial dada sujeita à condição inicial indicada.

41. $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 20,\ y(0) = 2$

42. $y' = 2y + x(e^{3x} - e^{2x}),\ y(0) = 2$

43. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = e\ E$; L, R e E constantes, $i(0) = i_0$

44. $y\dfrac{dx}{dy} - x = 2y^2,\ y(1) = 5$

45. $y' + (\text{tg}\,x)y = \cos^2 x,\ y(0) = -1$

46. $\dfrac{dQ}{dx} = 5x^4 Q,\ Q(0) = -7$

47. $\dfrac{dT}{dt} = k(T - 50)$; k uma constante, $T(0) = 200$

48. $x\,dy + (xy + 2y - 2e^{-x})\,dx = 0,\ y(1) = 0$

49. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} + y = \ln x,\ y(1) = 10$

50. $xy' + y = e^x,\ y(1) = 2$

51. $x(x - 2)y' + 2y = 0,\ y(3) = 6$

52. $\text{sen}\,x\dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = 0,\ y\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

53. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y - x},\ y(5) = 2$

54. $\cos^2 x\dfrac{dy}{dx} + y = 1,\ y(0) = -3$

Nos Problemas 55-58, encontre uma solução contínua satisfazendo cada equação diferencial e a condição inicial dada.

55. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = f(x),\ f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases},\ y(0) = 0$

56. $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x),\ f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases},\ y(0) = 1$

57. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = f(x),\ f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases},\ y(0) = 2$

58. $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = f(x),\ f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ -x, & x \ge 1 \end{cases},\ y(0) = 0$

[0] 2.6 EQUAÇÕES DE BERNOULLI, RICATTI E CLAIRAUT*

Nesta seção, não estudaremos nenhum tipo particular para equação diferencial. Consideraremos três equações clássicas que podem ser transformadas em equações já estudadas nas seções anteriores.

Equação de Bernoulli

A equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n, \tag{1}$$

em que n é um número real qualquer, é chamada de **equação de Bernoulli**. Para $n = 0$ e $n = 1$, a equação (1) é linear em y. Agora, se $y \neq 0$, (1) pode ser escrita como

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = f(x). \tag{2}$$

Se fizermos $w = y^{1-n}$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, então

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Com essa substituição, (2) transforma-se na equação linear

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)P(x)w = (1-n)f(x). \tag{3}$$

Resolvendo (3) e depois fazendo $y^{1-n} = w$, obtemos uma solução para (1).

---

* **Jacques Bernoulli** (1654-1705) Os Bernoullis foram uma família suíça de acadêmicos cujas contribuições à matemática, física, astronomia e história datam do século XVI ao século XX. Jacques, o primeiro dos dois filhos do patriarca homônimo Jacques Bernoulli, deu várias contribuições ao cálculo e à probabilidade. Originalmente, a segunda das duas divisões principais do cálculo era chamada de *calculus summatorius*. Em 1696, por sugestão de Jacques Bernoulli (filho), este nome foi mudado para *calculus integralis*, como é conhecido atualmente.

Jacob Francesco Ricatti (1676-1754) Um conde italiano, Ricatti foi também matemático e filósofo.

Alex Claude Clairaut (1713-1765) Nascido em Paris em 1713, Clairaut foi uma criança prodígio que escreveu seu primeiro livro sobre matemática aos 11 anos. Foi um dos primeiros a descobrir soluções singulares para equações diferenciais. Como muitos matemáticos de sua época, Clairaut foi também físico e astrônomo.

EXEMPLO 1

Resolva
$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2.$$

Solução Em (1), identificamos $P(x) = 1/x$, $f(x) = x$ e $n = 2$. Logo, a mudança de variável $w = y^{-1}$ nos dá

$$\frac{dw}{dx} - \frac{1}{x}w = -x.$$

O fator de integração para essa equação linear em, digamos, $(0, \infty)$ é

$$e^{-\int dx/x} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = x^{-1}.$$

assim
$$\frac{d}{dx}[x^{-1}w] = -1.$$

Integrando essa última forma, obtemos

$$x^{-1}w = -x + c \quad \text{ou} \quad w = -x^2 + cx.$$

Como $w = y^{-1}$, então $y = 1/w$ ou

$$y = \frac{1}{-x^2 + cx}.$$ ■

Para $n > 0$, note que a solução trivial $y = 0$ é uma solução para (1). No Exemplo 1, $y = 0$ é uma solução singular para a equação dada.

Equação de Ricatti

A equação diferencial não-linear

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{4}$$

é chamada de **equação de Ricatti**. Se y_1 é uma solução particular para (4), então as substituições

$$y = y_1 + u \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx}$$

em (4) produzem a seguinte equação diferencial para u:

$$\frac{du}{dx} - (Q + 2y_1R)u = Ru^2. \tag{5}$$

Como (5) é uma equação de Bernoulli com $n = 2$, ela pode, por sua vez, ser reduzida à equação linear

$$\frac{dw}{dx} + (Q + 2y_1R)w = -R \qquad (6)$$

através da substituição $w = u^{-1}$. Veja os Problemas 25 e 26.

Como o Exemplo 2 mostra, em muitos casos, uma solução para uma equação de Ricatti não pode ser expressa em termos de funções elementares.

EXEMPLO 2

Resolva
$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2xy + y^2.$$

Solução Verifica-se facilmente que $y_1 = 2x$ é uma solução particular para uma equação . Em (4), fazemos as identificações $P(x) = 2$, $Q(x) = -2x$ e $R(x) = 1$. Resolvemos então a equação linear (6):

$$\frac{dw}{dx} + (-2x + 4x)w = -1 \quad \text{ou} \quad \frac{dw}{dx} + 2xw = -1.$$

O fator de integração para essa última equação é e^{x^2}, assim

$$\frac{d}{dx}[e^{x^2}w] = -e^{x^2}.$$

Agora, a integral $\int_{x_0}^{x} e^{t^2}\,dt$ não pode ser expressa em termos de funções elementares.* Portanto, escrevemos

$$e^{x^2}w = -\int_{x_0}^{x} e^{t^2}\,dt + c \quad \text{ou} \quad e^{x^2}\left(\frac{1}{u}\right) = -\int_{x_0}^{x} e^{t^2}\,dt + c,$$

assim
$$u = \frac{e^{x^2}}{c - \int_{x_0}^{x} e^{t^2}\,dt}.$$

Uma solução para a equação é então $y = 2x + u$. ■

Equação de Clairaut

Como exercício você deverá mostrar que uma solução para a equação de Clairaut

$$y = xy' + f(y') \qquad (7)$$

* Quando uma integral $\int f(x)\,dx$ não pode ser resolvida em termos de funções elementares, ela é normalmente escrita como $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, em que x_0 é uma constante. Quando uma condição inicial é especificada, é imperativo que essa forma seja usada.

é a família de retas $y = cx + f(c)$, em que c é uma constante arbitrária. Veja o Problema 29. Ainda, (7) pode também possuir uma solução em forma paramétrica:

$$x = -f'(t),\ y = f(t) - tf'(t). \tag{8}$$

Essa última solução é singular, pois, se $f''(t) \neq 0$, ela não pode ser obtida da família de soluções $y = cx + f(c)$.

EXEMPLO 3

Resolva $$y = xy' + \frac{1}{2}(y')^2.$$

Solução Primeiro, fazemos a identificação $f(y') = (1/2)(y')^2$, o que implica $f(t) = (1/2)t^2$. Segue-se da discussão precedente que uma família de soluções é

$$y = cx + \frac{1}{2}c^2.$$

O gráfico dessa família é mostrado na Figura 2.13. Como $f'(t) = t$, uma solução singular é obtida de (8):

$$x = -t,\quad y = \frac{1}{2}t^2 - t \times t = -\frac{1}{2}t^2.$$

Depois de eliminar o parâmetro, vemos que esta última solução é a mesma que

$$y = -\frac{1}{2}x^2.$$

Percebemos facilmente que esta função não faz parte da família (9). Veja a Figura 2.14.

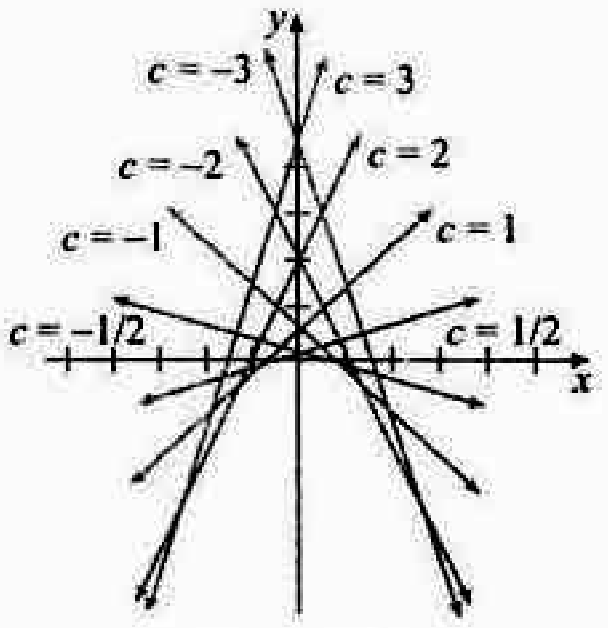

Figura 2.13

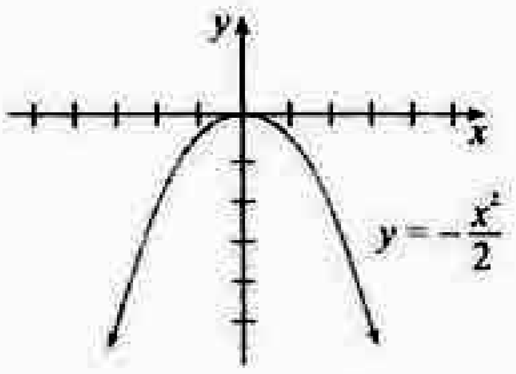

Figura 2.14

2.6 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão nas páginas 443 e 444.

Nos Problemas 1-6, resolva a equação de Bernoulli dada.

1. $x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}$

2. $\dfrac{dy}{dx} - y = e^x y^2$

3. $\dfrac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$

4. $x\dfrac{dy}{dx} - (1 + x)y = xy^2$

5. $x^2\dfrac{dy}{dx} + y^2 = xy$

6. $3(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2xy(y^3 - 1)$

Nos Problemas 7-10, resolva a equação diferencial dada sujeita à condição inicial indicada.

7. $x^2\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4,\ y(1) = \dfrac{1}{2}$

8. $y^{1/2}\dfrac{dy}{dx} + y^{3/2} = 1,\ y(0) = 4$

9. $xy(1 + xy^2)\dfrac{dy}{dx} = 1,\ y(1) = 0$

10. $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2},\ y(1) = 1$

Nos Problemas 11-16, resolva a equação de Ricatti dada; y_1 é uma solução conhecida para a equação.

11. $\dfrac{dy}{dx} = -2 - y + y^2,\ y_1 = 2$

12. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - x - y + xy^2,\ y_1 = 1$

13. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x}y + y^2,\ y_1 = \dfrac{2}{x}$

14. $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + \dfrac{1}{x}y - 2y^2,\ y_1 = x$

15. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2,\ y_1 = -e^x$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x - (\operatorname{tg} x)y + y^2,\ y_1 = \operatorname{tg} x$

17. Resolva $\dfrac{dy}{dx} = 6 + 5y + y^2$.

18. Resolva $\dfrac{dy}{dx} = 9 + 6y + y^2$.

Nos Problemas 19-24, resolva a equação de Clairaut dada. Obtenha uma solução singular.

19. $y = xy' + 1 - \ln y'$

20. $y = xy' + (y')^{-2}$

21. $y = x\dfrac{dy}{dx} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3$

22. $y = (x + 4)y' + (y')^2$

23. $xy' - y = e^{y'}$

24. $y - xy' = \ln y'$

25. Mostre que, se y_1 for uma solução para (4), então a substituição $y = y_1 + u$ em (4) implica (5).

26. Mostre que (5) se reduz a (6) por meio da substituição $w = u^{-1}$.

27. Quando $R(x) = -1$, a equação de Ricatti pode ser escrita como $y' + y^2 - Q(x)y - P(x) = 0$. Mostre que a substituição $y = w'/w$ conduz à equação linear de segunda ordem $w'' - Q(x)w' - P(w)w = 0$ (Quando Q e P são também constantes, não é difícil resolver equações deste tipo.)

28. Uma definição alternativa para a equação de Clairaut é qualquer equação na forma $F(y - xy', y') = 0$.

(a) Mostre que uma família de soluções para a última equação é

$$F(y - cx, c) = 0.$$

(b) Use o resultado da parte (a) para resolver

$$(xy' - y)^3 = (y')^2 + 5.$$

29. Mostre que $y = cx + f(c)$, em que c é uma constante arbitrária, é uma solução para (7).

30. Mostre que (8) é uma solução para (7). [*Sugestão*: Derive ambos os lados de (7) com relação a x e considere dois casos. Use diferenciação paramétrica para mostrar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = t, \qquad f''(t) \neq 0.$$

Note que, como a inclinação de $y = cx + f(c)$ é constante, a solução singular não pode ser obtida desta família.]

[0] 2.7 SUBSTITUIÇÕES

Nas seções precedentes, vimos que em certas situações uma equação diferencial podia ser transformada, por meio de uma substituição, em uma forma em que era possível resolvê-la por um método padrão. Uma equação pode parecer diferente de todas as que vimos e estudamos, mas mudando a variável, talvez um problema aparentemente difícil possa ser facilmente resolvido. Embora não haja uma regra geral que indique *qual* substituição deve ser feita, um axioma prático é o seguinte: tente alguma coisa! Algumas vezes custa caro ser engenhoso.

EXEMPLO 1

A equação diferencial

$$y(1 + 2xy)\,dx + x(1 - 2xy)\,dy = 0$$

não é separável, homogênea, exata, linear ou Bernoulli. Porém, se olharmos bem a equação, podemos ser impelidos a tentar a substituição

$$u = 2xy \quad \text{ou} \quad y = \frac{u}{2x}.$$

Como

$$dy = \frac{x\,du - u\,dx}{2x^2},$$

a equação se torna depois de simplificada,

$$2u^2\,dx + (1 - u)x\,du = 0.$$

Percebemos que a última equação é separável, e daí,

$$2\frac{dx}{x} + \frac{1-u}{u^2}\,du = 0$$

implica

$$2\ln|x| - u^{-1} - \ln|u| = c$$

$$\ln\left|\frac{x}{2y}\right| = c + \frac{1}{2xy}$$

$$\frac{x}{2y} = c_1 e^{1/2xy}$$

$$x = 2c_1 y e^{1/2xy},$$

em que e^c foi trocada por c_1. Podemos também trocar $2c_1$ por c_2 se desejarmos. ■

Note que a equação diferencial do Exemplo 1 possui a solução trivial $y = 0$, mas essa função não está incluída na família a um parâmetro de soluções.

EXEMPLO 2

Resolva

$$2xy\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 3x - 6.$$

Solução A presença do termo $2y\frac{dy}{dx}$ nos impele a tentar $u = y^2$, pois

$$\frac{du}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}.$$

Agora

$$x\frac{du}{dx} + 2u = 3x - 6$$

tem a forma linear

$$\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = 3 - \frac{6}{x},$$

assim, multiplicar pelo fator de integração $e^{\int(2/x)\,dx} = e^{\ln x^2} = x^2$ acarreta

$$\frac{d}{dx}[x^2u] = 3x^2 - 6x$$

$$x^2u = x^3 - 3x^2 + c \quad \text{ou} \quad x^2y^2 = x^3 - 3x^2 + c.$$

■

EXEMPLO 3

Resolva
$$x\frac{dy}{dx} - y = \frac{x^3}{y}e^{y/x}.$$

Solução Seja $u = y/x$. A equação diferencial pode ser simplificada para

$$ue^{-u}\,du = dx.$$

Integrando por partes e trocando $-c$ por c_1, temos

$$-ue^{-u} - e^{-u} = x + c$$
$$u + 1 = (c_1 - x)e^{u}.$$

Substituímos então $u = y/x$ e simplificamos:

$$y + x = x(c_1 - x)e^{y/x}. \qquad \blacksquare$$

Algumas equações diferenciais de ordem mais alta podem ser reduzidas a equações de primeira ordem por substituição.

EXEMPLO 4

Resolva
$$y'' = 2x(y')^2.$$

Solução Faça $u = y'$; então, $du/dx = y''$ e a equação se torna separável. Temos,

$$\frac{du}{dx} = 2xu^2 \quad \text{ou} \quad \frac{du}{u^2} = 2x\,dx$$

$$\int u^{-2}\,du = \int 2x\,dx$$

$$-u^{-1} = x^2 + c_1^2.$$

A constante de integração é escrita como c_1^2 por conveniência. A razão ficará óbvia nas próximas etapas. Como $u^{-1} = 1/y'$, segue-se que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + c_1^2} \quad \text{ou} \quad dy = -\frac{dx}{x^2 + c_1^2}$$

$$\int dy = -\int \frac{d}{x^2 + c_1^2}$$

$$y + c_2 = -\frac{1}{c_1}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{c_1}. \qquad \blacksquare$$

2.7 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 444.

Nos Problemas 1-26, resolva a equação diferencial dada usando uma substituição apropriada.

1. $xe^{2y}\dfrac{dy}{dx} + e^{2y} = \dfrac{\ln x}{x}$

2. $y' + y\ln y = ye^x$

3. $y\,dx + (1 + ye^x)\,dy = 0$

4. $(2 + e^{-x/y})\,dx + 2\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$

5. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{4}{x}y = 2x^5e^{y/x^4}$

6. $\dfrac{dy}{dx} + x + y + 1 = (x + y)^2e^{3x}$

7. $2yy' + x^2 + y^2 + x = 0$

8. $y' = y + x(y + 1)^2 + 1$

9. $2x\csc 2y\dfrac{dy}{dx} = 2x - \ln(\operatorname{tg} y)$

10. $x^2\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x^4y^2 + 1$

11. $x^4y^2y' + x^3y^3 = 2x^3 - 3$

12. $xe^yy' - 2e^y = x^2$

13. $y' + 1 = e^{-(x+y)}\operatorname{sen} x$

14. $\operatorname{sen} y \operatorname{senh} x\,dx + \cos y\cosh x\,dy = 0$

15. $y\dfrac{dx}{dy} + 2x\ln x = xe^y$

16. $x\operatorname{sen} y\dfrac{dy}{dx} + \cos y = -x^2e^x$

17. $y'' + (y')^2 + 1 = 0$

18. $xy'' = y' + x(y')^2$

19. $xy'' = y' + (y')^3$

20. $x^2y'' + (y')^2 = 0$

21. $xy' - xy'' - (y'')^3 = 1$

22. $y'' = 1 + (y')^2$

23. $xy'' - y' = 0$

24. $y'' + (\operatorname{tg} x)y' = 0$

25. $y'' + 2y(y')^3 = 0$

26. $y^2y'' = y'$

$$\left[\textit{Sugestão: } \text{Faça } u = y' \text{ para que } y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}u.\right]$$

27. No cálculo, a curvatura de uma curva de equação $y = f(x)$ é definida pelo número

$$\kappa = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Determine uma função para a qual $\kappa = 1$. [*Sugestão*: Por simplicidade, ignore constantes de integração. Também considere uma substituição trigonométrica.]

[0] 2.8 MÉTODO DE PICARD

O problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

considerado na Seção 2.1 pode ser escrito de outra maneira. Seja f uma função contínua em uma região que contém o ponto (x_0, y_0). Integrando ambos os lados da equação diferencial em relação a x, obtemos

$$y(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Agora,

$$y(x_0) = c + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t))\, dt = c$$

implica $c = y_0$. Logo,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt. \tag{2}$$

Reciprocamente, se começarmos com (2), podemos obter (1). Em outras palavras, a equação integral (2) e o problema de valor inicial (1) são equivalentes. Tentaremos agora resolver (2) por um *método de aproximações sucessivas*.

Seja $y_0(x)$ uma função contínua arbitrária. Como $f(x, y_0(x))$ é uma função conhecida, dependendo apenas de x, ela pode ser integrada. Com $y(t)$ no lugar de $y_0(t)$, o lado direito de (2) define uma outra função, que escrevemos como

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\, dt.$$

Espera-se que esta nova função esteja mais próxima da solução. Quando repetimos o procedimento, uma outra função é definida por

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt.$$

Dessa maneira, obtemos uma seqüência de funções, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, ... cujo n-ésimo termo é definido pela relação

$$\boldsymbol{y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt, \quad n = 1, 2, 3, \ldots} \tag{3}$$

Na aplicação de (3), é uma prática comum escolher $y_0(x) = y_0$ como função inicial. O uso repetitivo da fórmula (3) é conhecido como **método iterativo de Picard**.

EXEMPLO 1

Considere o problema

$$y' = y - 1, \quad y(0) = 2.$$

Use o método de Picard para encontrar as aproximações y_1, y_2, y_3, y_4.

Solução Se identificarmos $x_0 = 0$, $y_0(x) = 2$ e $f(t, y_{n-1}(t)) = y_{n-1}(t) - 1$, a equação (3) torna-se

$$y_n(x) = 2 + \int_0^x (y_{n-1}(t) - 1)\, dt, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Integrando esta última expressão, temos

$$y_1(x) = 2 + \int_0^x 1 \times dt = 2 + x$$

$$y_2(x) = 2 + \int_0^x (1 + t)\, dt = 2 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$y_3(x) = 2 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt$$

$$= 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \times 3}$$

$$y_4(x) = 2 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2 \times 3}\right) dt$$

$$= 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \times 3} + \frac{x^4}{2 \times 3 \times 4}.$$ ■

Por indução, pode-se mostrar que o n-ésimo termo da seqüência de funções é

$$y_n(x) = 2 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Desta última forma, vemos que o limite de $y_n(x)$ quando $n \to \infty$ é $y(x) = 1 + e^x$. Surpreendentemente, verificamos que a função é uma solução exata do problema de valor inicial dado.

Você não deve se deixar enganar pela relativa facilidade com que as iterações foram obtidas neste exemplo. Em geral, a iteração envolvida no processo de gerar cada $y_n(x)$ pode facilmente se tornar muito complicada. Também não é sempre aparente que a seqüência

$\{y_n(x)\}$ converge para uma simples e explícita função. Porém é necessário perguntar: o método de Picard é um meio prático de resolver uma equação de primeira ordem $y' = f(x, y)$ sujeita a $y(x_0) = y_0$? Na maioria dos casos, a resposta é não. Devemos perguntar ainda, com o espírito de um cientista ou engenheiro: para que serve este método? A resposta não é de todo favorável: o método de iteração de Picard é uma ferramenta teórica usada em considerações de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais. Sob certas condições em $f(x, y)$, pode-se mostrar que, quando $n \to \infty$, a seqüência $\{y_n(x)\}$ definida por (3) converge para uma função $y(x)$ que satisfaz a equação integral (2) e portanto o problema de valor inicial (1). Na verdade, o método de aproximações sucessivas de Picard é que é usado na prova do teorema de Picard na Seção 2.1. Porém, a prova do Teorema 2.1 usa conceitos avançados de cálculo e não será apresentada aqui. Nosso propósito ao introduzir esse tópico é dar uma idéia do potencial do procedimento e obter pelo menos uma leve familiaridade com uma técnica iterativa. No Capítulo 9, consideraremos outros métodos de soluções aproximadas para equações diferenciais que também utilizam iteração.

2.8 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 444.

Nos Problemas 1-6, use o método de Picard para encontrar y_1, y_2, y_3, y_4. Determine o limite da seqüência $\{y_n(x)\}$ quando $n \to \infty$.

1. $y' = -y, \ y(0) = 1$

2. $y' = x + y, \ y(0) = 1$

3. $y' = 2xy, \ y(0) = 1$

4. $y' + 2xy = x, \ y(0) = 0$

5. $y' + y^2 = 0, \ y(0) = 0$

6. $y' = 2e^x - y, \ y(0) = 1$

7. **(a)** Use o método de Picard para encontrar y_1, y_2, y_3 do problema

$$y' = 1 + y^2, \ y(0) = 0$$

(b) Resolva o problema de valor inicial da parte (a) por um dos métodos deste capítulo.

(c) Compare os resultados da parte (a) e (b).

8. No método de Picard, a escolha inicial $y_0(x) = y_0$ não é necessária. Refaça o Problema 3 com **(a)** $y_0(x) = k$ uma constante e $k \neq 1$, e **(b)** $y_0(x) = x$.

Capítulo 2 *REVISÃO*

Um **problema de valor inicial** consiste em encontrar uma solução para

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \ y(x_0) = y_0,$$

em um intervalo I contendo x_0. Se $f(x, y)$ e $\partial f/\partial y$ são contínuas em uma região retangular do plano xy com (x_0, y_0) em seu interior, então é garantido que existe um intervalo em torno de x_0 no qual o problema apresenta uma única solução.

O método de solução para a equação diferencial de primeira ordem depende de uma classificação apropriada da equação. Nós resumimos cinco casos.

Uma equação é **separável** se puder ser colocada na forma $h(y)\,dy = g(x)\,dx$. A solução decorre da integração de ambos os lados da equação.

Se $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são funções homogêneas de mesmo grau, então $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ pode ser transformada em uma equação separável através da substituição $y = ux$ ou $x = vy$. A escolha da substituição depende da simplicidade de cada coeficiente.

A equação diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ será **exata** se a forma $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ for uma diferencial exata. Quando $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são contínuas e possuem derivadas parciais contínuas, $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ é uma condição necessária e suficiente para que $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ seja exata. Isso significa que existe alguma função $f(x, y)$ tal que $M(x, y) = \partial f/\partial x$ e $N(x, y) = \partial f/\partial y$. O método de solução para uma equação exata começa pela integração de uma dessas expressões.

Se uma equação de primeira ordem puder ser colocada na forma $dy/dx + P(x)y = f(x)$, dizemos que ela é **linear** na variável y. Resolvemos a equação encontrando primeiro o **fator de integração**, $e^{\int P(x)\,dx}$, multiplicando ambos os lados da equação por esse fator e depois integrando ambos os lados de

$$\frac{d}{dx}[e^{\int P(x)\,dx}y] = e^{\int P(x)\,dx}f(x).$$

Equação de Bernoulli é $dy/dx + P(x)y = f(x)y^n$, em que n é qualquer número real. Quando $n \neq 0$ e $n \neq 1$, a equação de Bernoulli pode ser transformada em uma equação linear através da substituição $w = y^{1-n}$.

Em certas circunstâncias, uma equação diferencial pode ser reduzida a uma forma familiar através de uma **substituição** apropriada, ou **mudança, de variável**. Claro que já sabemos que esse é o procedimento para resolver uma equação homogênea ou de Bernoulli. Em um contexto geral, nenhuma regra de substituição pode ser dada.

Convertendo um problema de valor inicial em uma equação integral equivalente, o **método de iteração de Picard** é uma maneira de obter uma aproximação da solução para o problema.

Capítulo 2 *EXERCÍCIOS DE REVISÃO*

As respostas dos exercícios selecionados estão nas páginas 444 e 445.

Resolva os Problemas 1-4 sem consultar o texto. Complete o espaço em branco ou responda verdadeiro/falso.

1. A equação diferencial $y' = 1/(25 - x^2 - y^2)$ possui uma única solução passando pelo ponto (x_0, y_0) na(s) região(ões) definida(s) por ________________ .
2. O problema de valor inicial $xy' = 3y$, $y(0) = 0$, possui a solução $y = x^3$ e ________________ .
3. O problema de valor inicial $y' = y^{1/2}$, $y(0) = 0$, não possui solução, pois $\partial f/\partial y$ é descontínua nos pontos da reta $y = 0$ ________________ .
4. Existe um intervalo centrado em 2 no qual a única solução para o problema de valor inicial $y' = (y - 1)^3$, $y(2) = 1$, é $y = 1$ ________________ .
5. Sem resolver, classifique cada uma das seguintes equações como: separável, homogênea, exata, linear, Bernoulli, Ricatti ou Clairaut.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y - x}$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y}{x}$

(c) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = 2x\dfrac{dy}{dx}$

(d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x(x - y)}$

(e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + y}{x^2 + x}$

(f) $\dfrac{dy}{dx} = 4 + 5y + y^2$

(g) $y\,dx = (y - xy^2)\,dy$

(h) $x\dfrac{dy}{dx} = ye^{x/y} - x$

(i) $xyy' + y^2 = 2x$

(j) $2xyy' + y^2 = 2x^2$

(k) $y\,dx + x\,dy = 0$

(l) $\left(x^2 + \dfrac{2y}{x}\right)dx = (3 - \ln x^2)\,dy$

(m) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + 1$

(n) $\dfrac{y}{x^2}\dfrac{dy}{dx} + e^{2x^3 + y^2} = 0$

(o) $y = xy' + (y' - 3)^2$

(p) $y' + 5y^2 = 3x^4 - 2xy$

6. Resolva $(y^2 + 1)\,dx = y\sec^2 x\,dy$.
7. Resolva $\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{\ln y}$ sujeito a $y(1) = 1$.
8. Resolva $y(\ln x - \ln y)\,dx = (x\ln x - x\ln y - y)\,dy$.
9. Resolva $xyy' = 3y^2 + x^2$ sujeito a $y(-1) = 2$.

10. Resolva $(6x + 1)y^2\dfrac{dy}{dx} + 3x^2 + 2y^3 = 0$.

11. Resolva $ye^{xy}\dfrac{dx}{dy} + xe^{xy} = 12y^2$ sujeito a $y(0) = -1$.

12. Resolva $x\,dy + (xy + y - x^2 - 2x)\,dx = 0$.

13. Resolva $(x^2 + 4)\dfrac{dy}{dx} = 2x - 8xy$ sujeito a $y(0) = -1$.

14. Resolva $(2x + y)y' = 1$.

15. Resolva $x\dfrac{dy}{dx} + 4y = x^4y^2$ sujeito a $y(1) = 1$.

16. Resolva $-xy' + y = (y' + 1)^2$ sujeito a $y(0) = 0$.

Nos Problemas 17 e 18, resolva a equação diferencial dada por meio de uma substituição.

17. $\dfrac{dy}{dx} + xy^3\sec\dfrac{1}{y^2} = 0$

18. $y'' = x - y'$

19. Use o método de Picard para encontrar aproximações y_1 e y_2 para $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

20. Resolva $y' + 2y = 4$, $y(0) = 3$ por um dos métodos usuais. Resolva o mesmo problema pelo método de Picard e compare os resultados.