

www.im.ufrj.br/cvga

**CÁLCULO VETORIAL
&
GEOMETRIA ANALÍTICA**
livro 4: curvas parametrizadas

Felipe Acker



**Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro**

dezembro de 2019

copyright ©2019 by Felipe Acker

Este trabalho foi contemplado com auxílio financeiro, no âmbito do edital de *Apoio à produção de material didático para atividades de ensino e/ou pesquisa*, 2014, da



Sumário

Prefácio	i
1 Movimentos	1
1.1 Círculos	2
1.2 Círculos em movimento	3
1.3 Sistema de coordenadas em movimento	4
1.4 Outros exemplos	7
1.5 Imagem de curva por transformação	8
1.6 Famílias de curvas	10
2 Velocidade	13
2.1 Vetor velocidade	13
2.2 Reta tangente	17
3 Aceleração	19
3.1 Definições	19
3.2 Significado das acelerações tangencial e normal	21
4 Mecânica e Geometria	23
4.1 Uma imposição da Geometria à Mecânica	23
4.2 A curvatura como função quadrática	27
5 Regras de Cálculo	29
5.1 Desigualdades	29
5.2 Limites	31
5.3 Derivadas	32
5.4 A exponencial complexa	35
5.5 Voltando à derivada do produto	38
6 Leis de Newton	43
6.1 As leis	43
6.2 Sistemas de partículas, momentum e centro de massa	44
7 Equações diferenciais	47
7.1 Exemplos iniciais	47
7.2 O método numérico mais óbvio	49
7.3 Um método similar para equações de segunda ordem	51
7.4 As aproximações da derivada	52

7.5	De volta ao método numérico	55
8	Comprimento de curva	59
8.1	Comprimento de arco	61
9	Reparametrização por comprimento de arco	67
10	Coordenadas polares e variação de ângulo	71
10.1	Cônicas em coordenadas polares	72
10.2	Variação de ângulo	76
11	Variação de ângulo ao longo de uma curva	79
12	O número de voltas	85
12.1	O número de voltas	85
12.2	Curvas e Homotopias	86
12.3	O princípio fundamental	88
12.4	O caso C^1	88
13	Aproximações por curvas suaves	93
13.1	A aproximação uniforme	95
13.2	A infinita diferenciabilidade das f_ϵ	96
13.3	Aproximação de curva contínua por sequência de curvas suaves	98
14	Curvas contínuas em coordenadas polares	99
14.1	Alguns resultados técnicos	100
14.2	A definição de θ	104
15	Área varrida por uma curva	107
15.1	O seno e o cosseno hiperbólicos	110
16	Campos centrais e conservação do momento angular	113
17	O oscilador harmônico	117
17.1	O modelo	117
17.2	Equações lineares de segunda ordem	119
17.3	De volta ao problema	121
18	As leis de Kepler	127
18.1	Newton \Rightarrow Kepler	128
18.2	Kepler \Rightarrow Newton	131
18.3	Um portal entre o problema dos dois corpos e o oscilador harmônico	133
19	A curvatura	139
19.1	A aceleração normal	139
19.2	A aproximação por um círculo	140
19.3	A variação angular da normal	145
19.4	A curvatura de uma curva plana	146

20 O plano osculador	149
21 O que faz uma curva deixar de ser plana?	153
21.1 O que faz uma curva deixar de ser um ponto?	153
21.2 O que faz uma curva deixar de ser reta?	153
21.3 O que faz uma curva deixar de ser plana?	154
22 A torção	157
22.1 A definição	158
22.2 Cálculo da torção	159
23 As equações de Serret-Frenet	161
23.1 As equações	161
23.2 Obtendo a curva a partir das equações	163

Prefácio

O quarto e último livro do **Cálculo Vetorial e Geometria Analítica** era, na versão original, o terceiro. Como este livro foi concebido para alunos de primeiro período, muitas vezes fui obrigado, em sala de aula, a trocar a ordem, para esperar que os alunos fossem apresentados aos conceitos fundamentais do Cálculo. De fato, só agora aparece, finalmente, a justificativa para a palavra Cálculo do título (afinal, hoje, Cálculo se tornou quase sinônimo de Cálculo Infinitesimal): aqui vamos lidar com curvas parametrizadas, fazendo uso intensivo da derivada e da integral.

O texto se desenvolve em torno de dois assuntos: Mecânica (Cinemática) da partícula e Geometria Diferencial de curvas. Velocidade, aceleração, curvatura e torção são personagens centrais da trama. As equações diferenciais aparecem e são tratadas: discutimos um pouco a ideia de método numérico e resolvemos diretamente as equações lineares a coeficientes constantes (como os números complexos foram encarados de frente no livro 1, não há motivo para deles fugirmos nas atuais circunstâncias). A dedução das leis de Kepler a partir das de Newton (incluindo a da gravitação) e, reciprocamente, a dedução da lei da gravitação a partir das leis de Kepler foram convertidas em duas sequências de exercícios que, esperamos, o leitor saberá enfrentar (um suplemento, também em forma de lista de exercícios, apresenta a conversão das órbitas do oscilador harmônico em órbitas do problema dos dois corpos). O livro todo, de certa forma, é uma imensa lista de exercícios de Cálculo Infinitesimal de uma variável. Para garantir sua independência em relação ao livro 3, a seção referente a cônicas em coordenadas polares, crucial para a apresentação das leis de Kepler e sua dedução a partir das de Newton, aparece em ambos (mas, mesmo assim, a dedução de que as órbitas do oscilador harmônico são elípticas depende de resultados do livro 3).

Um desvio topológico é o tratamento relativamente "sério" dado ao número de voltas (índice) de uma curva em torno de um ponto, inicialmente feito para curvas C^1 mas depois estendido ao caso contínuo. Embora exista um tratamento mais elementar (ver o livro do Fulton, Algebraic Topology), escolhi o caminho da aproximação por curvas C^1 , que se generaliza para a forma de ângulo sólido. O assunto acabou ocupando 5 capítulos, boa parte deles dedicada a piruetas técnicas. Espero que possa servir de referência, ou de trampolim, para mergulhos topológicos mais profundos.

Os vídeos das aulas podem ser acessados a partir da página da disciplina CVGA,

<https://sites.google.com/matematica.ufrj.br/cvga2019>,

da minha página, onde há mais opções,

<https://sites.google.com/matematica.ufrj.br/acker>,

ou no meu canal,

<https://www.youtube.com/c/FelipeAcker>.

Agradeço mais uma vez ao colega Dinamérico Pereira Pombo Jr. pela revisão do texto (e, mais uma vez, assumo os erros que introduzi, alterando posteriormente o que já parecia fechado), e a Bernardo Freitas Paulo da Costa, Carlos Farina de Souza, Fabio Antonio Tavares Ramos, Marcus Venicius Cougo Pinto, Monique Robalo Moura Carmona, Orestes Piermatei Filho, Ricardo Martins da Silva Rosa, Waldecir Bianchini (que criou os applets e também ajudou na revisão) e Umberto Leone Hryniewicz, pelas diversas ajudas. A maior parte das figuras foi feita a mão com lapiseiras Caran d'Ache e convertida em arquivos digitais por João Paulo Pinto Siqueira, que foi também um grande parceiro na edição de vídeos.

Santa Teresa, dezembro de 2019

Felipe Acker

Capítulo 1

Movimentos

Pensaremos uma curva não apenas como um conjunto de pontos (do plano ou do espaço), mas como o **movimento** de uma partícula. O nome técnico é **curva parametrizada**.

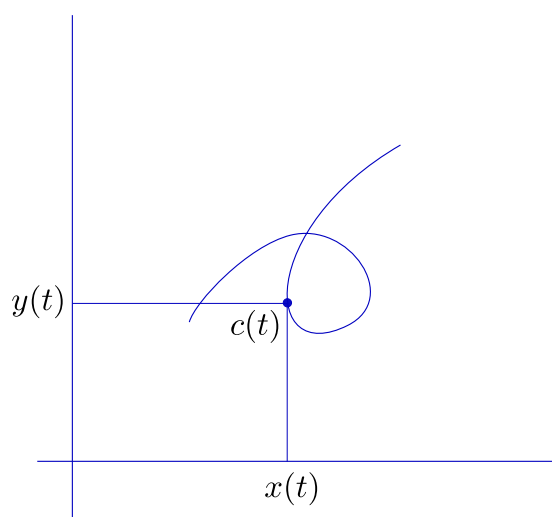


Figura 1.1: curva parametrizada

Definição: Uma **curva parametrizada** é uma função

$$\begin{aligned} c : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3, \\ t &\longmapsto c(t) \end{aligned}$$

sendo I um **intervalo não trivial** (ou seja, com infinitos pontos). Assim, c será dada por duas ou três funções,

$$\begin{aligned} x : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z : I &\longrightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

de forma que, conforme o caso, $c(t) = (x(t), y(t))$ ou $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Reservaremos, em geral, o termo **movimento** para curvas parametrizadas com, pelo menos, derivada segunda, para que faça sentido falarmos em **velocidade** e **aceleração**.

O que nos interessa, em princípio, não são os gráficos das funções x , y e z , mas sim o **traço** de c , que é a imagem de c em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 (e que é, na verdade, a *curva propriamente dita*).

Definição: Dada a curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{R}^3 , o **traço** de c é $\{c(t), t \in I\}$.

Para visualisarmos o traço de c , fazemos variar t e marcamos os pontos $(x(t), y(t))$ (ou $(x(t), y(t), z(t))$). À medida em que t varia, o ponto $c(t)$ vai desenhando o traço de c . O traço de c é, frequentemente, chamado de **trajetória** da partícula. Procuraremos reservar, porém, o termo *trajetória* para um conceito que, embora independa do movimento, como o traço, ainda está associado ao *sentido* em que o movimento é descrito. Uma definição mais precisa será dada na página 17.

Destacaremos, a seguir, alguns exemplos.

1.1 Círculos

É natural descrevermos os pontos do círculo de centro na origem e raio R por meio do ângulo θ que o vetor \vec{OP} faz com \vec{e}_1 . Assim, à medida em que variamos t , temos o ângulo $\theta(t)$, de forma que

$$(x(t), y(t)) = (R \cos \theta(t), R \sin \theta(t)).$$

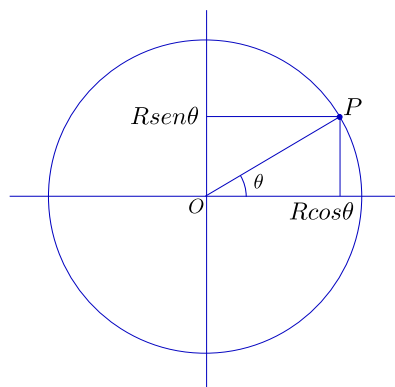


Figura 1.2: círculo de centro na origem

Se θ é derivável, sua derivada é chamada de **velocidade angular**. Note que não há motivo para supor que a velocidade angular seja constante.

Exercício 1.1 Observe que o círculo é descrito no sentido trigonométrico, quando θ é crescente, e no sentido horário, quando θ é decrescente. Pense também em outras possibilidades, como $\theta(t) = A \sin t$ (para que valores de A , neste caso, o traço de c cobrirá, de fato, todo o círculo?).

Para descrever um círculo de centro no ponto $P_o = (x_o, y_o)$, basta que consideremos um sistema de coordenadas de centro em P_o , no qual c será descrito por $R(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$, e somemos (x_o, y_o) :

$$c(t) = (x_o, y_o) + R(\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

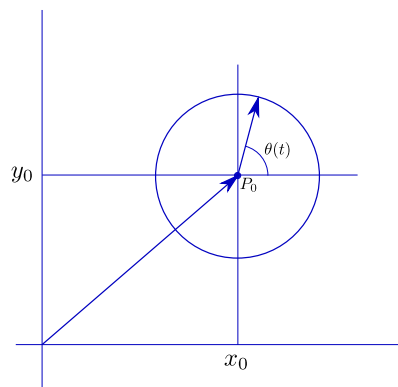


Figura 1.3: círculo de centro em P_o

1.2 Círculos em movimento

Suponhamos agora que, à medida em que variamos t e tomamos o ponto

$$R(\cos \theta(t), \sin \theta(t)),$$

o centro do círculo sai andando, sendo seu movimento dado por

$$P_o(t) = (x_o(t), y_o(t)).$$

Nosso ponto $P(t)$, visto de $P_o(t)$, tem coordenadas $R(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ e descreve um círculo. Visto da origem O , porém, estará orbitando em torno de P_o , com movimento dado por

$$(x_o(t), y_o(t)) + R(\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

Um caso particular é dado pela **cicloide**.

Imagine um ponto marcado sobre a lateral de uma das rodas de um carro em movimento. Mais abstratamente, consideremos a situação em que o centro do círculo

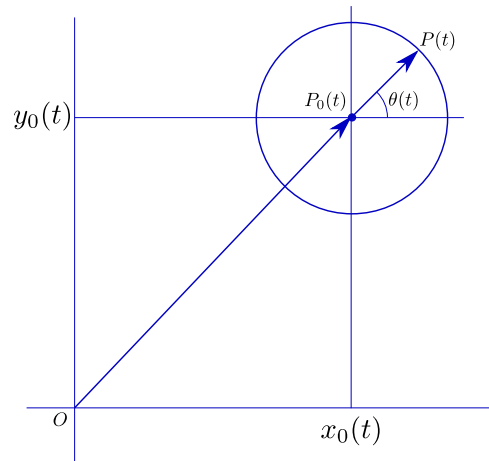


Figura 1.4: círculo de centro em $P_0(t)$

se desloca na horizontal, de forma que sua segunda coordenada seja sempre $y_0(t) = R$. Se o círculo roda de um ângulo $\theta(t)$ (no sentido horário), seu deslocamento se dá para a direita, de forma que $x_0(t) = R\theta(t)$.

No sistema de coordenadas com origem em $(R\theta(t), R)$, o ponto $P(t)$ que estamos considerando terá coordenadas $(-r \sin \theta(t), -r \cos \theta(t))$ (note que o ângulo de $P(t) - P(t_0)$ com \vec{e}_1 será dado por $-\pi/2 - \theta(t)$). Nossa cicloide é então parametrizada por

$$c(t) = (R\theta(t) - r \sin \theta(t), R - r \cos \theta(t)).$$

Usualmente, quando $R = r$, c é chamada apenas de **cicloide** (ou cicloide comum); quando $R > r$, de **cicloide encurtada**; quando $R < r$, de **cicloide alongada**. Se, no lugar de rolar sobre uma reta, a roda rola por dentro de um círculo, temos uma **hipocicloide**; se rola por fora de um círculo, temos uma **epicicloide**.

1.3 Sistema de coordenadas em movimento

Podemos considerar a situação mais geral em que nosso ponto, $P(t)$, tem coordenadas $(x_1(t), y_1(t))$ em um referencial dado pela origem P_0 e pela base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, de forma que, no sistema canônico, tenhamos

$$P(t) = P_0 + x_1(t)\vec{e}_1 + y_1(t)\vec{e}_2.$$

Suponhamos, porém, que o referencial é móvel, de forma que

$$P_0 = P_0(t), \vec{e}_1 = \vec{e}_1(t), \vec{e}_2 = \vec{e}_2(t)$$

variam com t . Suponhamos conhecidas as coordenadas de $P_0(t)$, $\vec{e}_1(t)$ e $\vec{e}_2(t)$, dadas por

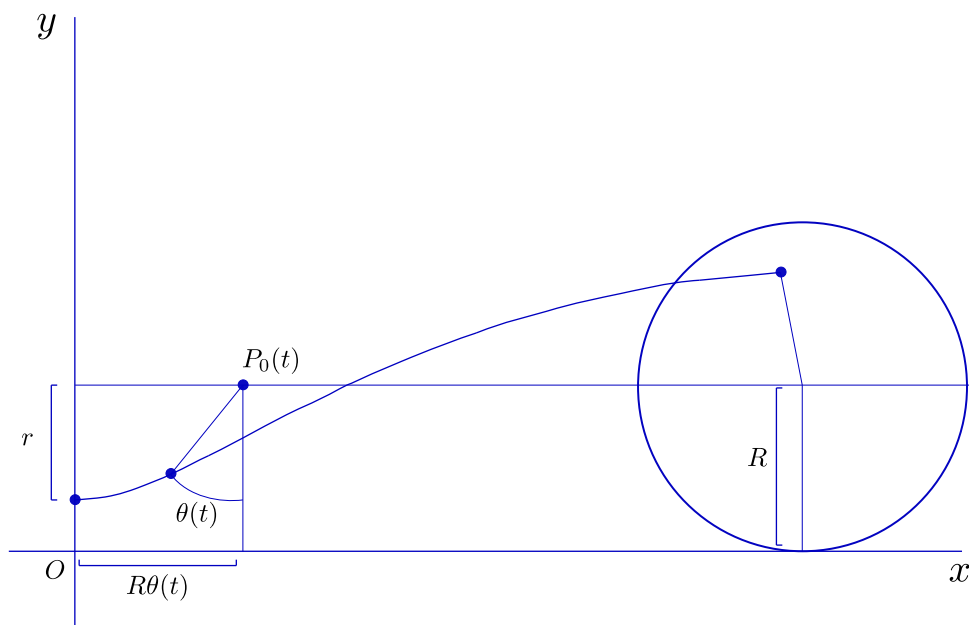


Figura 1.5: cicloide

$$P_0(t) = (x_0(t), y_0(t)); \vec{e}_1(t) = (a_{11}(t), a_{21}(t)); \vec{e}_2(t) = (a_{12}(t), a_{22}(t)).$$

As coordenadas de $P(t)$, $(x(t), y(t))$, serão dadas, sem problemas, por

$$(x(t), y(t)) = (x_0(t), y_0(t)) + x_1(t)(a_{11}(t), a_{21}(t)) + y_1(t)(a_{12}(t), a_{22}(t)).$$

Estas considerações se estendem, obviamente, a curvas em \mathbb{R}^3 . Vale notar, também, que não há razão para supor, em geral, que \vec{e}_1 e \vec{e}_2 sejam unitários, ou mesmo ortogonais.

Como exemplo, estudemos a hipocicloide.

O círculo maior tem raio R ; o menor tem raio r e roda, no sentido horário, de $\theta(t)$. O ponto P , para simplificar, está sobre o círculo menor. Note que o ângulo $\alpha(t) = \angle C_0 O \hat{C}(t)$, formado pelo ponto de contacto inicial C_0 , a origem O e o ponto de contacto $C(t)$, é dado por

$$\alpha(t) = \frac{r\theta(t)}{R}.$$

P_0 tem coordenadas dadas por

$$P_0(t) = (R - r)(\sin \alpha(t), -\cos \alpha(t)).$$

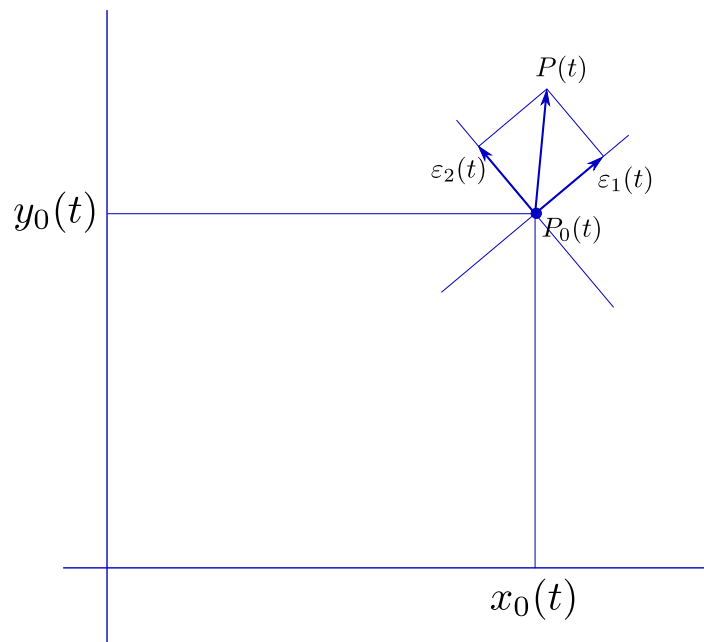


Figura 1.6: referencial móvel

A base $(\vec{\epsilon}_1(t), \vec{\epsilon}_2(t))$ é a base canônica rodada de $\alpha(t)$:

$$\begin{aligned}\vec{\epsilon}_1(t) &= (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t)); \\ \vec{\epsilon}_2(t) &= (-\sin \alpha(t), \cos \alpha(t)).\end{aligned}$$

No sistema definido por $P_0(t)$, $\vec{\epsilon}_1(t)$, $\vec{\epsilon}_2(t)$, o ponto $P(t)$ tem coordenadas dadas por $(x_1(t), y_1(t)) = (-\sin \theta(t), -\cos \theta(t))$. Juntando tudo, temos $P(t) = (x(t), y(t))$, com

$$x(t) = (R - r) \sin\left(\frac{r\theta(t)}{R}\right) - r \sin \theta(t) \cos\left(\frac{r\theta(t)}{R}\right) + r \cos \theta(t) \sin\left(\frac{r\theta(t)}{R}\right),$$

$$y(t) = (r - R) \cos\left(\frac{r\theta(t)}{R}\right) - r \sin \theta(t) \sin\left(\frac{r\theta(t)}{R}\right) - r \cos \theta(t) \cos\left(\frac{r\theta(t)}{R}\right).$$

Exercício 1.2 Considere um primeiro círculo, c_0 , de centro na origem, de raio R_0 . Por dentro deste rola outro círculo, c_1 , de raio R_1 , rodando de um ângulo $\theta_1(t)$ no sentido horário. Por dentro de c_1 rola c_2 , de raio R_2 , rodando $\theta_2(t)$, e assim sucessivamente, até c_n , de raio R_n , que roda de $\theta_n(t)$, sempre no sentido horário. Suponha que o ponto $P(t)$ está sobre c_n e que, no instante inicial, os círculos estão como na figura. Descreva $P(t)$.

Exercício 1.3 Faça um programa que receba sistemas de coordenadas encaixados, como os do exercício anterior, e gere as correspondentes animações.

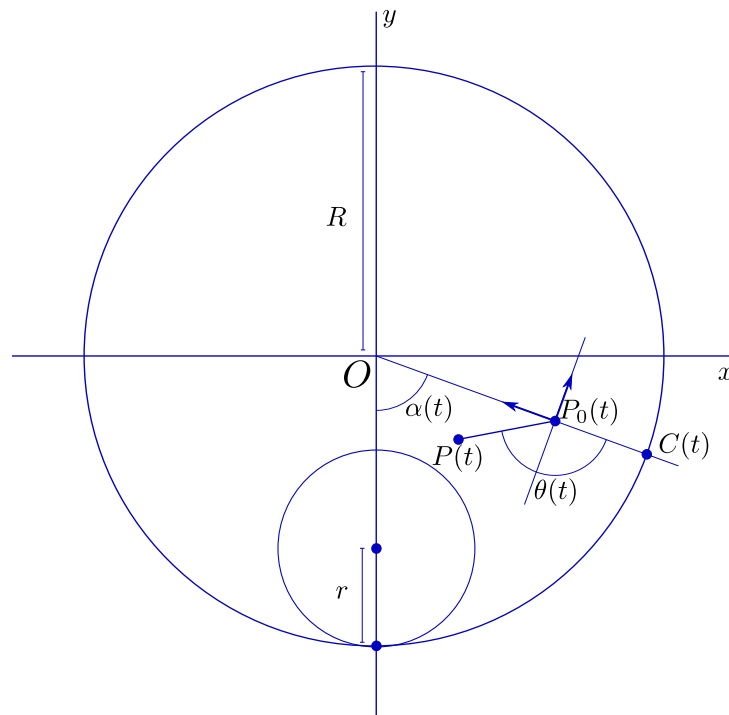


Figura 1.7: hipocicloide

1.4 Outros exemplos

Uma **espiral** no plano pode ser pensada como um círculo cujo raio varia:

$$(x(t), y(t)) = R(t) (\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

Uma **elipse**, de focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ e tal que, para cada um de seus pontos $P = (x, y)$, vale

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a,$$

é caracterizada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Uma parametrização bastante simples é

$$(x(t), y(t)) = (a \cos t, b \sin t).$$

Uma **hélice** é uma curva (em \mathbb{R}^3) descrita por

$$(x(t), y(t), z(t)) = (R \cos(at), R \sin(at), bt).$$

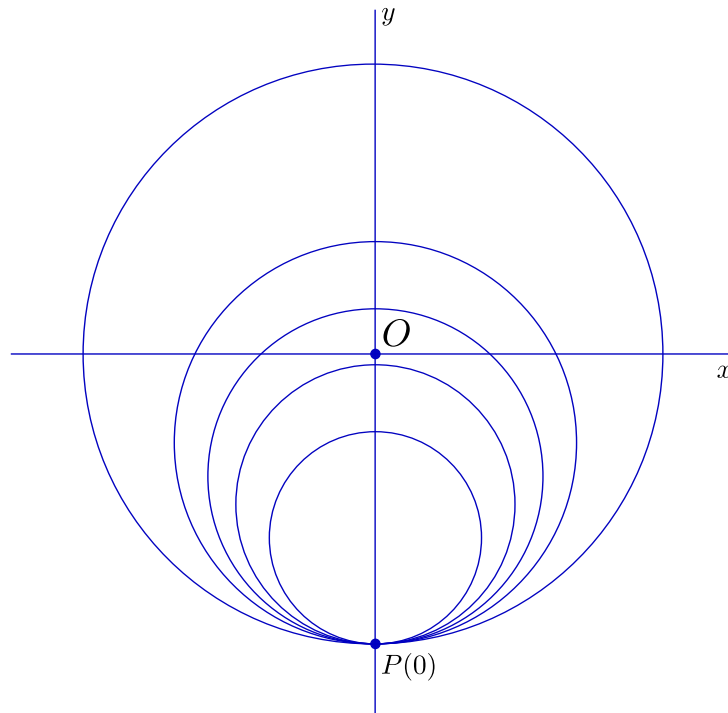


Figura 1.8: exercício

Os parâmetros R , a e b têm funções distintas: a hélice caminha sobre a superfície cilíndrica de eixo Oz e raio R ; a razão b/Ra nos dá a medida de quão íngreme é a subida.

Podemos, em geral, chutar as funções coordenadas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$. Neste caso, o problema se inverte: até agora, partimos das propriedades da curva para obtermos as equações; se partimos das equações, o problema passa a ser descobrir as propriedades da curva.

SITES: Existem sites interessantes mostrando variadas curvas. Um (francês) muito bom é

<http://www.mathcurve.com/>

Outro (italiano), com máquinas que geram curvas:

http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/_alfabetico.htm

1.5 Imagem de curva por transformação

Suponha dada uma curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$c(t) = (x(t), y(t)).$$

Se $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função tal que podemos escrever

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)),$$

a imagem de c por f será a curva

$$F \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

dada por

$$t \mapsto (u(x(t), y(t)), v(x(t), y(t))).$$

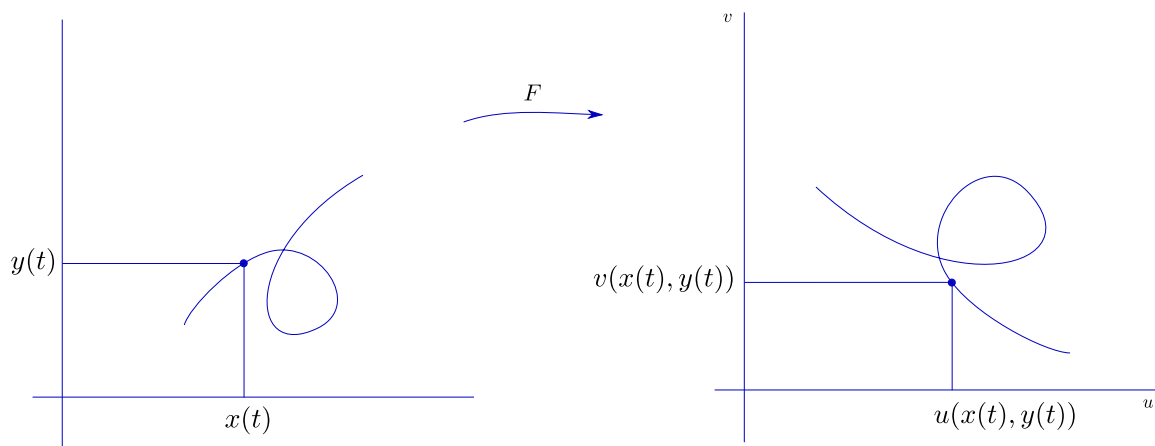


Figura 1.9: imagem por transformação

Exemplo: A parametrização

$$(x(t), y(t)) = (a \cos t, b \sin t)$$

da elipse pode ser vista da seguinte forma:

A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

leva o círculo de equação $x^2 + y^2 = 1$ na elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

transformando a parametrização $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ do círculo unitário na parametrização $t \mapsto (a \cos t, a \sin t)$ da elipse.

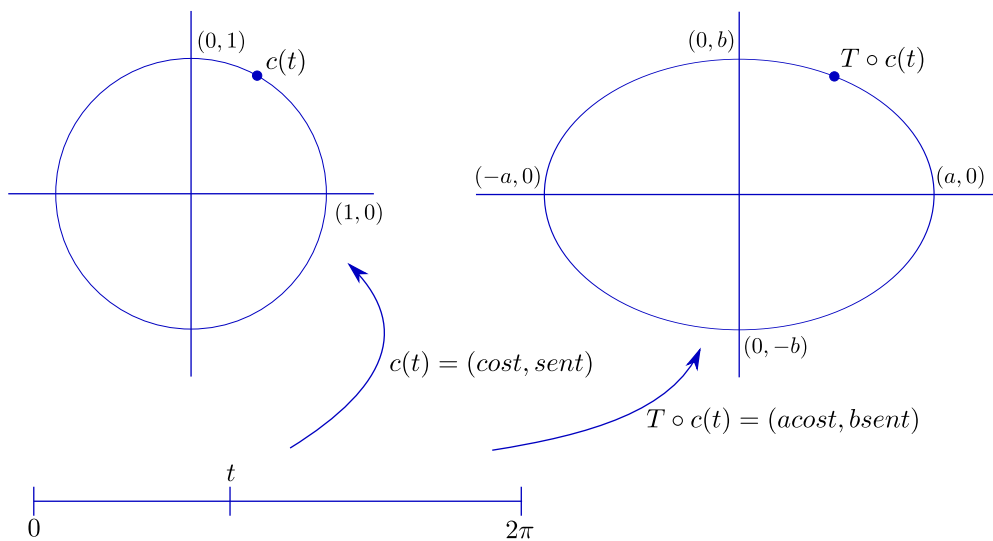


Figura 1.10: elipse como imagem por transformação linear

Exercício 1.4 Considere a transformação de coordenadas polares para cartesianas: $F(r, \theta) = (x, y)$, dada por

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Mostre que, se c é uma reta no plano (r, θ) , sua imagem por F , no plano (x, y) , será uma reta passando pela origem, se $\theta = \text{constante}$, um círculo, se $r = \text{constante}$ (um ponto, se a constante for 0), ou uma espiral, no caso geral.

Não é preciso, é claro, que nos limitemos a $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Podemos considerar $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ou mesmo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Exercício 1.5 Considere um plano não horizontal α em \mathbb{R}^3 e um ponto P_0 tal que $P_0 \notin \alpha$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, com $z_0 \neq 0$. Suponha fixado em α um sistema de coordenadas de base ortonormal. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação dada por $F(x, y) = (u, v)$, sendo (u, v) as coordenadas em α do ponto obtido pela interseção entre α e a reta por P_0 e $(x, y, 0)$ (isto é, F corresponde à **vista em perspectiva**, tendo como ponto de vista o ponto P_0 e α como plano de projeção). Suponha que os pontos (x, y) da curva γ sejam caracterizados pela equação do segundo grau

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Determine uma equação que caracterize os pontos (u, v) da curva $F \circ \gamma$.

1.6 Famílias de curvas

Com frequência, consideramos famílias de curvas definidas por um segundo parâmetro. Os círculos de centro na origem constituem uma família, parametrizada por r , dada por

$$c_r(t) = (r \cos t, r \sin t).$$

Podemos, também considerar que a família é parametrizada por t : para cada t fixo, temos, parametrizada por r em \mathbb{R} , uma reta passando pela origem.

Obviamente, não há razão para nos limitarmos a um só parâmetro. Se quisermos descrever todos os círculos do plano, precisamos de três parâmetros: r para o raio e (x_0, y_0) para o centro.

Se quisermos fazer uma animação, em que uma curva vai se mover no plano (ou mesmo no espaço), geraremos uma família de curvas. Uma família de curvas no espaço pode ser visualizada, em geral, como uma superfície.

Exercício 1.6 Considere a curva $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $c(t) = (x(t), y(t))$. Para cada θ em \mathbb{R} , seja $c_\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ obtida pela rotação de c , em torno da origem, de um ângulo θ . Obtenha as parametrizações de c_θ .

Uma curva tangente a todas as curvas de uma certa família é dita uma **envoltória** da família

Exercício 1.7 Seja $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada e estritamente convexa.

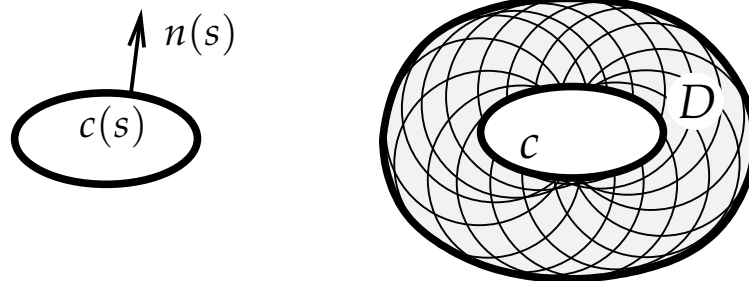


Figura 1.11: envoltória

Seja $R > 0$. Para cada $s \in [a, b]$ trace um círculo de raio R e centro $c(s)$. Seja D a região exterior a c coberta pelos círculos, isto é, D está compreendida entre c e uma envoltória da família de círculos de centro em c e raio R . Mostre que a área de D é $LR + \pi R^2$, onde L é o comprimento de c . Mostre que o mesmo resultado vale se c é apenas convexa e tem "bicos". Sugestão: comece com o caso em que c é uma poligonal convexa.

Capítulo 2

Velocidade

2.1 Vetor velocidade

Seja I um intervalo não trivial em \mathbb{R} . Considere a curva parametrizada $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou $n = 3$), definida por $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$.¹ A **velocidade média** de c entre t e $t + \Delta t$ é o vetor

$$\frac{1}{\Delta t} (c(t + \Delta t) - c(t)),$$

dado, em coordenadas, por

$$\left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right).$$

A **velocidade** de c no tempo t , $v(t)$, é definida por ²

$$v(t) = \dot{c}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (c(t + \Delta t) - c(t)),$$

o que, em coordenadas, nos dá

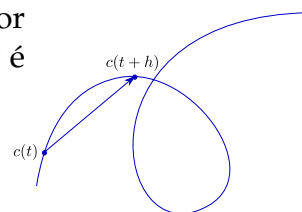
$$\dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)),$$

ou seja,

$$\dot{c}(t) = \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right).$$

¹Se $n = 2$, apenas por $c(t) = (x(t), y(t))$

²Seguindo a tradição em Mecânica, usaremos a notação do ponto (em cima), para designar as derivadas em relação ao tempo



Observação: O leitor talvez esteja habituado a lidar com $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e a falar em $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Talvez soe estranho pensar em $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ou \mathbb{R}^2) e falar em $\lim_{t \rightarrow t_0} P(t)$. Notemos, inicialmente, que a ideia intuitiva é a mesma:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} P(t) = P_0$$

significa que a distância de $P(t)$ a P_0 tende a zero quando a de t a t_0 tende a zero. Ora, se $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, isso quer dizer que

$$|P(t) - P_0| = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0.$$

Mas, como $|P(t) - P_0| \geq |x(t) - x_0|$, $|P(t) - P_0| \geq |y(t) - y_0|$ e $|P(t) - P_0| \geq |z(t) - z_0|$, temos que $|P(t) - P_0| \rightarrow 0$ implica em

$$|x(t) - x_0| \rightarrow 0, |y(t) - y_0| \rightarrow 0, |z(t) - z_0| \rightarrow 0.$$

Reciprocamente, se, quando t tende a t_0 , temos

$$|x(t) - x_0| \rightarrow 0, |y(t) - y_0| \rightarrow 0, |z(t) - z_0| \rightarrow 0,$$

então

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |P(t) - P_0| = 0,$$

pois

$$|P(t) - P(t_0)| \leq \sqrt{3} \max \{|x(t) - x(t_0)|, |y(t) - y(t_0)|, |z(t) - z(t_0)|\}.$$

Assim, dizer que existe

$$v(t) = \dot{c}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (c(t + \Delta t) - c(t)) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$$

equivale a dizer que

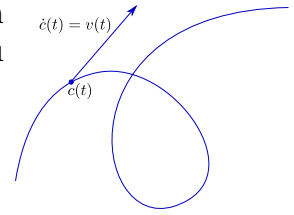
$$v_1(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \dot{x}(t),$$

$$v_2(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \dot{y}(t),$$

$$v_3(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \dot{z}(t).$$

O vetor velocidade, que acabamos de definir, vem, é claro, carregado de significados, físicos e geométricos.

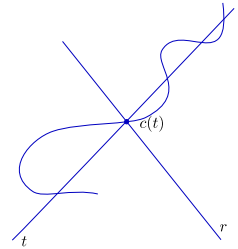
A direção de $\dot{c}(t)$, caso este seja não nulo, é a da **reta tangente** à curva c no ponto t . O **sentido** de $\dot{c}(t)$ é o **sentido** em que a curva está sendo percorrida. Já a norma de $\dot{c}(t)$, $|\dot{c}(t)|$, mede a rapidez (ou **velocidade escalar**) do movimento.



Cabem aqui algumas considerações de caráter filosófico:

1. Quando nos referimos à **reta tangente** à curva c no ponto $c(t)$, não estamos, na verdade, lançando mão de um conceito previamente definido.

De fato, definições de reta tangente tais como *reta que toca c em um só ponto, deixando todos os outros de um mesmo lado*, não resistem à figura ao lado: a reta r toca c em um só ponto, mas não é tangente; já t toca c em quatro pontos, não deixa os demais de um mesmo lado, mas é tangente a c em $c(t)$. A própria diferença (em termos matemáticos) entre *cortar* e *tocar*, de que poderíamos ser tentados a lançar mão, também precisaria ser esclarecida.



2. Quando falamos no **sentido** em que a curva está sendo percorrida, estamos trazendo de volta a diferença entre a função

$$c : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^3),$$

que caracteriza uma **curva parametrizada**, e o **traço** de c , que é o conjunto definido por

$$\{c(t), t \in I\} \subset \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^3)$$

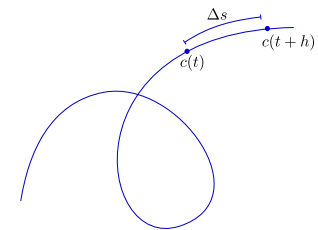
(que é a *curva propriamente dita*). Diferentes parametrizações da curva podem ser dadas, mantendo-se o mesmo traço.

3. No que diz respeito à velocidade escalar, esta pode ser vista como dada pelo seguinte limite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

sendo Δs o comprimento, medido sobre a curva, percorrido entre t e $t + \Delta t$. Aqui, mais uma vez, estamos recorrendo a um conceito, **comprimento**, que não foi previamente definido. O comprimento de uma linha curva não pode, em geral, ser medido diretamente (mesmo usando um barbante). Ainda mais grave, nossa definição de $\dot{c}(t)$ nos permite apenas afirmar que a velocidade escalar (definida como $|\dot{c}(t)|$) é dada por

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|c(t + \Delta t) - c(t)|}{|\Delta t|}.$$



Mesmo se nos restringirmos a Δt positivo, devemos considerar a seguinte dificuldade: $|c(t + \Delta t) - c(t)|$ é a medida do segmento de reta ligando $c(t)$ a $c(t + \Delta t)$, enquanto

Δs é a medida do arco da curva entre $c(t)$ e $c(t + \Delta t)$. Ora, mesmo se, neste momento, ainda não apresentamos uma definição (e, muito menos, uma forma de cálculo) para Δs , temos certeza de que $\Delta s \geq |c(t + \Delta t) - c(t)|$ e, em geral, $\Delta s > |c(t + \Delta t) - c(t)|$.

Antes de passarmos à definição de reta tangente e a outras considerações relacionadas ao vetor velocidade³, seria conveniente termos claras as ideias sobre alguns pontos, que trataremos a seguir sob forma de exercícios.

Exercício 2.1 Seja $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva dada por $c(t) = (x(t), y(t))$, $x(t) = t$,

$$y(t) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{t} & , t \neq 0, \\ 0 & , t = 0. \end{cases}$$

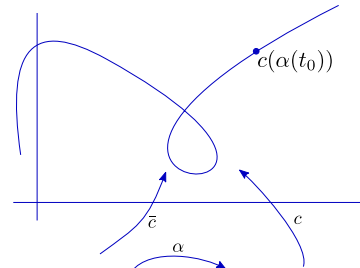
Calcule $\dot{c}(0)$ diretamente pela definição (e obtenha $\dot{c}(0) = (1, 0)$). Conclua que a reta tangente a c em $c(0) = (0, 0)$ é o eixo dos x . Note que não só o traço de c e a tangente em $c(0)$ se cortam infinitas vezes, mas que se cortam infinitas vezes em qualquer vizinhança de $c(0)$.

Exercício 2.2 Seja $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $x(t) = t$ e $y(t) = |t|$. Note que $\dot{c}(0)$ não existe (como bem sabemos, o traço de c tem um bico, em forma de ângulo reto, em $(0, 0)$).

Exercício 2.3 Seja $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $x(t) = t^3$ e $y(t) = |t|^3$. Note que o traço desta curva é igual ao da anterior (temos, pois, um bico em $(0, 0)$). Faça as contas e conclua que $\dot{c}(0)$ existe. E agora, c tem ou não tangente em $(0, 0)$?

Exercício 2.4 Seja $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e suponhamos que x, y e z são funções deriváveis em I .

Seja J um outro intervalo não trivial e suponha que $\alpha : J \rightarrow I$ seja derivável. Considere a curva $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\gamma(t) = (c \circ \alpha)(t) = c(\alpha(t))$. Usando a regra da cadeia, calcule $\dot{\gamma}(t)$. Note que o traço de γ está, pelo menos, contido no de c e que o vetor velocidade de γ no ponto $\gamma(t_0) = c(\alpha(t_0))$ é múltiplo do vetor velocidade de c no ponto $c(\alpha(t_0))$. γ é dita uma **reparametrização** de c .



Exercício 2.5 Use o método do exercício anterior para criar exemplos. Note que, se $I =]a, b[$ e $J =]-b, -a[$, com $\alpha : J \rightarrow I$ dada por $\alpha(t) = -t$, então γ será igualzinha a c , mas percorrida no sentido contrário. Note que a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $x(t) = t^3$ e $y(t) = |t|^3$, é uma reparametrização de $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $x(t) = t$ e $y(t) = |t|$. Entenda bem e explique por que $\gamma = c \circ \alpha$ pode ter velocidade em $c(\alpha(t_0))$ sem que c tenha velocidade no mesmo ponto.

Usaremos, às vezes, o termo **trajetória** como sinônimo de **traço**. Uma definição distinguindo trajetórias de traços pode ter como ponto de partida a ideia de que a trajetória é o traço mais um **sentido** de percurso, entendido que o sentido não leva em consideração eventuais diferenças de rapidez. Como matemáticos, somos levados a recorrer a uma relação de equivalência.

Exercício 2.6 Sejam $c_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ & $c_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ dois **movimentos** (isto é: duas curvas parametrizadas, com, pelo menos, derivada segunda). Diremos que c_1 e c_2 descrevem a **mesma trajetória** se existe bijeção $\alpha : J \rightarrow I$, crescente, tal que $c_2(s) = c_1(\alpha(s))$, para todo s em J (atenção: não estamos supondo que α seja derivável - veja exercício logo depois da definição de trajetória). Use a notação $c_1 \cong c_2$ para c_1 e c_2 descrevem a mesma trajetória e prove que descrever a mesma trajetória é uma **relação de equivalência**:

³Trataremos do comprimento de arco mais à frente

1. $c \cong c$, para todo movimento c ;
2. $c_1 \cong c_2 \Rightarrow c_2 \cong c_1$;
3. $c_1 \cong c_2, c_2 \cong c_3 \Rightarrow c_1 \cong c_3$.

Definição: Uma **trajetória** é uma **classe de equivalência** pela relação *ter a mesma trajetória*, acima definida. Mais claramente: se \mathcal{C} é o conjunto de todos os **movimentos** em \mathbb{R}^3 , isto é, \mathcal{C} é o conjunto de todas as curvas parametrizadas $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, com domínio em algum intervalo I (não trivial, mas que pode variar, de curva para curva) e com, pelo menos, derivada segunda, a **trajetória** descrita por c é o conjunto de todos os movimentos que têm a mesma trajetória que c .

Exercício 2.7 Suponha que $c_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ & $c_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ descrevem a mesma trajetória, com $c_2(s) = c_1(\alpha(s))$, para todo s em J . Suponha, também, que $\alpha(s_0) = t_0$, com $\frac{d}{ds}c_2(s_0)$ e $\frac{d}{dt}c_1(t_0)$, ambos, não nulos. Mostre que α tem derivada em s_0 e que $\alpha'(s_0) > 0$.

2.2 Reta tangente

Diremos que a curva parametrizada c , tal que $v = \dot{c}(t_0)$ é não nulo, tem por **reta tangente**, no ponto $P_0 = c(t_0)$, a reta definida por

$$\{P_0 + tv, t \in \mathbb{R}\}.$$

Observação: Em virtude das considerações contidas nos exercícios do final da seção anterior, temos:

1. Se $\gamma = c \circ \alpha$ é uma reparametrização de c tal que $\alpha(s_0) = t_0$ e $\alpha'(s_0) \neq 0$, então o vetor velocidade de γ em s_0 é também não nulo e, como não poderia deixar de ser, obtemos a igualdade entre a reta tangente a γ em $\gamma(s_0)$ e a reta tangente a c em $c(t_0)$.
2. Se $\gamma = c \circ \alpha$ é tal que $\alpha(s_0) = t_0$ e $\alpha'(s_0) = 0$, então o vetor velocidade de γ em s_0 é nulo. Isto não significa que γ não tem tangente em $\gamma(s_0) = c(t_0)$ (na verdade, posto que $\dot{c}(t_0) \neq 0$, podemos afirmar que γ tem tangente em $\gamma(s_0)$). Apenas, olhando só para a parametrização dada por γ , não temos como garantir que tenha.
3. Da mesma forma, como já vimos, se, para um certo t_1 , temos $\dot{c}(t_1) = 0$, não é impossível que, para alguma reparametrização $\gamma = c \circ \alpha$, com $\alpha(s_1) = t_1$, tenhamos $\gamma(s_1) \neq 0$.

Definição: Sejam $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ou $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$) uma curva parametrizada e t_0 um ponto de I . Seja $P_0 = c(t_0)$. Diremos que a reta definida parametricamente por

$$\{P_0 + tv, t \in \mathbb{R}\}$$

é tangente a c em P_0 se existe $\alpha : J \rightarrow I$ diferenciável, com $\alpha(s_0) = t_0$, tal que o vetor velocidade $v = \dot{\gamma}(s_0)$ de $\gamma = c \circ \alpha$ em s_0 é não nulo.

Capítulo 3

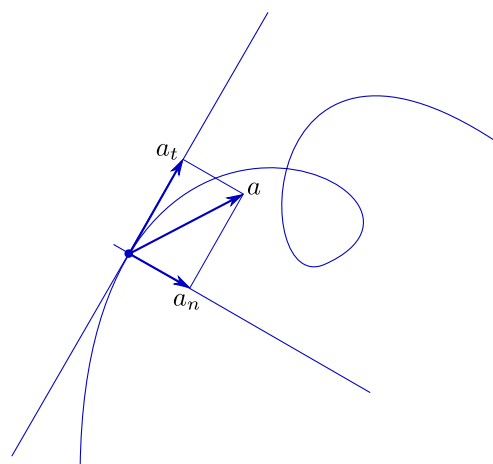
Aceleração

3.1 Definições

A velocidade nos informa se, como e de quanto varia a posição. A **aceleração** nos diz se, como e de quanto varia a a velocidade: é a velocidade da velocidade. Se a curva c é dada por $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$, sua velocidade é a *curva* dada por $\dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$. Assim, se x , y e z são duas vezes deriváveis em t , a **aceleração** de c no tempo t é definida por

$$a(t) = \ddot{c}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)).$$

Assim como o vetor velocidade, o vetor aceleração merece ser analisado, tanto do ponto de vista da Mecânica como do da Geometria. Começamos decompondo a aceleração em **aceleração tangencial** e **aceleração normal**. A aceleração tangencial é a componente de A na direção de v ; a aceleração normal é o que sobra. Para que façam sentido, é preciso que a velocidade v seja não nula. Mais precisamente, definimos a **aceleração tangencial** por



$$a_T(t) = \frac{\langle a(t), v(t) \rangle}{\langle v(t), v(t) \rangle} v(t)$$

e a **aceleração normal** por

$$a_N(t) = a(t) - a_T(t).$$

Exercício 3.1 *Certifique-se de que entendeu. A aceleração tangencial, a_T , foi obtida tomando o unitário $u(t) = |v(t)|^{-1}v(t)$ e fazendo $a_T(t) = \langle a(t), u(t) \rangle u(t)$.*

Exercício 3.2 Seja $u(t) = |v(t)|^{-1}v(t)$. Mostre que

$$a_N(t) = u(t) \otimes (a(t) \otimes u(t)).$$

Entenda geometricamente. Sugestão: comece provando que, se e é um vetor unitário e normal a w , então $w = e \otimes (w \otimes e)$; use, em seguida, o fato de que $a(t) = a_N(t) + a_T(t)$, com $a_T(t) \otimes u(t) = 0$.

Utilizaremos, eventualmente, os termos **aceleração tangencial** (escalar) e **aceleração normal** (escalar) para designar, respectivamente, os números

$$\langle a(t), |v(t)|^{-1}v(t) \rangle \text{ e } |a_N(t)|.$$

Note que a aceleração normal (escalar) será sempre positiva, mas a aceleração tangencial (escalar) terá um sinal, indicando se atua a favor ou contra o movimento.

Exemplo: Consideremos uma partícula em movimento circular. Sendo R o raio do círculo, podemos, fixando um sistema de coordenadas com origem no centro do círculo, descrever o movimento por

$$c(t) = (r \cos \theta(t), R \sin \theta(t)).$$

Se θ é duas vezes derivável, temos

$$v = \dot{c}(t) = (-R\dot{\theta} \sin \theta, R\dot{\theta} \cos \theta)$$

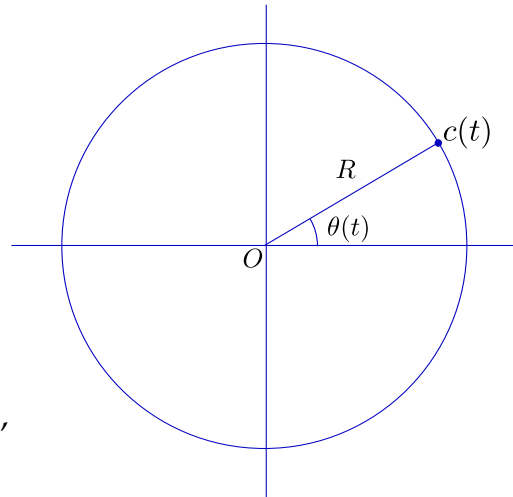
(note que $\langle \dot{c}(t), c(t) \rangle = 0 \forall t$).

Derivando de novo (e, de novo, omitindo t), temos

$$a = \ddot{c}(t) = -R\dot{\theta}^2(\cos \theta, \sin \theta) + R\ddot{\theta}(-\sin \theta, \cos \theta),$$

o que já nos dá, de graça, a decomposição

$$\begin{aligned} a_N(t) &= -R\dot{\theta}^2(\cos \theta, \sin \theta), \\ a_T(t) &= R\ddot{\theta}(-\sin \theta, \cos \theta). \end{aligned}$$



Daí segue, imediatamente, que, em um movimento circular, uniforme ou não, a aceleração normal, a velocidade e o raio do círculo estão relacionados por

$$|a_N(t)| = \frac{v(t)^2}{R} \forall t.$$

Esta relação não decorre de qualquer lei da Física; é uma imposição da Geometria à Mecânica: para que uma partícula descreva um movimento circular é necessário que sua aceleração normal seja, independentemente de qualquer outra consideração, dirigida no sentido do centro do círculo e com norma igual ao quadrado da velocidade escalar dividido pelo raio.

Exercício 3.3 Vale a recíproca? Isto é, se existe um número positivo R tal que

$$|a_N(t)| = \frac{v(t)^2}{R} \quad \forall t,$$

então a curva c anda sobre um círculo de raio R ? Mostre que, com a hipótese de que c é uma curva plana (e que v , claro, não se anula), a resposta é sim. Mostre que, em \mathbb{R}^3 , a resposta é não.

3.2 Significado das acelerações tangencial e normal

Uma boa compreensão do significado das acelerações tangencial e normal passa pela investigação das respostas às seguintes questões, que parecem corresponder à intuição física:

1. Será a aceleração tangencial responsável pela variação da velocidade escalar? Isto é, na ausência de aceleração tangencial, teríamos $|v(t)|$ constante?
2. Será a aceleração normal responsável pela mudança de direção do vetor velocidade? Isto é, na ausência de aceleração normal, seriam os vetores $v(t)$ todos múltiplos de um mesmo vetor, o que significaria movimento retilíneo, mas não necessariamente uniforme?

As respostas às questões acima não envolvem qualquer conhecimento de Física. Trata-se, nem mais nem menos, de dois exercícios.

Exercício 1: Seja c uma curva parametrizada por $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Expresse, em termos das funções x , y e z , (e suas derivadas primeiras e segundas), os vetores $v(t)$, $a(t)$, $a_T(t)$ e $a_N(t)$. Calcule

$$\frac{d}{dt}|v(t)|.$$

Resposta:

$$\frac{d}{dt}|v(t)| = \left\langle a(t), |v(t)|^{-1}v(t) \right\rangle.$$

Exercício 2: Considere um vetor unitário fixo $w = (a_1, a_2, a_3)$. Para medir a variação da direção de v , considere $u(t) = |v(t)|^{-1}v(t)$ e faça $f(t) = \langle u(t), w \rangle = \cos \theta(t)$, sendo $\theta(t)$ o ângulo entre a direção de $v(t)$ e a de w . Calcule

$$\frac{d}{dt}f(t).$$

Resposta:

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{1}{|v(t)|} \langle a_N(t), w \rangle.$$

Assim, a variação da direção do vetor velocidade depende apenas da aceleração normal e da velocidade escalar (questão: o que significa a presença da velocidade escalar no denominador?). Em particular, se o movimento se dá sem aceleração normal, então $\theta(t)$ não varia.

Exercício 3.4 *Você é capaz de concluir, daí, que, se não há aceleração normal, então o movimento é retilíneo? Note que, para falarmos em aceleração tangencial e em aceleração normal, devemos supor que a velocidade não se anula.*

Capítulo 4

Mecânica e Geometria

4.1 Uma imposição da Geometria à Mecânica

Nosso estudo da aceleração normal revelou, no caso de movimento sobre um círculo de raio R , uma relação não muito evidente entre a aceleração normal (a_N) e a velocidade (v):

$$|a_N| = \kappa |v|^2,$$

sendo κ o número dado por

$$\kappa = \frac{1}{R}.$$

Ou seja, existe uma constante, κ , de caráter geométrico (já que só depende das propriedades geométricas do círculo e não de como nos movemos sobre ele) que relaciona, em um movimento circular, a aceleração normal e o quadrado da velocidade.

A experiência física parece indicar a existência de relação do mesmo tipo para qualquer movimento, circular ou não: sabemos que é *mais difícil* fazer uma curva a alta velocidade do que a baixa velocidade; o grau de *dificuldade* é tanto maior quanto *mais fechada* é a curva e, para uma dada curva, aumenta quando a velocidade aumenta. Tentando ser um pouco mais precisos, podemos dizer que o *grau de dificuldade* é dado pelo tamanho (norma) da aceleração normal necessária para podermos fazer a curva (mudar a direção da velocidade).

Trata-se de uma relação entre grandezas físicas, aceleração normal e velocidade, que dependem da forma como a curva está sendo percorrida (ou seja, da parametrização). Para curvas diferentes, essa relação é diferente: uma curva *mais fechada* exige, para uma mesma velocidade, mais aceleração normal do que para uma curva *menos fechada*. Ora, ser mais ou menos *fechada* é uma propriedade geométrica da curva, não da forma como está sendo percorrida.

Sejamos um pouco mais técnicos. Consideremos uma curva parametrizada $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ou, eventualmente, $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$) e estudemos a relação entre a_N e v . Suporemos, é claro, que v não se anula (ficando entendido, também, que as funções envolvidas na parametrização têm, ao menos, duas derivadas). Assim, c é dada por

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

e temos:

$$v(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)),$$

$$a(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)),$$

$$a_T(t) = \frac{\langle a(t), v(t) \rangle}{\langle v(t), v(t) \rangle} v(t),$$

$$a_N(t) = a(t) - a_T(t).$$

Temos ainda que, se

$$u(t) = \frac{1}{|v(t)|} v(t),$$

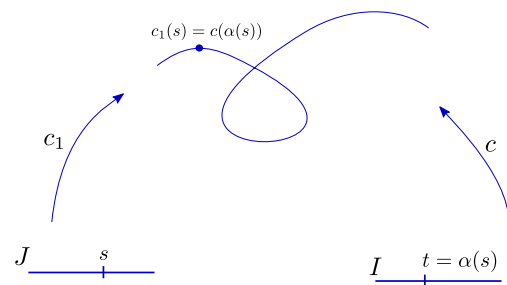
então

$$a_N(t) = u(t) \otimes (a(t) \otimes u(t)).$$

Como queremos investigar se a relação entre a_N e v é, de fato, determinada pela geometria da curva, devemos considerar os efeitos, sobre v e a_N , de mudanças de parametrização.

Consideremos, pois, uma nova parametrização da mesma curva, $c_1 : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ (de forma que o traço de c_1 coincida com o de c). Vamos, na verdade, supor que c_1 é uma **reparametrização** de c . Isto significa que c_1 é dada por

$$c_1(s) = c(\alpha(s)),$$



sendo $\alpha : J \rightarrow I$ uma função duas vezes derivável.¹ Calculando as novas velocidade e aceleração no ponto $c(t) = c(\alpha(s)) = c_1(s)$, teremos, já que

$$c_1(s) = (x(\alpha(s)), y(\alpha(s)), z(\alpha(s))) :$$

¹Esta não é, na verdade, uma restrição: qualquer curva c_1 , de classe C^1 , com $c_1(s_0) = c(t_0)$ e $\dot{c}_1(s_0)$ não nula, é, em uma vizinhança de s_0 , reparametrização de c

$$\begin{aligned}
v_1 &= \dot{c}_1(s) = \\
&= (\dot{x}(\alpha(s))\dot{\alpha}(s), \dot{y}(\alpha(s))\dot{\alpha}(s), \dot{z}(\alpha(s))\dot{\alpha}(s)) = \dot{\alpha}(s)\dot{c}(\alpha(s)) = \\
&= \dot{\alpha}(s)\dot{c}(t) = \dot{\alpha}(s)v; \\
a_1 &= \ddot{c}_1(s) = \\
&= \dot{\alpha}(s)^2 (\ddot{x}(\alpha(s)), \ddot{y}(\alpha(s)), \ddot{z}(\alpha(s))) + \ddot{\alpha}(s) (\dot{x}(\alpha(s)), \dot{y}(\alpha(s)), \dot{z}(\alpha(s))) = \\
&= \dot{\alpha}(s)^2 \ddot{c}(t) + \ddot{\alpha}(s)\dot{c}(t) = \dot{\alpha}(s)^2 a + \ddot{\alpha}(s)v.
\end{aligned}$$

Assim, ao reparametrizarmos c por meio da função α , a velocidade com que passamos pelo ponto $c(t) = c(\alpha(s))$ é multiplicada por $\dot{\alpha}(s)$; já a aceleração sofre um efeito mais complicado: a nova aceleração é a antiga multiplicada por $\dot{\alpha}(s)^2$ mais um termo na direção tangencial ($\ddot{\alpha}(s)v$).

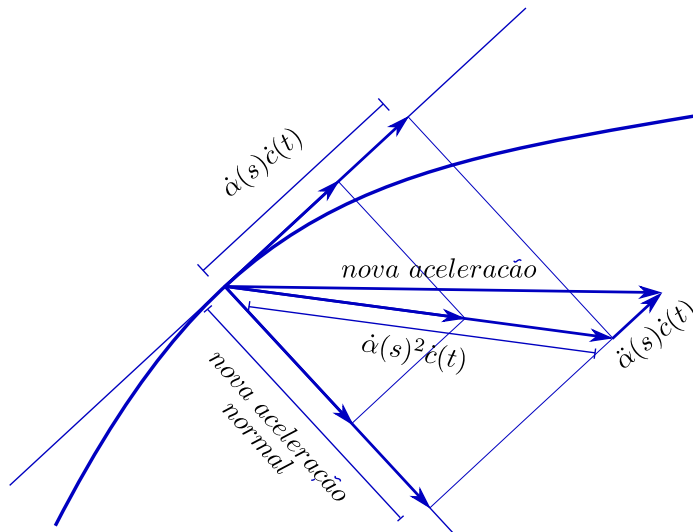


Figura 4.1: variação da aceleração normal

Ora, por ser tangencial, o termo $\ddot{\alpha}(s)v$ não contribui em nada para a aceleração normal.

Exercício 4.1 *Certifique-se de ter entendido esta última afirmação.*

Assim, a nova aceleração normal é a antiga multiplicada por $\dot{\alpha}(s)^2$.

De fato, o cálculo da aceleração tangencial, a_{T1} , referente a c_1 nos dá:

$$\begin{aligned} a_{T1} &= \frac{\langle a_1, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \frac{\langle \dot{\alpha}(s)^2 a, \dot{\alpha}(s)v \rangle}{\langle \dot{\alpha}(s)v, \dot{\alpha}(s)v \rangle} \dot{\alpha}(s)v + \frac{\langle \ddot{\alpha}(s)v, \dot{\alpha}(s)v \rangle}{\langle \dot{\alpha}(s)v, \dot{\alpha}(s)v \rangle} \dot{\alpha}(s)v = \\ &= \dot{\alpha}(s)^2 a_T + \ddot{\alpha}(s)v. \end{aligned}$$

Segue que a aceleração normal, a_{N1} , referente a c_1 é:

$$\begin{aligned} a_{N1} &= a_1 - a_{T1} = (\dot{\alpha}(s)^2 a + \ddot{\alpha}(s)v) - (\dot{\alpha}(s)^2 a_T + \ddot{\alpha}(s)v) = \\ &= \dot{\alpha}(s)^2 (a - a_T) = \dot{\alpha}(s)^2 a_N. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{|v_1|^2} a_{N1} = \frac{1}{|\dot{\alpha}(s)v|^2} \dot{\alpha}(s)^2 a_N = \frac{1}{|v|^2} a_N.$$

Isso significa que, sendo $P = c(t)$, o vetor

$$\vec{\kappa}(P) = \frac{1}{|v(t)|^2} a_N(t)$$

é independente da parametrização da curva.

Trata-se, pois, de uma imposição da Geometria à Mecânica: fixada a curva c e fixado sobre ela um ponto P , existe um vetor,

$$\vec{\kappa}(P),$$

tal que, qualquer que seja o movimento percorrendo c e passando por P com velocidade não nula v , a correspondente aceleração normal é dada por

$$a_N = |v|^2 \vec{\kappa}(P).$$

O vetor $\vec{\kappa}(P)$ é chamado **vetor curvatura** de c em P . A **curvatura** de c em P , $\kappa(P)$, é, simplesmente, a norma de $\vec{\kappa}(P)$. Do ponto de vista de nossa experiência sensorial, é razoável que $\kappa(P)$ seja tão maior quanto mais *fechada* (ou seja, quanto mais *curva*) seja c em P .

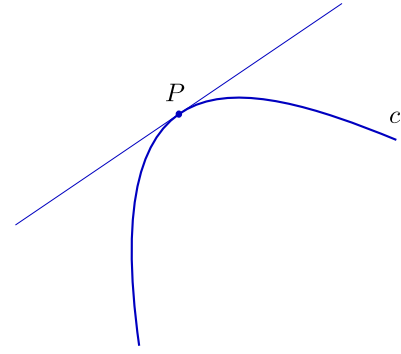
Mais precisamente, provamos o seguinte resultado.

Teorema: Seja $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada duas vezes derivável e seja t_0 um ponto de I tal que $c(t_0) = P$ e $\dot{c}(t_0) \neq \vec{0}$. Se $\alpha : J \rightarrow I$ é uma função duas vezes derivável, com $\alpha(s_0) = t_0$, seja $c_1 : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $c_1(s) = c(\alpha(s))$. Sejam $v, v_1, a, a_1, a_N, a_{N1}$, respectivamente, os vetores velocidade, aceleração e aceleração normal de c em t_0 e de c_1 em s_0 . Então, se $\lambda = \dot{\alpha}(s_0)$, temos

- (i) $v_1 = \lambda v$;
- (ii) $a_{N1} = \lambda^2 a_N$.

Exercício 4.2 *Certifique-se de que entendeu.*

Traduzindo: fixada uma curva c (que pensaremos como um subconjunto do espaço e sem autointerseções nem bicos) e fixado um ponto P_0 de c , estão determinados pela geometria de c (e independem, portanto, da forma como nos movemos sobre c), para qualquer movimento de uma partícula sobre c :



- (i) a direção do vetor velocidade v no ponto P ;
- (ii) a direção e o sentido do vetor aceleração normal a_N em P ;²
- (iii) um número $\kappa(P)$, chamado **curvatura** de c em P , tal que

$$|a_N| = \kappa(P)|v|^2.$$

Exercício 4.3 Mostre que, se c é um círculo de raio R , então, para qualquer P em c , tem-se $\kappa(P) = R^{-1}$.

Exercício 4.4 Note que, mesmo que a curvatura seja não nula, teremos, quando a velocidade em P for nula, aceleração normal em P também nula.

4.2 A curvatura como função quadrática

Pelo que acabamos de ver, a curvatura em P , definida como a intensidade do vetor curvatura em P , nos dá uma certa medida de o quão *curva* é nossa curva em P . Assim, pensando a curva c como um objeto geométrico, independente de parametrização, podemos dizer que a curvatura é uma função que, a cada ponto P de c , associa um número $\kappa(P)$.

Já o vetor $\vec{\kappa}(P)$, serve para que, fixada a curva c , calculemos, em função da velocidade, a aceleração normal necessária para, passando por P , permanecemos sobre c . Ou seja, fixada a curva e fixado o ponto P , temos uma função

$$\kappa_P : v \longmapsto \kappa_P(v),$$

que, a cada vetor v tangente à curva em P , associa a correspondente aceleração normal $\kappa_P(v)$.

É claro, pelo que acabamos de ver, que

$$\kappa_P(v) = |v|^2 \vec{\kappa}(P),$$

mas é possível dar uma fórmula para κ_P sem explicitar o vetor $\vec{\kappa}(P)$. Consideremos uma parametrização qualquer, $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, de nossa curva, com $c(t_0) = P$ e $\dot{c}(t_0) \neq \vec{0}$. Temos, então, que nossa aceleração normal, $a_N(t_0)$, será dada por

²a menos que a aceleração normal em P seja, sempre, nula

$$a_N(t_0) = u(t_0) \otimes (\ddot{c}(t_0) \otimes u(t_0)),$$

sendo

$$u(t_0) = \frac{1}{|\dot{c}(t_0)|} \dot{c}(t_0).$$

Isto corresponde a dizer que, se $\dot{c}(t_0) = v$, então a correspondente aceleração normal é

$$k_P(v) = v \otimes (w \otimes v),$$

com

$$w = \frac{1}{|\dot{c}(t_0)|^2} \ddot{c}(t_0).$$

Ora, pelo que aprendemos sobre κ_P , sabemos que, se $v_1 = \lambda v$ é o vetor tangente em P que corresponde a outra parametrização, então

$$\kappa_P(v_1) = \lambda^2 \kappa_P(v) = \lambda^2 v \otimes (w \otimes v) = (\lambda v) \otimes (w \otimes (\lambda v)) = v_1 \otimes (w \otimes v_1).$$

Capítulo 5

Regras de Cálculo

Talvez valha a pena fazermos uma pequena digressão. Estamos trabalhando com derivadas de objetos, e não apenas números, que variam com o tempo. Tais objetos são, basicamente, pontos em \mathbb{R}^3 (que, como sabemos, podem ser vistos como vetores, ou como ternos ordenados). Mas nada impede que consideremos, também, transformações (lineares, geralmente, dadas por matrizes) que variam com o tempo. Nossos objetos podem ser somados e estão sujeitos a diferentes tipos de multiplicação: produto por escalar, produto escalar, produto vetorial, produto de matriz por vetor, produto de matrizes, produto de quatérnions...operações definidas via coordenadas. Nossas velocidades e acelerações, portanto, são calculadas por meio das coordenadas, o que leva a contas enormes.

Vamos, neste capítulo, estabelecer algumas regras, análogas às que vigem no caso de funções a valores reais, para as derivadas envolvendo operações com nossas funções vetoriais. Algumas delas já apareceram quando definimos velocidade, mas não custa nada voltar ao assunto em um espaço exclusivo. Vamos enunciar e provar nossos resultados em \mathbb{R}^3 , mas é claro que os resultados análogos valem, quando couber, em \mathbb{R}^2 , com as mesmas demonstrações. As mesmas demonstrações valem também, sem problemas, em \mathbb{R}^n , para $n > 3$, em todos os casos que não envolvem o produto vetorial.

5.1 Desigualdades

Vamos utilizar algumas desigualdades básicas, que consideraremos provadas a partir de propriedades geométricas (supostamente evidentes).

1. A **desigualdade triangular**:

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^3.$$

2. A **desigualdade de Cauchy-Schwarz-Buniacóvski**:

$$|\langle a, b \rangle| \leq |a||b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^3.$$

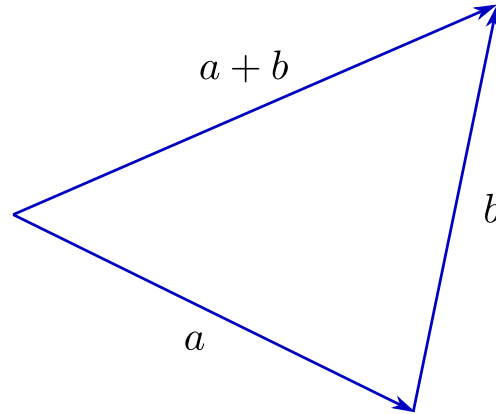


Figura 5.1: desigualdade triangular

A maneira *ingênua* de provar esta desigualdade, no contexto \mathbb{R}^3 , é partir de $\langle a, b \rangle = |a||b| \cos \theta$, sendo θ o ângulo entre a e b , e usar $|\cos \theta| \leq 1$. Mas CSB é mais do que isso; vale em qualquer espaço vetorial com produto interno.

3. A desigualdade do produto vetorial:

$$|a \otimes b| \leq |a||b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^3.$$

Aqui, também, admitindo que vale, "geometricamente", $|a \otimes b| = |a||b| \sin \theta$, o resultado segue de $|\sin \theta| \leq 1$.

Exercício 5.1 Demonstre as desigualdades CSB e do produto vetorial a partir das definições: se $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$, então

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3; \quad a \otimes b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Sugestão: mostre, primeiro, que

$$|\langle a, b \rangle|^2 + |a \otimes b|^2 = |a|^2 |b|^2.$$

Exercício 5.2 Use CSB para demonstrar a desigualdade triangular.

Sugestão: faça $|a + b|^2 = \langle a + b, a + b \rangle$.

Exercício 5.3 Se você já trabalhou com a noção geral de espaço vetorial com produto interno, demonstre, usando apenas as propriedades básicas do produto interno, a desigualdade CSB. Note que, neste caso, o exercício anterior permite demonstrar a desigualdade triangular sem recorrer a argumentos geométricos.

5.2 Limites

Definição: Sejam I um intervalo não trivial em \mathbb{R} , t_0 um elemento de I e $u : I \setminus \{t_0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função vetorial. Diremos que o vetor u_0 é o **limite**, quando t tende a t_0 , de u , com a notação

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = u_0,$$

se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |u(t) - u_0| = 0.$$

Se u está definida em t_0 e $u(t_0) = u_0$, diremos que u é **contínua** em t_0 .

Proposição: Sejam I um intervalo não trivial em \mathbb{R} , $u : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função vetorial, dada por $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$, t_0 um elemento de I e $u_0 = (a_1, a_2, a_3)$ um elemento de \mathbb{R}^3 . Então u_0 é o limite, quando t tende a t_0 , de u se, e somente se,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u_1(t) = a_1, \lim_{t \rightarrow t_0} u_2(t) = a_2 \text{ e } \lim_{t \rightarrow t_0} u_3(t) = a_3.$$

Demonstração: O resultado segue, aplicando resultados básicos sobre limites de funções reais, de

$$|u_i(t) - a_i|^2 \leq |u(t) - u_0|^2 = (u_1(t) - a_1)^2 + (u_2(t) - a_2)^2 + (u_3(t) - a_3)^2, \forall i = 1, 2, 3.$$

■

O resultado acima nos traz de volta à ideia, mais simples, de que podemos trabalhar com coordenadas. A definição sem referência direta às coordenadas tem uma certa elegância, mas a razão de lhe termos dado preferência é que, no caso de espaços de dimensão infinita, trabalhar com coordenadas pode ser problemático.

Uma outra situação interessante é a de uma transformação linear que varia com o tempo. Usar coordenadas, neste caso, significa passar da transformação à matriz que a representa.

Definição: Sejam I um intervalo não trivial em \mathbb{R} , t_0 um elemento de I e $(a_{ij}) : I \setminus \{t_0\} \rightarrow M_{m \times n}$ uma função que, a cada t , associa a matriz $m \times n$ $(a_{ij}(t))$. Diremos que a matriz (α_{ij}) é o **limite**, quando t tende a t_0 , de $(a_{ij}(t))$, com a notação

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (a_{ij})(t) = (\alpha_{ij}),$$

se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} a_{ij}(t) = \alpha_{ij} \forall (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}.$$

Se (a_{ij}) estiver definida em t_0 e $(a_{ij})(t_0) = (\alpha_{ij})$, então (a_{ij}) é dita **contínua** em t_0 .

Lema: Se $u : I \setminus \{t_0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $v : I \setminus \{t_0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha : I \setminus \{t_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $(a_{ij}) : I \setminus \{t_0\} \rightarrow M_{m \times n}$ são tais que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = u_0, \lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = v_0, \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \alpha_0, \lim_{t \rightarrow t_0} (a_{ij})(t) = (\alpha_{ij}),$$

então:

$$(i) \lim_{t \rightarrow t_0} (\alpha(t)u(t) + v(t)) = \alpha_0 u_0 + v_0;$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow t_0} \langle u(t), v(t) \rangle = \langle u_0, v_0 \rangle;$$

$$(iii) \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) \otimes v(t) = u_0 \otimes v_0;$$

$$(iv) \lim_{t \rightarrow t_0} (a_{ij})(t)u(t) = (\alpha_{ij})u_0.$$

Demonstração: Fazendo $t = t_0 + \Delta t$, $u = u(t) = u_0 + \Delta u$, $v = v(t) = v_0 + \Delta v$, $\alpha = \alpha(t) = \alpha_0 + \Delta \alpha$, temos:

$$(i) (|\alpha(t)u(t) + v(t) - (\alpha_0 u_0 + v_0)| = |\Delta \alpha u_0 + \alpha \Delta u + \Delta v + \Delta \alpha \Delta u| \leq |\Delta \alpha| |u_0| + |\alpha| |\Delta u| + |\Delta v| + |\Delta \alpha| |\Delta u|, \text{ e todas as parcelas tendem a zero;}$$

$$(ii) |\langle u(t), v(t) \rangle - \langle u_0, v_0 \rangle| = |\langle \Delta u, v_0 \rangle + \langle u_0, \Delta v \rangle + \langle \Delta u, \Delta v \rangle| \leq |\Delta u| |v_0| + |u_0| |\Delta v| + |\Delta u| |\Delta v|, \text{ e todas as parcelas tendem a zero;}$$

$$(iii) |u(t) \otimes v(t) - u_0 \otimes v_0| = |\Delta u \otimes v_0 + u_0 \otimes \Delta v + \Delta u \otimes \Delta v| \leq |\Delta u| |v_0| + |u_0| |\Delta v| + |\Delta u| |\Delta v|, \text{ idem;}$$

(iv) cada entrada de $(a_{ij})(t)u(t)$ é o produto escalar de uma linha de $(a_{ij})(t)$ por $u(t)$; logo, o resultado segue de (ii). ■

Exercício 5.4 Note que (i) (com $v(t) \equiv 0$), (ii), (iii) e (iv), no fundo, dizem a mesma coisa e, é claro, têm, no fundo, a mesma demonstração.

5.3 Derivadas

Definição: Seja I um intervalo não trivial de \mathbb{R} . Uma função $u : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita **derivável** no ponto t_0 de I se existe

$$\dot{u}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (u(t) - u(t_0)).$$

Exercício 5.5 Mostre que $\dot{u}(t_0)$ é derivada de u em t_0 se, e somente se, podemos escrever, para $\Delta t = t - t_0$, $t \in I$,

$$u(t_0 + \Delta t) = u(t_0) + \Delta t \dot{u}(t_0) + \Delta t \epsilon(\Delta t),$$

com

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \epsilon(\Delta t) = 0.$$

Sugestão: faça $\epsilon(0) = 0$ e, para $\Delta t \neq 0$,

$$\epsilon(\Delta t) = \frac{1}{\Delta t}(u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)) - \dot{u}(t_0).$$

Exercício 5.6 Mostre que $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ é derivável em t_0 se, e somente se, são deriváveis em t_0 as funções coordenadas e que, neste caso,

$$\dot{u}(t_0) = (\dot{u}_1(t_0), \dot{u}_2(t_0), \dot{u}_3(t_0)).$$

Definição: Uma função matricial $(a_{ij}) : I \rightarrow M_{m \times n}$ tem derivada $(\dot{a}_{ij}(t_0))$ em $t_0 \in I$ se cada a_{ij} tiver, em t_0 , derivada igual a $\dot{a}_{ij}(t_0)$.

Proposição: Consideremos intervalos não triviais I, J em \mathbb{R} , t_0 ponto de I , s_0 ponto de J e funções,

$$u : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad v : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (a_{ij}) : I \rightarrow M_{m \times n}$$

$$\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha : J \rightarrow I,$$

com $u, v, (a_{ij})$ e λ deriváveis em t_0 , α derivável em s_0 e $\alpha(s_0) = t_0$. Então $u, v, (a_{ij})$ e λ são contínuas em t_0 e:

$$(i) \frac{d}{dt}(u + v)(t_0) = \dot{u}(t_0) + \dot{v}(t_0)$$

$$(ii) \frac{d}{dt}(\lambda u)(t_0) = \dot{\lambda}(t_0)u(t_0) + \lambda(t_0)\dot{u}(t_0)$$

$$(iii) \frac{d}{dt} \langle u, v \rangle (t_0) = \langle \dot{u}(t_0), v(t_0) \rangle + \langle u(t_0), \dot{v}(t_0) \rangle$$

$$(iv) \frac{d}{dt}(u \otimes v)(t_0) = \dot{u}(t_0) \otimes v(t_0) + u(t_0) \otimes \dot{v}(t_0)$$

$$(v) \frac{d}{dt}((a_{ij})u)(t_0) = (\dot{a}_{ij})(t_0)u(t_0) + (a_{ij})(t_0)\dot{u}(t_0)$$

$$(vi) \lambda(t_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\frac{1}{\lambda}u)(t_0) = \frac{1}{\lambda(t_0)^2}(\lambda(t_0)\dot{u}(t_0) - \dot{\lambda}(t_0)u(t_0))$$

$$(vii) \frac{d}{dt}(u \circ \alpha)(s_0) = \alpha'(s_0)\dot{u}(t_0)$$

$$(viii) v(t_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}|v|(t_0) = \frac{\langle v(t_0), \dot{v}(t_0) \rangle}{|v|}$$

Demonstração: A continuidade de u (e, analogamente, a de v) vem de

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta u| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta t| \left| \frac{1}{\Delta t} \Delta u \right| = 0 |\dot{u}(t_0)| = 0.$$

A continuidade de λ é análoga; a de (a_{ij}) é tratada coordenada a coordenada.

Quanto às regras de derivação, (i) é trivial, (vi) segue de (ii), (v) segue de (iii); (ii), (iii) e (iv) têm, essencialmente, a mesma demonstração. Provemos (iv), chamando $u(t_0)$ de u_0 e $u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$ de Δu , o mesmo para v :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u \otimes v)(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [(u_0 + \Delta u) \otimes (v_0 + \Delta v) - u_0 \otimes v_0] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [u_0 \otimes \Delta v + \Delta u \otimes v_0 + \Delta u \otimes \Delta v] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [u_0 \otimes \frac{1}{\Delta t} \Delta v + \frac{1}{\Delta t} \Delta u \otimes v_0 + \Delta u \otimes \frac{1}{\Delta t} \Delta v] = \\ &= u(t_0) \otimes \dot{v}(t_0) + \dot{u}(t_0)v(t_0) + 0 \otimes \dot{v}(t_0) = u(t_0) \otimes \dot{v}(t_0) + \dot{u}(t_0)v(t_0). \end{aligned}$$

Resta demonstrar (vii), já que (viii) segue de (iii), fazendo $|v| = \langle v, v \rangle^{1/2}$. Para provar (vii), note que

$$u(t_0 + \Delta t) - u(t_0) = \Delta t \dot{u}(t_0) + \Delta t \epsilon(\Delta t),$$

com $\epsilon(0) = 0$ e, para $\Delta t \neq 0$,

$$\epsilon(\Delta t) = \frac{1}{\Delta t} (u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)) - \dot{u}(t_0).$$

Temos, então, fazendo $\Delta t = \alpha(s_0 + \Delta s) - t_0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta s} (u(\alpha(s_0 + \Delta s)) - u(\alpha(s_0))) &= \frac{1}{\Delta s} (u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)) = \\ \frac{1}{\Delta s} (\Delta t \dot{u}(t_0) + \Delta t \epsilon(\Delta t)) &= \left(\frac{\Delta t}{\Delta s} \dot{u}(t_0) + \frac{\Delta t}{\Delta s} \epsilon(\Delta t) \right). \end{aligned}$$

Passando ao limite, obtemos:

$$\frac{d}{ds} u \circ \alpha(s_0) = \alpha'(s_0) \dot{u}(t_0) + \alpha'(s_0) 0 = \alpha'(s_0) \dot{u}(t_0).$$

■

Exercício 5.7 Mostre que, se $u, v, w : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ são deriváveis em t_0 , então $d : I \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $d(t) = \det(u(t), v(t), w(t))$, é derivável em t_0 e

$$d'(t_0) = \det(\dot{u}(t_0), v(t_0), w(t_0)) + \det(u(t_0), \dot{v}(t_0), w(t_0)) + \det(u(t_0), v(t_0), \dot{w}(t_0)).$$

Sugestão: faça $\det(u(t), v(t), w(t)) = \langle u(t), v(t) \otimes w(t) \rangle$.

5.4 A exponencial complexa

Esta seção é dedicada à generalização da função exponencial para os números complexos. Mais que uma simples curiosidade, trata-se de conhecimento *útil*: teremos a oportunidade de lançar mão da exponencial complexa em problemas absolutamente concretos.

Começemos recordando as expressões das séries de Taylor para as funções e^x , $\cos x$ e $\sin x$, com x real:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!};$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!};$$

Se, por falta do que fazer, nos distrairmos substituindo o número imaginário $i\theta$ como variável na exponencial e acreditarmos que vale a troca na ordem da soma infinita resultante, chegamos à curiosa identidade

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Exercício 5.8 *Aproveite para, fazendo $\theta = \pi$, obter a famosa fórmula*

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

que estabelece mágica relação entre o 1 da Aritmética, o π da Geometria, o i da Álgebra e o e da Análise.

Continuando nossa fantasia, suponhamos que, para um número complexo qualquer, $x + iy$, deva valer a relação

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

Teremos, então,

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Definição: Sejam x e y dois números reais. A **exponencial**¹ do número complexo $x + iy$ é o número complexo

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

¹A definição $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ é, certamente, mais honesta e mais elegante. Optamos, com tristeza, pela mais barata, para chegarmos rapidamente aos resultados que nos serão úteis mais à frente

Mais precisamente, a **função exponencial complexa** é definida, usando a expressão acima, para $z = x + iy$, por

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^z = e^x(\cos y + i \sin y). \end{aligned}$$

Note que, se pensarmos um real como número complexo, a nova definição coincide com a antiga. Os dois exercícios a seguir são cruciais.

Exercício 5.9 Sejam $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ dois números complexos. Mostre que

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Exercício 5.10 Seja $z_0 = a + bi$ um número complexo fixo. Considere a função $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, dada por

$$c(t) = e^{tz_0} = e^{at+ibt} = e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)).$$

Mostre que

$$\dot{c}(t) = z_0 c(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ou seja:

$$\frac{d}{dt} e^{tz_0} = z_0 e^{tz_0}.$$

Depois dessa pequena viagem, podemos nos dar conta de que funções de variável real, mas a valores complexos, podem ser pensadas como curvas planas. Esta forma de pensar tem a vantagem de incorporar a riqueza das operações algébricas em \mathbb{C} . Alternativamente, podemos pensar curvas planas como funções de variável real a valores em \mathbb{C} , e incorporar a estas curvas as operações de multiplicação e, quando couber, de divisão entre números complexos. Mais claramente, suponhamos que as curvas planas $u : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $v : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ sejam dadas por $u(t) = (x_1(t), y_1(t))$, $v(t) = (x_2(t), y_2(t))$. Podemos, então, definir as curvas uv e u/v (esta última apenas para os valores de t para os quais $v(t) \neq (0,0)$) por

$$(uv)(t) = (x_1(t)x_2(t) - y_1(t)y_2(t), x_1(t)y_2(t) + x_2(t)y_1(t)),$$

$$\frac{u}{v}(t) = \frac{1}{x_2(t)^2 + y_2(t)^2} (x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t), x_2(t)y_1(t) - x_1(t)y_2(t)).$$

Exercício 5.11 Reveja as definições acima pensando em termos de $u(t) = x_1(t) + iy_1(t)$ e $v(t) = x_2(t) + iy_2(t)$

Observação: Note que as expressões para uv e para u/v são obtidas por meio de somas, diferenças, produtos e divisões entre as funções coordenadas de u e v . Desta forma, é imediato que, se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = (a_1, b_1), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = (a_2, b_2),$$

então

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (uv)(t) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{u}{v}(t) = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2} (a_1 a_2 + b_1 b_2, a_2 b_1 - a_1 b_2),$$

a última asserção valendo, com as reservas de costume, apenas se $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$.

É bem mais simples, claro, pensar o tempo todo em termos de números complexos (afinal \mathbb{R}^2 e \mathbb{C} são o mesmo conjunto!) e reescrever: suponhamos que $u_0 = a_1 + ib_1$ e $v_0 = a_2 + ib_2$; então, se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = v_0,$$

temos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (uv)(t) = u_0 v_0,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{u}{v}(t) = \frac{u_0}{v_0},$$

a última asserção valendo, com as reservas de costume, apenas se $v_0 \neq 0$.

As regras de derivação guardam, também, as parecenças naturais com as de funções a valores reais.

Proposição: Sejam I um intervalo não trivial em \mathbb{R} , $u, v : I \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ funções deriváveis no ponto t_0 de I . Então uv é derivável em t_0 e

$$\frac{d}{dt}(uv)(t_0) = \dot{u}(t_0)v(t_0) + u(t_0)\dot{v}(t_0).$$

Se $v(t_0) \neq 0$, então existe um intervalo J , contido em I e contendo t_0 , tal que u/v está definida em J , é derivável em t_0 e

$$\frac{d}{dt} \frac{u}{v}(t_0) = \frac{v(t_0)\dot{u}(t_0) - u(t_0)\dot{v}(t_0)}{v(t_0)^2}.$$

Demonstração: Tomando Δt tal que $t_0 + \Delta t$ esteja em I e chamando $u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$ de Δu , $v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)$ de Δv , temos

$$\frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta t} = \frac{u\Delta v}{\Delta t} + \frac{v\Delta u}{\Delta t} + \frac{\Delta u\Delta v}{\Delta t},$$

e a conclusão segue do resultado sobre limite do produto.

Se $v(t_0) \neq 0$, podemos, já que a derivabilidade de v implica em sua continuidade, tomar um intervalo J , contido em I e contendo t_0 , tal que, para t em J , vale $|v(t) - v(t_0)| < |v(t_0)|/2$, o que é suficiente para garantir que v não se anula em J . Temos, então, exatamente como no caso de funções a valores reais,

$$\frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta t} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta t(v + \Delta v)v} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta t} - u\frac{\Delta v}{\Delta t}}{v(v + \Delta v)},$$

e daí segue a segunda parte do resultado. ■

Exercício 5.12 Seja $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ um polinômio a coeficientes complexos. Defina p' por $p'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_1$. Sejam z_0 um número complexo fixo e c a curva plana dada, para t em \mathbf{R} , por $c(t) = p(tz_0)$. Mostre que $\dot{c}(t) = z_0 p'(tz_0)$, $\forall t \in \mathbf{R}$.

Exercício 5.13 Continue com p e p' como acima. Considere $u : I \rightarrow \mathbb{C}$ derivável no ponto t_0 de I . Mostre que $c : I \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $c(t) = p(u(t))$, é derivável em t_0 e que

$$\dot{c}(t_0) = p'(u(t_0))\dot{u}(t_0).$$

Sugestão: comece com o caso $c(t) = (u(t))^n$.

5.5 Voltando à derivada do produto

Já destacamos que diversas regras de derivação, envolvendo diferentes *produtos*, se deduzem da mesma forma e dizem, essencialmente, a mesma coisa. Procuremos estabelecer um regra um pouco mais geral, que englobe os diversos casos que já tratamos e mais alguns outros. Vamos nos colocar em um contexto mais geral.

Definição: Seja E um espaço vetorial real. Uma **norma** em E é uma aplicação

$$\begin{aligned} || : E &\longrightarrow \mathbf{R}, \\ v &\longmapsto |v| \end{aligned}$$

tal que:

- (i) $|v| \geq 0 \forall v \in E$;
- (ii) $|tv| = |t||v| \forall v \in E, \forall t \in \mathbf{R}$;
- (iii) $|u + v| \leq |u| + |v| \forall u, v \in E$ (desigualdade triangular);
- (iv) $|v| = 0 \Rightarrow v = 0$.

Um espaço vetorial munido de uma norma é dito um **espaço vetorial normado**.

Exemplos:

1. Se E tem produto interno, $|v| = \langle v, v \rangle^{1/2}$ define uma norma (note que a desigualdade triangular segue da de Cauchy-Schwarz-Buniacóvski). Exercício: reveja CSB, no caso geral.

2. Suponha que E_1, \dots, E_n são espaços vetoriais normados, com normas dadas, respectivamente, por $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_n$. Então o espaço vetorial $E = E_1 \times \dots \times E_n$ (com as operações naturais) é normado, com qualquer uma das normas:

$$(i) \|(v_1, \dots, v_n)\|_1 = |v_1|_1 + \dots + |v_n|_n;$$

$$(ii) \|(v_1, \dots, v_n)\|_2 = \sqrt{|v_1|_1^2 + \dots + |v_n|_n^2};$$

$$(iii) \|(v_1, \dots, v_n)\|_\infty = \max \{|v_1|_1, \dots, |v_n|_n\}.$$

Exercício 5.14 Mostre que as três normas apresentadas no exemplo 2 são, de fato, normas.

Exercício 5.15 Note que, para qualquer v em E , temos

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq n\|v\|_\infty.$$

Definição: Sejam E um espaço vetorial normado, I um intervalo não trivial em \mathbf{R} , t_0 um ponto de I e v um função a valores em E , definida em todos os pontos de I , exceto possivelmente em t_0 . Diremos que o **limite**, quando t tende a t_0 , de v é o elemento v_0 de E , com notação

$$\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = v_0,$$

quando

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |v(t) - v_0| = 0.$$

Diremos que $v : I \rightarrow E$ é **contínua** em t_0 se v está definida em t_0 e

$$\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = v(t_0).$$

Exemplo: Considere os espaços $E_1 = M_{m_1 \times n_1}, \dots, E_k = M_{m_k \times n_k}$. $M_{m_i \times n_i}$ é o espaço vetorial das matrizes reais m_i por n_i , com a norma

$$|(a_{\alpha\beta})|_i = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{\beta=1}^{n_i} a_{\alpha\beta}^2}.$$

Note que isto equivale a ver $M_{m_i \times n_i}$ como $\mathbf{R}^{m_i \times n_i}$. Suponha que tenhamos k funções contínuas, com valores matriciais,

$$A_i : I \longrightarrow E_i, \quad i = 1, \dots, k$$

e que, para cada $i = 1, \dots, k-1$, valha $n_i = m_{i+1}$. Seja $E = E_1 \times \dots \times E_k$, com qualquer uma das três normas propostas no exemplo 2 acima. Então a aplicação $A : I \rightarrow E$, dada por $A(t) = (A_1(t), \dots, A_k(t))$, é contínua (é fácil provar, se usarmos a norma $\| \cdot \|_2$). Mais interessante é observar que a função, a valores matriciais,

$$\begin{aligned} P : I &\longrightarrow M_{m_1 \times n_k}, \\ t &\longmapsto P(t) = A_1(t)A_2(t) \cdots A_k(t) \end{aligned}$$

também é contínua. De fato, não é difícil ver que, nossas funções matriciais são contínuas se, e somente se, as funções correspondentes às entradas da matriz são contínuas.

Exercício 5.16 Note que, tratando nossos espaços de matrizes $M_{m \times n}$ como \mathbf{R}^{mn} , isto é o mesmo que dizer que as funções correspondentes às coordenadas são contínuas.

Ora, as coordenadas de $P(t)$ têm que ser contínuas, já que são somas de produtos de coordenadas das A_i .

Definição: Se E é um espaço vetorial normado e I é um intervalo não trivial em \mathbf{R} , uma função $u : I \rightarrow E$ é dita **derivável** no ponto t_0 de I , com derivada $\dot{u}(t_0)$, se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{1}{t - t_0} (u(t) - u(t_0)) - \dot{u}(t_0) \right| = 0.$$

Exercício 5.17 Seja $E = M_{m \times n}$ um espaço de matrizes como os que utilizamos acima. Seja

$$\begin{aligned} A : I &\longrightarrow M_{m \times n}. \\ t &\longmapsto A(t) = (a_{ij}(t)) \end{aligned}$$

Mostre que A é derivável em t_0 se, e somente se, cada uma das a_{ij} é derivável em t_0 .

Exercício 5.18 Mostre que, se $u : I \rightarrow E$ é derivável em t_0 , então u é contínua em t_0 .

Vejamos, agora, uma generalização da ideia de produto.

Definição: Se E_1, \dots, E_k são espaços vetoriais, uma aplicação $P : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow E$ é dita **k -linear** se, para quaisquer u_1 em E_1, \dots, u_k em E_k, v_i em E_i, λ em \mathbf{R} , temos

$$P(u_1, \dots, u_i + \lambda v_i, \dots, u_k) = P(u_1, \dots, u_i, \dots, u_k) + \lambda P(u_1, \dots, v_i, \dots, u_k).$$

Como estamos evitando falar em limites para funções outras que as de variável real, adotaremos a definição de continuidade a seguir.

Definição: Se E, E_1, \dots, E_k são espaços vetoriais normados, e $P : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow E$ é uma aplicação k -linear, P será dita **contínua** em (x_1, \dots, x_k) se, para qualquer intervalo I não trivial em \mathbf{R} e para quaisquer $u_1 : I \rightarrow E_1, \dots, u_k : I \rightarrow E_k$, contínuas em t_0 e tais

que $(u_1(t_0), \dots, u_k(t_0)) = (x_1, \dots, x_k)$, for contínua em t_0 a aplicação $u : I \rightarrow E$ dada por

$$u(t) = P(u_1(t), \dots, u_k(t)).$$

Diremos que P é **contínua**, se for contínua em todos os pontos de $E_1 \times \dots \times E_k$.

Exemplo 1: Se E_1 é o espaço das matrizes reais $m \times n$, $E_2 = \mathbb{R}^n$ e $E = \mathbb{R}^m$, então $P : E_1 \times E_2 \rightarrow E$, dada por $P(A, v) = Av$, é **bilinear** (ou seja, 2-linear) e contínua. Para provar, note que cada coordenada de Av é soma de produtos de coordenadas de A por coordenadas de v .

Exemplo 2: Considere os espaços $E_1 = M_{m_1 \times n_1}, \dots, E_k = M_{m_k \times n_k}$, sendo $M_{m_i \times n_i}$ o espaço vetorial das matrizes reais m_i por n_i , com a norma

$$|(a_{\alpha\beta})|_i = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{\beta=1}^{n_i} a_{\alpha\beta}^2}.$$

O produto de matrizes (supondo que, para cada $i = 1, \dots, k-1$, valha $n_i = m_{i+1}$), dado por

$$\begin{aligned} P : E_1, \dots, E_k &\longrightarrow M_{m_1 \times n_k}, \\ (A_1, \dots, A_k) &\longmapsto A_1 \cdots A_k \end{aligned}$$

é uma aplicação k -linear contínua.

Exercício 5.19 Sejam E, E_1, \dots, E_k são espaços vetoriais normados, e $P : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow E$ uma aplicação k -linear. Suponha que existe uma constante C , tal que

$$|P(v_1, \dots, v_k)| \leq C|v_1| \cdots |v_k|, \quad \forall v_1 \in E_1, \dots, v_k \in E_k.$$

Mostre que P é contínua. Conclua que os produtos, por escalar, escalar e vetorial são aplicações bilineares contínuas.

Exercício 5.20 Mostre que o determinante, em \mathbb{R}^n , como função que a cada n vetores associa o volume com sinal do paralelepípedo por eles formado, é n -linear e contínua.

Proposição: Sejam E, E_1, \dots, E_k espaços vetoriais normados, I um intervalo real não trivial e $u_i : I \rightarrow E_i$ funções deriváveis no ponto t_0 de I . Se $P : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow E$ é uma aplicação k -linear contínua, então a aplicação

$$u : t \longmapsto u(t) = P(u_1(t), \dots, u_k(t))$$

é derivável em t_0 e

$$\begin{aligned} \dot{u}(t_0) &= P(\dot{u}_1(t_0), u_2(t_0), \dots, u_k(t_0)) + P(u_1(t_0), \dot{u}_2(t_0), \dots, u_k(t_0)) + \\ &\quad + \dots + P(u_1(t_0), \dots, \dot{u}_i(t_0), \dots, u_k(t_0)) + \dots + \\ &\quad + P(u_1(t_0), \dots, \dot{u}_{k-1}(t_0), u_k(t_0)) + P(u_1(t_0), \dots, u_{k-1}(t_0), \dot{u}_k(t_0)). \end{aligned}$$

Demonstração: Seja Δt tal que $t_0 + \Delta t \in I$. Chamaremos, como de hábito, $u_i(t_0)$ de u_i e $u_i(t_0 + \Delta t) - u_i(t_0)$ de Δu_i . Temos, então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)) &= \frac{1}{\Delta t} [P(u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2, \dots, u_k + \Delta u_k) - P(u_1, u_2 + \dots, u_k)] = \\ &= P\left(\frac{1}{\Delta t}\Delta u_1, u_2, \dots, u_k\right) + \dots + P\left(u_1, \dots, \frac{1}{\Delta t}\Delta u_i, \dots, u_k\right) + \dots + P\left(u_1, \dots, u_{k-1}, \frac{1}{\Delta t}\Delta u_k\right) + \\ &+ \frac{1}{\Delta t}r(\Delta t). \end{aligned}$$

O termo $r(\Delta t)$ é uma soma de parcelas do tipo $P(v_1, \dots, v_k)$, sendo pelo menos dois dos termos v_j da forma Δu_j e, os demais, da forma u_i . Por exemplo:

$$\frac{1}{\Delta t}P(\Delta u_1, \Delta u_2, u_3, \dots, u_k) = P\left(\frac{1}{\Delta t}\Delta u_1, \Delta u_2, u_3, \dots, u_k\right).$$

Neste caso, temos u_3, \dots, u_k fixos, Δu_2 tendendo a zero e $\frac{1}{\Delta t}\Delta u_1$ tendendo a $\dot{u}_1(t_0)$. Logo,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t}P(\Delta u_1, \Delta u_2, u_3, \dots, u_k) = P(\dot{u}_1(t_0), 0, u_3, \dots, u_k) = 0.$$

O mesmo raciocínio se aplica a todas as outras parcelas, de forma que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t}r(\Delta t) = 0.$$

Sobram as parcelas do tipo

$$P\left(u_1, \dots, \frac{1}{\Delta t}\Delta u_i, \dots, u_k\right),$$

que tendem a $P(u_1, \dots, \dot{u}_i(t_0), \dots, u_k)$. ■

Capítulo 6

Leis de Newton

6.1 As leis

O século XVII é o tempo de uma verdadeira revolução na Matemática. Uma série de fatores vai levar à incorporação, aos métodos de cálculo, de uma nova operação: a passagem ao limite. Paralelamente, ocorre um esforço para a formulação de leis que expliquem o movimento dos corpos. As contribuições de vários homens concorrem para a elaboração de um novo corpo de ideias matemáticas e para o lançamento das bases do que hoje entendemos como Física. A derivada, a integral, as séries infinitas e as chamadas Leis de Newton, originárias daquele tempo, são as ferramentas básicas, ainda hoje, para boa parte do que conseguimos fazer com sucesso em ciência e em tecnologia.¹

Não vamos aqui, propriamente, discutir as origens, o significado e as bases experimentais das leis de Newton. Limitamo-nos a formulá-las em linguagem matemática e a delas extrair algumas consequências. Faremos algumas hipóteses de caráter puramente teórico: consideraremos corpos reduzidos a um ponto (**partículas**), ausência de atrito, sistemas isolados e outras abstrações que devem ser tomadas como tentativas ingênuas de explicar a realidade e prever o futuro. As próprias leis (ou mesmo a hipótese de existência de leis) devem ser tomadas com a reserva devida a qualquer obra de ficção.

Imaginemos, pois, um universo correspondente ao \mathbb{R}^3 . Todos os corpos (e seres, e tudo mais) são dados por suas coordenadas, que se modificam (ou não) ao longo do tempo. Assim, cada partícula evolui segundo uma função

$$c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

sendo o intervalo I a fração da eternidade durante a qual a partícula existe (o zero dos tempos pode ser 0:00 do dia do nascimento de Cristo, 13:45 de ontem, ou qualquer momento arbitrariamente escolhido). Os corpos (e partículas) são dotados de uma

¹Tudo isso se passa na Europa. Não há registro de participação significativa de mulheres neste processo, que, na maioria dos países do continente europeu, tiveram que aguardar mais três séculos pela cidadania plena

característica chamada **massa**, dada, para cada um, por um número positivo. Sobre eles atuam misteriosas entidades, chamadas **forças**, dadas por vetores (em cada ponto do espaço, e a cada instante, estão definidas forças que agem sobre a partícula que ocupa aquela posição, naquele instante). As **leis de Newton** dizem respeito às forças.

Primeira Lei (lei da inércia)

Na ausência de forças que sobre ela atuem, uma partícula permanece em repouso ou se move, em linha reta, com velocidade constante.

Segunda Lei (definição de força)

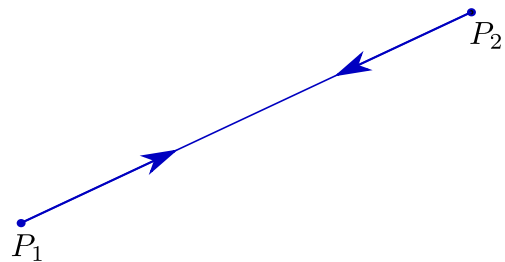
Se uma partícula de massa m (que pode variar com o tempo) ocupa, em cada instante, uma certa posição, descrita pela curva parametrizada c , a soma (vetorial) das forças que sobre ela atuam a cada instante, designada por F , é tal que

$$F = \frac{d}{dt}(m\dot{c}).$$

Terceira Lei (lei de ação e reação)

As partículas exercem forças umas sobre as outras da seguinte forma: se, num instante dado, a partícula A exerce sobre a partícula B a força F , então, no mesmo instante, a partícula B exerce sobre A a força $-F$.

A primeira lei é devida a Galileu; a segunda é uma versão mais acabada de ideias já utilizadas, também, por Galileu; a terceira foi formulada por Newton. Seguindo, provavelmente, uma dica de Hooke, Newton formulou a lei da gravitação.



Lei da Gravitação

Existe uma constante G tal que, se uma partícula de massa m_1 ocupa a posição P_1 e outra, de massa m_2 , ocupa a posição P_2 , então a primeira exerce sobre a segunda uma força (dita gravitacional), F , dada por

$$F = \frac{Gm_1m_2}{|P_1 - P_2|^3}(P_1 - P_2).$$

6.2 Sistemas de partículas, momentum e centro de massa

Se uma partícula de massa M tem seu movimento descrito pela curva parametrizada c , define-se sua **quantidade de movimento** (também chamada **momentum**) no instante t , $p(t)$, por

$$p(t) = m\dot{c}(t).$$

Note que a segunda lei de Newton equivale a

$$F = \dot{p}.$$

Assim, na ausência de forças (ou se a soma das forças é nula), p é constante. No caso de uma partícula, supondo m constante, isso é o mesmo que dizer que \dot{c} é constante. O caso de um **sistema de partículas**, a coisa é mais interessante.

Consideremos um sistema de n partículas, de massas m_1, \dots, m_n e posições descritas por c_1, \dots, c_n . Suponhamos que o sistema está **isolado**, isto é: não sofre ação de forças externas. Ou seja, as únicas forças presentes são as exercidas por cada partícula do sistema sobre as demais; pela lei de ação e reação, a soma de tais forças é nula. Temos, então, se

$$p_i = m_i\dot{c}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

e definirmos a **quantidade de movimento do sistema** por

$$p = \sum_{i=1}^n p_i,$$

que

$$\dot{p} = \sum_{i=1}^n \dot{p}_i = 0$$

(já que a soma das forças é nula).

Ou seja: em um sistema isolado, com partículas que podem se mover a velocidades diferentes, é verdade que a soma de todas as forças agindo no sistema é nula, mas não se pode falar em conservação da velocidade (nem mesmo das velocidades) do sistema. No entanto, a quantidade de movimento do sistema é conservada.

Neste caso é possível, também, tirar uma consequência interessante sobre o movimento do centro de massa do sistema. O **centro de massa** é o ponto que corresponde à média ponderada das posições das partículas do sistema (a ponderação é dada pelas massas das partículas). Assim, como as partículas se movem, o centro de massa tem sua posição dada, em função do tempo t , por

$$c(t) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m} c_i(t),$$

com $m = \sum_{i=1}^n m_i$. Assim, a velocidade do centro de massa é

$$\dot{c}(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i c_i(t) \right] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} [m_i c_i(t)] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n p_i(t),$$

e, portanto, a aceleração é

$$\ddot{c}(t) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \dot{p}_i(t) = 0.$$

Ou seja, vale uma versão da **lei da inércia** para sistemas isolados: o centro de massa de um sistema isolado faz, sempre, um movimento retilíneo uniforme (o que inclui, é claro, a possibilidade de que permaneça em repouso).

O conceito de centro de massa é interessante também no caso em que o sistema não está isolado. Se F é a soma de todas as forças atuando sobre as diversas partículas do sistema, podemos dizer, como

$$\ddot{c}(t) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \dot{p}_i(t) = \frac{1}{m} F,$$

que faz o maior sentido imaginar uma partícula, de massa $m = \sum_{i=1}^n m_i$, ocupando exatamente a posição do centro de massa. A quantidade de movimento de tal partícula seria dada por

$$p(t) = m\dot{c}(t) = m \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m} \dot{c}_i(t) = \sum_{i=1}^n p_i(t),$$

de forma que

$$\frac{d}{dt}(m\dot{c}(t)) = \dot{p}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{p}_i(t) = F.$$

Assim, o movimento do centro de massa corresponde ao de uma partícula que tivesse a massa total do sistema e sofresse a ação de uma força igual à soma de todas as forças que agem sobre as diversas partículas do sistema. Como já vimos, pode ser mais fácil determinar diretamente, a partir desta observação, o movimento do centro de massa do que o de cada uma das partículas do sistema.

Questão: Suponhamos que uma segunda partícula, de massa m igual à massa total do sistema se mova sob a ação, em cada instante, da mesma resultante, F , da soma das forças que atuam sobre o sistema. Suponhamos também que, em um dado instante t_0 essa partícula ocupe a mesma posição e tenha a mesma velocidade que o centro de massa do sistema. Será, então, verdade que seu movimento coincide, para qualquer tempo t , com o do centro de massa?

Capítulo 7

Equações diferenciais

7.1 Exemplos iniciais

Exemplo 1

Dentro do panorama teórico definido pelas leis de Newton (incluindo a da gravitação), considere o seguinte problema: estudar a evolução de um sistema de dois corpos (que suporemos partículas), de massas conhecidas, dadas suas posições e velocidades em um certo instante. De forma ainda mais simplificada, suponhamos que o sistema esteja isolado e que a única interação entre as partículas se dê pela força da gravidade.

Assim, temos duas partículas, de massas m_1 e m_2 , cujos movimentos,

$$c_1, c_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

queremos determinar. Conhecemos, para um certo t_0 em I , as posições, $c_1(t_0) = P_1$ e $c_2(t_0) = P_2$, e as velocidades, $\dot{c}_1(t_0) = v_1$ e $\dot{c}_2(t_0) = v_2$. E, o principal, sabemos, da lei da gravitação, que, para todo t em I ,

$$m_1 \ddot{c}_1(t) = \frac{Gm_1m_2}{|c_1 - c_2|^3} (c_2 - c_1),$$

$$m_2 \ddot{c}_2(t) = \frac{Gm_1m_2}{|c_1 - c_2|^3} (c_1 - c_2).$$

O problema mudou completamente! Até agora, estivemos procurando entender um movimento para a qual tínhamos como calcular diretamente a posição, $c(t)$, em qualquer instante t - a curva c era dada por funções conhecidas. No presente caso, temos, antes de mais nada, que descobrir como obter $c(t)$ para $t \neq t_0$. Observe que, se escrevermos $c_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ e $c_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$, podemos contar meia dúzia de funções a determinar. Delas, conhecemos os valores em t_0 e os valores em t_0 de suas derivadas. No mais, temos um sistema de seis equações que nos dão, cada uma, a segunda derivada de uma das seis em função dela mesma e das outras cinco. Para $x_1(t)$, por exemplo, temos

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{Gm_2}{\left[(x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2 + (z_1(t) - z_2(t))^2 \right]^{3/2}} (x_2(t) - x_1(t)).$$

As outras cinco equações são análogas.

Em geral, uma equação envolvendo uma função e suas derivadas é dita uma **equação diferencial**. Um sistema de equações, como o que temos, envolvendo diversas funções e suas derivadas é dito um **sistema de equações diferenciais**.

Exemplo 2

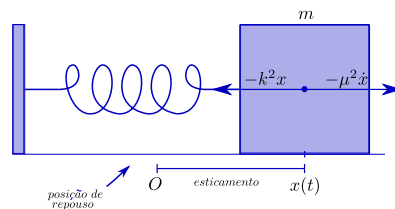


Figura 7.1: sistema massa-mola

Em um **sistema massa-mola**, como o da figura, supomos que um corpo de massa m se desloca sobre uma reta. O *esticamento*, no instante t , é representado pelo número real $x(t)$: positivo, se estamos do lado *direito*, negativo, se do *esquerdo* (em relação à posição de repouso). As forças em ação são: a força elástica exercida pela mola (que puxa para o ponto de repouso), que suporemos dada por $-k^2x(t)$ (lei de Hooke); e a força de atrito (contrária ao movimento), que suporemos dada por $-\mu^2\dot{x}(t)$. Suporemos que k e μ são constantes.

Nossa equação é:

$$m\ddot{x}(t) = -k^2x(t) - \mu^2\dot{x}(t).$$

O fato de que, nos dois exemplos acima, apareçam derivadas segundas (e outras, de ordem inferior) não é, claro, um acaso. Equações diferenciais tendem a aparecer sempre que sejam postas em evidência as forças que atuam em um sistema. A segunda lei de Newton nos leva a igualar a força resultante a massa vezes aceleração, o que, imediatamente, faz surgir uma derivada segunda.

Exemplo 3

Em diversas situações (capital a juros, crescimento populacional, decaimento radioativo), temos uma grandeza, $x(t)$, cuja taxa de variação, $\dot{x}(t)$, é proporcional a $x(t)$. A correspondente equação diferencial é

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t).$$

Com a hipótese de que α é uma constante conhecida, pode-se, roubando um pouco (já que não se garante, a priori, que $x(t) \neq 0$), fazer

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \alpha.$$

Integrando dos dois lados, vem

$$\ln x(t) = \alpha t + C,$$

o que resulta, fazendo $e^C = \beta$, em

$$x(t) = \beta e^{\alpha t}.$$

Se conhecemos o valor x_0 de $x(t)$ em um certo $t = t_0$, podemos determinar β .

Exercício 7.1 *Determine, nas condições acima, o valor de β .*

Exercício 7.2 *Chegue à mesma solução, sem roubar:*

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) \Rightarrow e^{-\alpha t} \dot{x}(t) - \alpha e^{-\alpha t} x(t) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{-\alpha t} x(t)) = 0, \text{ etc.}$$

Desta vez, conseguimos. Mas nem sempre é tão fácil, e geralmente é impossível, encontrar uma solução explícita (em termos de funções catalogadas) de uma equação diferencial que nos interessa resolver. Dois caminhos são particularmente interessantes, neste caso: o primeiro é fazer uma análise qualitativa da solução, de forma a obter informações sobre esta sem calculá-la explicitamente; a segunda é obter uma sequência de soluções aproximadas que, de alguma forma, convirja para a solução exata.¹

7.2 O método numérico mais óbvio

Para termos uma ideia (e *uma*, aqui, é apenas uma das possíveis ideias) de como lidar com uma equação diferencial, imaginemos um caso simples: queremos conhecer o movimento $c(t)$ de uma partícula, dadas sua posição, $c(t_0) = P_0$, no instante inicial t_0 , e a equação

$$\dot{c}(t) = v(c(t)),$$

¹Uma questão preliminar é obter garantias de que, nas hipóteses em questão, a equação tenha, de fato, uma solução (única, de preferência), pelo menos durante um certo *intervalo de tempo*

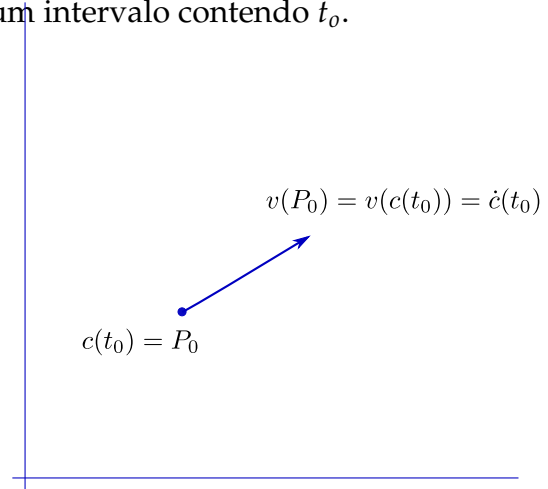
que nos fornece a velocidade em função da posição. Para simplificar, suporemos que o movimento se faz no plano.²

Mais precisamente, suporemos dado um **campo de velocidades**, $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (isto é, se nossa partícula está no ponto P , então sua velocidade será, obrigatoriamente, $v(P)$). Esperamos, a partir daí, conseguir definir c em um intervalo contendo t_0 .

Podemos começar com uma ideia absolutamente óbvia: a definição de derivada. Se Δt é *pequeno*, uma boa aproximação para $c(t + \Delta t)$ é dada por $c(t) + \Delta t \dot{c}(t)$. Ou seja, começamos aproximando $c(t_0 + \Delta t)$ por

$$c(t_0) + \Delta t \dot{c}(t_0) = P_0 + \Delta t v(P_0).$$

Usando essa ideia, temos um procedimento para obter a posição (aproximada) no tempo t .



Começamos dividindo o intervalo $[t_0, t]$ em n subintervalos (n é um inteiro positivo que podemos escolher na hora de implementar o método). Fazemos

$$\Delta t = \frac{t - t_0}{n}$$

e criamos, recursivamente, os pontos P_1, P_2, \dots, P_n , fazendo

$$P_i = P_{i-1} + \Delta t v(P_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Sob hipóteses razoáveis (se bem entendemos o significado do vetor velocidade), P_n deve ser uma *boa* aproximação para $c(t)$ (se n for *suficientemente* grande, e, conseqüentemente, Δt for *bem* pequeno). De quebra, ligando por segmentos de reta os pontos P_{i-1} e P_i , $i = 1, \dots, n$, obtemos um desenho aproximado da curva c , entre os tempos t_0 e t . Este método é conhecido como **método de Euler**

Exercício 7.3 Programe a ideia acima no computador. Considere a curva $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $c(t) = (t, t^2)$. Considere $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $v(x, y) = (1, 2x)$. Note que c satisfaz a $c(0) = (0, 0)$ e a $\dot{c}(t) = v(c(t))$, para todo t em \mathbb{R} . Escolha um tempo T razoável, um n razoável, faça $\Delta t = T/n$, determine e marque na tela os pontos $P_i = P_{i-1} + \Delta t v(P_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$, e compare a curva aproximada com a exata, no intervalo $[0, T]$. A partir de que valor de n a diferença entre a curva aproximada e a exata deixa de ser visível? E se você der um zoom?

²Fisicamente, é mais usual ter uma equação que nos dá a aceleração em função da posição; pedimos desculpas ao leitor: o caso apresentado aqui tem a vantagem de ser mais simples e pode servir como ponto de partida para saltos mais ousados, em outro momento

7.3 Um método similar para equações de segunda ordem

Passemos ao caso de uma equação de segunda ordem. Já temos dois exemplos interessantes: o sistema massa-mola, em que buscamos uma função, $x(t)$, a valores reais; e o sistema gravitacional com n partículas, descrito por n movimentos em \mathbb{R}^3 , $c_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)), \dots, c_n(t) = (x_n(t), y_n(t), z_n(t))$, o que equivale a um movimento, $c(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t), \dots, x_n(t), y_n(t), z_n(t))$, em \mathbb{R}^{3n} .³

Consideremos, pois, que queremos calcular (aproximadamente, pelo menos) $c(t)$, conhecendo a *posição inicial*, $P_0 = c(t_0)$, e a *velocidade inicial*, $v_0 = \dot{c}(t_0)$; suponhamos, também, que sabemos determinar a *aceleração*, $\ddot{c}(t)$, em função da posição, $c(t)$, e da velocidade, $\dot{c}(t)$. Mais especificamente, queremos determinar $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo $I = [t_0, t]$ ou $I = [t, t_0]$, conforme $t > t_0$ ou $t_0 > t$ (vamos, em geral, supor $t > t_0$); suporemos conhecida uma certa função, $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que nos dá a aceleração em função da posição e da velocidade (poderia, a rigor, depender também do instante), e dados dois elementos, P_0 e v_0 , de \mathbb{R}^n . O problema, portanto, é determinar $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\begin{cases} c(t_0) = P_0, \\ \dot{c}(t_0) = v_0, \\ \ddot{c}(t) = a(c(t), \dot{c}(t)), t \in I. \end{cases}$$

Exercício 7.4 *Explicite a função $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, no caso do sistema massa-mola e no caso do problema dos n -corpos.*

A ideia é a mesma do caso de primeira ordem. Fixamos t e um certo inteiro positivo n , e dividimos o intervalo $[t_0, t]$ em n pedacinhos, fazendo

$$\Delta t = \frac{t - t_0}{n}, \quad t_i = t_0 + i\Delta t.$$

A única novidade é que, agora, precisamos *gerar uma nova velocidade a cada passo*. Vamos criar as *posições* P_1, \dots, P_n (que aproximarão $c(t_1), \dots, c(t_n)$) e as *velocidades* v_1, \dots, v_n (que aproximarão $\dot{c}(t_1), \dots, \dot{c}(t_n)$).

Façamos, pois, o óbvio: para $i = 1, \dots, n$, sejam

$$P_i = P_{i-1} + \Delta t v_{i-1},$$

$$v_i = v_{i-1} + \Delta t a(P_{i-1}, v_{i-1}).$$

³Os dois casos podem nos conduzir por caminhos que se embrenham por espaços outros que os tradicionais $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$: o sistema gravitacional é naturalmente descrito por uma *curva* parametrizada em \mathbb{R}^{3n} - determinar tal movimento corresponde ao que usualmente é chamado de **problema dos n corpos**; já no massa-mola, temos que combinar que não é *natural* imaginar que a trajetória fique presa em uma linha reta, mas sim que se dê em um plano - o que é menos evidente é que, neste caso, as coisas ficam mais simples se trabalharmos com uma curva a valores em \mathbb{C} (que é o \mathbb{R}^2 , mas tem uma riqueza maior)

Exercício 7.5 Programe o método acima. Considere a função $x(t) = \sin t$. Note que $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ e $\ddot{x}(t) = -x(t) \forall t \in \mathbb{R}$. Fixe um Δt positivo e vá calculando os $x_i = x_{i-1} + \Delta t v_{i-1}$, $v_i = v_{i-1} + \Delta t(-x_{i-1})$. Note que, chamando \dot{x} de v , os pontos $(x(t), v(t))$ percorrem o círculo de centro na origem e raio 1. Fazendo $t_i = i\Delta t$, plote os pontos $(x(t_i), v(t_i))$ e os correspondentes (x_i, v_i) . O que acontece? Qual a explicação?

Exercício 7.6 Repita o exercício acima, mas cometa o seguinte erro, ao programar (usando o símbolo $:=$ para atualizar o valor de uma variável): crie as variáveis X e V , com valores iniciais 0 e 1 e, para atualizá-las, faça (chamando Δt de H)

$$X := X + HV,$$

$$V := V - HX.$$

O que acontece? Qual a explicação?

Uma análise um pouco mais cuidadosa do método numérico acima permite uma pequena, mas substancial, melhora.

7.4 As aproximações da derivada

O ponto de partida de nossos métodos numéricos foi a seguinte observação, que chamamos, inclusive, de óbvia: para t fixo e h pequeno, é razoável a aproximação

$$c(t+h) \approx c(t) + h \dot{c}(t).$$

A partir daí, chamando t de t_i e $t+h$ de t_{i+1} , obtemos

$$c(t_{i+1}) \approx c(t_i) + h \dot{c}(t_i).$$

Começemos de novo, observando que chamar t de t_i e $t+h$ de t_{i+1} parece deixar implícito que h é positivo. Explicitemos: para t fixo, e h positivo e pequeno, é razoável a aproximação

$$c(t+h) \approx c(t) + h \dot{c}(t).$$

Simetrizemos: para t fixo, e h positivo e pequeno, é razoável a aproximação (olhando para trás)

$$c(t-h) \approx c(t) - h \dot{c}(t).$$

Agora parece razoável chamar t de t_i e $t-h$ de t_{i-1} , on que nos dá

$$c(t_{i-1}) \approx c(t_i) - h \dot{c}(t_i).$$

Ora, chamando $i-1$ de i , isso é o mesmo que

$$c(t_i) \approx c(t_{i+1}) - h \dot{c}(t_{i+1}),$$

ou seja,

$$c(t_{i+1}) \approx c(t_i) + h \dot{c}(t_{i+1}).$$

Exercício 7.7 Observe que toda essa conversa se resume a: se os números (distintos) x e y estão próximos, é razoável pensar

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

como uma boa aproximação de $f'(x)$, independentemente de ser $y > x$ ou $x > y$.

Exercício 7.8 Suponha que conhecemos os valores da função $c(t)$ nos pontos t_i , i inteiro, tais que os valores $t_{i+1} - t_i$ são, todos, iguais a h . Qual é a melhor aproximação para $\dot{c}(t_i)$:

$$\frac{1}{h}(c(t_{i+1}) - c(t_i)) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{h}(c(t_i) - c(t_{i-1}))?$$

É claro que, fixado h positivo, e dados os pontos $t_i - h = t_{i-1}$, t_i e $t_i + h = t_{i+1}$, não há, sem outros dados, como decidir, entre

$$D_+c(t_i) = \frac{1}{h}(c(t_{i+1}) - c(t_i)) \quad \text{ou} \quad D_-c(t_i) = \frac{1}{h}(c(t_i) - c(t_{i-1})),$$

qual a melhor aproximação para $\dot{c}(t_i)$. Suponhamos, pois, que (como vimos fazendo), nossa escolha recaia sobre D_+ . Passemos à segunda derivada (supondo que temos os pontos t_j , $j = i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2$). Aproximando $\ddot{c}(t_i)$ por $D_+D_+c(t_i)$, obtemos

$$\frac{1}{h^2}(c(t_{i+2}) - 2c(t_{i+1}) + c(t_i)).$$

Exercício 7.9 Confira. Observe que a opção D_-D_- daria

$$\frac{1}{h^2}(c(t_{i-2}) - 2c(t_{i-1}) + c(t_i)).$$

Exercício 7.10 E se optássemos por D_+D_- , ou por D_-D_+ ?

O defeito é evidente. As opções *olhar sempre para à direita* ou *olhar sempre para a esquerda* nos levam, na aproximação da segunda derivada em t_i , a considerar, respectivamente, os valores de c nos pontos t_i, t_{i+1}, t_{i+2} ou t_{i-2}, t_{i-1}, t_i . As opções D_+D_- e D_-D_+ nos dão, ambas,

$$\frac{1}{h^2}(c(t_{i-1}) - 2c(t_i) + c(t_{i+1})).$$

Parece mais razoável (se olhamos à direita na primeira derivada, olharemos à esquerda na segunda): afinal, neste caso, estaremos utilizando pontos mais próximos de t_i . Façamos uma avaliação um pouco mais rigorosa, comparando as três opções (como D_+D_+ e D_-D_- são equivalentes, compararemos apenas D_+D_- contra D_+D_+). A análise pode ser feita usando o **polinômio de Taylor**:

$$c(t+h) = c(t) + c'(t)h + \frac{1}{2}c''(t)h^2 + \frac{1}{3!}c'''(t)h^3 \cdots + \frac{1}{n!}f^n(t)h^n + r(h),$$

com

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} r(h) = 0.$$

(note que c e r são funções a valores vetoriais; trabalhando coordenada a coordenada, é fácil deduzir esta versão vetorial do polinômio de Taylor). Para simplificar o raciocínio, podemos dizer que o que queremos é decidir qual a melhor aproximação para $c''(t)$, quando h é pequeno:

$$c''(t) \approx \frac{1}{h^2} [c(t+2h) - 2c(t+h) + c(t)],$$

ou

$$c''(t) \approx \frac{1}{h^2} [c(t+h) - 2c(t) + c(t-h)]?$$

Supondo que c tem derivada terceira em t e usando as expansões em polinômio de Taylor, temos:

$$c(t+2h) = c(t) + 2hc'(t) + 2h^2c''(t) + \frac{4}{3}h^3c'''(t) + r(2h),$$

$$c(t+h) = c(t) + hc'(t) + \frac{h^2}{2}c''(t) + \frac{1}{6}h^3c'''(t) + r(h),$$

$$c(t-h) = c(t) - hc'(t) + \frac{h^2}{2}c''(t) - \frac{1}{6}h^3c'''(t) + r(-h),$$

o que nos leva a

$$\frac{1}{h^2} [c(t+2h) - 2c(t+h) + c(t)] = c''(t) + hc'''(t) + \frac{1}{h^2} [r(2h) - 2r(h)],$$

$$\frac{1}{h^2} [c(t+h) - 2c(t) + c(t-h)] = c''(t) + \frac{1}{h^2} [r(h) + r(-h)],$$

com

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} r(h) = 0.$$

Assim, quando $h \rightarrow 0$, ambas as expressões convergem a $c''(t)$. No entanto, se chamarmos de $r_1(h)$ o erro cometido com a adoção da primeira, teremos

$$r_1(h) = hc'''(t) + \frac{1}{h^2} [r(2h) - 2r(h)],$$

de modo que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} r_1(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ c'''(t) + \frac{1}{h^3} [r(2h) - 2r(h)] \right\} = c'''(t).$$

Já o erro cometido com a adoção da segunda, $r_2(h)$, é tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} r_2(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} [r(h) + r(-h)] = 0.$$

Isso decide a parada em favor de

$$c''(t) \approx \frac{1}{h^2} [c(t+h) - 2c(t) + c(t-h)].$$

7.5 De volta ao método numérico

Voltando a nosso esquema numérico: consideramos os tempos t_0, t_1, \dots, t_n , com $t_i - t_{i-1} = h$, para todo $i = 1, \dots, n$, e as correspondentes posições, P_0, P_1, \dots, P_n , e velocidades, v_0, v_1, \dots, v_n . A posição e a velocidade iniciais, P_0 e v_0 , são dadas; as demais devem ser aproximadas a partir da expressão da aceleração, que é dada em função da posição e da velocidade: a aceleração no tempo t_i , ao qual atribuímos a posição P_i e a velocidade v_i , será aproximada por $a_i = a(P_i, v_i)$, sendo a uma função conhecida (a aproximação vem do fato de que, mesmo sendo a função a dada por uma lei na qual tenhamos fé absoluta, os valores de P_i e de v_i são aproximados).

Pelo que acabamos de discutir, na seção anterior, vamos aproximar a velocidade olhando para a direita (isto é, usando o operador de derivação aproximada D_+), mas, para a aceleração, olharemos para a esquerda (ou seja, usaremos D_-). Assim, faremos

$$v_i = \frac{1}{h} [P_{i+1} - P_i],$$

$$a_i = \frac{1}{h} [v_i - v_{i-1}].$$

Vejam os que isto nos dá, no cálculo de P_1 e de v_1 :

$$v_0 = \frac{1}{h} [P_1 - P_0] \Rightarrow P_1 = P_0 + h v_0,$$

$$a_1 = \frac{1}{h} [v_1 - v_0] \Rightarrow v_1 = v_0 + h a_1.$$

Note que P_1 é dado explicitamente, a partir dos valores, conhecidos, de P_0 e v_0 . O caso de v_1 não é tão simples, já que $a_1 = a(P_1, v_1)$. Neste caso, para o cálculo de v_1 , teremos que resolver a equação $v_1 = v_0 + h a(P_1, v_1)$, sendo conhecidos v_0 (dado), P_1 (já calculado) e a função a . Mais geralmente, teremos

$$P_{i+1} = P_i + h v_i,$$

$$v_{i+1} = v_i + h a(P_{i+1}, v_{i+1}),$$

o que nos obriga, a cada passo, a resolver uma equação, para obter o novo valor da velocidade. Ou, escrevendo tudo a partir da aproximação da aceleração:

$$\frac{1}{h^2} [P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}] = a_i = a(P_i, v_i) = a\left(P_i, \frac{1}{h} [P_{i+1} - P_i]\right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Neste caso, pode ser interessante trocar o operador $D_- D_+$ por $D_+ D_-$. Teríamos, então,

$$v_i = \frac{1}{h} [P_i - P_{i-1}],$$

$$a_i = \frac{1}{h} [v_{i+1} - v_i].$$

Já no cálculo de P_1 e v_1 , fica claro que temos que inverter as linhas do programa: precisamos de v_1 para o cálculo de P_1 . Temos, então, que começar atualizando a velocidade (olhando para a direita) e, em seguida, a posição:

$$v_1 = v_0 + h a_0 = v_0 + h a(P_0, v_0),$$

$$P_1 = P_0 + h v_1 = P_0 + h v_0 + h^2 a(P_0, v_0).$$

Observe que, agora, magicamente, os novos valores são obtidos de forma explícita. Mais geralmente, teremos

$$v_{i+1} = v_i + h a_i = v_i + h a(P_i, v_i),$$

$$P_{i+1} = P_i + h v_{i+1} = P_i + h v_i + h^2 a(P_i, v_i).$$

Alternativamente, escrevendo tudo a partir da aproximação da aceleração:

$$\frac{1}{h^2} [P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}] = a_i = a(P_i, v_i) = a\left(P_i, \frac{1}{h} [P_i - P_{i-1}]\right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Questão: Partimos da igualdade $D_- D_+ = D_+ D_-$, mas chegamos a duas fórmulas de recorrência diferentes. As deduções estão corretas? Se estão, temos meios de decidir qual das duas aproximações será melhor?

No caso em que a aceleração não depende da velocidade ($\ddot{c}(t) = a(c(t))$), as duas abordagens conduzem a fórmulas de recorrência explícitas:

$$P_{i+1} = P_i + h v_i,$$

$$v_{i+1} = v_i + h a(P_{i+1});$$

ou

$$v_{i+1} = v_i + h a(P_i),$$

$$P_{i+1} = P_i + h v_{i+1}.$$

Exercício 7.11 *Faça uma simulação, no computador, para um sistema de $n + 1$ partículas, de massas m_0, m_1, \dots, m_n conhecidas, com posições e velocidades iniciais também dadas (suponha o sistema isolado, sendo a única interação entre as partículas dada pela lei da gravidade - assim, as acelerações dependem apenas das posições). Uma boa ideia pode ser supor $n = 8$ e considerar o caso em que m_0 é muito maior do que as demais massas; melhor ainda seria usar dados reais do sistema solar e até, quem sabe, incluir a Lua e outros satélites. O programa deve apresentar os movimentos das partículas, com a opção de se fixar a origem em qualquer uma delas, de forma a podermos comparar o modelo geocêntrico com o heliocêntrico.*

Exercício 7.12 *Por que, na simulação, os planetas não escapam para longe do sol?*

Exercício 7.13 *Retorne ao sistema massa-mola, com $\ddot{x}(t) = -x(t)$. Faça $y = \dot{x}$, de modo que $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (y(t), -x(t))$. Conclua que $x(t)^2 + y(t)^2$ é constante. Faça simulações numéricas, a partir de uma posição e uma velocidade dadas, para diversos valores de h . Compare as aproximações obtidas com o movimento exato.*

Capítulo 8

Comprimento de curva

Até agora temos, em nosso estudo de curvas, lançado mão da derivada. Para medir comprimentos, precisaremos também da integral.

A questão que se nos coloca é a seguinte: dada uma curva (parametrizada) c , como definir (e calcular) seu comprimento? Se paramos um pouco para pensar, vemos que a resposta não é exatamente simples.

Se os pontos A e B são ligados pela curva c , sabemos medir o comprimento do segmento AB (na verdade, como os pontos são, para nós, pares, ou ternos, ordenados, *definimos* o comprimento do segmento AB por

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2},$$

sendo $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$). Quanto ao comprimento do arco ligando A a B , o melhor que podemos fazer é aproximar o arco por uma poligonal e concluir que seu comprimento deve ser maior ou igual do que o comprimento da poligonal. Se fizermos tender a zero a distância entre os vértices adjacentes da poligonal, e tivermos sorte, o comprimento desta deve tender para o do arco.

Se a curva é dada por $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{R}^3 , com $c(a) = A$ e $c(b) = B$, uma poligonal, com vértices em c , ligando A a B , será dada por uma partição $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$, com $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. O comprimento da poligonal será, então, dado por

$$l(P) = |c(t_1) - c(t_0)| + \dots + |c(t_n) - c(t_{n-1})| = \sum_{i=1}^n |c(t_i) - c(t_{i-1})|.$$

Assim postas as coisas, já podemos sentir no ar o cheiro da integral. Para explicitá-la, observemos que podemos escrever

$$l(P) = \sum_{i=1}^n |c(t_i) - c(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \frac{|c(t_i) - c(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1})$$

e que, quando os $t_i - t_{i-1}$ são *pequenos*, temos

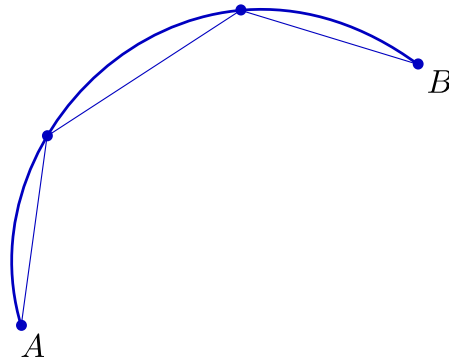


Figura 8.1: comprimento

$$\frac{|c(t_i) - c(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} \approx \dot{c}(t_i).$$

Assim, podemos trabalhar com uma dupla aproximação: o comprimento do trecho da curva que vai de $A = c(a)$ a $B = c(b)$ é aproximado pelo da poligonal, dado por $l(P)$; este, por sua vez, é aproximado por

$$l(P) \approx \sum_{i=1}^n |\dot{c}(t_i)|(t_i - t_{i-1}).$$

A expectativa é que, quando os $t_i - t_{i-1}$ forem *bem pequenos*, as aproximações sejam muito boas, de forma que, no limite, tanto $l(P)$ como sua aproximação tendam ao comprimento do arco. Mais explicitamente: se s é o comprimento do arco, e $|P| = \max\{t_i - t_{i-1}, i = 1, \dots, n\}$, esperamos que

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\dot{c}(t_i)|(t_i - t_{i-1}) = s.$$

Ora, supondo que $|\dot{c}|$ seja integrável, o limite acima é, precisamente, a integral de $|\dot{c}|$ de a a b ; ou seja:

$$s = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt.$$

Discutiremos em uma seção à parte a demonstração de que, com hipóteses adequadas, tudo dá certo. O fato é que, se \dot{c} é contínua, as coisas correm bem: o limite, quando os $t_i - t_{i-1}$ tendem a zero, de $l(P)$ existe e é igual à integral de $|\dot{c}|$ entre a e b .

Suponhamos, pois, que temos uma curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ou \mathbb{R}^2), tal que \dot{c} é contínua (como estamos, em geral, supondo que a aceleração está definida, a existência da segunda

derivada, \dot{c} , fica implícita, o que já garante a continuidade de \dot{c} . Fixemos um ponto t_0 de I . O **comprimento de arco** de c , medido a partir de t_0 (ou de $c(t_0)$), é a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{c}|(\tau) d\tau.$$

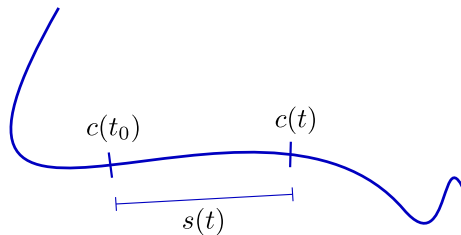


Figura 8.2: comprimento de arco

É importante observar que, se não supusermos que \dot{c} não se anula, o mesmo trecho de c pode ser percorrido mais de uma vez (numa espécie de vai-e-vem).

Exercício 8.1 Examine a curva $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $c(t) = (t, t^2)$. Agora estude $c_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $c_1(t) = (\sin t, \sin^2 t)$.

Na verdade, mesmo quando \dot{c} não se anula, podemos ter o mesmo trecho percorrido diversas vezes (como, por exemplo, em $c(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$). Assim, o verdadeiro sentido da função s ,

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{c}|(\tau) d\tau,$$

é medir o **espaço percorrido** pelo ponto $c(\tau)$, quando τ varia de t_0 a t .

8.1 Comprimento de arco

Façamos uma breve discussão sobre o problema de definir o comprimento de arco. Consideraremos uma curva parametrizada $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ (que suporemos

diferenciável). A cada partição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$, dada por $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, associamos

$$l(c, P) = \sum_{i=1}^n |c(t_i) - c(t_{i-1})|.$$

A **norma** da partição P , designada por $|P|$, é o maior dos números $t_1 - t_0, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}$. O **comprimento** de c é, por definição,

$$l(c) = \lim_{|P| \rightarrow 0} l(c, P),$$

caso o limite exista. Nesse caso, a curva c é dita **retificável**. Mais precisamente, o comprimento de c é $l(c)$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid |P| < \delta \Rightarrow |l(c, P) - l(c)| < \varepsilon.$$

Nosso objetivo é provar que, sendo \dot{c} contínua, tem-se

$$l(c) = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt.$$

Vamos precisar de dois resultados preliminares.

Proposição: (desigualdade do valor médio) Se $c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ é contínua em $[\alpha, \beta]$ e derivável em $] \alpha, \beta [$, então existe ξ em $] \alpha, \beta [$ tal que

$$|c(\beta) - c(\alpha)| \leq (\beta - \alpha) |\dot{c}(\xi)|.$$

Demonstração: Considere $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \langle c(t) - c(\alpha), c(\beta) - c(\alpha) \rangle.$$

Note que f' é dada por

$$f'(t) = \langle \dot{c}(t), c(\beta) - c(\alpha) \rangle.$$

Pelo Teorema do valor médio, existe ξ em $] \alpha, \beta [$ tal que $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta - \alpha)$, ou seja:

$$\langle c(\beta) - c(\alpha), c(\beta) - c(\alpha) \rangle = \langle \dot{c}(\xi), c(\beta) - c(\alpha) \rangle (\beta - \alpha).$$

Como, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz-Buniacóvski, temos $\langle \dot{c}(\xi), c(\beta) - c(\alpha) \rangle \leq |\dot{c}(\xi)| |c(\beta) - c(\alpha)|$, o resultado segue. ■

Definição: Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita **uniformemente contínua** se para todo ε positivo existe δ positivo tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Exercício 8.2 Entenda a diferença entre continuidade e continuidade uniforme: uma função contínua em I é tal que, para todo ε positivo, existe, para cada x em I , um δ positivo (que depende de x) tal que

$$|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon;$$

no caso de função uniformemente contínua, é possível obter um delta que sirva para todos os x . Dê exemplos de funções contínuas que não sejam uniformemente contínuas. Você consegue um tal exemplo com I fechado e limitado?

Exercício 8.3 Estenda a definição de continuidade uniforme para funções definidas em subconjuntos de \mathbb{R}^n . Mostre que toda aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uniformemente contínua.

Teorema: (Teorema de continuidade uniforme) Se $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ é contínua, então c é uniformemente contínua.

Demonstração: Não faremos. A demonstração pode ser encontrada em qualquer livro de Análise na Reta, ou mesmo em alguns livros de Cálculo, como o Apostol e o Spivak. ■

Observação: O teorema de continuidade uniforme é ingrediente essencial na demonstração do seguinte resultado, cuja demonstração o leitor é convidado a fazer: se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f é integrável em $[a, b]$.

Agora estamos preparados para provar o resultado que anunciamos.

Exercício 8.4 Vamos usar, várias vezes, as desigualdades: $|u + v| \leq |u| + |v|$ e $||u| - |v|| \leq |u - v|$, com u e v vetores. Certifique-se de que as compreende bem.

Teorema: Se $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem derivada contínua, então c é retificável e

$$l(c) = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt.$$

Demonstração: Começemos observando que $|\dot{c}| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, já que \dot{c} é contínua. Assim, definindo, para cada partição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$, a aproximação

$$S(|\dot{c}|, P) = \sum_{i=1}^n |\dot{c}(t_{i-1})|(t_i - t_{i-1}),$$

temos

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} S(|\dot{c}|, P) = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt,$$

ou seja:

$$(*) \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid |P| < \delta \implies \left| S(|\dot{c}|, P) - \int_a^b |\dot{c}(t)| dt \right| < \varepsilon.$$

Queremos, porém, provar que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid |P| < \delta \implies \left| l(c, P) - \int_a^b |\dot{c}(t)| dt \right| < \varepsilon$$

(o que provará que $l(c, P) \rightarrow \int_a^b |\dot{c}(t)| dt$; como sabemos que $l(c, P) \rightarrow l(c)$ e o limite é único, isso provará que $l(c) = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt$).

Observemos, preliminarmente, que

$$\begin{aligned} \left| l(c, P) - \int_a^b |\dot{c}(t)| dt \right| &= \left| l(c, P) - S(|\dot{c}|, P) + S(|\dot{c}|, P) - \int_a^b |\dot{c}(t)| dt \right| \leq \\ &\leq |l(c, P) - S(|\dot{c}|, P)| + \left| S(|\dot{c}|, P) - \int_a^b |\dot{c}(t)| dt \right|. \end{aligned}$$

Fixemos, pois, um número positivo ε . De (*), podemos tomar $\delta_1 > 0$ tal que

$$|P| < \delta_1 \implies \left| S(|\dot{c}|, P) - \int_a^b |\dot{c}(t)| dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vamos, agora, provar que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|P| < \delta_2 \implies |l(c, P) - S(|\dot{c}|, P)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} |l(c, P) - S(|\dot{c}|, P)| &= \left| \sum_{i=1}^n |c(t_i) - c(t_{i-1})| - \sum_{i=1}^n |\dot{c}(t_i)|(t_i - t_{i-1}) \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^n (|c(t_i) - c(t_{i-1})| - |(t_i - t_{i-1})\dot{c}(t_i)|) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| |c(t_i) - c(t_{i-1})| - |(t_i - t_{i-1})\dot{c}(t_i)| \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |c(t_i) - c(t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1})\dot{c}(t_i)|. \end{aligned}$$

Vamos, agora, lançar mão da desigualdade do valor médio para cada uma das funções $c_i(t) = c(t) - c(t_{i-1}) - (t - t_{i-1})\dot{c}(t_i)$. Como $\dot{c}_i(t) = \dot{c}(t) - \dot{c}(t_i)$, podemos, usando a desigualdade no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, concluir que existe, para cada $i = 1, \dots, n$, um $\xi_i \in]t_{i-1}, t_i[$, tal que

$$|c_i(t_i) - c_i(t_{i-1})| \leq |\dot{c}_i(\xi_i)|(t_i - t_{i-1});$$

consequentemente,

$$|c(t_i) - c(t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1})\dot{c}(t_i)| \leq |\dot{c}(\xi_i) - \dot{c}(t_i)|(t_i - t_{i-1}).$$

Daí vem:

$$\begin{aligned} |l(c, P) - S(|\dot{c}|, P)| &\leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |c(t_i) - c(t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1})\dot{c}(t_i)| \leq \sum_{i=1}^n |\dot{c}(\xi_i) - \dot{c}(t_i)|(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos, pelo teorema da continuidade uniforme, tomar $\delta_2 > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta_2 \implies |\dot{c}(x) - \dot{c}(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Logo, se $|P| < \delta_2$, cada um dos ξ_i satisfaz $|\xi_i - t_{i-1}| < \delta_2$; daí resulta que

$$|l(c, P) - S(|\dot{c}|, P)| \leq \sum_{i=1}^n |\dot{c}(\xi_i) - \dot{c}(t_i)|(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, tomando $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, temos

$$|P| < \delta \implies \left| l(c, P) - \int_a^b |\dot{c}(t)| dt \right| < \varepsilon.$$

■

Capítulo 9

Reparametrização por comprimento de arco

Consideremos uma curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ (ou \mathbb{R}^3), tal que \dot{c} não se anule em I , e fixemos um ponto t_0 do intervalo I . Seja $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{c}|(\tau) d\tau.$$

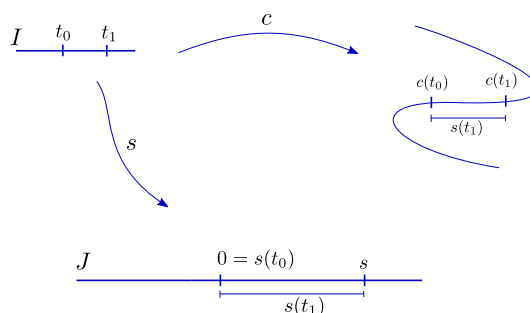


Figura 9.1: espaço percorrido

O significado de s deve estar claro: é como se o traço de c fosse uma estrada; escolhemos um ponto, $c(t_0)$, como marco zero e, a partir daí, medimos o espaço (positivo, *para a frente*, negativo, *para trás*); sobre uma reta vamos marcando, para cada t , o ponto correspondente ao espaço de $c(t_0)$ a $c(t)$ - a isto se chama **retificar** a curva.

Como estamos supondo que \dot{c} não se anula e temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{c}(t)| > 0,$$

a função s é crescente e contínua e, portanto, leva o intervalo I , bijectivamente, sobre um intervalo J .

Podemos, então, inverter s . Por abuso de notação, chamaremos de s um ponto genérico de J e por t designaremos os elementos de I , escrevendo $s = s(t)$ e $t = t(s)$ (assim, temos que a função $t : J \rightarrow I$ é a inversa de $s : I \rightarrow J$).

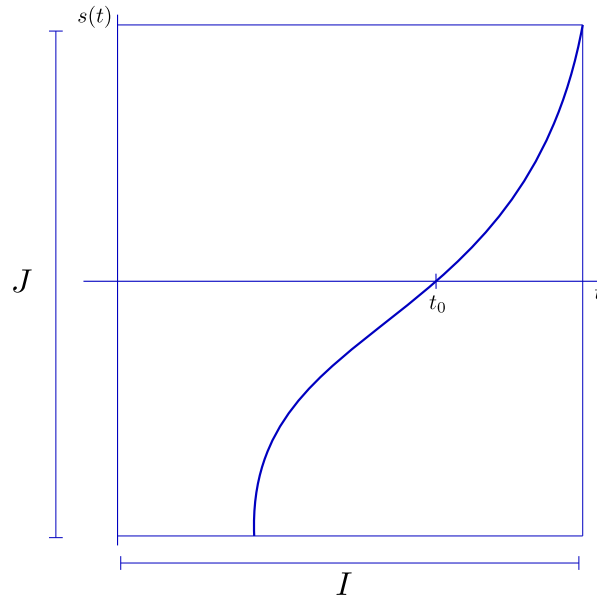


Figura 9.2: gráfico de s

Uma forma natural de reparametrizar c é, então, dada por $c_1 = c \circ t : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ (ou \mathbb{R}^3),

$$s \mapsto c_1(s) = c(t(s)).$$

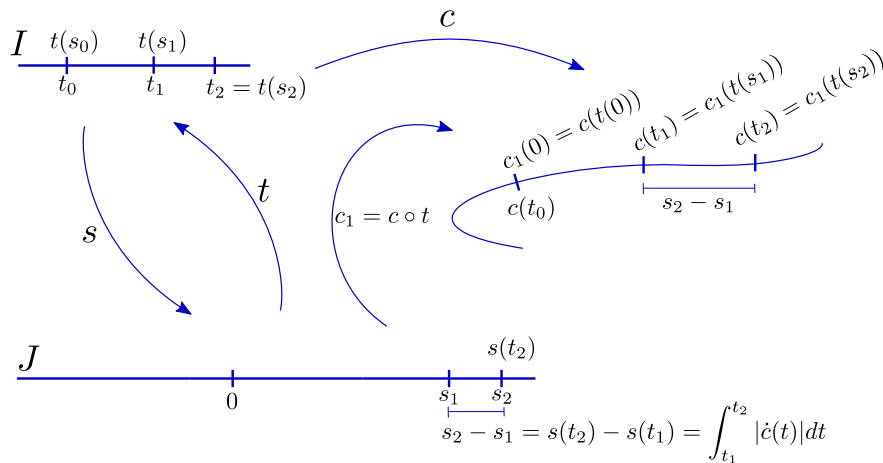


Figura 9.3: reparametrização por comprimento de arco

A curva c_1 , claramente, está construída de forma que o espaço percorrido entre $s = s_1$ e $s = s_2$ seja exatamente $s_2 - s_1$. De fato, arguindo que o cálculo pode ser feito com a parametrização original, tomamos $t_1 = t(s_1)$ e $t_2 = t(s_2)$ e calculamos o espaço percorrido entre t_1 e t_2 , usando a parametrização c :

$$\int_{t_1}^{t_2} |\dot{c}(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{c}(t)| dt + \int_{t_1}^{t_2} |\dot{c}(t)| dt = \int_{t_0}^{t_2} |\dot{c}(t)| dt = s_2 - s_1.$$

Mas, como matemáticos cautelosos, vamos conferir. Pela definição, o que queremos é

$$\int_{s_1}^{s_2} |c'_1(s)| ds.$$

Ora,

$$c'_1(s) = \frac{d}{ds} c_1(s) = \frac{d}{ds} (c(t(s))) = \frac{dt}{ds}(s) \dot{c}(t(s)).$$

Precisamos, então, da derivada de t . Como t é a inversa de s , usaremos o Teorema da Função Inversa. De

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{c}(\tau)| d\tau,$$

temos

$$\frac{ds}{dt}(t) = |\dot{c}(t)|.$$

Como \dot{c} , por hipótese, nunca se anula, temos

$$\frac{dt}{ds}(s) = \left(\frac{ds}{dt}(t(s)) \right)^{-1} = \frac{1}{|\dot{c}(t(s))|}.$$

Logo,

$$c'_1(s) = \frac{dt}{ds}(s) \dot{c}(t(s)) = \frac{1}{|\dot{c}(t(s))|} \dot{c}(t(s)) = 1 \quad \forall s \in J,$$

o que confirma

$$\int_{s_1}^{s_2} |c'_1(s)| ds = s_2 - s_1.$$

Assim, usando o teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema da Função Inversa, acabamos de provar a proposição a seguir.

Proposição: Se I é um intervalo não trivial e $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ (ou \mathbb{R}^3) é tal que \dot{c} é contínua e não se anula em I , então existem um intervalo não trivial J e uma função diferenciável

$$\begin{aligned} t : J &\longrightarrow I \\ s &\longmapsto t(s) \end{aligned}$$

tais que, sendo

$$\begin{aligned} c_1 : J &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ (ou } \mathbb{R}^3) \\ s &\longmapsto c_1(s) = c(t(s)), \end{aligned}$$

se tem

$$\left| \frac{d}{ds} c_1(s) \right| = 1 \quad \forall s \in J.$$

A função t pode ser obtida por inversão da função comprimento de arco de c a partir de um ponto (qualquer) t_0 fixado em I . A curva c_1 é dita uma **reparametrização de c por comprimento de arco**.

Em geral, sempre que o vetor velocidade de uma curva c é unitário para todos os valores do parâmetro, dizemos que c está **parametrizada por comprimento de arco** (neste caso, é usual a letra s para designar o parâmetro e não se utiliza o ponto para as derivadas $c'(s), c''(s)$, etc.).

Capítulo 10

Coordenadas polares e variação de ângulo

É usual, em muitas situações, a representação dos pontos do plano por meio de **coordenadas polares**: fixando-se a origem O e uma semirreta s (usualmente tomada como o semieixo positivo da primeira coordenada em \mathbb{R}^2),

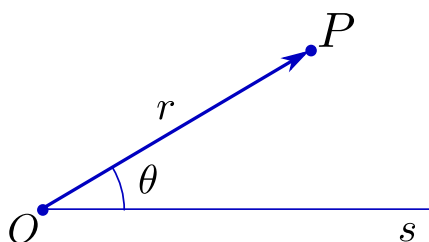


Figura 10.1: coordenadas polares

as coordenadas polares de um ponto P , tal que $P \neq O$, são (r, θ) , sendo r a distância de P a O e θ a medida de um ângulo entre a semirreta \overrightarrow{OP} e s . Se $P = O$, usa-se $r = 0$ e θ qualquer. O ângulo θ é medido positivamente, de s para \overrightarrow{OP} , se andamos no sentido trigonométrico e negativamente, se andamos no sentido horário.

Uma definição mais rigorosa pode ser dada (sem menção à geometria), considerando que, para nós, o ponto P é um elemento (x, y) de \mathbb{R}^2 . Diremos, então, que (r, θ) são **coordenadas polares** de (x, y) se

$$(x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Esta definição tem a vantagem de deixar claro que o ângulo θ não está univocamente definido (a rigor, r também não, se não exigirmos $r \geq 0$).¹ Supondo $r > 0$ (e, é

¹Não é usual, mas, às vezes, é útil trabalhar com r negativo

claro, deixando de fora o ponto O), as coordenadas polares podem ser vistas como a representação dos vetores do plano (menos $\vec{0}$) por meio de um vetor unitário u e um número positivo r :

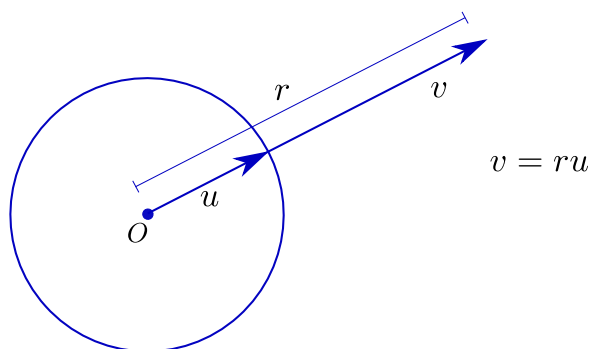


Figura 10.2: coordenadas polares, versão vetorial

se $v \neq \vec{0}$, temos $v = ru$, com $r = |v|$ e $u = r^{-1}v$. Escolhida a semirreta s , encaramos o círculo unitário C (onde vivem os u) como um círculo trigonométrico; neste sentido, a coordenada angular θ pode ser vista como uma representação numérica do vetor u (de forma que, se θ é o ângulo medido a partir de $s \cap C$, o ponto de C determinado por u corresponde a θ).

10.1 Cônicas em coordenadas polares

Pode, em alguns casos, ser mais simples, ou mais conveniente, expressar o raio r como função de θ do que descrever, diretamente, as coordenadas x e y . Pode, também, ser divertido: assim como, dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nos aplicamos em esboçar a curva descrita, em coordenadas cartesianas, por $y = f(x)$, podemos, também, passar instantes agradáveis esboçando, dada uma função $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a curva descrita, em coordenadas polares, por $r = \rho(\theta)$.

Exercício 10.1 *Desenhe as curvas dadas pelas equações a seguir (a é um número positivo, fixo):*

1. $r = a \sin(2\theta)$
2. $r = a \sin(\theta/2)$

$$3. r^2 = a^2 \cos(2\theta)$$

Para expressar a equação de uma cônica em coordenadas polares, usaremos a definição baseada em foco e diretriz.

Definição: Fixados um ponto F , uma reta s (tais que F não esteja sobre s) e um número positivo e , a **cônica** de **foco** F , **diretriz** s e **excentricidade** e é o lugar geométrico dos pontos P do plano definido por F e s que, sendo \overline{PF} a distância de P a F e \overline{Ps} a distância de P a s , satisfazem a

$$\overline{PF} = e\overline{Ps}.$$

Quando $e < 1$, a cônica é dita uma **elipse**; quando $e = 1$, uma **parábola**; quando $e > 1$, uma **hipérbole**.

Procuremos expressar uma cônica em coordenadas polares. Suporemos que o foco está na origem e que a diretriz, s , é uma reta qualquer, de forma que a semirreta $\theta = 0$ não esteja, necessariamente, sobre um eixo de simetria.

Chamaremos de φ o ângulo entre o eixo principal da cônica (perpendicular a s) e a horizontal; d será a distância entre s e O . Se P é um ponto da cônica, temos

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= r, \\ \overline{Ps} &= |d + r \cos(\theta - \varphi)|. \end{aligned}$$

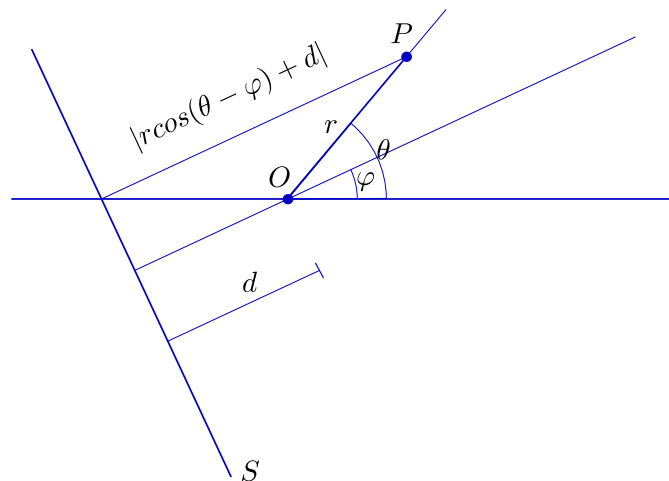


Figura 10.3: cônica em coordenadas polares

De $\overline{OP} = e\overline{Ps}$, obtemos $r = e|d + r \cos(\theta - \varphi)|$.

Vamos ver o que pode ser feito para eliminar as barras de módulo sem elevar ao quadrado. Ora, para que $d + r \cos(\theta - \varphi)$ seja negativo, é preciso que

$$r \geq |r(\cos(\theta - \varphi))| > -r(\cos(\theta - \varphi)) - d = |d + r \cos(\theta - \varphi)|,$$

o que só pode ocorrer se $e > 1$.

Assim, se $r \leq 1$, estamos tranquilos com

$$r = e(d + r \cos(\theta - \varphi)),$$

o que nos dá

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos(\theta - \varphi)}.$$

Note que: se $e < 1$ (elipse), o denominador não se anula e temos um valor de r para cada θ ; se $e = 1$ (parábola), temos denominador nulo se $\theta = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, o que corresponde a dizer que não há ponto na semirreta sobre o eixo principal, partindo do foco na direção oposta à da diretriz.

Observação: É usual, também, utilizar o ângulo $\theta_0 = \varphi + \pi$, correspondente à semirreta normal a s que parte de O e *caminha para* s . Neste caso, nossa equação, em termos de $\theta - \theta_0$ é, tendo em conta que $\cos(\theta - \theta_0) = \cos(\theta - \varphi - \pi) = -\cos(\theta - \varphi)$,

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}.$$

Vejamos, agora, o caso da hipérbole.

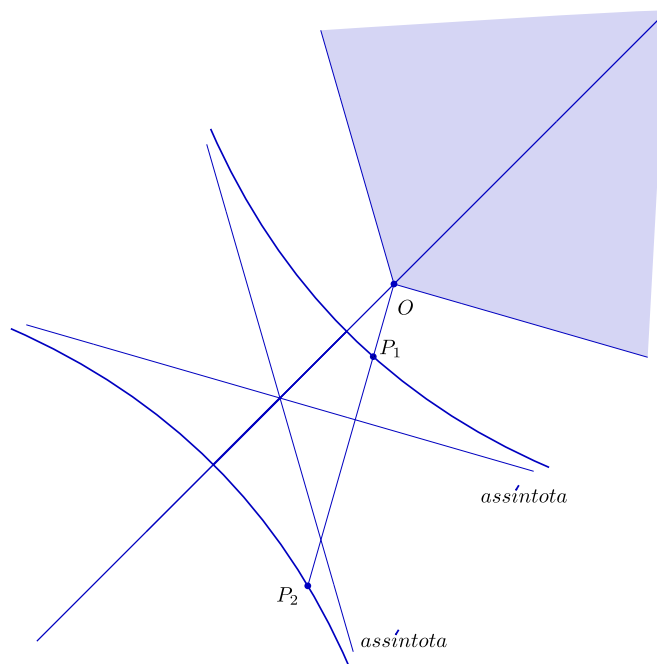


Figura 10.4: hipérbole em coordenadas polares

Na figura, a região sombreada, compreendida entre as duas semirretas que partem de O , e são paralelas a cada uma das assíntotas (sem interceptar a outra assíntota), corresponde aos valores de θ para os quais não há r (não negativo) tal que (r, θ) sejam as coordenadas polares de um ponto da curva. Para cada um dos demais valores de θ , podemos calcular o r correspondente (um ou dois valores, conforme o caso).

Partindo de

$$r = e|d + r \cos(\theta - \varphi)|,$$

obtemos, conforme $|d + r \cos(\theta - \varphi)| = \pm(d + r \cos(\theta - \varphi))$,

$$r_1 = \frac{ed}{1 - e \cos(\theta - \varphi)}, \quad r_2 = \frac{-ed}{1 + e \cos(\theta - \varphi)}.$$

Considerando que queremos r positivo, observamos que r_1 vigora se $\cos(\theta - \varphi) < 1/e$, enquanto r_2 vigora quando θ é tal que $\cos(\theta - \varphi) < -1/e$. Associando os ângulos θ a pontos de um círculo, temos a seguinte figura para o número de valores de r correspondentes a θ , conforme a região em que se encontra θ .

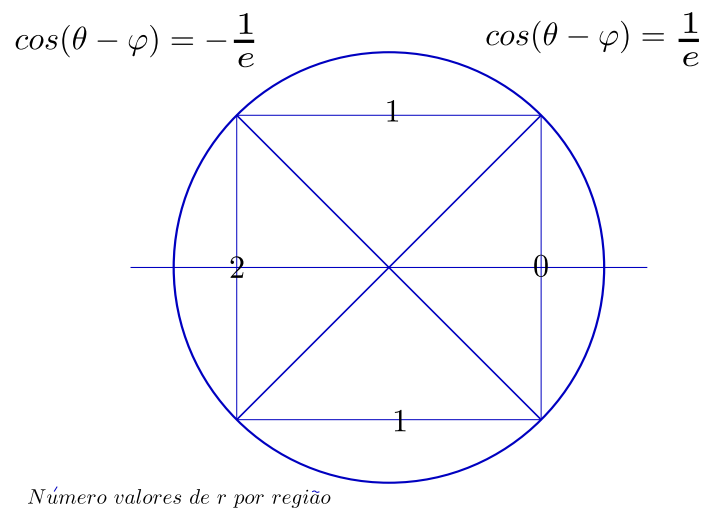


Figura 10.5:

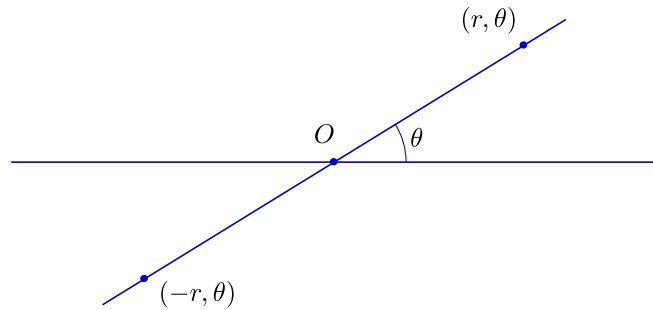
Os valores do tipo r_1 correspondem ao ramo da hipérbole situado, em relação à diretriz, no mesmo semiplano em que se encontra o foco O ; os valores do tipo r_2 correspondem ao outro ramo (basta observar que, nos valores de θ em que ambos estão definidos, ou seja, quando $\cos(\theta - \varphi) < -1/e$, temos $r_2 > r_1$). Assim, podemos concluir que o primeiro ramo é parametrizado por

$$r_1(\theta) = \frac{ed}{1 - e \cos(\theta - \varphi)}, \quad \cos(\theta - \varphi) < \frac{1}{e};$$

o segundo é parametrizado por

$$r_2(\theta) = \frac{-ed}{1 + e \cos(\theta - \varphi)}, \quad \cos(\theta - \varphi) < -\frac{1}{e}.$$

Uma alternativa, para o segundo ramo, é usar a região correspondente a $\cos(\theta - \varphi) > 1/e$, observando que $\theta \mapsto \theta + \pi$ é uma bijeção entre essa região e a definida por $\cos(\theta - \varphi) < -1/e$, mantendo os valores absolutos dos cossenos, mas invertendo-lhes os sinais. Lançando mão de valores negativos para r , o mesmo ramo pode ser descrito por



$$r_2(\theta) = \frac{ed}{1 - e \cos(\theta - \varphi)}, \quad \cos(\theta - \varphi) > \frac{1}{e}.$$

Como a nova versão para r_2 nos dá a mesma fórmula que já usávamos para r_1 , podemos juntá-las em uma só, parametrizando a hipérbole (os dois ramos incluídos) por

$$r(\theta) = \frac{ed}{1 - e \cos(\theta - \varphi)}, \quad \cos(\theta - \varphi) \neq \frac{1}{e};$$

10.2 Variação de ângulo

Exercício 10.2 Seja P o ponto de coordenadas cartesianas $(1, \sqrt{3})$. Determine todos os pares (r, θ) tais que $P = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Não esqueça os valores negativos de r .

Exercício 10.3 Seja $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $c(t) = (\cos t, \sin t)$. Note que, para cada par (x, y) com $x^2 + y^2 = 1$, c passa infinitas vezes por (x, y) . Fixe, para cada (x, y) tal que $x^2 + y^2 = 1$, um $\tilde{\theta}$ tal que $(x, y) = (\cos \tilde{\theta}, \sin \tilde{\theta})$ e chame-o de $\tilde{\theta}(x, y)$. Defina $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\theta(t) = \tilde{\theta}(\cos t, \sin t).$$

Tente definir os $\tilde{\theta}$ de forma que a função θ assim obtida seja contínua. Não consiga.

O fato que gostaríamos de ressaltar, com essa conversa toda dos exercícios acima, é que temos duas situações bem distintas relacionando as coordenadas cartesianas (x, y) e polares (r, θ) de um mesmo ponto P (suporemos $r \geq 0$):

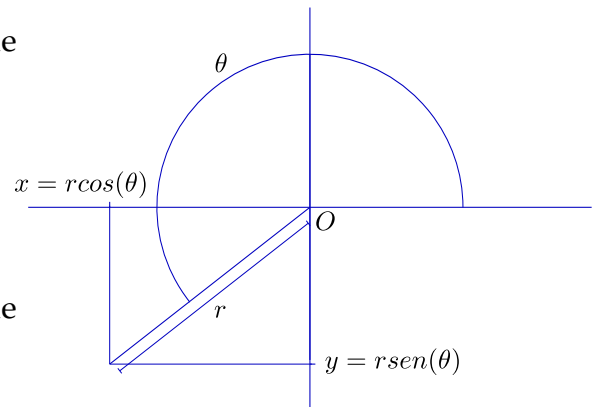
(i) dados r e θ , obtemos x e y diretamente e de maneira perfeitamente determinada, por

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta;$$

(ii) se, por outro lado, tentamos obter r e θ de x e y (com $r \geq 0$), temos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$



mas θ tem infinitos valores possíveis (e fórmulas como $\theta = \arctan(y/x)$, $\theta = \arcsin(y/\sqrt{x^2 + y^2})$ ou $\theta = \arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2})$ levam sempre a imprecisões).

Mesmo se convencionarmos $\theta \in [0, 2\pi[$, ou $\theta \in]-\pi, \pi]$, que são opções naturais, resta o problema do *salto*: se andamos sobre uma curva fechada que dá uma volta em torno de O , em algum momento (ao passarmos pelo eixo dos x), θ dará um salto de 2π . Isso significa que, se quisermos definir uma função

$$\theta : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que corresponda ao ângulo em coordenadas polares, estaremos obrigados a lidar com um certo grau de *imperfeição*.

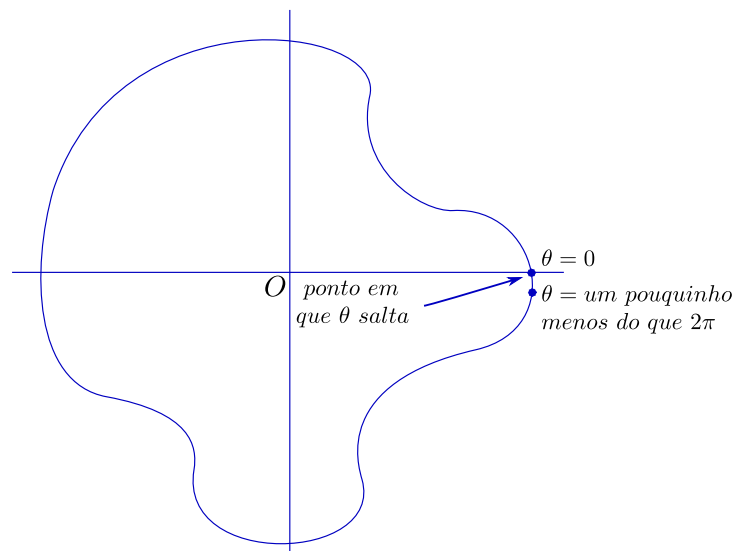


Figura 10.6: salto na função ângulo

Por outro lado, dada uma curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$, tal que c não passa pela origem, o problema de definir funções $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, tais que

$$x(t) = r(t) \cos \theta,$$

$$y(t) = r(t) \sin \theta,$$

tem mais chances de ser resolvido sem saltos, mesmo quando c dá várias voltas em torno da origem.

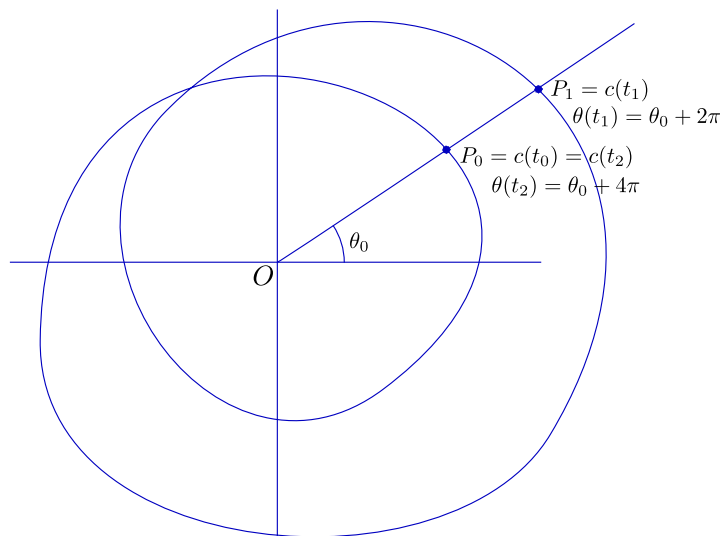


Figura 10.7: variação de ângulo ao longo de uma curva

Partindo de $P_0 = c(t_0)$, escolhemos θ_0 adequado para ser $\theta(t_0)$. A partir daí, no caso de nossa figura, θ vai aumentando até que, em t_1 , tenhamos $\theta(t_1) = \theta_0 + 2\pi$. Continuamos avançando até que, em um tempo t_2 , voltemos a P_0 ($c(t_2) = P_0$), mas agora com $\theta(t_2) = \theta_0 + 4\pi$.

Exercício 10.4 Entenda isso muito bem!

Assim, ao que tudo indica, dada uma curva parametrizada $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dada por

$$c(t) = (x(t), y(t)),$$

podemos encontrar funções $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, com r estritamente positiva, tais que

$$c(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \quad \forall t \in I$$

(e isso, é claro, de forma que, sendo x e y contínuas, tenhamos r e θ contínuas). Com relação a r , não há dúvidas: $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$. Resta definir $\theta(t)$, com precisão, em função de $x(t)$ e $y(t)$.

Capítulo 11

Variação de ângulo ao longo de uma curva

Consideremos o seguinte problema: dada uma curva parametrizada $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $c(t) \neq (0,0)$ para todo t em I , encontrar $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$c(t) = |c(t)|(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \quad \forall t \in I.$$

Vamos supor que $c(t) = (x(t), y(t))$ é tal que x e y são deriváveis, com derivadas contínuas, e exigir que nossa função θ seja, também, derivável.¹

Começemos supondo o problema resolvido. Teríamos, então, uma função $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(x(t), y(t)) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \quad \forall t \in I,$$

sendo $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$. Omitindo a variável t , podemos escrever $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Derivando em relação a t , temos

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta,$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta.$$

Multiplicando \dot{x} por $-\sin \theta$, \dot{y} por $\cos \theta$ e somando, obtemos

$$\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta = r\dot{\theta}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r\dot{\theta}.$$

Substituindo $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\cos \theta = x/r$ e $\sin \theta = y/r$, segue

$$\dot{\theta} = \frac{-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta}{r} = \frac{-y\dot{x} + x\dot{y}}{x^2 + y^2}.$$

Conseguimos, assim, obter, senão para θ , pelo menos uma expressão para $\dot{\theta}$.

Exercício 11.1 Observe que nossas hipóteses garantem que

¹A derivabilidade de θ pode, na verdade, ser deduzida das de x e de y ; não é um exercício muito difícil

$$\frac{-y\dot{x} + x\dot{y}}{x^2 + y^2}$$

é uma função contínua.

Para construir uma candidata a θ , comecemos fixando t_0 em I e observemos que, como

$$\left(\frac{x(t_0)}{(x(t_0)^2 + y(t_0)^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 + \left(\frac{y(t_0)}{(x(t_0)^2 + y(t_0)^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 = 1,$$

podemos escolher um θ_0 tal que

$$\frac{x(t_0)}{(x(t_0)^2 + y(t_0)^2)^{\frac{1}{2}}} = \cos \theta_0, \quad \frac{y(t_0)}{(x(t_0)^2 + y(t_0)^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin \theta_0.$$

Fazendo $\theta(t_0) = \theta_0$ e sendo $\dot{\theta}$ contínua, obtemos, do Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\theta}(\tau) d\tau.$$

Assim, nossa função θ , com $\theta(t_0)$ fixado em θ_0 , será dada por

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \frac{-y(\tau)\dot{x}(\tau) + x(\tau)\dot{y}(\tau)}{x(\tau)^2 + y(\tau)^2} d\tau.$$

Bem, ao que tudo indica, o problema está resolvido: encontramos uma expressão para θ (que, em casos concretos, pode só ser calculável por meio de aproximações numéricas). Mas, na verdade, ainda não provamos que a função θ dada por nossa fórmula é, de fato, uma solução. Realmente, a expressão de θ foi deduzida a partir de $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, mas não é imediato que possamos fazer o caminho de volta. Encaremos o desafio.

Teorema: Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva dada por $c(t) = (x(t), y(t))$, sendo x e y deriváveis, com derivadas contínuas. Se c não passa pela origem (ou seja, $c(t) \neq (0, 0)$ para todo t), então existe uma função $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, derivável e com derivada contínua, tal que

$$c(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \quad \forall t \in I,$$

sendo $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$. Além disso,

$$\dot{\theta}(t) = \frac{-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} \quad \forall t \in I.$$

Demonstração: Como acabamos de ver, se existe uma tal θ , então, forçosamente, teremos

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \frac{-y(\tau)\dot{x}(\tau) + x(\tau)\dot{y}(\tau)}{x(\tau)^2 + y(\tau)^2} d\tau.$$

Vamos, agora, provar que uma tal θ , de fato, exista. Começemos pelo caso mais simples: suponhamos que c é tal que $|c(t)| \equiv 1$, ou seja, $x(t)^2 + y(t)^2 = 1 \forall t \in I$. Fixemos um t_0 em I e tomemos um θ_0 tais que $x(t_0) = \cos \theta_0$ e $y(t_0) = \sin \theta_0$. A função θ , a partir daí, é definida por

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t [-y(\tau)\dot{x}(\tau) + x(\tau)\dot{y}(\tau)] d\tau.$$

Nosso objetivo é provar que $x(t) = \cos \theta(t)$ e $y(t) = \sin \theta(t)$, para todo t . Usaremos a estratégia de provar que a função

$$f(t) = [x(t) - \cos \theta(t)]^2 + [y(t) - \sin \theta(t)]^2$$

é identicamente nula.

É imediato que $f(t_0) = 0$. Assim, basta demonstrar que f' é identicamente nula. Façamos as contas (omitindo a variável t). Começamos com

$$f' = 2 [(x - \cos \theta)(\dot{x} + \dot{\theta} \sin \theta) + (y - \sin \theta)(\dot{y} - \dot{\theta} \cos \theta)]$$

e, observando que $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$ (já que $x^2 + y^2 = 1$) e que $\dot{\theta} = -y\dot{x} + x\dot{y}$, obtemos

$$f' = 2 [-yx\dot{x} + (x^2 - 1)\dot{y}] \sin \theta + 2 [(y^2 - 1)\dot{x} - xy\dot{y}] \cos \theta.$$

Ou seja,

$$f' = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) [-y \sin \theta - x \cos \theta] = 0.$$

Provado o caso particular, suponhamos agora que c , não necessariamente, satisfaz a $x^2 + y^2 = 1$. Consideremos a curva

$$c_1(t) = \left(\frac{x(t)}{r(t)}, \frac{y(t)}{r(t)} \right).$$

Como c_1 se enquadra no caso já demonstrado, podemos garantir a existência de uma função θ tal que $c_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$, o que nos dá

$$c(t) = r(t)c_1(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \forall t \in I,$$

com

$$\dot{\theta} = -\frac{y}{r} \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{x}{r} \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{r} \right) = \frac{-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} \forall t \in I.$$

■

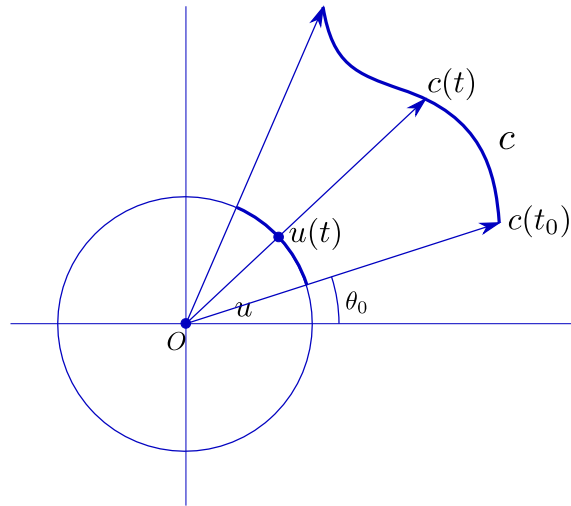
Existem outras maneiras de chegar à fórmula de $\dot{\theta}$. Apresentaremos, a seguir, uma que nos parece bastante instrutiva.

O ângulo θ pode ser medido pelo movimento da projeção,

$$u(t) = \frac{1}{|c(t)|}c(t),$$

do ponto $c(t)$ sobre o círculo unitário S^1 . O vetor u é uma espécie de *ponteiro* que marca o ângulo θ . De fato, a variação de θ é dada pelo comprimento do arco varrido, sobre S^1 , pela projeção de c . Assim, basta escrever

$$u(t) = \left(\frac{x(t)}{r(t)}, \frac{y(t)}{r(t)} \right)$$



e calcular \dot{u} . O problema é que o comprimento de arco sempre aumenta; o que queremos, porém, é que θ aumente quando u se move no sentido trigonométrico e diminua quando u anda no sentido horário. Vamos lançar mão de um pequeno artifício: girando $u(t)$ de um ângulo reto, no sentido trigonométrico, temos o vetor $u(t)^\perp$, que tem a direção de $\dot{u}(t)$, é unitário e aponta *no bom sentido*. Isto quer dizer que

$$\langle \dot{u}(t), u(t)^\perp \rangle = \begin{cases} |\dot{u}(t)|, & \text{se } \theta \text{ está crescendo,} \\ -|\dot{u}(t)|, & \text{se } \theta \text{ está decrescendo.} \end{cases}$$

Assim, no lugar de fazer $\dot{\theta} = |\dot{u}|$, que seria, trocando em miúdos, nosso primeiro chute, faremos

$$\dot{\theta}(t) = \left\langle \dot{u}(t), u(t)^\perp \right\rangle = \left\langle \dot{u}(t), \left(\frac{-y(t)}{r(t)}, \frac{x(t)}{r(t)} \right) \right\rangle.$$

Fazendo as contas, temos:

$$\dot{u} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} c \right) = \frac{1}{r^2} (rc - \dot{r}c);$$

como é fácil notar, $\langle c, u^\perp \rangle = 0$; logo,

$$\dot{\theta} = \langle \dot{u}, u^\perp \rangle = \left\langle \frac{1}{r} \dot{c}, u^\perp \right\rangle = \left\langle \frac{1}{r} (\dot{x}, \dot{y}), \frac{1}{r} (-y, x) \right\rangle = \frac{-y\dot{x} + x\dot{y}}{r^2} = \frac{-y\dot{x} + x\dot{y}}{x^2 + y^2}.$$

Exercício 11.2 Dada uma curva $c(t) = (x(t), y(t))$, considere, onde fizerem sentido, as funções

$$\theta_1 = \arctg \frac{y}{x}; \quad \theta_2 = \arccos \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad \theta_3 = \arcsen \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Calcule $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ e $\dot{\theta}_3$.

Exercício 11.3 Sejam, para t em $[0, 2\pi]$, $x(t) = 1 + 2 \cos t$, $y(t) = 1 + 2 \sin t$. Calcule, sem fazer contas,

$$\int_0^{2\pi} \frac{-y\dot{x} + x\dot{y}}{x^2 + y^2} dt.$$

Exercício 11.4 Para $t \in]-\infty, 0]$, faça $x(t) = t$, $y(t) = t^4$. Calcule

$$\int_{-\infty}^0 \frac{-y\dot{x} + x\dot{y}}{x^2 + y^2} dt.$$

Capítulo 12

O número de voltas

12.1 O número de voltas

No Livro 1, introduzimos o **número de voltas** que uma curva fechada dá em torno de um ponto P do plano e admitimos um certo princípio fundamental. Vamos retomar o trabalho. Mas agora vamos dar uma definição para o número de voltas e vamos demonstrar o princípio fundamental.

Se $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma **curva fechada** (isto é, se $c(a) = c(b)$) que não passa pelo ponto $O = (0, 0)$, notaremos por $n(c, P)$ o **número de voltas** que c dá em torno da origem O . Tal número (também chamado de **índice** de c em relação a O e notado $i(c, O)$) é um inteiro, positivo se c gira no sentido trigonométrico, negativo se gira no horário. A definição precisa que daremos agora se restringe a **curvas fechadas de classe C^1** (isto é, com primeira derivada contínua).

Definição: Se $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ é uma curva parametrizada fechada de classe C^1 , dada por $c(t) = (x(t), y(t))$ o **número de voltas** de c em torno da origem é definido por

$$n(c) = n(c, O) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} dt.$$

Se $P = (x_0, y_0)$ é um ponto qualquer e c não passa por P , isto é, se $c(t) \neq (x_0, y_0)$ para todo t em $[a, b]$, então o **número de voltas** de c em torno de P é definido por $n(c, P) = n(c - P, O)$, sendo $c - P$ a curva definida em $[a, b]$ por $(c - P)(t) = c(t) - (x_0, y_0)$.

Note que o número de voltas depende da parametrização. Note, também, que teremos que provar que, de fato, o número de voltas, agora definido por uma integral, é um número inteiro. Se bem entendemos o significado da integral que nos dá a variação de ângulo, é razoável acreditar na integridade do número de voltas, mas isto não dispensa uma prova formal.

Exercício 12.1 Considere, para cada n inteiro (positivo, negativo ou nulo), a curva $c_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $c_n(t) = (\cos(nt), \sin(nt))$. Note que o **traço** de c_n (isto é, o subconjunto de \mathbb{R}^2 formado pelos

pontos $(\cos(nt), \sin(nt))$, com t em $[0, 2\pi]$ é o círculo de equação $x^2 + y^2 = 1$ (para qualquer n , desde que $n \neq 0$). Qual é o número de voltas de c_n em torno da origem? E de $P = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$? E de $P = (1, 2)$? Considere, também, o caso $n = 0$.

Proposição: Se $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva parametrizada fechada de classe C^1 , dada por $c(t) = (x(t), y(t))$, então, se c não passa pela origem, o **número de voltas** de c em torno da origem, definido por

$$n(c) = n(c, O) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} dt.$$

é um número inteiro. O mesmo acontece com o número de voltas de c em torno de qualquer ponto P , caso c não passe por P .

Demonstração: Como vimos no capítulo anterior, se c não passa pela origem, podemos escrever, para todo t em $[a, b]$,

$$c(t) = r(t)(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))),$$

sendo r e θ definidas em $[a, b]$ por

$$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}, \quad \theta(t) = \int_a^t \frac{-y(\tau)\dot{x}(\tau) + x(\tau)\dot{y}(\tau)}{x(\tau)^2 + y(\tau)^2} d\tau.$$

Como c é fechada, temos $r(b) = r(a)$ e $(\cos(b), \sin(b)) = (\cos(a), \sin(a))$, o que nos garante que

$$n(c, O) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)) \in \mathbb{Z}.$$

■

12.2 Curvas e Homotopias

No Livro 1, fizemos farto uso do que chamamos de

Princípio Fundamental: se a curva c e o ponto P se movem (continuamente no plano sem se cruzarem (isto é, de forma que P nunca esteja sobre o traço de c), então $n(c, P)$, o número de voltas de c em torno de P , não varia.

Para enunciá-lo de forma um pouco mais precisa, e demonstrá-lo, vamos a algumas definições.

Definição: Uma **curva fechada** é uma função contínua $c : [a, b] \rightarrow X$, tal que $c(b) = c(a)$. Salvo menção em contrário, suporemos $X = \mathbb{R}^2$. Quando nos aprofundarmos um pouco mais no assunto, exigiremos um pouco mais (tipicamente, que c tenha derivada contínua).

Definição: Dadas duas curvas (fechadas ou não), c_0 e c_1 , contínuas, $c_1, c_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, a **distância** entre c_1 e c_0 é o número real

$$d(c_1, c_0) = \max \{|c_1(t) - c_0(t)|, t \in [a, b]\}.$$

Ou seja: a distância entre c_1 e c_0 é a maior das distâncias entre os correspondentes pontos $c_1(t)$ e $c_0(t)$, com t no intervalo (comum) de definição das curvas.

Para dizer que uma curva se movimenta da posição c_0 até a posição c_1 (cada posição, neste caso, é uma curva) criamos uma função que a cada valor de um parâmetro s , variando de 0 a 1, associa uma curva fechada c_s . Embora possa parecer um pouco assustador, o fato é que c_s se move no conjunto \mathcal{C} das curvas fechadas no plano. Deixaremos implícito que, nesse caso, todas as curvas estão definidas no mesmo intervalo, $[a, b]$.

Definição: Dadas as curvas fechadas $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow X$, uma **homotopia de caminhos fechados** entre c_0 e c_1 em X é uma função contínua que a cada s em um certo intervalo $[\alpha, \beta]$ associa uma curva fechada $c_s : [a, b] \rightarrow X$, com $c_\alpha = c_0$ e $c_\beta = c_1$. A continuidade da aplicação $s \mapsto c_s$ no valor s_0 do parâmetro, deve ser entendida, caso precisemos de uma definição rigorosa, por:

a função $h : [\alpha, \beta] \rightarrow M$, que a cada s em $[\alpha, \beta]$ associa uma curva $h(s) = c_s$ em M , satisfaz

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid |s - s_0| < \delta \implies d(c_s, c_{s_0}) < \varepsilon,$$

sendo $M = \{c : [a, b] \rightarrow X \mid c \text{ contínua}, c(a) = c(b)\}$. Para os efeitos de nossas homotopias, podemos supor que X é um subconjunto do plano.

Observação: Tipicamente, uma homotopia de caminhos fechados é dada por uma função

$$H : [\alpha, \beta] \times [a, b] \rightarrow X,$$

contínua e tal que:

- (i) $H(s, a) = H(s, b)$, para todo s em $[\alpha, \beta]$;
- (ii) $H(\alpha, t) = c_0(t)$ e $H(\beta, t) = c_1(t)$ para todo t em $[a, b]$.

Neste caso, fazemos, claro, $c_s(t) = H(s, t)$, para todo s em $[\alpha, \beta]$ e para todo t em $[a, b]$.

Exercício 12.2 Note que há uma sutil diferença entre a definição de homotopia e a existência de uma H como acima. Provar que uma tal H nos fornece uma homotopia de caminhos fechados tem uma dificuldade técnica: provar que c_s varia continuamente com s .

Exercício 12.3 Mostre que podemos sempre supor, na definição de homotopia, que s varia no intervalo $[0, 1]$, fazendo $s' = (s - \alpha) / (\beta - \alpha)$.

12.3 O princípio fundamental

Princípio Fundamental do Número de Voltas: Sejam $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ curvas fechadas. Se existe homotopia de caminhos fechados em $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ entre c_0 e c_1 , então $n(c_1, O) = n(c_0, O)$.

Podemos dar ainda uma versão forte:

Princípio Fundamental do Número de Voltas, versão forte: Sejam $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas fechadas. Se $P : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é contínua e existe homotopia de caminhos fechados em $s \mapsto c_s$ entre c_0 e c_1 , com $s \in [0, 1]$ e tal que $P(s)$ não está no traço de c_s , qualquer que seja s em $[\alpha, \beta]$, então $n(c_1, P(1)) = n(c_0, P(0))$.

Exercício 12.4 Mostre que o princípio forte pode ser reduzido ao anterior (em que o ponto P permanece fixo): a ideia é que, se c é uma curva fechada e P é um ponto, ambos no plano, então $n(c, P) = n(\bar{c}, O)$, sendo O a origem e $\bar{c}(t) = c(t) - O$.

Exercício 12.5 Compreenda que o princípio forte significa, exatamente, que: se a curva c e o ponto P se movem (continuamente no plano sem se cruzarem (isto é, de forma que P nunca esteja sobre o traço de c), então $n(c, P)$, o número de voltas de c em torno de P , não varia.

Há uma dificuldade evidente a ser enfrentada: enunciemos o princípio fundamental em termos de homotopias que só pressupõem continuidade, enquanto que só definimos número de voltas para curvas de classe C^1 . Enfrentar tal dificuldade vai exigir algumas piruetas técnicas! Faz sentido, então, começarmos pelo caso em que nossas curvas são de classe C^1 .

12.4 O caso C^1

Definição: Dadas as curvas, $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow X$, de classe C^1 , uma **homotopia** C^1 entre c_0 e c_1 em X é uma função h , contínua, que a cada s em um certo intervalo $[\alpha, \beta]$ associa uma curva $c_s : [a, b] \rightarrow X$, de classe C^1 , com $c_\alpha = c_0$ e $c_\beta = c_1$. A continuidade da aplicação $s \mapsto c_s$ no valor s_0 do parâmetro, deve ser entendida, neste caso por:

a função $h : [\alpha, \beta] \rightarrow M$, que a cada s em $[\alpha, \beta]$ associa a curva $h(s) = c_s$ em M , satisfaz

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid |s - s_0| < \delta \implies d(c_s, c_{s_0}) + d(\dot{c}_s, \dot{c}_{s_0}) < \varepsilon,$$

sendo $M = \{c : [a, b] \rightarrow X \mid c \text{ de classe } C^1\}$. Para os efeitos de nossas homotopias, podemos supor que X é um subconjunto do plano. Se, além disso, tivermos $c_s(a) = c_s(b)$ para todo s em $[\alpha, \beta]$, nossa homotopia será dita uma **homotopia C^1 de caminhos fechados**.

O crucial, aqui, é que a variação de ângulo de uma curva c depende de c e de sua derivada. Podemos, então, provar um resultado técnico mas importante.

Lema: Se a função $h : [\alpha, \beta] \rightarrow M$ é uma homotopia C^1 entre c_0 e c_1 , sendo $M = \{c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \mid c \text{ de classe } C^1\}$, então a função $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$g(s) = \int_a^b \frac{-y_s(t)\dot{x}_s(t) + x_s(t)\dot{y}_s(t)}{x_s(t)^2 + y_s(t)^2} dt,$$

é contínua em $[\alpha, \beta]$ (aqui $h(s) = c_s$, com $c_s(t) = (x_s(t), y_s(t))$).

Demonstração: Fixemos s_0 em $[\alpha, \beta]$ e um certo ε , positivo. Os resultados sobre somas, diferenças, produtos e quocientes de limites nos garantem que existe um certo δ_1 , positivo, tal que, se

$$|x_s(t) - x_{s_0}(t)| < \delta_1, |\dot{x}_s(t) - \dot{x}_{s_0}(t)| < \delta_1, |y_s(t) - y_{s_0}(t)| < \delta_1, |\dot{y}_s(t) - \dot{y}_{s_0}(t)| < \delta_1,$$

então

$$\left| \frac{-y_s(t)\dot{x}_s(t) + x_s(t)\dot{y}_s(t)}{x_s(t)^2 + y_s(t)^2} - \frac{-y_{s_0}(t)\dot{x}_{s_0}(t) + x_{s_0}(t)\dot{y}_{s_0}(t)}{x_{s_0}(t)^2 + y_{s_0}(t)^2} \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Tomemos, então, respaldados pela definição de homotopia C^1 , um δ , positivo, tal que

$$|s - s_0| < \delta \implies d(c_s, c_{s_0}) + d(\dot{c}_s, \dot{c}_{s_0}) < \delta_1.$$

Isto nos garante (basta olhar para cada coordenada) que, para $|s - s_0| < \delta$, valem

$$|x_s(t) - x_{s_0}(t)| < \delta_1, |\dot{x}_s(t) - \dot{x}_{s_0}(t)| < \delta_1, |y_s(t) - y_{s_0}(t)| < \delta_1, |\dot{y}_s(t) - \dot{y}_{s_0}(t)| < \delta_1.$$

Daí segue que, se $|s - s_0| < \delta$, então

$$|g(s) - g(s_0)| \leq \int_a^b \left| \frac{-y_s(t)\dot{x}_s(t) + x_s(t)\dot{y}_s(t)}{x_s(t)^2 + y_s(t)^2} - \frac{-y_{s_0}(t)\dot{x}_{s_0}(t) + x_{s_0}(t)\dot{y}_{s_0}(t)}{x_{s_0}(t)^2 + y_{s_0}(t)^2} \right| dt < \varepsilon.$$

■

Agora ficou moleza.

Princípio Fundamental do Número de Voltas, caso C^1 : Sejam $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ curvas fechadas de classe C^1 . Se existe homotopia C^1 de caminhos fechados em $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ entre c_0 e c_1 , então $n(c_1, O) = n(c_0, O)$.

Demonstração: O número de voltas de uma curva fechada c , de classe C^1 , é inteiro e foi definido pela fórmula

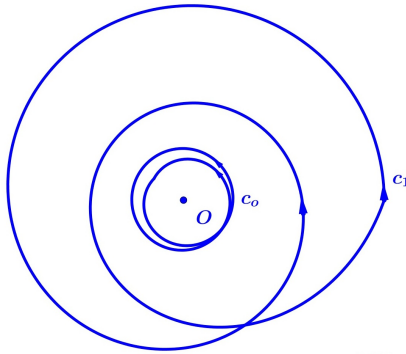
$$n(c) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} dt.$$

Pelo lema acima se $h(s) = c_s$ define uma homotopia de curvas fechadas entre c_0 e c_1 , então

$$n(c_s) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{-y_s(t)\dot{x}_s(t) + x_s(t)\dot{y}_s(t)}{x_s(t)^2 + y_s(t)^2}$$

é contínua. Ora, pelo Teorema do Valor Intermediário, se uma função g é contínua em um intervalo e só assume valores inteiros, então g é constante. Logo, $n(c_1) = n(c_0)$. ■

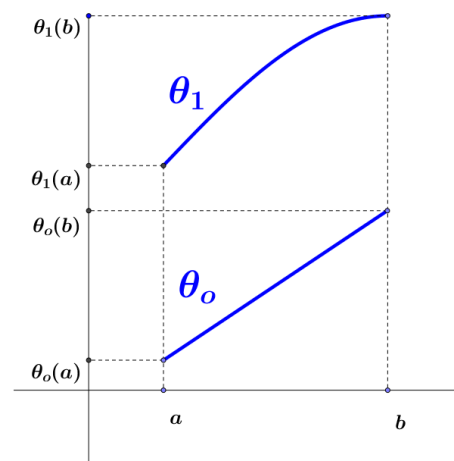
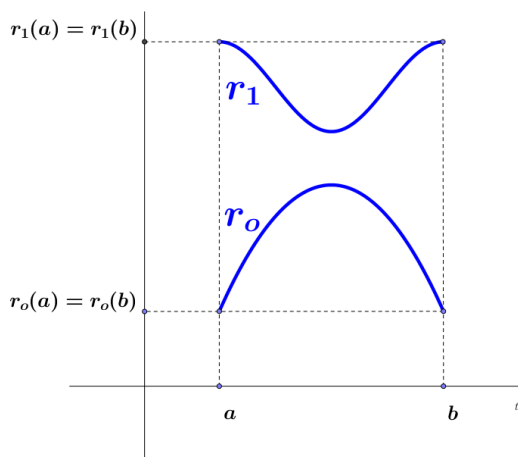
Na verdade, estamos em condições de provar a recíproca: se $n(c_0) = n(c_1)$, então existe homotopia C^1 entre c_0 e c_1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Acrescentando um pouco de nomenclatura, caso exista, em X , homotopia C^1 de caminhos fechados entre as curvas fechadas c_0 e c_1 , ambas de classe C^1 , diremos que c_0 e c_1 são **C^1 -homotópicas** em X .



Teorema: Sejam $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ curvas fechadas de classe C^1 . Então c_0 e c_1 são C^1 -homotópicas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ se, e somente se, $n(c_1, O) = n(c_0, O)$.

Demonstração: Já provamos que curvas C^1 homotópicas têm o mesmo índice. Vejamos agora a recíproca. Suponhamos $n(c_1, O) = n(c_0, O)$ e vamos construir a homotopia. É muito simples, se usarmos coordenadas polares. Ecrevendo $c_1(t) = r_1(t)(\cos \theta_1(t), \sin \theta_1(t))$ e $c_0(t) = r_0(t)(\cos \theta_0(t), \sin \theta_0(t))$, com

$$r_i(t) = \sqrt{x_i(t)^2 + y_i(t)^2}, \quad \theta_i(t) = \theta_i(a) + \int_a^t \frac{-y_i(t)\dot{x}_i(t) + x_i(t)\dot{y}_i(t)}{x_i(t)^2 + y_i(t)^2}, \quad i = 1, 2,$$



temos, como nenhuma das duas curvas passa por $(0,0)$, que r_i e θ_i são C^1 . Além disso, como $r_0(a) = r_0(b)$ e $r_1(a) = r_1(b)$, temos, para todo s , $r_s(a) = r_s(b)$. Façamos, então, para s em $[0, 1]$,

$$c_s(t) = r_s(t)(\cos \theta_s(t), \sin \theta_s(t)),$$

com

$$r_s(t) = (1-s)r_0(t) + sr_1(t), \theta_s(t) = (1-s)\theta_0(t) + s\theta_1(t).$$

É imediato que r_s e θ_s são de classe C^1 , r_s nunca se anula (o que significa que c_s nunca passa pela origem) e que, sendo $n = n(c_0, O) = n(c_1, O)$,

$$\theta_s(b) - \theta_s(a) = 2n\pi \forall s \in [0, 1].$$

Isto significa que as c_s são todas, além de C^1 , fechadas, o que prova que c_0 e c_1 são C^1 -homotópicas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. ■

Capítulo 13

Aproximações por curvas suaves

Definição: Uma curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo I um intervalo, é dita de classe C^k de c tem derivadas contínuas até ordem k . Isto significa, no caso de extremidades de I pertencerem a I , a existência e continuidade, também, das derivadas laterais nas extremidades. Uma curva é dita de classe C^∞ se é de classe C^k para todo k .

Temos um problema: estamos pensando em termos de curvas contínuas, mas só definimos a variação de ângulo e o número de voltas para curvas que tenham derivada contínua. Vamos lidar com a situação sacando do bolso um surpreendente teorema: dada uma curva contínua,

$$c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

podemos aproximá-la, tão bem quanto quisermos, por uma curva suave (isto é: de classe C^∞),

$$c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

O resultado básico é o Teorema a seguir.

Teorema: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então, para todo real estritamente positivo ε , existe uma função $f_\varepsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ , tal que

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b].$$

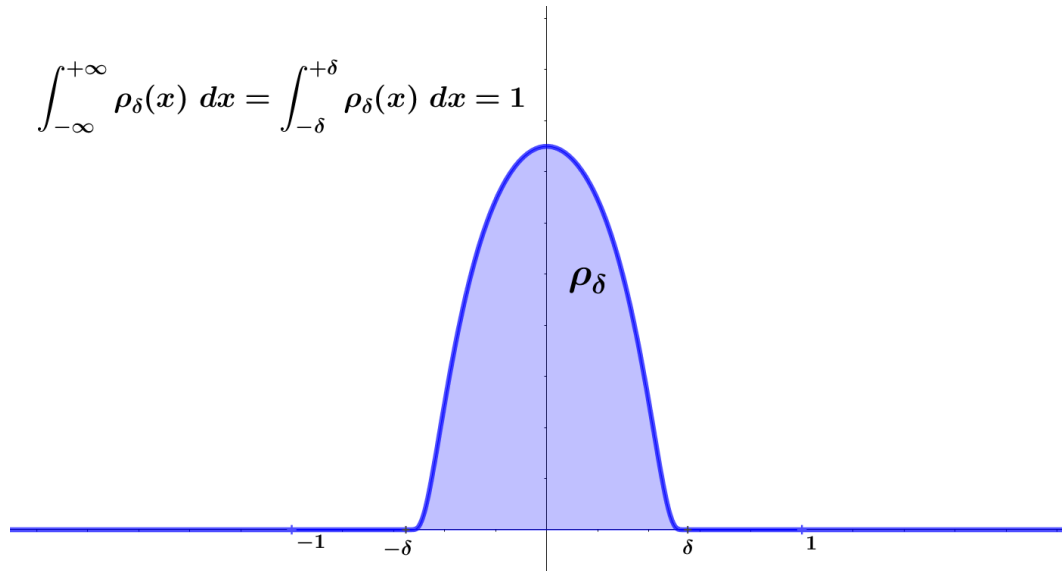
Além disso, se $f(a) = f(b)$, podemos tomar f_ε tais que os valores de f_ε , e os de todas as suas derivadas, calculadas em a , coincidam com os correspondentes valores de f_ε , e os de todas as suas derivadas, calculadas em b .

A ideia da demonstração é substituir o valor de f em cada ponto, x , pela média dos valores de f em uma pequena vizinhança de x , ponderada por uma função, $\rho_\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, bastante suave.

Nossa ρ_δ terá as seguintes características:

1. $\rho_\delta(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2. $|x| \geq \delta \Rightarrow \rho_\delta(x) = 0$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\delta(x) dx = 1$
4. ρ_δ é de classe C^∞



Para definir a função f_ε , começamos estendendo a função f a todos os reais, mantendo a continuidade em a e em b . A nova versão de f será então $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\bar{f}(x) = f(x)$, se $x \in [a, b]$, e:

- $\bar{f}(x) = f(a)$, $\forall x < a$ e $\bar{f}(x) = f(b)$, $\forall x > b$, caso $f(a) \neq f(b)$;
- $\bar{f}(x + b - a) = \bar{f}(x) \forall x \in \mathbb{R}$, caso $f(a) = f(b)$.

Nossa f_ε será então definida por

$$f_\varepsilon(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} \bar{f}(y) \rho_\delta(x-y) dy.$$

A relação entre ε e δ (que é apenas, por ora, um número positivo) será negociada mais à frente. Note que, se não tivéssemos estendido f a \bar{f} , nossa f_ε só estaria definida para x em $[a + \delta, b - \delta]$.

Exercício 13.1 Note que f_ε está definida para todo x em \mathbb{R} e que:

- se $f(a) \neq f(b)$, então f_ε é constante em $]-\infty, a - \delta[$ e em $]b + \delta, \infty[$;
- se $f(a) = f(b)$, então f_ε é periódica; mais precisamente, $f_\varepsilon(x + b - a) = f_\varepsilon(x)$, para todo x em \mathbb{R} .

Vamos demonstrar nosso Teorema em duas partes principais:

1. para δ suficientemente pequeno, temos

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)|, \varepsilon \forall x \in [a, b];$$

2. f_ε é de classe C^∞ .

Como já fizemos antes, vamos lançar mão de um Teorema cuja demonstração não faremos.

Teorema: (Teorema de continuidade uniforme) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ é contínua, então f é uniformemente contínua.

O significado de f é *uniformemente contínua* é:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

13.1 A aproximação uniforme

Suponhamos fixado um ε estritamente positivo. O objetivo é simples: queremos provar que, se $\delta > 0$ é suficientemente pequeno, então

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

com

$$f_\varepsilon(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} \bar{f}(y) \rho_\delta(x-y) dy.$$

Começemos fazendo, na integral que define f_ε , a mudança de variável $x - y = z$, que nos dá

$$f_\varepsilon(x) = \int_{-\delta}^{+\delta} \bar{f}(x-z) \rho_\delta(z) dz.$$

Aproveitando que

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \rho_\delta(z) dz = 1,$$

escrevemos

$$f(x) = f(x) \int_{-\delta}^{+\delta} \rho_\delta(z) dz = \int_{-\delta}^{+\delta} f(x) \rho_\delta(z) dz.$$

Como, para x em $[a, b]$, temos $f(x) = \bar{f}(x)$, podemos escrever

$$|f_\varepsilon x - f(x)| = \left| \int_{-\delta}^{+\delta} \bar{f}(x-z) \rho_\delta(z) dz - \int_{-\delta}^{+\delta} \bar{f}(x) \rho_\delta(z) dz \right| \leq \int_{-\delta}^{+\delta} |\bar{f}(x-z) - \bar{f}(x)| \rho_\delta(z) dz.$$

Como, para z entre $-\delta$ e $+\delta$, temos $|(x-z) - x| = |z| < \delta$, basta tomar $\delta_1 > 0$ (cuja existência é garantida pelo Teorema da Continuidade Uniforme) tal que, para x_1 e x_2 em $[a-1, b+1]$

$$|x_1 - x_2| < \delta_1 \Rightarrow |\bar{f}(x_1) - \bar{f}(x_2)| < \varepsilon.$$

Tomamos, agora, $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$. Assim, se $x \in [a, b]$, teremos, dentro da integral, $(x-z) \in [a-1, b+1]$, de forma que $|\bar{f}(x-z) - \bar{f}(x)| < \varepsilon$, o que garante

$$|f_\varepsilon x - f(x)| \leq \int_{-\delta}^{+\delta} |\bar{f}(x-z) - \bar{f}(x)| \rho_\delta(z) dz \leq \int_{-\delta}^{+\delta} \varepsilon \rho_\delta(z) dz = \varepsilon.$$

13.2 A infinita diferenciabilidade das f_ε

Fixemos um δ , positivo. Se tentarmos derivar f_ε , obtemos, usando a definição,

$$f'_\varepsilon(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_\varepsilon(x+h) - f_\varepsilon(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{x+h-\delta}^{x+h+\delta} \bar{f}(y) \rho_\delta(x+h-y) dy - \int_{x-\delta}^{x+\delta} \bar{f}(y) \rho_\delta(x-y) dy \right].$$

Temos um pequeno problema: os intervalos de integração são diferentes. Mas, como os integrandos se anulam fora deles, podemos estendê-los à vontade. Assim, como h vai tender a zero, podemos trabalhar com $|h| < \delta$ e fazer as integrais de $x-2\delta$ a $x+2\delta$. Basta, então, olhar para

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{x-2\delta}^{x+2\delta} \bar{f}(y) \rho_\delta(x+h-y) dy - \int_{x-2\delta}^{x+2\delta} \bar{f}(y) \rho_\delta(x-y) dy \right].$$

Juntando tudo em uma só integral, chegamos a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{x-2\delta}^{x+2\delta} \bar{f}(y) \frac{\rho_\delta(x+h-y) - \rho_\delta(x-y)}{h} dy,$$

o que torna inevitável conjecturar, passando ao limite dentro da integral, que

$$f'_\varepsilon(x) = \int_{x-2\delta}^{x+2\delta} \bar{f}(y) \rho'_\delta(x-y) dy = \int_{x-\delta}^{x+\delta} \bar{f}(y) \rho'_\delta(x-y) dy$$

(note que $\rho'_\delta(x-y)$ se anula para y fora de $[x-\delta, x+\delta]$).

Há um porém: passar ao limite dentro da integral exige algumas precauções. Vamos ter que demonstrar, diretamente, que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_{x-2\delta}^{x+2\delta} \bar{f}(y) \frac{\rho_\delta(x+h-y) - \rho_\delta(x-y)}{h} dy - \int_{x-2\delta}^{x+2\delta} \bar{f}(y) \rho'_\delta(x-y) dy \right] = 0.$$

Como \bar{f} é limitada, podemos fixar M tal que $|\bar{f}(x)| < M$ para todo x em \mathbb{R} e escrever

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x-2\delta}^{x+2\delta} \bar{f}(y) \frac{\rho_\delta(x+h-y) - \rho_\delta(x-y)}{h} dy - \int_{x-2\delta}^{x+2\delta} \bar{f}(y) \rho_\delta'(x-y) dy \right| \leq \\ & \leq M \int_{x-2\delta}^{x+2\delta} \left| \frac{\rho_\delta(x+h-y) - \rho_\delta(x-y) - \rho_\delta'(x-y)h}{h} \right| dy. \end{aligned}$$

Vamos estimar o que vai dentro desta última integral. Usaremos o Teorema do Valor Médio, aplicado à função

$$g(t) = \rho_\delta(x+t-y) - \rho_\delta(x-y) - \rho_\delta'(x-y)t,$$

para t no intervalo $[0, h]$ (ou $[h, 0]$, se h for negativo):

$$\begin{aligned} \rho_\delta(x+h-y) - \rho_\delta(x-y) - \rho_\delta'(x-y)h &= g(h) - g(0) = \\ &= g'(\xi)h = [\rho_\delta'(x-y+\xi) - \rho_\delta'(x-y)]h, \end{aligned}$$

para um certo ξ entre 0 e h . Agora basta observar que, pelo Teorema da Continuidade Uniforme, podemos, dado um α qualquer, positivo, tomar $H > 0$ tal que

$$|x_1 - x_2| < H \Rightarrow |\rho_\delta'(x_1) - \rho_\delta'(x_2)| < \frac{\alpha}{4\delta M}.$$

Desta forma, se $0 < |h| < H$, teremos, para todo x em \mathbb{R} ,

$$\left| \frac{f_\varepsilon(x+h) - f_\varepsilon(x)}{h} - \int_{x-\delta}^{x+\delta} \bar{f}(y) \rho_\delta'(x-y) dy \right| < \alpha.$$

Isto prova a diferenciabilidade de f_ε . Observemos que, na demonstração, usamos apenas que ρ_δ é de classe C^∞ e que $|x| > \delta \Rightarrow \rho_\delta(x) = 0$. Ora, todas as derivadas de ρ_δ têm, também, tais propriedades. Logo, aplicando reiteradamente o raciocínio acima, concluímos que f_ε tem derivada de n -ésima ordem, para todo natural n , dada por

$$f_\varepsilon^{(n)}(x) = \int_{x-2\delta}^{x+2\delta} \bar{f}(y) \rho_\delta^{(n)}(x-y) dy = \int_{x-\delta}^{x+\delta} \bar{f}(y) \rho_\delta^{(n)}(x-y) dy.$$

Se, na última integral, fizermos a substituição $x-y=z$, teremos

$$f_\varepsilon'(x) = \int_{-\delta}^{+\delta} \bar{f}(x-z) \rho_\delta'(z) dz.$$

Daí decorre, imediatamente, que a periodicidade de \bar{f} implica na de f_ε (com o mesmo período), o que implica na periodicidade de todas as derivadas. Nosso teorema está demonstrado.

13.3 Aproximação de curva contínua por sequência de curvas suaves

Esta curta seção é apenas para a entrega de dois corolários do teorema que acabamos de demonstrar.

Corolário 1: Se $c : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ é uma curva contínua, então existe uma sequência $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de curvas C^∞ , $c_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, convergindo uniformemente para c , isto é:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \mid n > n_0 \Rightarrow |c_n(t) - c(t)| < \varepsilon \forall t \in [a, b].$$

Além disso, se c é fechada, isto é, $c(a) = c(b)$, então podemos tomar a sequência $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de forma que os valores de c_n e de todas suas derivadas, quando calculados em b , coincidam com os respectivos valores, quando calculados em a .

Demonstração: Aplique o Teorema a cada uma das coordenadas de c e conclua que

$$\forall n \in \mathbf{N} \exists c_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n \mid |c_n(t) - c(t)| < 1/n \forall t \in [a, b]. \quad \blacksquare$$

Podemos fazer um pouco melhor, modificando a forma como estendemos nossas funções.

Exercício 13.2 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ contínua. Estenda f a $\bar{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, contínua, em duas etapas. Comece definindo \bar{f} em $[2a - b, 2b - a]$ por

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 2f(a) - f(2a - x), & x \in [2a - b, a] \\ f(x), & x \in [a, b] \\ 2f(b) - f(2b - x), & x \in [b, 2b - a] \end{cases}$$

Em seguida, estenda \bar{f} a \mathbf{R} segundo as regras anteriores (mantenha o nome \bar{f}) e defina $\hat{f}_\delta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ por

$$\hat{f}_\delta(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} \bar{f}(y) \rho_\delta^{(n)}(x-y) dy.$$

1. Mostre que, com a definição acima, \bar{f} é contínua em $[2a - b, 2b - a]$.
2. Mostre que, se $s \in [0, b - a]$, então $f(a) - f(a - s) = f(a + s) - f(a)$ e $f(b + s) - f(b) = f(b) - f(b - s)$.
3. Mostre que, para $0 < \delta < b - a$, vale $\hat{f}_\delta(a) = f(a)$ e $\hat{f}_\delta(b) = f(b)$.
4. Suponha que f tem derivada contínua em $[a, b]$. Mostre que \bar{f} tem derivada contínua em $[2a - b, 2b - a]$. Mostre, também, que \hat{f}'_δ converge uniformemente, quando δ tende a 0^+ , para f' , em $[a, b]$.

Corolário 2: Se $c : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ é uma curva contínua, então existe uma sequência $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de curvas C^∞ , $c_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, com $c_n(a) = c(a)$ e $c_n(b) = c(b)$ para todo n , convergindo uniformemente para c .

Capítulo 14

Curvas contínuas em coordenadas polares

Seja $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ uma curva contínua. Apenas contínua, sem qualquer hipótese de diferenciabilidade (e, lembre-se, pode havê-las bem estranhas). Suporemos $c(t)$ dada por $(x(t), y(t))$, com $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas. Definimos $r : [a, b] \rightarrow [0, \infty$ por

$$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}.$$

O desafio é provar a existência de uma função $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, tal que

$$c(t) = (x(t), y(t)) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \quad \forall t \in [a, b].$$

Nossa estratégia passa pelas curvas de classe C^1 : sabemos aproximar curvas contínuas por curvas de classe C^1 e sabemos definir θ para curvas de classe C^1 . Essencialmente, então, o que temos a fazer é:

1. tomamos uma sequência $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de curvas de classe C^1 , com $c_n \rightarrow c$ uniformemente em $[a, b]$;
2. escrevemos cada c_n em coordenadas polares, $c_n(t) = r_n(t)(\cos \theta_n(t), \sin \theta_n(t))$;
3. definimos θ por $\theta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(t)$.

Há, claro, alguns problemas técnicos a superar:

1. precisamos impedir que os θ_n escolham livremente $\theta_n(a)$, para não virar bagunça (este é fácil, já que temos como fixar $\theta(a)$);
2. é preciso provar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(t)$, de fato, existe, para todo t ;
3. há ainda que garantir, em existindo o limite, que este independe da sequência (c_n) escolhida;

4. tudo dando certo, a continuidade de θ também precisa ser demonstrada.

Vamos resolver logo o primeiro problema técnico, alterando a definição de θ . Nossa curva c tem um ponto inicial, $c(a) = (x(a), y(a))$. Fixemos, então, θ_a tal que

$$\cos \theta_a = \frac{x(a)}{r(a)}, \quad \sin \theta_a = \frac{y(a)}{r(a)}.$$

Agora, criamos $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ da seguinte forma:

1. tomamos uma sequência $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de curvas de classe C^1 , com $c_n \rightarrow c$ uniformemente em $[a, b]$;
2. escrevemos cada c_n em coordenadas polares, $c_n(t) = r_n(t)(\cos \theta_n(t), \sin \theta_n(t))$;
3. definimos θ por $\theta(t) = \theta_a + \lim_{n \rightarrow \infty} (\theta_n(t) - \theta_n(a))$.

Exercício 14.1 *Certifique-se de que entendeu a definição de θ_a .*

Exercício 14.2 *Certifique-se de que entendeu o significado e a necessidade desta mudança na construção de θ .*

Vejam, agora, o segundo problema técnico: provar a existência do limite, agora reformulado para

$$\theta(t) = \theta_a + \lim_{n \rightarrow \infty} (\theta_n(t) - \theta_n(a)).$$

Vamos ter que lançar mão do essencialmente único critério que assegura a existência de limites de seqüências: o **critério de Cauchy**, cuja demonstração não faremos aqui.

Critério de Cauchy: Uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de números reais é convergente se, e somente se, é de **Cauchy**, isto é,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \mid m, n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

14.1 Alguns resultados técnicos

O primeiro é um leminha técnico, que nos servirá para estimar a variação de ângulo em um segmento de reta.

Lema 1: Se $c : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $c(t) = (x(t), y(t))$, é de classe C^1 e $|c(t)| > R$ para todo t em $[a, b]$, então

$$\left| \int_a^b \frac{-y\dot{x} + x\dot{y}}{x^2 + y^2} \right| < \frac{L}{R},$$

sendo L o comprimento de c , dado por $L = \int_a^b |\dot{c}|$.

Demonstração: Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz-Buniacóvski, temos

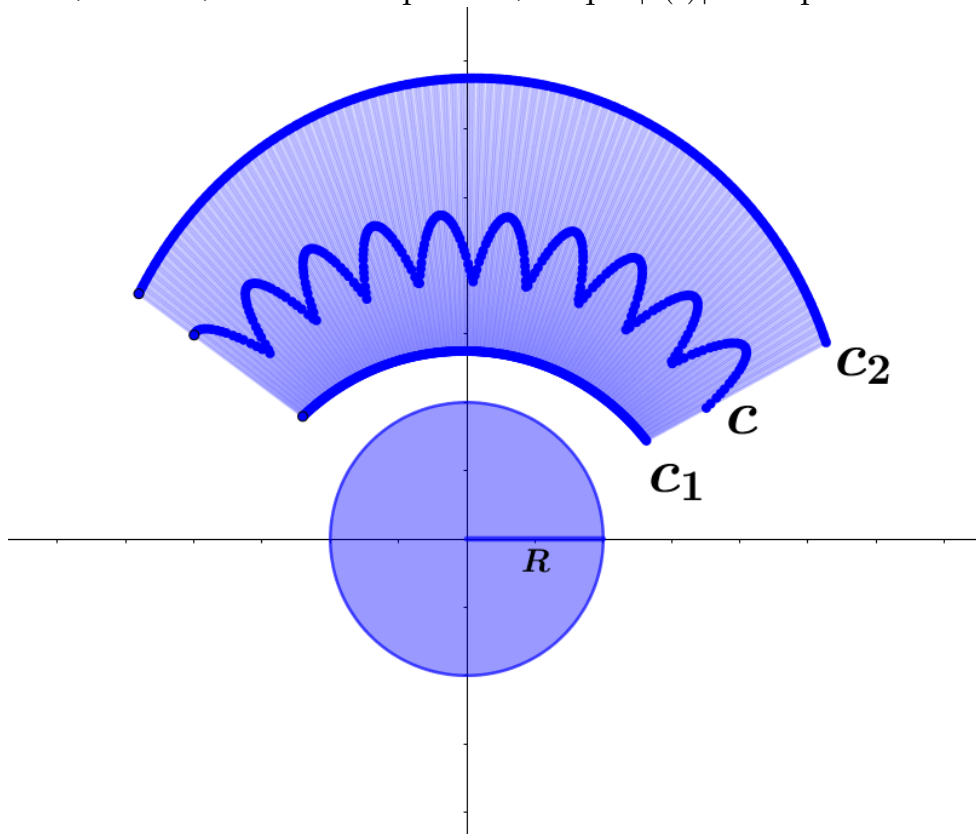
$$|-y\dot{x} + x\dot{y}| = |\langle (-y, x), (\dot{x}, \dot{y}) \rangle| \leq (y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} = |c| |\dot{c}|.$$

Logo,

$$\left| \int_a^b \frac{-y\dot{x} + x\dot{y}}{x^2 + y^2} \right| \leq \int_a^b \left| \frac{-y\dot{x} + x\dot{y}}{x^2 + y^2} \right| \leq \int_a^b \frac{|c| |\dot{c}|}{|c|^2} < \frac{1}{R} \int_a^b |\dot{c}| = \frac{L}{R}.$$

■

Suponhamos, agora, dada uma curva contínua $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. Nosso segundo resultado servirá para garantir que, se c_1 e c_2 são curvas de classe C^1 suficientemente próximas de c , então poderemos deformar uma na outra em $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, por meio de uma homotopia C^1 . Começemos observando que, como $|c|$ é contínua em $[a, b]$ e não se anula, existe R , estritamente positivo, tal que $|c(t)| > 2R$ para todo t em $[a, b]$.



Lema 2: Seja $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $c(t) = (x(t), y(t))$, de classe C^0 e $R > 0$ tal que $|c(t)| > 2R$ para todo t em $[a, b]$. Se $c_1, c_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ são tais que, para todo t em $[a, b]$, vale

$$|c_1(t) - c(t)| < R, \quad |c_2(t) - c(t)| < R,$$

então toda a região D entre c_1 e c_2 , definida por

$$D = \{(1-s)c_1(t) + sc_2(t), s \in [0,1], t \in [a,b]\}$$

está no exterior do disco de centro O e raio R , isto é:

$$(x,y) \in D \Rightarrow x^2 + y^2 > R^2.$$

Demonstração: Seja P um ponto de D . Escrevendo $P = (1-s)c_1(t) + sc_2(t)$ para um certo par (s,t) em $[0,1] \times [a,b]$, temos

$$\begin{aligned} |(1-s)c_1(t) + sc_2(t) - c(t)| &= |(1-s)(c_1(t) - c(t)) + s(c_2(t) - c(t))| \leq \\ &\leq (1-s)|c_1(t) - c(t)| + s|c_2(t) - c(t)| < (1-s)R + sR = R. \end{aligned}$$

Temos, então,

$$R > |c(t) - P| \geq |c(t)| - |P| > 2R - |P|.$$

Logo, vale $|P| > R$, como queríamos demonstrar. ■

Nossos próximos resultados seguem de uma simples observação. Sabemos (ver a Proposição da página 86) que, se $c : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, $c(t) = (x(t), y(t))$, é C^1 e fechada, então

$$n(c.O) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{-y\dot{x} + x\dot{y}}{x^2 + y^2}$$

é inteiro. Sabemos também (ver o Lema 1 da página 89) que, independente de ser c fechada, a variação de ângulo, dada por

$$\int_a^b \frac{-y\dot{x} + x\dot{y}}{x^2 + y^2}$$

varia continuamente se fazemos c variar por homotopia C^1 . As mesmas ideias valem se substituirmos uma curva fechada por uma espécie de "circuito fechado" composto por curvas de classe C^1 . Chamaremos um tal objeto de **cadeia fechada**.¹

Definição: Uma **cadeia fechada** de classe C^k em X é uma n -upla $c = (c_1, \dots, c_n)$ de curvas parametrizadas,

$$c_i : [a_i, b_i] \rightarrow X,$$

de classe C^k , com

$$c_{i+1}(a_{i+1}) = c_i(b_i), i = 1, \dots, n-1; c_n(b_n) = c_1(a_1).$$

Definição: Se $c = (c_1, \dots, c_n)$ é uma cadeia fechada de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, o **índice (número de voltas)** de c em relação à origem, $n(c)$, é a soma das variações de ângulo das c_i , dividida por 2π .

¹Nossa definição de **cadeia fechada** é uma variante da usual em Topologia

Proposição 1: O índice de uma cadeia fechada C^1 em relação à origem é um número inteiro.

Demonstração: Escrevendo $c = (c_1, \dots, c_n)$ e cada uma das c_i em coordenadas polares, (r_i, θ_i) , teremos

$$n(c) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n [\theta_i(b_i) - \theta_i(a_i)].$$

Ora, a condição de "emenda",

$$c_{i+1}(a_{i+1}) = c_i(b_i), \quad i = 1, \dots, n-1; \quad c_n(b_n) = c_1(a_1),$$

garante que, para cada $i = 1, \dots, n-1$, temos $\theta_i(b_i) - \theta_i(a_{i+1}) = 2n_i\pi$, com n_i inteiro, e, além disso, $\theta_n(b_n) - \theta_1(a_1)$ também é um múltiplo inteiro de 2π . ■

Definição: Suponhamos que $c = (c_1, \dots, c_n)$ e $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n)$, com

$$c_i, \tilde{c}_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

sejam cadeias fechadas de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Diremos que c e \tilde{c} são C^1 -homotópicas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ se existirem homotopias C^1 h_i entre c_i e \tilde{c}_i , de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dadas por

$$s \mapsto c_{is}, \quad s \in [\alpha, \beta],$$

tais que $c_s = (c_{1s}, \dots, c_{ns})$ seja cadeia fechada C^1 , para todo s em $[\alpha, \beta]$.

Proposição 2: Se $c = (c_1, \dots, c_n)$ e $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n)$, com

$$c_i, \tilde{c}_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

são cadeias fechadas C^1 homotópicas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, então $n(c) = n(\tilde{c})$.

Demonstração: Basta lembrar que, como as h_i são homotopias C^1 , as variações de ângulo variam continuamente com s (ver o Lema 1 da página 89). Logo, o número de voltas (que é a soma das variações de ângulo dividida por 2π) também varia continuamente. Como o número de voltas só assume valores inteiros, tem, pelo Teorema do Valor Intermediário, que se manter constante. ■

Às vezes é útil inverter o sentido de uma curva.

Definição: Se X é um conjunto e $c : [a, b] \rightarrow X$, definimos $-c; [-b, -a] \rightarrow X$ por

$$-c(t) = c(-t).$$

Exercício 14.3 Entenda a definição. Mostre que, se $c = (x, y)$ é C^1 , a variação de ângulo de $-c = (x_1, y_1)$ é menos a de c , isto é:

$$\int_a^b \frac{-y_1 \dot{x}_1 + x_1 \dot{y}_1}{x_1^2 + y_1^2} = - \int_a^b \frac{-y \dot{x} + x \dot{y}}{x^2 + y^2}.$$

14.2 A definição de θ

Fixemos uma curva $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, contínua. Já definimos $r : [a, b] \rightarrow]0, \infty[$ por $r(t) = |c(t)|$. O objetivo, agora, é definir

$$\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

contínua e tal que $c(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$, para todo t em $[a, b]$. De brinde, queremos também provar que $\theta(b) - \theta(a)$ varia continuamente, quando deformamos c por uma homotopia C^0 .

Como a estratégia que vem guiando nossos passos nas últimas 10 páginas é aproximar c uniformemente por curvas de classe C^1 , precisamos garantir que, se c_1 e c_2 são curvas C^1 suficientemente próximas de c , então suas variações de ângulo estão próximas. O Lema a seguir junta os resultados da seção anterior.

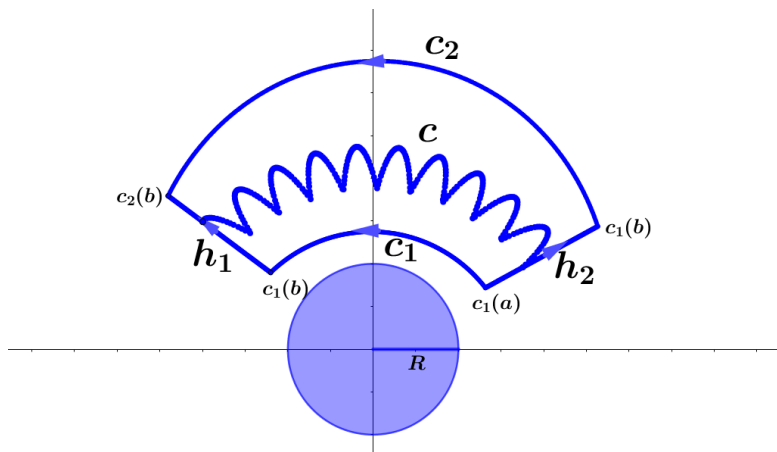
Lema: Seja $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, contínua. Fixemos $R > 0$ tal que $|c(t)| > 2R$ para todo t em $[a, b]$ e tomemos um certo $\varepsilon > 0$, com $\varepsilon < R$ e $\varepsilon < 1$. Sejam $c_1, c_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , dadas, em coordenadas polares, por (r_1, θ_1) e (r_2, θ_2) . Se

$$|c_i(t) - c(t)| < \frac{R\varepsilon}{4}, \quad i = 1, 2,$$

então, para todo t em $[a, b]$, temos

$$|(\theta_2(t) - \theta_2(a)) - (\theta_1(t) - \theta_1(a))| < \varepsilon.$$

Demonstração: A ideia é ligar c_1 e c_2 pelas pontas, criando uma cadeia fechada que, com as hipóteses do Lema, terá que dar 0 voltas em torno da origem. Vamos lá!



Suponhamos que $c_1, c_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazem as hipóteses do Lema. Podemos ligar as extremidades por h_1 e h_2 , sendo $h_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $h_1(t) = (1-t)c_1(b) + tc_2(b)$ e $h_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $h_2(t) = (1-t)c_1(a) + tc_2(a)$. Seja, então, d_1 a cadeia fechada dada por $(c_1, h_1, -c_2, -h_2)$. fazendo $-c_2$ andar até $-c_1$, podemos criar uma homotopia de cadeias fechadas entre d_1 e d_0 , sendo d_0 dada por $(c_1, b_0, -c_1, a_0)$, com $b_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $b_0 \equiv c_1(b)$ e $a_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $a_0 \equiv c_1(a)$.

Exercício 14.4 Construa a homotopia e mostre que não passa pela origem. Depois do exercício, temos que $n(d_1) = n(d_0) = 0$. Mas, note,

$$n(d_1) = \theta_1(b) - \theta_1(a) + \beta_1 + \theta_2(a) - \theta_2(b) - \alpha_1,$$

sendo α_1 a variação de ângulo de h_2 e β_1 a variação de ângulo de h_1 . Assim,

$$|(\theta_2(b) - \theta_2(a)) - (\theta_1(b) - \theta_1(a))| = |\beta_1 - \alpha_1| \leq |\beta_1| + |\alpha_1|.$$

Note, também, que o comprimento de h_1 é $|c_2(b) - c_1(b)|$ e o de h_2 é $|c_2(a) - c_1(a)|$. Como, pelas hipóteses do lema,

$$|c_i(t) - c(t)| < \frac{R\epsilon}{4}, \quad i = 1, 2,$$

temos que são, ambos, inferiores a $\frac{R\epsilon}{2}$. Também é claro que $|h_1(t)|$ e $|h_2(t)|$ são, para qualquer t em $[0, 1]$, maiores do que R . Pelo Lema 1 da página 100, temos

$$\alpha_1 < \frac{R\epsilon}{2R}; \quad \beta_1 < \frac{R\epsilon}{2R}.$$

Exercício 14.5 Faça o mesmo, com t qualquer, entre a e b , no lugar de b .

O Lema está demonstrado. ■

Teorema: Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva dada por $c(t) = (x(t), y(t))$, sendo x e y contínuas. Se c não passa pela origem (ou seja, $c(t) \neq (0, 0)$ para todo t), então existe uma função $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, tal que

$$c(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \quad \forall t \in I,$$

sendo $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$. Além disso,

1. $\theta(b) - \theta(a)$ não depende da função θ escolhida, apenas de c .
2. Se c é fechada, então o **número de voltas**, $n(c) = n(c, O) = \frac{1}{2\pi}[\theta(b) - \theta(a)]$ é inteiro.
3. Se a função $h : [\alpha, \beta] \rightarrow M$ é uma homotopia C^0 entre c_0 e c_1 , sendo $M = \{c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \mid c \text{ de classe } C^0\}$, então, sendo $h(s) = c_s$ dada por $c_s(t) = r_s(t)(\cos \theta_s(t), \sin \theta_s(t))$ a função $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$g(s) = \theta_s(b) - \theta_s(a),$$

é contínua em $[\alpha, \beta]$.

Demonstração: Exercício.

O leitor que chegou até aqui deve ser capaz de demonstrar o princípio fundamental.

Princípio Fundamental do Número de Voltas: Sejam $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ curvas fechadas (contínuas). Se existe homotopia de caminhos fechados em $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ entre c_0 e c_1 , então $n(c_1, O) = n(c_0, O)$.

Capítulo 15

Área varrida por uma curva

Consideremos dada uma curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e encaremos o problema de calcular a área $A(t)$ varrida pelo vetor posição de c entre os tempos t_0 e t .

Vamos, como de hábito, resolver nosso problema de maneiras diferentes. Considerando dois pontos próximos, $c(t)$ e $c(t + \Delta t)$, podemos aproximar a área varrida, entre $c(t)$ e $c(t + \Delta t)$, pela do triângulo de vértices D , $c(t)$ e $c(t + \Delta t)$.

Sendo $c(t) = (x(t), y(t))$ e $c(t + \Delta t) = (x(t + \Delta t), y(t + \Delta t))$, tal área é a metade do valor absoluto do determinante:

$$\Delta A = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x(t) & x(t + \Delta t) \\ y(t) & y(t + \Delta t) \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} |x(t)y(t + \Delta t) - x(t + \Delta t)y(t)| = \frac{1}{2} |x(t)(y(t + \Delta t) - y(t)) - y(t)(x(t + \Delta t) - x(t))|.$$

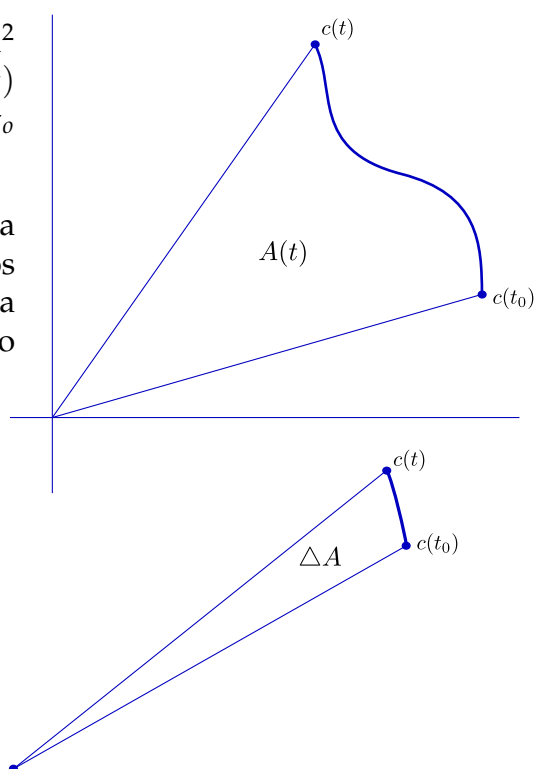
Assim, podemos chutar

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left| x(t) \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} - y(t) \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right|,$$

o que nos dá

$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{1}{2} |x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)|.$$

Notando que o determinante é positivo quando $c(t)$ gira para $c(t + \Delta t)$ no sentido trigonométrico, podemos arbitrar que a área varrida será contada positivamente



quando varremos no sentido trigonométrico e negativamente quando varremos no sentido horário. Assim, podemos eliminar as barras de módulo e fazer

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)),$$

de modo que

$$A(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{2} (x(\tau)\dot{y}(\tau) - y(\tau)\dot{x}(\tau)) d\tau.$$

Exercício 15.1 Calcule, com $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$,

$$\frac{1}{2} \int_0^{6\pi} (-y\dot{x} + x\dot{y}) dt.$$

Exercício 15.2 Calcule a área total varrida pela curva $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$c(t) = \left(t, \frac{1}{1+t^2} \right).$$

Confira com

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Por que a diferença de sinal?

Uma outra forma de chegarmos à mesma conclusão é a seguinte: aproximamos a área entre $c(t)$ e $c(t + \Delta t)$ pela do setor circular de raio $r(t)$ e ângulo $\Delta\theta$, com

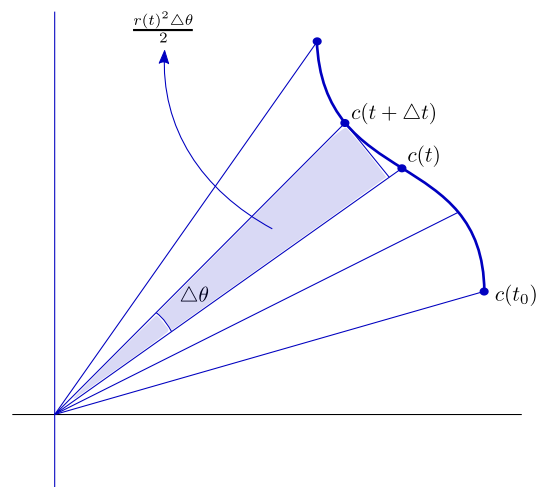
$$r(t) = |c(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2},$$

$\Delta\theta$ sendo o ângulo entre $c(t)$ e $c(t + \Delta t)$. Então

$$\Delta A \approx \frac{1}{2} r(t)^2 \Delta\theta,$$

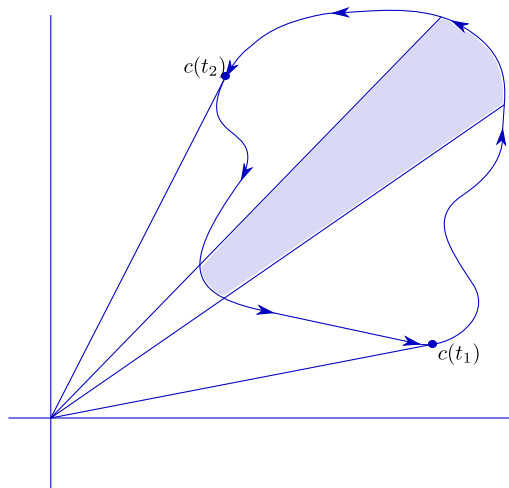
e, portanto, chutamos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}).$$



O fato de termos admitido que $\frac{dA}{dt}$ possa ser negativo tem um efeito melhor do que a encomenda, no caso de curvas fechadas.

Na figura ao lado, a área varrida, quando caminhamos de $c(t_1)$ até $c(t_2)$, no sentido positivo, tem uma parte que é descontada quando voltamos, no sentido negativo, de $c(t_2)$ até $c(t_1)$, de forma que fica, como saldo, a área encerrada por c .



Nas figuras
a seguir, vemos algumas possibilidades para

$$\int_a^b \frac{1}{2}(-y\dot{x} + x\dot{y})dt,$$

com $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$.

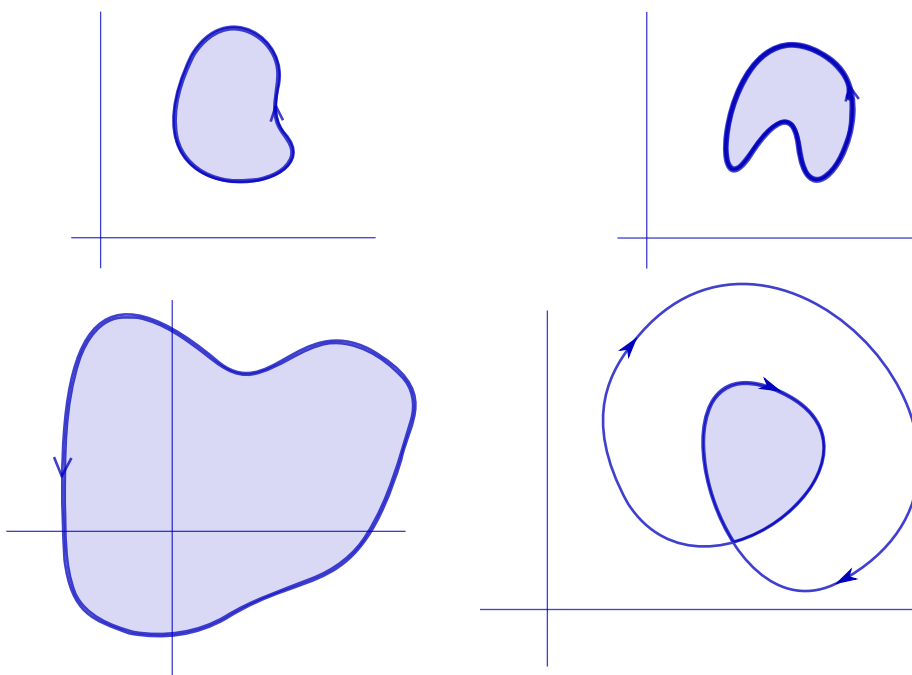


Figura 15.1: área varrida

Nas duas figuras do alto e na de baixo, à esquerda, a integral é positiva (ou seja, é igual à área). Na de baixo, à direita, a integral é negativa, mas a área sombreada é contada (negativamente) duas vezes.

15.1 O seno e o cosseno hiperbólicos

A tradicional parametrização da elipse, $t \mapsto (a \cos t, b \sin t)$, se origina na parametrização do círculo $x^2 + y^2 = 1$; podemos ver o parâmetro t como o comprimento do arco percorrido por P sobre o círculo ou, alternativamente, como o dobro da área varrida por \overrightarrow{OP} , de 0 a t , sendo $P = (\cos t, \sin t)$ o ponto em questão.

Existe uma forma semelhante, bastante engenhosa, de parametrizar a hipérbole. Começemos com a **hipérbole equilátera**, $x^2 - y^2 = 1$.

Em analogia com o círculo $x^2 + y^2 = 1$, vamos definir as funções **cosseno hiperbólico** e **seno hiperbólico**.

No círculo unitário, o ponto $P = (\cos \theta, \sin \theta)$ é tal que a área hachurada corresponde a θ . Por analogia, vamos definir o **seno hiperbólico** de θ , $\sinh \theta$, e o **cosseno hiperbólico** de θ , $\cosh \theta$, de forma que o ponto $P = (\cosh \theta, \sinh \theta)$ seja tal que a área hachurada (na figura ao lado) seja θ . Teremos, então, a relação fundamental

$$(\cosh \theta)^2 - (\sinh \theta)^2 = 1.$$

Para definir as funções \cosh e \sinh , vamos começar calculando a área θ . Escrevendo $x = \sqrt{1 + y^2}$, queremos a área varrida pela curva $(\sqrt{1 + t^2}, t)$, entre $t = -y$ e $t = y$: θ será a área, com $y = \sinh \theta$ e $x = \cosh \theta$. Aplicando a fórmula para a área varrida, com $x(t) = \sqrt{1 + t^2}$ e $y(t) = t$, teremos, supondo $y \geq 0$,

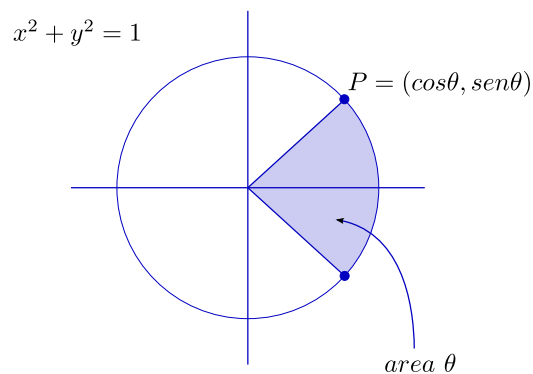
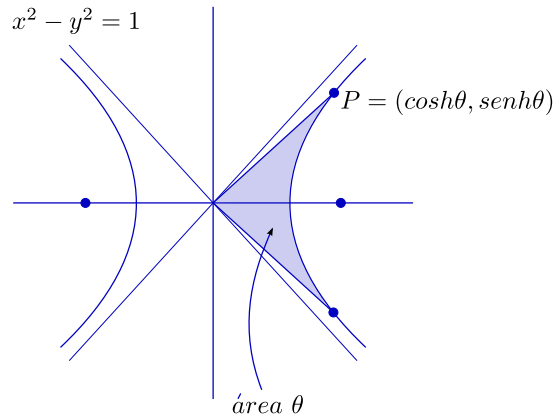
$$\theta = \frac{1}{2} \int_{-y}^y \left(-t \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \sqrt{1+t^2} \cdot 1 \right) dt = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

Fazendo a substituição $t = \tan \alpha$, $dt = \sec^2 \alpha d\alpha$, obtemos

$$\theta = \int_0^{\arctan y} \sec \alpha d\alpha = \ln(\sec \alpha + \tan \alpha) \Big|_0^{\arctan y},$$

o que nos dá

$$\theta = \ln \left(\sqrt{1 + y^2} + y \right) = \ln(x + y).$$



Se $y < 0$, por analogia com o caso do círculo (com $x > 0$), fazemos $\theta = -\ln(x - y)$, de forma a termos a mesma área, mas com o sinal trocado. Na realidade, se $y < 0$, temos

$$\int_{-y}^y \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = -\ln(x-y).$$

Outra forma de chegar à mesma conclusão é observar que

$$1 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y),$$

de modo que

$$\ln(x+y) + \ln(x-y) = 0.$$

Assim, em qualquer circunstância, teremos

$$\begin{cases} \theta = \ln(x+y) \\ -\theta = \ln(x-y) \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} x+y = e^\theta \\ x-y = e^{-\theta} \end{cases},$$

o que nos dá

$$x = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}, \quad y = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$

Assim, definimos, para θ em \mathbb{R} ,

$$\cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2},$$

$$\sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$

Nossa hipérbole, $x^2 - y^2 = 1$, fica, pois, parametrizada por

$$(x(\theta), y(\theta)) = (\cosh \theta, \sinh \theta), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

(para o ramo com $x > 0$). O ramo com $x < 0$, é claro, se parametriza por

$$(x(\theta), y(\theta)) = (-\cosh \theta, \sinh \theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Uma hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é, analogamente ao caso da elipse, parametrizada por

$$(x(\theta), y(\theta)) = (a \cosh \theta, b \sinh \theta), \theta \in \mathbf{R} \text{ (ramo } x > 0),$$

$$(x(\theta), y(\theta)) = (\cosh \theta, \sinh \theta), \theta \in \mathbf{R} \text{ (ramo } x < 0).$$

Como no caso da elipse, essa hipérbole é a imagem da hipérbole equilátera pela transformação linear $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix}.$$

Exercício 15.3 Note que as funções \sinh e \cosh satisfazem, de fato, a $(\cosh \theta)^2 - (\sinh \theta)^2 = 1$, para todo θ em \mathbf{R} . Observe que ganhamos, de brinde as fórmulas $(\cosh \theta)' = \sinh \theta$ e $(\sinh \theta)' = \cosh \theta$.

Capítulo 16

Campos centrais e conservação do momento angular

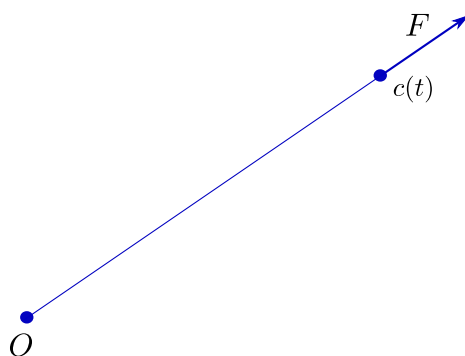
Suponhamos que uma partícula de massa m se move de forma que a resultante das forças que sobre ela atuam está, em cada instante, na direção que liga a posição da partícula a um certo ponto (fixo) O .

Mais precisamente, se o movimento é dado por $c(t)$ e a origem do sistema de coordenadas é posta em O , então a força F atuando sobre a partícula no instante t é tal que

$$F = \lambda(t)c(t).$$

Dizemos, nesse caso, que o campo de forças é **central**.¹ Da segunda lei de Newton, concluímos que

$$m\ddot{c}(t) = \lambda(t)c(t).$$



Exemplo: Uma versão simplificada do sistema heliocêntrico se obtém supondo que o Sol está parado (na origem) e exerce, sobre cada planeta, segundo a lei da gravitação, uma força de atração inversamente proporcional ao quadrado da distância. Isto nos dá, se $c(t)$ é a posição do planeta,

$$m\ddot{c}(t) = \frac{\mu}{|c(t)|^2} \frac{1}{|c(t)|} c(t)$$

(μ é uma constante negativa).

Do ponto de vista estritamente matemático, podemos dispensar a massa e trabalhar com hipóteses mais limpas: vamos supor apenas que I é um intervalo não trivial em \mathbb{R} e que temos uma função $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

¹A expressão *campo central* se usa, normalmente, de forma mais restrita, no caso em que, em cada ponto x do espaço, se tem a força dada por $F(x) = f(|x|x)$

$$\ddot{c}(t) = \lambda(t)c(t) \quad \forall t \in I.$$

Suponhamos, também, que, em algum t_0 em I , a posição e a velocidade sejam linearmente independentes, isto é:

$$c(t_0) \otimes \dot{c}(t_0) = n_0 \neq 0.$$

Afirmamos que, nesse caso, o movimento acontece em um plano que passa por O e é normal a n_0 . A observação crucial é a seguinte: seja

$$\begin{aligned} n : I &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ t &\longmapsto c(t) \otimes \dot{c}(t); \end{aligned}$$

então

$$\frac{d}{dt}n = \dot{c} \otimes \dot{c} + c \otimes \ddot{c} = 0 + c \otimes \lambda c = 0.$$

Logo, $n(t)$ é constante e igual a $n(t_0) = n_0$. Como $c(t)$ é, para todo t , normal a $n(t)$, temos

$$\langle c(t), n_0 \rangle = 0 \quad \forall t \in I,$$

como prometido. Em Mecânica, o vetor

$$c(t) \otimes p(t) = c(t) \otimes m\dot{c}(t)$$

é chamado de **momento angular**. Assim, se a partícula se move sob ação de um campo de forças central, seu momento angular se conserva (note que, para a conservação do momento angular, não é necessário supor que este não se anule).

Podemos deduzir, da observação acima, um resultado ainda mais curioso. Como o movimento se faz em um plano, podemos supor

$$c(t) = (x(t), y(t), 0) \quad \forall t \in I,$$

o que dá

$$c(t) \otimes \dot{c}(t) = (0, 0, -y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)).$$

Pelo que acabamos de ver, $c(t) \otimes \dot{c}(t)$ é constante. Logo, existe uma constante α tal que

$$-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t) = 2\alpha \quad \forall t \in I.$$

Assim, se $A(t)$ é a área varrida (no plano Oxy) por $c(t)$, temos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}(-y\dot{x} + x\dot{y}) \equiv \alpha,$$

o que prova a proposição a seguir.

Proposição: Seja $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, com derivada segunda, tal que:

(i) existe uma função $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo t em I , se tem

$$\ddot{c}(t) = \lambda(t)c(t);$$

(ii) $c(t_0) \otimes \dot{c}(t_0)$ é não nulo para algum t_0 em I .

Então:

(i) existe um plano π , passando pela origem, tal que $c(t) \in \pi$, para todo t em I ;

(ii) se $t_1, t_1 + \Delta t, t_2$ e $t_2 + \Delta t$ estão em I , a área varrida (em π) por c entre t_1 e $t_1 + \Delta t$ é igual à varrida entre t_2 e $t_2 + \Delta t$.

Vejam agora o caso em que $c(t) \otimes \dot{c}(t) = 0$ para todo t . Se supusermos que $c(t)$ nunca se anula, podemos garantir que existe $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\dot{c}(t) = \alpha(t)c(t) \quad \forall t \in I.$$

Exercício 16.1 Deduza, da continuidade de c e \dot{c} , que α é contínua.

Seja, então $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\dot{A} = \alpha$. Podemos, então, multiplicando por $e^{-A(t)}$, concluir que

$$\frac{d}{dt}(e^{-A(t)}c(t)) = e^{-A(t)}(\dot{c}(t) - \alpha(t)c(t)) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Exercício 16.2 Use, em cada coordenada, o Teorema do Valor Médio e conclua que existe um vetor u_0 tal que

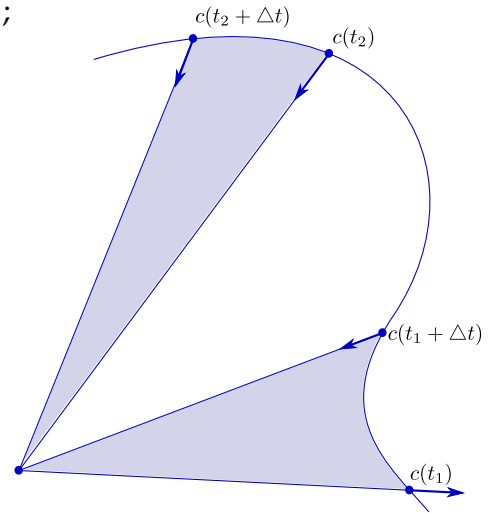
$$e^{-A(t)}c(t) = u_0 \quad \forall t \in I.$$

Concluimos, então, que existe um certo vetor u_0 tal que

$$c(t) = e^{A(t)}u_0 \quad \forall t \in I.$$

Isso prova que, neste caso, o movimento se dá sobre uma reta passando pela origem (e, a fortiori, sobre um plano passando pela origem).

O caso em que c está autorizada a passar pela origem é mais complicado.



Exercício 16.3 Defina $c : [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$c(t) = \begin{cases} (\sin^4 t)\vec{e}_1, & t \in [0, \pi]; \\ (\sin^4 t)\vec{e}_2, & t \in [\pi, 2\pi]; \\ (\sin^4 t)\vec{e}_3, & t \in [2\pi, 3\pi]. \end{cases}$$

Mostre que existe $\lambda : [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\ddot{c}(t) = \lambda(t)c(t) \forall t \in [0, 3\pi]$, embora c não seja uma curva plana.

Exercício 16.4 Suponha que, para um certo k fixo, $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaça $\ddot{c}(t) = -k^2c(t) \forall t \in \mathbb{R}$. Mostre que c é uma curva plana.

Capítulo 17

O oscilador harmônico

17.1 O modelo

Retornemos ao sistema massa-mola mencionado como exemplo no capítulo 7.

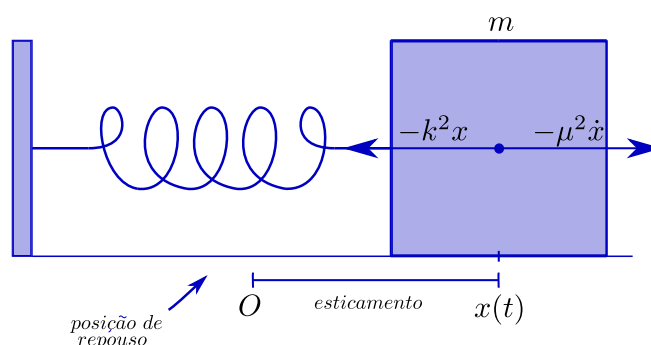


Figura 17.1: sistema massa-mola

O sistema é, basicamente, regido pela Lei de Hooke. Se um corpo preso à mola ocupa a posição x , medida a partir da posição de repouso, então a força que sobre ele atua aponta para a posição de repouso e tem intensidade proporcional a x . Costuma-se convencionar que o corpo é descrito por um ponto, que ocupa, no instante t a posição $x(t)$, dada por um número real. A posição de repouso corresponde ao zero, x sendo positiva se puxamos e negativa se empurramos a mola. A força exercida pela mola sobre o corpo é, então, da forma $F = -k^2 x$, com k constante.

Posto desta forma, nosso modelo, praticamente, pressupõe um movimento retilíneo. Mas podemos fazer uma pequena alteração. Suponhamos que nosso corpo é uma pequena esfera presa, não a uma mola, mas a um elástico. Nossa bolinha se move sobre uma mesa lisa, sem atrito. No centro da mesa há um pequeno furo, por onde

passa o elástico. O elástico é esticado, por baixo da mesa, e preso ao chão, de forma que a posição de repouso da bolinha seja exatamente sobre o furo (que, podemos convencionar, está no ponto O). Se puxamos a bolinha até o ponto P , a força exercida pelo elástico, supostamente, é proporcional ao esticamento e aponta para O , ou seja, $F = -k^2 \overrightarrow{OP}$. Se soltarmos a bolinha, é fácil crer que esta passe a oscilar sobre o segmento que liga P a seu simétrico em relação a O , que podemos chamar de $-P$. Mas, neste modelo, é claro que podemos fazer algo diferente: podemos, ao soltar a bolinha, dar-lhe um peteleco, de modo que a bolinha parta com uma velocidade inicial v . Mas, ora, v não precisa apontar para O . Neste modelo, o que esperamos é que o movimento seja uma curva plana.

Antes de partirmos para as contas, pensemos em um modelo um pouco mais abstrato. Nossa bolinha, agora, é uma partícula, de massa m , e se move em \mathbb{R}^3 . Se $c(t)$ é sua posição, a força que sobre ela atua é $F = -k^2 c(t)$, de modo que c deve satisfazer

$$m\ddot{c}(t) = -k^2 c(t), \forall t.$$

Suponhamos, também, que, no instante t_0 , tenhamos $c(t_0) \otimes \dot{c}(t_0) \neq 0$. Como já vimos, neste caso, temos conservação do momento angular, a trajetória está presa a um plano que passa pela origem, e os raios vetores $\overrightarrow{Oc}(t)$ varrem áreas iguais em intervalos de tempo iguais. Podemos, mesmo, introduzir uma força que atuará contra o movimento (resistência do ar, ou, já que o movimento é plano, atrito da bolinha com a mesa). Suponhamos que tal força seja proporcional à velocidade, na forma $-\mu^2 \dot{c}(t)$. Agora, o movimento deve satisfazer

$$m\ddot{c}(t) = -k^2 c(t) - \mu^2 \dot{c}(t), \forall t.$$

Exercício 17.1 Observe que, nestas condições, já não temos a garantia de conservação do momento angular. Porém, com a hipótese de que $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaça a $c(t_0) \otimes \dot{c}(t_0) \neq 0$ para um certo t_0 no intervalo I , podemos ainda garantir que existe um plano α , passando pela origem, tal que $c(t) \in \alpha$ para todo t em I .

Exercício 17.2 Mostre que, se $\mu = 0$, temos **conservação da energia**, isto é: a função

$$E(t) = \frac{m}{2} |\dot{c}(t)|^2 + \frac{k^2}{2} |c(t)|^2$$

é constante. Mostre que, se $\mu \neq 0$, então a energia decresce com t . O termo $-\mu^2 \dot{c}(t)$ costuma ser chamado de **termo de dissipação**, ou **dissipativo**. Sistemas com termo de dissipação (na ausência do qual haveria conservação de energia) costumam ser chamados de **dissipativos**.

Vamos, pois, supor que $c(t)$ é uma curva plana. Podemos, inclusive, decidir pensar $c(t)$ como um número complexo. Vamos, também, proceder a uma decisiva mudança de notação. Nossa equação diferencial,

$$m\ddot{c}(t) + \mu^2 \dot{c}(t) + k^2 c(t) = 0,$$

pode ser reescrita, usando a letra D para o operador de derivação em relação a t , na forma

$$mD^2c(t) + \mu^2Dc(t) + k^2c(t) = 0,$$

ou, ainda,

$$\left[mD^2 + \mu^2D + k^2 \right] c(t) = 0.$$

17.2 Equações lineares de segunda ordem

Sejamos um pouco mais abstratos. Suponhamos que $z : I \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ é uma curva plana, satisfazendo a equação

$$aD^2z(t) + bDz(t) + cz(t) = 0,$$

ou, fazendo $a = 1$ (sempre podemos dividir por a),

$$\left[D^2 + bD + c \right] z(t) = 0.$$

Mais uma observaçãozinha: se r_1 e r_2 são as raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$, podemos escrever

$$x^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2).$$

Exercício 17.3 Note que isso equivale a dizer que $b = -(r_1 + r_2)$ e $c = r_1r_2$.

Interpretando as multiplicações da maneira natural, observe que, da mesma forma, podemos dizer que

$$\begin{aligned} D^2z(t) + bDz(t) + cz(t) &= \\ &= \left[D^2 + bD + c \right] z(t) = \\ &= (D - r_1)(D - r_2)z(t) = \\ &= (D - r_1)(Dz(t) - r_2z(t)) = \\ &= D^2z(t) - D(r_2z(t)) - r_1Dz(t) + r_1r_2z(t) = \\ &= D^2z(t) - (r_2 + r_1)Dz(t) + r_1r_2z(t). \end{aligned}$$

Exercício 17.4 Para treinar: sendo $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, resolva a equação diferencial $D^2x - 3Dx + 2x = 0$, reescrevendo como $(D - 1)(D - 2)x = 0$, fazendo $(D - 2)x = y$, $(D - 1)y = 0$, $Dy - y = 0$, $y = a_1e^t$, $(D - 2)x = a_1e^t$, $Dx - 2x = a_1e^t$, $\dot{x} - 2x = a_1e^t$, $e^{-2t}\dot{x} - 2e^{-2t}x = a_1e^{-t}$, $D(e^{-2t}x) = a_1e^{-t}$, $e^{-2t}x = -a_1e^{-t} + a_2$, $x(t) = -a_1e^t + a_2e^{2t}$.

Exercício 17.5 Faça o mesmo para a equação $D^2x + bDx + cx = 0$, sabendo que $b = -(r_1 + r_2)$ e $c = r_1r_2$, com r_1 e r_2 reais. Reescreva como $(D - r_1)(D - r_2)x = 0$ e mostre que a solução é $x(t) = a_1e^{r_1t} + a_2e^{r_2t}$, caso $r_1 \neq r_2$, ou $x(t) = a_1e^{rt} + a_2te^{rt}$, caso $r_1 = r_2 = r$. Note que as constantes a_1 e a_2 podem ser determinadas se tivermos informações suplementares sobre a solução (as mais usuais são a posição $x(t_0)$ e a velocidade $\dot{x}(t_0)$, em um certo tempo t_0).

Exercício 17.6 Repita o exercício anterior, pensando em uma função $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, satisfazendo

$$\ddot{z} + b\dot{z} + cz = 0,$$

com $b = -(r_1 + r_2)$ e $c = r_1r_2$, e supondo, agora, que r_1 e r_2 são números complexos. Lance mão da exponencial complexa e mostre que, como no caso anterior, temos $z(t) = a_1e^{r_1t} + a_2e^{r_2t}$, caso $r_1 \neq r_2$, ou $z(t) = a_1e^{rt} + a_2te^{rt}$, caso $r_1 = r_2 = r$. Note que, neste caso, as constantes a_1 e a_2 são números complexos.

Exercício 17.7 Note que o mesmo procedimento funciona para a equação

$$D^n z + a_{n-1}D^{n-1}z + \cdots + a_1Dz + a_0z = 0,$$

se conhecermos as raízes do polinômio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$: reescrevemos a equação como

$$(D - r_1) \cdots (D - r_n)z = 0,$$

e procedemos como no caso $n = 2$.

Exercício 17.8 Considere, agora, a equação não homogênea:

$$D^n z + a_{n-1}D^{n-1}z + \cdots + a_1Dz + a_0z = f,$$

sendo f uma função arbitrária, fixa (no caso em que f é nula, a equação é dita **homogênea**).

1. Sejam z_1 e z_2 soluções da equação não homogênea. Mostre que $z_1 - z_2$ é solução da equação homogênea.
2. Seja z_0 uma solução da equação não homogênea. Mostre que toda solução da equação não homogênea é da forma $z_0 + z$, sendo z solução da equação homogênea.
3. Sejam z_1 e z_2 soluções da equação homogênea e λ um número fixo. Mostre que $z_1 + \lambda z_2$ é solução da equação homogênea.
4. Note que o resultado acima significa que o conjunto \mathcal{F} das soluções da equação homogênea é um espaço vetorial, com as operações usuais de produto por escalar e de soma de funções.
5. Deduza, da forma geral da solução da equação

$$D^n z + a_{n-1}D^{n-1}z + \cdots + a_1Dz + a_0z = 0,$$

que a dimensão de \mathcal{F} é n .

Vejam os que acontece no caso em que queremos uma função $x(t)$, a valores em \mathbb{R} , satisfazendo uma equação do tipo

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0,$$

sendo a , b & c números reais. A ideia é bem simples: fazemos de conta que x é a valores em \mathbb{C} e obtemos nossa solução:

$$x(t) = a_1 e^{r_1 t} + a_2 e^{r_2 t},$$

sendo r_1 e r_2 as soluções de $ar^2 + br + c = 0$. Como os coeficientes são reais, o pior que podemos ter é duas raízes complexas conjugadas, $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$. Podemos, pois, reescrever a solução como

$$x(t) = e^{\alpha t} [(a_1 + a_2) \cos(\beta t) + i(a_1 - a_2) \sin(\beta t)],$$

ou seja,

$$x(t) = e^{\alpha t} [c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)],$$

sendo c_1 e c_2 números complexos arbitrários. Para que a solução seja real, basta que tomemos c_1 e c_2 reais.

Exercício 17.9 Verifique os detalhes.

Exercício 17.10 Suponha que queremos $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$m\ddot{c}(t) + \mu^2 \dot{c}(t) + k^2 c(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

com $c(t_0)$ e $\dot{c}(t_0)$ dados em \mathbb{R}^3 , mas linearmente dependentes. Digamos que sejam, ambos, múltiplos do vetor não nulo $v = (v_1, v_2, v_3)$. Escreva $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$, resolva as equações correspondentes às coordenadas e mostre que a solução anda sobre a reta que passa pela origem e tem a direção de v .

17.3 De volta ao problema

Voltemos a nossa bolinha presa ao elástico. Como já vimos, o movimento se dá em um plano passando pela origem, que vamos representar por \mathbb{C} . Começando pelo caso sem atrito, podemos dizer que o que queremos é encontrar uma função $z : I \rightarrow \mathbb{C}$, com, pelo menos, derivada segunda e satisfazendo a equação

$$\ddot{z}(t) = -k^2 z(t) \quad \forall t \in I$$

(note que nos livramos da massa, reescrevendo o coeficiente de elasticidade como mk^2 e dividindo tudo por m). Como estamos trabalhando em \mathbb{C} , é importante salientar que k é um número real, não nulo. Reescrevendo, temos

$$0 = [D^2 + k^2]z = (D - ki)(D + ki)z.$$

A ideia, agora, é fazer $(D + ki)z = w$ e atacar a equação $(D - ki)w = 0$. Sejam mais explícitos. Se $z : I \rightarrow \mathbb{C}$ é a função que buscamos, podemos chamar de w a função $\dot{z} + kiz$ (trata-se de uma função de I em \mathbb{C}). Se z satisfaz a $\ddot{z} + k^2z = 0$, então basta substituir $\dot{z} + kiz$ no lugar de w para verificar que w satisfaz a $\dot{w} - kiw = 0$. Temos um velho truque que permite determinar w : basta multiplicar a equação pela função e^{-kit} , obtendo

$$0 = e^{-kit}\dot{w}(t) - kie^{-kit}w(t) = \frac{d}{dt} [e^{-kit}w(t)].$$

Ora, se $e^{-kit}w(t)$ é uma função, a valores em \mathbb{R}^2 , cuja derivada é identicamente nula no intervalo I , então suas duas coordenadas são funções a valores em \mathbb{R} , com derivadas identicamente nulas em I . O Teorema do Valor Médio nos garante, então, que são ambas constantes. Isso significa que existe um número complexo, a_1 , tal que

$$e^{-kit}w(t) = 2kia_1 \quad \forall t \in I$$

(o $2ki$ na frente de a_1 é só para que o resultado final fique bonitinho). Logo,

$$w(t) = 2kia_1 e^{kit}.$$

Voltando a z , temos, agora,

$$\dot{z}(t) + kiz(t) = (D + ki)z(t) = w = 2kia_1 e^{kit}.$$

Usando o já tradicional truque de multiplicar por e^{kit} , obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{kit}z(t)) = e^{kit}\dot{z}(t) + kie^{kit}z(t) = 2kia_1 e^{2kit}.$$

Exercício 17.11 Pense $e^{kit}z(t)$ como uma função cuja derivada é $2kia_1 e^{2kit}$. Quem é a função? Certamente conhecemos uma: $a_1 e^{2kit}$. Use o Teorema do Valor Médio, em cada função coordenada, para mostrar que duas funções, a valores em \mathbb{R}^2 (ou em \mathbb{R}^3 , ou mesmo em \mathbb{R}^n), cujas derivadas coincidem em todos os pontos de um intervalo I , diferem apenas por uma constante (vetorial, claro!).

Assim, temos, para um certo número complexo a_2 ,

$$e^{kit}z(t) = a_1 e^{2kit} + a_2,$$

o que nos dá

$$z(t) = a_1 e^{kit} + a_2 e^{-kit} = [a_1 + a_2] \cos kt + [i(a_1 - a_2)] \sin kt.$$

Como a_1 e a_2 podem ser quaisquer números complexos, então $\vec{e}_1 = a_1 + a_2$ e $\vec{e}_2 = i(a_1 - a_2)$ também são dois números complexos quaisquer, que representamos com as

flechinhas em cima para ressaltar que vamos, agora, pensá-los como vetores no plano. Nossa solução, portanto, é da forma

$$z(t) = \cos(kt)\vec{e}_1 + \sin(kt)\vec{e}_2,$$

sendo \vec{e}_1 e \vec{e}_2 dois vetores arbitrários (ou determinados pelos dados do sistema, como posição e velocidade iniciais).

Exercício 17.12 *Basta substituir para ver que $z(0) = \vec{e}_1$. Derivando em t , temos $\dot{z}(t) = -k \sin(kt)\vec{e}_1 + k \cos(kt)\vec{e}_2$. Assim, $\dot{z}(0) = k\vec{e}_2$. Conclua que, se conhecemos a posição e a velocidade no instante $t = 0$, então temos um movimento $z(t)$ bem determinado e definido explicitamente, para todo t em \mathbb{R} . Note que o mesmo acontece se conhecermos a posição e a velocidade em qualquer outro instante t_0 .*

Com relação ao tipo de curva que corresponde a nossa trajetória, veja só: quando t percorre os reais, o ponto definido por $\cos kt\vec{e}_1 + \sin kt\vec{e}_2$ descreve, no plano, um círculo unitário. Nossa solução, de sua parte, descreve a imagem desse círculo pela transformação linear A tal que $A\vec{e}_1 = \vec{e}_1$ e $A\vec{e}_2 = \vec{e}_2$. Ora, como sabemos, a imagem de um círculo por transformação linear não degenerada é uma elipse (ver exercício a seguir, para uma demonstração). Escrevendo em coordenadas, temos, se

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix},$$

então

$$z(t) = \cos(kt)\vec{e}_1 + \sin(kt)\vec{e}_2 = \cos(kt) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \sin(kt) \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$z(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(kt) \\ \sin(kt) \end{pmatrix}.$$

Exercício 17.13 *Para uma demonstração de que a imagem de um círculo em \mathbb{R}^2 pela transformação linear não degenerada $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é, de fato, uma elipse, vamos mostrar que existem duas bases ortonormais de \mathbb{R}^2 , $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ e $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, e dois números, a e b , com $a \geq b > 0$, tais que $A\vec{u}_1 = a\vec{e}_1$, $A\vec{u}_2 = b\vec{e}_2$.¹*

1. Mostre que, se a afirmação acima for provada, então estará provado que a imagem de $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ é, de fato, uma elipse. Sugestão: use a base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ para o domínio de A e a base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ para o contradomínio.

¹Esta é, essencialmente, uma versão simplificada do que, em Álgebra Linear, se chama **Decomposição em Valores Singulares**

2. Observe que existe θ_0 tal que a função n , definida por $n(\theta) = \langle A(\cos \theta, \sin \theta), A(\cos \theta, \sin \theta) \rangle$, atinge seu máximo. Note que, obrigatoriamente,

$$0 = n'(\theta_0) = 2 \langle A(\cos \theta_0, \sin \theta_0), A(-\sin \theta_0, \cos \theta_0) \rangle.$$

3. Faça $\vec{u}_1 = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ e $\vec{u}_2 = (-\sin \theta_0, \cos \theta_0)$.
 4. Faça $a = |A\vec{u}_1|$, $b = |A\vec{u}_2|$, $\vec{e}_1 = a^{-1}A\vec{u}_1$, $\vec{e}_2 = b^{-1}A\vec{u}_2$.
 5. Escreva $S^1 = \{\cos t\vec{u}_1 + \sin t\vec{u}_2, t \in [0, 2\pi]\}$ e conclua.

Exercício 17.14 Observe que não é necessário recorrer às definições e proposições dos capítulos anteriores para ver que o movimento dado por $(\cos kt, \sin kt)$ varre áreas iguais em tempos iguais. Note, também, que uma transformação linear é tal que a razão entre a área da imagem e a área da figura original independe da figura. Conclua daí, diretamente, que as órbitas elíticas que obtivemos para o oscilador harmônico têm, também, a propriedade de varrer áreas iguais em tempos iguais.

Se acrescentarmos a nosso modelo o termo dissipativo, $-\mu^2\dot{c}$, a equação se escreve

$$0 = m\ddot{z} + \mu^2\dot{z} + k^2z = [mD^2 + \mu^2D + k^2]z = m[D - r_1][D - r_2]z,$$

agora com

$$r_1 = \frac{-\mu^2 - \sqrt{\mu^4 - 4mk^2}}{2m}, \quad r_2 = \frac{-\mu^2 + \sqrt{\mu^4 - 4mk^2}}{2m}.$$

Assim, as raízes, r_1 e r_2 , terão parte imaginária (responsável pela oscilação) apenas se a dissipação não for muito grande ($\mu^4 < 4mk^2$). Neste caso, fazendo $\alpha = -\mu^2/2m$ e $\beta = \sqrt{4mk^2 - \mu^4}/2m$, nossa solução será

$$z(t) = a_1e^{(\alpha+i\beta)t} + a_2e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t} [(a_1 + a_2) \cos(\beta t) + i(a_1 - a_2) \sin(\beta t)].$$

Exercício 17.15 Mostre que, se há dissipação, a solução tende para o ponto de equilíbrio quando t tende a infinito (independentemente do sinal de $\mu^4 - 4mk^2$). Mostre que, se $\mu^4 < 4mk^2$, então a variação de ângulo (medida da origem) tende a infinito ($\pm\infty$, conforme a orientação); mas, se $\mu^4 \geq 4mk^2$, então a variação de ângulo não passa de π (ou $-\pi$, conforme a orientação).

Consideremos, agora, o caso não homogêneo: há uma força externa em ação, de modo que nosso sistema é regido, com a hipótese de que a força $f(t)$ está no plano do movimento, por

$$f(t) = m\ddot{z} + \mu^2\dot{z} + k^2z = [mD^2 + \mu^2D + k^2]z = m[D - r_1][D - r_2]z,$$

Costuma-se chamar a equação acima, no caso em que f é nula, de **equação homogênea**; no caso em que f não é nula, a equação é dita **não homogênea**. Uma observação simples mas importante, aqui, é a seguinte: a diferença entre duas soluções da equação

não homogênea (com uma f fixada) é solução da homogênea. Daí decorre que, se z_0 é uma solução particular da equação não homogênea, todas as demais soluções dessa equação se obtêm somando a z_0 as soluções da equação homogênea.

Um caso particularmente interessante é aquele em que a força externa atua na frequência natural do sistema. Suponhamos que nosso sistema é não dissipativo, de forma que a equação não homogênea, para uma dada força externa f , é

$$[D - ik][D + ik]z = f.$$

Neste caso, a solução da equação homogênea é da forma $a_1e^{-kit} + a_2e^{kit}$. Suponhamos que f seja da forma

$$f(t) = ce^{kit}.$$

Neste caso, uma solução para a equação não homogênea (que pode ser obtida honestamente) é

$$z_0(t) = \frac{c}{2ki}te^{kit},$$

de modo que a solução geral será

$$z(t) = a_1e^{-kit} + a_2e^{kit} + \frac{c}{2ki}te^{kit}.$$

Ora, embora a força externa possa ser bem pequena (o que só depende da escolha de c), a correspondente solução satisfará, forçosamente, a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |z(t)| = \infty.$$

Diz-se, neste caso, que a força atua em **ressonância** com o sistema.

Exercício 17.16 *Mostre, sem recorrer à informação que demos sobre a solução particular, que a solução geral é, de fato, da forma*

$$z(t) = a_1e^{-kit} + a_2e^{kit} + \frac{c}{2ki}te^{kit}.$$

Capítulo 18

As leis de Kepler

As leis de Kepler, relativas aos movimentos dos planetas, constituem um dos feitos mais espetaculares da Ciência: a dedução, a partir de dados experimentais acumulados ao longo de décadas por Tycho Brahe, de um pequeno conjunto de afirmações, puramente matemáticas, sobre as órbitas dos planetas de nosso sistema solar.

Primeira lei: Os planetas do sistema solar descrevem órbitas elípticas, com o Sol ocupando um dos focos.

Segunda lei: Se o Sol ocupa a posição O e o planeta a posição P , a área varrida por \vec{OP} , entre os tempos t_1 e $t_1 + \Delta t$, é igual à varrida entre os tempos t_2 e $t_2 + \Delta t$, quaisquer que sejam os tempos t_1, t_2 e Δt .

Terceira lei: Existe uma constante universal, k , tal que o quadrado do intervalo de tempo, T , decorrido entre duas passagens sucessivas de um planeta por um ponto qualquer de sua órbita e o cubo da medida do eixo maior da elipse descrita pelo planeta, a , satisfazem a $T^2 = ka^3$.¹

A outra face da moeda é a formulação teórica de um conjunto de leis da mecânica que, em conjunto com a lei da gravitação, podem ser usadas para deduzir matematicamente as leis de Kepler. Kepler já acreditava que o Sol exerce, sobre os planetas, uma força que os segura; Hooke conjecturou que tal força deveria ser inversamente proporcional ao quadrado da distância. Mas foi Newton quem juntou tudo e empreendeu o gigantesco trabalho. Mais ainda, o trabalho de Newton mostra, também, como deduzir, das leis de Kepler, a própria lei da gravitação.²

Este capítulo se propõe a desenvolver, sob forma de exercícios propostos ao leitor a dedução matemática das leis de Kepler a partir das de Newton e, reciprocamente, a das próprias leis de Newton a partir das de Kepler. A abordagem é fortemente calcada nos conhecimentos desenvolvidos nos capítulos anteriores.

¹A expressão *constante universal*, aqui, pode causar alguma confusão. Como deduziremos mais à frente, nossa constante depende da massa do Sol; assim é *universal* apenas no contexto do sistema solar

²Toda a dedução pressupõe as leis de Newton e considera os corpos como partículas, desprezando qualquer outra força que não a gravitacional exercida pelo Sol

18.1 Newton \Rightarrow Kepler

O objetivo é, a partir das equações diferenciais para uma versão matemática do *problema dos dois corpos*, obtidas por meio das leis de Newton, deduzir matematicamente as leis de Kepler. Suporemos que uma partícula de massa M está parada na origem de \mathbb{R}^3 e que uma outra, de massa m , tem seu movimento em \mathbb{R}^3 descrito por $c(t)$, de forma que

$$m\ddot{c}(t) = -\frac{GMm}{|c(t)|^3}c(t)$$

(G , assim como M e m , é uma constante). Suporemos também que $c(t)$ está definida em um certo intervalo I e que, para um certo t_0 em I , temos $c(t_0)$ e $\dot{c}(t_0)$ linearmente independentes.

1. Mostre que a *energia total* se conserva, isto é, a função

$$E(t) = \frac{1}{2}m|\dot{c}(t)|^2 - \frac{GMm}{|c(t)|}$$

é constante em I .

2. Mostre que o *momento angular*, dado pelo produto vetorial $h(t) = c(t) \otimes m\dot{c}(t)$, é constante e não nulo. Sugestão: derive; observe que $h(t_0)$ é não nulo.
3. Mostre que c é uma curva plana. Mais precisamente, mostre que existe um plano α , passando pela origem, tal que $c(t) \in \alpha \forall t \in I$. Mostre, também, que $c(t)$ nunca passa pela origem.
4. Deduza a **segunda lei de Kepler**.

Sendo c uma curva plana, podemos escrever, em um sistema de coordenadas canônico, $c(t) = (x(t), y(t))$. Admitamos provado que $c(t)$ pode ser representada em coordenadas polares, isto é, que existem funções r e θ , com $r(t) > 0$ para todo t em I , tais que

$$(x(t), y(t)) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t)) \forall t \in I.$$

5. Calcule, em termos das funções r e θ , a velocidade (\dot{x}, \dot{y}) e a aceleração (\ddot{x}, \ddot{y}) .
6. Retorne à conservação da energia. Mostre que existe uma constante E tal que

$$\frac{1}{2}m \left(\dot{r}(t)^2 + r(t)^2 \dot{\theta}(t)^2 \right) - \frac{GMm}{r(t)} = E \forall t \in I.$$

7. Retorne à conservação do momento angular. Mostre que existe uma constante h tal que

$$r(t)^2 \dot{\theta}(t) = h \forall t \in I.$$

8. Mostre que r satisfaz a equação diferencial

$$(*) \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}.$$

9. Admitamos que nosso movimento é tal que podemos escrever $r(t)$ como $r(\theta(t))$, de forma que

$$\dot{r}(t) = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = r'(\theta(t))\dot{\theta}(t).$$

Faça

$$z(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}.$$

Mostre que

$$\dot{r}(t) = -\frac{z'(\theta(t))}{z(\theta(t))^2} \dot{\theta}(t) = -hz'(\theta(t))$$

e que

$$\ddot{r}(t) = -hz''(\theta(t))\dot{\theta}(t) = -h^2z(\theta(t))^2z''(\theta(t)).$$

10. Substitua os valores acima na equação (*) e mostre que a função $z(\theta)$ satisfaz a equação diferencial

$$z''(\theta) + z(\theta) = \frac{GM}{h^2}.$$

11. Faça

$$w = z - \frac{GM}{h^2}$$

e mostre que w é solução da equação diferencial

$$w'' + w = 0.$$

12. Admita provado que toda solução da equação diferencial acima é da forma $w = a \cos \theta + b \sin \theta$. Observe que uma tal w pode ser, também, escrita como $w = R \cos(\theta - \theta_0)$, com

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \theta_0 = \frac{a}{R}, \quad \sin \theta_0 = -\frac{b}{R}.$$

Conclua que z é dada por

$$z(\theta) = R \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{h^2}.$$

13. Mostre que o valor máximo de z é $R + \frac{GM}{h^2}$, atingido em $\theta = \theta_0$.

14. Conclua que r , como função de θ , é dada por

$$r(\theta) = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \quad e = \frac{Rh^2}{GM}, \quad d = \frac{1}{R},$$

com valor mínimo em $\theta = \theta_0$. Note que, se $e > 1$, haverá uma limitação para os valores de θ .

15. Conclua que vale a **primeira lei de Kepler**: a solução descreve uma cônica.
16. Seja t_0 tempo em que r é mínimo. Note que, como $\dot{r}(t_0) = 0$, a velocidade em t_0 será dada por

$$r\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta).$$

Chame $r(t_0)$ de r_0 . Multiplique por r_0^2 a fórmula da energia e mostre que

$$\frac{m}{2}h^2 - GMmr_0 = Er_0^2.$$

17. Mostre que

$$e = 1 + \frac{2Er_0}{GMm}.$$

18. Conclua que $e < 1$, $e = 1$ ou $e > 1$, conforme $E < 0$, $E = 0$ ou $E > 0$.
19. Deduza, daí, que o movimento descreve uma elipse, se $E < 0$, uma parábola, se $E = 0$, ou um ramo de hipérbole, se $E > 0$. No caso de trajetória hiperbólica, a origem está *dentro* ou *fora* do ramo descrito pela trajetória?
20. Suponha que a energia é negativa, e que, portanto, a órbita é elítica. Prove que a órbita é periódica.
21. No caso de órbita elítica, observe que o período, T , é o tempo necessário para que θ varie de 2π . Conclua que

$$T = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \frac{dt}{d\theta} d\theta.$$

22. Use o fato de que $h = r^2\dot{\theta}$ é constante para concluir que

$$T = \frac{2\pi ab}{h}.$$

23. Use as diversas relações obtidas acima, e alguns conhecimentos mais sobre elipses, para obter a **terceira lei de Kepler**

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3.$$

Vamos, agora, lidar com os pontos que deixamos em aberto

24. Suponha que a curva $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, é de classe C^1 e tal que $c(t) \neq (0, 0) \forall t$. Defina, para t em I , $r(t)$ por

$$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}.$$

Considere $t_0 \in I$ e tome θ_0 tal que

$$\cos \theta_0 = \frac{x(t_0)}{r(t_0)}, \quad \sin \theta_0 = \frac{y(t_0)}{r(t_0)}.$$

Defina, para t em I ,

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \frac{-y(\tau)\dot{x}(\tau) + x(\tau)\dot{y}(\tau)}{x(\tau)^2 + y(\tau)^2} d\tau.$$

Mostre que, para todo t em I , tem-se

$$c(t) = r(t) (\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

25. Suponha que $\dot{\theta}$ não se anula em I . Use o Teorema da Função Inversa para concluir que t pode ser escrito como função de θ (de classe C^1) e que, portanto, podemos obter r como função de θ .
26. Note que, no nosso caso, como $h = r^2\dot{\theta}$ nunca se anula, podemos, de fato, obter r como função de θ . Observe que não *resolvemos*, explicitamente, as equações: faltou obter uma expressão para θ , como função de t . Você consegue fazer isso?
27. Mostre que toda solução da equação diferencial $w'' + w = 0$ é da forma

$$w(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta.$$

18.2 Kepler \Rightarrow Newton

Deduzir, da lei da gravitação, as leis de Kepler já é um grande feito. Encaremos, agora, uma espécie de recíproca: partir das leis de Kepler para obter a lei da gravitação.

Começemos fixando os limites do que vamos empreender: as leis de Kepler se referem, apenas, às órbitas dos planetas em torno do Sol; podemos tentar extrair-lhes uma lei sobre a força de atração que sobre aqueles exerce o astro rei, nada mais. A lei da gravitação é muito mais ampla, já que postula a existência de uma força de atração entre dois corpos quaisquer.

Vamos, de novo, nos colocar em um contexto abstrato: o Sol é tomado como uma partícula situada na origem do sistema de coordenadas; consideraremos um planeta, também particular, que tem seu movimento dado por $c(t)$. Como a primeira lei de Kepler já afirma que $c(t)$ descreve uma elipse, suporemos, desde o início, que estamos em um plano e que $c(t)$, que não passa pela origem, é dada, em coordenadas polares, por

$$c(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) = r(\cos \theta, \sin \theta) = ru,$$

com $u = u(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$. Usaremos f' para designar a derivada de f em relação a θ e \dot{f} para designar a derivada em relação a t .

1. Note que $u' = (-\sin \theta, \cos \theta) = u^\perp$ é unitário e tal que, para todo θ , (u, u^\perp) é uma base ortonormal positivamente orientada. Note que $(u^\perp)' = -u$.
2. Escrevendo $c = ru$, obtenha a seguinte expressão para a aceleração:

$$\ddot{c} = \left[(r'' - r) \dot{\theta}^2 + r' \ddot{\theta} \right] u + \left[2r' \dot{\theta} + r \ddot{\theta} \right] u^\perp.$$

3. Deduza, da segunda lei de Kepler, que existe uma constante, h , tal que $r^2 \dot{\theta} \equiv h$. Conclua que $2r' \dot{\theta} + r \ddot{\theta} = 0$ e que, portanto, a aceleração é dada por

$$\ddot{c} = \left[(r'' - r) \dot{\theta}^2 + r' \ddot{\theta} \right] u.$$

Nosso objetivo passa a ser, pois, mostrar que

$$(r'' - r) \dot{\theta}^2 + r' \ddot{\theta} = \gamma \frac{1}{r^2},$$

sendo γ uma constante negativa.

4. Usando a primeira lei de Kepler, escreva

$$r(\theta) = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)},$$

sendo e a excentricidade ($e < 1$) e d a distância entre o foco e a diretriz da elipse correspondente à trajetória.

5. Calcule r' e r'' . Mostre que

$$r'' - r = \frac{2(r')^2}{r} - \frac{r^2}{ed}.$$

6. Conclua que a aceleração é dada por

$$\ddot{c} = -\frac{h^2}{ed} \frac{1}{r^2}.$$

7. Mostre, como na seção anterior, que o período, T , é dado por

$$T = \frac{2\pi ab}{h},$$

sendo a e b , respectivamente, o semieixo maior e o semieixo menor da elipse.

8. Mostre que $b^2 = (1 - e^2)a^2$ e que

$$a = \frac{ed}{1 - e^2}.$$

9. Note que a terceira lei de Kepler postula a existência de uma constante universal, k , tal que

$$k = \frac{T^2}{a^3}.$$

Conclua que

$$\frac{h^2}{ed} = \frac{4\pi^2}{k}$$

é constante e independe do planeta considerado.

18.3 Um portal entre o problema dos dois corpos e o oscilador harmônico

O estudo do sistema massa-mola e o problema dos dois corpos têm algumas características comuns: em ambos temos campos centrais, em ambos a intensidade da força é proporcional a uma potência da distância à origem (potência 1, no oscilador harmônico; potência -2 , no caso dos dois corpos), em ambos as soluções descrevem órbitas elípticas (com centro na origem, no caso do oscilador harmônico; com um dos focos na origem, no caso dos dois corpos). Vamos, aqui, destacar uma curiosa maneira de transformar soluções do oscilador harmônico,

$$\ddot{w} = -\frac{k^2}{m}w,$$

em soluções do problema dos dois corpos,

$$\ddot{z} = -\frac{GM}{|z|^3}z.$$

O que obtemos, na realidade é uma alternativa, devida a K. Bohlin e bastante divulgada por V. I. Arnold, para o método de dedução das leis de Kepler que acabamos de apresentar. As funções w e z têm domínio em \mathbb{R} e imagem em \mathbb{C} . O resultado básico é o seguinte.

Proposição: Suponha que $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é uma solução de

$$\ddot{w} = -\frac{k^2}{m}w.$$

Então a função $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, definida por $z(t) = w(t)^2$, é solução de

$$z''(\tau) = -\frac{GM}{|z(\tau)|^3}z(\tau),$$

com t e τ relacionados por

$$\frac{d\tau}{dt}(t) = |w(t)|^2,$$

e $GM = 4E$, sendo E a energia correspondente a w ,

$$E = \frac{1}{2}(|\dot{w}|^2 + \frac{k^2}{m}|w|^2).$$

Começemos mostrando que a transformação, de \mathbb{C} em \mathbb{C} , dada por $z = w^2$, leva elipses de centro na origem em elipses com um foco na origem.

Considere a seguinte transformação (dita de Zucóvsqui):

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z + \frac{1}{z} \end{aligned}$$

1. Mostre que φ leva círculos de centro na origem em elipses com focos em -2 e 2 . Note que os círculos de raio R e R^{-1} são levados na mesma elipse, e que o círculo de raio 1 é levado na elipse degenerada no segmento $[-2, 2]$.
2. Mostre que φ leva retas passando pela origem (excluída, claro, a origem) em hipérbolas com focos em -2 e 2 .
3. Seja c um número complexo não nulo. Mostre que a transformação $\varphi_c : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $\varphi_c(z) = c\varphi(z)$, leva círculos de centro na origem em elipses com focos em $-2c$ e $2c$.
4. Mostre que qualquer elipse de centro na origem é imagem de um círculo de centro na origem por φ_c , para algum complexo c .

Considere agora aplicação $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $\psi(z) = z^2$.

5. Mostre que $\psi \circ \varphi$ leva círculos de centro na origem em elipses com eixo principal sobre a reta real e um dos focos na origem. Note que, quando o círculo é percorrido uma vez, a correspondente elipse é percorrida duas vezes.
6. O que faz $\psi \circ \varphi$ com as retas passando pela origem?
7. Mostre que a imagem por ψ de qualquer elipse de centro na origem é uma elipse com um dos focos na origem.
8. Mostre que toda elipse com foco na origem é imagem, por ψ , de uma elipse com centro na origem.

Veamos, agora, de onde sai a nova variável τ . A ideia é a seguinte: a curva $t \mapsto w(t)$ varre áreas iguais em tempos iguais, mas a correspondente $t \mapsto z(t) = w(t)^2$, não. Assim, o novo tempo, τ , é introduzido para que z varra áreas iguais em tempos iguais.

Suponha que $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é uma solução de

$$\ddot{w} = -w.$$

1. Observe que, se $(|w|, \theta)$ são as coordenadas polares correspondentes à curva w , as da curva $z = w^2$ são $(|w|^2, 2\theta)$.
2. Note que a lei das áreas garante que $|w(t)|^2 \dot{\theta}(t)$ é constante.
3. Suponha que τ é uma nova variável, escolhida de forma que, se $z(\tau) = z(t(\tau))$, então z , como função de τ , varre áreas iguais em tempos iguais, ou seja: a área varrida por $z(\tau)$ de $\tau = a$ até $\tau = a + h$ é a mesma varrida por $z(\tau)$ de $\tau = b$ até $\tau = b + h$. Mostre que

$$|z|^2 2 \frac{d\theta}{d\tau} = 2|w|^4 \dot{\theta} \frac{dt}{d\tau}$$

deve ser constante.

4. Mostre que, já que $|w(t)|^2 \dot{\theta}(t)$ é constante, é natural fazer

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{|w|^2} = \frac{1}{w\bar{w}}.$$

5. Para t em \mathbb{R} , defina $\tau(t)$ por

$$\tau(t) = \tau_0 + \int_{t_0}^t |w(\xi)|^2 d\xi,$$

podendo t_0 e τ_0 ser escolhidos arbitrariamente.

6. Note que o Teorema da função inversa permite obter t como função de τ , com

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{|w(t(\tau))|^2} = \frac{1}{w\bar{w}}.$$

7. Certifique-se de que, com o novo tempo τ , z varre, de fato, áreas iguais em tempos iguais. Note que $z(\tau)$ descreve uma elipse, com um dos focos na origem e varre áreas iguais em tempos iguais.
8. Calcule

$$\frac{d^2}{d\tau^2} z = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d}{d\tau} z \right) = \frac{1}{w\bar{w}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{w\bar{w}} \frac{d}{dt} w^2 \right).$$

9. Agora observe que a conservação da energia, no oscilador harmônico, garante a existência de uma constante, E , tal que

$$\frac{1}{2}(|\dot{w}|^2 + \frac{k^2}{m}|w|^2) \equiv E.$$

10. Conclua que

$$\frac{d^2}{d\tau^2}z(\tau) = -\frac{\alpha}{|z(\tau)|^3}z(\tau),$$

com $\alpha = 4E$.

11. Mostre que isso estabelece um procedimento para obter uma solução para o problema

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) = -\frac{GM}{|z(t)|^3}z(t) :$$

definimos a função $t(\tau)$, $\tau \in \mathbf{R}$, como a inversa de

$$\tau(t) = \tau_0 + \int_{t_0}^t |w(\xi)|^2 d\xi;$$

em seguida, substituímos $t = t(\tau)$ na solução de

$$\ddot{w} = -\frac{k^2}{m}w,$$

com as seguintes condições:

- (a) $w(0)^2 = z(0)$;
- (b) $\frac{2\dot{w}(0)}{\bar{w}(0)} = \frac{dz}{d\tau}z(0)$;
- (c) $2(|\dot{w}(0)|^2 + \frac{k^2}{m}|w(0)|^2) = GM$.

Até agora provamos que nossa solução satisfaz duas das três leis de Kepler. Falta a dos períodos. O ponto de partida é simples: quando w completa uma volta, $z = w^2$ completa duas. Mais: a linearidade faz com que w percorra meia elipse (de centro 0) na metade de seu período; assim, o período de $z = w^2$ é a metade do de w .

Exercício 18.1 Prove isso.

Vejamos a cara de nossa w :

$$w(t) = \cos \beta t \vec{e}_1 + \sin \beta t \vec{e}_2,$$

sendo \vec{e}_1 e \vec{e}_2 dois vetores do plano determinados, por exemplo, pelas condições $w(0) = \vec{e}_1$ e $w(\pi/2) = \vec{e}_2$ e $\beta = k/\sqrt{m}$. Isto significa que $w(t)$ descreve a elipse imagem de $u(t) = \cos \beta t \vec{e}_1 + \sin \beta t \vec{e}_2$ pela transformação linear F que leva \vec{e}_1 em \vec{e}_1 e \vec{e}_2 em \vec{e}_2 .

Para facilitar um pouco as coisas, vamos usar a **decomposição em valores singulares**: existem uma base ortonormal (positivamente orientada), $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ de \mathbb{R}^2 e outra base, ortogonal, $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, de \mathbb{R}^2 , tais que $F\vec{u} = \vec{a}$ e $F\vec{v} = \vec{b}$. Para efeito de cálculo do período, não faz diferença se usamos $w(t) = \cos \beta t \vec{e}_1 + \sin \beta t \vec{e}_2$ ou $w(t) = \cos \beta t \vec{a} + \sin \beta t \vec{b}$. O período é o mesmo, $2\pi/\beta$, a elipse descrita por $w(t)$ é a mesma; também são os mesmos a elipse descrita por $z = w^2$ e o correspondente período. O que ganhamos?

1. Confira as afirmações acima.
2. Mostre que a w original pode ser obtida da antiga, fazendo $\vec{u} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\vec{v} = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$, de modo que a antiga expressão corresponde a

$$w(t) = F(\cos \beta t \vec{e}_1 + \sin \beta t \vec{e}_2),$$

enquanto a nova corresponde a uma defasagem:

$$w(t) = F\left(\cos \beta \left(t + \frac{\varphi}{\beta}\right) \vec{e}_1 + \sin \beta \left(t + \frac{\varphi}{\beta}\right) \vec{e}_2\right).$$

3. Mostre que a energia,

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(|\dot{w}(t)|^2 + \beta^2 |w(t)|^2 \right),$$

é a mesma, tanto na antiga como na nova w .

4. Vamos convencionar que $|\vec{a}| = a$ e $|\vec{b}| = b$. Mostre que ganhamos o seguinte: com a nova expressão, temos

$$|w(t)|^2 = \left| \cos \beta t \vec{a} + \sin \beta t \vec{b} \right|^2 = a^2 \cos^2 \beta t + b^2 \sin^2 \beta t.$$

5. Vamos, agora calcular o período de z , T , que é o correspondente à metade do de w . Mostre que, como meio período de w corresponde a uma variação de π/β em t , temos

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{\beta}} \frac{d\tau}{dt} dt = \int_0^{\frac{\pi}{\beta}} |w|^2 dt = \frac{\pi}{\beta} \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

6. Mostre que o semieixo maior da elipse descrita por $z = w^2$ é

$$A = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

7. Parece estranha a fórmula

$$T = \frac{\pi}{\beta} A?$$

Mostre que β não é uma constante universal.

8. Mais claramente, temos que a energia, $E(t)$, por independer de t , pode ser calculada por

$$E(0) = \frac{1}{2} \left(|\dot{w}(0)|^2 + \beta^2 |w(0)|^2 \right) = \beta^2 A.$$

9. Conclua que

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM}{A}}.$$

10. Junte e deduza que

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} A^3.$$

Capítulo 19

A curvatura

Como já vimos, a Geometria impõe certas restrições à Mecânica. Dada uma curva parametrizada $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, com velocidade sempre não nula e aceleração definida em todos os pontos, o número

$$\kappa = \frac{|a_N(t_0)|}{|v(t_0)|^2},$$

é a **curvatura** de c no ponto $c(t_0)$ (há uma certa imprecisão aqui, já que existe a possibilidade de que exista t_1 , diferente de t_0 , tal que $c(t_1) = c(t_0)$; neste caso, não necessariamente os correspondentes valores de κ coincidiriam).

A curvatura é uma característica da curva (isto é, da **trajetória**); não depende da parametrização (isto é, do **movimento**, da forma como a trajetória é descrita).¹ Mais precisamente, existe, para cada t_0 em I , um vetor $\vec{\kappa}_0$ tal que, se $c_1 = c \circ \alpha$ é uma reparametrização qualquer de c (supomos que α tem derivada segunda), com $\alpha(s_0) = t_0$, então a aceleração normal, $a_N(s_0)$, e a velocidade, $v(s_0)$, de c_1 guardam a relação

$$a_N(s_0) = |v(s_0)|^2 \vec{\kappa}_0.$$

O propósito deste capítulo é rediscutir o conceito de curvatura, investigando outras possíveis definições. Para tornar as coisas um pouco mais simples, vamos nos limitar às curvas planas.

Coloquemos mais explicitamente a questão, fixando algumas restrições. Suponhamos dada uma curva parametrizada plana, $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$ com, pelo menos, derivada segunda, e tal que $\dot{c}(t) \neq (0, 0)$ para todo t . Buscaremos respostas para: *o quão curva é c no ponto $c(t)$?*²

19.1 A aceleração normal

¹A rigor, a curvatura não depende sequer do sentido do movimento

²Fica entendido que, caso existam diferentes tempos, t_1, \dots, t_n tais que $c(t_1) = \dots = c(t_n) = P$, c tem o direito a uma curvatura diferente a cada passagem por P

Como já destacamos, uma primeira linha de investigação consiste em olhar para a relação entre a aceleração normal e o quadrado da velocidade.

Resposta 1: A curvatura de c é dada por

$$\kappa_1 = \frac{|a_N|}{|v|^2},$$

sendo a_N a aceleração normal e v a velocidade. Para o cálculo de κ_1 , consideremos, como o vetor velocidade $\dot{c} = (\dot{x}, \dot{y})$ é não nulo, a direção normal dada por $(-\dot{y}, \dot{x})$, de modo que

$$a_N = \pm \frac{\langle (\ddot{x}, \ddot{y}), (-\dot{y}, \dot{x}) \rangle}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} (-\dot{y}, \dot{x}).$$

Assim,

$$\kappa_1 = \frac{|-\dot{y}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

19.2 A aproximação por um círculo

Nossa segunda linha de investigação será puramente geométrica. Começamos com os círculos e observamos que, quanto menor o raio, mais curvo é o círculo.

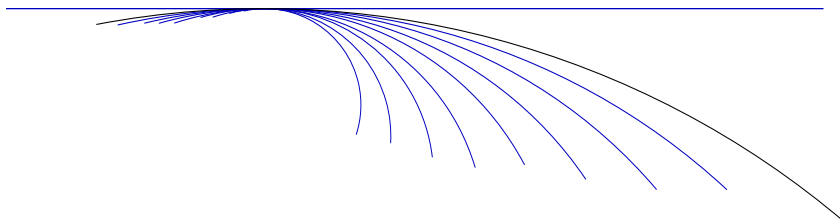


Figura 19.1: círculos passando por P , raios decrescentes

Podemos, assim, definir a curvatura de um círculo como o inverso de seu raio (a reta, vista como círculo de raio infinito, terá curvatura igual a zero).

Dada, agora, uma curva qualquer, c , e fixado um ponto $P_0 = c(t_0)$, podemos tentar achar o círculo que melhor aproxime c em P_0 e definir a curvatura de c , em $P_0 = c(t_0)$, como o inverso do raio desse círculo.³

Resposta 2: A curvatura de c é dada por

³O círculo que *melhor aproxima* a curva c no ponto P é chamado de **círculo osculador** de c em P

$$\kappa_2 = \frac{1}{R},$$

sendo R o raio do círculo que melhor aproxima c (no ponto considerado).

Mais explicitamente, se P_1 e P_2 são pontos próximos de P_0 e $R(P_0, P_1, P_2)$ é o raio do círculo passando por P_0 , P_1 e P_2 , então

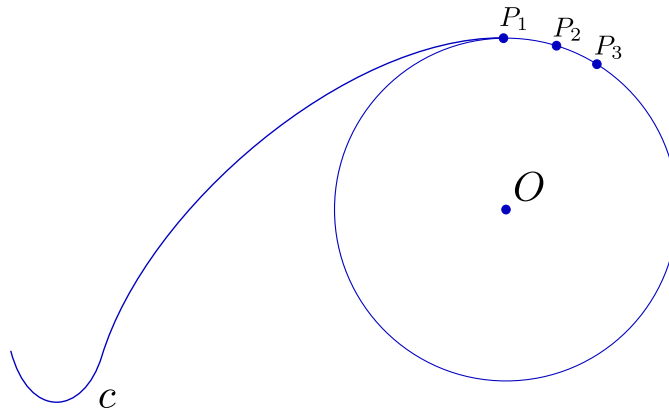


Figura 19.2: círculos passando por P_0 , P_1 e P_2

$$\kappa_2 = \lim_{P_1, P_2 \rightarrow P_0} \frac{1}{R(P_0, P_1, P_2)}.$$

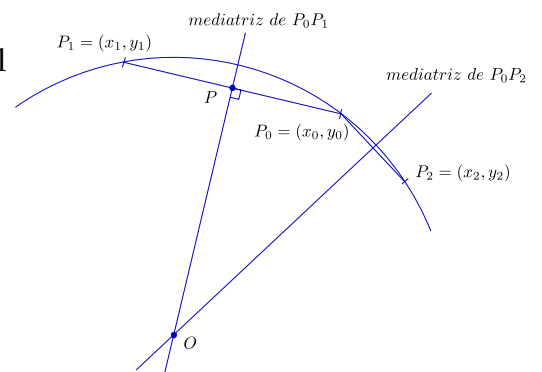
Para o cálculo de κ_2 , vamos ter um pouco de trabalho, mesmo sendo c uma curva plana: é preciso fixar $P_0 = c(t_0)$ e calcular, para $P_1 = c(t_0 + h)$ e $P_2 = c(t_0 + k)$, o raio do círculo passando por P_0 , P_1 e P_2 ; em seguida, temos que passar ao limite quando h e k tendem a zero. Vamos, para simplificar um pouco, supor que P_1 e P_2 estão em lados opostos, em relação a P_0 (faremos $h < 0$ e $k > 0$). Mãos à obra!

A mediatriz de P_0P_1 passa por $\frac{1}{2}(P_0 + P_1)$ e é normal a P_0P_1 , sendo descrita por

$$\left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2} \right) + r(y_0 - y_1, x_1 - x_0), \quad r \in \mathbf{R}.$$

Analogamente, a mediatriz de P_0P_2 é dada por

$$\left(\frac{x_0 + x_2}{2}, \frac{y_0 + y_2}{2} \right) + s(y_0 - y_2, x_2 - x_0), \quad s \in \mathbf{R}.$$



A interseção das mediatrizes se dá no ponto O , centro do círculo por P_0 , P_1 e P_2 .

Queremos o limite de $\overline{OP_0}$, quando P_1 e P_2 tendem a P_0 , isto é: quando h e k tendem a zero.

Notemos que basta calcular o limite de \overline{OP} , com

$P = \frac{1}{2}(P_0 + P_1)$, já que, como o triângulo OPP_0 é retângulo, temos $\overline{OP_0}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{P_0P}^2$, e $\overline{P_0P}$ vai para zero quando h tende a zero. Assim, obtendo O pela resolução de

$$\left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right) + r(y_0 - y_1, x_1 - x_0) = \left(\frac{x_0 + x_2}{2}, \frac{y_0 + y_2}{2}\right) + s(y_0 - y_2, x_2 - x_0),$$

e observando que

$$P = \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right),$$

o que queremos é

$$\kappa_2 = \lim_{\substack{h \rightarrow 0^- \\ k \rightarrow 0^+}} \frac{1}{|r(y_0 - y_1, x_1 - x_0)|} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0^- \\ k \rightarrow 0^+}} \frac{1}{|r|} \frac{1}{((y_0 - y_1)^2 + (x_1 - x_0)^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Fazendo as contas, temos

$$\frac{1}{r} = 2 \frac{(y_0 - y_1)(x_2 - x_0) + (x_1 - x_0)(y_2 - y_0)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_0)}.$$

Para a passagem ao limite, devemos notar que $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$, $(x_1, y_1) = (x(t_0 + h), y(t_0 + h))$ e $(x_2, y_2) = (x(t_0 + k), y(t_0 + k))$. Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} ((x_1, y_1) - (x_0, y_0)) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)) = (\dot{x}, \dot{y}),$$

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{1}{k} ((x_2, y_2) - (x_0, y_0)) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)) = (\dot{x}, \dot{y}).$$

Como $h < 0 < k$, podemos garantir que⁴

⁴Se supusermos apenas que $h < k$ (o que significa admitir que P_1 e P_2 possam estar *do mesmo lado em relação a* P_0 , podemos ainda, usando o Teorema do Valor Médio, garantir a existência de ξ e η em $]t_0 + h, t_0 + k[$ tais que

$$x(t_0 + k) - x(t_0 + h) = \dot{x}(\xi)(k - h),$$

$$y(t_0 + k) - y(t_0 + h) = \dot{y}(\eta)(k - h).$$

Como \dot{x} e \dot{y} são contínuas (já que c tem aceleração), a mesma conclusão se impõe

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0^- \\ k \rightarrow 0^+}} \frac{1}{k-h} (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (\dot{x}, \dot{y}).$$

Vamos, agora, examinar o limite

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0^- \\ k \rightarrow 0^+}} \frac{2[(y_o - y_1)(x_2 - x_o) + (x_1 - x_o)(y_2 - y_o)]}{[(x_2 - x_1)(x_2 - x_o) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_o)] \sqrt{(x_1 - x_o)^2 + (y_1 - y_o)^2}},$$

olhando, separadamente, para o numerador e o denominador.

Para o denominador, temos, claramente,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0^- \\ k \rightarrow 0^+}} \frac{[(x_2 - x_1)(x_2 - x_o) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_o)] \sqrt{(x_1 - x_o)^2 + (y_1 - y_o)^2}}{hk(k-h)} &= \\ &= (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Exercício 19.1 *Confira!*

Para o numerador, usamos o polinômio de Taylor:

$$y_1 = y(t_o + h) = y_o + h\dot{y} + \frac{h^2}{2}\ddot{y} + \varepsilon(h)h^2;$$

$$y_2 = y(t_o + k) = y_o + k\dot{y} + \frac{k^2}{2}\ddot{y} + \varepsilon(k)k^2;$$

$$x_1 = x(t_o + h) = x_o + h\dot{x} + \frac{h^2}{2}\ddot{x} + \eta(h)h^2;$$

$$x_2 = x(t_o + k) = x_o + k\dot{x} + \frac{k^2}{2}\ddot{x} + \eta(k)k^2;$$

com

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0} \eta(t).$$

Daí vem:

$$2[(y_o - y_1)(x_2 - x_o) + (x_1 - x_o)(y_2 - y_o)] =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[- \left(h\dot{y} + \frac{h^2}{2}\ddot{y} + \varepsilon(h)h^2 \right) \left(k\dot{x} + \frac{k^2}{2}\ddot{x} + \eta(k)k^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(h\dot{x} + \frac{h^2}{2}\ddot{x} + \eta(h)h^2 \right) \left(k\dot{y} + \frac{k^2}{2}\ddot{y} + \varepsilon(k)k^2 \right) \right] = \\
&= hk(k-h)(-\dot{y}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{y}) + h^2k \left[-2\varepsilon(h) \left(\dot{x} + \frac{k}{2}\ddot{x} + \eta(k)k \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2\eta(h) \left(\dot{y} + \frac{k}{2}\ddot{y} + \varepsilon(k)k \right) \right] + k^2h \left[-2\eta(k) \left(\dot{y} + \frac{h}{2}\ddot{y} \right) + 2\varepsilon(k) \left(\dot{x} + \frac{h}{2}\ddot{x} \right) \right].
\end{aligned}$$

Agora basta notar que, como $h < 0 < k$, temos $|k - h| = k - h > k = |k|$ e $|k - h| = k - h > |h|$, de modo que

$$\left| \frac{h^2k}{hk(k-h)} \right| < 1 \quad e \quad \left| \frac{k^2h}{hk(k-h)} \right| < 1.$$

Como os termos entre colchetes, na expressão acima, tendem a zero com h e k , temos

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0^- \\ k \rightarrow 0^+}} \frac{2[(y_0 - y_1)(x_2 - x_0) + (x_1 - x_0)(y_2 - y_0)]}{hk(k-h)} = -\dot{y}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{y}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{h \rightarrow 0^- \\ k \rightarrow 0^+}} \frac{2[(y_0 - y_1)(x_2 - x_0) + (x_1 - x_0)(y_2 - y_0)]}{[(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_0)] \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} &= \\
&= \frac{-\dot{y}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

o que nos dá

$$\kappa_2 = \frac{|-\dot{y}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

É impressionante, mas é verdade: $\kappa_2 = \kappa_1$!

19.3 A variação angular da normal

Vamos, ainda, conduzir os trabalhos de busca de uma boa definição de curvatura em uma terceira direção: olharemos para a variação angular do vetor normal unitário (ou, o que dá no mesmo, para a variação angular do vetor velocidade).⁵

Resposta 3: A curvatura de c é dada pela razão infinitesimal entre a variação do ângulo do vetor normal e o comprimento de arco:

$$\kappa_3 = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s}.$$

A ideia é considerarmos, em cada ponto $c(t) = (x(t), y(t))$, o correspondente vetor normal unitário, $n(t)$ (para ter uma definição clara, $n(t)$ será o unitário de $(-y'(t), x'(t))$). Quanto mais curva é c , maior a variação angular de n (em relação à variação do comprimento de c).

Assim, se Δs é a medida do arco de c entre $c(t)$ e $c(t + \Delta t)$, dada, já sabemos, por

$$\Delta s = \int_t^{t+\Delta t} |\dot{c}(\tau)| d\tau,$$

e $\Delta \theta$ é a medida do ângulo entre $n(t)$ e $n(t + \Delta t)$ (que é igual à medida do ângulo entre $\dot{c}(t)$ e $\dot{c}(t + \Delta t)$), temos nossa terceira definição.

$$\kappa_3 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s}.$$

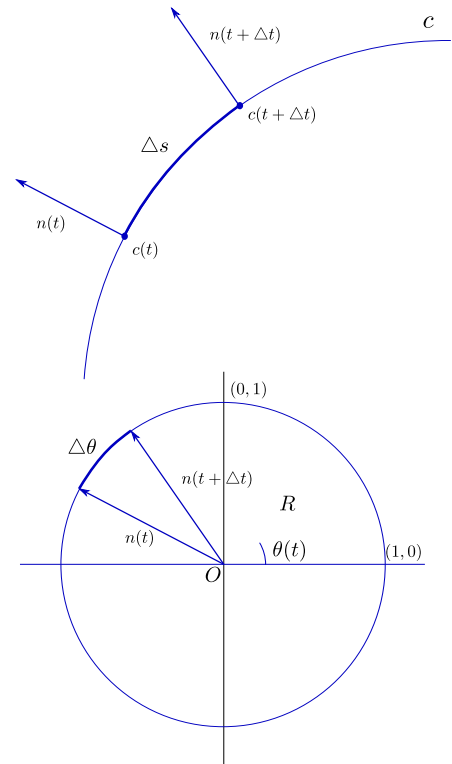
Passemos ao cálculo de κ_3 .

Como $\Delta \theta$ é a variação angular do vetor velocidade, (\dot{x}, \dot{y}) , temos

$$\Delta \theta = \int_t^{t+\Delta t} \frac{-\dot{y}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Para passar ao limite, basta notar que, como $\dot{c}(t) \neq 0$, podemos ter certeza de que $\Delta s \neq 0$ (para Δt suficientemente pequeno) e

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta s} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-\dot{y}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}}.$$



⁵A preferência pelo vetor normal unitário não é inocente: na definição de curvatura de superfícies, não temos como falar em vetor velocidade, mas podemos, ainda, olhar para a variação do vetor normal unitário (que indica, também, a variação do plano tangente)

Como estamos pensando em termos de valor absoluto, temos

$$\kappa_3 = \frac{|-\dot{y}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Magnífico! $\kappa_3 = \kappa_2 = \kappa_1$. Já podemos definir, formalmente, a curvatura.

19.4 A curvatura de uma curva plana

Já que nossas três linhas de investigação conduziram ao mesmo resultado, podemos adotá-lo como definição. Faremos apenas uma pequena mudança, permitindo que a curvatura tenha um sinal (que muda apenas com a mudança de sentido no movimento). Assim, no caso de curvas planas com velocidades não nulas, a curvatura depende apenas da **trajetória**.

Definição: Se $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $c(t) = (x(t), y(t))$, tem velocidade não nula em t e é tal que $\ddot{c}(t)$ está definida, a **curvatura** de c em $c(t)$, notada por $\kappa(t)$, é definida por

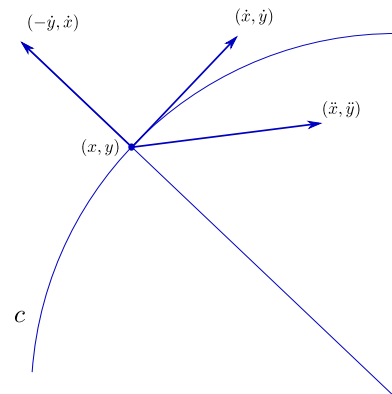
$$\kappa = \frac{-\dot{y}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Para uma interpretação geométrica do sinal de κ , basta notar que

$$(-\dot{y}, \dot{x})$$

é o vetor velocidade rodado (no sentido trigonométrico) de um ângulo reto e que

$$-\dot{y}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{y} = \langle (\dot{x}, \dot{y}), (-\dot{y}, \dot{x}) \rangle,$$

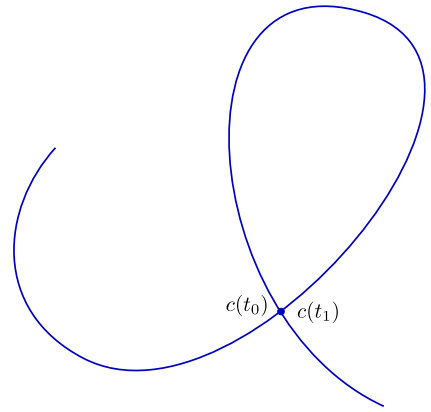


de modo que o sinal positivo da curvatura indica que c está se curvando para a esquerda. Em termos mais eruditos, podemos dizer que (\dot{c}, \ddot{c}) é, caso a curvatura seja positiva, uma base positivamente orientada, já que $-\dot{y}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{y}$ é o determinante $\det(\dot{c}, \ddot{c})$.

Exercício 19.2 Note que o sinal de κ depende da parametrização (mais precisamente, do sentido de percurso), mas que $|\kappa|$, não. Mostre que, se $c :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada e definimos $-c :]-b, -a[\rightarrow \mathbb{R}^2$ por $(-c)(t) = -c(-t)$, então a curvatura de $-c$ em $c(-t)$ tem valor absoluto igual, mas sinal oposto, ao da curvatura de c em $c(t)$.

Exercício 19.3 Suponha que duas curvas planas descrevem a mesma **trajetória**. Mostre que têm, em pontos correspondentes, a mesma curvatura.

Observação: Como c pode ter autointerseções (isto é, pode haver t_1 e t_2 em I , com $t_1 \neq t_2$ e $c(t_1) = c(t_2)$) falar em *curvatura de c em $c(t)$* tem uma certa imprecisão. A rigor, deveríamos falar *curvatura de c em t* , mas isto eclipsaria um pouco o significado geométrico (independente de parametrização) do conceito.



Exercício 19.4 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ uma função duas vezes derivável em $[a, b]$. Seja, para t em I , $c(t) = (t, f(t))$. Calcule a curvatura de $c(t)$; chame-a de $\kappa(t)$.

Suponha que $f'(a) = \tan \alpha$, $f'(b) = \tan \beta$, com α e β em $]-\pi/2, \pi/2[$ e que f'' é contínua.

1. Calcule $\int_a^b \kappa(t) dt$.
2. Reparametrize c por comprimento de arco (a partir de a), obtendo a curva $c_1(s)$, com a correspondente curvatura, que vamos chamar de $\kappa(s)$.
3. Sendo L o comprimento total de c e supondo f'' contínua, calcule $\int_0^L \kappa(s) ds$.
4. Pare, pense, e conclua que o resultado do item anterior é óbvio a partir da nossa terceira definição de κ .

Capítulo 20

O plano osculador

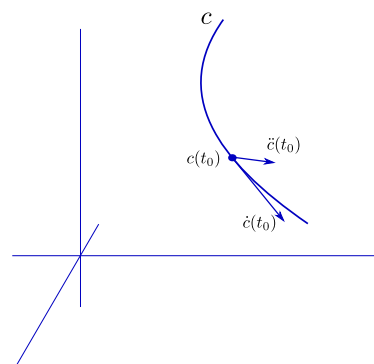
Voltemos às curvas no espaço. Fixemos uma curva

$$\begin{aligned} c : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t), z(t)), \end{aligned}$$

com x , y , e z duas vezes deriváveis.

Questão: O que faz c deixar de ser plana?

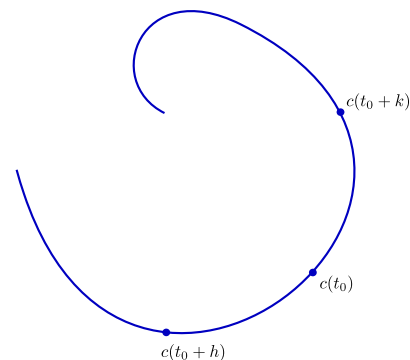
Para começar, observemos que o plano *natural* de c será dado, se olharmos o estado das coisas em um instante t , pelo ponto $c(t)$ e pelos vetores $\dot{c}(t)$ e $\ddot{c}(t)$ (caso $\dot{c}(t)$ e $\ddot{c}(t)$ sejam linearmente independentes).



Proposição: Se $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem derivada segunda em t , com $\dot{c}(t)$ e $\ddot{c}(t)$ linearmente independentes, então:

(i) para h e k suficientemente pequenos, com $h < 0 < k$, os pontos $c(t+h)$, $c(t)$ e $c(t+k)$ são não colineares;

(ii) quando h e k tendem a zero, com $h < 0 < k$, o plano passando por $c(t+h)$, $c(t)$ e $c(t+k)$ tende ao plano α passando pelo ponto $c(t)$ e paralelo aos vetores $\dot{c}(t)$ e $\ddot{c}(t)$,



$$\alpha = \{c(t) + x_1\dot{c}(t) + x_2\ddot{c}(t), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

O plano α é chamado **plano osculador** de c em $c(t)$.

Demonstração: Usaremos a seguinte ideia: $c(t+h)$, $c(t)$ e $c(t+k)$ serão não colineares se, e só se, o produto vetorial

$$[c(t+h) - c(t)] \otimes [c(t+k) - c(t)]$$

for não nulo. Na realidade, por razões que ficarão claras a seguir, trabalharemos com

$$n(h, k) = \frac{2}{hk(k-h)} [c(t+h) - c(t)] \otimes [c(t+k) - c(t)].$$

A razão para o estranho fator $\frac{2}{hk(k-h)}$ está na aproximação pelo polinômio de Taylor:

$$c(t + \Delta t) = c(t) + \Delta t \dot{c}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{c}(t) + \Delta t^2 \varepsilon(\Delta t),$$

com

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$$

(note que $\varepsilon(\Delta t) \in \mathbb{R}^3$ e que essa aproximação se obtém escrevendo

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

e olhando para as aproximações por polinômios de Taylor de x , y e z). Temos, então,

$$\begin{aligned} [c(t+h) - c(t)] \otimes [c(t+k) - c(t)] &= \\ \left[h\dot{c}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{c}(t) + h^2\varepsilon(h) \right] \otimes \left[k\dot{c}(t) + \frac{k^2}{2}\ddot{c}(t) + k^2\varepsilon(k) \right] &= \\ = \frac{hk(k-h)}{2}\dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t) + & \\ + h^2k\varepsilon(h) \otimes \left[\dot{c}(t) + \frac{k}{2}\ddot{c}(t) + k\varepsilon(h) \right] + k^2h \left[\dot{c}(t) + \frac{h}{2}\ddot{c}(t) \right] \otimes \varepsilon(k). & \end{aligned}$$

Consideremos, para $h < 0$ e $k > 0$, com $t+h$ e $t+k$ em I ,

$$\begin{aligned} n(h, k) &= \frac{2}{hk(k-h)} [c(t+h) - c(t)] \otimes [c(t+k) - c(t)] = \\ &= \dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t) + \\ + \frac{2h}{k-h}\varepsilon(h) \otimes \left[\dot{c}(t) + \frac{k}{2}\ddot{c}(t) + k\varepsilon(h) \right] + \frac{2k}{k-h} \left[\dot{c}(t) + \frac{h}{2}\ddot{c}(t) \right] \otimes \varepsilon(k) &= \\ &= \dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t) + r(h, k). \end{aligned}$$

Note que, como $h < 0 < k$, temos $\left| \frac{2h}{k-h} \right| < 2$ e $\left| \frac{2k}{k-h} \right| < 2$. Assim, como $\varepsilon(\Delta t)$ tende a zero com Δt , temos

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0^- \\ k \rightarrow 0^+}} r(h, k) = 0,$$

o que demonstra que $n(h, k)$ tende a $\dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t)$.

Como, por hipótese, este último é não nulo, concluímos que, para h e k pequenos (com $h < 0 < k$), o vetor $n(h, k)$ é não nulo. Agora podemos afirmar que, para h e k pequenos (com $h < 0 < k$), os pontos $c(t+h)$, $c(t)$ e $c(t+k)$ são não colineares e que o plano passando por eles, que é definido pelo ponto $c(t)$ e pelo vetor normal $n(h, k)$, tende ao plano osculador α , passando por $c(t)$ e normal a $\dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t)$. ■

Problema: Considere c nas condições da Proposição e seja, para h e k suficientemente pequenos, com $h < 0 < k$, o círculo $C(h, k)$, passando por $c(t+h)$, $c(t)$ e $c(t+k)$. Mostre que, quando $h \rightarrow 0^-$ e $k \rightarrow 0^+$, $C(h, k)$ tende a um círculo C , do plano osculador, passando por $c(t)$, cujo centro está na semirreta que sai de $c(t)$ e tem a direção (e o sentido) do vetor normal, e cujo raio é o inverso da curvatura de c em $c(t)$. C é chamado **círculo osculador** de c em $c(t)$.

Capítulo 21

O que faz uma curva deixar de ser plana?

O capítulo anterior colocou a pergunta, mas não trouxe sua resposta. Começemos, pois, mais atrás: curvas parametrizadas podem se limitar a *andar* sobre um ponto (se $c(t)$ é constante), podem *andar* sobre uma reta, podem ser planas e, finalmente, podem não ser planas. Tratemos, então, uma de cada vez, as três questões correspondentes.

21.1 O que faz uma curva deixar de ser um ponto?

Resposta: Velocidade não nula.

Esta foi só para um aquecimento. Vejamos a próxima.

21.2 O que faz uma curva deixar de ser reta?

Resposta: Curvatura não nula.

Vamos trabalhar um pouco mais nas respostas.

Para que $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ não se reduza a um ponto, olhamos para \dot{c} . Basta que \dot{c} não se anule em algum t de I para que c deixe de *ser um ponto*.

Se queremos um critério para c não seja reta, olhamos para \dot{c} e \ddot{c} . Se, para algum t em I , tivermos $\dot{c}(t)$ e $\ddot{c}(t)$ não nulos, ainda não dá para garantir (\ddot{c} poderia ter apenas a componente tangencial). Precisamos de aceleração normal. Isto pode ser dito da seguinte maneira: para que c não seja reta, basta que $\dot{c}(t)$ e $\ddot{c}(t)$ sejam linearmente independentes, para algum t em I (isto foi tratado no capítulo anterior).

É interessante notar que a recíproca não é verdadeira: c pode não ser reta, ainda que $\dot{c}(t)$ e $\ddot{c}(t)$ sejam linearmente dependentes para todo t .

Exercício 21.1 Seja $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $c(t) = (t^3, |t|^3)$. Mostre que $\dot{c}(t)$ e $\ddot{c}(t)$ são linearmente dependentes, para todo t em \mathbb{R} .

Em compensação, se $\dot{c}(t)$ é não nula para todo t e $\dot{c}(t)$ & $\ddot{c}(t)$ são linearmente dependentes para todo t , aí sim, podemos afirmar que c é reta.

Exercício 21.2 Suponhamos que $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é tal que $\dot{c}(t)$ & $\ddot{c}(t)$ são linearmente dependentes, com $\dot{c}(t)$ não nula, para todo t em I . Reparametrize c por comprimento de arco, obtendo $c_1(s)$, $s \in J$. Mostre que $\langle c_1'(s), c_1''(s) \rangle = 0$, para todo s em J . Mostre que, como \dot{c} e \ddot{c} são linearmente dependentes, c_1' e c_1'' também são. Conclua que $c_1'' \equiv 0$ em J e que, portanto, c_1' é constante. Conclua que o traço de c_1 , que é igual ao de c , está sobre uma reta.

Podemos, agora, voltar a nossa questão inicial.

21.3 O que faz uma curva deixar de ser plana?

Ao que tudo indica, devemos olhar para a terceira derivada. Esta deve ter uma componente que *puxe* a curva para fora do plano definido pelo ponto $c(t)$ e pelos vetores $\dot{c}(t)$ & $\ddot{c}(t)$.

Proposição: Seja $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada com derivada terceira. Se, para todo t em I , $\dot{c}(t)$ & $\ddot{c}(t)$ são linearmente independentes e $\dot{c}(t)$, $\ddot{c}(t)$ & $\dddot{c}(t)$ são linearmente dependentes, então c é uma curva plana.

Demonstração: Nossas hipóteses significam que $\dddot{c}(t)$ é combinação linear de $\dot{c}(t)$ & $\ddot{c}(t)$. Assim, existem funções $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ tais que

$$\dddot{c}(t) = \alpha(t)\dot{c}(t) + \beta(t)\ddot{c}(t) \quad \forall t \in I.$$

O candidato natural a plano da curva é definido, em cada t , pelo ponto $c(t)$ e pelos vetores $\dot{c}(t)$ & $\ddot{c}(t)$, ou seja: é normal a $\dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t)$. Precisamos, então (e vamos!) provar que a direção de $\dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t)$ não varia.

Suponhamos, inicialmente, que c esteja parametrizada por comprimento de arco, de modo que, para todo t em I , $|\dot{c}(t)| = 1$. Nessas condições, temos \ddot{c} normal a \dot{c} e $\kappa = |\ddot{c}|$ (de modo que, como $\dot{c}(t)$ & $\ddot{c}(t)$ são linearmente independentes, κ é não nula). Seja, então,

$$n(t) = \dot{c}(t) \otimes \left(\frac{1}{|\ddot{c}(t)|} \ddot{c}(t) \right) = \frac{1}{\kappa(t)} \dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t), \quad t \in I.$$

Note que, como $\dot{c}(t)$ & $\ddot{c}(t)$ são ortogonais, $n(t)$ é, para todo t , unitário. Logo, $\dot{n}(t)$ é normal a $n(t)$ (ou, o que dá no mesmo, é normal a $\dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t)$). Fazendo as contas, obtemos:

$$\dot{n}(t) = -\frac{\dot{\kappa}(t)}{\kappa(t)^2} \dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \ddot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \dot{c}(t) \otimes \dddot{c}(t).$$

Como $\dddot{c} = \alpha\dot{c} + \beta\ddot{c}$, temos

$$\dot{n}(t) = \left[-\frac{\dot{\kappa}(t)}{\kappa(t)^2} + \frac{\beta(t)}{\kappa(t)} \right] \dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t).$$

Mas $\dot{n}(t)$ é normal a $\dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t)$. Logo, $\dot{n}(t)$ é identicamente nulo. Podemos, então, escrever $n(t) \equiv n_o$ e observar que, fixado um ponto qualquer, $c(t_o)$, de c , temos

$$\frac{d}{dt} \langle c(t) - c(t_o), n_o \rangle = \langle \dot{c}(t), n(t) \rangle = \left\langle \dot{c}(t), \frac{1}{\kappa(t)} \dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t) \right\rangle = 0 \quad \forall t \in I.$$

Isso prova que $\langle c(t) - c(t_o), n_o \rangle$ é constante. Fazendo $t = t_o$, vemos que a constante é 0, o que mostra que, para todo t em I , $c(t)$ está no plano que passa por $c(t_o)$ e é normal a n_o .

Vejam, agora, o caso geral (isto é: c não necessariamente parametrizada por comprimento de arco). Entre nossas hipóteses, consta a não nulidade de \dot{c} . Podemos, pois, reparametrizar c por comprimento de arco e aplicar à curva c_1 , assim obtida, o raciocínio acima. Mas, atenção: mudando a parametrização, mudam as derivadas, o que significa que não podemos concluir, imediatamente, de

$$\ddot{c}(t) = \alpha(t)\dot{c}(t) + \beta(t)\ddot{c}(t) \quad \forall t,$$

que existam $\alpha_1(s)$ e $\beta_1(s)$ tais que

$$c'''(s) = \alpha_1(s)c'_1(s) + \beta_1(s)c''_1(s) \quad \forall s.$$

No entanto, é mais ou menos óbvio, da regra da cadeia, que $c'''_1(s)$ é combinação linear de $\dot{c}(t(s))$, $\ddot{c}(t(s))$ & $\ddot{c}(t(s))$. Façamos as contas. Vamos usar, sem pudores, $t = t(s)$ e $s = s(t)$ para passar de c a c_1 e de c_1 a c (entendido que $s(t(s)) = s$ e $t(s(t)) = t$).

Exercício 21.3 *Faça, você mesmo(a), as contas.*

Derivando $c(t) = c_1(s(t))$, obtemos:

$$(*) \quad \dot{c}(t) = \frac{ds}{dt}c'_1(s(t)), \quad \ddot{c}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}c'_1(s(t)) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 c''_1(s(t)).$$

Por outro lado, derivando $c_1(s) = c(t(s))$, obtemos:

$$\begin{aligned} c'_1(s) &= \frac{dt}{ds}\dot{c}(t(s)), \quad c''_1(s) = \frac{d^2t}{ds^2}\dot{c}(t(s)) + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \ddot{c}(t(s)), \\ (**) \quad c'''_1(s) &= \frac{d^3t}{ds^3}\dot{c}(t(s)) + 3\frac{d^2t}{ds^2}\frac{dt}{ds}\ddot{c}(t(s)) + \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \ddot{c}(t(s)) = \\ &= \left[\frac{d^3t}{ds^3} + \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \alpha(t(s)) \right] \dot{c}(t(s)) + \left[3\frac{d^2t}{ds^2}\frac{dt}{ds} + \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \beta(t(s)) \right] \ddot{c}(t(s)). \end{aligned}$$

Substituindo em (**) os resultados de (*), obtemos

$$c'''_1(s) = \alpha_1(s)c'_1(s) + \beta_1(s)c''_1(s),$$

com

$$\begin{aligned} \alpha_1(s) &= \frac{ds}{dt}(t(s)) \left[\frac{d^3t}{ds^3}(s) + \left(\frac{dt}{ds}(s) \right)^3 \alpha(t(s)) \right] + \\ &\quad + \frac{d^2s}{dt^2}(t(s)) \left[3 \frac{d^2t}{ds^2}(s) \frac{dt}{ds}(s) + \left(\frac{dt}{ds}(s) \right)^3 \beta(t(s)) \right], \\ \beta_1(s) &= \left(\frac{ds}{dt}(t(s)) \right)^2 \left[3 \frac{d^2t}{ds^2}(s) \frac{dt}{ds}(s) + \left(\frac{dt}{ds}(s) \right)^3 \beta(t(s)) \right]. \end{aligned}$$

Assim, c_1 é uma curva plana. Como c_1 e c têm o mesmo traço, concluímos que c é plana. ■

As considerações acima indicam que nossa resposta deve ser procurada na componente normal de \ddot{c} (isto é, na projeção de \ddot{c} na direção de $\dot{c} \otimes \ddot{c}$). Esta será não nula se, e só se, for não nulo o **produto misto**

$$\langle \dot{c} \otimes \ddot{c}, \ddot{c} \rangle = \det(\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{c}).$$

Exercício 21.4 Seja $c_1(s) = c(\alpha(s))$ uma reparametrização de $c(t)$ (temos, portanto, $c'_1(s) = \alpha'(s)\dot{c}(\alpha(s))$). Mostre que

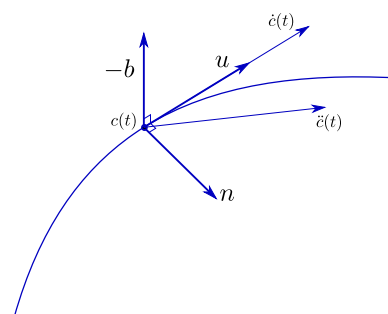
$$\det(c'_1(s), c''_1(s), c'''_1(s)) = \alpha'(s)^6 \det(\dot{c}(\alpha(s)), \ddot{c}(\alpha(s)), \ddot{c}(\alpha(s))).$$

Capítulo 22

A torção

Agora que já sabemos para onde olhar, procuremos estabelecer uma medida de o quanto a curva deixa de ser plana (a exemplo da **curvatura**, que mede o quanto a curva deixa de ser reta).

Começemos estabelecendo um sistema de coordenadas adequado. Suponhamos dada $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\dot{c}(t)$ & $\ddot{c}(t)$ são linearmente independentes. Podemos, então, formar uma base ortonormal com o unitário da velocidade, o unitário da aceleração normal e o produto vetorial desses dois. Tal base é conhecida como **triedro de Frenet**.



O **unitário tangente**, $u(t)$ (usualmente notado por \mathbf{t} , o que evitaremos, pela quase certa confusão com a variável t), é dado por

$$u(t) = \frac{1}{|\dot{c}(t)|} \dot{c}(t).$$

O **normal principal**, $n(t)$, é dado por

$$n(t) = \frac{1}{|a_N(t)|} a_N(t),$$

com $a_N(t) = \ddot{c}(t) - \langle \ddot{c}(t), u(t) \rangle u(t)$.

O **binormal**, $b(t)$, é dado por

$$b(t) = u(t) \otimes n(t).$$

Exercício 22.1 Note que

$$b(t) = \frac{1}{|\dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t)|} \dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t).$$

Os vetores u , n & b constituem, pois, uma base ortonormal positivamente orientada para \mathbb{R}^3 , conhecida como **triedro de Frenet** (note que o triedro de Frenet varia com t , e que só existe na hipótese de que \dot{c} e \ddot{c} sejam linearmente independentes). O vetor $b(t)$ é, além de unitário, normal ao plano osculador (lembre que o plano osculador, no instante t , é definido pelo ponto $c(t)$ e pelos vetores $\dot{c}(t)$ e $\ddot{c}(t)$). Uma forma normalizada de medir o quanto c deixa de ser plana pode, então, ser obtida se reparametrizarmos c por comprimento de arco e olharmos para a derivada, $b'(s)$, de b em relação ao novo parâmetro.

Exercício 22.2 Note que, como b é unitário, b' é, forçosamente, normal a b . Note, também, que o ângulo entre $b(s)$ e $b(s + \Delta s)$ é também o ângulo entre os planos osculadores correspondentes a s e a $s + \Delta s$.

22.1 A definição

Para simplificar, suponhamos, desde o começo, c parametrizada por comprimento de arco, e chamemos de s o parâmetro. Nessas condições, sabemos que a velocidade é unitária, o que nos dá $u(s) = \dot{c}(s)$, que não há aceleração tangencial, o que nos dá $a_N(s) = \ddot{c}(s)$, e que, sendo $\kappa(s)$ a curvatura, temos $\kappa(s) = |a_N(s)|$. Assim,

$$u(s) = c'(s), \quad n(s) = \frac{1}{\kappa(s)} c''(s), \quad b(s) = \frac{1}{\kappa(s)} c'(s) \otimes c''(s).$$

Vejamos, agora, o que nos dá $b'(s)$:

$$\begin{aligned} b'(s) &= \frac{1}{\kappa(s)} [c''(s) \otimes c''(s) + c'(s) \otimes c'''(s)] - \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} c'(s) \otimes c''(s) = \\ &= \frac{1}{\kappa(s)^2} c'(s) \otimes [\kappa(s) c'''(s) - \kappa'(s) c''(s)]. \end{aligned}$$

Assim, $b'(s)$ é normal a $c'(s) = u(s)$. Por outro lado, como $b(s)$ tem norma constante, temos $\langle b'(s), b(s) \rangle = 0$. Logo, a única componente de $b'(s)$, em relação ao triedro de Frenet, é na direção de $n(s)$, ou seja:

$$b'(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle n(s).$$

Usando a expressão acima obtida para $b'(s)$ e substituindo $n(s) = (1/\kappa(s)) c''(s)$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle b'(s), n(s) \rangle &= \left\langle \frac{1}{\kappa(s)^2} c'(s) \otimes [\kappa(s) c'''(s) - \kappa'(s) c''(s)], \frac{1}{\kappa(s)} c''(s) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\kappa(s)^2} \langle c'(s) \otimes c'''(s), c''(s) \rangle - \frac{1}{\kappa(s)^2} \langle c'(s) \otimes c''(s), c'''(s) \rangle. \end{aligned}$$

Definição: O número $\tau(s)$, dado por

$$\tau(s) = \frac{1}{\kappa(s)^2} \langle c'(s) \otimes c''(s), c'''(s) \rangle,$$

é chamado **torção** de c (no ponto $c(s)$).

Exercício 22.3 Reflita profundamente sobre o significado físico e geométrico da torção. Será que a torção tem mesmo a ver com o fato de a curva estar sendo torcida?

Exercício 22.4 Observe que, como $\langle c''(s), c'(s) \rangle = 0$, $c'''(s)$ é normal à velocidade, ou seja, à direção em que a curva está se movendo.

Exercício 22.5 Observe que a componente de $c'''(s)$ na direção de $n(s)$ (ou seja, na de $c''(s)$) não contribui para mudar o plano da curva (o plano osculador).

Exercício 22.6 Resta a componente de $c'''(s)$ na direção normal à velocidade e à aceleração. Podemos dizer que esta tenta, modificando $c''(s)$, fazer com que o plano osculador gire em torno do eixo dado pela velocidade?

Exercício 22.7 É razoável que a taxa de variação angular seja, então, dada pela norma da componente de $c'''(s)$ na direção de $b(s)$, dividida pela norma de $c''(s)$? É essa a definição de torção?

22.2 Cálculo da torção

Para o cálculo de τ , quando c não está parametrizada por comprimento de arco, reparametrizamos c , de forma a obter $c_1(s) = c(t(s))$, com $\frac{ds}{dt} = |\dot{c}(t)|$. Temos, então, se $t = t(s)$,

$$c'_1(s) = \frac{dt}{ds} \ddot{c}(t),$$

$$c''_1(s) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \dot{c}(t) + \frac{d^2t}{ds^2} \dot{c}(t),$$

$$c'''_1(s) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \ddot{c}(t) + 3\frac{dt}{ds} \frac{d^2t}{ds^2} \dot{c}(t) + \frac{d^3t}{ds^3} \dot{c}(t),$$

com

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{c}(t)|}.$$

Isto nos dá

$$\langle c'_1(s) \otimes c''_1(s), c'''_1(s) \rangle = \left(\frac{dt}{ds}\right)^6 \langle \dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle,$$

ou seja:

$$\tau(s(t)) = \frac{1}{\kappa(s(t))^2 |\dot{c}(t)|^6} \langle \dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle.$$

Ainda não terminamos. Note que

$$\kappa(s(t)) |\dot{c}(t)|^2 = |a_N(t)|.$$

Além disso, $a_N(t)$ é a componente de $\ddot{c}(t)$ normal a $\dot{c}(t)$. Logo,

$$\kappa(s(t))^2 |\dot{c}(t)|^6 = |a_N(t)|^2 |\dot{c}(t)|^2 = |\dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t)|^2,$$

ou, finalmente (chamando, de forma um pouco abusada, $\tau(s(t))$ de $\tau(t)$):

$$\tau(t) = \frac{\langle \dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle}{\langle \dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t), \dot{c}(t) \otimes \ddot{c}(t) \rangle}.$$

Capítulo 23

As equações de Serret-Frenet

23.1 As equações

Podemos ter um quadro resumido de nossos estudos considerando uma curva

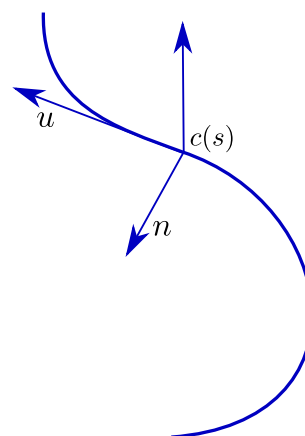
$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

parametrizada por comprimento de arco, e trabalhando com o **triedro de Frenet**:

$$u(s) = c'(s),$$

$$n(s) = \frac{1}{|c''(s)|} c''(s) = \frac{1}{\kappa(s)} c''(s),$$

$$b(s) = u(s) \otimes n(s) = \frac{1}{\kappa(s)} c'(s) \otimes c''(s).$$



A curvatura, $\kappa(s)$, e a torção, $\tau(s)$, satisfazem, como já vimos, a

$$u'(s) = \kappa(s)n(s),$$

$$b'(s) = -\tau(s)n(s).$$

Se deduzirmos, para $n'(s)$, uma fórmula envolvendo apenas u , b , κ e τ , teremos um sistema de equações diferenciais que nos permitirá, dadas a curvatura e a torção, obter u , n e b , a partir de seus dados iniciais. Ora, podemos partir de $n = b \otimes u$ e derivar:

$$n'(s) = b'(s) \otimes u(s) + b(s) \otimes u'(s),$$

ou seja,

$$n'(s) = -\tau(s)n(s) \otimes u(s) + \kappa(s)b(s) \otimes n(s) = \tau(s)b(s) - \kappa(s)u(s).$$

Observação: Uma dedução alternativa (mais trabalhosa), sem usar o produto vetorial começa por observar que, como $|n(s)| = 1$ para todo s , temos

$$\langle n'(s), n(s) \rangle = 0 \quad \forall s \in I,$$

o que nos dá

$$n'(s) = \alpha(s)u(s) + \beta(s)b(s),$$

com

$$\alpha(s) = \langle n'(s), u(s) \rangle,$$

$$\beta(s) = \langle n'(s), b(s) \rangle.$$

Mas, como,

$$\langle n(s), u(s) \rangle = 0 \quad \forall s \in I,$$

$$\langle n(s), b(s) \rangle = 0 \quad \forall s \in I,$$

temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \langle n(s), u(s) \rangle = \langle n(s), u'(s) \rangle + \langle n'(s), u(s) \rangle = \\ &= \langle n(s), \kappa(s)n(s) \rangle + \langle n'(s), u(s) \rangle = \kappa(s) + \langle n'(s), u(s) \rangle, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \langle n(s), b(s) \rangle = \langle n(s), b'(s) \rangle + \langle n'(s), b(s) \rangle = \\ &= \langle n(s), -\tau(s)n(s) \rangle + \langle n'(s), b(s) \rangle = -\tau(s) + \langle n'(s), b(s) \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$n'(s) = -\kappa(s)u(s) + \tau(s)b(s).$$

Definição: As equações diferenciais

$$\begin{cases} u' = \kappa n, \\ n' = -\kappa u + \tau b, \\ b' = -\tau n, \end{cases}$$

são conhecidas como **equações, ou fórmulas, de Serret-Frenet** (foram obtidas por Serret e Frenet, independentemente, por volta de 1850).

Exercício 23.1 Uma terceira forma de deduzir n' é a seguinte:

(i) de $\langle n, n \rangle = 1$, conclua que $n' = \alpha u + \beta b$;

(ii) derive $\langle u, n \rangle = 0$ e obtenha α ;

(iii) derive $\langle b, n \rangle = 0$ e obtenha β .

23.2 Obtendo a curva a partir das equações

As equações de Serret-Frenet nos mostram um caminho para a resposta à seguinte questão: suponhamos dadas duas funções contínuas, definidas em um mesmo intervalo I ,

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau : I \rightarrow \mathbb{R},$$

que suporemos serem, respectivamente, a curvatura e a torção de uma curva $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, parametrizada por comprimento de arco, a determinar (podemos, claro, supor κ não negativa); é possível obter c com a curvatura e a torção dadas? caso a resposta seja positiva, a curva assim obtida é única?

A resposta à segunda parte da questão é, obviamente, negativa: se transladarmos ou rodarmos uma curva, sua curvatura e sua torção não mudarão (uma alternativa seria considerarmos iguais curvas que se obtêm umas das outras por meio de movimentos rígidos). Deixando de lado essa pequena objeção, concentremo-nos na primeira parte. Admitamos, também, provado que o sistema de equações de Serret-Frenet tem solução única, isto é: fixado um certo s_0 em I e dados u_0 , n_0 e b_0 (tais que u_0 , n_0 e b_0 constituem base ortonormal positivamente orientada), existem

$$u : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad n : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad b : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

que satisfazem, em I , as equações de Serret-Frenet:

$$\begin{cases} u' = \kappa n, \\ n' = -\kappa u + \tau b, \\ b' = -\tau n. \end{cases}$$

A partir daí, podemos construir nossa curva: dado um ponto P_0 , que tomaremos como $c(s_0)$, fazemos

$$c(s) = P_0 + \int_{s_0}^s u(\sigma) d\sigma.$$

Resta, porém, uma objeção: tudo funciona bem, se tivermos a garantia de que as soluções, $u(s)$, $n(s)$ e $b(s)$, do sistema de equações de Serret-Frenet formam, para cada s em I , uma base ortonormal para \mathbb{R}^3 . Ora, o problema é que, quando partimos da curva c e definimos u , n e b , a ortonormalidade do triedro de Frenet decorre das definições. Agora, porém, os vetores $u(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ são, apenas, soluções do sistema. Devemos,

portanto, deduzir, diretamente das equações de Serret-Frenet, que as soluções formam base ortonormal. Vamos encarar essa questão, admitindo a veracidade do teorema a seguir.

Teorema: Sejam I um intervalo não trivial na reta real e suponhamos dada uma aplicação contínua

$$A : I \longrightarrow M_{n \times n},$$

que a cada t em I associa a matriz $n \times n$ $A(t) = (a_{ij}(t))$ (entendido que a continuidade de A significa a continuidade de cada uma das aplicações $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$). Então, fixados t_0 em I e x_0 em \mathbb{R}^n , existe uma única solução $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t), & t \in I, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Demonstração: Não faremos. ■

No caso das equações de Serret-Frenet, nosso sistema é em \mathbb{R}^9 (já que cada uma das funções a determinar tem 3 coordenadas), dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{n}_1 \\ \dot{n}_2 \\ \dot{n}_3 \\ \dot{b}_1 \\ \dot{b}_2 \\ \dot{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Exercício 23.2 Note que a matriz do nosso sistema é antissimétrica.

Como já destacamos, o teorema de existência e unicidade acima nos garante a existência de $u = (u_1, u_2, u_3)$, $n = (n_1, n_2, n_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$, satisfazendo as equações de Serret-Frenet. Nosso propósito, porém, é demonstrar que $u(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ formam, para cada s , uma base ortonormal para \mathbb{R}^3 . Ora, renomeando, de forma que $u = \varepsilon_1$, $n = \varepsilon_2$ e $b = \varepsilon_3$, o que queremos é provar que, para $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$, temos

$$x_{ij}(s) = \langle \varepsilon_i(s), \varepsilon_j(s) \rangle = \delta_{ij},$$

com

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Ora, o vetor (em \mathbb{R}^9 , mas, como $x_{ij} = x_{ji}$, podemos diminuir para \mathbb{R}^6) de coordenadas $x_{ij}(s)$ satisfaz $x_{ij}(0) = \delta_{ij}$ e as equações

$$\frac{d}{ds}x_{ij} = \langle \varepsilon'_i, \varepsilon_j \rangle + \langle \varepsilon_i, \varepsilon'_j \rangle.$$

Exercício 23.3 Usando as equações de Serret-Frenet, explicita o sistema de equações diferenciais lineares a que estão sujeitas as funções $x_{ij}(s)$. Por exemplo:

$$\frac{d}{ds}x_{22} = \langle -\kappa\varepsilon_1 + \tau\varepsilon_3, \varepsilon_2 \rangle + \langle \varepsilon_2, -\kappa\varepsilon_1 + \tau\varepsilon_3 \rangle,$$

ou seja,

$$\frac{d}{ds}x_{22} = -\kappa x_{12} + \tau x_{32} - \kappa x_{21} + \tau x_{23} = 2\tau x_{23} - 2\kappa x_{12}.$$

Observe que o sistema obtido está dentro das hipóteses do Teorema e tem, portanto, uma única solução. Mostre que

$$y_{ij}(s) = \delta_{ij}$$

satisfaz o sistema de equações e as condições iniciais (note que, por serem constantes, os $y_{ij}(s)$ têm todas as derivadas nulas). Conclua, da unicidade da solução, que $x_{ij}(s) = \delta_{ij}$

Exercício 23.4 Note que, como $u(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ formam base ortonormal e variam continuamente, o sinal de $\det(u(s), n(s), b(s))$ não pode mudar. Conclua que, se os dados iniciais u_0 , n_0 e b_0 formam base positivamente orientada, então $u(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ formam, para todo s , base positivamente orientada.

Exercício 23.5 Suponha dadas $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$, contínuas, com $\kappa(s) > 0$ para todo s em I . Suponha, também, dada uma base ortonormal, u_0, n_0 e $b_0 = u_0 \otimes n_0$. Sejam $u(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ as correspondentes soluções das equações de Serret-Frenet. Fixe s_0 em I e P_0 em \mathbb{R}^3 e defina $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$c(s) = P_0 + \int_{s_0}^s u(\sigma) d\sigma.$$

Mostre que a curvatura de c é dada por κ e a torção, por τ . Suponha dada uma outra base ortonormal, u_1, n_1 e $b_1 = u_1 \otimes n_1$. Considere a transformação linear A dada por $Au_0 = u_1$, $An_0 = n_1$, $Ab_0 = b_1$. Mostre que $Au(s)$, $An(s)$ e $Ab(s)$ são as soluções das equações de Serret-Frenet com dados iniciais u_1 , n_1 e b_1 .

Exercício 23.6 Suponha que $c_1, c_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ são duas curvas, parametrizadas por comprimento de arco, com mesma curvatura e mesma torção. Mostre que existem um vetor w e uma rotação R tais que $c_2(s) = w + Rc_1(s)$, para todo s em I .

Exercício 23.7 Suponha dadas $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$, contínuas, com $\kappa(s) > 0$ para todo s em I . Suponha, também, dada uma base ortonormal, u_0, n_0 e $b_0 = u_0 \otimes n_0$. Encontre um bom método numérico para aproximar as soluções, $u(s)$, $n(s)$ e $b(s)$, de

$$\begin{cases} u' = \kappa n, \\ n' = -\kappa u + \tau b, \\ b' = -\tau n, \end{cases}$$

com $u(s_0) = u_0$, $n(s_0) = n_0$ e $b(s_0) = b_0$, para um certo s_0 fixado em I . Note que a aproximação

$$\begin{cases} u(s + \Delta s) = u(s) + \Delta s \kappa(s) n(s) \\ n(s + \Delta s) = n(s) + \Delta s (-\kappa u(s) + \tau(s) b(s)) \\ b(s + \Delta s) = b(s) + \Delta s (-\tau(s) n(s)) \end{cases}$$

tem o defeito de não manter as relações $|u| = |n| = |b| = 1$ e $\langle u, n \rangle = \langle n, b \rangle = \langle b, u \rangle = 0$.