

[www.im.ufrj.br/cvga](http://www.im.ufrj.br/cvga)

**CÁLCULO VETORIAL  
&  
GEOMETRIA ANALÍTICA**  
**livro 3: cônicas & Teorema Espectral**

**Felipe Acker**



**Instituto de Matemática  
Universidade Federal do Rio de Janeiro**

maio de 2021

copyright ©2021 by Felipe Acker

Este trabalho foi contemplado com auxílio financeiro, no âmbito do edital de *Apoio à produção de material didático para atividades de ensino e/ou pesquisa*, 2014, da



# Sumário

Prefácio	i
<b>I OLHANDO PARA O INFINITO</b>	<b>1</b>
<b>1 Vista em perspectiva</b>	<b>3</b>
a O problema	3
b O sistema de coordenadas	4
c A solução	5
d Pontos de fuga	7
<b>2 Compactificações do plano e do espaço</b>	<b>9</b>
a A projeção estereográfica	11
b O plano projetivo	13
<b>II CÔNICAS</b>	<b>15</b>
<b>3 Curvas e superfícies</b>	<b>17</b>
<b>4 As cônicas</b>	<b>25</b>
a Teoremas	26
b Escólios	34
<b>5 Tangentes</b>	<b>41</b>
a Elipse	41
b Hipérbole	43
c Parábola	45
d Espelhos, acústica e telecomunicações	47
<b>6 Equações paramétricas para as cônicas</b>	<b>49</b>
a Elipse	49
b Hipérbole	50
c Parábola	51
d O seno e o cosseno hiperbólicos	51
<b>7 Cônicas em coordenadas polares</b>	<b>55</b>

<b>8</b>	<b>Equação geral de uma cônica</b>	<b>61</b>
a	Cônicas são dadas por equações do segundo grau . . . . .	61
b	Será a recíproca verdadeira? . . . . .	63
<b>9</b>	<b>Rodando os eixos</b>	<b>67</b>
<b>10</b>	<b>Cônicas e equações do segundo grau</b>	<b>71</b>
<b>11</b>	<b>Imagem de cônica por transformação linear</b>	<b>73</b>
<b>12</b>	<b>Cônicas em perspectiva</b>	<b>77</b>
a	Uma abordagem direta . . . . .	77
b	Reenunciando e redemonstrando . . . . .	81
<b>13</b>	<b>Quantos pontos definem uma cônica?</b>	<b>83</b>
a	Quantos pontos tem a interseção de duas cônicas? . . . . .	83
b	Por 5 pontos sempre passa uma cônica . . . . .	85
<b>14</b>	<b>Diâmetros</b>	<b>87</b>
a	Elipses . . . . .	87
b	Hipérboles . . . . .	88
<b>III</b>	<b>QUÁDRICAS</b>	<b>95</b>
<b>15</b>	<b>Classificação das curvas do 2<sup>o</sup> grau, de novo</b>	<b>97</b>
<b>16</b>	<b>Matrizes transpostas e matrizes simétricas</b>	<b>101</b>
<b>17</b>	<b>O Teorema Espectral em dimensão 2</b>	<b>105</b>
<b>18</b>	<b>Uma outra abordagem</b>	<b>109</b>
a	O polinômio característico . . . . .	109
b	Outra demonstração do Teorema Espectral, em dimensão 2 . . . . .	110
c	O caso tridimensional . . . . .	112
<b>19</b>	<b>As superfícies quádricas</b>	<b>115</b>
a	O elipsoide . . . . .	115
b	Os hiperboloides . . . . .	117
c	O parabolóide elíptico . . . . .	119
d	O parabolóide hiperbólico . . . . .	119
e	Os cilindros cônicos . . . . .	120
f	O hiperbolóide de uma folha é regrado . . . . .	121
<b>20</b>	<b>Isometrias</b>	<b>123</b>
a	Transformações isométricas com ponto fixo . . . . .	123
b	Isometrias lineares no plano e no espaço . . . . .	124
c	O caso geral, em dimensão três . . . . .	127

<b>IV</b>	<b>TEOREMA ESPECTRAL</b>	<b>131</b>
<b>21</b>	<b>A Decomposição em Valores Singulares</b>	<b>133</b>
a	De volta a Apolônio . . . . .	133
b	A Decomposição em Valores Singulares . . . . .	134
c	Aproximação de Matrizes . . . . .	137
d	O Teorema de Aproximação de Schmidt . . . . .	138
<b>22</b>	<b>O Teorema Espectral</b>	<b>143</b>
a	Estratégia . . . . .	143
b	Demonstração do Teorema . . . . .	144
c	A decomposição polar . . . . .	145
d	A Decomposição em Valores Singulares via Teorema Espectral . . . . .	146
<b>23</b>	<b>Polinômios</b>	<b>147</b>
a	O polinômio mínimo . . . . .	147
b	Fatoração de polinômios . . . . .	148
c	Outra demonstração do Teorema Espectral . . . . .	150
<b>24</b>	<b>Espaços Vetoriais Complexos</b>	<b>153</b>
a	Passando de $R^n$ para $\mathbb{C}^n$ . . . . .	153
b	Autovalores complexos . . . . .	154
c	O produto escalar . . . . .	155
<b>25</b>	<b>A Adjunta de Transformação Linear</b>	<b>159</b>
a	A matriz transposta conjugada . . . . .	159
b	A adjunta . . . . .	160
<b>26</b>	<b>Teorema Espectral com Autovalores Complexos</b>	<b>163</b>
a	O Teorema Espectral para operadores simétricos e antissimétricos . . . . .	163
b	Teorema Espectral para Operadores Normais . . . . .	165
<b>27</b>	<b>Quando o exemplo vem de cima</b>	<b>169</b>
a	Um exemplo . . . . .	169
b	De onde veio? . . . . .	169
c	De cima para baixo . . . . .	171
<b>28</b>	<b>A forma de Schur e o Teorema de Cayley-Hamilton</b>	<b>175</b>
a	A forma de Schur . . . . .	175
b	O Teorema de Cayley-Hamilton . . . . .	176
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>179</b>



# Prefácio

Este terceiro livro do **Cálculo Vetorial e Geometria Analítica** tem quatro partes, distintas mas sutilmente relacionadas. A primeira é só um piscar de olhos em direção ao infinito. Já a segunda, que trata das cônicas, ocupa quase metade do texto. Sem a pretensão de cobrir o vasto território que esse assunto foi ocupando ao longo de dois milênios, limitamo-nos a indicar como a Álgebra Linear pode tornar surpreendentemente simples alguns resultados nada evidentes. Na terceira parte, as quádricas servem de pretexto para a introdução do Teorema Espectral. A quarta, e última, parte tem como eixo o Teorema Espectral, mas é aberta com uma apresentação da Decomposição em Valores Singulares (SVD). Dada a importância e generalidade da SVD, achei que devia dar-lhe uma apresentação que evidencie sua independência do Teorema Espectral e, mesmo, do conceito de autovalor. Assim, a apresentação não só precede a do Teorema Espectral, mas também não menciona determinantes ou autovalores. A única mudança desta edição 2021 é uma tentativa de tornar mais simples a demonstração do Teorema de Aproximação de Schmidt, que, afinal, é o pedestal em que se exhibe a fama da decomposição.

As cônicas são abordadas do ponto de vista da Geometria Sintética, para, depois, introduzirmos a versão da Geometria Analítica, com pitadas de Álgebra Linear (nos últimos anos o tratamento das cônicas com ferramentas puramente geométricas tem sido algo negligenciado, no ensino médio, a ponto de ser, em geral, suprimida a própria relação entre cônicas e cones). Em seguida, antes das quádricas, recomeçamos, fazendo a classificação das curvas do segundo grau via Teorema Espectral em dimensão 2. Se, no livro 2, não nos limitamos ao  $\mathbb{R}^3$ , é natural que, aqui também, generalizemos nosso Teorema ao  $\mathbb{R}^n$ . Na verdade, o Teorema Espectral veio acompanhado da família: a já citada Decomposição em Valores Singulares (ênfaticamente também a relação com um famoso Teorema de Apolônio sobre diâmetros conjugados de elipses), a Decomposição Polar, a Forma de Schur e o Teorema de Cayley-Hamilton (a Forma Canônica de Jordan, mais uma vez, não veio).

Alguns vídeos são mencionados, com os links. Os vídeos das aulas podem ser acessados a partir da página <https://sites.google.com/matematica.ufrj.br/acker>.

Agradeço mais uma vez ao colega Dinamérico Pombo Jr. pela revisão do texto (e, mais uma vez, assumo os erros que introduzi, alterando posteriormente o que já parecia fechado), e a Bernardo da Costa, Monique Carmona, Orestes Piermatei Filho, Ricardo Rosa e Umberto Hryniewicz, pelas diversas ajudas. A parceria com Waldecir Bianchini, neste livro, se estreitou: Waldecir fez algumas das figuras e também ajudou na revisão; mas, principalmente, construiu applets "tridimensionais" que devem ajudar o leitor a

enxergar algumas das ideias mais cabeludas apresentadas no texto. Nos vídeos e nas ilustrações aparece, nem sempre explícita, a participação de João Paulo Pinto Siqueira. Espero que o leitor se divirta e que os alunos dos cursos de Matemática Aplicada e Engenharia Matemática da UFRJ, para quem o livro foi pensado, possam, apesar do sofrimento, nele encontrar também algum prazer.

Felipe Acker

Santa Teresa, maio de 2021



## **Parte I**

# **OLHANDO PARA O INFINITO**



# Capítulo 1

## Vista em perspectiva

### a O problema

Consideremos um problema básico de realidade virtual: a visualização de uma cena. À moda dos pintores renascentistas, vamos procurar representar em um plano os pontos do espaço. Fixamos um **ponto de vista**  $P_0$  (que corresponde ao *olho do pintor*) e um plano  $\alpha$  (que corresponde ao **quadro**), tal que  $P_0 \notin \alpha$ . A ideia é representar em  $\alpha$  cada ponto  $P$  do espaço (à exceção do plano *cego*  $\alpha_0$ , paralelo a  $\alpha$  e passando por  $P_0$ ). A representação se faz por meio do ponto  $\bar{P}$  de  $\alpha$ , obtido pela interseção com  $\alpha$  da reta  $PP_0$ .

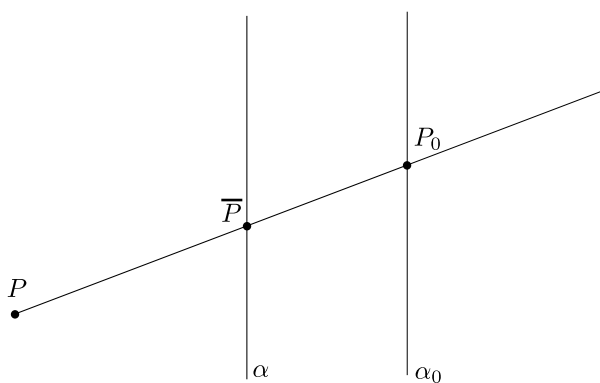


Figura 1.1:

Embora um olho *de verdade* não enxergue *para trás*, não excluiremos os pontos que estão *atrás* do plano  $\alpha_0$ . Em problemas concretos, em que seja necessário *olhar apenas para a frente*, podemos, fixando um vetor  $\vec{u}$  normal a  $\alpha$  (e *apontando* de  $P_0$  para  $\alpha$ ), projetar apenas os pontos  $P$  para os quais seja positivo o produto escalar  $\langle \vec{P_0P}, \vec{u} \rangle$ .

**Exercício 1.1** *Certifique-se de que entendeu esse último parágrafo.*

Temos, porém, um problema adicional. O ponto  $P$  é dado em  $\mathbb{R}^3$  por suas coordenadas  $(x, y, z)$ ; o que queremos é não apenas determinar o ponto  $\bar{P}$ : precisamos de um sistema de coordenadas em  $\alpha$  e de uma fórmula que nos dê, em função de  $(x, y, z)$ , as coordenadas  $(u, v)$  de  $\bar{P}$  nesse sistema.

Consideremos como dados do problema:

- (i) O ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ;
- (ii) A distância de  $P_0$  a  $\alpha$ , dada pelo número positivo  $d$ ;
- (iii) O vetor  $\vec{n} = (a, b, c)$ , normal a  $\alpha$ , com  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  e tal que  $O = P_0 + d\vec{n}$  esteja em  $\alpha$ .

Devemos, agora, fixar um sistema de coordenadas em  $\alpha$ . É razoável que coloquemos a origem em  $O = P_0 + d\vec{n}$ . Resta escolher uma base (e é bom que seja ortonormal)  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  para nosso sistema. Os vetores  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  deverão, claro, ser paralelos ao plano  $\alpha$ .

## b O sistema de coordenadas

Começemos pelo caso mais simples, em que a base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  já vem pronta. Este pode ser o caso, numa situação de videogame, em que uma nave passeia por um cenário virtual. Neste caso, embora a visão da cena pelo piloto varie com o tempo (o próprio cenário, em princípio, também varia com o tempo, já que alguns dos objetos podem ser móveis), nosso problema é, fixado um instante, exibir na tela o que seria a janela diante do piloto, naquele instante. Teríamos, pois, o ponto  $P_0$ , dado pelas coordenadas atuais do olho do piloto<sup>1</sup>, o vetor  $\vec{n}$  (obtido pela posição atual do eixo da fuselagem da nave, por exemplo), o vetor  $\vec{e}_1$  (perpendicular a  $\vec{n}$  e, neste caso, no plano das asas, apontando para a direita), o vetor  $\vec{e}_2$ , perpendicular a  $\vec{e}_1$  e a  $\vec{n}$ , apontando para *cima*. A distância  $d$  é a do olho do piloto à superfície da janela. O plano  $\alpha$  é, claro, dado pelo ponto  $O = P_0 + d\vec{n}$  e pelos vetores  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$ .

Em uma outra situação, podemos imaginar que o observador  $P_0$  *sobrevoa* a cena livremente, e olha em uma direção, dada pelo vetor  $\vec{n}$ . O plano  $\alpha$  é, então, é normal a  $\vec{n}$ , a uma distância  $d$  dada. Neste caso, supondo que o vetor  $\vec{e}_1$  foi definido por algum critério, tomamos  $\vec{e}_2 = \vec{e}_1 \otimes \vec{n}$ . Uma possibilidade é, arbitrando que  $\vec{n}$  nunca será vertical, determinar que  $\vec{e}_1$  seja *horizontal*.<sup>2</sup>

**Exercício 1.2** Note que o conjunto dos vetores unitários  $\vec{n} = (a, b, c)$  é a esfera

$$S^2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1\}.$$

Se o vetor  $\vec{e}_1(\vec{n})$  é normal a  $\vec{n}$ , então  $\vec{e}_1$  é tangente a  $S^2$ . Assim, criar, para cada  $\vec{n}$  em  $S^2$ , um *cabelo*  $\vec{e}_1(\vec{n})$ , tangente a  $S^2$  e dependendo continuamente de  $\vec{n}$ , equivale a *pentear* uma *bola cabeluda*.

<sup>1</sup>ele tem dois, o que significa que, para um game tridimensional, devemos determinar, separadamente, a visão de cada um dos olhos

<sup>2</sup>Um teorema, conhecido como **Teorema da Bola Cabeluda**, garante que é impossível criar uma função contínua que nos desse, para cada vetor unitário  $\vec{n}$ , um vetor  $\vec{e}_1(\vec{n})$ , unitário e ortogonal a  $\vec{n}$ ; assim, nossa decisão de excluir  $\vec{n}$  vertical tem sua razão de ser

**Exercício 1.3** Suponha que  $\vec{n} = (a, b, c)$  seja não vertical ( $|c| \neq 1$ ) e que  $\vec{\epsilon}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  seja horizontal, normal a  $\vec{n}$  e aponte para a direita. Traduza horizontal por ter a terceira coordenada,  $c_1$ , nula e apontar para a direita por ser positiva a terceira coordenada,  $c_2$ , de  $\vec{\epsilon}_2 = (a_2, b_2, c_2) = \vec{\epsilon}_1 \otimes \vec{n}$ . Calcule, em função de  $a, b, e c$ , os vetores unitários  $\vec{\epsilon}_1$  e  $\vec{\epsilon}_2$ . Resposta:

$$\vec{\epsilon}_1 = \frac{1}{|\vec{n} \otimes \vec{e}_3|} \vec{n} \otimes \vec{e}_3 \quad , \quad \vec{\epsilon}_2 = \vec{\epsilon}_1 \otimes \vec{n}.$$

**Exercício 1.4** Suponha que, mantido o plano  $\alpha$ , no qual temos um sistema de coordenadas  $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2)$ , queiramos obter um novo sistema,  $(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2)$ , rodando o anterior, no sentido trigonométrico (visto de  $P_0$ ), de um ângulo  $\theta$ . Calcule  $\vec{\delta}_1$  e  $\vec{\delta}_2$ . Resposta:

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_1 &= \cos \theta \vec{\epsilon}_1 + \sin \theta \vec{\epsilon}_2, \\ \vec{\delta}_2 &= -\sin \theta \vec{\epsilon}_1 + \cos \theta \vec{\epsilon}_2. \end{aligned}$$

## c A solução

Compreendida qual é a questão e estabelecida a base  $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2)$  para o sistema de coordenadas, a solução é relativamente simples. Está baseada em três observações simples:

(i) O plano  $\alpha$  é caracterizado por

$$Q \in \alpha \Leftrightarrow \langle q - P_0, \vec{n} \rangle = d.$$

**Exercício 1.5** Entenda, geometricamente, isso (faça uma figura).

(ii) Dado  $P$  em  $\mathbb{R}^3 \setminus \alpha_0$ , o correspondente  $\bar{P}$  em  $\alpha$  é caracterizado por

$$\begin{cases} \bar{P} - P_0 = t (P - P_0) \\ \langle \bar{P} - P_0, \vec{n} \rangle = d \end{cases} ,$$

o que nos dá

$$\bar{P} - P_0 = \frac{d}{\langle P - P_0, \vec{n} \rangle} (P - P_0).$$

**Exercício 1.6** Verifique se entendeu isso.

(iii) As coordenadas de  $\bar{P}$  em  $\alpha$ ,  $(u, v)$ , são dadas por

$$u = \langle \bar{P} - O, \vec{\epsilon}_1 \rangle ; v = \langle \bar{P} - O, \vec{\epsilon}_2 \rangle .$$

Como

$$\bar{P} - P_0 = \bar{P} - O + O - P_0 = \bar{P} - O + d\vec{n}$$

e

$$\langle \vec{n}, \vec{\varepsilon}_1 \rangle = 0 = \langle \vec{n}, \vec{\varepsilon}_2 \rangle,$$

temos

$$u = \langle \vec{P} - P_0, \vec{\varepsilon}_1 \rangle; \quad v = \langle \vec{P} - P_0, \vec{\varepsilon}_2 \rangle.$$

**Exercício 1.7** *Veja se entendeu.*

Finalmente, obtemos as fórmulas:

$$u = d \frac{\langle P - P_0, \vec{\varepsilon}_1 \rangle}{\langle P - P_0, \vec{n} \rangle};$$

$$v = d \frac{\langle P - P_0, \vec{\varepsilon}_2 \rangle}{\langle P - P_0, \vec{n} \rangle}.$$

Em coordenadas, lembrando que

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad \vec{n} = (a, b, c), \quad \vec{\varepsilon}_1 = (a_1, b_1, c_1), \quad \vec{\varepsilon}_2 = (a_2, b_2, c_2),$$

temos: as coordenadas  $(u, v)$ , no sistema com origem em  $O = P_0 + d\vec{n}$  e base  $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ , do ponto  $\vec{P}$  de  $\alpha$ , são dadas, em função das coordenadas  $(x, y, z)$  do ponto  $P$ , por

$$u = d \frac{a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) + c_1(z - z_0)}{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)};$$

$$v = d \frac{a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0) + c_2(z - z_0)}{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)}.$$

**Observação:** Note que o denominador  $\langle P - P_0, \vec{n} \rangle = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$  se anula exatamente nos pontos  $P = (x, y, z)$  do plano cego  $\alpha_0$ , que passa por  $P_0$  e é normal a  $\vec{n}$ . Observe também que todos os pontos  $P$  de qualquer reta passando por  $P_0$  serão de fato, pelas fórmulas, projetados em um único ponto.

**Exercício 1.8** *Observe que a vista em perspectiva não preserva paralelismo. Mostre, também que, mesmo que os pontos  $A, B, C$  e  $D$  estejam sobre a mesma reta, com as distâncias entre  $A$  e  $B$  e entre  $C$  e  $D$  iguais, não necessariamente temos as distâncias entre  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  e entre  $\vec{C}$  e  $\vec{D}$  iguais.*

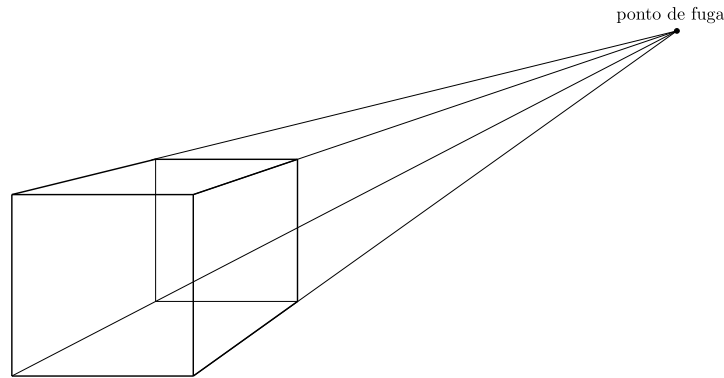


Figura 1.2:

## d Pontos de fuga

Tradicionalmente, no desenho técnico de engenharia e arquitetura, existem muitas retas paralelas a traçar. Uma observação importante, quando são apresentadas em Perspectiva (Cônica), é que *retas de mesma direção se encontram, no infinito, em um mesmo ponto*. Ocorre, em Perspectiva, que se o feixe de paralelas considerado não é paralelo ao plano  $\alpha$ , então as retas projetadas se encontram, efetivamente, em um ponto de  $\alpha$ . Tal ponto é chamado de **ponto de fuga** da direção considerada.

**Exercício 1.9** *Pense no parágrafo acima. Observe que, para determinar o ponto de fuga de uma certa reta  $r$  (e, portanto, de todas a ela paralelas), basta tomar a interseção com  $\alpha$  da reta  $r_0$  que passa por  $P_0$  e é paralela a  $r$ .*

Vejam os que dizem nossas fórmulas... Consideremos um feixe de retas paralelas, isto é, fixemos um vetor  $\vec{w}$  (que não seja paralelo ao plano  $\alpha$ , ou seja, tal que  $\langle \vec{w}, \vec{n} \rangle \neq 0$ ). O feixe considerado é composto por todas as retas que têm a direção de  $\vec{w}$ .

Seja  $r$  uma reta do feixe. Se  $Q$  é um ponto fixado de  $r$ , os pontos de  $r$  são da forma  $P = Q + t\vec{w}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Substituindo nas fórmulas para  $u$  e  $v$ , obtemos:

$$u(t) = d \frac{\langle Q - P_0, \vec{e}_1 \rangle + t \langle \vec{w}, \vec{e}_1 \rangle}{\langle Q - P_0, \vec{n} \rangle + t \langle \vec{w}, \vec{n} \rangle};$$

$$v(t) = d \frac{\langle Q - P_0, \vec{e}_2 \rangle + t \langle \vec{w}, \vec{e}_2 \rangle}{\langle Q - P_0, \vec{n} \rangle + t \langle \vec{w}, \vec{n} \rangle}.$$

Observando que, em ambas as fórmulas, temos quocientes de polinômios do primeiro grau na variável  $t$ , é fácil achar nosso ponto de fuga, passando ao limite quando  $|t| \rightarrow \infty$ . Obtemos, independente de  $Q$ , as coordenadas

$$u_\infty = d \frac{\langle \vec{w}, \vec{e}_1 \rangle}{\langle \vec{w}, \vec{n} \rangle};$$

$$v_\infty = d \frac{\langle \vec{w}, \vec{e}_2 \rangle}{\langle \vec{w}, \vec{n} \rangle}.$$

**Exercício 1.10** *Veja se entendeu. Observe que, se tomarmos a reta  $r_0$  que passa por  $P_0$  e tem a direção de  $\vec{w}$ , todos os pontos de  $r_0$  se projetam sobre  $(u_\infty, v_\infty)$ .*

**Exercício 1.11** *Observe que, se considerarmos todas as retas que são paralelas a um certo plano  $\beta$ , não paralelo a  $\alpha$ , o conjunto de seus pontos de fuga é a interseção  $\alpha \cap \beta_0$ , sendo  $\beta_0$  o plano paralelo a  $\beta$  e passando por  $P_0$ .*

**Exercício 1.12** *Observe que, se a reta  $r$  não é paralela a  $\alpha$  e não passa por  $P_0$ , então sua vista em perspectiva é a união de duas semirretas abertas, situadas sobre a reta interseção de  $\alpha$  com o plano definido por  $P_0$  e  $r$ . Note que as duas se encontram no ponto de fuga; uma representa os pontos à frente de  $P_0$ ; a outra representa os pontos que estão atrás de  $P_0$ .*

**Exercício 1.13** *Habitualmente, considera-se o plano do quadro como sendo vertical e se dá particular importância às retas horizontais. Observe que os pontos de fuga dessas retas estão sobre a reta horizontal se  $\alpha$ , situada à altura de  $P_0$  (chamada **linha do horizonte**). Faça as contas neste caso, supondo que o plano  $\alpha$  corresponde a  $y = 0$  e que  $P_0 = (0, -d, h)$ . Tome  $\vec{e}_1 = \vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2 = \vec{e}_3$ .*

**Exercício 1.14** *Ponha um cubo sobre a mesa, escolha um ponto de vista e desenhe-o.*

**Exercício 1.15** *Faça, à mão, o caso de um cubo de aresta 1, visto de um ponto situado sobre a reta passando por dois vértices opostos, com o quadro perpendicular à mesma reta.*

**Exercício 1.16** *Faça um programa para que o computador desenhe a vista em perspectiva do paralelogramo de vértices  $\vec{0}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{w} + \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ , dados o ponto de vista  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $\vec{n} = (a, b, c)$ , com  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  e  $|c| \neq 1$  e  $d > 0$ , com  $\vec{e}_1$  horizontal. Aplique-o ao caso em que  $\vec{u} = \vec{e}_1, \vec{v} = \vec{e}_2, \vec{w} = \vec{e}_3, P_0 = (3, 3, 3)$  e  $\vec{n} = -(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ .*



## Capítulo 2

# Compactificações do plano e do espaço

O capítulo precedente fez aparecerem os **pontos no infinito**: mesmo se, no espaço, ao seguirmos sempre em frente sobre uma reta, não chegamos a lugar algum, a vista em perspectiva faz aparecer um ponto que materializa esse *lugar algum*, sob a forma de ponto de fuga. Na verdade, é claro que a possibilidade de se acrescentarem a uma reta *pontos no infinito* não depende da Perspectiva; vamos abordá-la mais livremente.

A primeira figura é a que nos permite *ver* uma bijeção entre uma reta e um segmento de reta (aberto), *entortado* para virar um semicírculo. A partir dela, é óbvio o que fazer para acrescentar à reta **dois pontos no infinito**.

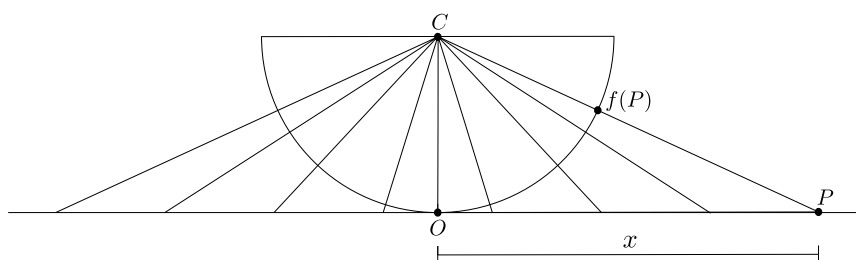


Figura 2.1:

**Exercício 2.1** Seja  $x$  a distância do ponto  $P$ , da reta, até a origem  $O$ . Suponha que o raio do círculo é 1. Expresse o arco, da origem  $O$  até a imagem de  $P$ , em função de  $x$ .

**Exercício 2.2** Considere a aplicação  $f : \mathbf{R} \rightarrow ]-1, 1[$  dada por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Mostre que  $f$  é uma bijeção e que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1.$$

A segunda figura nos dá nova bijeção entre reta e segmento aberto, mas, desta vez, nos sugere como acrescentar à reta **um único ponto no infinito**. O ponto  $f(P)$  é obtido ligando  $P = (x, 0)$  a  $N = (0, 1)$  e tomando a interseção entre a semirreta aberta  $\overrightarrow{NP}$  e o círculo unitário de centro em  $(0, 0)$ .

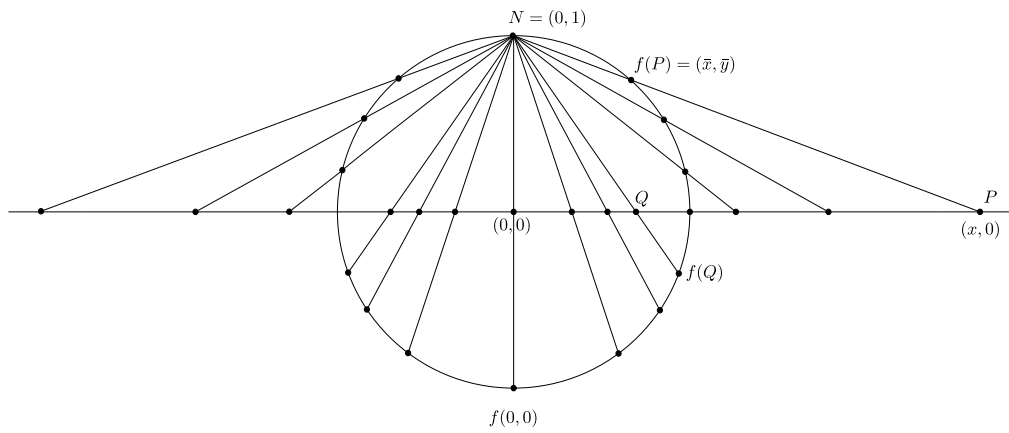


Figura 2.2:

**Exercício 2.3** *Trabalhando com coordenadas no plano, calcule, para cada  $(x,0)$  no eixo horizontal, as coordenadas de sua imagem  $(\bar{x}, \bar{y})$  no círculo unitário.*

As duas ideias acima podem ser, facilmente, estendidas ao plano. A primeira figura, a seguir, nos dá uma bijeção entre o plano e uma semiesfera (aberta). Podemos, a partir dela, acrescentar dois pontos *no infinito* a cada reta.

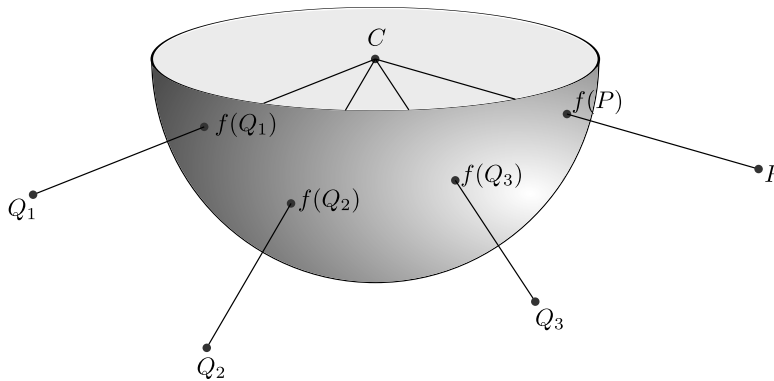


Figura 2.3:

**Exercício 2.4** *Suponha que o plano é  $Oxy$  e que a esfera é dada por  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z < 1$ . Seja  $P$  o ponto de  $Oxy$  cujas coordenadas são  $(x, y, 0)$ . Determine, em função de  $(x, y)$ , as coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  da imagem de  $P$ , obtida pela interseção entre a esfera e a semirreta aberta que parte do centro da esfera e passa por  $P$ .*

**Exercício 2.5** Mostre que retas paralelas compartilham os mesmos pontos no infinito.

**Exercício 2.6** Seja  $D = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ . Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow D$  dada por

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|} x = \frac{1}{1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} (x_1, x_2).$$

1. Mostre que, se  $v$  é um vetor do plano de norma 1 ( $|v| = 1$ ) e  $A$  é um ponto qualquer do plano, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(A + tv) = v; \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} f(A + tv) = -v.$$

2. Conclua que podemos usar  $f$  para acrescentar ao plano pontos no infinito, dois por reta, de forma que retas paralelas se encontrem no infinito.

A próxima figura corresponde à seguinte transformação: sendo  $S^2$  a esfera unitária de centro na origem, ligamos cada ponto  $P$  do plano horizontal  $Oxy$  ao polo norte  $N = (0, 0, 1)$ , obtendo o ponto  $\bar{P} \neq N$  em que a reta passando por  $P$  e por  $N$  corta  $S^2$ .

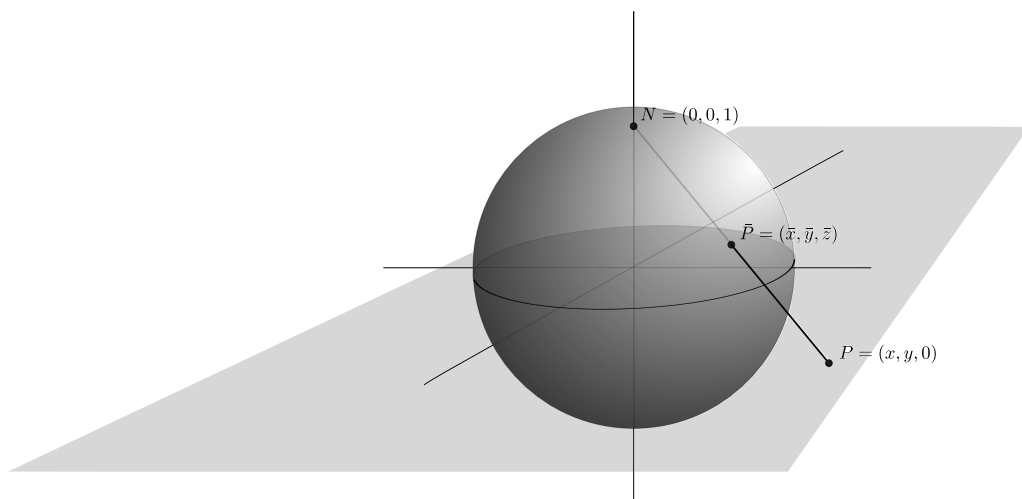


Figura 2.4:

Obtemos, assim, uma bijeção entre o plano horizontal e a esfera menos um ponto ( $S^2 \setminus \{N\}$ ). O ponto  $N$  pode, então, ser visto como o **ponto no infinito**, para o qual converge tudo que vai para bem longe. Essa bijeção é conhecida como a **projeção estereográfica**.

## a A projeção estereográfica

Além de nos fornecer um belo modelo de compactificação do plano, com um único ponto no infinito, a projeção estereográfica tem uma propriedade notável: a conservação de ângulos.

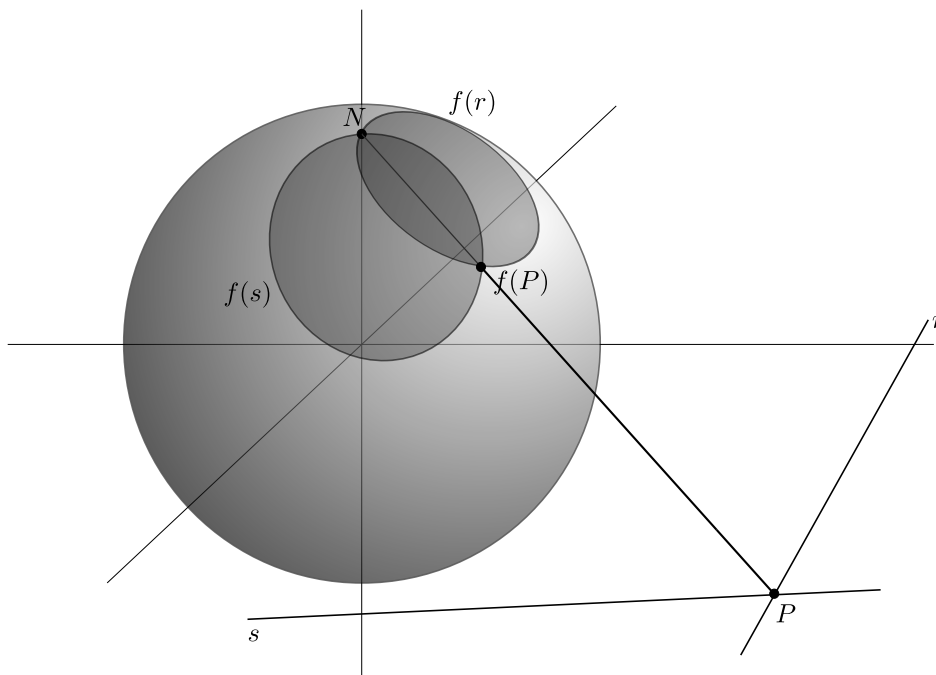


Figura 2.5:

**Proposição:** Sejam  $r$  e  $s$  retas do plano  $Oxy$  que se cortam, no ponto  $P$ , segundo o ângulo  $\theta$ . Suas imagens pela projeção estereográfica, os círculos  $f(r)$  e  $f(s)$ , se cortam em  $f(P)$  segundo o mesmo ângulo  $\theta$ .

*Demonstração:* Começemos observando que  $f(r)$  é dado pela interseção entre  $S^2$  e o plano que contém  $r$  e passa por  $N$ . Assim,  $f(r)$  é um círculo  $c$  que passa por  $N$ , do qual excluímos  $N$ . Como  $N$  é o ponto de  $c$  mais distante de  $r$ , a tangente a  $c$  em  $N$  é paralela a  $r$ . O mesmo raciocínio vale para  $f(s)$ . Assim, os círculos correspondentes a  $f(r)$  e  $f(s)$  se cortam, em  $N$  segundo o ângulo  $\theta$ . Ora, os mesmos círculos se cortam, também, em  $f(P)$ . Por simetria (em relação ao plano passando pelo ponto médio entre  $N$  e  $f(P)$  e normal à reta  $Nf(P)$ ), o ângulo entre  $f(r)$  e  $f(s)$  em  $f(P)$  é, também,  $\theta$ . ■

**Exercício 2.7** Mostre (ou, pelo menos, observe) que a orientação do ângulo será preservada se olharmos de dentro da esfera.

**Exercício 2.8** Para uma demonstração alternativa, mas similar, da proposição, considere os planos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , tangentes a  $S^2$ , respectivamente, em  $f(P)$  e em  $N$ ; considere, também, os planos  $\beta_1$ , definido por  $r$  e  $N$ , e  $\beta_2$ , definido por  $s$  e  $N$ ; a interseção entre  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  nos dá a tangente a  $f(r)$  em  $f(P)$ ; da mesma forma, a interseção entre  $\alpha_1$  e  $\beta_2$  nos dá a tangente a  $f(s)$  em  $f(P)$ ; como  $\alpha_2$  é paralelo ao plano  $Oxy$ , a interseção entre  $\alpha_2$  e  $\beta_1$  é paralela a  $r$  e a interseção entre  $\alpha_2$  e  $\beta_2$  é paralela a  $s$ . Agora olhe para a simetria em relação ao plano normal à reta  $Nf(P)$ , passando pelo ponto médio entre  $N$  e  $f(P)$ , e termine a demonstração.

**Exercício 2.9** Dado um ponto,  $P = (x, y, 0)$ , do plano, queremos o ponto  $f(P) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  de  $S^2$  que corresponda à projeção estereográfica de  $P$ . Mostre que

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

**Exercício 2.10** Conclua, do exercício anterior, que, se  $P' = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0\right)$ , então  $f(P')$  é a reflexão de  $f(P)$  através do plano horizontal  $Oxy$  (note que  $P'$  é obtido, de  $P$ , por *inversão*<sup>1</sup> em relação ao círculo  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ ).

**Exercício 2.11** Mostre que, para todo  $P$  no plano  $Oxy$ , o produto entre as distâncias  $\overline{NP}$  e  $\overline{Nf(P)}$  é 2.

**Exercício 2.12** Sejam  $S$  uma esfera (de centro  $O$  e raio  $R$ ) e  $P$  um ponto do espaço (outro que  $O$ ). A *inversão* em relação a  $S$  é a aplicação que a cada ponto  $P$  do espaço (outro que  $O$ ) associa o ponto  $P'$ , situado na semirreta que parte de  $O$  para  $P$ , tal que o produto da distância  $\overline{OP'}$  pela distância  $\overline{OP}$  é  $R^2$ . Mostre que inversões transformam planos que não passam por  $O$  em esferas passando por  $O$  e transformam esferas que não passam por  $O$  em planos que não passam por  $O$ .

**Exercício 2.13** Mostre que a projeção estereográfica transforma círculos em círculos. Sugestão: considere a inversão em relação à esfera de centro  $N$  e raio  $\sqrt{2}$ .

## b O plano projetivo

Pelo que aprendemos em Perspectiva Cônica, é razoável pensarmos em um modelo que acrescente a cada reta (na verdade, a cada feixe de retas paralelas) um único **ponto no infinito**. Para simplificar um pouco, vejamos o que isso nos dá, no plano.

Como já discutimos acima, podemos completar o plano, acrescentando dois pontos no infinito a cada reta (na verdade, a cada feixe de retas paralelas). Obtemos, desta forma, algo que pode ser visualizado como uma semiesfera fechada, ou mesmo um disco fechado. A ideia do plano projetivo é emendar as duas extremidades de cada reta.

**Exercício 2.14** Comece com a semiesfera fechada (digamos, o conjunto dos  $(x, y, z)$  tais que  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e  $z \leq 0$ ) e vá emendando cada ponto do bordo (isto é, cada ponto do tipo  $(x, y, 0)$ ) no seu oposto (isto é,  $(-x, -y, 0)$ ). É meio complicado, mesmo.

O problema é que, depois de emendar tudo, o que obtemos não é alguma figura simples, mesmo no espaço. Esta é uma das razões para não nos aprofundarmos agora no estudo do plano ou do espaço projetivo. A propósito, uma outra versão do plano projetivo surge quando olhamos para os pontos impróprios do espaço.

**Exercício 2.15** Pense no espaço como uma grande bola aberta (algo assim com o conjunto  $B$  dos  $(x, y, z)$  tais que  $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ ,  $R$  grande). Para simplificar um pouco, pense  $R = 1$ . Defina  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow B$  por

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{|x| + 1} x = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + 1} (x_1, x_2, x_3).$$

1. Mostre que  $f$  é uma bijeção.

---

<sup>1</sup>a inversão em relação ao círculo  $c$  (de centro  $O$  e raio  $R$ ) é a transformação do plano de  $c$  que leva o ponto  $P \neq O$  no ponto  $P'$ , situado na semirreta que parte de  $O$  para  $P$ , tal que o produto da distância  $\overline{OP'}$  pela distância  $\overline{OP}$  é  $R^2$

2. Mostre que, se  $v$  é um vetor do espaço de norma 1 ( $|v| = 1$ ) e  $A$  é um ponto qualquer do espaço, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(A + tv) = v; \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} f(A + tv) = -v.$$

3. Conclua que podemos usar  $f$  para acrescentar ao espaço pontos no infinito, dois por reta, de forma que retas paralelas se encontrem no infinito.
4. Veja se está claro que nosso modelo do espaço, com os pontos no infinito, é a bola fechada

$$\bar{B} = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid |x| \leq 1\}$$

e que os pontos no infinito são os da esfera

$$S^2 = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid |x| = 1\}.$$

5. O **espaço projetivo** pode, então, ser visto como o resultado da seguinte operação: cada ponto  $x$  de  $\bar{B}$  com  $|x| = 1$  é colado a  $-x$ .
6. Note que os pontos no infinito, em  $S^2$ , são exatamente os colados. O resultado é uma esfera em que cada ponto foi colado a seu antípoda. Esta é uma nova versão do **plano projetivo**. Veja se faz sentido.

**Parte II**  
**CÔNICAS**





# Capítulo 3

## Curvas e superfícies

Curvas e superfícies são espécies particulares de subconjuntos do plano: curvas têm comprimento, superfícies têm área; curvas têm uma dimensão, superfícies têm duas dimensões. Para dar uma primeira ideia do que vem a ser, no caso, essa história de **dimensão**, podemos dizer que curvas são descritas por um parâmetro e superfícies são descritas por dois parâmetros.

Mas deixemos de lado, por ora, o conceito de dimensão, concentremo-nos na ideia de **lugar geométrico**: um subconjunto de pontos do plano ou do espaço que satisfazem a uma (ou mais) propriedade(s) dada(s).

### Exemplo 1: Círculo

O **círculo** (em  $\mathbb{R}^2$ ) de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $R$  (sendo  $R$  um número real positivo) é

$$c = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R \right\}.$$

Como  $R$  é positivo, a equação que define  $c$  é equivalente a

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

É importante compreender que o que caracteriza a **Geometria Analítica** não é o uso de coordenadas, mas a utilização da **Álgebra**: as propriedades geométricas são traduzidas algebricamente por meio de equações e as operações geométricas são substituídas por operações algébricas (em seguida esta ideia se expande: utilizamos funções quaisquer e as operações da **Análise**, derivação e integração, o que dá origem ao que é hoje chamado **Geometria Diferencial**).

**Exercício 3.1** Considere o círculo

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

e a reta

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\},$$

sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais fixos, com  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Quantos pontos pode ter  $\gamma \cap r$ ? Discuta o problema do ponto de vista algébrico e do ponto de vista geométrico (sabendo que o problema geométrico tem, nenhuma, uma ou duas soluções, conclua que o mesmo se pode dizer do correspondente problema algébrico, mesmo sem fazer as contas; reciprocamente, sabendo, das contas, que o problema algébrico tem nenhuma, uma ou duas soluções, conclua que mesmo quem não sabe nada de Geometria deve concordar que o correspondente problema geométrico tem nenhuma, uma ou duas soluções).

### Exemplo 2: Esfera

A esfera  $S$  de centro  $(x_0, y_0, z_0)$  e raio  $R$  é dada por

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \right\}.$$

### Exemplo 3: Mediatriz

Dados os pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ , sua **mediatriz** é o conjunto dos pontos que equidistam de  $P_1$  e  $P_2$ :

$$m = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \right\}.$$

**Exercício 3.2** Mostre que a equação que define a mediatriz é equivalente a uma equação polinomial do primeiro grau (afinal, a mediatriz é uma reta!).

### Exemplo 4: Círculo de Apolônio

Dados os pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  e o número positivo  $k$ , considere o conjunto formado pelos pontos  $P$  do plano tais que  $\overline{PP_1} = k\overline{PP_2}$ . Nosso conjunto,  $\gamma$ , é dado por

$$\gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = k\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \right\}.$$

É claro que, quando  $k = 1$ ,  $\gamma$  é a mediatriz. A questão é entender quem é  $\gamma$ , nos casos em que  $k \neq 1$ .

**Exercício 3.3** Mostre, algebricamente, que, caso  $k \neq 1$ ,  $\gamma$  é um círculo (dito **círculo de Apolônio**). Veja a demonstração geométrica a seguir.

*Demonstração geométrica:*

Se  $B$  é o ponto entre  $P_1$  e  $P_2$  tal que

$$\overline{BP_1} = \overline{BP_2},$$

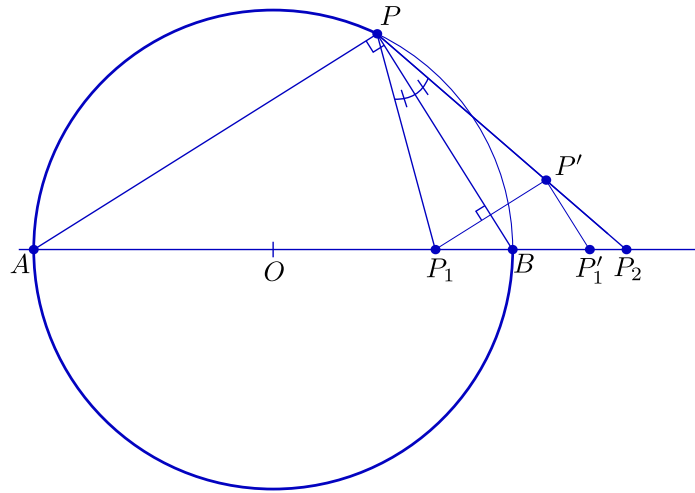


Figura 3.1: círculo de Apolônio de  $P_1$  e  $P_2$ , razão  $k$

e  $P$  é um ponto de  $\gamma$ , então  $B$  é a interseção com a reta  $P_1P_2$  da bissetriz do ângulo  $P_1\hat{P}P_2$ . Se, por outro lado,  $A$  está sobre a reta  $P_1P_2$  e  $\hat{A}PB$  é reto, então  $\overline{AP_1} = k\hat{A}P_2$ . Logo,  $P$  está sobre o círculo de diâmetro  $AB$ .

Para verificar as afirmações acima, suponha que  $B$  é a interseção de  $P_1P_2$  com a bissetriz, crie  $P'$  e  $P'_1$  (ver figura) tais que  $P_1P' \perp PB$  e  $P'P'_1 \parallel PB$ . Note que  $\overline{PP'} = \overline{PP_1}$  e que  $\overline{BP'_1} = \overline{BP_1}$ . Para provar

$$\frac{\overline{BP_1}}{\overline{BP_2}} = \frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}'},$$

use a semelhança entre  $PBP_2$  e  $P'P'_1P_2$ . Para provar que

$$\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_2}} = \frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}'},$$

use a semelhança entre  $APP_2$  e  $P_1P'P_2$ . ■

**Exercício 3.4** Faça, em  $\mathbb{R}^3$ , os análogos dos exemplos 3 e 4.

**Exemplo 5:** Se  $r$  é uma reta,  $F$  é um ponto fora de  $r$  e  $e$  é um número positivo, seja  $c$  o lugar geométrico dos pontos  $P$  do plano tais que a razão entre a distância de  $P$  a  $F$ ,  $\overline{PF}$ , e a de  $P$  a  $r$ ,  $\overline{Pr}$ , é  $e$ :

$$\overline{PF} = e\overline{Pr}.$$

Se  $e < 1$ ,  $c$  é dita uma **elipse**; se  $e = 1$ ,  $c$  é uma **parábola**; se  $e > 1$ , uma **hipérbole**.

Em coordenadas cartesianas, fazendo a origem em  $F$  e tomando o eixo dos  $x$  ortogonal a  $r$ , de forma que  $r$  corresponda a  $x = -d$ , temos, como equação de  $c$ ,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e|x + d|,$$

ou seja:

$$x^2 + y^2 = e^2(x + d)^2.$$

Em coordenadas polares, temos

$$r = e|d + r \cos \theta|.$$

**Exercício 3.5** Tente desenhar, a partir da definição, elipses, hipérbolas e parábolas. Faça a lápis e no computador.

**Exemplo 6:** Fixe dois pontos,  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ ,  $c > 0$ . Fixe  $a > c$ . Considere o lugar geométrico dos pontos  $P$  do plano tais que  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ :

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a,$$

ou

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Antes de elevar ao quadrado, observemos que, da equação original, é certo que

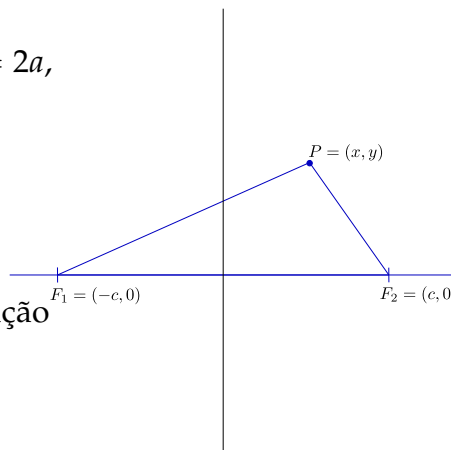
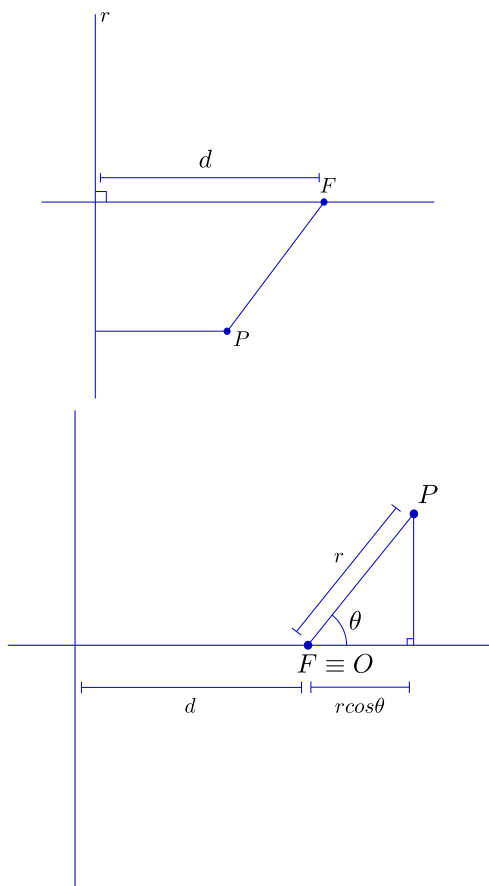
$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} \leq 2a; \quad \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \leq 2a.$$

tendo em conta essas duas inequações, obtemos, elevando ao quadrado,

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x - c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2},$$

ou ainda,

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$



Daí vem, elevando novamente ao quadrado (com a ressalva  $a^2 - cx \geq 0$ ) e simplificando:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Fazendo  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  e dividindo por  $a^2b^2$ , temos, finalmente,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**Exercício 3.6** Mostre que, se  $a > c > 0$  e  $b^2 = a^2 - c^2$ , da equação acima podemos concluir  $(x - c)^2 + y^2 \leq 4a^2$  e  $cx \leq a^2$ .

**Exercício 3.7** Mostre que

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

é uma elipse (segundo a definição do exemplo 5).

**Exemplo 7:** Considere  $F_1 = (-c, 0)$ ,  $F_2 = (c, 0)$  e  $a$ , com  $c > a > 0$ . Mostre que o lugar geométrico dos  $P = (x, y)$  tais que

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$$

é dado pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

sendo  $b$  o número positivo definido por  $b^2 = c^2 - a^2$ .

**Exercício 3.8** Mostre que

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

é uma hipérbole (segundo a definição do exemplo 5).

Voltaremos a discutir elipse, hipérbole e parábola daqui a pouco. Antes, uma observação importante.

**Exemplo 8:** Como já vimos, o círculo de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $R$  é dado, no plano, pela equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Consideremos, agora,

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \right\}.$$

Nosso  $C$ , neste caso, não é um círculo, e sim uma superfície cilíndrica. De fato, como estamos em  $\mathbf{R}^3$ , qualquer ponto  $(x, y, z)$  cuja projeção ortogonal sobre o plano

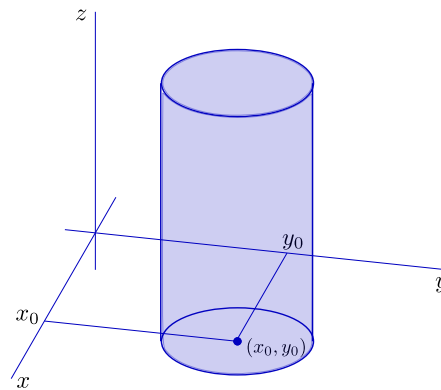


Figura 3.2: cilindro circular

horizontal esteja sobre o círculo, situado naquele plano, de centro  $(x_0, y_0, 0)$  e raio  $R$  estará em  $C$ .

Na realidade, esta é uma família inteira de exemplos: sobre cada curva plana dada por uma equação  $F(x, y) = c$  se ergue uma superfície cilíndrica dada por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y) = c\}.$$

$S$  consiste nos pontos de  $\mathbb{R}^3$  que se projetam sobre a curva dada, no plano horizontal, por  $F(x, y) = c$ .

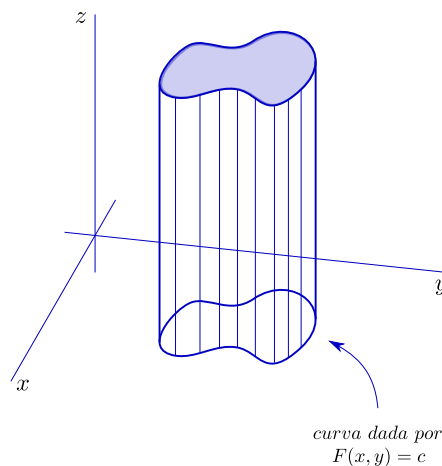


Figura 3.3: cilindro geral

**Exemplo 9:** Vamos caracterizar o círculo  $\gamma$  (em  $\mathbb{R}^3$ ) de centro  $(x_0, y_0, z_0)$  e raio  $R$ , situado em um certo plano  $\alpha$  (com  $(x_0, y_0, z_0)$  em  $\alpha$ , claro). Suponhamos que  $\alpha$  tem o vetor não nulo  $(a, b, c)$  como normal, de modo que

$$\alpha = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \right\}.$$

Assim, nosso círculo  $\gamma$ , é caracterizado pelas duas equações:

$$\begin{cases} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \end{cases}$$

Logo,

$$\gamma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0; \right. \\ \left. (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \right\}.$$

**Exemplo 10:** Uma **cônica** é uma curva obtida pela interseção entre um **cone** (circular reto) e um plano. Vamos, para começar, obter a equação de um cone circular reto com vértice em  $(0, 0, 0)$  e eixo vertical.

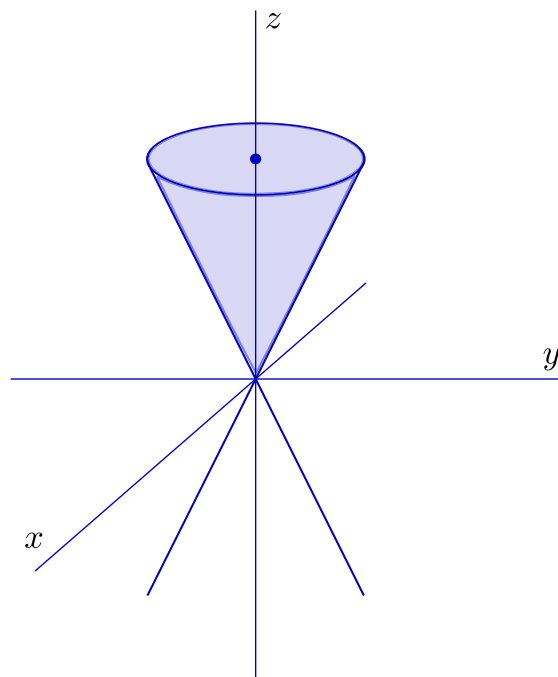


Figura 3.4: cone circular reto

Por semelhança, se  $(x, y, z)$  está no cone, a razão entre a altura,  $|z|$ , e a distância ao eixo vertical,  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , é uma constante,  $k$ , que só depende do cone. Assim,

$$\frac{|z|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k,$$

ou seja:

$$z^2 = k^2(x^2 + y^2).$$

Assim, a cônica  $\gamma$  correspondente à interseção de nosso cone com o plano  $\alpha$  de equação  $ax + by + cz + d = 0$  será dada pelas equações

$$\begin{cases} z^2 = k^2(x^2 + y^2) \\ ax + by + cz + d = 0, \end{cases}$$

de modo que

$$\gamma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = k^2(x^2 + y^2); ax + by + cz + d = 0 \right\}.$$



# Capítulo 4

## As cônicas

Este capítulo é uma digressão geométrica, com o objetivo de fazer uma breve discussão das propriedades das **cônicas**. Nele e no próximo, dedicado às interessantes (e até hoje presentes em aplicações tecnológicas), abriremos mão dos sistemas de coordenadas, retornando à Geometria Sintética; as propriedades fundamentais serão deduzidas com ferramentas puramente geométricas.

Embora possam, como fizemos no capítulo anterior, ser apresentadas diretamente como curvas no plano, definidas por propriedades que as caracterizam como lugares geométricos, o encanto das cônicas está justamente em sua relação com a tridimensionalidade: o próprio nome que as unifica só faz sentido se as olharmos de um ponto de vista espacial. Boa parte do que aqui apresentaremos foi construído por Apolônio de Perga, por volta de 200 anos antes de Cristo; Apolônio era conhecido, em seu tempo, como o Grande Geômetra e escreveu um tratado, em oito volumes, sobre as cônicas (destes, apenas os quatro primeiros sobreviveram em grego; existe, também, dos sete primeiros, a versão em árabe; o último volume se perdeu).

Começemos com a definição geral de cone: dados um ponto  $V$  e uma curva  $c$ , o **cone** de **vértice**  $V$  e **diretriz**  $c$  é a união das retas, ditas **geratrizes**, que ligam  $V$  aos pontos de  $c$ . Fixaremos um cone circular reto, construído a partir do vértice  $V$  e do círculo  $c$ , tomado como diretriz. Isso significa que  $V$  está situado sobre o **eixo** do cone, que é a reta perpendicular ao plano de  $c$  e passando pelo centro de  $c$ . Nosso **cone** é, por definição, a união das retas ligando os pontos de  $c$  a  $V$ . Dado um plano  $\alpha$ , obtemos uma cônica,  $\gamma$ , pela interseção de  $\alpha$  com o cone.

Consideraremos três casos principais (não degenerados), excluindo a possibilidade de que  $\alpha$  passe por  $V$ :

**elipse** - o plano  $\alpha$  corta todas as geratrizes;

**parábola** - o plano  $\alpha$  é paralelo a exatamente uma geratriz;

**hipérbole** - o plano  $\alpha$  é paralelo a duas geratrizes.

Há ainda, é claro, os casos degenerados. Admitindo que  $\alpha$  passe por  $V$ , podemos ter: um **ponto**, uma **reta** (se  $\alpha$  apenas tangenciar o cone) e um **par de retas concorrentes** (duas geratrizes). Admitindo que  $V$  possa "estar no infinito" (o cone vira um cilindro), obtemos mais dois casos degenerados: o **conjunto vazio** e um **par de retas paralelas**.

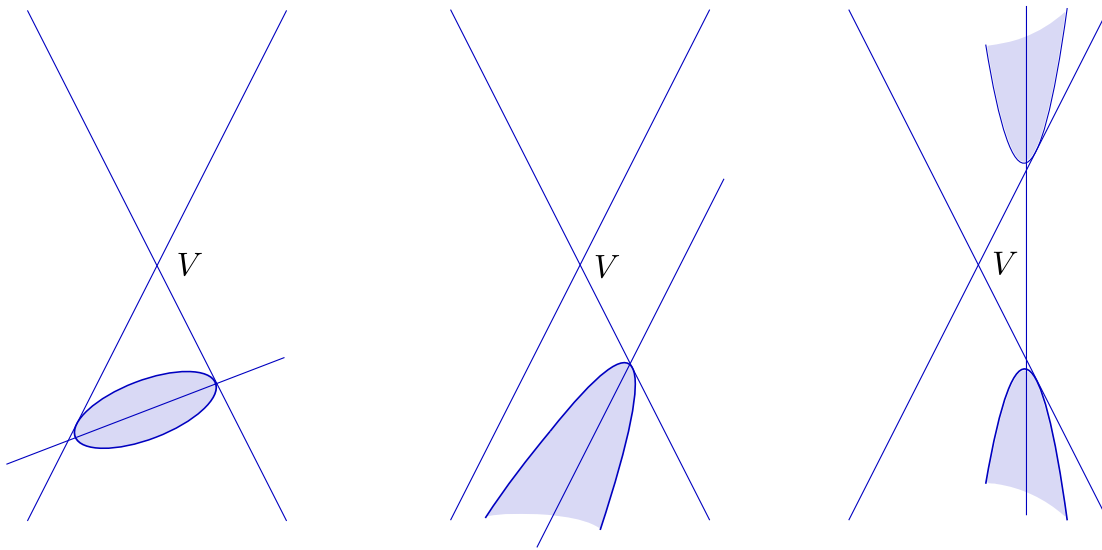


Figura 4.1: elipse - parábola - hipérbole

Se  $V$  coincide com o centro de  $\alpha$  (o cone vira um plano), obtemos, ainda, um plano como caso degenerado. O círculo é visto como um caso particular de elipse.

**Observação:** Devemos, antes de mais nada, provar que as cônicas que chamamos de elipse, parábola e hipérbole satisfazem as definições de elipse, hipérbole e parábola que demos no capítulo anterior: em cada um dos casos, devemos exibir um ponto  $F$ , o **foco**, e uma reta  $r$ , a **diretriz**, e um número positivo  $e$ , a **excentricidade** (com  $e < 1$ , no caso das elipses,  $e = 1$ , no caso das parábolas e  $e > 1$ , no caso das hipérbolas), tais que nossa cônica,  $\gamma$ , seja o conjunto dos pontos  $P$  do plano  $\alpha$  satisfazendo a

$$\overline{PF} = e\overline{Pr}.$$

## a Teoremas

Começemos com um resultado simples, que usaremos de forma sistemática em nossas demonstrações.

**Princípio do chapéu de palhaço:** Dados uma esfera,  $S$ , e um ponto,  $P$ , exterior a  $S$ , é constante a distância de  $P$  a qualquer ponto  $T$  de  $S$  tal que a reta  $PT$  é tangente a  $S$ .

Demonstração : De fato, se  $O$  é o centro de  $S$  e  $R$  é o raio, então

$$\overline{PT}^2 + R^2 = \overline{PO}^2,$$

de forma que  $\overline{PT}$  é igual a  $\sqrt{\overline{PO}^2 - R^2}$ , que independe de  $T$ . ■

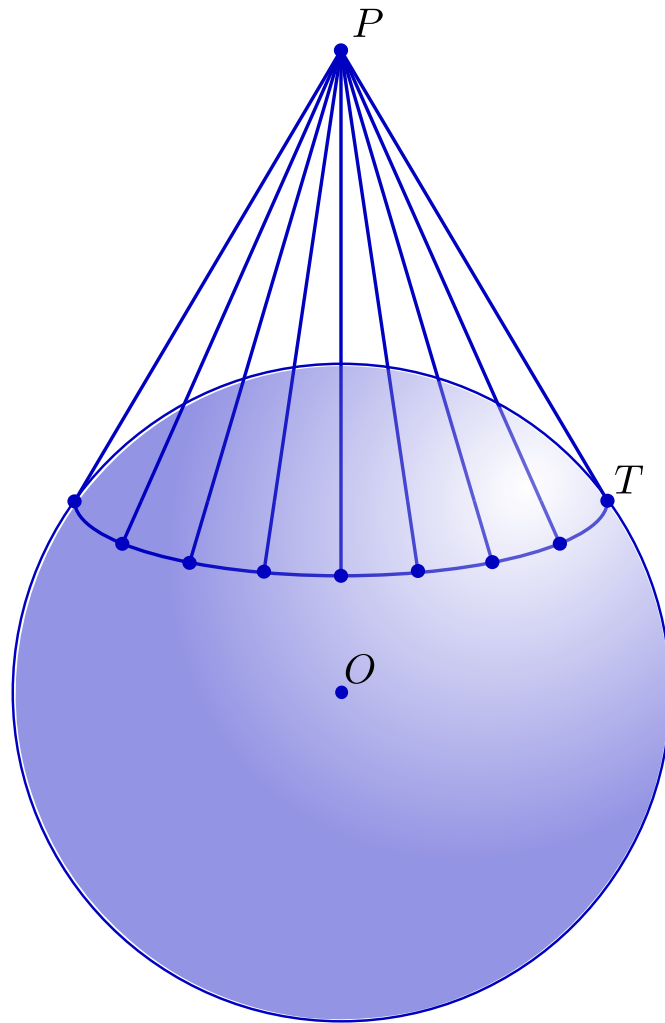


Figura 4.2: Princípio do chapéu de palhaço

Vamos, a seguir, enfileirar quatro teoremas sobre cônicas (Teoremas 0, 1, 2 e 3), com graus de dificuldade crescentes.

O Teorema 0 é uma preparação psicológica para o Teorema 1. Tecnicamente, não é um resultado sobre cônicas, já que se refere à seção de um cilindro por um plano. Mas um cilindro pode ser visto como um cone de vértice no infinito; ademais, o argumento principal é igual, em versão mais clara, ao que usaremos no Teorema 1.

**Teorema 0:** Seja  $c$  a interseção entre um cilindro circular reto e um plano,  $\alpha$ , inclinado em relação ao eixo do cilindro. Então existem dois pontos de  $\alpha$ ,  $F_1$  e  $F_2$ , e um número positivo,  $a$ , tais que  $c$  é o lugar geométrico dos pontos  $P$  de  $\alpha$  tais que

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a.$$

Demonstração : Veja a figura. Considere duas esferas,  $S_1$  e  $S_2$ , cada uma das quais tangencia o

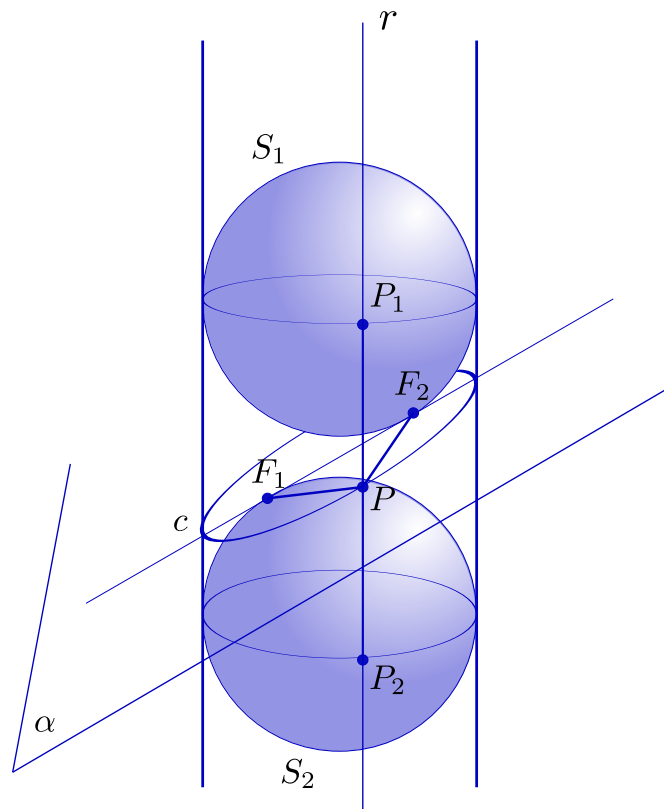


Figura 4.3: elipse como seção de cilindro

plano  $\alpha$  e todas as geratrizes do cilindro. Sejam  $F_1$  o ponto em que  $S_1$  tangencia  $\alpha$ ,  $F_2$  o ponto em que  $S_2$  tangencia  $\alpha$ . Note que  $S_1$  toca o cilindro em um círculo, que chamaremos de  $c_1$ , e que  $S_2$  toca o cilindro em outro círculo,  $c_2$ , ambos situados em planos perpendiculares ao eixo do cilindro.

Seja agora  $P$  um ponto qualquer de  $c$  e seja  $r$  a geratriz do cilindro passando por  $P$ . Se  $2a$  é a distância entre os planos de  $c_1$  e de  $c_2$ , então, sendo  $P_1$  a interseção entre  $r$  e  $c_1$  e  $P_2$  a interseção entre  $r$  e  $c_2$ , temos, é claro,  $\overline{PP_1} + \overline{PP_2} = 2a$ .

Mas, pelo princípio do chapéu de palhaço, temos

$$\overline{PP_1} = \overline{PF_1}, \quad \overline{PP_2} = \overline{PF_2}.$$

Logo, a soma  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$  é  $2a$ , que independe de  $P$ . ■

**Exercício 4.1** Observe que a seção de um cilindro circular reto por um plano não precisa ser uma elipse: dependendo das circunstâncias, pode ser um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.

Vamos, agora, acertar as contas entre as definições de elipse: a que, tomando elipses como cônicas, as define como seções em que o plano, sem passar pelo vértice, corta

todas as geratrizes; e a que as vê como lugares geométricos dos pontos para os quais a soma das distâncias a dois focos fixos é constante.

**Teorema 1:** Seja  $c$  a interseção entre um cone circular reto e um plano  $\alpha$ . Suponhamos que  $\alpha$  corta todas as geratrizes do cone, não passa pelo vértice e não é ortogonal ao eixo do cone. Então existem dois pontos de  $\alpha$ ,  $F_1$  e  $F_2$ , e um número positivo,  $a$ , tais que  $c$  é o lugar geométrico dos pontos  $P$  de  $\alpha$  tais que

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a.$$

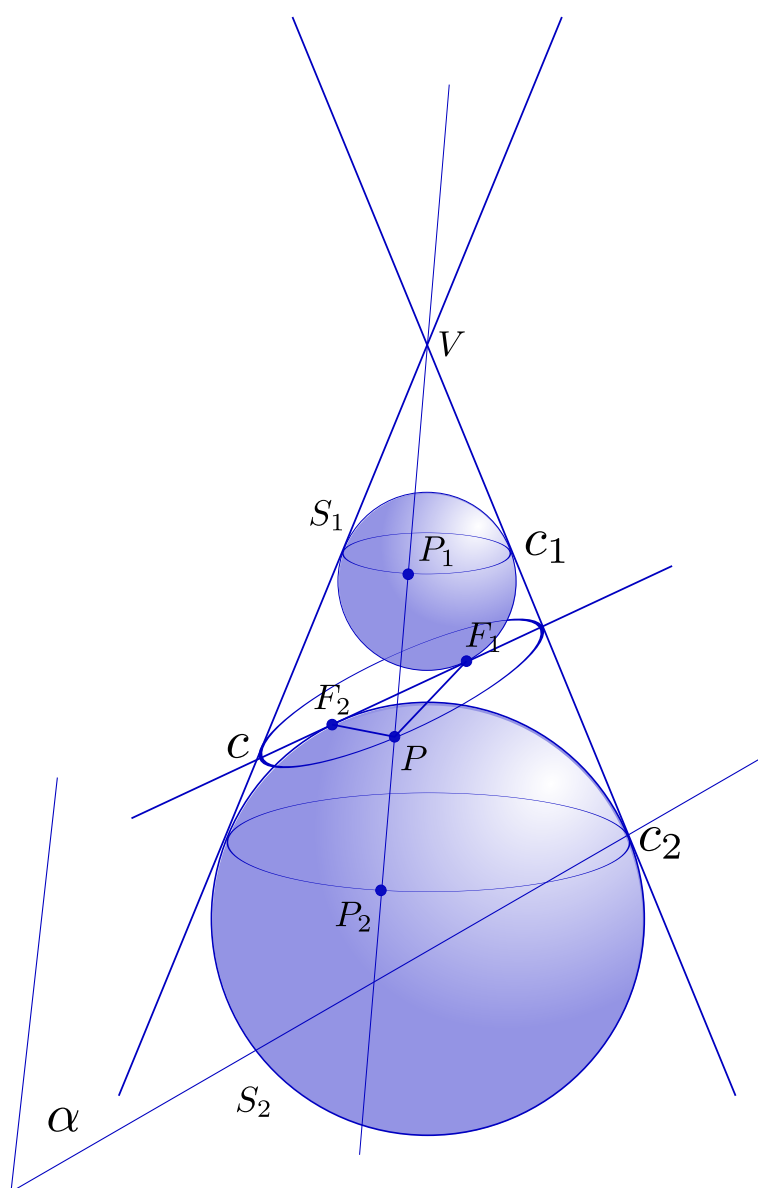


Figura 4.4: elipse e focos

Demonstração : É análoga à do teorema zero.  $S_1$  e  $S_2$  (veja a figura) são esferas tangentes a todas as geratrizes do cone e tocam  $\alpha$ , respectivamente, nos pontos  $F_1$  e  $F_2$ . Note que  $S_1$  toca o cone em um círculo,  $c_1$  e  $S_2$  toca o cone em outro círculo,  $c_2$ , situados em planos paralelos. Se  $P$  é um ponto de  $c$  e  $r$  é a geratriz do cone passando por  $P$ , sejam  $P_1$  e  $P_2$  as interseções de  $r$ , respectivamente, com  $c_1$  e  $c_2$ . A distância entre  $P_1$  e  $P_2$ ,  $2a$ , independe de  $P$ . Aplicando o princípio do chapéu de palhaço, temos

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PP_1} + \overline{PP_2} = 2a.$$

■

**Exercício 4.2** Mostre que as esferas  $S_1$  e  $S_2$  existem de fato e estão em semiespaços opostos em relação ao plano da elipse.

**Teorema 2:** Seja  $c$  a interseção entre um cone circular reto e um plano  $\alpha$ . Suponha que  $\alpha$  intercepta todas as geratrizes do cone, exceto duas. Então existem dois pontos de  $\alpha$ ,  $F_1$  e  $F_2$ , e uma constante positiva,  $a$ , tais que  $c$  é o lugar geométrico dos pontos  $P$  de  $\alpha$  que satisfazem a

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a.$$

Demonstração : Veja a figura. Mais uma vez, sejam  $S_1$  e  $S_2$  esferas que tangenciam o plano  $\alpha$  (nos pontos  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente) e todas as geratrizes do cone. Sejam  $c_1$  e  $c_2$ , respectivamente, os círculos em que  $S_1$  e  $S_2$  tangenciam o cone. Se  $P$  é um ponto de  $c$  e  $r$  é a geratriz do cone passando por  $P$ , sejam  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente, as interseções de  $r$  com  $c_1$  e  $c_2$ . Agora note que:

1.  $\overline{P_1P_2}$  independe de  $P$ ;
2. pelo princípio do chapéu de palhaço,  $\overline{PP_1} = \overline{PF_1}$  e  $\overline{PP_2} = \overline{PF_2}$ ;
3. contrariamente ao caso do teorema anterior,  $P$  não está entre  $P_1$  e  $P_2$ .

Concluimos, pois, que

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = |\overline{PP_1} - \overline{PP_2}| = \overline{P_1P_2} = 2a.$$

■

Veja a figura:

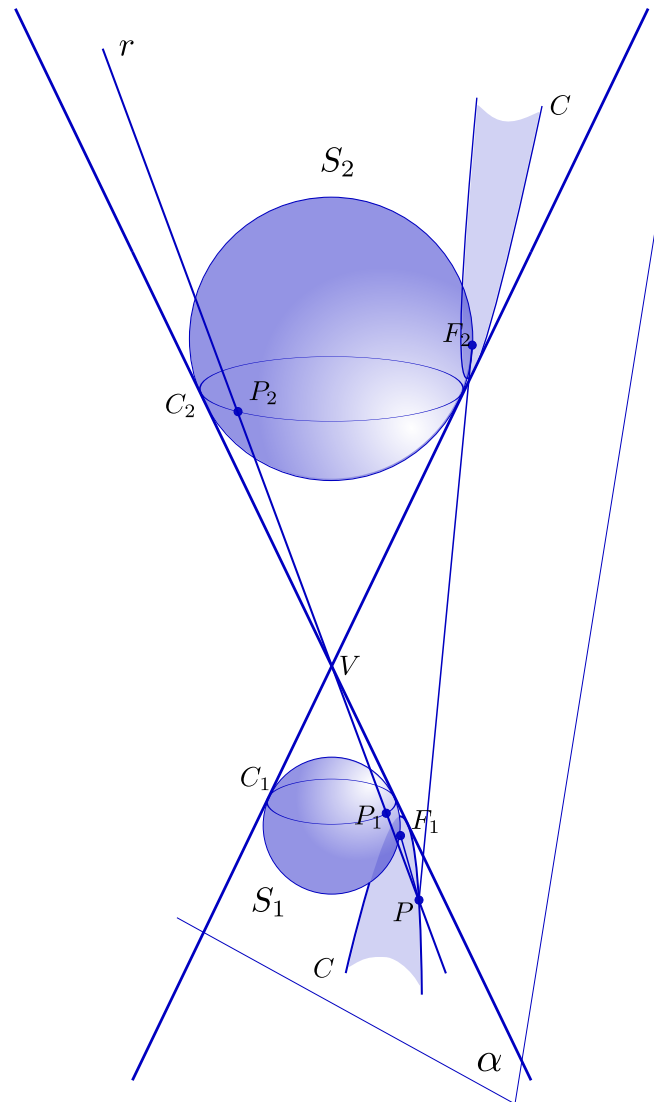


Figura 4.5: hipérbole e focos

As definições de elipse e hipérbole com dois focos ressaltam a simetria dessas curvas, mas não apontam para a unificação das cônicas. É a definição que se refere a foco-diretriz-excentricidade que vai unificá-las, incluindo a parábola. O teorema a seguir encara essa questão; sua demonstração explícita, além do foco já nosso conhecido, a diretriz e a excentricidade.

**Teorema 3:** Seja  $c$  a interseção entre um cone circular reto de vértice  $V$  e um plano  $\alpha$  que não passa por  $V$ . Então existem um ponto,  $F$  (chamado **foco** de  $c$ ), uma reta,  $r$  (chamada **diretriz** de  $c$ ) e um número estritamente positivo,  $e$  (chamado **excentricidade** de  $c$ ) tais que  $c$  é o lugar geométrico dos pontos  $P$  de  $\alpha$  tais que a razão entre a distância de  $P$  a  $F$ ,  $\overline{PF}$ , e a distância de  $P$  a  $r$ ,  $\overline{Pr}$ , é igual a  $e$ :

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pr}} = e.$$

Demonstração : Esta é um pouquinho mais difícil. Começemos, como de hábito, introduzindo uma esfera,  $S$ , que toca o cone no círculo  $c_1$  e o plano  $\alpha$  no ponto  $F$ . Sejam, então,  $\beta$  o plano de  $c_1$  e  $r$  a reta  $\alpha \cap \beta$  (veja a figura).

Seja agora  $P$  um ponto de  $c$ . Considere os seguintes pontos:

- $P_0$  é o ponto de  $\beta$  tal que  $PP_0$  é perpendicular a  $\beta$ ;
- $P_1$  é o ponto (de  $c_1$ ) interseção entre a geratriz  $PV$  e  $\beta$ ;
- $P_2$  é o ponto de  $r$  tal que  $PP_2$  é perpendicular a  $r$ .

Aplicando o princípio do chapéu de palhaço, temos  $\overline{PF} = \overline{PP_1}$ . Agora observemos que:

- o triângulo  $P_1P_0P$  é retângulo em  $P_0$  e seu ângulo em  $P$ ,  $\varphi$ , é o ângulo (constante) entre as geratrizes e o eixo do cone;
- o triângulo  $P_2P_0P$  é retângulo em  $P_0$  e seu ângulo em  $P_2$ ,  $\psi$ , é o ângulo entre  $\alpha$  e  $\beta$ ;
- $\overline{PF} = \overline{PP_1}$ ,  $\overline{Pr} = \overline{PP_2}$ .

Logo,  $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_0}}$  e  $\frac{\overline{PP_0}}{\overline{PP_2}}$  são constantes, o que nos dá

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pr}} = \frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}} = e,$$

com  $e$  constante. ■

**Exercício 4.3** Nas demonstrações dos teoremas acima, provamos apenas que os pontos de  $c$  satisfazem as relações apresentadas nos enunciados. Mostre que, reciprocamente, os pontos que satisfazem as relações estão, em cada caso, na curva  $c$ .



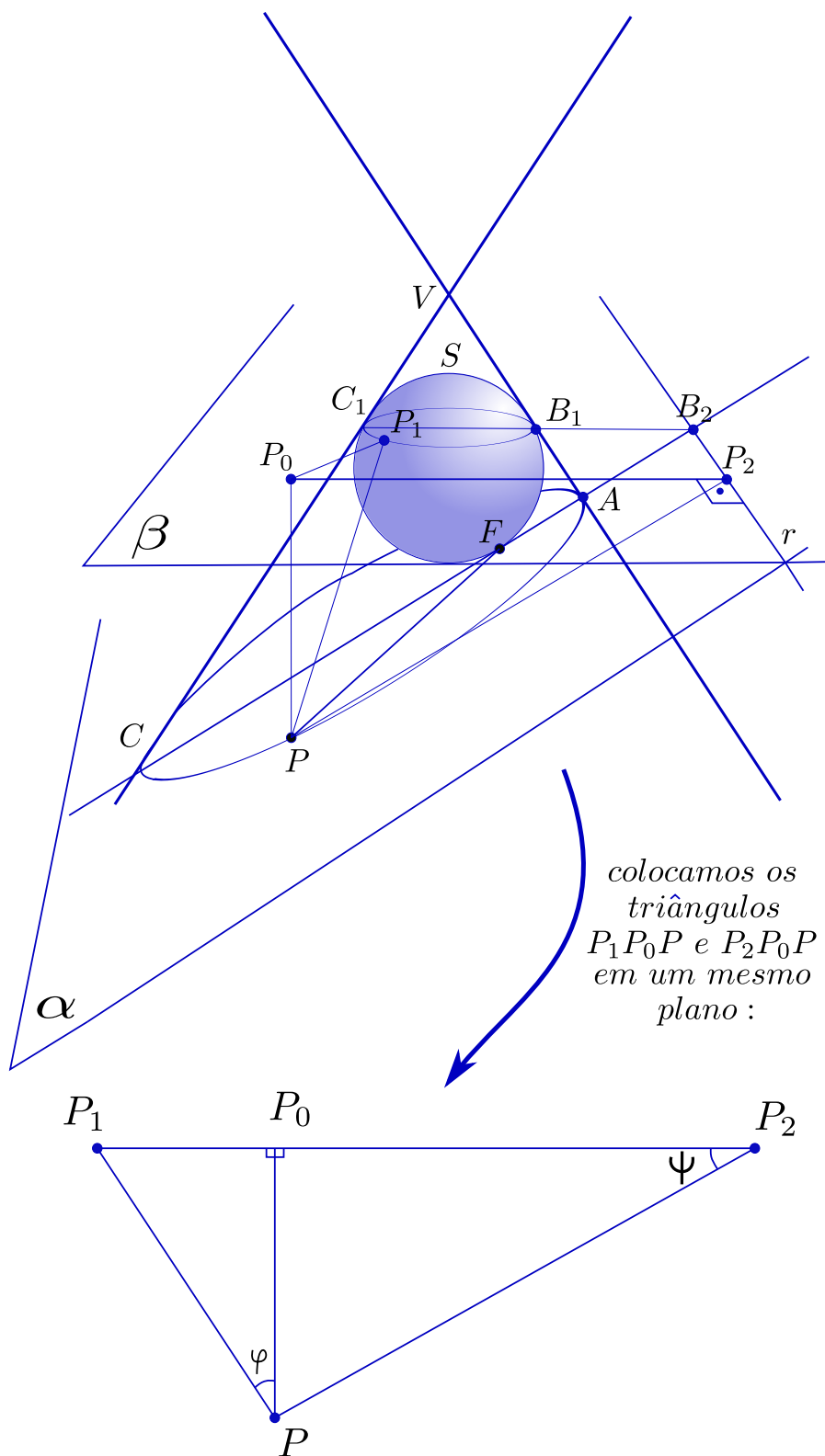


Figura 4.6: cônicas: foco e diretriz

## b Escólios

Os teoremas da seção anterior revelam algumas propriedades das cônicas que não são, a primeira vista, evidentes.

**Escólio 1:** Se  $r$  é uma reta,  $F$  é um ponto fora de  $r$  e  $e$  é um número positivo, então o lugar geométrico dos pontos  $P$  do plano tais que  $\overline{PF} = e\overline{Pr}$  é uma cônica: uma elipse, se  $e < 1$ ; uma parábola, se  $e = 1$ ; uma hipérbole, se  $e > 1$ .

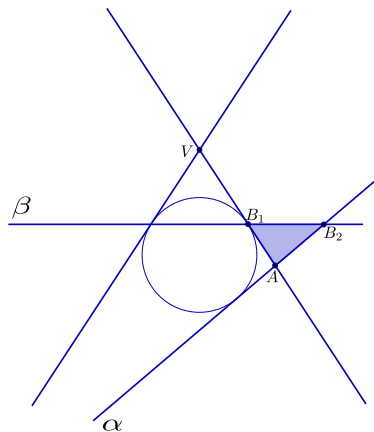


Figura 4.7: excentricidade

Demonstração : A primeira afirmação é uma recíproca mais ou menos evidente do Teorema 3 (página 32). Quanto à **excentricidade**, considere, voltando à demonstração do Teorema 3, uma seção por um plano passando por  $V$  e normal, simultaneamente, a  $\alpha$  e a  $\beta$  (veja a figura). Da demonstração do Teorema 3, fica claro que

$$e = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB_2}}.$$

Ora, como podemos ver,  $\overline{AB_1} < \overline{AB_2}$  exatamente quando o plano  $\alpha$  corta todas as geratrizes ( $c$  é uma elipse);  $\overline{AB_1} = \overline{AB_2}$  corresponde ao caso em que  $\alpha$  é paralelo a uma das geratrizes ( $c$  é uma parábola);  $\overline{AB_1} > \overline{AB_2}$  corresponde ao caso em que  $\alpha$  é paralelo a um par de geratrizes ( $c$  é uma hipérbole). ■

**Escólio 2:** Da definição de cônica, é claro que a reta do plano  $\alpha$ , passando pelo eixo do cone e fazendo com este o menor ângulo, é um eixo de simetria (vamos chamá-lo de **eixo principal**). Conjugando os Teoremas 1, 2 e 3, temos, nos casos de elipse

e hipérbole, um segundo foco,  $\bar{F}$ , situado sobre o eixo principal, tal que: se  $c$  é uma elipse, existe uma constante positiva,  $a$ , tal que, para todo  $P$  em  $c$ ,

$$\overline{PF} + \overline{P\bar{F}} = 2a;$$

se  $c$  é uma hipérbole, existe uma constante positiva,  $a$ , tal que, para todo  $P$  em  $c$ ,

$$|\overline{PF} - \overline{P\bar{F}}| = 2a.$$

A distância entre  $F$  e  $\bar{F}$  é chamada **distância focal**. O ponto médio do segmento  $F\bar{F}$  é chamado de **centro** de  $c$ . Os pontos de  $c$  situados sobre o eixo principal são chamados **vértices** da cônica (note que a parábola tem apenas um vértice). Elipses têm, ainda, um segundo par de vértices, a ser definido abaixo.

**Escólio 3:** Do escólio anterior segue também que, nos casos de elipse e hipérbole, há um segundo eixo de simetria. Mais precisamente, se  $c$  é uma elipse ou uma hipérbole, de foco  $F$  e diretriz  $r$ , existem um segundo foco,  $\bar{F}$  (o mesmo mencionado no escólio 2), situado sobre o eixo principal, e uma segunda diretriz,  $\bar{r}$ , paralela a  $r$  (note que ambas,  $r$  e  $\bar{r}$ , são perpendiculares ao eixo principal). Neste caso, se  $e$  é a excentricidade de  $c$ , os pontos  $P$  do plano estarão sobre  $c$  se, e somente se,

$$\frac{\overline{P\bar{F}}}{\overline{P\bar{r}}} = e.$$

A reta perpendicular ao eixo principal e passando pelo centro é, evidentemente, um segundo eixo de simetria de  $c$ . Se  $c$  é uma elipse, seus pontos situados sobre o segundo eixo de simetria também são chamados de **vértices**.

**Escólio 4:** Embora cones diferentes possam ser obtidos fazendo variar o ângulo entre o eixo e as geratrizes, todas as parábolas são semelhantes.

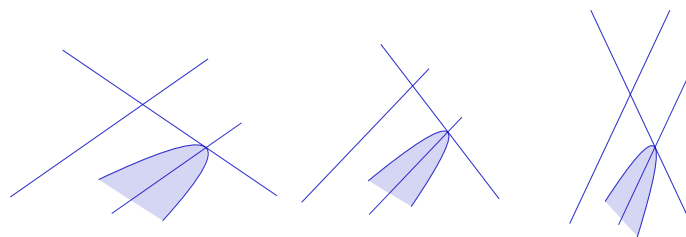


Figura 4.8: parábolas: diferentes, mas semelhantes

Demonstração : Começemos observando que, dada uma cônica  $c_1$ , de foco  $F$ , diretriz  $r_1$  e excentricidade  $e$ , e uma razão  $k$  de homotetia (que suporemos, para simplificar, estritamente positiva), a curva  $c_2$ , obtida de  $c_1$  por homotetia de centro  $F$  e razão  $k$ , é também uma cônica de excentricidade  $e$ .

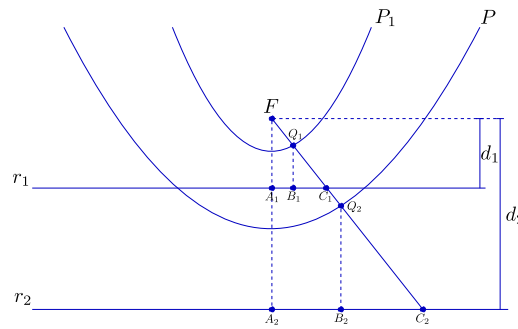


Figura 4.9: semelhança de parábolas

De fato, se  $r_2$  é a reta obtida de  $r_1$  pela homotetia de razão  $k$  e centro  $F$ , consideremos os pontos  $A_1$ , de  $r_1$ , e  $A_2$ , de  $r_2$ , situados sobre a reta perpendicular a  $r_1$  e  $r_2$  e passando por  $F$ . Temos, então,

$$\frac{\overline{FA_2}}{\overline{FA_1}} = k.$$

Se  $Q_1$  é um ponto de  $c_1$ , o correspondente ponto de  $c_2$ ,  $Q_2$ , é tal que, por semelhança de triângulos,

$$\frac{\overline{FQ_2}}{\overline{Q_2r_2}} = \frac{\overline{FQ_1}}{\overline{Q_1r_1}} = e,$$

o que demonstra nossa asserção inicial. Sejam agora,  $p_1$  e  $p_2$  duas parábolas. Por meio de uma translação e uma rotação, podemos fazer com que os focos coincidam em  $F$  e as diretrizes sejam retas,  $r_1$  e  $r_2$ , paralelas e situadas do mesmo lado em relação a  $F$ . Escolhendo a razão de homotetia

$$k = \frac{\overline{Fr_2}}{\overline{Fr_1}},$$

concluimos, pelo que acabamos de provar, que a cônica  $c_2$ , obtida de  $p_1$  pela homotetia de centro  $F$  e razão  $k$ , tem foco  $F$ , diretriz  $r_2$  e excentricidade  $e = 1$ . Ora, isso significa que  $c_2 = p_2$ .

■

**Escólio 5:** Elipses e parábolas são **curvas conexas** (embora não tenhamos definido o que é uma **curva**, podemos convencionar que curvas conexas são as que não podem ser decompostas em duas partes que não estão *coladas* - a definição precisa é:  $c$  é conexa se não existem dois abertos disjuntos do espaço,  $A_1$  e  $A_2$ , tais que  $c \cap A_1$  e  $c \cap A_2$  sejam não vazios). Hipérbolas não são conexas. Uma hipérbole  $h$  (não degenerada) tem, sempre, dois **ramos**: qualquer plano que corte o cone apenas no vértice separa  $h$  em duas partes que não estão *coladas*; cada uma dessas partes é chamada um **ramo** de  $h$ .

**Escólio 6:** Um círculo pode ser considerado como uma elipse de **excentricidade zero** (voltaremos ao assunto daqui a pouco). Alternativamente, podemos pensar um círculo como uma elipse cujos focos coincidem.

**Escólio 7:** Como já comentamos, os casos em que o plano  $\alpha$  passa pelo vértice do cone resultam em cônicas ditas degeneradas: um ponto (elipse degenerada), uma reta (parábola degenerada), um par de retas concorrentes (hipérbole degenerada). Considerando que o vértice do cone pode estar no plano do círculo que serve de diretriz ao cone (e que, portanto, o cone possa degenerar em um plano), temos que o plano todo e o conjunto vazio podem, também, ser considerados cônicas degeneradas. Se, por outro lado, considerarmos um cilindro circular reto como um cone de vértice no infinito, temos que um par de retas paralelas é, também, uma cônica degenerada.

**Exercício 4.4** *Que tipo de cônica (elipse, hipóbole ou parábola) degenerada deve corresponder a esses últimos exemplos?*

**Escólio 8:** De um outro ponto de vista, o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias aos focos é igual à distância focal é, também, uma elipse (degenerada em um segmento de reta); o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias aos focos é igual à distância focal é uma hipóbole (degenerada em um par de semirretas).

**Escólio 9:** Uma outra linha de investigação é examinar casos limite. Um bom exemplo é ver o que acontece com uma parábola, se mantivermos fixo o vértice  $V$  e fizermos o foco,  $F$ , caminhar sobre o eixo de simetria,  $s$ , em direção ao infinito (a diretriz,  $r$ , conseqüentemente, anda no sentido oposto): neste caso, a situação limite é uma semirreta, de extremidade  $V$ , situada sobre  $s$ . Assim, podemos dizer que uma semirreta é, também, uma **parábola degenerada**. Um outro exemplo interessante é manter fixos o foco  $F$  e a diretriz  $r$ , fazendo crescer a excentricidade,  $e$ , de zero a infinito: começamos com uma elipse degenerada em um ponto; à medida em que vai crescendo  $e$ , o segundo foco,  $\bar{F}$  vai se afastando; quando  $e = 1$ ,  $\bar{F}$  chega ao infinito e temos uma parábola, que passa a uma hipóbole assim que  $e$  passa de 1; quando  $e$  tende a infinito, cada um dos dois ramos da hipóbole tende à diretriz  $r$ .

**Exercício 4.5** *Procure enxergar o que acontece, no caso descrito acima, com a projeção estereográfica de nossa cônica. Mais precisamente, fixe, no plano, a diretriz,  $r$ , e o foco,  $F$ , e faça a excentricidade,  $e$ , ir aumentando, passando de um valor inferior a 1 a um valor superior a 1. Dê uma olhada no que acontece com a projeção estereográfica da cônica,  $c$ , correspondente: crie, no computador, o desenho animado, e veja.*

**Escólio 10:** Vale a pena fazer, para elipses e hipóboles, um desenho relacionando os elementos principais: focos, vértices, eixos de simetria, diretrizes e excentricidade.

Começemos com a elipse. Se  $e$  é a excentricidade,  $2d$  é a distância entre as diretrizes,

$$\overline{F_1 F_2} = 2c,$$

$$\overline{A_1 A_2} = 2a,$$

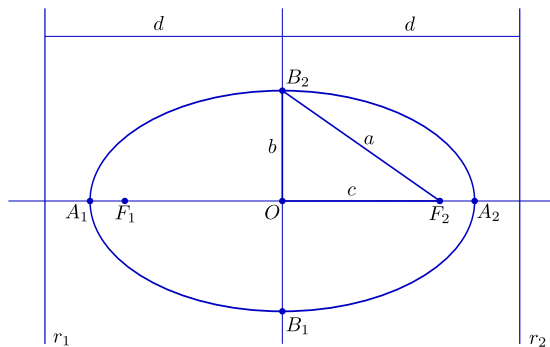


Figura 4.10: elementos principais da elipse

$$\overline{B_1B_2} = 2b,$$

temos

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Além disso, como

$$e = \frac{\overline{A_1F_1}}{\overline{A_1r_1}} = \frac{a - c}{d - a}$$

e

$$e = \frac{\overline{A_2F_1}}{\overline{A_2r_1}} = \frac{a + c}{d + a},$$

temos

$$e = \frac{c}{a}, \quad d = \frac{a^2}{c}.$$

A expressão acima indica que a **excentricidade** corresponde ao afastamento relativo entre os focos e o centro. Se mantivermos  $a$  fixo, teremos, fazendo  $c$  tender a zero, um círculo de raio  $a$ ; por outro lado, fazendo  $c$  tender a  $a$ , nossa elipse tenderá ao segmento  $A_1A_2$ .

Vejamos, agora, a hipérbole. Se  $e$  é a excentricidade,  $2d$  é a distância entre as diretrizes,

$$\overline{F_1F_2} = 2c,$$

$$\overline{A_1A_2} = 2a,$$

$$\overline{B_1B_2} = 2b,$$

temos

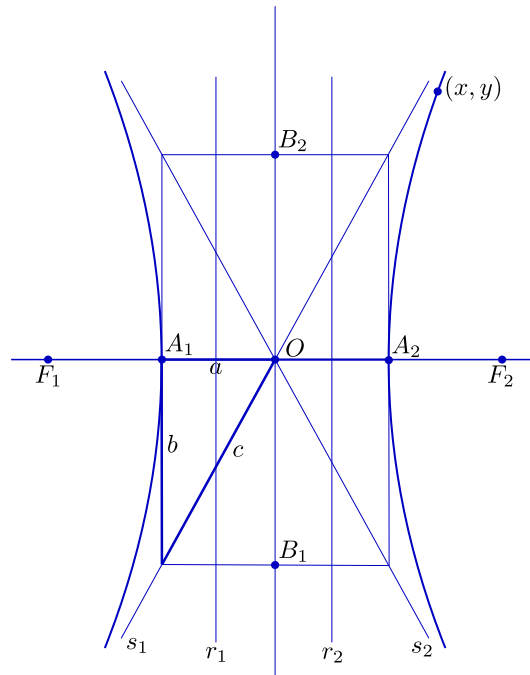


Figura 4.11: elementos principais da hipérbole

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Além disso, como

$$e = \frac{\overline{A_1 F_1}}{\overline{A_1 r_1}} = \frac{c - a}{a - d}$$

e

$$e = \frac{\overline{A_2 F_1}}{\overline{A_2 r_1}} = \frac{a + c}{d + a'}$$

temos

$$e = \frac{c}{a'}, \quad d = \frac{a^2}{c}.$$

A hipérbole  $h$  tem duas assíntotas,  $s_1$  e  $s_2$ , que são as geratrizes do cone paralelas ao plano  $\alpha$  de  $h$ . Uma forma de obter as assíntotas é considerar um sistema de coordenadas canônico usando os eixos de simetria de  $h$ . Se  $(x, y)$  são as coordenadas de um ponto de  $h$ , temos, supondo  $x$  e  $y$  positivos,

$$\sqrt{y^2 + (x + c)^2} - \sqrt{y^2 + (x - c)^2} = 2a,$$

o que dá

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

de modo que

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a}.$$

A hipérbole  $\bar{h}$ , com focos  $\bar{F}_1$  e  $\bar{F}_2$  situados sobre o eixo de simetria perpendicular ao principal, com a mesma distância focal e as mesmas assíntotas que  $h$ , é dita **conjugada** à hipérbole  $h$ .

**Exercício 4.6** *Obtenha e dê uma olhada no tratado do Apolônio. Assuma consigo mesmo o compromisso de lê-lo com cuidado e profundidade algum dia.*



# Capítulo 5

## Tangentes

As tangentes às cônicas têm algumas propriedades interessantes. Embora possam (e devam) ser demonstradas mais rigorosamente usando derivadas, vamos adotar aqui uma abordagem mais leve (mesmo que, sob certos aspectos formais, possa ser taxada de leviana). Usaremos livremente a ideia de reta **tangente**.

### a Elipse

Começemos com uma elipse,  $c$ , de focos  $F_1$  e  $F_2$ , definida por

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a.$$

Observemos que  $c$  divide o plano em três regiões:

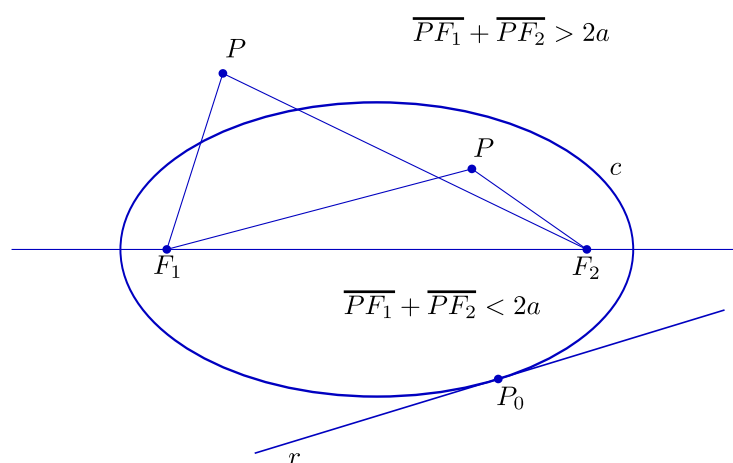


Figura 5.1: divisão do plano pela elipse

(i) os pontos de  $c$  satisfazendo

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a;$$

(ii) os pontos *do lado de dentro* de  $c$  satisfazendo

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} < 2a;$$

(iii) os pontos *do lado de fora* de  $c$  satisfazendo

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > 2a.$$

A observação crucial é a seguinte: se a reta  $r$  tangencia  $c$  no ponto  $P_0$ , então  $P_0$  satisfaz a

$$\overline{P_0F_1} + \overline{P_0F_2} = 2a,$$

mas os demais pontos  $P$  de  $r$  satisfazem a

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > 2a.$$

Logo,  $P_0$  é o ponto de  $r$  para o qual é mínima a soma  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ . Essa caracterização de  $P_0$  nos permite abordar a questão com outras lentes. Suponhamos que temos os pontos  $F_1$  &  $F_2$ , e a reta  $r$  (supomos, também, que  $r$  não passa *entre*  $F_1$  &  $F_2$ ). Busquemos o ponto  $P_0$  que, entre os pontos de  $r$ , minimiza  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ .

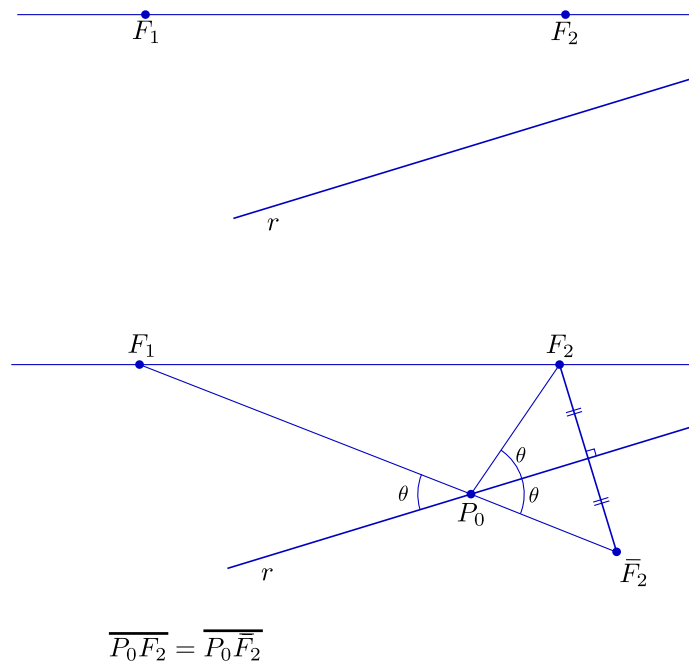


Figura 5.2: ponto de tangência entre elipse de focos dados e reta dada

Como nos mostra a figura, para achar  $P_0$ , basta refletir em relação a  $r$  um dos pontos  $F_1$  &  $F_2$  e ligar ao outro.

**Exercício 5.1** Entenda.

Daí segue, imediatamente,

**Proposição 1:** Se  $c$  é uma elipse de focos  $F_1$  &  $F_2$ , a normal a  $c$  no ponto  $P_0$  (de  $c$ ) é a bissetriz do ângulo  $F_1\hat{P}_0F_2$ .

Demonstração : Basta olhar a figura e usar o argumento esboçado acima, lembrando que a normal a  $c$  em  $P_0$  é a normal à tangente a  $c$  em  $P_0$ . ■

## b Hipérbole

Para as hipérbolas, vale raciocínio análogo. Vamos fixar os focos,  $F_1$  &  $F_2$ , e nos concentrar no ramo dado por  $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$ .

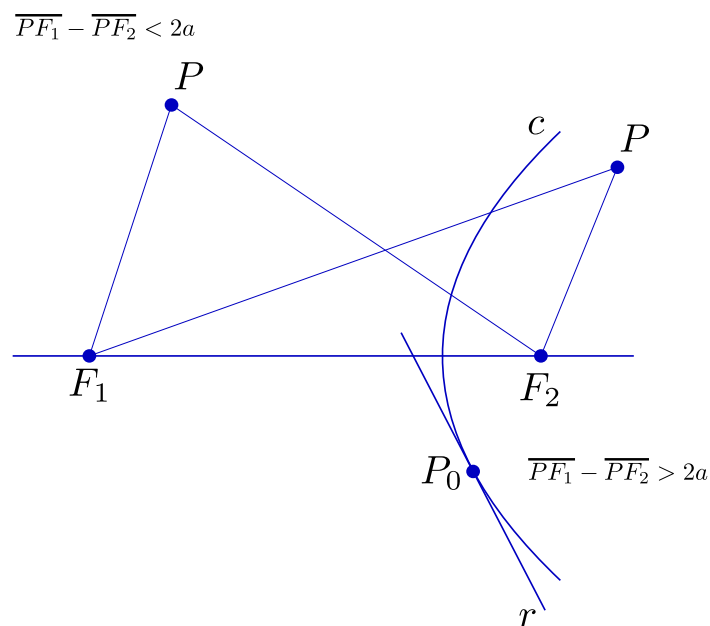


Figura 5.3: divisão do plano por hipérbole

Suponhamos que  $c$  é nosso ramo de hipérbole. O plano fica, como no caso da elipse, dividido em regiões:

(i) os pontos de  $c$  satisfazendo

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a;$$

(ii) os pontos *do lado de dentro da concavidade* de  $c$  satisfazendo

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} > 2a;$$

(iii) os pontos *do lado de fora da concavidade* de  $c$  satisfazendo

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} < 2a.$$

Assim, se  $r$  é tangente a  $c$  em  $P_0$ , temos que  $\overline{P_0F_1} - \overline{P_0F_2} = 2a$ , enquanto que os demais pontos  $P$  de  $r$  satisfazem a  $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} < 2a$ . Ou seja,  $P_0$  é, dos pontos  $P$  de  $r$ , aquele para o qual é máxima a diferença

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2}.$$

Note, também, que  $F_2$  está, forçosamente, mais próximo de  $r$  do que  $F_1$ .

**Exercício 5.2** *Prove isso!*

Podemos aplicar truque análogo ao do caso da elipse: para achar  $P_0$ , dados,  $F_1, F_2$  e  $r$ , basta refletir  $F_2$  em relação a  $r$  e ligar a  $F_1$ . Desta forma,  $r$  é a bissetriz de  $F_1\hat{P}_0\bar{F}_2$ .

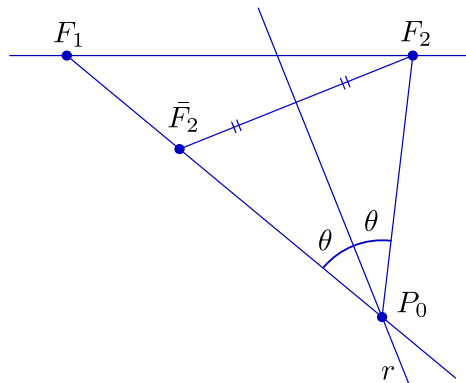


Figura 5.4: determinação do ponto de tangência à hipérbole

**Exercício 5.3** *Entenda a solução: procuramos o ponto  $P$  de  $r$  que maximize a diferença  $\overline{PF_1} - \overline{PF_2}$ . Temos, por construção,*

$$\overline{P_0F_1} - \overline{P_0F_2} = \overline{P_0F_1} - \overline{P_0\bar{F}_2} = \overline{F_1\bar{F}_2}.$$

*Pela desigualdade triangular e pela simetria, temos, para qualquer  $P$  em  $r$  outro que  $P_0$ ,*

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \overline{PF_1} - \overline{P\bar{F}_2} < \overline{F_1\bar{F}_2} = \overline{P_0F_1} - \overline{P_0F_2}.$$

Chegamos, assim, à análoga, para hipérbolés, da Proposição 1.

**Proposição 2:** Se  $h$  é uma hipérbole de focos  $F_1$  &  $F_2$  e  $r$  é a reta tangente a  $h$  em  $P_o$ , então  $r$  é a bissetriz de  $F_1\hat{P}_oF_2$ .

Demonstração : ■

Juntando as proposições 1 e 2, obtemos um corolário impressionante.

**Corolário:** Considere dois pontos distintos  $F_1$  &  $F_2$ , do plano  $\alpha$  e as famílias  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{H}$ , de curvas do mesmo plano, definidas da seguinte maneira:  $\mathcal{E}$  é formada por todas as elipses de  $\alpha$  com focos  $F_1$  &  $F_2$ ;  $\mathcal{H}$  é formada por todas as hipérbolas de  $\alpha$  com focos  $F_1$  &  $F_2$ . Se  $c$  está em  $\mathcal{E}$ ,  $h$  está em  $\mathcal{H}$  e  $P$  é um ponto de interseção entre  $c$  e  $h$ , então  $c$  e  $h$  se cortam ortogonalmente em  $P$ .

**Exercício 5.4** Identifique  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{C}$  e considere, para cada real positivo  $c$ , a transformação  $J_c : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$J_c(z) = \frac{c}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$$

Mostre que  $J_c$  transforma círculos de centro em  $(0,0)$  em elipses de focos  $F_1 = (-c,0)$  e  $F_2 = (c,0)$  (observe que os círculos de raios  $R$  e  $\frac{1}{R}$  são levados na mesma elipse e que o círculo unitário é levado na elipse degenerada no segmento  $[F_1, F_2]$ ). Mostre que  $J_c$  transforma retas passando por  $(0,0)$  em hipérbolas de focos  $F_1 = (-c,0)$  e  $F_2 = (c,0)$  (observe que retas simétricas em relação ao eixo horizontal são levadas na mesma hipérbole, que a reta real é levada na hipérbole degenerada em duas semirretas e que a reta imaginária é invariante - como imagem de si mesma, é também uma hipérbole degenerada).

**Observação:** A transformação  $J_c$  definida no exercício, conhecida como **função de Zucóvski**, é derivável (**holomorfa**) no sentido das funções de variável complexa (sua derivada é  $J'_c(z) = \frac{c}{2} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right)$ ). É um fato básico da Teoria de **Funções de Variável Complexa** que funções holomorfas preservam ângulos, nos pontos em que a derivada é não nula. Assim, nosso corolário *impressionante* é, para quem conhece as propriedades básicas da derivabilidade complexa, uma simples consequência do exercício.

## c Parábola

Vamos encarar a parábola como caso limite de elipse. Consideremos uma elipse variável, mas tal que um dos focos,  $F$ , e o vértice mais próximo deste,  $V$ , permanecem fixos, enquanto o outro foco,  $\bar{F}$ , se afasta, movendo-se sobre o eixo de simetria. Quando  $\bar{F}$  tende a infinito, nossa elipse tende a uma parábola.

**Exercício 5.5** Note que, se  $O$  é o centro da elipse,  $a$  é a distância de  $V$  a  $O$  e  $c$  é a distância de  $F$  a  $O$ , então  $a - c$  permanece fixo, enquanto, fazendo  $\bar{F}$  tender a infinito,  $a$  e  $c$  tendem a infinito. Conclua que a excentricidade de nossa elipse tende 1, quando  $\bar{F}$  tende a infinito.

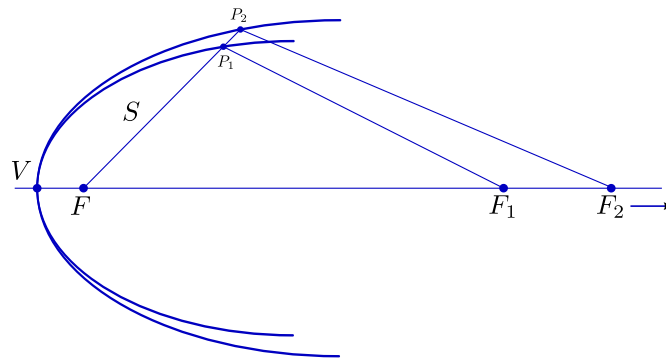


Figura 5.5: elipse de foco e vértice fixos, excentricidade crescendo para 1

Façamos, pois variar nossa elipse de acordo com o combinado. Se fixarmos uma semirreta  $s$  partindo do foco fixo  $F$ ,  $s$  cortará a elipse em um ponto  $P$ , que tenderá ao ponto  $P_0$  em que  $s$  corta a parábola. Ora, a normal à elipse é a bissetriz do ângulo  $F\hat{P}\bar{F}$ . Quando  $\bar{F}$  vai a infinito,  $P\bar{F}$  tende à reta, passando por  $P_0$ , paralela ao eixo principal. Assim, a normal à elipse em  $P$  (que tende à normal à parábola em  $P_0$ ) tem como limite a bissetriz do ângulo formado pelas semirretas  $\overrightarrow{P_0F}$  e a paralela ao eixo, partindo de  $P_0$  e interior à concavidade da parábola.

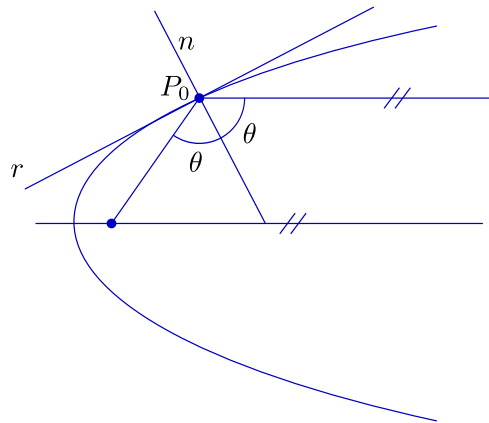


Figura 5.6: propriedade reflexiva da parábola

**Proposição 3:** Se  $p$  é uma parábola de foco  $F$  e a reta  $n$  é normal a  $P$  no ponto  $P_0$ , então  $n$  é a bissetriz do ângulo formado em  $P_0$  pela semirreta  $\overrightarrow{P_0F}$  e a semirreta paralela ao eixo, partindo de  $P_0$  e interior à concavidade da parábola.

Demonstração :     ■

**Corolário:** Se duas parábolas têm em comum o foco e o eixo de simetria, então, caso se cortem, cortam-se ortogonalmente.

Demonstração : Para que se cortem, é preciso que tenham as diretrizes em lados opostos do foco, de modo que cada uma terá a concavidade virada para um lado (faça uma figura). Da proposição 3, concluímos que a tangente a uma é normal à outra. ■

**Exercício 5.6** Identifique  $\mathbb{R}^2$  ao plano complexo e considere a transformação  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f(z) = z^2.$$

Mostre que  $f$  transforma retas verticais (paralelas ao eixo imaginário) em parábolas com eixo de simetria na reta real e bunda virada para  $+\infty$ ; e retas horizontais (paralelas à reta real) em parábolas com eixo de simetria na reta real e bunda virada para  $-\infty$ .

**Exercício 5.7** A argumentação usada para a Proposição 3, embora bonita, pode dar margem a dúvidas e ter sua legitimidade questionada. Prove tudo que foi feito neste capítulo usando derivada. O caso da parábola, por exemplo, pode ser facilmente tratado com a equação  $y = \frac{1}{4a}x^2$ .

## d Espelhos, acústica e telecomunicações

As propriedades de tangência das cônicas podem ser exploradas usando, em diversas instâncias, a igualdade entre ângulo de incidência e ângulo de reflexão.<sup>1</sup> A ideia básica é que, em uma mesa de sinuca elíptica, se percutirmos uma bola mantendo o taco sobre a reta que a liga a um dos focos, esta, depois de se chocar contra a borda da mesa, passará pelo outro foco; após nova reflexão, passará pelo primeiro foco e assim sucessivamente.

Parábolas podem ser usadas para a construção de conchas acústicas, o som emitido a partir do foco se refletindo em paralelas na direção da plateia. Da mesma forma, antenas parabólicas captam sinais vindos de um satélite muito distante (que é idealizado como se estivesse no infinito), refletido-os para um sensor situado no foco.

**Exercício 5.8** Se você gostou dessas ideias, dê uma pesquisada no assunto. Trabalhe com as seguintes questões: mesmo supondo que podemos construir cônicas perfeitas, o que acontece quando aproximamos uma elipse de excentricidade próxima de 1 por uma parábola (caso das antenas parabólicas)? o que acontece quando o sensor, ou o som emitido, não está exatamente no foco? em resumo, se as coisas forem ligeiramente imperfeitas, ainda funcionarão razoavelmente bem?

Tente calcular os erros em função dos desvios ou, se não der (ou se preferir), tente simular no computador as diversas situações.

---

<sup>1</sup>Há até uma lenda, quase certamente sem fundamento, que atribui a Arquimedes de Siracusa o uso de espelhos parabólicos para concentrar os raios do sol sobre navios romanos que ocupassem um dos focos, incendiando-os





# Capítulo 6

## Equações paramétricas para as cônicas

### a Elipse

Dos capítulos anteriores, sabemos que, em um sistema de coordenadas canônico, uma elipse de focos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ , tal que, para cada um de seus pontos  $P = (x, y)$ , se tenha

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a,$$

é caracterizada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Uma parametrização bastante simples é, fazendo variar  $t$  de 0 a  $2\pi$ , descrever os pontos  $(x(t), y(t))$  de nossa elipse por

$$(x(t), y(t)) = (a \cos t, b \sin t).$$

Uma forma de encarar nossa parametrização é considerar a elipse como imagem do círculo unitário pela transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Esta parametrização pode ser vista, também, como o resultado de uma mudança de escala em que escolhêssemos escalas diferentes em cada um dos eixos (ou, alternativamente, podemos pensar no desenho do círculo  $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$  em um sistema de coordenadas de base ortogonal mas não ortonormal - esse era, outrora, um efeito bastante comum em telas de computadores, por conta de não serem "quadrados" os pixels - tentávamos desenhar um círculo, fazendo tudo certinho, e obtínhamos uma figura com cara de elipse!).

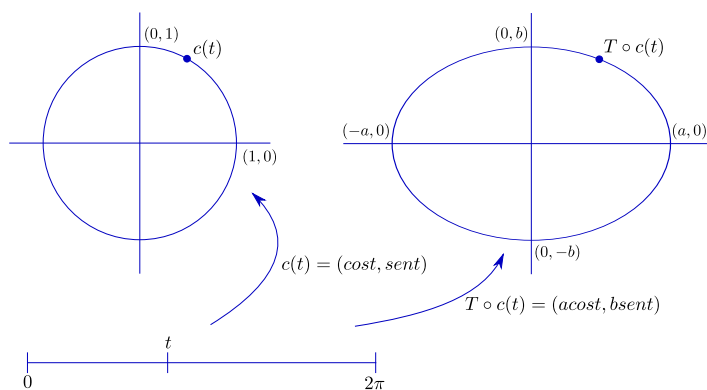


Figura 6.1: elipse como imagem de círculo por mudanças de escala

## b Hipérbole

Existe uma forma semelhante, bastante engenhosa, de parametrizar a hipérbole. Começemos com uma **hipérbole equilátera** (aquela em que as assíntotas formam um ângulo reto). Em um sistema de coordenadas canônico, podemos obter um exemplar cuja equação seja

$$x^2 - y^2 = 1.$$

**Exercício 6.1** Neste caso, quais são as coordenadas dos focos?

**Exercício 6.2** Mostre que a hipérbole de equação  $x^2 - y^2 = 1$  é, de fato, equilátera.

Em analogia com o círculo de equação  $x^2 + y^2 = 1$ , parametrizado por  $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ , podemos lançar mão das funções **seno hiperbólico** e **cosseno hiperbólico**, definidas por

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

**Exercício 6.3** Mostre que  $(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1$  para todo  $t$  real (vale, também, para  $t$  complexo). Mostre que a derivada do seno hiperbólico é o cosseno hiperbólico e viceversa.

Desta forma, nossa hipérbole equilátera de equação  $x^2 - y^2 = 1$  pode ser parametrizada por  $(x(t), y(t)) = (\cosh t, \sinh t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 6.4** Mostre que, na verdade, a parametrização acima cobre apenas um dos ramos da hipérbole. Mostre que, realmente, para cada ponto  $(x, y)$ , com  $x^2 - y^2 = 1$  e  $x > 0$ , existe um único  $t$  em  $\mathbb{R}$  tal que  $(\cosh t, \sinh t) = (x, y)$ . Conclua que o outro ramo, correspondente a  $x < 0$  pode ser parametrizado por  $(x(t), y(t)) = (-\cosh t, \sinh t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Observação:** As funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico não são um mero truque computacional. Discutiremos seu significado geométrico ao final deste capítulo, em uma seção à parte, que requer um pouco de cálculo de integrais.

Uma outra hipérbole qualquer terá, se usarmos seus eixos de simetria para definir um sistema de coordenadas canônico, com os focos no eixo horizontal, equação da forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**Exercício 6.5** Mostre que a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

leva a hipérbole de equação  $x^2 - y^2 = 1$ , bijetivamente, na hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é parametrizada por

$$t \mapsto (a \cosh t, b \sinh t), \quad t \in \mathbb{R}$$

(ramo com  $x > 0$ ) e por

$$t \mapsto (-a \cosh t, b \sinh t), \quad t \in \mathbb{R}$$

(ramo com  $x < 0$ ).

## c Parábola

O caso da parábola é simples. Fixando um sistema de coordenadas canônico de forma que o foco esteja em  $(0, a)$  e a diretriz seja dada por  $y = -a$ , nossa parábola terá por equação  $x^2 + (y - a)^2 = (y + a)^2$ , ou, equivalentemente,

$$y = \frac{1}{4a}x^2.$$

A parametrização mais evidente é

$$(x(t), y(t)) = \left(t, \frac{1}{4a}t^2\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

## d O seno e o cosseno hiperbólicos

As funções seno e cosseno hiperbólico são definidas explorando uma certa analogia com as funções trigonométricas seno e cosseno.

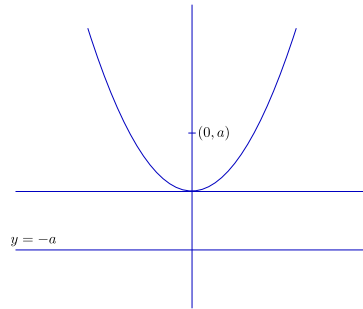


Figura 6.2: parametrização da parábola

Se  $x^2 + y^2 = 1$ , podemos dizer que  $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ , sendo  $\theta$  a área do setor circular que vai do ponto  $(x, -y)$  ao ponto  $(x, y)$  (excluimos do círculo o ponto  $(-1, 0)$  e estabelecemos que  $\theta$  é positivo se o percurso, que não pode incluir  $(-1, 0)$ , se dá no sentido trigonométrico e negativo se se dá no sentido horário).

Por analogia, se  $x^2 - y^2 = 1$ , com  $x > 0$ , diremos que

$$(x, y) = (\cosh \theta, \sinh \theta)$$

se a área hachurada na figura (que corresponde a um setor hiperbólico indo de  $(x, -y)$  a  $(x, y)$ ) é  $\theta$  (com a mesma convenção quanto ao sinal). Assim, a definição já garante a relação fundamental

$$(\cosh \theta)^2 - (\sinh \theta)^2 = 1.$$

Vamos tentar expressar  $\theta$  em função de  $x$  e  $y$ . Vamos supor  $x > 0$ , garantindo, assim, que estamos no ramo à direita. De  $x^2 - y^2 = 1$ , obtemos

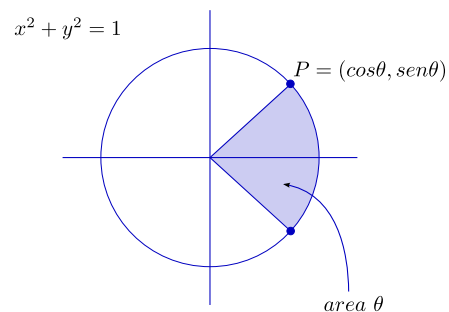
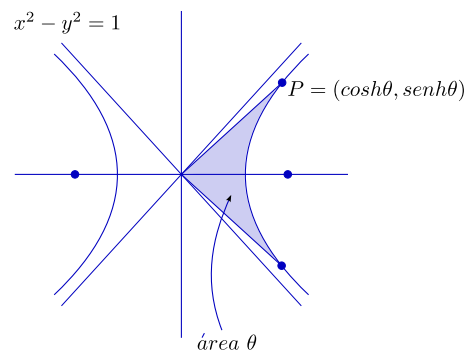
$$x = \sqrt{1 + y^2},$$

de modo que a área que nos dá o ângulo  $\theta$  é dada, em função de  $x$  e  $y$ , por

$$\theta(x, y) = \int_{-y}^y \sqrt{1 + t^2} dt - xy = 2 \int_0^y \sqrt{1 + t^2} dt - xy.$$

**Exercício 6.6** Note que a expressão acima, válida para  $x \geq 1$  e  $y$  qualquer em  $\mathbb{R}$ , já nos dá  $\theta(x, -y) = -\theta(x, y)$ .

A substituição  $t = \tan u$  leva a:



$$\theta(x, y) = 2 \int_0^{\arctan y} \sec^3 u du - xy.$$

Ora,

$$\begin{aligned} \int_0^{\arctan y} \sec^3 u du &= \int_0^{\arctan y} (\sec u)(1 + \tan^2 u) du = \\ &= \int_0^{\arctan y} \sec u du + \int_0^{\arctan y} (\sec u \tan u) \tan u du. \end{aligned}$$

Integrando por partes a segunda parcela, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\arctan y} \sec^3 u du &= \int_0^{\arctan y} \sec u du + \sec(\arctan y) \tan(\arctan y) - \\ &- \int_0^{\arctan y} \sec^3 u du = \int_0^{\arctan y} \sec u du + xy - \int_0^{\arctan y} \sec^3 u du. \end{aligned}$$

Assim,

$$\theta(x, y) = 2 \int_0^{\arctan y} \sec^3 u du - xy = \int_0^{\arctan y} \sec u du.$$

Ora,

$$\int \sec u du = \int \frac{\sec u (\sec u + \tan u)}{\sec u + \tan u} du = \ln |\sec u + \tan u| + k,$$

o que nos dá (note que, no nosso caso,  $x + y > 0$ )

$$\theta(x, y) = \ln(x + y).$$

Como

$$-\theta(x, y) = \theta(x, -y) = \ln(x - y),$$

obtemos, chamando, carinhosamente,  $\theta(x, y)$  de  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} e^\theta &= x + y \\ e^{-\theta} &= x - y \end{aligned}$$

(note que, como  $x^2 - y^2 = 1$ ,  $x > 0$ , nosso  $\theta$  atinge todos os reais entre 0 e  $\infty$ ).

Finalmente, escrevendo  $x = \cosh \theta$  e  $y = \sinh \theta$ , obtemos as expressões

$$\cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}, \quad \sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$



## Capítulo 7

# Cônicas em coordenadas polares

Pode, em alguns casos, ser mais simples, ou mais conveniente, expressar o raio  $r$  como função de  $\theta$  do que descrever, diretamente, as coordenadas  $x$  e  $y$ . Pode, também, ser divertido: assim como, dada uma função  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , nos aplicamos em esboçar a curva descrita, em coordenadas cartesianas, por  $y = f(x)$ , podemos, também, passar instantes agradáveis esboçando, dada uma função  $\rho : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , a curva descrita, em coordenadas polares, por  $r = \rho(\theta)$ .

**Exercício 7.1** *Desenhe as curvas dadas pelas equações a seguir ( $a$  é um número positivo, fixo):*

1.  $r = a \sin(2\theta)$
2.  $r = a \sin(\theta/2)$
3.  $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$

Para expressar a equação de uma cônica em coordenadas polares, usaremos a definição baseada em foco e diretriz.

**Definição:** Fixados um ponto  $F$ , uma reta  $s$  (de modo que  $F$  não esteja sobre  $s$ ) e um número positivo  $e$ , a **cônica de foco  $F$ , diretriz  $s$  e excentricidade  $e$**  é o lugar geométrico dos pontos  $P$  do plano definido por  $F$  e  $s$  que, sendo  $\overline{PF}$  a distância de  $P$  a  $F$  e  $\overline{Ps}$  a distância de  $P$  a  $s$ , satisfazem

$$\overline{PF} = e\overline{Ps}.$$

Procuremos expressar uma cônica em coordenadas polares. Suporemos que o foco está na origem e que a diretriz,  $s$ , é uma reta qualquer, de forma que a semirreta  $\theta = 0$  não esteja, necessariamente, sobre um eixo de simetria.

Chamaremos de  $\varphi$  o ângulo entre o eixo principal da cônica (perpendicular a  $s$ ) e a horizontal;  $d$  será a distância entre  $s$  e  $O$ . Se  $P$  é um ponto da cônica, temos

$$\overline{OP} = r,$$

$$\overline{Ps} = |d + r \cos(\theta - \varphi)|.$$

De  $\overline{OP} = e\overline{Ps}$ , obtemos  $r = e|d + r \cos(\theta - \varphi)|$ .

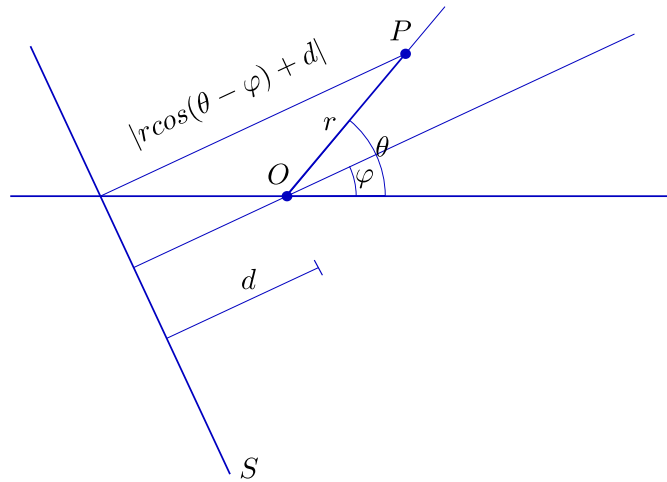


Figura 7.1: cônica em coordenadas polares - note que o ângulo  $\varphi$ , na figura, é negativo

Vamos ver o que pode ser feito para eliminar as barras de módulo sem elevar ao quadrado. Ora, para que  $d + r \cos(\theta - \varphi)$  seja negativo, é preciso que

$$r \geq |r \cos(\theta - \varphi)| > -r \cos(\theta - \varphi) - d = |d + r \cos(\theta - \varphi)|,$$

o que só pode ocorrer se  $e > 1$ .

Assim, se  $r \leq 1$ , estamos tranquilos com

$$r = e(d + r \cos(\theta - \varphi)),$$

o que nos dá

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos(\theta - \varphi)}.$$

Note que: se  $e < 1$  (elipse), o denominador não se anula e temos um valor de  $r$  para cada  $\theta$ ; se  $e = 1$  (parábola), temos denominador nulo se  $\theta = \varphi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , o que corresponde a dizer que não há ponto na semirreta sobre o eixo principal, partindo do foco na direção oposta à da diretriz.

**Observação:** É usual, também, utilizar o ângulo  $\theta_0 = \varphi + \pi$ , correspondente à semirreta normal a  $s$  que parte de  $O$  e *caminha para*  $s$ . Neste caso, nossa equação, em termos de  $\theta - \theta_0$  é, tendo em conta que  $\cos(\theta - \theta_0) = \cos(\theta - \varphi - \pi) = -\cos(\theta - \varphi)$ ,

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}.$$

Vejamos, agora, o caso da hipérbole.



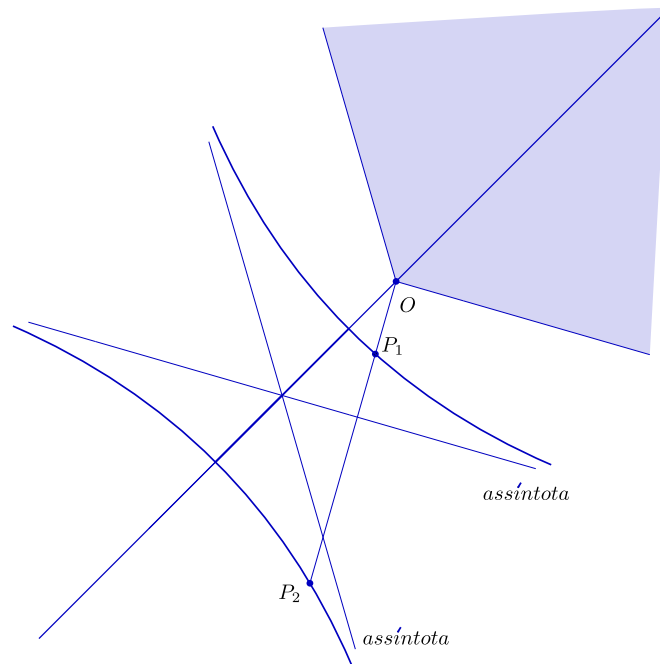


Figura 7.2: hipérbole em coordenadas polares

Na figura, a região sombreada, compreendida entre as duas semirretas que partem de  $O$ , e são paralelas a cada uma das assíntotas (sem interceptar a outra assíntota), corresponde aos valores de  $\theta$  para os quais não há  $r$  (não negativo) tal que  $r$  e  $\theta$  sejam as coordenadas polares de um ponto da curva. Para cada um dos demais valores de  $\theta$ , podemos calcular o  $r$  correspondente (um ou dois valores, conforme o caso).

Partindo de

$$r = e|d + r \cos(\theta - \varphi)|,$$

obtemos, conforme  $|d + r \cos(\theta - \varphi)| = \pm(d + r \cos(\theta - \varphi))$ ,

$$r_1 = \frac{ed}{1 - e \cos(\theta - \varphi)}, \quad r_2 = \frac{-ed}{1 + e \cos(\theta - \varphi)}.$$

Considerando que queremos  $r$  positivo, observamos que  $r_1$  vigora se  $\cos(\theta - \varphi) < 1/e$ , enquanto  $r_2$  vigora quando  $\theta$  é tal que  $\cos(\theta - \varphi) < -1/e$ . Associando os ângulos  $\theta$  a pontos de um círculo, temos a seguinte figura para o número de valores de  $r$  correspondentes a  $\theta$ , conforme a região em que se encontra  $\theta$ .

Os valores do tipo  $r_1$  correspondem ao ramo da hipérbole situado, em relação à diretriz, no mesmo semiplano em que se encontra o foco  $O$ ; os valores do tipo  $r_2$  correspondem ao outro ramo (basta observar que, nos valores de  $\theta$  em que ambos estão definidos, ou seja, quando  $\cos(\theta - \varphi) < -1/e$ , temos  $r_2 > r_1$ ). Assim, podemos concluir que o primeiro ramo é parametrizado por

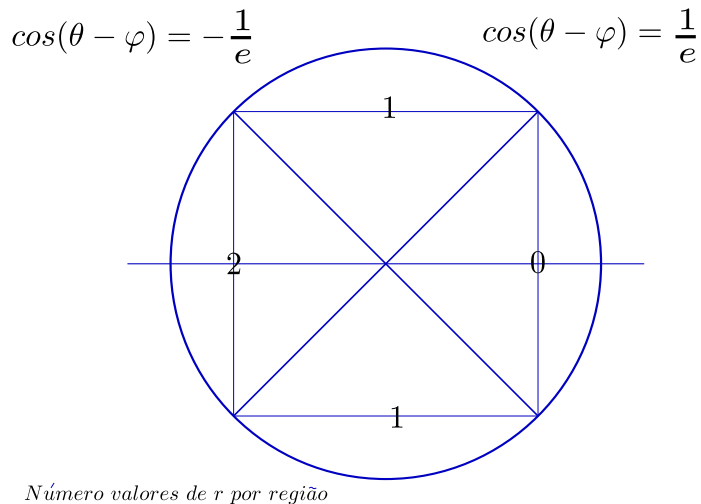


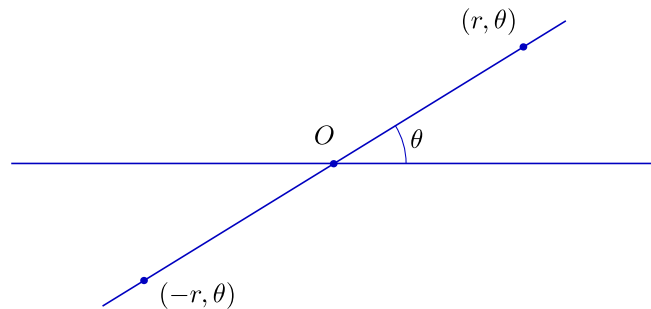
Figura 7.3:

$$r_1(\theta) = \frac{ed}{1 - e \cos(\theta - \varphi)}, \quad \cos(\theta - \varphi) < \frac{1}{e};$$

o segundo é parametrizado por

$$r_2(\theta) = \frac{-ed}{1 + e \cos(\theta - \varphi)}, \quad \cos(\theta - \varphi) < -\frac{1}{e}.$$

Uma alternativa, para o segundo ramo, é usar a região correspondente a  $\cos(\theta - \varphi) > 1/e$ , observando que  $\theta \mapsto \theta + \pi$  é uma bijeção entre essa região e a definida por  $\cos(\theta - \varphi) < -1/e$ , mantendo os valores absolutos dos cossenos, mas invertendo-lhes os sinais. Lançando mão de valores negativos para  $r$ , o mesmo ramo pode ser descrito por



$$r_2(\theta) = \frac{ed}{1 - e \cos(\theta - \varphi)}, \quad \cos(\theta - \varphi) > \frac{1}{e}.$$

Como a nova versão para  $r_2$  nos dá a mesma fórmula que já usávamos para  $r_1$ , podemos juntá-las em uma só, parametrizando a hipérbole (os dois ramos incluídos) por

$$r(\theta) = \frac{ed}{1 - e \cos(\theta - \varphi)}, \quad \cos(\theta - \varphi) \neq \frac{1}{e}.$$



## Capítulo 8

# Equação geral de uma cônica

### a Cônicas são dadas por equações do segundo grau

Voltemos às coordenadas cartesianas. Já obtivemos, em casos particulares, equações para elipses, hipérbolas e parábolas. Se colocarmos os eixos de simetria sobre os eixos de coordenadas, com os focos em  $Ox$ , elipses terão equações da forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

as equações das hipérbolas, nas mesmas condições serão

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Parábolas com vértice na origem e eixo de simetria em  $Oy$ , por outro lado, serão dadas por

$$y = \frac{1}{4a}x^2.$$

Um ponto comum que salta aos olhos, de um ponto de vista algébrico, é conduzirem, os três casos, a equações do segundo grau (em  $x$  e  $y$ ). Não é difícil perceber que o mesmo ocorrerá se permitirmos que nossa cônica esteja em qualquer posição (relativa ao sistema de coordenadas canônico).

De fato, fixemos nosso sistema de coordenadas, de origem  $O$  e base ortonormal  $\alpha = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ . Designaremos por  $x$  e  $y$  as coordenadas de um ponto genérico,  $P$ , nesse sistema. Suponhamos, agora, dada uma cônica que, para simplificar, suporemos não degenerada (elipse, hipérbole ou parábola). Sabemos que, em um outro sistema de coordenadas, de origem  $O_o$  e base ortonormal  $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , orientada positivamente, as coordenadas de qualquer ponto  $P$  de nossa cônica,  $(u, v)$ , terão que satisfazer a uma equação do segundo grau. Mais precisamente, um ponto  $P$  do plano estará sobre a cônica se, e somente se, suas coordenadas,  $(u, v)$ , no novo sistema, satisfizerem a uma equação do tipo:

- $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ , se for uma elipse;
- $\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$ , se for uma hipérbole;
- $v = \frac{1}{4a}u^2$ , se for uma parábola.

**Exercício 8.1** Note que existe um ângulo de rotação,  $\theta$ , tal que  $\vec{e}_1 = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2$ .

**Exercício 8.2** Suponha que as coordenadas da nova origem,  $O_o$ , no sistema original sejam  $(x_o, y_o)$ . Obtenha, a partir das coordenadas do ponto  $P$  no sistema original,  $(x, y)$ , suas coordenadas,  $(u, v)$ , no novo sistema (a solução deve depender de  $x$  e  $y$ , considerados variáveis, mas também dos parâmetros  $x_o, y_o$  e  $\theta$ ).

**Exercício 8.3** Observe que tanto  $u$  como  $v$  são funções do primeiro grau de  $x$  e  $y$ .

**Exercício 8.4** Substitua as expressões obtidas para  $u$  e  $v$  em qualquer uma das possíveis equações (em  $(u, v)$ ) de nossa cônica. Observe que o que obtemos é uma equação que caracteriza as coordenadas  $(x, y)$  dos pontos da cônica no sistema original e que essa equação é do segundo grau.

**Exercício 8.5** Tente a seguinte abordagem alternativa: Fixado o sistema de coordenadas canônico, considere a cônica  $c$  caracterizada: pelo foco,  $F = (x_o, y_o)$ ; pela diretriz,  $r$ , normal ao vetor unitário  $n = (a, b)$  (com  $n$  apontando de  $r$  para  $F$ ); e pela excentricidade  $e$ . Mostre que o ponto  $P = (x, y)$  está em  $c$  se, e somente se,

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = e^2(a(x - x_o) + b(y - y_o) + d)^2.$$

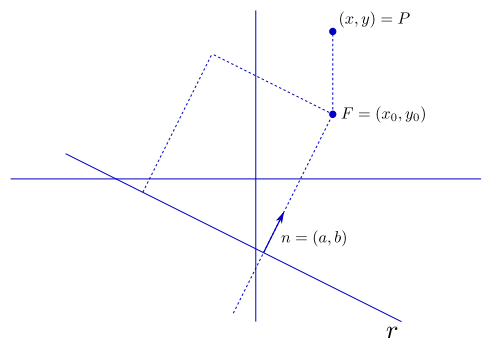


Figura 8.1: equação de cônica, dados, foco, diretriz e excentricidade

## b Será a recíproca verdadeira?

A questão óbvia que se coloca é: vale a recíproca? Isto é, dada uma equação qualquer do segundo grau em  $x$  e  $y$ ,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

será que o conjunto dos pontos  $P$  cujas coordenadas em um certo sistema de base ortonormal,  $(x, y)$ , a satisfazem é, obrigatoriamente, uma cônica?

**Observação:** É importante, nas presentes considerações, que o sistema de coordenadas seja de base ortonormal (ou, pelo menos, que os vetores da base sejam ortogonais e de mesma norma)<sup>1</sup>: nossas equações foram deduzidas usando o fato de que a distância entre dois pontos,  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  é dada por  $|P_2 - P_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

**Exercício 8.6** Confira que, de fato, se a base não for ortonormal (formada por vetores unitários e ortogonais), a distância entre  $P_1$  e  $P_2$  não será, para quaisquer  $P_1$  e  $P_2$ , dada pela fórmula acima. Se os vetores da base forem ortogonais e de mesma norma, a distância é dada por  $|P_2 - P_1| = c\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , com  $c$  igual à norma dos vetores da base.

Fixemos, pois, uma equação do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Há um truque algébrico simples, fácil de interpretar geometricamente, que funciona no caso em que  $B = 0$ . Vamos, pois, começar supondo que  $B = 0$  (e, para que a equação seja, de fato, do segundo grau, que pelo menos um dos dois,  $A$  ou  $C$ , seja não nulo).

Supondo que ambos,  $A$  e  $C$ , sejam não nulos, temos:

$$\begin{aligned} 0 = Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F &= A \left[ x^2 + 2\frac{D}{2A}x + \left(\frac{D}{2A}\right)^2 \right] + \\ &+ C \left[ y^2 + 2\frac{E}{2C}y + \left(\frac{E}{2C}\right)^2 \right] - \left(\frac{D}{2A}\right)^2 - \left(\frac{E}{2C}\right)^2 + F = \\ &= A \left( x + \frac{D}{2A} \right)^2 + C \left( y + \frac{E}{2C} \right)^2 - \left(\frac{D}{2A}\right)^2 - \left(\frac{E}{2C}\right)^2 + F = \\ &= Au^2 + Cv^2 + G, \end{aligned}$$

com

<sup>1</sup>isto é, que os eixos de coordenadas sejam ortogonais e com a mesma escala

$$u = x + \frac{D}{2A}, \quad v = y + \frac{E}{2C}, \quad G = -\left(\frac{D}{2A}\right)^2 - \left(\frac{E}{2C}\right)^2 + F.$$

Geometricamente, a mudança de variáveis que acabamos de fazer, de  $x, y$  para  $u, v$ , corresponde a transladar os eixos para uma nova origem:  $(\frac{D}{2A}, \frac{E}{2C})$ . No novo sistema, é claro, a fórmula da distância se mantém: a distância entre os pontos de coordenadas  $(u_1, v_1)$  e  $(u_2, v_2)$  é  $\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}$ . Assim, as equações das cônicas têm o mesmo aspecto algébrico que tinham no sistema original. Os pontos antes caracterizados por  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  são agora dados por  $Au^2 + Cv^2 + G = 0$ , que é uma equação bem mais familiar: podemos facilmente transformá-la em algo que já conhecemos.

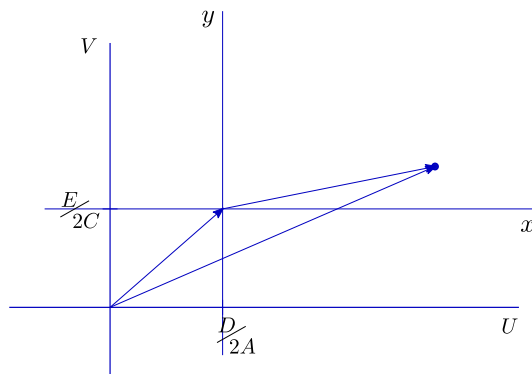


Figura 8.2: translação dos eixos

Dependendo das combinações entre os sinais de  $A$ ,  $C$  e  $G$ , teremos:

- (i)  $A$ ,  $C$  e  $G$  com o mesmo sinal  $\rightarrow$  **conjunto vazio**
- (ii)  $A$  e  $C$  com o mesmo sinal,  $G = 0 \rightarrow$  **ponto**
- (iii)  $A$  e  $C$  com um mesmo sinal,  $G$  com outro  $\rightarrow$  **elipse**
- (iv)  $AC < 0$ ,  $G \neq 0 \rightarrow$  **hipérbole**
- (v)  $AC < 0$ ,  $G = 0 \rightarrow$  **par de retas concorrentes**

**Exercício 8.7** Verifique! Para ajudar, vejamos o caso (iii):  $Au^2 + Cv^2 = -G$  equivale a

$$\frac{A}{-G}u^2 + \frac{C}{-G}v^2 = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

com  $a = \sqrt{\frac{-G}{A}}$ ,  $b = \sqrt{\frac{-G}{C}}$ .

**Exercício 8.8** Note que os casos (iv) e (v) podem ser reescritos como  $\pm(\sqrt{|A|}u)^2 - (\sqrt{|C|}v)^2 = -G$ .

Vejamos, agora, o caso em que, além de  $B = 0$ , temos  $A \neq 0$  e  $C = 0$  ( $A = 0$  e  $C \neq 0$  é análogo). Com o que já aprendemos acima, vamos mais depressa:



$$\begin{aligned} 0 &= Ax^2 + Dx + Ey + F = A \left( x + \frac{D}{2A} \right)^2 + Ey + F - \left( \frac{D}{2A} \right)^2 = \\ &= Au^2 + Ev + G, \end{aligned}$$

com

$$u = x + \frac{D}{2A}, \quad v = y, \quad G = F - \left( \frac{D}{2A} \right)^2.$$

Obtemos, agora, os seguintes casos:

- (i)  $E \neq 0 \rightarrow$  **parábola**
- (ii)  $E = 0, G = 0 \rightarrow$  **uma reta**
- (ii)  $E = 0, AG > 0 \rightarrow$  **conjunto vazio**
- (iv)  $E = 0, AG < 0 \rightarrow$  **par de retas paralelas**

**Exercício 8.9** *Verifique!*

Temos, pois, totalmente sob controle a situação nos casos em que nossa equação do segundo grau não tem termo em  $xy$ : uma simples translação é suficiente para revelar a natureza geométrica do conjunto definido pela equação. Busquemos, agora, lidar com os casos em que o termo em  $xy$  está presente.



# Capítulo 9

## Rodando os eixos

Suponhamos que toda (ou, pelo menos, uma certa) equação do tipo

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

determine uma cônica (ou seja: deve existir uma cônica  $c$  tal que o ponto  $P$  do plano, de coordenadas  $(x, y)$ , está em  $c$  se, e somente se,  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ). Pelo que já vimos, se os eixos de simetria de  $c$  não forem paralelos aos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , uma simples translação dos eixos (que corresponde a mudar as variáveis para  $u = x - x_0$  e  $v = y - y_0$ , colocando a origem em  $P_0 = (x_0, y_0)$ ) não dará conta do recado: a nova equação, referente a nossas novas variáveis, certamente não será de uma das três formas canônicas,

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \quad \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1, \quad v = \frac{1}{4a}u^2,$$

correspondentes, respectivamente, a elipses, hipérbol e parábolas.

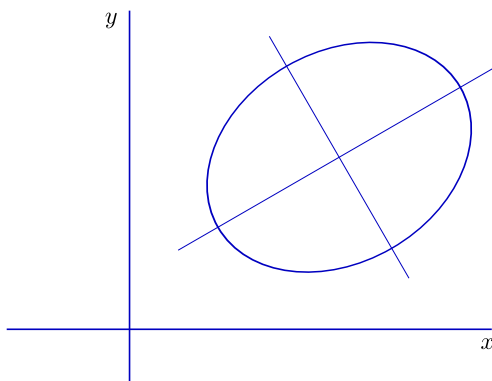


Figura 9.1: cônica em posição geral

Assim, mesmo com todo o otimismo, o melhor que podemos esperar é que, no caso geral, seja preciso operar, além de uma translação, uma rotação dos eixos coordenados. Se, no caso em que  $B = 0$ , a Álgebra guiou nossos passos e nos conduziu até a nova origem do sistema de coordenadas, agora isso parece mais difícil.

**Exercício 9.1** Supondo que  $B \neq 0$ , como determinar a nova origem?

Como, geometricamente, temos duas opções, translação seguida de rotação ou rotação seguida de translação, podemos tentar a segunda estratégia, mesmo se, geometricamente, não parece nada evidente a escolha de um ângulo de rotação adequado. Mais uma vez, o caminho pode ser indicado por considerações algébricas: para que, depois da rotação, tenhamos os eixos paralelos aos eixos de simetria de nossa cônica, é preciso que, depois de rodados os eixos, a equação, nas novas variáveis,  $u$  e  $v$ , não tenha o termo em  $uv$ .

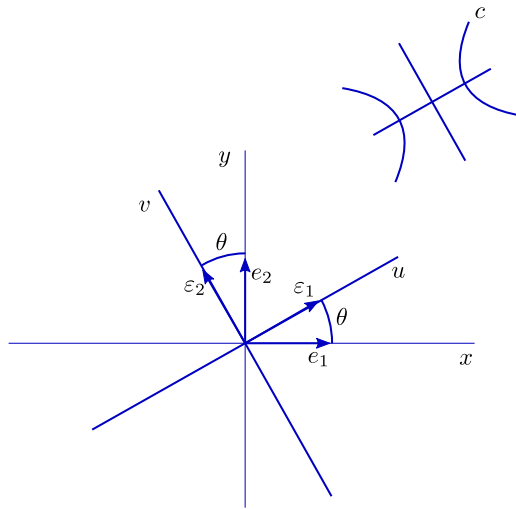


Figura 9.2: rodando os eixos

Ora, rodar os eixos de um ângulo  $\theta$  significa escolher uma nova base ortonormal,  $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , com  $\vec{e}_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$  e  $\vec{e}_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)$ . A relação entre as coordenadas  $(x, y)$  do ponto  $P$ , referentes à base canônica  $\alpha = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , e as coordenadas  $(u, v)$  do mesmo ponto  $P$ , referentes à nova base, é dada por

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2,$$

ou seja,

$$x(1, 0) + y(0, 1) = u(\cos \theta, \sin \theta) + v(-\sin \theta, \cos \theta).$$

Trocando em miúdos, temos as expressões:

$$\begin{cases} x = u \cos \theta - v \sin \theta \\ y = u \sin \theta + v \cos \theta, \end{cases}$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Portanto, as coordenadas  $(x, y)$  do ponto  $P$  satisfarão a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se, e somente se, suas coordenadas  $(u, v)$ , referentes ao sistema de eixos rodado de  $\theta$ , satisfizerem

$$A(u \cos \theta - v \sin \theta)^2 + B(u \cos \theta - v \sin \theta)(u \sin \theta + v \cos \theta) + C(u \sin \theta + v \cos \theta)^2 + \\ + D(u \cos \theta - v \sin \theta) + E(u \sin \theta + v \cos \theta) + F = 0.$$

O que acabamos de obter é a equação daquilo que supomos ser uma cônica (mas ainda não provamos) no sistema de coordenadas  $Ouv$ . Como tudo depende de conseguirmos  $\theta$  tal que o termo em  $uv$  se anule, basta fazer as contas para concluir que o que queremos é

$$2(C - A) \cos \theta \sin \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0.$$

Como  $2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta$  e  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ , é suficiente escolher um valor de  $\theta$  que corresponda a

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C}.$$

Como  $B$  é não nulo, podemos achar um tal  $\theta$  entre  $0$  e  $2\pi$  (o caso  $A = C$  é resolvido trivialmente, fazendo  $\theta = \pi/4$ ). Para provar que nossa equação do segundo grau determina uma cônica não precisamos levar os cálculos às últimas consequências, mas, caso queiramos implementar um algoritmo que explicita todas as características da curva, podemos precisar de nossos vetores  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$ .

**Exercício 9.2** Mostre que, para  $\theta$  entre  $0$  e  $\pi$ ,  $\cos 2\theta$  tem o sinal de  $\tan 2\theta$  e

$$\cos 2\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\theta}} = \pm \frac{A - C}{\sqrt{(A - C)^2 + B^2}}.$$

**Exercício 9.3** Obtenha  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$  em função de  $A, B$  e  $C$ .

Pelo que acabamos de mostrar, é sempre possível, dada uma equação do segundo grau em  $x$  e  $y$ , fazer mudança de variáveis, correspondente a rodar o sistema de coordenadas, de forma que a equação, devidamente traduzida para as novas variáveis,  $u$  e  $v$ , seja ainda do segundo grau mas não tenha termo em  $uv$ . Como já havíamos provado que, neste último caso, o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a equação é uma cônica, temos um teorema.

**Teorema:** Sejam  $A, B, C, D, E$  e  $F$  números reais, não todos nulos. Seja, fixado um sistema de coordenadas canônico para o plano,

$$c = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \right\}.$$

Então o conjunto dos pontos  $P$  do plano cujas coordenadas  $(x, y)$  estão em  $c$  é uma cônica (eventualmente, degenerada):

- (i) elipse, ponto ou conjunto vazio;
- (ii) parábola, reta, par de retas paralelas ou conjunto vazio;
- (iii) hipérbole ou par de retas concorrentes.

**Exercício 9.4** *Juntando os conhecimentos acumulados neste e nos capítulos anteriores, elabore um algoritmo (e implemente-o no computador) que, dados os números reais  $A, B, C, D, E$  e  $F$ , determine exatamente que tipo de conjunto é dado pela equação  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ . Nos casos não degenerados, devem também ser determinados focos, diretrizes,, excentricidade e outras características relevantes. O programa de computador deve, ainda, desenhar a cônica.*

# Capítulo 10

## Cônicas e equações do segundo grau

O teorema do capítulo anterior tem um alcance maior do que pode, a primeira vista, parecer. Como estávamos preocupados em usar a fórmula da distância entre pontos em termos das coordenadas, limitamo-nos a mudanças de coordenadas em que as bases (original e modificada) fossem ortonormais. Faremos, agora, uma constatação meramente algébrica.

**Proposição:** Se o subconjunto  $c$  do plano é caracterizado, em um certo sistema de coordenadas, por uma equação do segundo grau, então  $c$  é caracterizado, em qualquer sistema de coordenadas, por equação do segundo grau.

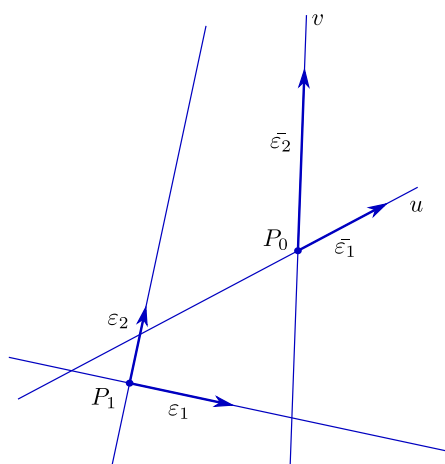


Figura 10.1: sistema de coordenadas qualquer

Demonstração : Suponhamos que temos um sistema de coordenadas, de origem  $O$  e base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  e que  $c$  é o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas,  $(x, y)$ , satisfazem a

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

com  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ . Consideremos um novo sistema de coordenadas, de origem  $O_0$  e base  $\{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2\}$ , com

$$O_o = x_o\vec{e}_1 + y_o\vec{e}_2, \quad \vec{\delta}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2, \quad \vec{\delta}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2.$$

Assim, se  $(u, v)$  são as coordenadas do ponto  $P$  no novo sistema, suas coordenadas,  $(x, y)$ , no sistema original serão obtidas de

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = O_o + u\vec{\delta}_1 + v\vec{\delta}_2 = x_o\vec{e}_1 + y_o\vec{e}_2 + u(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2) + v(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2).$$

Assim,

$$\begin{cases} x = x_o + a_{11}u + a_{12}v \\ y = y_o + a_{21}u + a_{22}v. \end{cases}$$

Como  $x$  e  $y$  são funções do primeiro grau em  $u$  e  $v$ , é evidente que, substituindo na equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

teremos uma equação do segundo grau em  $u$  e  $v$ .<sup>1</sup> Mais precisamente  $P$  estará em  $c$  se, e somente se, suas coordenadas  $(u, v)$ , referentes ao novo sistema, satisfizerem

$$\bar{A}u^2 + \bar{B}uv + \bar{C}v^2 + \bar{D}u + \bar{E}v + \bar{F} = 0,$$

com

$$\begin{cases} \bar{A} = Aa_{11}^2 + Ba_{11}a_{21} + Ca_{21}^2 \\ \bar{B} = 2Aa_{11}a_{12} + B(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) + 2Ca_{21}a_{22} \\ \bar{C} = Aa_{12}^2 + Ba_{21}a_{22} + Ca_{22}^2. \end{cases}$$

Resta provar que  $\bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2 \neq 0$ , mas as contas não parecem nada bonitas. Podemos, porém, observar que das expressões acima segue  $A^2 + B^2 + C^2 = 0 \Rightarrow \bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2 = 0$  e que a situação é perfeitamente simétrica: se tivéssemos  $\bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2 = 0$ , teríamos  $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ , contradizendo uma de nossas hipóteses. ■

Como consequência, se  $c$  é caracterizada, em um certo sistema de coordenadas (sem a hipótese de ortonormalidade da base), por uma equação do segundo grau, então  $c$  é caracterizada, no sistema canônico, por uma equação do segundo grau. Logo,  $c$  é uma cônica. Isto merece a pompa e ser, pelo menos, chamado de

**Corolário:** Sejam  $A, B, C, D, E$  e  $F$  números reais, pelo menos um dos quais é não nulo,  $O_o$  um ponto do plano,  $\vec{e}_1$  &  $\vec{e}_2$  dois vetores linearmente independentes. Seja

$$c = \left\{ O_o + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \right\}.$$

Então  $c$  é uma cônica (possivelmente degenerada).

<sup>1</sup>Note que, se a equação em  $x, y$  fosse do primeiro grau, a correspondente equação em  $u, v$  também seria do primeiro grau



# Capítulo 11

## Imagem de cônica por transformação linear

Consideremos a seguinte questão: dadas uma transformação linear,

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

e uma cônica  $c$  em  $\mathbb{R}^2$ , o que podemos dizer sobre  $T(c)$ ?

Suponhamos que  $T$  é uma bijeção, isto é, os vetores da base canônica,  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$ , são levados em dois vetores,  $\vec{\epsilon}_1 = T\vec{e}_1$  e  $\vec{\epsilon}_2 = T\vec{e}_2$ , linearmente independentes. Ora, como

$$\begin{aligned} c &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \right\} = \\ &= \left\{ x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \right\}, \end{aligned}$$

temos

$$T(c) = \left\{ x\vec{\epsilon}_1 + y\vec{\epsilon}_2 \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \right\}.$$

Nosso resultado do capítulo anterior se aplica diretamente:  $T(c)$  é uma cônica. Mas há algo mais a ser dito, já que  $T$  é um **isomorfismo** (isto é, uma transformação linear bijetiva). Como  $T$  preserva retas e paralelismo (isto é: se  $r$  é uma reta, então  $T(r)$  é uma reta; se  $r_1$  é paralela a  $r_2$ , então  $T(r_1)$  é paralela a  $T(r_2)$ ), é imediato que, pelo menos nos casos degenerados,  $T(c)$  é uma cônica da mesma natureza que  $c$ :

- (i)  $c = \phi$  se, e somente se,  $T(c) = \phi$ ;
- (ii)  $c$  se reduz a um ponto se, e somente se, também  $T(c)$  é um ponto;
- (iii) se  $c$  é uma reta se, e somente se,  $T(c)$  é uma reta;
- (iv) se  $c$  é um par de retas paralelas se, e somente se,  $T(c)$  é par de paralelas;
- (v) se  $c$  é um par de retas concorrentes se, e somente se, idem  $T(C)$ .

Restam, a examinar, os casos em que  $c$  é não degenerada: poderia, por acaso, uma transformação linear bijetiva transformar uma elipse em uma parábola, ou uma parábola em uma hipérbole? Analisemos a situação de um ponto de vista geométrico-topológico.

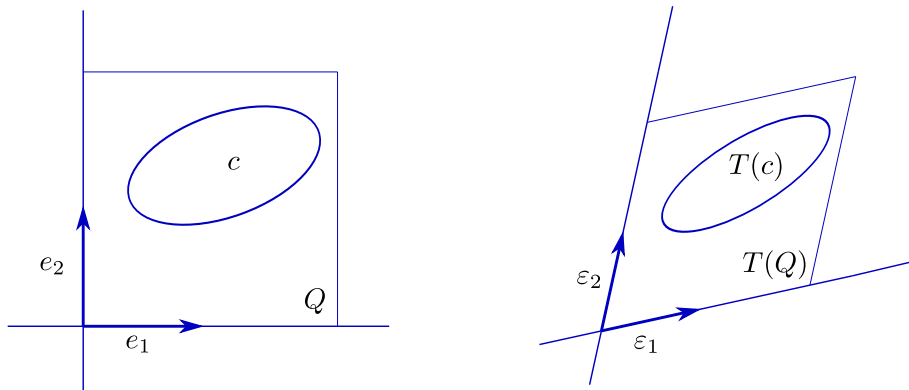


Figura 11.1: elipses são limitadas

(1) Elipses são limitadas, parábolas e hipérbolas, não.

Se  $c$  é uma elipse, então  $c$  está dentro de algum quadrado  $Q$ , o que significa que  $T(c)$  estará dentro do paralelogramo  $T(Q)$ ;  $T(c)$  é, portanto, limitada. Como as únicas cônicas limitadas são elipses, pontos e o conjunto vazio (e, como vimos, ponto e conjunto vazio não podem ser imagem de  $c$  por  $T$ ), concluímos que  $T(c)$  é uma elipse.

Pelo mesmo raciocínio se  $c$  é uma hipérbole ou uma parábola, sua imagem,  $T(c)$ , não pode ser limitada, pois, nesse caso,  $c = T^{-1}(T(c))$  teria que ser limitada.

(2) Hipérbolas têm dois ramos, parábolas só têm um.

Pelos casos anteriormente estudados, podemos concluir que, para  $c$  hipérbole ou parábola, só restam as possibilidades  $T(c)$  hipérbole ou parábola. Mas não há como imaginar que uma transformação contínua do plano possa fazer com que uma curva conexa, como a parábola, venha a virar uma hipérbole, que não é conexa.

Para uma demonstração um pouco mais rigorosa, suponhamos que  $c$  é uma parábola e fixemos um sistema de coordenadas com um dos eixos na diretriz de  $c$  e o outro no eixo de simetria.

Podemos, então, tomar uma base ortonormal,  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , com  $\vec{e}_1$  na direção da diretriz de  $c$ , de forma que os pontos de  $c$  sejam da forma

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y = x^2 > 0.$$

Note que  $c$  está inteiramente contida no semiplano definido por  $y > 0$  (na nossa figura, está do lado de cima de  $r$ , correspondente a  $y > 0$ ). Assim, como  $T(r)$  é uma reta, a imagem por  $T$  de  $c$ ,  $T(c)$ , estará toda de um dos lados de  $T(r)$  (os pontos de  $T(c)$  estarão, todos, no semiplano dos  $xT\vec{e}_1 + yT\vec{e}_2$ , com  $y > 0$ ).

Imaginemos, agora, que  $T(c)$  seja uma hipérbole,  $h$ , de assíntotas  $r_1$  e  $r_2$ . É certo que pelo menos uma das duas (digamos que seja  $r_2$ ) não pode estar, toda, do mesmo lado

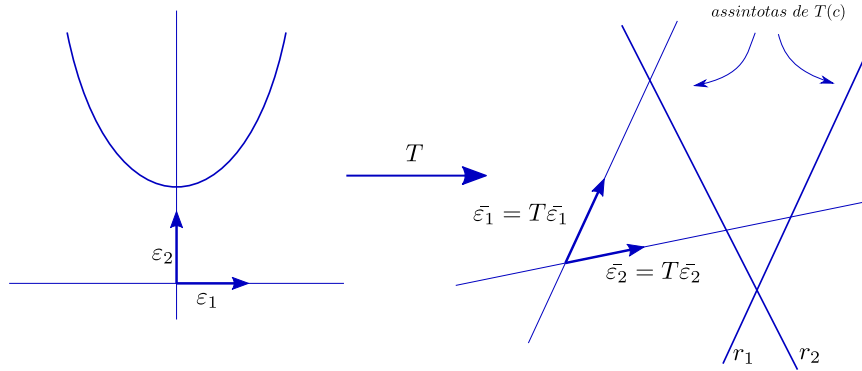


Figura 11.2: parábolas não viram hipérboles

em relação a  $T(r)$  (ou seja,  $r_2$  tem pontos  $xT\bar{\epsilon}_1 + yT\bar{\epsilon}_2$ , tanto com  $y > 0$  como com  $y < 0$ ). Como nossa hipérbole é assintótica a  $r_2$ ,  $h$  tem, também, pontos dos dois lados em relação a  $T(r)$ . Mas, então,  $T(c)$  não pode ser  $h$ , já que, como vimos, seus pontos são da forma  $xT\bar{\epsilon}_1 + yT\bar{\epsilon}_2$ , com  $y > 0$ .

Ora, se  $T(c)$  não pode ser uma hipérbole, só lhe resta a opção de ser uma parábola. Da mesma forma, se  $c$  for uma hipérbole, o mesmo argumento, com  $T^{-1}$  no lugar de  $T$  e  $T(c)$  no lugar de  $c$ , mostra que  $T(c)$  será, forçosamente, uma hipérbole. Acabamos, pois, de demonstrar a proposição a seguir.

**Proposição:** Se  $E$  e  $F$  são planos (ou seja, com um pouco mais de estrutura,  $E$  e  $F$  são espaços vetoriais de dimensão 2, com produto interno),  $T : E \rightarrow F$  é linear & bijetiva e  $c$  é uma cônica em  $E$ , então  $T(c)$  é uma cônica do mesmo tipo que  $c$ .

**Exercício 11.1** Sejam  $E$  um espaço vetorial com produto interno e  $\bar{\epsilon}_1$  &  $\bar{\epsilon}_2$  uma base de  $E$ . Mostre que

$$c_1 = \{ \cos \theta \bar{\epsilon}_1 + \sin \theta \bar{\epsilon}_2, \theta \in [0, 2\pi) \}$$

é uma elipse e que

$$c_2 = \{ \sinh t \bar{\epsilon}_1 \pm \cosh t \bar{\epsilon}_2, t \in \mathbb{R} \}$$

é uma hipérbole. Se  $\bar{\epsilon}_1 = (a_{11}, a_{21})$  e  $\bar{\epsilon}_2 = (a_{12}, a_{22})$ , determine os eixos de simetria de  $c_1$  e de  $c_2$ . Mostre que  $c_1$  é um círculo se, e somente se,  $\bar{\epsilon}_1$  e  $\bar{\epsilon}_2$  são ortogonais e têm a mesma norma.

**Exercício 11.2** Suponha que a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é tal que  $T(\mathbb{R}^2)$  tem dimensão 1 (isto é,  $T\bar{\epsilon}_1$  e  $T\bar{\epsilon}_2$  são linearmente dependentes, mas não simultaneamente nulos). Seja  $c$  uma cônica em  $\mathbb{R}^2$ . Mostre que  $T(c)$  é uma cônica degenerada, no seguinte sentido:

- (i)  $c = \emptyset \Rightarrow T(c) = \emptyset$
- (ii)  $c$  é um ponto  $\Rightarrow T(c)$  é um ponto
- (iii)  $c$  é uma elipse  $\Rightarrow T(c)$  é um segmento de reta (fechado)
- (iv)  $c$  é uma reta  $\Rightarrow T(c)$  é um ponto ou uma reta
- (v)  $c$  é um par de retas paralelas  $\Rightarrow T(c)$  é um par de pontos ou uma reta
- (vi)  $c$  é uma parábola  $\Rightarrow T(c)$  é uma reta ou uma semirreta (com a extremidade)
- (vii)  $c$  é um par de retas concorrentes  $\Rightarrow T(c)$  é uma reta

(viii)  $c$  é uma hipérbole  $\Rightarrow T(c)$  é uma reta, uma reta menos um ponto ou um par de semirretas (com mesma reta suporte), extremidades incluídas

Dê exemplos mostrando que cada um dos casos pode, de fato, ocorrer.

# Capítulo 12

## Cônicas em perspectiva

Vastamente desenvolvida pelos pintores, a partir do Renascimento, para a representação em um plano de figuras espaciais, a **Perspectiva Cônica** será tratada aqui de forma analítica, com as ferramentas algébricas e computacionais de que dispomos. Crucial na computação gráfica, é desnecessário que nos alonguemos sobre sua importância. O propósito do presente capítulo é bem específico: estudar as possíveis vistas, em perspectiva, de uma cônica.

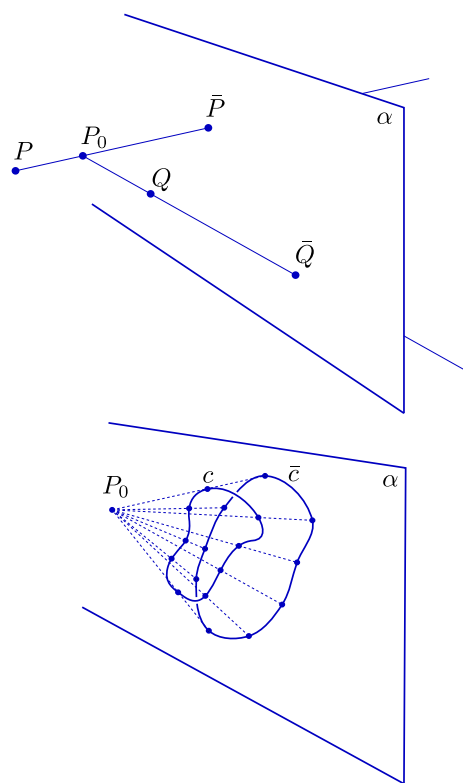
### a Uma abordagem direta

Fixemos um plano,  $\alpha$  (também dito **quadro**), sobre o qual serão projetados todos os pontos do espaço (à exceção de um segundo plano,  $\alpha_0$ , a ser caracterizado), e um ponto não pertencente a  $\alpha$ ,  $P_0$  (dito **ponto de vista**). Trata-se de associar, a cada ponto  $Q$  do espaço, o ponto  $\bar{Q}$ , de  $\alpha$ , dado pela interseção com  $\alpha$  da reta  $P_0Q$ . Evidentemente,  $Q$  não poderá estar no plano  $\alpha_0$  que passa por  $P_0$  e é paralelo a  $\alpha$  (chamaremos  $\alpha_0$  de **plano cego**).

É claro que, se  $c$  é uma curva, a vista de  $c$  em perspectiva,  $\bar{c}$ , será dada pela interseção com  $\alpha$  do cone de diretriz  $c$  e vértice  $P_0$ .

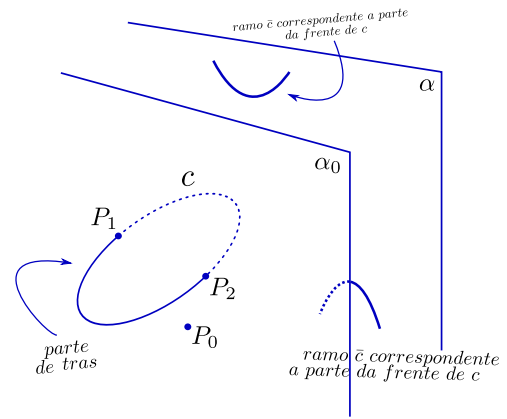
Note que, se  $c$  atravessa  $\alpha_0$ , os pontos da interseção, isto é, os que estão em  $\alpha_0 \cap c$ , *vão parar no infinito*. Por exemplo, se  $c$  é um círculo e corta  $\alpha_0$  em dois pontos,  $\bar{c}$  terá dois *ramos*: um correspondendo à parte de  $c$  que está à *frente* de  $\alpha_0$ , o outro correspondendo à parte que está *atrás*.

**Exercício 12.1** *Visualize!*



**Exercício 12.2** Seja  $c$  um círculo. Tente visualizar  $\bar{c}$  e observar as seguintes possibilidades para o tipo de curva com que  $\bar{c}$  se parece (verifique se existe mais alguma):

- (i) uma elipse;
- (ii) uma parábola;
- (iii) uma hipérbole;
- (iv) um segmento de reta;
- (v) uma reta;
- (vi) uma semirreta, com a extremidade;
- (vii) uma reta menos um ponto;
- (viii) um par de semirretas de mesma reta suporte, incluídas as extremidades.



Quando falamos, no exercício acima, em *tipo de curva com que  $\bar{c}$  se parece*, estamos tendo em conta o fato de que, até agora, só estudamos seções planas de cones circulares retos. Na vista em perspectiva, mesmo de um círculo, aparecem casos que não tratamos (cilindros circulares oblíquos). Nosso poderoso teorema de classificação de curvas do segundo grau, porém, dá conta do recado nos casos em que a curva  $c$  é uma cônica.

**Exercício 12.3** Entenda que a situação tem uma certa reciprocidade. Suponha dados dois planos,  $\alpha$  &  $\beta$ , e um ponto,  $P_0$ , preferencialmente (mas não necessariamente) fora de  $\alpha \cup \beta$ . Então, dada uma curva  $c$  em  $\alpha$ , obtemos o cone  $\mathcal{C}$  de diretriz  $c$  e vértice  $P_0$  e a curva  $\bar{c}$ , imagem de  $c$  pela projeção, interseção entre  $\mathcal{C}$  e  $\beta$ . Observe que, reciprocamente, o cone  $\mathcal{C}$  pode ser obtido a partir da diretriz  $\bar{c}$  e do vértice  $P_0$ ; nesse caso,  $c$  será obtida como interseção entre  $\mathcal{C}$  e  $\alpha$ . Observe que pode haver uns probleminhas: se  $\alpha_0$  é o plano paralelo a  $\alpha$  & passando por  $P_0$ , e  $\beta_0$  é o plano paralelo a  $\beta$  & passando por  $P_0$ , então os pontos de  $\alpha \cap \beta_0$  não se projetam em  $\beta$ , assim como os de  $\beta \cap \alpha_0$  não são imagens de pontos de  $\alpha$  pela projeção.

Tendo em vista o grau de complexidade da demonstração geométrica de que a interseção entre um cone circular reto e um plano é uma **cônica** (curva satisfazendo a relação *distância a um foco dividida pela distância a uma diretriz igual a constante*), a proposição a seguir impressiona: nela, estabelecemos que é também uma cônica a interseção entre um cone (não degenerado, mas não necessariamente reto), tendo por diretriz uma cônica, e um plano.

**Proposição:** Sejam  $\alpha$  um plano,  $P_0$  um ponto fora de  $\alpha$  e  $c$  uma cônica em  $\alpha$ . Seja  $\mathcal{C}$  o cone tendo por geratrizes as retas ligando  $P_0$  aos pontos de  $c$ . Seja  $\beta$  um outro plano ao qual não pertence  $P_0$  e seja  $\bar{c} = \beta \cap \mathcal{C}$ . Então  $\bar{c}$  é: uma cônica, uma cônica menos um ponto ou uma cônica menos dois pontos.

**Demonstração :** Começemos nos colocando em  $\mathbb{R}^3$  e fixando como  $\alpha$  o plano  $z = 0$ . Nossa cônica,  $c$ , é, portanto, caracterizada pelas equações

$$\begin{cases} z = 0 \\ Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \end{cases}$$

sendo  $A, B, C, D, E, F$  números reais quaisquer, apenas com a restrição  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ . O plano  $\beta$  será dado por

$$\beta = \{P_1 + u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2, (u, v) \in \mathbb{R}^2\},$$

com

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{e}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}), \quad \vec{e}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}).$$

Nosso objetivo é, sabendo que os pontos  $Q = (x, y, 0)$  da cônica  $c$  satisfazem a equação (em  $x, y$ )

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

obter uma equação (nas variáveis  $u, v$ ) para os correspondentes pontos  $\bar{Q}$  de  $\bar{c}$ . O caminho passa por expressar  $x$  e  $y$  em função de  $u$  e  $v$ . Suponhamos, pois, que o ponto  $\bar{Q} = P_1 + u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2$  corresponda ao ponto  $Q = (x, y, 0)$  de  $c$ . A reta  $P_0\bar{Q}$  é dada por

$$P_0\bar{Q} = \{P_0 + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) + tu(a_{11}, a_{21}, a_{31}) + tv(a_{12}, a_{22}, a_{32}), t \in \mathbb{R}\},$$

de forma que, fazendo com que a terceira coordenada se anule, obtemos

$$z_0 + t(z_1 - z_0 + a_{31}u + a_{32}v) = 0,$$

$$t = -\frac{z_0}{z_1 - z_0 + a_{31}u + a_{32}v}.$$

Assim, o correspondente ponto  $Q = (x, y, 0)$  é dado por

$$x = x_0 - \frac{z_0}{z_1 - z_0 + a_{31}u + a_{32}v}(x_1 - x_0 + a_{11}u + a_{12}v) \quad (1)$$

$$y = y_0 - \frac{z_0}{z_1 - z_0 + a_{31}u + a_{32}v}(y_1 - y_0 + a_{21}u + a_{22}v) \quad (2)$$

Note que as contas acima vigoram apenas sob a hipótese  $z_1 - z_0 + a_{31}u + a_{32}v \neq 0$ . O caso  $z_1 - z_0 + a_{31}u + a_{32}v = 0$  equivale a

$$z_1 + a_{31}u + a_{32}v = z_0,$$

que corresponde à interseção entre os planos  $\beta$  e  $\alpha_0 = \{(x, y, z) \mid z = z_0\}$  (note que  $\alpha_0$  é o plano cego, paralelo a  $\alpha$  e passando por  $P_0$ ). Assim,  $r$  pode ser: (i) uma reta, (ii) um plano, ou (iii) o conjunto vazio. No caso (ii),  $\beta$  passa por  $P_0$  e é paralelo ao plano  $\alpha$ , que contém  $c$ . Assim,  $C \cap \beta = \{P_0\}$ . No caso (iii),  $\beta$  é paralelo a  $\alpha$  mas não passa por  $P_0$ ; é visível que  $\bar{c}$  é obtida de  $c$  por uma homotetia (e é, portanto, uma cônica semelhante a  $c$ ).

Suponhamos, pois, que  $r = \beta \cap \alpha_0$  seja uma reta. As expressões 10.1 e 10.2 nos dizem que existem números reais  $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  tais que  $\bar{Q} = P_1 + u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2$  está em  $\bar{c}$  se, e somente se,  $au + bv + c \neq 0$  e o correspondente  $Q$ , em  $c$ , é da forma  $(x, y, 0)$ , com

$$x = \frac{a_1u + b_1v + c_1}{au + bv + c}, \quad y = \frac{a_2u + b_2v + c_2}{au + bv + c}.$$

Assim,  $\bar{Q}$  está em  $\bar{c}$  se, e somente se  $au + bv + c \neq 0$  e

$$A \left( \frac{a_1u + b_1v + c_1}{au + bv + c} \right)^2 + B \left( \frac{a_1u + b_1v + c_1}{au + bv + c} \right) \left( \frac{a_2u + b_2v + c_2}{au + bv + c} \right) + C \left( \frac{a_2u + b_2v + c_2}{au + bv + c} \right)^2 + D \left( \frac{a_1u + b_1v + c_1}{au + bv + c} \right) + E \left( \frac{a_2u + b_2v + c_2}{au + bv + c} \right) + F = 0.$$

Multiplicando por  $(au + bv + c)^2$ , obtemos uma equação do segundo grau em  $u$  e  $v$  e concluímos que  $\bar{Q} = P_1 + u\bar{e}_1 + v\bar{e}_2$  está em  $\bar{c}$  se, e somente se,  $u$  e  $v$  satisfazem a uma certa equação do segundo grau:

$$A_1u^2 + B_1uv + C_1v^2 + D_1u + E_1v + F_1 = 0$$

(o que significa que  $\bar{c}$  está contida em uma cônica), mas não a uma outra certa equação do primeiro grau (o que significa que os únicos pontos da cônica a excluir são os da reta  $r$ ). Ora, o número de pontos a excluir corresponde ao número de pares ordenados  $(u, v)$  satisfazendo a

$$\begin{cases} au + bv + c = 0 \\ A_1u^2 + B_1uv + C_1v^2 + D_1u + E_1v + F_1 = 0, \end{cases}$$

no máximo, dois. ■

**Escólio:** É importante compreender que os pontos da reta  $r$  são, precisamente, aqueles pontos de  $\beta$  que correspondem aos pontos de  $\alpha$  que estão *no infinito*. Ora, as únicas cônicas com pontos no infinito são as retas (1 ponto), pares de retas paralelas (1 ponto), retas concorrentes (2 pontos), hipérbolas (2 pontos) e parábolas (1 ponto).<sup>1</sup> Assim, se  $c$  é, por exemplo, uma parábola, é possível que  $\bar{c}$  seja uma elipse tangente a  $r$ , excluindo o ponto de tangência,  $\bar{Q}_\infty$ , que corresponde ao ponto de  $c$  que está *no infinito*. Reciprocamente, consideremos a reta  $s$  de  $\alpha$  dada por  $s = \beta_o \cap \alpha$  (lembrando que  $\beta_o$  é o plano paralelo a  $\beta$  e passando por  $P_o$ ). Aos pontos de  $s$  não corresponde qualquer ponto de  $\beta$ , ou seja: se  $Q$  é um ponto de  $s$ , então  $\bar{Q}$  estará *no infinito* de  $\beta$ . Isso significa que  $\bar{c}$  é uma cônica ilimitada sempre que  $c \cap s \neq \emptyset$ . Existe, ainda, em  $\alpha$ , um ponto que está *no infinito* e ao qual corresponde, em  $\beta$ , um ponto no infinito: é o ponto correspondente à direção de  $s$ .

O termo técnico para designar os *pontos no infinito* é **pontos impróprios**. A cada feixe de retas paralelas (no plano ou no espaço) corresponde um ponto impróprio. Se acrescentarmos ao plano seus pontos impróprios, obtemos o **plano projetivo**; acrescentando ao espaço seus pontos impróprios, obtemos o **espaço projetivo**.

**Exercício 12.4** Faça  $P_o = (0, 0, 1)$  e  $\beta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y\}$ , mantendo  $\alpha$  definido por  $z = 0$ . Então a reta  $r$  é definida por  $z = y = 1$  e a reta  $s$  por  $z = 0$  e  $y = -1$ . Seja  $s_1$  uma reta em  $\alpha$ , não paralela a  $s$ . Observe que, se um ponto  $Q$  sai caminhando sobre  $s$  em direção ao infinito (para um lado ou para o outro, tanto faz), o ponto  $\bar{Q}$ , interseção com  $\beta$  da reta  $P_oQ$  caminha, sobre a reta interseção com  $\beta$  do plano definido por  $P_o$  e  $s_1$ , em direção ao ponto  $Q_\infty$  interseção com  $\beta$  da reta paralela a  $s_1$  passando por  $P_o$ . Note que a paralela a  $s_1$  passando por  $P_o$  está em  $\alpha_o$ , conclua que  $Q_\infty$  está em  $r$ . Observe que o ponto  $Q_\infty$  é sempre o mesmo, qualquer que seja a paralela a  $s_1$  considerada.  $Q_\infty$  é chamado de **ponto de fuga**

<sup>1</sup>Como exemplo, se um ponto  $Q$  caminha, sobre uma reta  $s$  de  $\alpha$ , em direção ao infinito, sua projeção sobre  $\beta$ ,  $\bar{Q}$ , caminha sobre  $\bar{s}$  em direção ao ponto (impróprio) em que  $\bar{s}$  encontra  $r$



da direção correspondente ao feixe de retas paralelas a  $s_1$ . Note, por outro lado, que, se  $Q$  caminha, ainda sobre  $s_1$ , na direção do ponto interseção entre  $s_1$  e  $s$ , o correspondente  $\bar{Q}$ , em  $\alpha$ , vai para infinito (em um sentido ou em outro, conforme nos aproximamos de  $s$  por um lado ou pelo outro). Observe que uma hipérbole tem dois pontos no infinito (um para cada assíntota), mas que um deles pode não corresponder a qualquer ponto de  $r$ . Estude o caso da parábola  $y = x^2$  e mostre que, se  $Q = (x, x^2)$  e  $\bar{Q}$  é o ponto correspondente em  $\beta$ , então

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \bar{Q} = (0, 1, 1).$$

**Exercício 12.5** Suponha dados um ponto de vista,  $P_o$ , um plano (quadro)  $\beta$ , com  $P_o \notin \beta$ , e um plano  $\alpha$ , com  $P_o \in \alpha$ . Suponha que  $c$  é uma cônica,  $c \subset \alpha$ . Estude todas as possibilidades para a vista em perspectiva,  $\bar{c}$ , de  $c$  em  $\beta$ .

## b Reenunciando e redemonstrando

Talvez não tenha ficado bem claro, mas a moral da história é a seguinte: a vista em perspectiva de uma cônica é uma cônica. Há duas nuances a considerar: a primeira diz respeito à possibilidade de que nossa cônica esteja em um plano,  $\alpha$ , passando pelo ponto de vista,  $P_o$ , caso em que todo o plano (à exceção da reta paralela ao quadro e passando pelo ponto de vista) se projeta sobre a reta interseção entre  $\alpha$  e o quadro; a segunda diz respeito aos pontos da projeção que correspondem aos pontos impróprios da cônica projetada - como os pontos impróprios (dois, no máximo), tecnicamente, *não existem*, suas projeções *ficam faltando*.

Aproveitaremos o momento para dar uma segunda demonstração da proposição.

**Proposição:** A vista em perspectiva de uma cônica situada em um plano que não contém o ponto de vista é uma cônica da qual foram excluídos, no máximo, dois pontos.

Demonstração : Vamos começar escolhendo um sistema de coordenadas em que o plano da cônica,  $\alpha$ , seja gerado pelos vetores  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$ , da base ortonormal  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , ou seja, em coordenadas:  $\alpha = \{(x, y, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ . Nosso ponto de vista,  $P_o$ , não está em  $\alpha$  nem, é claro, no plano do quadro,  $\beta$ . Consideremos, pois, uma cônica,  $c$ , em  $\alpha$ . Começemos examinando, em separado, os casos em que  $c$  é degenerada: ponto, reta, par de retas paralelas, par de retas concorrentes, conjunto vazio. Os casos em que  $c$  é um ponto ou o conjunto vazio são simples (no caso de ponto,  $c = \{P_1\}$ , por exemplo,  $\bar{c}$  é a interseção entre a reta  $P_oP_1$  e o plano  $\beta$ , que é um ponto ou o conjunto vazio). Para os casos de retas, note que o cone  $\mathcal{C}$ , obtido ligando  $P_o$  aos pontos de uma reta  $r$  de  $\alpha$ , é um plano, do qual se exclui a reta paralela a  $r$  e passando por  $P_o$ , à exceção de  $P_o$ , que fica em  $\mathcal{C}$ ; a interseção entre  $\mathcal{C}$  e  $\beta$  (que não contém  $P_o$ ) é uma reta ou uma reta menos um ponto.

Passemos aos casos realmente interessantes, em que  $c$  é não degenerada: elipse, parábola ou hipérbole. Fixemos  $c$  em  $\alpha$  e, passo importante, tomemos um cone circular reto,  $\mathcal{K}$ , tal que  $c = \alpha \cap \mathcal{K}$ . Como  $c$  é não degenerada, o vértice de  $\mathcal{K}$ ,  $V$ , não está em  $\alpha$ . Note que  $\mathcal{K}$  pode diferir do cone  $\mathcal{C}_1$ , de vértice  $V$ , que tem por diretriz  $c$ : se  $c$  for uma parábola,  $\mathcal{C}_1$  é obtido de  $\mathcal{K}$  pela

exclusão de uma geratriz; se  $c$  for uma hipérbole, obtemos  $\mathcal{C}_1$  pela exclusão de duas geratrizes de  $\mathcal{K}$  (em ambos os casos, é claro, o vértice  $V$  fica em  $\mathcal{C}_1$ ). Para simplificar eventuais cálculos, fixemos a origem do sistema de coordenadas na projeção ortogonal de  $V$  sobre  $\alpha$ , de modo que  $V = (0, 0, t_0)$ , para um certo  $t_0$  não nulo. Nosso ponto de vista,  $P_o$ , terá coordenadas  $(x_o, y_o, z_o)$ , com  $z_o$  também não nulo. Consideremos a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que deixa fixos os pontos de  $\alpha$  e leva  $V$  em  $P_o$ . Embora não sirva para nada, podemos explicitar a matriz de  $T$ :

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_o/t_0 \\ 0 & 1 & y_o/t_0 \\ 0 & 0 & z_o/t_0 \end{pmatrix}.$$

Importa notar que  $T$  é linear, bijetiva, deixa fixos os pontos de  $c$  e leva  $V$  em  $P_o$ . Como  $T$  leva retas em retas, é, também, uma bijeção entre  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}$ . Agora estamos chegando à reta final: se  $\beta$  é o plano do quadro (de modo que  $\bar{c}$  é a interseção entre  $\mathcal{C}$  e  $\beta$ ), faça  $\gamma = T^{-1}(\beta)$ .

Ora,  $\gamma$  é um plano e não passa por  $V$ ; assim, sua interseção com  $\mathcal{K}$  é, sabemos bem, uma cônica não degenerada (vamos chamá-la de  $k$ ); a interseção de  $\gamma$  com  $\mathcal{C}_1$ ,  $k_1$ , será, portanto, uma cônica da qual se excluam, no máximo, dois pontos (correspondentes às eventuais interseções de  $k$  com geratrizes de  $\mathcal{K}$  que não estejam em  $\mathcal{C}_1$ ). Como  $T(k_1) = \bar{c}$ , o último passo é observar que  $T$  é uma transformação linear bijetiva levando  $\gamma$  em  $\beta$ , de modo que  $T(k)$  é uma cônica (não degenerada) e, portanto,  $\bar{c}$  é uma cônica não degenerada da qual se excluam, no máximo, dois pontos.

Para dar um pouco mais de rigor ao passo final, fica entendido que fixamos, em  $\gamma$ , um sistema de coordenadas de origem em um ponto qualquer,  $O_1$ , e um sistema de coordenadas em  $\beta$  com origem na imagem de  $O_1$  por  $T$ ,  $TO_1 = O_2$ . Assim, cada ponto  $P$  de  $\gamma$  é identificado ao vetor  $\overrightarrow{O_1P}$ , o que identifica  $\gamma$  a um espaço vetorial  $E$ , de dimensão dois; o mesmo é feito em  $\beta$ , usando a origem  $O_2$  e produzindo o espaço vetorial  $F$ , etc. ■

**Escólio:** Observe que nossa demonstração deixa claro que a vista em perspectiva de uma cônica não degenerada, contida em um plano que não passa pelo ponto de vista, é uma cônica não degenerada (da qual se excluem, no máximo, dois pontos).

**Exercício 12.6** *Suponha que o círculo  $c$  e o ponto de vista,  $P_o$ , não estejam no mesmo plano. Seja  $\beta_o$  o plano que passa por  $P_o$  e é paralelo ao quadro. Mostre que a vista em perspectiva de  $c$  será: uma elipse, se  $c \cap \beta_o = \emptyset$ ; uma parábola, se  $c$  e  $\alpha_o$  se tangenciam; e uma hipérbole, se se cortam em dois pontos.*

**Exercício 12.7** *Reproduza, no computador (mostrando no monitor), passo a passo, a demonstração que acabamos de fazer para a proposição.*

## Capítulo 13

### Quantos pontos definem uma cônica?

Como sabemos, dois pontos definem uma reta; por três pontos não colineares passa um único círculo. E uma cônica: quantos pontos são necessários para caracterizar uma cônica?

Podemos partir a questão em duas:

(i) quantos pontos tem, no máximo, a interseção de duas cônicas?

(ii) se a resposta à questão (i) é  $n$ , é verdade que por  $n + 1$  pontos sempre passa uma cônica?

A resposta à primeira questão é: a menos que as duas contenham retas, o número máximo de pontos na interseção de duas cônicas é 4.

A resposta à segunda não tem talvez: por 5 pontos sempre passa uma cônica.

#### a Quantos pontos tem a interseção de duas cônicas?

Começemos com um resultado simples.

**Proposição 1:** Se  $r$  é uma reta e  $c$  é uma cônica que não contém  $r$ , então  $c \cap r$  tem, no máximo, dois pontos.

Demonstração : Escolhendo adequadamente o sistema de coordenadas, podemos supor que  $r$  é dada por  $y = 0$  e  $c$  por  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ . O sistema tem, no máximo, duas soluções, a menos que  $A = D = F = 0$ , caso em que a interseção é  $r$ . ■

Assim, quando uma das cônicas é degenerada e a outra não, o número máximo de pontos na interseção é quatro (o que pode ocorrer se a cônica degenerada é um par de retas, cada uma interceptando a outra cônica em dois pontos). Duas cônicas degeneradas, porém, podem se interceptar em uma reta, ou mesmo em uma reta e mais um ponto fora desta.

No caso em que uma das cônicas é uma parábola, podemos supor que, em coordenadas adequadas, sua equação é

$$y = x^2.$$

Com uma substituição na equação da outra, que suporemos ser

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

caímos em uma equação do quarto grau (em  $x$ ). Como a cada valor de  $x$  corresponderá um único  $y$ , o número de pontos na interseção é, no máximo, quatro.

Caso uma das duas cônicas seja uma hipérbole, podemos, eventualmente mudando coordenadas, supor que sua equação é

$$xy = 1.$$

**Exercício 13.1** Uma primeira mudança de coordenadas, como sabemos, pode nos conduzir a uma equação do tipo

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1.$$

Mostre que a mudança

$$x = \frac{u}{a} + \frac{v}{b}, \quad y = \frac{u}{a} - \frac{v}{b},$$

conduz à equação  $xy = 1$ .

Ora, se o sistema de equações a resolver é

$$\begin{cases} xy = 1 \\ Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \end{cases}$$

basta substituir  $y = 1/x$  na segunda equação e ver que teremos, no máximo, 4 valores para  $x$ , cada um dos quais nos dá um único  $y$ . A proposição a seguir resume o que já temos.

**Proposição 2:** Se  $c_1$  e  $c_2$  são cônicas e  $c_1$  é hipérbole ou parábola, então o número máximo de pontos em  $c_1 \cap c_2$  é quatro.

Demonstração :     ■

Resta o caso de duas elipses, que poderia ser tratado extraindo raízes quadradas. Vamos fazer umas mudanças de coordenadas, para ficar mais bonitinho. Como sabemos, podemos supor que uma das duas tem por equação

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1.$$

Fazendo

$$x = \frac{u}{a}, \quad y = \frac{v}{b},$$

melhoramos para  $x^2 + y^2 = 1$ . Como um círculo é invariante por rotações em torno de seu centro, podemos rodar os eixos até que a outra elipse tenha eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados, de modo que sua equação seja da forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Substituindo  $y^2 = 1 - x^2$  nessa última, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (A - C)x^2 + Dx + Ey + F + C = 0, \end{cases}$$

Se  $E = 0$ , obtemos, na segunda equação, dois valores para  $x$ , no máximo. Substituídos na primeira, cada um nos dará, no máximo, dois pontos, totalizando quatro. Se  $E \neq 0$ , expressamos, na segunda,  $y$  como função de  $x$  (do segundo grau), substituímos na primeira e obtemos uma equação do quarto grau em  $x$ ; cada  $x$  assim obtido nos dará um  $y$ , totalizando, no máximo, quatro pontos.

Podemos resumir nossos resultados em mais uma proposição.

**Proposição 3:** Duas elipses se interceptam em, no máximo, quatro pontos.

Demonstração :     ■

## b Por 5 pontos sempre passa uma cônica

Dos resultados do capítulo anterior, concluímos que, dados 5 pontos, não pode haver duas cônicas diferentes, cada uma delas passando pelos 5, a menos que ambas sejam degeneradas e tenham, pelo menos, uma reta em comum. Mas falta mostrar que, dados 5 pontos quaisquer, em um plano, existe, de fato, uma cônica passando pelos 5.

Fixemos um sistema de coordenadas (canônico, por que não?) e cinco pontos,  $P_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Achar uma cônica  $c$  passando pelos 5 equivale a achar 6 números reais,  $A, B, C, D, E$  e  $F$ , não todos nulos, tais que  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , sejam soluções de

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Ora, cada substituição de  $(x_i, y_i)$  na equação nos dará, na verdade, uma equação em  $A, B, C, D, E$  e  $F$ :

$$Aa_{i1} + Ba_{i2} + Ca_{i3} + Da_{i4} + Ea_{i5} + F1 = 0,$$

com  $a_{11} = x_i^2$ ,  $a_{12} = x_i y_i$ ,  $a_{13} = y_i^2$ ,  $a_{14} = x_i$ ,  $a_{15} = y_i$ .

Escrevendo de outra maneira, temos que  $A, B, C, D, E$  e  $F$  devem, para que a cônica  $c$ , por eles definida, passe por nossos pontos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$ , satisfazer a

$$Au_1 + Bu_2 + Cu_3 + Du_4 + Eu_5 + Fu_6 = 0,$$

com

$$u_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ a_{51} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \\ a_{52} \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \\ a_{53} \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \\ a_{54} \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \\ a_{45} \\ a_{55} \end{pmatrix}.$$

Ah, sim, falta  $u_6$ !

$$u_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ora, mas 6 vetores em  $\mathbb{R}^5$  sempre são linearmente dependentes, ou seja: existem números  $A, B, C, D, E$  e  $F$ , não todos nulos, tais que  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , são soluções de

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Acabamos, pois, de demonstrar a proposição a seguir.

**Proposição 4:** Por cinco pontos do plano sempre passa uma cônica.

Juntando as quatro proposições deste capítulo, podemos ser um pouco mais específicos.

**Corolário:** Suponhamos dados 5 pontos no plano. Então por eles sempre passa uma cônica e:

- (i) se entre eles não há 3 colineares, a cônica é única e não degenerada;
- (ii) se entre eles há 3, mas não 4, colineares, a cônica é exatamente o par de retas reunindo a que passa pelos 3 colineares à que passa pelos outros dois;
- (iii) se entre eles há 4, mas não 5, colineares, a cônica não é única, mas é um par de retas, reunindo a que passa pelos 4 colineares a qualquer outra passando pelo restante;
- (iv) se os 5 são colineares, a cônica tanto pode ser a reta passando pelos 5 como pode ser qualquer par de retas que a contenha.

Demonstração : exercício.     ■

# Capítulo 14

## Diâmetros

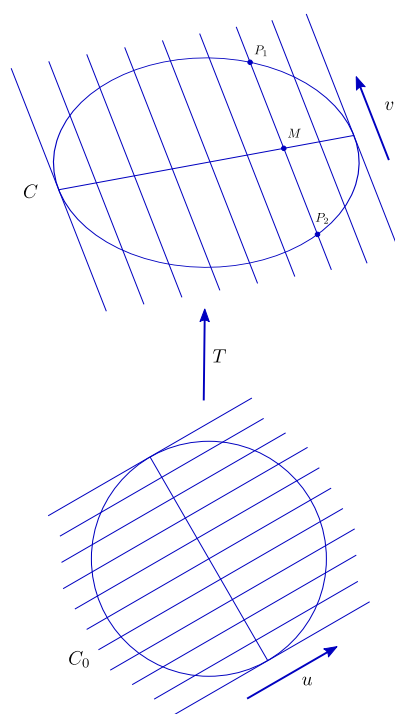
### a Elipses

Consideremos uma elipse e um feixe de retas paralelas. Como já vimos, uma reta corta uma cônica não degenerada,  $c$ , em, no máximo, dois pontos.

Para cada uma das retas de nosso feixe que cortam  $c$  em dois pontos,  $P_1$  e  $P_2$ , consideremos o ponto médio,  $M$ , do segmento  $P_1P_2$  (nos pontos de tangência, convencionaremos que  $M = P_1 = P_2$ ). Será que podemos afirmar que os pontos  $M$  assim obtidos formam um segmento de reta? Sim, facilmente, com um pouquinho de Álgebra Linear! Existe, como sabemos, uma transformação linear bijetiva  $T$ , que leva um círculo,  $c_0$ , em nossa elipse  $c$ . Se  $v$  é um vetor que dá a direção de nosso feixe de paralelas, existe  $u$  tal que  $v = Tu$ . Como transformações lineares levam retas em retas e preservam paralelismo, o feixe de retas de direção  $u$  é transformado por  $T$  no nosso feixe de paralelas a  $v$ . Ora, os pontos médios dos pontos de interseção com  $c_0$  das paralelas a  $u$  formam um diâmetro de  $c_0$  ortogonal a  $u$ . Como transformações lineares preservam pontos médios, a imagem desse diâmetro (que é um segmento de reta) é o conjunto dos pontos médios  $M$  a que nos referimos e é, portanto, um segmento de reta, conhecido como o **diâmetro** associado à direção definida por  $v$ .

**Definição:** Dada, no plano, uma elipse  $c$  e fixada uma direção, consideram-se as retas do plano com aquela direção que cortam  $c$ . O conjunto dos pontos médios dos pares de pontos de interseção (incluindo os pontos de tangência) é o **diâmetro** de  $c$  associado à direção fixada.

Note que um diâmetro sempre passa pelo centro da elipse. Esta definição aparece no início do tratado de Apolônio (nascido por volta de 262 e morto por volta de 200 aC) sobre as cônicas. Se  $d$  é um diâmetro da elipse, Apolônio chama o diâmetro associado à



direção de  $d$  de **diâmetro conjugado** a  $d$ . No caso do círculo, é imediato que diâmetros conjugados são perpendiculares, mas, nas elipses, isto não é, em geral, verdade.

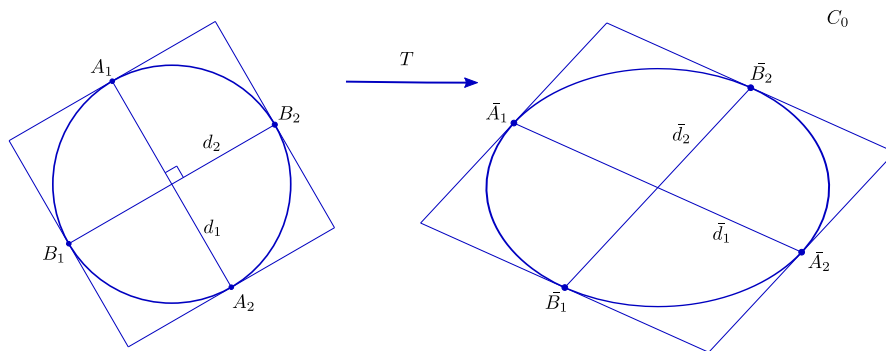


Figura 14.1: um teorema de Apolônio

Considerar uma elipse como imagem de um círculo por uma transformação linear bijetiva torna muitas coisas fáceis, ou mesmo evidentes. A figura acima ilustra o que isso nos dá, no caso dos diâmetros conjugados. Se  $T$  é transformação linear levando o círculo  $c$  na elipse  $\bar{c}$ ,  $T$  leva diâmetros conjugados,  $d_1$  e  $d_2$ , de  $c$ , em diâmetros conjugados,  $\bar{d}_1$  e  $\bar{d}_2$ , de  $\bar{c}$ . Se pelas extremidades de  $d_1$  e  $d_2$  traçamos tangentes a  $c$ , temos um quadrado,  $Q$ , circunscrito a  $c$  (note que a área de  $Q$  independe do par de diâmetros conjugados considerado). A transformação  $T$  leva  $Q$  no paralelogramo  $\bar{Q} = T(Q)$ , circunscrito a  $\bar{c}$  (sim, transformações lineares também preservam tangências). E aqui chegamos a um resultado, demonstrado por Apolônio, que, à primeira vista, não é evidente: a área de  $\bar{Q}$ , que é igual à de  $Q$  multiplicada por  $|\det T|$ , também independe do par de diâmetros conjugados considerado.

**Proposição 1:** Se, pelas extremidades de um par de diâmetros conjugados de uma elipse  $c$ , traçamos tangentes à elipse, obtemos um paralelogramo, circunscrito a  $c$ , cuja área independe do par de diâmetros considerado.

Demonstração : Foi o que acabamos de provar. Note que, de passagem (via círculo), provamos que, se  $d_2$  é conjugado a  $d_1$ , então  $d_1$  é conjugado a  $d_2$ . ■

## b Hipérbolas

Pode ser surpreendente, mas resultados semelhantes aos da seção anterior valem para hipérbolas. Começemos com uma generalização que vale também para parábolas.

**Proposição 2:** Seja  $c$  uma cônica não degenerada e considere um feixe de retas com a mesma direção. Tome, de cada uma das retas, o ponto médio de seus pontos de interseção com  $c$  (caso existam). Os pontos assim obtidos estão, todos, sobre uma



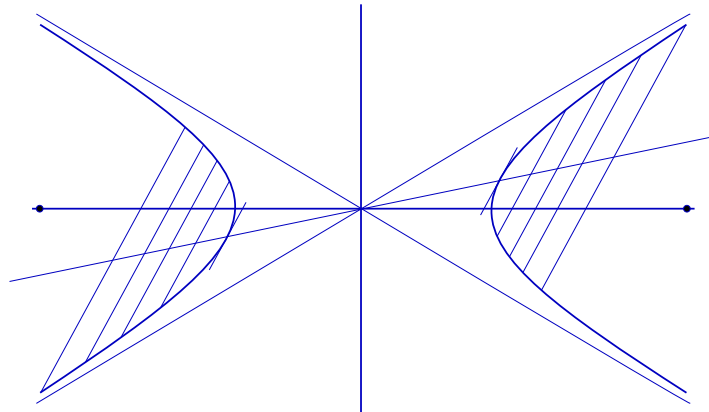


Figura 14.2: direção conjugada

mesma reta,  $r$ . A reta  $r$  passa pelo centro de  $c$ , se  $c$  é elipse ou hipérbole; se  $c$  é parábola,  $r$  é paralela ao eixo de  $c$ .

Demonstração : O caso da elipse já foi visto. Como as parábolas são todas semelhantes, podemos trabalhar com a dada por  $y = x^2$ . Como retas verticais podem ser excluídas da análise (só cortam nossa parábola em um ponto), fixemos um coeficiente angular  $m$  e consideremos o feixe de paralelas dadas por

$$y = mx + p,$$

$p$  variável. Ora, os pontos de interseção têm coordenadas  $x$  dadas por

$$x^2 - mx - p = 0,$$

com pontos médios dados por  $\bar{x} = m/2$  (independentes de  $p$ ). Estão todos, como prometido, na mesma reta vertical, paralela ao eixo de  $c$ .

Vejamos, agora, o caso das hipérboles. Como qualquer uma pode ser convertida em qualquer outra por meio de transformação linear bijetiva seguida de translação (preservando, portanto, paralelismo e pontos médios), podemos garantir que o resultado, se provado para uma, estará provado para todas. Vamos, por comodidade algébrica, escolher a de equação

$$xy = 1,$$

cujo centro está na origem. Mais uma vez, excluídas as retas horizontais e as verticais (que só cortam nossa hipérbole em um ponto, no máximo), vamos fixar  $m$  (não nulo) e considerar o feixe de paralelas definidas por

$$y = mx + p,$$

com  $p$  variando em  $\mathbb{R}$ . Os pontos de interseção têm, neste caso, coordenadas  $x$  dadas por

$$mx^2 + px - 1 = 0,$$

com ponto médio de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\bar{x} = -\frac{p}{2m}$ . Substituindo na equação da reta, obtemos  $\bar{y} = \frac{p}{2}$ . Isso mostra que os pontos médios estão sobre a reta  $\bar{y} = -m\bar{x}$ , que passa pelo centro da cônica. ■

**Escólio 1:** O conjunto dos pontos médios associados a uma direção dada é, no caso da elipse, um segmento de reta; no caso da parábola, é uma semirreta; no caso da hipérbole, pode ser uma reta (se os pontos de interseção estão em ramos distintos) ou um par de semirretas (se os pontos de interseção estão no mesmo ramo). As extremidades desse conjunto (caso existam) são chamadas **vértices** da cônica associados à direção. Note que a tangente em um vértice associado a uma dada direção tem exatamente aquela direção.

**Escólio 2:** No caso de elipses e hipérbolos, a direção da reta que passa pelos pontos médios é dita **conjugada** à do feixe de paralelas. Assim como no caso das elipses, a direção conjugada à conjugada é, também no caso das hipérbolos, a própria (volte à demonstração e note que, naquele caso particular, se uma tem coeficiente angular  $m$ , o da outra é  $-m$ ). Em uma elipse, diâmetros conjugados são exatamente os associados a direções conjugadas.

Vamos introduzir, no caso de hipérbolos, a noção de diâmetros conjugados. Começemos definindo o que entendemos por **hipérbolos conjugadas**: duas hipérbolos,  $h$  e  $\bar{h}$ , são ditas **conjugadas** se compartilham os eixos de simetria, as assíntotas e a distância focal, mas têm os focos sobre eixos distintos. Em coordenadas canônicas, isto significa que, se  $h$  é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

então  $\bar{h}$  tem por equação

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

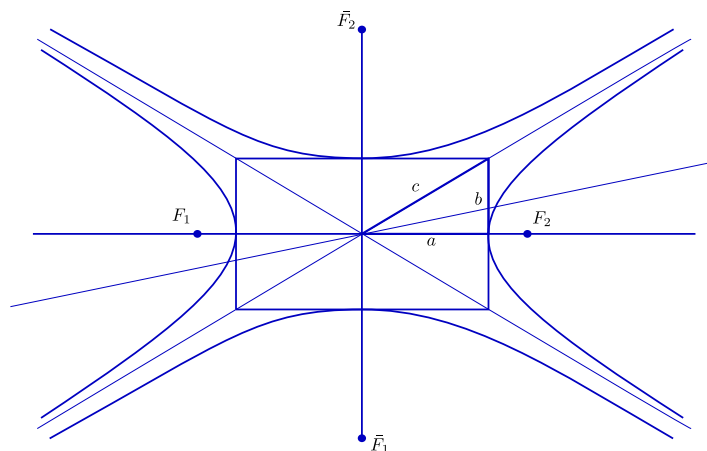


Figura 14.3: hipérbolas conjugadas

**Definição:** Se  $c$  é uma hipérbole ou uma elipse e  $V_1$  &  $V_2$  são vértices de  $c$  associados a uma certa direção, o segmento  $V_1V_2$  é dito o **diâmetro** de  $c$  associado àquela direção.

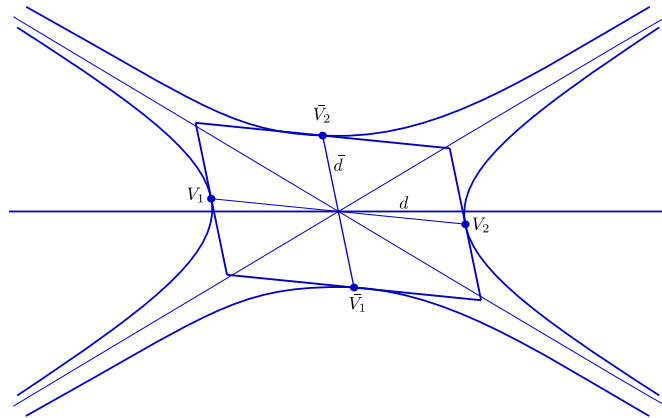


Figura 14.4: diâmetros conjugados

**Definição:** Sejam  $h$  e  $\bar{h}$  hipérboles conjugadas. Se  $d$  é diâmetro de  $h$  e  $\bar{d}$  é diâmetro de  $\bar{h}$  associado à direção de  $d$ ,  $\bar{d}$  é dito **conjugado** a  $d$ .

**Proposição 3:** Sejam  $h$  e  $\bar{h}$  hipérboles conjugadas. Então:

- (i) todo diâmetro de  $h$  tem diâmetro conjugado;
- (ii) se  $\bar{d}$  é conjugado a  $d$ , então  $d$  é conjugado a  $\bar{d}$ ;

(iii) se  $d$  é diâmetro de  $h$  conjugado ao diâmetro  $\bar{d}$  de  $\bar{h}$ , as tangentes a  $h$  nas extremidades de  $d$  (que são paralelas) e as tangentes a  $\bar{h}$  nas extremidades de  $\bar{d}$  (que também são paralelas) se encontram nas assíntotas;

(iv) a área do paralelogramo formado pelas tangentes referidas em (iii) não depende do par de diâmetros conjugados considerado.

Demonstração : Comecemos com algumas observações preliminares (as demonstrações, ou, pelo menos, o trabalho de compreendê-las, são deixados como exercício).

(a) As hipérboles  $xy = 1$  e  $xy = -1$  são conjugadas; rodadas de  $45^\circ$ , viram  $x^2 - y^2 = 2$  e  $y^2 - x^2 = 2$ .

(b)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  e  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  são obtidas de  $x^2 - y^2 = 2$  e  $y^2 - x^2 = 2$  por meio da transformação linear

$$(x, y) \mapsto \left( \frac{a\sqrt{2}x}{2}, \frac{b\sqrt{2}y}{2} \right).$$

(c) Qualquer par de hipérboles conjugadas pode ser obtido, via transformação linear afim (transformação linear seguida de translação) bijetiva, de  $4xy = 1$  e  $4xy = -1$ .

(d) Transformações lineares afins bijetivas preservam retas, paralelismo e pontos médios. Consequentemente, levam diâmetro associado a uma direção em diâmetro associado à direção correspondente, e diâmetros conjugados em diâmetros conjugados; também levam assíntotas em assíntotas.

Com as observações acima, fica claro que basta provar os resultados enunciados para o caso particular em que  $h$  e  $\bar{h}$  são dadas, respectivamente, por  $xy = 1$  e  $xy = -1$ . Nosso feixe de retas será definido pelo coeficiente angular  $m$ , suposto fixo; as retas consideradas são as de equações  $y = mx + p$ , com  $p$  variando em  $\mathbb{R}$ .

Começemos provando (i) e (ii):

As retas  $y = mx + p$ , com  $m > 0$ , todas, interceptam a hipérbole  $h$  (dada por  $xy = 1$ ) em dois pontos. Juntando os pontos médios, obtemos uma reta que não corta  $h$  (assim, neste caso, não há diâmetro). Se  $m < 0$ , porém, há valores de  $p$  para os quais a interseção é vazia. Como já vimos (Proposição 2, página 88 e Escólio 2, página 90), neste caso o diâmetro estará sobre a reta  $y = -mx$ . Ora, por simetria,  $\bar{h}$  tem diâmetro associado a essa direção (já que  $-m > 0$ ), que estará sobre a reta  $y = mx$ . Assim, todo diâmetro de  $h$  tem diâmetro conjugado e o conjugado do conjugado é o próprio (veja a figura).

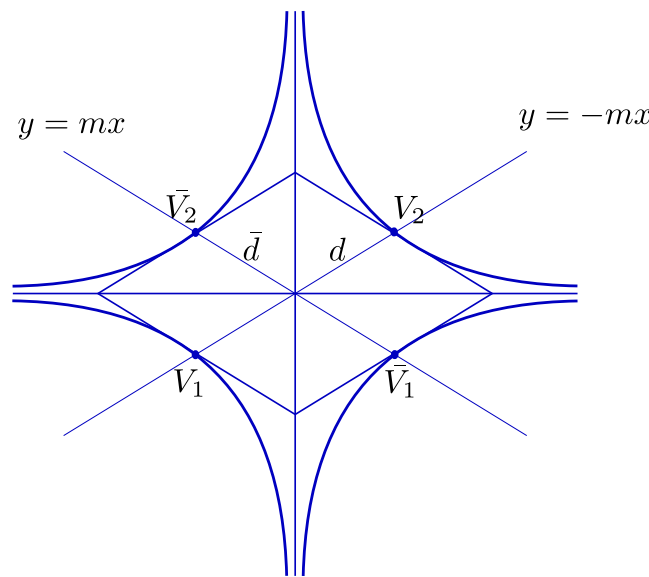


Figura 14.5: teorema de Apolônio para hipérboles conjugadas

Provemos (iii), já fixando um  $m$  negativo:

Se  $d$  é o diâmetro de  $h$  associado à direção definida por  $m$  e  $\bar{d}$  é seu conjugado, temos, como já vimos,  $d$  sobre a reta  $y = -mx$  e  $\bar{d}$  sobre  $y = mx$ .

As extremidades de  $d$  são os vértices  $V_1$  e  $V_2$ , pontos de  $h$  em que a tangente tem coeficiente angular  $m$ . As extremidades de  $\bar{d}$  são os vértices  $\bar{V}_1$  e  $\bar{V}_2$ , pontos de  $\bar{h}$  em que a tangente tem coeficiente angular  $-m$ . Como a situação é perfeitamente simétrica, as tangentes se encontram nos eixos coordenados (que são as assíntotas), formando um losango (veja a figura).

Provaremos (iv) calculando a área do losango:

Veja a figura. A área do losango é o dobro da área do retângulo de vértices  $V_1, \bar{V}_1, V_2, \bar{V}_2$ , que é quatro vezes o produto das coordenadas de  $V_2$ . Como  $V_2$  está, simultaneamente, na hipérbole  $xy = 1$ , na reta  $y = -mx$  e tem coordenadas positivas, temos  $V_2 = \left( \sqrt{\frac{-1}{m}}, \sqrt{-m} \right)$ . Nossa área é, então,

$$8\sqrt{\frac{-1}{m}}\sqrt{-m} = 8,$$

independente de  $m$ . ■

**Exercício 14.1** *Só por curiosidade, use a derivada para conferir que as tangentes a  $y = 1/x$  nos pontos de interseção com  $y = -mx$  têm, de fato, coeficiente angular  $m$ . Faça o mesmo, se achar que vale a pena, para  $y = -1/x$  e  $y = mx$ .*

**Exercício 14.2** *Que tal a seguinte demonstração?: o resultado segue, no caso das hipérboles conjugadas  $xy = 1$  e  $xy = -1$ , da Proposição 2 e das simetrias da figura.*



**Parte III**  
**QUÁDRICAS**





## Capítulo 15

# Classificação das curvas do 2<sup>o</sup> grau, de novo

Voltemos à equação geral do segundo grau em  $x$  e  $y$ :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Nosso problema é descrever e estudar o conjunto

$$c = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \right\}.$$

Podemos encará-lo de um ponto de vista diferente do que escolhemos até agora: notando por  $\langle u, v \rangle$  o produto escalar usual em  $\mathbb{R}^2$  (os pares ordenados serão escritos na vertical), nossa equação, usando matrizes, se escreve

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + F = 0.$$

**Exercício 15.1** *Confira!*

**Exercício 15.2** *Observe que a escolha da matriz*

$$\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$$

*é arbitrária e que qualquer outra na forma*

$$\begin{pmatrix} A & B_1 \\ B_2 & C \end{pmatrix},$$

*com  $B_1 + B_2 = B$ , serve.*

Podemos, então, dizer que nossa equação é obtida da seguinte maneira:

(i) seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear dada, na base caônica, pela matriz

$$\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} :$$

(ii) seja  $w_0$  o vetor definido por  $w_0 = D\vec{e}_1 + E\vec{e}_2$ , ou seja,  $w_0$  é dado, na base canônica, por  $\begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$ ;

(iii) seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(w) = \langle w, Tw \rangle + \langle w_0, w \rangle + F.$$

**Exercício 15.3** Suponha que  $w$  é um vetor do plano. Observe que, escrevendo-o na base canônica,  $w = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ , dizer que  $f(w) = 0$  é equivalente a dizer que

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Assim, nosso problema é descrever e estudar o conjunto  $c$  dos vetores  $w$  tais que  $f(w) = 0$ . Ocasionalmente, se representarmos os vetores do plano por suas coordenadas,  $x, y$ , na base canônica,  $c$  será caracterizado pela equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Se, por outro lado, mantendo a origem, escolhermos outra base,  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , e representarmos os vetores do plano por suas coordenadas nessa base,  $w = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2$ , obteremos, para caracterizar  $c$ , uma equação diferente, nas variáveis  $u$  e  $v$ . Como estamos lidando com o produto escalar, temos bons motivos para desejar uma base ortonormal.

**Exercício 15.4** Mostre que  $\langle u_1\vec{e}_1 + v_1\vec{e}_2, u_2\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 \rangle = u_1u_2 + v_1v_2$ , quaisquer que sejam  $u_1, u_2, v_1, v_2$ , se, e somente se,  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  é base ortonormal.

Suponhamos, pois, que  $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  seja base ortonormal e que as coordenadas referentes a essa base sejam  $u$  e  $v$ .  $f(w) = 0$  se traduzirá, então, em uma equação do segundo grau em  $u$  e  $v$ .

De fato, no novo sistema de coordenadas, teremos, conhecidas as representações de  $w_0$ ,  $T\vec{e}_1$  e  $T\vec{e}_2$ ,

$$w_0 = u_0\vec{e}_1 + v_0\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}_\beta,$$

$$T\vec{e}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}_\beta,$$

$$T\vec{e}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}_\beta,$$

e fazendo

$$w = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_\beta,$$

a seguinte expressão para  $f(w)$ :

$$f(w) = \left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_\beta, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_\beta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_\beta \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}_\beta, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_\beta \right\rangle + F.$$

Assim, no novo sistema de coordenadas, nossa equação,  $f(w) =$ , se escreverá

$$a_{11}u^2 + (a_{12} + a_{21})uv + a_{22}v^2 + u_0u + v_0v + F = 0.$$

Como sabemos, um truque algébrico simples nos permite, caso esta seja desprovida do termo em  $uv$ , reduzi-la a uma das equações que sabemos reconhecer como de cônicas (ver página 63). Tudo se resume, pois, a encontrar uma base ortonormal que torne mais simpática a matriz da transformação  $T$ .

**Exercício 15.5** Se já esqueceu, confira que, sendo  $\alpha$  e  $\beta$  não nulos, então

$$\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma u + \delta v + F = \alpha \left( u + \frac{\gamma}{2\alpha} \right)^2 + \beta \left( v + \frac{\delta}{2\beta} \right)^2 + \left( F - \frac{\gamma^2}{4\alpha} - \frac{\delta^2}{4\beta} \right).$$

Note que, com uma translação de  $-\left(\frac{\gamma}{2\alpha}, \frac{\delta}{2\beta}\right)$ , as coordenadas passam a ser  $\bar{x} = u + \frac{\gamma}{2\alpha}$  &  $\bar{y} = v + \frac{\delta}{2\beta}$ , e a equação  $f(w) = 0$  passa a se escrever, fazendo  $\bar{F} = F - \frac{\gamma^2}{4\alpha} - \frac{\delta^2}{4\beta}$ ,

$$\alpha \bar{x}^2 + \beta \bar{y}^2 + \bar{F} = 0,$$

que representa uma elipse ou uma hipérbole (ou um caso degenerado). Note que, se  $\alpha = 0$  ou  $\beta = 0$ , a coisa é análoga (fazemos  $\bar{x} = u$  ou  $\bar{y} = v$ ): teremos uma parábola (ou um caso degenerado).

**Observação 1:** Até aqui tudo bem, mas não há como fugir da seguinte questão: por que misterioso motivo estaríamos voltando a um problema já resolvido? É claro que nunca é demais olhar uma questão de outro ponto de vista, mesmo quando já temos uma resposta satisfatória. No caso presente, porém, devemos ter em mente as generalizações. Se passarmos a  $\mathbf{R}^3$ , é justo que perguntemos que tipo de conjunto é dado por uma equação da forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Mais geralmente ainda, poderíamos colocar a mesma questão em  $\mathbf{R}^n$ : estudar a equação do 2º grau em  $n$  variáveis,  $x_1, \dots, x_n$ . É claro que tais questões podem ser pensadas em termos de rotações dos eixos, mas a interpretação em termos de matrizes e transformações lineares talvez seja mais simples, no caso geral (nem todo mundo concordará com isso!).

**Observação 2:** As respostas apresentadas acima fazem sentido, mas são apenas parte da verdade. As ideias que estamos começando a discutir têm um alcance muito mais profundo: embora estejamos estudando um problema geométrico em dimensão 2, boa parte dos métodos que desenvolvermos se aplica a espaços de dimensão

infinita, em situações que, embora altamente abstratas, estão relacionadas a problemas concretos nas mais variadas áreas, como Mecânica Quântica, Processamento de Sinais (o que inclui Processamento de Imagens) e Propagação de Calor, entre outras. Quando apresentados em um contexto mais geral, porém, os resultados que discutiremos aparecem, usualmente, de forma mais distanciada dos aspectos puramente geométricos.

## Capítulo 16

# Matrizes transpostas e matrizes simétricas

A estratégia que estamos adotando frente à questão de identificar a cônica correspondente à equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

passa por escrever a parte quadrática,  $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ , como

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Como já observamos, há uma certa arbitrariedade na escolha de uma matriz simétrica: poderíamos ter optado por qualquer outra do tipo

$$\begin{pmatrix} A & B_1 \\ B_2 & C \end{pmatrix},$$

com  $B_1 + B_2 = B$ . No entanto, a opção por  $B_1 = B_2$  não é apenas estética. De fato, nosso objetivo é, considerando a transformação linear  $T$  associada à matriz, operar mudança de base tal que, na nova base, que deve ser ortonormal, a matriz de  $T$  seja

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

com  $a_{12} + a_{21} = 0$ . É claro que seria ainda melhor se pudéssemos ter simplesmente,  $a_{12} = a_{21} = 0$ , se não for pedir demais. Pois bem: o que veremos é que a singela escolha que fizemos, optando por uma matriz simétrica, nos garante o bônus: conseguiremos assegurar que, neste caso, existirá uma certa base ortonormal em que a matriz de nossa transformação só terá termos não nulos na **diagonal principal** (isto é, a formada pelos termos  $a_{ii}$ ).

**Definição:** A matriz quadrada  $n \times n$   $A = (a_{ij})$  é dita **simétrica** se  $a_{ij} = a_{ji}$  para quaisquer  $i$  e  $j$ ;  $A$  é dita **diagonal** se  $a_{ij} = 0$  sempre que  $i \neq j$ . A **transposta** de  $A$  é a matriz  $A^T = (b_{ij})$  definida por  $b_{ij} = a_{ji} \forall i, j = 1, \dots, n$ .

**Exercício 16.1** Note que a matriz  $A$  é simétrica se, e somente se,  $A = A^T$ .

Começemos com o seguinte passo: fixemos a transformação linear  $T$  e, em vez de nos restringirmos à função que a cada vetor  $v$  associa o número  $\langle Tv, v \rangle$ , consideremos a função que a cada par de vetores  $u$  e  $v$  associa o número  $\langle Tu, v \rangle$ .

**Exercício 16.2** Suponha que a matriz da transformação linear  $T$  na base ortonormal  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  seja  $A = (a_{ij})$ . Mostre que, para quaisquer  $i$  e  $j$ , temos

$$a_{ij} = \langle T\varepsilon_j, \varepsilon_i \rangle.$$

**Exercício 16.3** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma transformação linear. Suponhamos que  $T$  seja dada, em uma certa base ortonormal, pela matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Seja  $T^* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear dada, na mesma base, pela matriz transposta,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Mostre que

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2.$$

Prove também a recíproca: se  $T^* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é tal que

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2,$$

então a matriz de  $T^*$  em qualquer base ortonormal é a transposta da de  $T$  na mesma base.

**Exercício 16.4** Mostre que o resultado do exercício anterior vale para  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Suponhamos, agora, que uma certa transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  seja dada, em alguma base ortonormal, por matriz diagonal. Em particular, a matriz de  $T$  na referida base é simétrica. Ora, os exercícios acima nos mostram que vale, portanto

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2.$$

Em particular, se  $\vec{\varepsilon}_1$  &  $\vec{\varepsilon}_2$  formam outra base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$  e  $A = (a_{ij})$  é a matriz de  $T$  nessa base, teremos

$$a_{12} = \langle T\vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_1 \rangle = \langle \vec{\varepsilon}_2, T\vec{\varepsilon}_1 \rangle = a_{21}.$$

Assim, a matriz de  $T$  em qualquer base ortonormal será simétrica. Observe que, na verdade, apenas utilizamos o fato de que a matriz de  $T$  em alguma base ortonormal

é simétrica. Tampouco é relevante a restrição à dimensão 2. Podemos, pois, ser um pouco mais gerais.

**Proposição:** Sejam  $E$  um espaço vetorial real, de dimensão finita, com produto interno, e  $T : E \rightarrow E$  uma transformação linear. São equivalentes:

- (i) a matriz de  $T$  em alguma base ortonormal é simétrica;
- (ii)  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$ ;
- (iii) a matriz de  $T$  em qualquer base ortonormal é simétrica.

Demonstração : Para o leitor que fez os exercícios logo acima, a demonstração está feita. O caminho natural, para os demais, é provar  $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$ . O passo crucial é o lema a seguir, cuja importância transcende a da proposição .

**Definição provisória:** Sejam  $E$  um espaço vetorial real, de dimensão finita, com produto interno, e  $T : E \rightarrow E$  uma transformação linear. Seja  $A = (a_{ij})$  a matriz de  $T$  em uma certa base ortonormal  $\beta$ . A **adjunta** de  $T$  referente a  $\beta$  é a transformação linear  $T^* : E \rightarrow E$  definida, na mesma base, pela matriz transposta de  $A$ .

Embora a definição dê a entender que  $T^*$  depende da base escolhida, o lema a seguir mostra que não :  $T^*$  independe da base ortonormal considerada.

**Lema:** Sejam  $E$  um espaço vetorial real, de dimensão finita, com produto interno, e  $T : E \rightarrow E$  uma transformação linear. São equivalentes:

- (i)  $T^* : E \rightarrow E$  é a transformação dada pela matriz transposta da de  $T$  na base ortonormal  $\alpha$ ;
- (ii)  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \quad \forall u, v \in E$ ;
- (iii) a matriz de  $T^*$  em qualquer base ortonormal é a transposta da de  $T$  na mesma base.

Demonstração do Lema: Provaremos  $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$ . Seja  $A = (a_{ij})$  a matriz de  $T$  na base ortonormal escolhida,  $\alpha$ . Fixemos dois vetores,  $u$  e  $v$ , dados em coordenadas, na mesma base, por  $u = (u_i)$  e  $v = (v_i)$ . Temos, então ,

$$\langle Tu, v \rangle = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right) v_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j v_i \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \right) u_j = \langle u, T^*v \rangle .$$

Assim,  $T^*$  satisfaz a identidade (ii). Por outro lado, se  $T^* : E \rightarrow E$  satisfaz (ii),

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \quad \forall u, v \in E,$$

então sua matriz,  $B^* = (b_{ij}^*)$ , em uma base ortonormal qualquer,  $\beta = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ , é dada por

$$b_{ij}^* = \langle T^* \varepsilon_j, \varepsilon_i \rangle = \langle \varepsilon_j, T \varepsilon_i \rangle = b_{ji},$$

sendo  $B = (b_{ij})$  a matriz de  $T$  na base  $\beta$ , o que mostra que  $T^*$  é dada pela transposta de  $B$ . A implicação  $(iii) \Rightarrow (i)$  é uma tautologia. ■

**Exercício 16.5** Faça a demonstração da proposição .

Do lema concluímos que, dada uma transformação linear  $T : E \rightarrow E$ , a identidade

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \quad \forall u, v \in E$$

define a transformação linear  $T^* : E \rightarrow E$ .

**Definição:** Sejam  $E$  um espaço vetorial real, de dimensão finita, com produto interno, e  $T : E \rightarrow E$  uma transformação linear. A transformação linear  $T^* : E \rightarrow E$ , definida por

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \quad \forall u, v \in E,$$

é dita a **adjunta** de  $T$ . Alternativamente,  $T^*$  pode ser definida como a transformação associada à matriz transposta da de  $T$  na base  $\beta$ , sendo  $\beta$  uma base ortonormal qualquer de  $E$ . Se  $T^* = T$ ,  $T$  é dita **autoadjunta**, ou **simétrica**.

**Exercício 16.6** Considere a matriz  $m \times n$   $A = (a_{ij})$ . Sua **transposta** é a matriz  $n \times m$   $A^T = (b_{ij})$ , dada por  $b_{ij} = a_{ji}$ . Se  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a transformação linear dada, nas bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ , por  $A$ , a **adjunta** de  $T$  é a transformação linear  $T^* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada, nas bases canônicas, por  $A^T$ . Mostre que:

(i)  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \forall v \in \mathbb{R}^m;$

(ii) Se  $\alpha$  é base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\beta$  é base ortonormal de  $\mathbb{R}^m$  e  $B = (T)_{\alpha}^{\beta}$  é a matriz de  $T$  referente às bases  $\alpha$  e  $\beta$ , então a matriz de  $T^*$  referente às bases  $\beta$  e  $\alpha$  é  $B^T$  (ou seja,  $(T^*)_{\beta}^{\alpha} = B^T$ );

(iii) Se a transformação  $R : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é tal que  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Rv \rangle \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \forall v \in \mathbb{R}^m$ , então  $R$  é linear e  $R = T^*$ .

**Exercício 16.7** Sejam  $E$  &  $F$  espaços vetoriais (reais ou complexos), com produto interno, de dimensão finita e seja  $T : E \rightarrow F$  linear. Mostre que existe uma única transformação linear  $T^* : F \rightarrow E$  tal que  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \quad \forall u \in E, \forall v \in F$ .



## Capítulo 17

### O Teorema Espectral em dimensão 2

Voltemos a nosso probleminha. Convertemos a função quadrática  $Ax^2 + Bxy + Cy^2$  em

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Assim, temos a transformação linear  $T$  (autoadjunta) associada à matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix},$$

e nosso problema passa a ser encontrar uma base ortonormal,  $\beta$ , tal que a matriz de  $T$  em  $\beta$  seja diagonal.

**Exercício 17.1** Note que isso significa: procuramos  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , unitários e ortogonais, tais que  $T\varepsilon_1 = \lambda_1\varepsilon_1$  e  $T\varepsilon_2 = \lambda_2\varepsilon_2$ , para certos números reais  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

**Exercício 17.2** Observe que  $T\varepsilon = \lambda\varepsilon \Rightarrow T(-\varepsilon) = \lambda(-\varepsilon)$ .

**Exercício 17.3** Conclua que mudar para uma tal base corresponde (trocando, eventualmente, um dos  $\varepsilon_i$  por  $-\varepsilon_i$ ) a fazer uma rotação de  $90^\circ$  nos eixos.

**Definição:** Se  $E$  é um espaço vetorial e  $T : E \rightarrow E$  é uma transformação linear, o escalar  $\lambda$  é dito um **autovalor** (ou, também, **valor próprio**, ou **valor característico**) de  $T$  se existe um vetor  $\varepsilon$ , não nulo, tal que  $T\varepsilon = \lambda\varepsilon$ . Um tal vetor  $\varepsilon$  é dito um **autovetor** (ou, também, **vetor próprio**, ou, ainda, **vetor característico**) de  $T$ . Também chamamos de **autovalores** da matriz  $n \times n$   $A$  os autovalores da correspondente transformação linear em  $\mathbb{R}^n$ .

Reformulando, podemos dizer que temos um espaço vetorial real  $E$ , de dimensão 2, com produto interno, e uma transformação linear  $T : E \rightarrow E$ , autoadjunta. O que queremos, no fim das contas, é uma base ortonormal de autovetores de  $T$ :  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , unitários e ortogonais, tais que  $T\varepsilon_1 = \lambda_1\varepsilon_1$ ,  $T\varepsilon_2 = \lambda_2\varepsilon_2$ , para certos escalares  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

A resposta a nossas aflições é o **Teorema Espectral** (este é um dos teoremas mais famosos da Matemática: aparece nas mais variadas situações, da classificação das

cônicas à Mecânica Quântica, da Música ao estudo da propagação de calor, em versões reais em dimensão finita a versões complexas em dimensão infinita). Começemos, modestamente, enunciando-o no caso real em dimensão 2.

**Teorema Espectral, caso real, dimensão 2:** Se  $E$  é um espaço vetorial real, de dimensão 2, com produto interno, e  $T : E \rightarrow E$  é uma transformação linear autoadjunta, então  $E$  tem uma base ortonormal formada por autovetores de  $T$ .

Demonstração : Começemos observando que, neste caso particular (dimensão 2), basta-nos encontrar dois vetores,  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , unitários e ortogonais, tais que

$$\langle T\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = 0.$$

De fato, neste caso, teremos, escrevendo  $T\varepsilon_1 = \lambda_1\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2$ ,

$$0 = \langle T\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = \langle \lambda_1\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle + \langle \mu\varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle = \mu.$$

Como  $T$  é autoadjunta, teremos, também,  $\langle \varepsilon_1, T\varepsilon_2 \rangle = 0$ , de modo que o mesmo raciocínio se aplica a  $\varepsilon_2$ .

Vamos, pois, provar a existência de um tal par de vetores. Para começar, fixemos uma base ortonormal, que notaremos por  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ . A partir daí, faz sentido definir, para cada vetor  $w = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ , seu ortogonal,  $w^\perp$ , definido por  $w^\perp = -y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2$ . É imediato que  $\langle w^\perp, w \rangle = 0$  e que  $w^\perp$  tem norma igual à de  $w$  (norma do produto interno, claro!). Assim, o que queremos é um vetor unitário,  $\varepsilon_1$ , tal que  $\langle w^\perp, T w \rangle = 0$ .

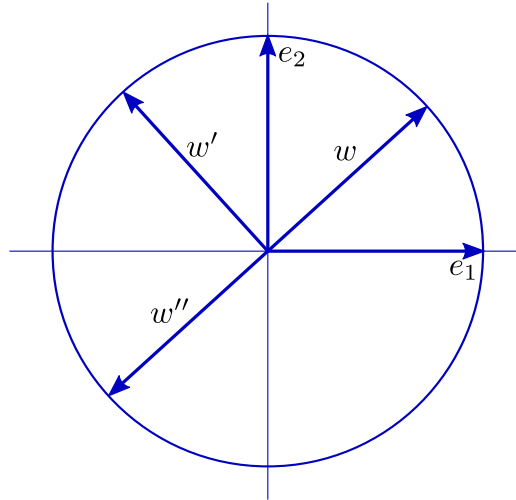


Figura 17.1:  $(w^\perp)^\perp = -w$

Um detalhe interessante é que, para qualquer  $w$  em  $E$ ,  $(w^\perp)^\perp = -w$ , de modo que  $\mathbf{e}_1^\perp = \mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_2^\perp = -\mathbf{e}_1$ . Assim,

$$\langle T\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1^\perp \rangle = \langle T\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2 \rangle = -\langle T\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2^\perp \rangle = 0.$$

Ora, daí segue que a função  $g : E \rightarrow \mathbf{R}$  dada por

$$\langle Tw, w^\perp \rangle$$

muda de sinal quando caminhamos de  $\mathbf{e}_1$  até  $\mathbf{e}_2$  sobre o círculo unitário de  $E$  (a rigor, poderíamos ter  $g(\mathbf{e}_1) = g(\mathbf{e}_2) = 0$ , mas então,  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  já resolveriam nosso problema). Ora,  $g$  varia continuamente quando caminhamos de  $\mathbf{e}_1$  até  $\mathbf{e}_2$ . Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $\varepsilon_1$  no círculo unitário tal que  $g(\varepsilon_1) = 0$ , o que demonstra o Teorema.

Para dar um ar mais rigoroso ao argumento acima, considere a aplicação

$$f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R},$$

dada por  $f(\theta) = g(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2)$ , e note que:

- (i)  $f$  é contínua;
- (ii)  $f(0) = -f(\frac{\pi}{2})$ ;
- (iii)  $\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$  está no círculo unitário para todo  $\theta$ .

Logo, existe  $\theta_0$  em  $[0, \frac{\pi}{2}]$  tal que  $f(\theta_0) = 0$ . Nosso  $\varepsilon_1$  é  $\cos \theta_0 \mathbf{e}_1 + \sin \theta_0 \mathbf{e}_2$ . ■

**Exercício 17.4** Para provar que a função  $f$  usada na demonstração é contínua, escreva

$$f(\theta) = \langle T(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2), (\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2)^\perp \rangle$$

e faça as contas.

**Exercício 17.5** Note que nossa demonstração continua válida se, no lugar de

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle \quad \forall u, v \in E,$$

supusermos apenas que

$$\langle u, v \rangle = 0 \text{ e } \langle Tu, v \rangle > 0 \Rightarrow \langle u, Tv \rangle > 0.$$



# Capítulo 18

## Uma outra abordagem

### a O polinômio característico

Pelo que acabamos de ver, toda transformação linear autoadjunta em um espaço vetorial real, de dimensão 2, com produto interno, tem um par de autovetores ortonormais. Para transformações lineares gerais, mesmo em dimensão 2, isso não necessariamente acontece.

**Exercício 18.1** *Mostre que uma rotação de  $\theta$  não tem autovetores, a menos que  $\theta$  seja um múltiplo inteiro de  $\pi$ .*

Examinemos a questão da existência de autovalores para uma transformação linear  $T : E \rightarrow E$ . Para simplificar, suponhamos que  $E$  seja de dimensão 2 e que  $T$  seja dada, em uma base qualquer, pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Suponhamos, também, que  $\lambda$  seja um autovalor de  $T$ , associado ao qual temos o autovetor  $w$ , dado, em nossa base, pelas coordenadas  $x_1$  e  $x_2$ . Na forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

o que equivale a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, como autovetores não podem, por imposição legal, ser nulos, a transformação linear  $(T - \lambda I)$  não é injetiva. Ora, isto equivale a dizer que a transformação linear (que podemos pensar como de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ ) correspondente à matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

não é bijetiva, isto é: seu determinante é não nulo. Assim,  $\lambda$  é autovalor de  $T$  se, e só se, é raiz da equação

$$(a_{11} - x)(a_{22} - x) - a_{12}a_{21} = 0.$$

Como esta é uma equação polinomial do segundo grau, existem, no máximo, duas raízes reais; e sabemos calculá-las.

**Observação:** Note que o mesmo raciocínio vale para  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Nesse caso, os autovalores serão as raízes da equação do 3º grau  $p(\lambda) = 0$ , sendo  $p(\lambda)$  o **polinômio característico** de  $T$ , dado por

$$p(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix}.$$

De maneira mais geral, se  $E$  é um espaço de dimensão  $n$  e  $T : E \rightarrow E$  é linear, o **polinômio característico** de  $T$  é  $p$  (de grau  $n$ ), definido por

$$p(x) = \det(T - xI),$$

sendo  $I : E \rightarrow E$  a transformação identidade. Também neste caso, mais geral, temos que  $\lambda$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda$  é raiz de  $p$ .

**Exercício 18.2** *Sejam  $E$  um espaço vetorial,  $T : E \rightarrow E$  uma transformação linear, e  $v_1, \dots, v_k$  autovetores associados a autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  distintos. Mostre que  $v_1, \dots, v_k$  são linearmente independentes.*

## b Outra demonstração do Teorema Espectral, em dimensão 2

Sejamos um pouco mais matriciais. Partiremos da transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuja matriz, na base canônica, é

$$\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}.$$

Queremos encontrar uma base ortonormal,  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ , tal que  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  sejam autovetores de  $T$ . Como a matriz de  $T$  na base canônica é simétrica, sabemos (ver a proposição da página 103) que  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$  para quaisquer dois vetores  $u$  e  $v$  em  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercício 18.3** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma transformação linear tal que  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$  para quaisquer dois vetores  $u$  e  $v$ . Mostre que, se  $\varepsilon_1$  é autovetor de  $T$  e  $\varepsilon_2$  é não nulo e ortogonal a  $\varepsilon_1$ , então  $\varepsilon_2$  também é autovetor de  $T$ . Assim, no caso particular de dimensão dois, basta, na verdade, encontrar um autovetor.

**Teorema:** Se  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma transformação linear cuja matriz em uma base ortonormal é simétrica, então existe em  $\mathbb{R}^2$  uma base ortonormal em que a matriz de  $T$  é diagonal.

Demonstração : Como já vimos, tendo  $T$  matriz simétrica em alguma base ortonormal, sua matriz em qualquer outra base ortonormal será simétrica (ver a proposição da página 103). Assim, podemos supor que a matriz de  $T$  na base ortonormal é da forma

$$\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}.$$

Pelo que já vimos (exercício acima), basta-nos provar que  $T$  tem um autovetor, o que equivale a provar a existência de um autovalor. Assim, tudo que temos a fazer é mostrar que a equação do segundo grau

$$\det \begin{pmatrix} A - x & B/2 \\ B/2 & C - x \end{pmatrix} = 0$$

tem uma raiz real. Ora, as raízes, dadas por

$$\frac{A + C \pm \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{2},$$

são evidentemente reais, já que  $(A - C)^2 + B^2$  é sempre não negativo. ■

**Escólio:** Voltemos à equação geral do segundo grau,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Com a mudança de coordenadas correspondente à adoção de uma base ortonormal de autovetores de

$$\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix},$$

nossa equação se transforma, chamando de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  os autovalores da matriz e de  $u$  &  $v$  as novas coordenadas, em

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \gamma u + \delta v + F = 0.$$

Como acabamos de ver, nossos autovalores são dados por

$$\frac{A + C \pm \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{2}.$$

Podemos, assim, distinguir três casos:

(i) **elipse** e suas degenerações  $\rightarrow \lambda_1$  e  $\lambda_2$  devem ter o mesmo sinal, ou seja:  $(A + C)^2 > (A - C)^2 + B^2$ , o que equivale a

$$B^2 - 4AC < 0;$$

(ii) **hipérbole** e suas degenerações  $\rightarrow \lambda_1$  e  $\lambda_2$  devem ter sinais opostos, ou seja,  $(A + C)^2 < (A - C)^2 + B^2$ , o que equivale a

$$B^2 - 4AC > 0;$$

(ii) **parábola** e suas degenerações  $\rightarrow$  um dos autovalores é nulo, ou seja,  $(A + C)^2 = (A - C)^2 + B^2$ , o que equivale a

$$B^2 - 4AC = 0.$$

## c O caso tridimensional

Consideremos um espaço vetorial real  $E$ , com produto interno, e uma transformação linear simétrica (autoadjunta)  $T : E \rightarrow E$ . Como já vimos, se  $E$  é bidimensional,  $E$  tem base ortonormal de autovetores de  $T$ . Mas, e se a dimensão de  $E$  é maior? Mais modestamente, e se a dimensão de  $E$  é 3?

Fixemo-nos em  $E = \mathbb{R}^3$ , para não complicar, e chamemos de  $A$  a matriz de  $T$  na base canônica. Como estamos em busca de autovetores de  $T$ , podemos olhar para os autovalores, isto é, as raízes do polinômio característico  $p(x) = \det(A - xI)$ , que neste caso é do terceiro grau. Como bem sabemos, polinômios de grau ímpar a coeficientes em  $\mathbb{R}$  têm, pelo menos, uma raiz real, o que nos garante, de cara, um autovalor,  $\lambda_3$ . Vamos, pois, fixar um autovetor de  $T$  associado a  $\lambda_3$ , que suporemos unitário e batisaremos de  $\varepsilon_3$ .

Ora, se  $E$  tiver base ortonormal de autovetores de  $T$ , é natural que procuremos formar tal base, a partir de  $\varepsilon_3$ , procurando  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  entre os vetores ortogonais a  $\varepsilon_3$ . Consideremos, então,

$$E_0 = \{v \in E \mid \langle v, \varepsilon_3 \rangle = 0\}.$$

É imediato que  $E_0$  é um subespaço vetorial de  $E$ . Também é fato que a dimensão de  $E_0$  é dois, já que, se acrescentarmos  $\varepsilon_3$  aos elementos de qualquer base de  $E_0$ , teremos base de  $E$ . O tempero que vai, de fato, fazer a diferença, é a seguinte observação :

$$v \in E_0 \Rightarrow \langle v, \varepsilon_3 \rangle = 0 \Rightarrow \langle v, \lambda \varepsilon_3 \rangle = 0 \Rightarrow \langle v, T\varepsilon_3 \rangle = 0 \Rightarrow \langle Tv, \varepsilon_3 \rangle = 0.$$

Ou seja, se  $v$  está em  $E_0$ , então  $Tv$  também está em  $E_0$ . Ora, como  $E_0$  é de dimensão dois e podemos olhar para  $T$  como transformação linear de  $E_0$  em  $E_0$ , satisfazendo



$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle \quad \forall u, v \in E_o,$$

nossa primeira versão do Teorema Espectral, já demonstrada, para o caso de dimensão 2, assegura que  $E_o$  tem base ortonormal,  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ , de autovetores de  $T$ . Juntando,  $\varepsilon_3$ , temos a base de  $E$ ,  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ , de autovetores de  $T$ . Só falta enunciar o **Teorema Espectral**, caso tridimensional.

**Teorema:** Se  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é transformação linear autoadjunta, então  $\mathbb{R}^3$  tem base ortonormal de autovetores de  $T$ .

**Exercício 18.4** *Você consegue fazer o caso tetradimensional? Isto é: Suponha que  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  seja transformação linear dada, na base canônica, por matriz simétrica. Mostre que  $\mathbb{R}^4$  tem base ortonormal de autovetores de  $T$ .*



# Capítulo 19

## As superfícies quádricas

Retornemos a nossa equação geral do segundo grau em  $\mathbb{R}^3$ , já escrita na forma

$$\langle Tw, w \rangle + \langle w_0, w \rangle + J = 0.$$

A transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , autoadjunta, é dada, na base canônica, pela matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & G \end{pmatrix};$$

o vetor  $w_0$  se escreve, na base canônica,

$$w_0 = \begin{pmatrix} G \\ H \\ I \end{pmatrix}.$$

Assim,  $w$  satisfaz a equação se, e somente se, suas coordenadas na base canônica,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , satisfazem

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

O Teorema Espectral nos garante a existência de base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  na qual a matriz de  $T$  é diagonal. Para economizar letras, chamaremos também de  $x$ ,  $y$  e  $z$  as novas coordenadas. Traduzida em coordenadas, nossa equação vira

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + J = 0$$

( $a, b$  e  $c$  são os autovalores de  $T$ ;  $d, e$  e  $f$  são as coordenadas de  $w_0$ ).

Tentemos descrever o conjunto solução, segundo os sinais de  $a, b$  e  $c$ .

### a O elipsoide

**1º caso:**  $a, b$  e  $c$  não nulos e com o mesmo sinal, que podemos, sem perda de generalidade, supor positivo (trocando, eventualmente, os sinais de  $d, e$  e  $f$ ).

Podemos escrever a equação como

$$a \left( x + \frac{d}{2a} \right)^2 + b \left( y + \frac{e}{2b} \right)^2 + c \left( z + \frac{f}{2c} \right)^2 = K,$$

com

$$K = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4b} + \frac{f^2}{4c} - J.$$

Nossa equação vira

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = K,$$

com  $a$ ,  $b$  e  $c$  positivos. Temos, então, as seguintes possibilidades para o conjunto solução:

- (i)  $K < 0 \rightarrow$  conjunto vazio;
- (ii)  $K = 0 \rightarrow$  um ponto,  $(0, 0, 0)$ ;
- (iii)  $K > 0 \rightarrow$  podemos dividir por  $K$  e fazer

$$\frac{a}{K} = \alpha^2, \quad \frac{b}{K} = \beta^2, \quad \frac{c}{K} = \gamma^2,$$

$\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ , transformando nossa equação em

$$(\alpha x)^2 + (\beta y)^2 + (\gamma z)^2 = 1.$$

Nossa superfície é o que chamamos de um **elipsoide** - se chamarmos  $\alpha x$  de  $x$ ,  $\beta y$  de  $y$  e  $\gamma z$  de  $z$ , estaremos mudando as escalas, o que deformará nossa superfície, mas permitirá que vejamos que o que temos é a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , com achatamentos ou esticamentos nas três direções.

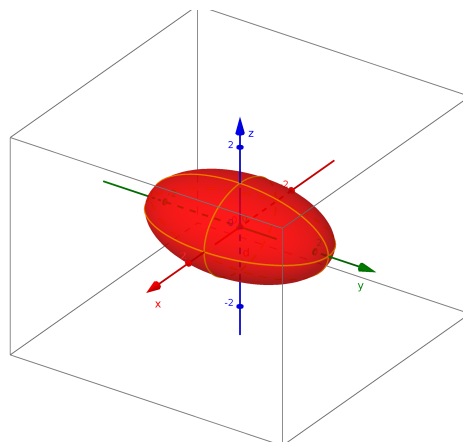


Figura 19.1: Elipsoide

**Exercício 19.1** Mostre que a interseção dessa superfície com um plano qualquer é ou bem vazia, ou um ponto ou uma elipse.

## b Os hiperboloides

**2º caso:**  $a$ ,  $b$  e  $c$  não nulos, mas com sinais distintos.

Podemos, como no caso anterior, fazendo uma translação (nova origem), obter um sistema de coordenadas em que a equação seja

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = K$$

e, sem perda de generalidade, supor que  $a$  e  $b$  têm o mesmo sinal (os outros casos se reduzem a este, permutando coordenadas). Se  $K \neq 0$ , podemos dividir por  $K$  e, conforme os sinais, teremos equações dos tipos

$$(i) (\alpha x)^2 + (\beta y)^2 - (\gamma z)^2 = 1$$

ou

$$(ii) -(\alpha x)^2 - (\beta y)^2 + (\gamma z)^2 = 1.$$

Se  $K = 0$ , teremos

$$(iii) (\alpha x)^2 + (\beta y)^2 = (\gamma z)^2.$$

Para enxergar melhor, vamos fazer mudanças de escala, que resultarão em esticamentos e /ou achatamentos: chamaremos  $\alpha x$  de  $x$ ,  $\beta y$  de  $y$  e  $\gamma z$  de  $z$ . Desta forma, os três casos viram:

$$(i) x^2 + y^2 - z^2 = 1; \quad (ii) z^2 - (x^2 + y^2) = 1; \quad (iii) x^2 + y^2 = z^2.$$

Usando coordenadas polares no plano  $Oxy$ , teremos  $x^2 + y^2 = r^2$ , de forma que, em cada um dos casos, podemos olhar para uma seção da figura por um plano vertical passando pelo eixo  $Oz$ . Nossos casos, se reduzem, então, a:

$$(i) r^2 - z^2 = 1$$

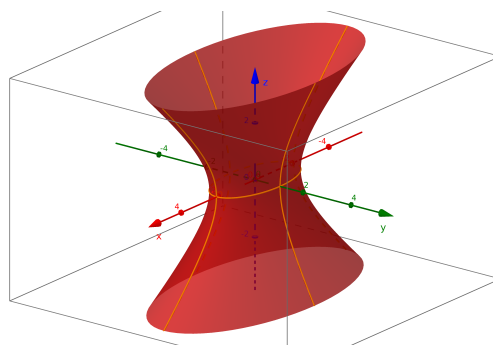


Figura 19.2: Hiperboloide de uma folha

Temos uma superfície de revolução, obtida girando uma hipérbole em torno do eixo de simetria que não passa pelos focos. Cada seção por plano contendo o eixo  $Oz$

terá a cara da figura acima (hipérbole  $r^2 - z^2 = 1$ ). Nossa superfície é obtida desse hiperboloide, por achatamentos e/ou esticamentos nas direções dos eixos, e é chamada de **hiperboloide de uma folha**.

$$(ii) z^2 - r^2 = 1$$

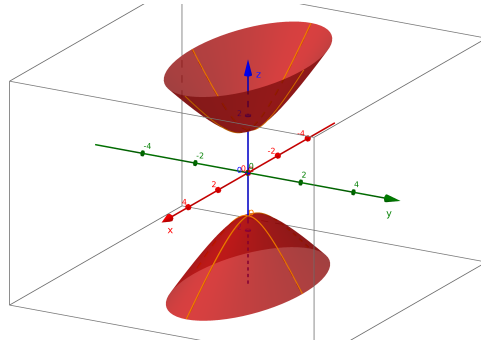


Figura 19.3: Hiperboloide de duas folhas

Temos um outro tipo de superfície de revolução: giramos uma hipérbole em torno do eixo passando pelos focos, de forma que as seções por planos contendo o eixo  $Oz$  terão a cara da hipérbole da figura acima ( $z^2 - r^2 = 1$ ). Os eventuais esticamentos e achatamentos, nas direções dos eixos, darão nossa superfície, chamada de **hiperboloide de duas folhas**.

$$(iii) r^2 = z^2$$

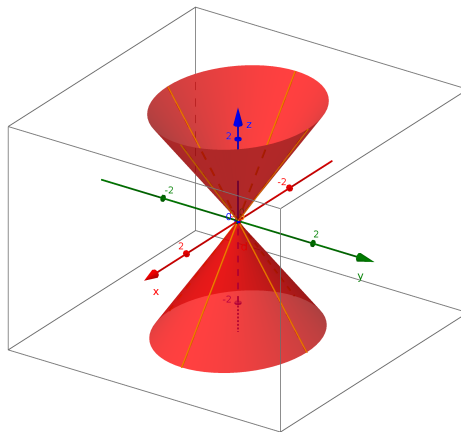


Figura 19.4: Cone elíptico

Trata-se de um cone de revolução (suas seções com os planos contendo o eixo  $Oz$  são os pares de retas  $r^2 = z^2$ ). Com os achatamentos e/ou esticamentos devidos, temos um **cone elíptico** (note que se trata de um cone reto; as seções por planos paralelos a  $Oxy$  são elipses com centro no eixo  $Oz$ ).

## c O parabolóide elíptico

**3º caso:** um dos três autovalores é nulo e os outros dois têm o mesmo sinal.

Podemos, então, supor que  $c = 0$  e que  $a$  &  $b$  são positivos. Temos, então, fazendo

$$x =: x + \frac{d}{2a}, \quad y =: y + \frac{e}{2b}, \quad z =: z + \frac{1}{f} \left( \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4b} + J \right)$$

e supondo  $f \neq 0$  o caso  $f = 0$  será visto mais à frente, uma equação da forma

$$ax^2 + by^2 + fz = 0.$$

Com as já tradicionais mudanças de escala, teremos  $x^2 + y^2 = z$  ou  $x^2 + y^2 = -z$ .

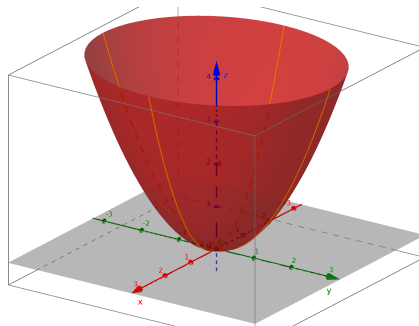


Figura 19.5: Parabolóide elíptico

Fazendo  $x^2 + y^2 = r^2$ , as seções por planos contendo o eixo  $Oz$  serão parábolas dos tipos  $z = r^2$  ou  $z = -r^2$ . Com os achatamentos e/ou esticamentos de praxe, teremos o que é chamado um **parabolóide elíptico** (as seções verticais são parábolas e as horizontais são elipses).

## d O parabolóide hiperbólico

**4º caso:** um dos autovalores é nulo e os outros dois têm sinais opostos.

Sem perda de generalidade, podemos supor  $c = 0$ , o que nos dá, após a translação de praxe,

$$ax^2 + by^2 + fz = 0$$

(vamos, de novo, supor  $f \neq 0$ , deixando para depois o caso  $f = 0$ ). Após mudanças de escala, ficamos com

$$z = x^2 - y^2$$

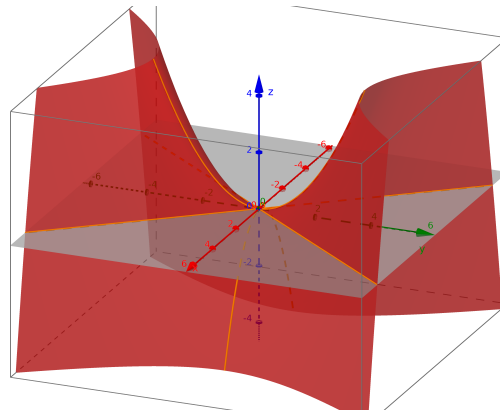


Figura 19.6: Sela

(ou, o que dá no mesmo,  $z = y^2 - x^2$ ).

Trata-se de uma sela. Sua interseção com o plano  $y = 0$  é  $z = x^2$ ; com o plano  $x = 0$ , é  $z = -y^2$ . As seções por planos horizontais com  $z \neq 0$  são hipérbolas (com focos no plano  $y = 0$ , se  $z > 0$ , ou no plano  $x = 0$ , se  $z < 0$ ); a seção pelo plano  $z = 0$  é um par de retas concorrentes. Com os devidos esticamentos e/ou encolhimentos, continuamos com uma sela. Seu nome erudito é **parabolóide hiperbólico**.

## e Os cilindros cônicos

5º caso: Dois dos três autovalores são nulos.

Vamos trabalhar, sem perda de generalidade, com  $a = b = 0$  e  $c \neq 0$ . Temos, após translação ,

$$dx + ey + cz^2 = 0.$$

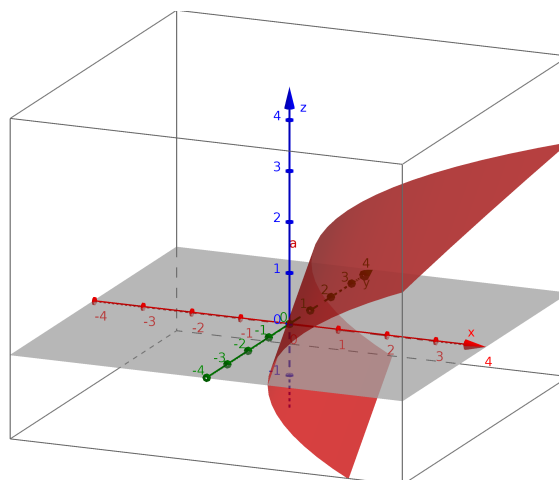


Figura 19.7: Cilindro parabólico



Podemos, ainda, a menos que  $d = e = 0$ , operar uma pequena mudança de base ortonormal no plano  $Oxy$ :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{d^2 + e^2}}(d, e), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{d^2 + e^2}}(-e, d).$$

Chamando, provisoriamente, a coordenada correspondente a  $\varepsilon_1$  de  $u$ , temos

$$u = \left\langle (x, y), \frac{1}{\sqrt{d^2 + e^2}}(d, e) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{d^2 + e^2}}(dx + ey) = -\frac{c}{\sqrt{d^2 + e^2}}z^2.$$

Assim, temos uma calha parabólica. Na verdade, trata-se de um cilindro reto, tendo como diretriz uma parábola. Na verdade, podemos enquadrar este 5º caso em um caso mais geral.

**5º caso (versão mais geral):** Pelo menos uma das variáveis desaparece.

Assim, englobamos a versão anterior do 5º caso e todos os casos que havíamos deixado para depois. Ficamos reduzidos a uma equação do segundo grau a uma ou duas variáveis, o que, no plano correspondente a fazer nula a (ou uma das) variável (eis) desaparecida(s), define uma cônica. Sobre essa cônica se ergue um **cilindro** reto, tendo por diretriz essa cônica.

## f O hiperboloide de uma folha é regrado

A título de curiosidade, vamos provar uma interessante propriedade dos hiperboloides de uma folha: trata-se de **superfícies regradas** (uma superfície é dita regradada se é uma união de retas). Como o hiperboloide geral de uma folha é obtido, via transformação linear, do hiperboloide de equação  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  e transformações lineares levam retas em retas, podemos nos limitar à demonstração desse caso particular. Vamos encaminhar a prova, deixando o resto como exercício.

Seja

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1 \right\}$$

e consideremos sua interseção com o plano  $z = 0$ , que é um círculo. Fixemos o ponto  $(a, b, 0)$  de  $S$ , de modo que  $a^2 + b^2 = 1$ , e tentemos encontrar  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , com  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2$ , tal que a reta

$$r = \{(a, b, 0) + t(\alpha, \beta, \gamma), t \in \mathbb{R}\}$$

esteja contida em  $S$ . Para tal, é necessário e suficiente que

$$(a + t\alpha)^2 + (b + t\beta)^2 - (t\gamma)^2 = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Fazendo as contas, isso é equivalente a

$$(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)t^2 + 2(a\alpha + b\beta)t = 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Assim,

$$(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)t + 2(a\alpha + b\beta) = 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}, t \neq 0.$$

Passando ao limite, quando  $t \rightarrow 0$ , obtemos  $a\alpha + b\beta = 0$  e, conseqüentemente,  $\gamma^2 = 1$ . Restam, ao fim das contas, duas retas: as correspondentes aos vetores  $(-b, a, 1)$  e  $(-b, a, -1)$ .

**Exercício 19.2** *Dado um ponto qualquer de  $S$ , mostre que existem exatamente duas retas contidas em  $S$  que por ele passam. Exiba a matriz da transformação linear que converte  $S$  no hiperboloide de equação  $ax^2 + by^2 - cz^2 = 1$ , com  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ .*

# Capítulo 20

## Isometrias

Aproveitando o embalo do Teorema Espectral, vamos examinar as transformações do espaço que preservam distâncias. Assim, suporemos que  $E$  é um espaço vetorial (real), com produto interno e

$$f : E \rightarrow E$$

é tal que

$$|f(u) - f(v)| = |u - v| \quad \forall u, v \in E.$$

Uma tal transformação é dita **isométrica**. Transformações isométricas, é evidente, são sempre injetivas. Uma transformação isométrica que é também sobrejetiva (e, portanto, bijetiva) é dita uma **isometria**. Começaremos com a hipótese adicional de que há um ponto fixo de  $f$ , ou seja: existe  $x$  em  $E$  tal que  $f(x) = x$ . Note que não estamos supondo que  $f$  seja linear; mas podemos admitir, sem perda de generalidade, que o ponto fixo seja  $0$ , de modo que  $f(0) = 0$ . Começaremos sem hipóteses adicionais; em seguida nos restringiremos a  $E$  tridimensional; finalmente, abriremos mão da existência de um ponto fixo.

**Exercício 20.1** *Suponha que  $f$  seja uma transformação isométrica do plano no plano. Suponhamos, apenas para ter uma boa noção da coisa, que os pontos  $A, B$  e  $C$  são não colineares. Mostre que o triângulo  $f(A)f(B)f(C)$  é congruente a  $ABC$ . Conclua que  $f$ , além de distâncias, preserva ângulos.*

### a Transformações isométricas com ponto fixo

Sejamos absolutamente gerais. Consideremos um espaço vetorial (real)  $E$ , com produto interno, e uma transformação isométrica  $f : E \rightarrow E$ , com  $f(0) = 0$ . Não faremos qualquer restrição sobre a dimensão de  $E$ , nem mesmo que seja finita. Observemos que  $f$  preserva a norma:

$$|f(u)| = |f(u) - 0| = |f(u) - f(0)| = |u - 0| = |u| \quad \forall u \in E.$$

Daí segue a preservação do produto interno.

**Proposição 1:** Consideremos um espaço vetorial (real)  $E$ , com produto interno, e uma transformação isométrica  $f : E \rightarrow E$ , com  $f(0) = 0$ . Então

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in E.$$

Demonstração : Partamos da identidade básica. Dados  $u$  e  $v$  em  $E$ , temos

$$\langle f(u) - f(v), f(u) - f(v) \rangle = |f(u) - f(v)|^2 = |u - v|^2 = \langle u - v, u - v \rangle.$$

Desenvolvendo os dois lados, temos

$$\langle f(u), f(u) \rangle + \langle f(v), f(v) \rangle - 2 \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle - 2 \langle u, v \rangle.$$

Como a norma, já provamos, é preservada, segue

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

■

Tem mais:

**Proposição 2:** Consideremos um espaço vetorial (real)  $E$ , com produto interno, e uma transformação isométrica  $f : E \rightarrow E$ , com  $f(0) = 0$ . Então  $f$  é linear.

Demonstração : Para provar que  $f(u + tv) = f(u) + tf(v)$ , para quaisquer  $u, v$  em  $E$  e qualquer  $t$  em  $\mathbb{R}$ , basta provar que

$$|f(u + tv) - (f(u) + tf(v)), f(u + tv) - (f(u) + tf(v))| = 0.$$

É só questão de fixar  $u, v$  em  $E$  e  $t$  em  $\mathbb{R}$  e fazer as contas:

$$\begin{aligned} & \langle f(u + tv) - (f(u) + tf(v)), f(u + tv) - (f(u) + tf(v)) \rangle = \\ & = \langle f(u + tv), f(u + tv) \rangle + \langle f(u), f(u) \rangle + \langle tf(v), tf(v) \rangle - \\ & - 2 \langle f(u + tv), f(u) \rangle - 2t \langle f(u + tv), f(v) \rangle + 2t \langle f(u), f(v) \rangle = \\ & = \langle u + tv, u + tv \rangle + \langle u, u \rangle + t^2 \langle v, v \rangle - 2 \langle u + tv, u \rangle - 2t \langle u + tv, v \rangle + 2t \langle u, v \rangle = 0. \end{aligned}$$

■

## b Isometrias lineares no plano e no espaço

Transformações isométricas são, sempre, injetivas. Assim, se  $E$  é espaço vetorial real, com produto interno, de dimensão finita (como todos os que consideraremos, daqui para a frente), toda transformação linear isométrica  $T : E \rightarrow E$  é bijetiva e, portanto, é uma isometria.

**Proposição:** Suponha que  $E$  é bidimensional e que  $T : E \rightarrow E$  é uma transformação linear isométrica. Então uma das duas alternativas a seguir ocorre:

(i)  $T$  é rotação e, em qualquer base ortonormal de  $E$ , sua matriz é da forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix};$$

(ii)  $T$  é reflexão através de reta passando por 0 e existe base ortonormal em que sua matriz é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A transformação identidade,  $Tx = x \forall x \in E$ , é uma rotação de ângulo 0.

Demonstração : Começemos fixando, para  $E$ , uma base ortonormal,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , o que transforma  $E$  em  $\mathbb{R}^2$ . Temos então, em coordenadas,  $T\mathbf{e}_1 = (a, b)$  e  $T\mathbf{e}_2 = (-b, a)$  ou  $T\mathbf{e}_2 = (b, -a)$ , com  $a^2 + b^2 = 1$ . Podemos, então, tomar  $\theta$  tal que  $(a, b) = (\cos \theta, \sin \theta)$ . Se  $T\mathbf{e}_2 = (-b, a) = (-\sin \theta, \cos \theta)$ ,  $T$  é uma rotação de  $\theta$ ; se  $T\mathbf{e}_2 = (b, -a) = (\sin \theta, -\cos \theta)$ , então  $T$  é reflexão através da reta  $r$  que passa por 0 e faz ângulo  $\theta/2$  com a "horizontal" (mais especificamente, a direção de  $r$  é dada por vetor unitário  $u_1$  tal que  $\langle u_1, \mathbf{e}_1 \rangle = \cos(\theta/2)$  e  $\langle u_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \sin(\theta/2)$ ). Nesse último caso (reflexão), podemos fazer  $u_2 = -\sin(\theta/2)\mathbf{e}_1 + \cos(\theta/2)\mathbf{e}_2$ , que formará com  $u_1$  nova base ortonormal, tal que  $Tu_1 = u_1$  e  $Tu_2 = -u_2$ . ■

**Exercício 20.2** Se achar que precisa, dê uma revisada em rotações e reflexões em  $\mathbb{R}^2$ .

A ocasião parece boa para explicitarmos como funcionam, em dimensão 3, rotações em torno de um eixo e reflexões através de um plano.

Começemos com a **reflexão** através do plano  $\alpha$ , com  $0 \in \alpha$ . A ideia mais simples parece ser tomar uma base ortonormal,  $\{u_1, u_2, u_3\}$ , tal que  $u_1$  seja normal a  $\alpha$  e  $u_2$  &  $u_3$  estejam em  $\alpha$ . Então, se  $T$  é a reflexão através de  $\alpha$ , temos  $Tu_1 = -u_1$ ,  $Tu_2 = u_2$ ,  $Tu_3 = u_3$ , de modo que a matriz de  $T$  numa tal base será

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercício 20.3** Note que, para que a matriz tenha a forma acima, basta que  $u_1$  seja normal a  $\alpha$  e  $u_2$  &  $u_3$  sejam base de  $\alpha$ .

Reciprocamente, se  $T : E \rightarrow E$  é linear e existe base  $\{u_1, u_2, u_3\}$ , tal que  $u_1$  seja normal a  $u_2$  &  $u_3$ , com  $Tu_1 = -u_1$ ,  $Tu_2 = u_2$ ,  $Tu_3 = u_3$ , então  $T$  é reflexão através do plano  $\alpha$  gerado por  $u_2$  &  $u_3$ .

Vejam, agora, o caso das **rotações**. Se  $T$  é rotação de ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $r$  (passando pela origem), gerado pelo vetor  $u_1$ , então os vetores do plano  $\alpha$ , passando pela origem e normal a  $u_1$ , serão girados de  $\theta$  dentro de  $\alpha$ . Supondo que  $u_2$  e  $u_3$  sejam vetores unitários e ortogonais em  $\alpha$  e admitindo que o sentido positivo de rotação seja de  $u_2$  para  $u_3$ , teremos  $Tu_2 = \cos \theta u_2 + \sin \theta u_3$  e  $Tu_3 = -\sin \theta u_2 + \cos \theta u_3$ . Assim, a matriz de  $\theta$  na base  $\{u_1, u_2, u_3\}$  será

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Reciprocamente, se, em alguma base ortonormal,  $\{u_1, u_2, u_3\}$ , a matriz de  $T$  for como acima, então  $T$  é rotação de  $\theta$  em torno da reta definida pelo vetor  $u_1$ .

**Teorema:** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma transformação linear isométrica. Então  $T$  é de um dos três tipos a seguir:

- (i) uma rotação em torno de reta passando pela origem;
- (ii) uma reflexão através de plano contendo a origem;
- (iii) uma rotação em torno de eixo passando pela origem seguida de reflexão através do plano normal ao eixo de rotação e passando pela origem.

Demonstração : Observemos que, por ser isométrica,  $T$  é injetiva. Como se trata de transformação linear,  $T$  é, forçosamente, uma bijeção. Começemos procurando um eixo, isto é: uma reta, passando pela origem, que fique parada. Ora, como já vimos, na discussão sobre o Teorema Espectral em dimensão 3 (página 112), nossa transformação,  $T$ , tem ao menos um autovalor,  $\lambda$ . Mais ainda, se  $u$  é autovetor associado a  $\lambda$ , como

$$|u| = |Tu| = |\lambda u| = |\lambda| |u|,$$

temos  $\lambda = \pm 1$ . Assim, já podemos começar fixando  $u_1$ , com  $|u_1| = 1$  e  $Tu_1 = \pm u_1$ . Já é um bom começo. Mas, melhor ainda, o plano  $\alpha$ , passando pela origem e normal a  $u_1$ , também é invariante por  $T$  (isto é:  $T\alpha \subset \alpha$ ). De fato,  $\alpha$  é definido por

$$\alpha = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, u_1 \rangle = 0\}.$$

Assim,

$$v \in \alpha \Rightarrow \langle v, u_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle Tv, Tu_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle Tv, \pm u_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle Tv, u_1 \rangle = 0 \Rightarrow Tv \in \alpha$$

(entendendo  $\langle Tv, \pm u_1 \rangle = 0$  como  $\langle Tv, u_1 \rangle = 0$  ou  $\langle Tv, -u_1 \rangle = 0$ ). Podemos, então, enxergar  $T$  como uma isometria no plano  $\alpha$  (note que, forçosamente,  $T$  será bijetiva). Como acabamos de ver, em  $\alpha$ ,  $T$  é uma rotação ou uma reflexão (caso em que tomaremos base ortonormal de  $\alpha$  formada por  $u_2$  tal que  $Tu_2 = u_2$  e por  $u_3$  tal que  $Tu_3 = -u_3$ ). Isso nos deixa 4 alternativas:

- (1)  $Tu_1 = u_1$  e  $T$  é rotação em  $\alpha \rightarrow T$  é rotação em torno do eixo definido por  $u_1$ ;
- (2)  $Tu_1 = u_1$  e  $T$  é reflexão em  $\alpha \rightarrow T$  é reflexão através do plano gerado por  $u_1$  e  $u_2$ ;
- (3)  $Tu_1 = -u_1$  e  $T$  é rotação em  $\alpha \rightarrow T$  é rotação seguida de reflexão através do plano ( $\alpha$ ) que passa pela origem e é normal ao eixo de rotação;
- (4)  $Tu_1 = -u_1$  e  $T$  é reflexão em  $\alpha \rightarrow T$  é rotação (de  $\pi$ , em torno do eixo definido por  $u_2$ ).

■

## c O caso geral, em dimensão três

Vamos, agora, suprimir a hipótese de que nossa transformação isométrica leve 0 em 0. Assim,  $E$  é um espaço vetorial (real), com produto interno, e  $f : E \rightarrow E$  é tal que

$$|f(u) - f(v)| = |u - v| \quad \forall u, v \in E.$$

É claro que, chamando  $f(0)$  de  $w$ , temos  $f(u) = w + Tu$ , para todo  $u$  em  $E$ , com  $T : E \rightarrow E$  definida por  $Tu = f(u) - w$ . Ora, é imediato que  $T$  é isométrica e que  $T0 = 0$ . Logo,  $T$  é linear (pela Proposição 2, página 124). Se  $E$  é tridimensional,  $T$  se enquadra nas hipóteses do Teorema que acabamos de provar. Poderíamos parar por aqui...mas vamos continuar.

Observemos que o Teorema nos garante que, se  $E$  é tridimensional, podemos escrevê-lo como soma direta de dois subespaços muito especiais, ambos invariantes por  $T$ : um deles é o plano  $\alpha$ , passando pela origem, através do qual se faz a reflexão e/ou que roda em torno do eixo ao qual é perpendicular.

**Exercício 20.4** *Seja  $E$  um espaço vetorial (de dimensão 3, para simplificar, mas basta que seja de dimensão finita) com produto interno. Sejam  $u$  um vetor de  $E$ , não nulo, e  $\alpha$  o subespaço vetorial de  $E$  formado pelos vetores perpendiculares a  $u$ . Mostre que  $E$  é soma direta dos subespaços  $\alpha$  e  $\beta$ , sendo  $\beta$  a reta formada pelos múltiplos de  $u$ , ou seja: todo vetor de  $E$  se escreve, de maneira única, como soma de um elemento de  $\alpha$  com um de  $\beta$ .*

Assim como as coisas estão, porém, não há qualquer relação entre  $w$  e o plano  $\alpha$ . Como a identificação do espaço (geométrico) dos pontos com o espaço dos vetores depende da fixação de uma origem, é possível que, mudando a origem de forma adequada, as coisas melhorem.

Podemos, para começar, escrever  $w = w_0 + w_1$ , com  $w_0$  em  $\alpha$  e  $w_1$  em  $\beta$ , sendo  $\beta$  a reta passando pela origem e normal a  $\alpha$  (em outras palavras,  $\beta = \alpha^\perp$  é o subespaço ortogonal a  $\alpha$ ). Como vimos na demonstração do Teorema, tanto  $\alpha$  como  $\beta$  são invariantes por  $T$ ;  $\beta$  é gerado por um vetor,  $u_1$ , tal que  $Tu_1 = \pm u_1$ . Chamemos a restrição de  $T$  a  $\alpha$  de  $R$  (que serve tanto para rotação como para reflexão). Se  $v$  é um vetor qualquer de  $E$ , podemos escrever  $v = v_0 + v_1$ , com  $v_0 \in \alpha$  e  $v_1 \in \beta$ , de modo que

$$f(v) = f(v_0 + v_1) = w + T(v_0 + v_1) = (w_0 + Rv_0) + (w_1 \pm v_1) = f_0(v_0) + f_1(v_1).$$

Vamos examinar, separadamente, o que acontece em  $\alpha$  e em  $\beta$ . Começemos com  $\beta$ , que é mais simples. Temos duas possibilidades:

- (i)  $f_1(v_1) = w_1 + v_1 \rightarrow$  nada fazemos;
- (ii)  $f_1(v_1) = w_1 - v_1 \rightarrow$  mudamos a origem para  $\frac{w_1}{2}$ .

Assim, o ponto correspondente a  $v_1$  passa a ser  $x_1 = v_1 - \frac{w_1}{2}$ . A expressão de nossa isometria (em  $\beta$ ) referente à nova origem passa a ser:

$$g_1(x_1) = f_1\left(\frac{w_1}{2} + x_1\right) - \frac{w_1}{2} = w_1 - \left(\frac{w_1}{2} + x_1\right) - \frac{w_1}{2} = \frac{w_1}{2} - x_1 - \frac{w_1}{2} = -x_1.$$

Assim, após, eventualmente, mudança de origem, nossa transformação, restrita a  $\beta$ , se restringe a duas possibilidades:

- (1) uma translação, dentro de  $\beta$ ;
- (2) uma reflexão (em relação à origem) em  $\beta$ .

Vejam, agora, quais são as possibilidades em  $\alpha$ .

- (i)  $f_o(v_o) = w_o + Rv_o$ , sendo  $R$  uma reflexão em  $\alpha \rightarrow$  mudamos a origem

Para começar, tomamos  $u_2$  e  $u_3$  em  $\alpha$ , unitários e ortogonais, tais que  $Ru_2 = u_2$  e  $Ru_3 = -u_3$ . Como  $u_2$  e  $u_3$  formam base de  $\alpha$ , podemos decompor  $w_o$  como soma de  $w_2$  e  $w_3$ , sendo  $w_2$  múltiplo de  $u_2$  e  $w_3$  múltiplo de  $u_3$ . Mudando a origem para  $\frac{w_3}{2}$ , o ponto correspondente a  $v_o$  passa a ser  $x_o = v_o - \frac{w_3}{2}$ . A nova expressão de nossa isometria (em  $\alpha$ ) será:

$$g_o(x_o) = f_o\left(\frac{w_3}{2} + x_o\right) - \frac{w_3}{2},$$

de modo que (faça as contas)

$$g_o(u_2) = u_2 + w_2,$$

$$g_o(u_3) = -u_3 + w_2.$$

Isto nos dá, com a nova origem, a seguinte versão para nossa isometria (em  $\alpha$ ): trata-se de uma reflexão seguida de um deslocamento paralelo à reta invariante.

- (ii)  $f_o(v_o) = w_o + Rv_o$ , sendo  $R$  uma rotação em  $\alpha$  (mas não a identidade)  $\rightarrow f_o$  tem um ponto fixo, que será nossa nova origem

De fato, basta notar que, como  $R$  não é a identidade,  $I - R$  é um **isomorfismo** (bijeção linear) em  $\alpha$ , de modo que existe um único  $\bar{v} = (I - R)^{-1}w_o$  em  $\alpha$  tal que  $f(\bar{v}) = \bar{v}$ . Mudando a origem para  $\bar{v}$ , o ponto correspondente a  $v_o$  passa a ser  $x_o = v_o - \bar{v}$ . A nova expressão de nossa isometria (em  $\alpha$ ) será:

$$g_o(x_o) = f(\bar{v} + x_o) - \bar{v} = w_o + R\bar{v} + Rx_o - \bar{v} = Rx_o.$$

Assim, com a mudança de origem, nossa isometria é uma rotação. O caso em que  $R$  é a identidade se resume a uma translação em  $\alpha$ .

Juntando os dois casos referentes a  $\alpha$ , concluímos que, após uma eventual mudança de origem, nossa transformação, restrita a  $\alpha$ , será de um dos três seguintes tipos:

- (A) uma reflexão seguida de deslocamento paralelo à reta invariante;



- (B) uma rotação;
- (C) uma translação.

Juntando os dois casos referentes a  $\beta$  e os três referentes a  $\alpha$ , teremos, em princípio, seis casos. Mas, considerando que a identidade é uma rotação (de ângulo nulo) em torno de qualquer eixo e que translações de  $w$  incluem a possibilidade de que  $w$  seja nulo, podemos resumir nossa meia dúzia a três.

**Teorema:** Se  $f$  é uma transformação isométrica do espaço  $E$  (entendido como espaço euclidiano tridimensional), então  $f$  é de um dos seguintes tipos:

- (1) **isometria helicoidal** - consiste em rotação seguida de translação em direção paralela ao eixo de rotação (inclui rotações puras, translações puras e identidade);
- (2) **reflexão com deslizamento** - consiste em reflexão através de um plano, seguida de translação em direção paralela a este (inclui reflexões puras);
- (3) **rotação refletida** - consiste em rotação seguida de reflexão através de plano ortogonal ao eixo de rotação.

Demonstração : Dê uma olhada em tudo que acabamos de fazer e confira. ■

**Observação:** Na vida real (em Mecânica, por exemplo), pode ser muito relevante distinguir **isometria própria** de **isometria imprópria**. Isometrias próprias são as que preservam **orientação**, as outras são impróprias. Uma definição mais precisa pode ser: isometrias próprias são aquelas tais que, dados quaisquer  $A, B, C, D$  pontos do espaço, se tem

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \det(\vec{A'B'}, \vec{A'C'}, \vec{A'D'}),$$

sendo  $A', B', C', D'$  as imagens de  $A, B, C, D$ . Como rotações e translações, obviamente, preservam orientação, enquanto reflexões revertem, as únicas isometrias próprias do espaço euclidiano tridimensional são as do tipo (1) acima.

**Exercício 20.5** Reveja o conceito de orientação e conclua que isometrias próprias são aquelas que podem ser deformadas continuamente, como isometrias, na identidade.

**Exercício 20.6** Suponha que  $f_1$  e  $f_2$  são rotações do espaço em torno de eixos que se interceptam. Mostre que a composta,  $f_2 f_1$ , é uma rotação. Sugestão:  $f_2 f_1$  tem ponto fixo e preserva orientação.

**Exercício 20.7** Suponha que  $f_1$  e  $f_2$  são rotações do espaço em torno de eixos paralelos (mas não coincidentes). Mostre que a composta,  $f_2 f_1$ , é uma rotação, a menos que a soma dos ângulos de rotação se anule (módulo  $2\pi$ ). Mostre que, nesse último caso, a composta é uma translação. O que acontece se os eixos de rotação são retas reversas?

**Exercício 20.8** Dê uma olhada no texto e faça os 16 exercícios finais do livro *Isometrias*, de Elon Lages Lima, SBM, 1996.



**Parte IV**  
**TEOREMA ESPECTRAL**



# Capítulo 21

## A Decomposição em Valores Singulares

### a De volta a Apolônio

Para simplificar e clarear as ideias, comecemos com uma transformação linear bijetiva  $T$  de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ . Retomemos uma das ideias que apareceram no nosso estudo dos diâmetros das cônicas, particularmente das elipses.

Chamemos de  $S$  o círculo unitário no domínio. Como sabemos (basicamente por conta do Teorema Espectral),  $T(S)$  é uma elipse. Na demonstração do Teorema de Apolônio sobre diâmetros conjugados (Proposição 1, página 89), aprendemos que diâmetros conjugados de  $T(S)$  são imagens por  $T$  de diâmetros ortogonais de  $S$ . Como os diâmetros situados sobre os eixos principais de  $T(S)$  são conjugados, temos:

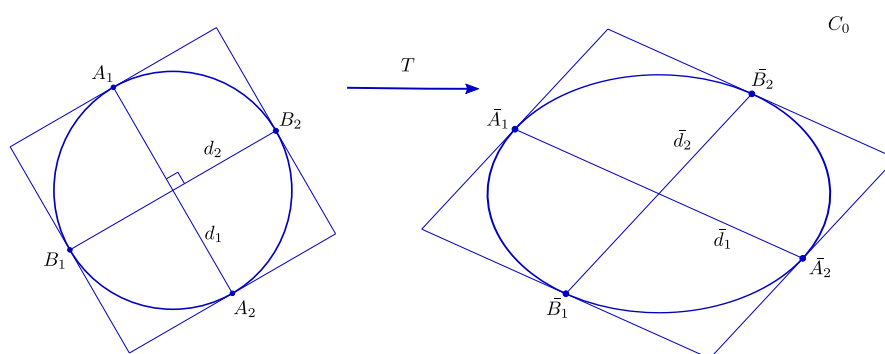



Figura 21.1: um teorema de Apolônio

**Teorema:** Se  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é linear (e bijetiva), existem bases ortonormais  $\alpha$  e  $\beta$  tais que a matriz de  $T$ , considerando  $\alpha$  no domínio e  $\beta$  no contradomínio,  $[T]_{\alpha}^{\beta}$ , é diagonal.

Demonstração : Sejam  $S$  a esfera unitária de  $\mathbb{R}^2$  e  $E = T(S)$ . Como  $E$  é uma elipse, sabemos, do Teorema do Apolônio, que diâmetros conjugados de  $E$  são imagens por  $T$  de

diâmetros ortogonais de  $S$ . Em particular, os diâmetros situados sobre os eixos de simetria de  $E$  são imagens por  $T$  de diâmetros ortogonais,  $d_1$  e  $d_2$ , de  $S$ . Se  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  são extremidades, respectivamente, de  $d_1$  e de  $d_2$ , temos nossas bases  $\alpha = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ,  $\beta_1 = T(\alpha)$ , obtendo  $\beta$  por normalização dos vetores de  $\beta_1$ . ■

Podemos, porém dar uma demonstração direta, para o caso bidimensional, sem recorrer a conhecimentos outros. Veja o vídeo  [SVD1](#).

Demonstração : Sejam  $E$  espaço vetorial real, de dimensão 2, com produto interno, e  $T : E \rightarrow E$  linear. Fixemos uma base ortonormal para  $E$ ,  $\{e_1, e_2\}$ . Para cada  $\theta$  em  $[0, \pi/2]$ , faça  $\varepsilon_1(\theta) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ ,  $\varepsilon_2(\theta) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$ . Defina  $f : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(\theta) = \langle T\varepsilon_1(\theta), T\varepsilon_2(\theta) \rangle$$

Nossa  $f$  é contínua (prove!) e, além disso,  $f(\pi/2) = -f(0)$ . Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $\theta$  em  $[0, \pi/2]$  tal que  $f(\theta) = 0$ . Fixando um tal  $\theta$ , basta tomar


$$\alpha = \{\varepsilon_1(\theta), \varepsilon_2(\theta)\}, \quad \beta = \left\{ \frac{1}{|T\varepsilon_1(\theta)|} \varepsilon_1(\theta), \frac{1}{|T\varepsilon_2(\theta)|} \varepsilon_2(\theta) \right\}.$$

■

## b A Decomposição em Valores Singulares

A demonstração acima é bonitinha, mas não parece evidente sua generalização para dimensões mais altas. Uma outra ideia pode vir da seguinte observação: o eixo maior do elipsoide corresponde ao maior valor de

$$\langle Tu, Tu \rangle = \langle T^*Tu, u \rangle,$$

com  $u$  na esfera unitária  $S$ . Veja o vídeo  [SVD2](#).

**Teorema da Decomposição em Valores Singulares:** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais reais com produto interno, de dimensão finita,  $k$ , e  $T : E \rightarrow F$  linear e bijetiva. Existem bases ortonormais,  $\alpha = \{v_1, \dots, v_k\}$  de  $E$  e  $\beta = \{u_1, \dots, u_k\}$  de  $F$ , e escalares estritamente positivos  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k > 0$ , tais que*

$$Tv_i = \sigma_i u_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Demonstração : Vamos demonstrar por indução sobre  $k$ . O caso  $k = 1$  é trivial; suponhamos, pois, o resultado provado para dimensões inferiores a um certo  $k$ , e suponhamos  $\dim E = \dim F = k$ . Consideremos a esfera unitária de  $E$ ,

$$S = \{v \in E \mid \langle v, v \rangle = 1\},$$

e a função  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(v) = \langle Tv, Tv \rangle.$$

$f$  assume seu máximo em um certo  $v_k$  de  $S$ . Como  $T$  é isomorfismo entre  $E$  e  $F$ ,  $Tv_k$  é não nulo e podemos, fazendo  $\sigma_k = |Tv_k|$ , escrever  $Tv_k = \sigma_k v_k$ , com  $|v_k| = 1$ . Vejamos, agora, quem é a imagem por  $T$  do espaço,  $E_1$ , dos vetores ortogonais a  $v_k$ . Seja  $v$  elemento de  $E_1$ , ou seja:  $\langle v, v_k \rangle = 0$ . Consideremos o círculo (contido em  $S$ ) dado pelos pontos  $\cos(t)v_k + \sin(t)v$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . Mais especificamente, seja  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , definida por

$$g(t) = f(\cos(t)v_k + \sin(t)v) = \langle T(\cos(t)v_k + \sin(t)v), T(\cos(t)v_k + \sin(t)v) \rangle.$$

Como  $v_k$  é ponto de máximo de  $f$  em  $S$ ,  $t = 0$  é ponto de máximo de  $g$ ; logo,  $g'(0) = 0$ . Explicitando um pouco, temos

$$g(t) = \cos^2(t) \langle Tv_k, Tv_k \rangle + \sin^2(t) \langle Tv, Tv \rangle + 2 \sin(t) \cos(t) \langle Tv, Tv_k \rangle,$$

de forma que

$$0 = g'(0) = 2 \langle Tv, Tv_k \rangle = 2\sigma_k \langle Tv, v_k \rangle.$$

Como  $\sigma_k > 0$ , temos  $\langle Tv, v_k \rangle = 0$ , o que demonstra que  $T(E_1)$  está contido no espaço,  $F_1$ , dos vetores ortogonais a  $v_k$ . Como  $T$  é isomorfismo entre  $E$  e  $F$ , temos, na realidade,  $T(E_1) = F_1$ . A hipótese de indução nos garante, agora, que o Teorema está demonstrado. ■

**Escólio:** Os **vetores singulares**,  $v_1, \dots, v_k$  são o que, usualmente, chamamos de pontos críticos de  $f$ ; os **valores singulares**,  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ , correspondem aos valores críticos,  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$ , de  $f$  (ou, se preferirmos, aos de  $\sqrt{f}$ ).

Embora O Teorema exija que  $T$  seja um isomorfismo, podemos enfraquecer essa hipótese. Usando o fato de que  $T$  é um isomorfismo entre o espaço ortogonal a seu núcleo e sua imagem, podemos estender o resultado, em forma matricial, para  $T$  qualquer.

**Corolário (Decomposição em Valores Singulares):** Se  $M$  é matriz real  $m \times n$ , existem matrizes ortogonais  $U$  e  $V$ , com  $U$   $m \times m$  e  $V$   $n \times n$ , e  $\Sigma = [\sigma_{ij}]$ ,  $m \times n$  e diagonal, com  $\sigma_{ij} = \sigma_i \geq \sigma_{i+1} \geq 0$ , se  $i = j$ , e  $\sigma_{ij} = 0$ , se  $i \neq j$ , de forma que

$$M = U\Sigma V^T.$$

Demonstração : Seja  $N$  o núcleo de  $T$ . O Teorema do Núcleo e da Imagem nos garante que  $T$  é um isomorfismo entre o Complemento Ortogonal de  $N$ , que chamaremos de  $E_1$  e a imagem de  $T$ , que chamaremos de  $F_1$ . O Teorema garante a existência de bases ortonormais  $u_1, \dots, u_k$ , de  $E_1$ , e  $v_1, \dots, v_k$ , de  $F_1$ , e de números  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k > 0$ , tais que  $Tu_i = \sigma_i v_i$ . Completamos, depois, nossas bases, para que se tornem bases ortonormais de  $E$  e de  $F$ , respectivamente, e fazemos  $\sigma_i = 0$ , se  $k < i \leq \min \{m, n\}$ . Uma forma simples de traduzir em termos matriciais o que obtivemos é lembrar que, quando multiplicamos duas matrizes,  $A$  e  $B$ , as colunas de  $AB$  são, cada uma, o produto de  $A$  pela correspondente coluna de  $B$ . Assim, se multiplicarmos nossa matriz original,  $M$ , pela matriz  $n \times k$ ,  $V_k$ , cujas colunas são os vetores  $v_1, \dots, v_k$ , obtemos a matriz  $m \times k$ , cujas colunas são os vetores  $\sigma_1 u_1, \dots, \sigma_k u_k$ . Esta última, por sua vez, é o produto da matriz  $U_k$ ,  $m \times k$ , cujas colunas são os vetores  $u_1, \dots, u_k$ , pela matriz diagonal  $\Sigma_k$ ,  $k \times k$ , com diagonal principal formada por  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ :  $MV_k = U_k \Sigma_k$ . Mais explicitamente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_k \end{bmatrix}.$$

Vamos, agora, completar a base de  $\mathbf{R}^n$ , acrescentando à direita, na matriz  $V_k$ , as colunas  $v_{k+1}, \dots, v_n$ , obtendo a matriz ortogonal  $V$ . Como o produto de  $M$  por cada um desses novos vetores é 0, acrescentamos à direita, em  $\Sigma_k$ ,  $n - k$  colunas nulas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1k} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nk} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \sigma_k & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, acrescentamos à direita, na matriz  $U_k$ , as colunas  $u_{k+1}, \dots, u_m$  que completam a base ortonormal de  $\mathbf{R}^m$ ; a nova matriz, ortogonal, é  $U$ . Para compensar, e visto que as novas colunas não devem produzir qualquer efeito, acrescentamos, embaixo da nova  $\Sigma_k$ ,  $m - k$  linhas nulas, obtendo a matriz  $m \times n$   $\Sigma$ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1k} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nk} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1k} & \cdots & u_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mk} & \cdots & u_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \sigma_k & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Como  $U$  e  $V$  são matrizes ortogonais, multiplicando à direita por  $V^T = V^{-1}$ , obtemos  $M = U\Sigma V^T$ . Podemos, claro, estender a diagonal até o limite, fazendo  $\sigma_i = 0$ , se  $k < i \leq \min\{m, n\}$ , obtendo uma das duas formas a seguir. ■

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & & & \\ & & & & \cdot & & & & & & \\ & & & & & \cdot & & & & & \\ & & & & & & \cdot & & & & \\ & & & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & & & \sigma_n & & \\ \hline & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & & & \\ & & & & \cdot & & & & & & \\ & & & & & \cdot & & & & & \\ & & & & & & \cdot & & & & \\ & & & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & & & \sigma_m & & \\ & & & & & & & & & & \end{bmatrix}.$$



## c Aproximação de Matrizes

A norma básica para matrizes  $m \times n$  é a **norma de Fröbenius**,  $\|\cdot\|$ , é definida por  $\| [b_{ij}] \| = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij}^2 \right)^{1/2}$ , oriunda do **produto interno**, para matrizes  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$ ,  $m \times n$ , dado por

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

**Observação:** Note que  $\langle A, B \rangle$  é a soma dos produtos escalares das colunas (linhas) de  $A$  pelas correspondentes colunas (linhas) de  $B$ , o que mostra que

$$\langle A, B \rangle = \langle A^T, B^T \rangle.$$

Daí decorre

**Proposição:** Sejam  $U$  e  $V$  **matrizes ortogonais**<sup>1</sup>,  $U$   $m \times m$ ,  $V$   $n \times n$ . Então os isomorfismos do espaço das matrizes  $m \times n$  dados por

$$M \mapsto UM, \quad M \mapsto MV, \quad M \mapsto UMV^T$$

preservam o produto interno, isto é, para quaisquer matrizes  $A$  e  $B$ , ambas  $m \times n$ , temos

$$\begin{aligned} \langle UA, UB \rangle &= \langle A, B \rangle, \\ \langle AV, BV \rangle &= \langle A, B \rangle, \\ \langle UAV^T, UBV^T \rangle &= \langle A, B \rangle. \end{aligned}$$

Demonstração : Se  $U$  é ortogonal,  $a_j$  é a  $j$ -ésima coluna de  $A$  e  $b_j$  é a  $j$ -ésima coluna de  $B$ , então, coo  $U$  preserva o produto interno de  $\mathbb{R}^m$ , temos

$$\langle A, B \rangle = \sum_{j=1}^n \langle a_j, b_j \rangle = \sum_{j=1}^n \langle Ua_j, Ub_j \rangle = \langle UA, UB \rangle.$$

Trabalhando com as linhas obtemos, analogamente,

$$\langle AV, BV \rangle = \langle (AV)^T, (BV)^T \rangle = \langle V^T A^T, V^T B^T \rangle = \langle A, B \rangle.$$

Trocando  $V$  por  $V^T$  e compondo os dois isomorfismos (observe que comutam), temos

$$\langle UAV^T, UBV^T \rangle = \langle A, B \rangle.$$

■

<sup>1</sup>Uma matriz quadrada é dita ortogonal se suas colunas são vetores unitários e, dois a dois, ortogonais; ou, alternativamente, se sua transposta é sua inversa.

**Exercício 21.1** Dadas matrizes  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$ ,  $m \times n$ , mostre que seu **produto interno**, definido acima, é dado por

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} = \text{tr}(A^T B) = \text{tr}(B^T A) = \text{tr}(AB^T) = \text{tr}(BA^T).$$

(para matriz quadrada,  $M$ ,  $\text{tr}(M)$  é abreviação de **traço** de  $M$ , dado pela soma das entradas  $a_{ii}$  da diagonal principal de  $M$ ).

**Exercício 21.2** Use o resultado do exercício anterior para dar uma demonstração sucinta da proposição acima.

**Exercício 21.3** Seja  $M$  matriz  $n \times n$ . Mostre que o **traço** de  $M$  é igual a menos o coeficiente de  $x^{n-1}$  do **polinômio característico** de  $M$ ,  $p_M(x) = \det(xI - M)$  (ou ainda, é a soma das raízes de  $p_M$ ).

**Exercício 21.4** Sejam  $M$  e  $V$  matrizes  $n \times n$ , sendo  $V$  invertível. Mostre que, sendo  $x$  um real qualquer, vale

$$(xI - VMV^{-1}) = V(xI - M)V^{-1}.$$

**Exercício 21.5** Sejam  $M$  e  $V$  matrizes  $n \times n$ , sendo  $V$  invertível. Mostre que o polinômio característico de  $VMV^{-1}$  é igual ao de  $M$ . Conclua que  $\text{tr}(VMV^{-1}) = \text{tr}(M)$ .

## d O Teorema de Aproximação de Schmidt

**Teorema de Aproximação de Schmidt:** Seja  $A = [a_{ij}]$  matriz (real)  $m \times n$ . Suponhamos que

$$A = U\Sigma V^T$$

seja decomposição em valores singulares de  $A$ . Então, para  $k \leq \min\{m, n\}$ , a matriz

$$A_k = U\Sigma_k V^T,$$

com  $\Sigma_k$  coincidindo com  $\Sigma$  nos  $k$  primeiros elementos da diagonal principal e tendo nulas as demais entradas, é tal que, para toda matriz (real)  $m \times n$   $B$ , de posto igual ou inferior a  $k$

$$\|A - A_k\| \leq \|A - B\|.$$

**Demonstração do Teorema de Aproximação de Schmidt:**

Seja  $l = \text{posto de } A$ . Obviamente, se  $k \geq l$ , a solução é a própria matriz  $A$ . Vamos, pois, supor  $k < l$ .

Começemos fixando bases ortonormais  $v_1, \dots, v_n$ , de  $\mathbf{R}^n$ , e  $u_1, \dots, u_m$ , de  $\mathbf{R}^m$ , e reais positivos  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_l$ , tais que  $Av_i = \sigma_i u_i$ ,  $i = 1, \dots, l$  e  $Av_i = 0$ , se  $i > l$ .

Se  $C$  é matriz  $m \times n$ , podemos escrever  $C = UB V^T$ , com  $B = U^T C V$ . Temos, então,

$$\|A - C\| = \|\Sigma - B\|,$$

pois

$$\|A - C\|^2 = \langle A - C, A - C \rangle = \langle U(\Sigma - B)V^T, U(\Sigma - B)V^T \rangle = \langle \Sigma - B, \Sigma - B \rangle = \|\Sigma - B\|^2.$$

Assim, basta encontrar matriz  $m \times n$ ,  $\Sigma_k$ , de posto igual ou inferior a  $k$ , que entre as matrizes  $X$   $m \times n$  de posto igual ou inferior a  $k$ , minimize

$$\|\Sigma - X\|^2.$$

**Exercício 21.6** Prove isso.

A matriz  $A_k$ , que minimiza  $\|A - A_k\|$ , será, então  $A_k = U\Sigma_k V^T$ .

Como o conjunto das matrizes  $m \times n$  de posto igual ou inferior a  $k$  não é, em geral, um espaço vetorial, vamos buscar a melhor solução em cada um dos seguintes espaços: fixamos um subespaço  $E$  de  $\mathbb{R}^m$ , de dimensão  $k$ , e consideramos as matrizes  $B$  cujos espaços das colunas estão contidos em  $E$ . Note que o mínimo de  $\|B - \Sigma\|_2$  no espaço  $\mathcal{B}$  de tais  $B$  é a matriz  $B$  cujas colunas são as projeções ortogonais das colunas de  $\Sigma$  sobre  $E$ .

Ora, se  $w_1, \dots, w_k$  é base ortonormal de  $E$ , essa matriz  $B$  tem, na coluna  $j$ , o vetor  $b_j$ , projeção de  $\sigma_j e_j$  sobre  $E$ , dado por  $\sigma_j$  multiplicado pela projeção de  $e_j$  sobre  $E$ . Note que, na verdade, sendo  $l$  o posto de  $\Sigma$  e  $p = \min\{m, n\}$ , temos  $\sigma_j = 0$ , para  $j = l + 1, \dots, p$ ; além disso, se  $n > m$ , todas as colunas de  $\Sigma$  depois da  $m$ -ésima serão nulas e terão, portanto, projeção nula. Assim, para  $j = 1, \dots, p$ :

$$b_j = \sigma_j (\langle w_1, e_j \rangle w_1 + \dots + \langle w_i, e_j \rangle w_i + \dots + \langle w_k, e_j \rangle w_k) = \sigma_j (w_{j1} w_1 + \dots + w_{ji} w_i + \dots + w_{jk} w_k),$$

sendo  $w_{ji} = \langle w_i, e_j \rangle$  a  $j$ -ésima coordenada de  $w_i$  na base  $\{e_1, \dots, e_m\}$ .

Pelo teorema de Pitágoras, temos

$$0 \leq |\sigma_j e_j - b_j|^2 = \sigma_j^2 \left( 1 - \sum_{i=1}^k w_{ji}^2 \right) \leq \sigma_j^2.$$

Assim, somando as contribuições de todas as  $n$  colunas (e já sabendo que só as  $p$  primeiras contam), temos

$$\|B - \Sigma\|^2 = \sum_{j=1}^p |\sigma_j e_j - b_j|^2 = \sum_{j=1}^p p_j \sigma_j^2,$$

com, para cada  $j = 1, \dots, p$ ,

$$0 \leq p_j = \left( 1 - \sum_{i=1}^k w_{ji}^2 \right) \leq 1.$$

Note que  $p_j \geq 0$  por conta de ser a soma em  $i$  dos  $w_{ji}^2$  o quadrado da norma da projeção de  $e_j$  sobre  $E$ :

$$\sum_{i=1}^k w_{ji}^2 = \sum_{i=1}^k \langle w_i, e_j \rangle^2 \leq 1.$$

Lembramos que o somatório termina em  $p = \min \{m, n\}$ , já que, caso  $n > p$ , as colunas de  $\Sigma$  correspondentes a  $j > p$  são todas nulas (e se projetam, portanto, no vetor nulo).

Além disso, temos uma limitação inferior para a soma dos pesos  $p_j$ :

$$\sum_{j=1}^p p_j = p - \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^k w_{ji}^2 \geq p - k,$$

já que os  $w_i$  têm, todos, norma 1:

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^k w_{ji}^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^p w_{ji}^2 \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m w_{ji}^2 = \sum_{i=1}^k |w_i|^2 = k.$$

Diante das circunstâncias, dado que os  $\sigma^2$  são decrescentes, o melhor que podemos fazer para minimizar  $\|B - \Sigma\|$  é zerar os  $p_j$ , com  $j$  de 1 a  $k$ , fazendo os demais iguais a 1, o que nos dá, como cota inferior para  $\|B - \Sigma\|^2$ ,

$$\|B - \Sigma\|^2 \geq \sum_{i=k+1}^p \sigma_i^2.$$

**Exercício 21.7** Mostre que, com as condições (já demonstradas):

$$0 \leq p_j \leq 1 \text{ e } \sum_{j=1}^p p_j \geq p - k,$$

vale, para  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ ,

$$\sum_{j=1}^p p_j \sigma_j^2 \geq \sum_{i=k+1}^p \sigma_i^2.$$

Ora, fazendo  $\Sigma_k$  coincidir com  $\Sigma$  em todas as entradas, exceto nas correspondentes aos valores singulares  $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_l$  (ou seja: coincidindo com  $\Sigma$  nos  $k$  primeiros elementos da diagonal principal e tendo nulas as demais entradas), obtemos, exatamente,

$$\|\Sigma - \Sigma_k\| = \sqrt{\sum_{i=k+1}^p \sigma_i^2}.$$

O Teorema está demonstrado. ■

**Exercício 21.8** Sejam  $A$  matriz  $m \times n$  e  $B$  matriz  $n \times p$ .

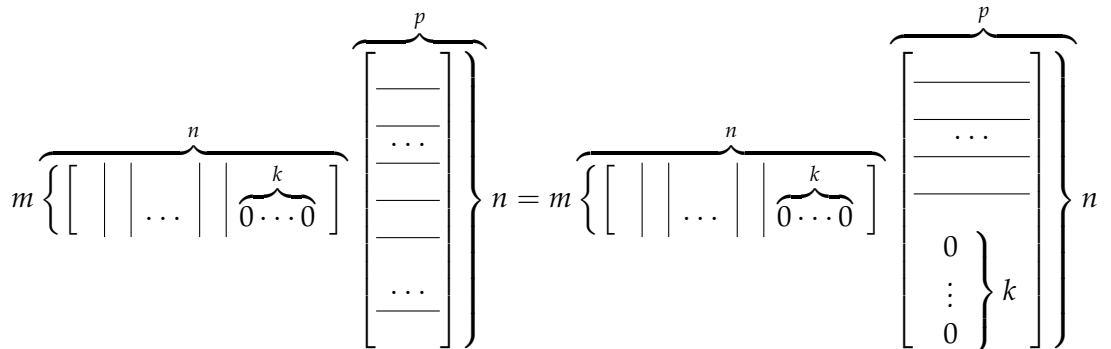
1. Considere cada coluna de  $A$  como uma matriz  $m \times 1$  (chame de  $A_i$  a  $i$ -ésima coluna de  $A$ , vista como matriz). Da mesma forma, considere cada linha de  $B$  como uma matriz  $1 \times p$  (chame de  $B_j$  a  $j$ -ésima).

(a) Quais são as dimensões da matriz  $A_i B_j$ , produto da matriz  $A_i$  pela matriz  $B_j$ ?

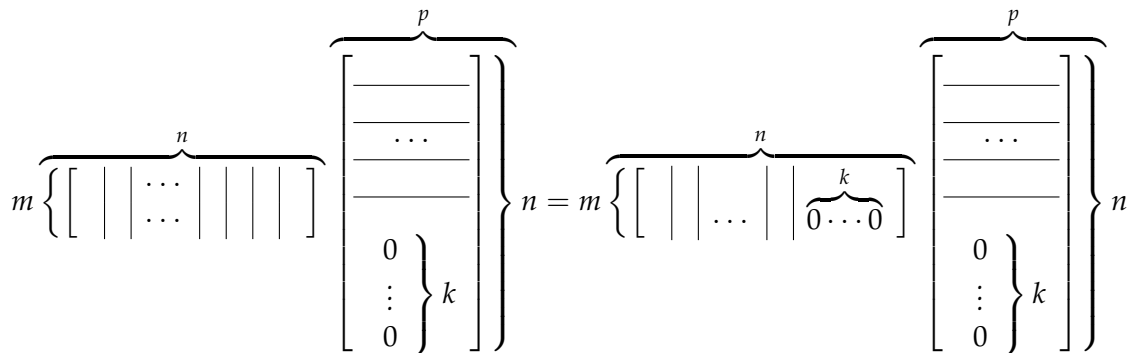
(b) Qual a relação entre as matrizes  $AB$  e  $\sum_{i=1}^n A_i B_i$ ?

2. Explique:

(a)



(b)



3. Explique:

(a)

$$\begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \dots & \\ & & k_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftarrow & b_1 & \rightarrow \\ & \dots & \\ \leftarrow & b_m & \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \leftarrow & k_1 b_1 & \rightarrow \\ & \dots & \\ \leftarrow & k_m b_m & \rightarrow \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} \uparrow & \dots & \uparrow \\ a_1 & \dots & a_m \\ \downarrow & \dots & \downarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \dots & \\ & & k_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & \dots & \uparrow \\ k_1 a_1 & \dots & k_m a_m \\ \downarrow & \dots & \downarrow \end{bmatrix}$$

4. Nos dois casos a seguir, as colunas da matriz  $m \times m$ ,  $U$ , à esquerda são  $U_1, \dots, U_m$ ; as linhas da matriz  $n \times n$ ,  $V^T$ , à direita são  $V_1, \dots, V_n$ . Explique:

(a)  $n \geq m$ :

$$\begin{bmatrix} \uparrow & \dots & \uparrow \\ U_1 & \dots & U_m \\ \downarrow & \dots & \downarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & 0 & \dots & 0 \\ & & \sigma_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftarrow & V_1 & \rightarrow \\ & \dots & \\ \leftarrow & V_n & \rightarrow \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \sigma_i U_i V_i.$$

(b)  $m \geq n$ :

$$\begin{bmatrix} \uparrow & \cdots & \uparrow \\ U_1 & \cdots & U_m \\ \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \sigma_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftarrow & V_1 & \rightarrow \\ \cdots & & \\ \leftarrow & V_n & \rightarrow \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \sigma_i U_i V_i.$$

5. Seja  $\mathcal{M}(m \times n)$  o espaço vetorial das matrizes (reais)  $m \times n$ , com o produto escalar canônico

$$\langle [a_{ij}], [b_{ij}] \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}.$$

Sejam

$$\left\{ \begin{bmatrix} \uparrow \\ u_1 \\ \downarrow \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \uparrow \\ u_m \\ \downarrow \end{bmatrix} \right\} \text{ e } \left\{ \begin{bmatrix} \uparrow \\ v_1 \\ \downarrow \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \uparrow \\ v_n \\ \downarrow \end{bmatrix} \right\}$$

bases ortonormais de  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente. Para cada par  $(i, j)$ , defina a matriz  $m \times n$   $[w_{ij}]$  por

$$[w_{ij}] = [u_i][v_j]^T = \begin{bmatrix} \uparrow \\ u_i \\ \downarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftarrow & v_j & \rightarrow \end{bmatrix}.$$

Mostre que  $\{[w_{ij}], (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}\}$  é base ortonormal de  $\mathcal{M}(m \times n)$ .6. Observe que, nos casos do item anterior, precisamos de  $n^2 + m + m^2$  ou  $n^2 + n + m^2$  números para armazenar as três matrizes, o que supera  $mn$ , que é o número de entradas da matriz produto. Suponhamos, agora, que modificamos a matriz do meio, fazendo  $\sigma_i = 0$ , para  $i > k$ , obtendo a matriz  $\Sigma_0$ .

(a) Quantas entradas não nulas, em geral, terá a matriz produto?

(b) Mostre que podemos substituir  $U$  e  $V$  por matrizes menores,  $U_0$  e  $V_0$ , de modo a reduzir o número de entradas a armazenar (para guardar  $U_0, V_0$  e  $\Sigma_0$ ) para  $(m+n+1)k$ , quiçá  $(m+n)k$ .

# Capítulo 22

## O Teorema Espectral

Vejam agora o Teorema Espectral (que admite, é verdade, versões ainda mais gerais - talvez devêssemos chamar o caso que aqui trataremos de *Teorema Espectral, em dimensão finita, caso real*).

**Teorema Espectral:** Se  $E$  é um espaço vetorial real, com produto interno, de dimensão finita e  $T : E \rightarrow E$  é uma transformação linear **autoadjunta** (isto é:  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle \forall u, v \in E$ ), então  $E$  tem base ortonormal de autovetores de  $T$ .

Aproveitaremos a oportunidade para destacar alguns outros resultados importantes que demonstraremos usando o Teorema.

### a Estratégia

Já sabemos demonstrar o Teorema Espectral em dimensões dois e três (o caso de dimensão um é trivial, assim como, ¿por que não?, o de dimensão zero). O lema a seguir estabelece a estratégia para a extensão a dimensões mais altas.

**Lema:** Se  $E$  é um espaço vetorial real, com produto interno,  $T : E \rightarrow E$  é uma transformação linear autoadjunta e  $W$  é um subespaço vetorial de  $E$  **invariante** por  $T$  (isto é:  $T(W) \subset W$ ), então

$$W^\perp = \{v \in E \mid \langle v, w \rangle = 0 \forall w \in W\}$$

é subespaço vetorial de  $E$  invariante por  $T$ .

Demonstração : Se  $v \in W^\perp$  e  $w \in W$ , temos, como  $Tw \in W$ ,

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle = 0.$$

■

A partir daí, a menos de um pequeno detalhe, a demonstração do Teorema é relativamente simples.

**Exercício 22.1** Volte à demonstração que fizemos para o caso de dimensão 3 (página 113) e observe que não podemos aplicá-la diretamente ao caso de dimensão 4, já que polinômios de grau par não têm, necessariamente, raiz real.

**Exercício 22.2** Seja  $A$  matriz simétrica  $n \times n$ . Mostre que o maior valor de  $\langle Au, u \rangle$  sobre a esfera unitária de  $\mathbb{R}^n$  é obtido em um autovetor de  $A$  (correspondente ao maior autovalor).

## b Demonstração do Teorema

Veja o vídeo  **TE**.

Demonstração : Trabalhem por indução sobre a dimensão,  $n$ , de  $E$ . O Teorema é trivial se  $n = 1$ . Vamos admitir que  $E$  seja de dimensão  $n$ ,  $n > 2$ . Seja  $S = \{x \in E \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ . Consideremos a função  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) = \langle Tx, x \rangle.$$

Seja  $u$  ponto de máximo de  $f$  em  $S$ , isto é,

$$f(u) \geq f(x), \forall x \in S.$$

Para mostrar que  $u$  é autovetor de  $T$ , basta provar que  $\langle x, u \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, Tu \rangle = 0$ .

**Exercício 22.3** Suponha que um certo  $y$  é tal que  $u$  e  $y$  são LI. Faça  $\bar{y} = \langle y, u \rangle u$  ( $\bar{y}$  é a projeção de  $y$  na direção de  $u$ ). Mostre que  $\langle y - \bar{y}, u \rangle = 0$ , mas  $\langle y - \bar{y}, y \rangle \neq 0$ .

Podemos, é claro, supor  $x \neq 0$  e restringir a prova a  $v = |x|^{-1}x$ . Seja, então,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(t) = f(\cos(t)u + \sin(t)v) = \langle T(\cos(t)u + \sin(t)v), \cos(t)u + \sin(t)v \rangle.$$

Como  $u$  é ponto de máximo de  $f$  em  $S$ ,  $t = 0$  é ponto de máximo de  $g$ , de forma que  $g'(0) = 0$ . Ora, como  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$ , temos

$$g'(t) = -2 \cos(t) \sin(t) \langle Tu, u \rangle + 2 \cos(t) \sin(t) \langle Tv, v \rangle + 2 (\cos^2(t) - \sin^2(t)) \langle u, Tv \rangle.$$

Logo,

$$0 = g'(0) = 2 \langle u, Tv \rangle,$$

o que completa a prova do Teorema. ■



## c A decomposição polar

A **decomposição polar** pode ser vista como uma versão para transformações lineares da representação de um número complexo em coordenadas polares: todo número complexo  $z$  pode ser escrito  $z = ru = ur$ , sendo  $r$  um número real não negativo e  $u$  um complexo tal que  $u\bar{u} = 1$ . No caso de transformações lineares, o papel de  $r$  é desempenhado por uma **transformação linear  $R$  autoadjunta não negativa** (isto é, tal que  $\langle Rv, v \rangle$  seja não negativo para todo  $v$  em  $E$ ) e o de  $u$  por uma **transformação ortogonal  $U$**  (isto é, tal que  $UU^* = U^*U = I$ ). Aproveitamos a oportunidade para introduzir mais um termo do jargão matemático: uma transformação linear do espaço  $E$  em si mesmo (isto é, com domínio e contradomínio coincidentes) é dita um **operador linear**.

**Exercício 22.4** *Mostre que autovalores (reais) de transformações lineares não negativas são não negativos. Mostre que uma transformação linear autoadjunta é não negativa se, e somente se, todos seus autovalores são não negativos. Estude a rotação de ângulo  $2\pi/3$  no plano (mostre, por vacuidade, que todos seus autovalores são não negativos).*

**Exercício 22.5** *É verdade que  $T$  é não negativa se, e somente se, todos seus autovalores têm parte real não negativa?*

**Proposição (Forma Polar):** *Sejam  $E$  um espaço vetorial real com produto interno e  $T : E \rightarrow E$  um operador linear. Existem operadores lineares  $R_1, U_1, R_2, U_2 : E \rightarrow E$  tais que:*

(i)  $R_1$  e  $R_2$  são autoadjuntos e não negativos (isto é, seus autovalores são não negativos);

(ii)  $U_1$  e  $U_2$  são ortogonais (isto é,  $U_1U_1^* = I = U_2U_2^*$ );

(iii)  $U_1R_1 = T = R_2U_2$ .

Demonstração : Note que, se, com  $U_1$  e  $R_1$  como acima,  $T = U_1R_1$ , então  $T^*T = R_1^*U_1^*U_1R_1 = R_1^2$ . Como  $R_1$  deve ser diagonalizável, seus autovetores deverão coincidir com os de  $R_1^2 = T^*T$ . Graças ao Teorema Espectral, podemos fixar uma base ortonormal,  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ , de autovetores de  $T^*T$ . Estabelecemos, também, que  $T^*T\varepsilon_i \geq T^*T\varepsilon_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Para cada  $i$  tal que  $T\varepsilon_i \neq 0$ , fazemos

$$u_i = \frac{1}{|T\varepsilon_i|} T\varepsilon_i.$$

Completamos o conjunto ortonormal  $\{u_1, \dots, u_k\}$  assim obtido ( $k$  é o maior dos índices  $i$  para os quais  $T\varepsilon_i$  é não nulo<sup>1</sup>) de forma a obter uma base ortonormal  $\{u_1, \dots, u_n\}$  de  $E$ . Definimos, então, os operadores  $R_1$  e  $U_1$  por:

$$R_1\varepsilon_i = |T\varepsilon_i|\varepsilon_i;$$

$$U_1\varepsilon_i = u_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

<sup>1</sup>deixando de lado o caso trivial em que  $T$  é nulo

Para chegarmos a  $R_2$  e a  $U_2$ , aplicamos a  $T^*$  a decomposição que acabamos de obter, de forma que  $T^* = VR_2$ . Basta, agora, fazer  $U_2 = V^*$ . ■

Quando escrevemos  $T = RU$ , ou  $T = UR$ , com  $R$  autoadjunto e  $U$  ortogonal, dizemos que o operador  $T$  está na **forma polar**.

## d A Decomposição em Valores Singulares via Teorema Espectral

A linha de ideias que acabamos de desenvolver, para obter as decomposições polares, pode também servir para uma outra abordagem da Decomposição em Valores Singulares. Se  $T : E \rightarrow F$  é transformação linear entre espaços vetoriais reais, com produto interno e  $T = U\Sigma V^*$  é decomposição de  $T$  em valores singulares, então é claro que, como  $U^* = U^{-1}$  e  $V^* = V^{-1}$ ,

$$T^*T = V(\Sigma^*\Sigma)V^*, \quad TT^* = U(\Sigma\Sigma^*)U^*.$$

**Exercício 22.6** *Seja  $A$  matriz  $m \times n$ . Mostre que  $A^T A$  e  $AA^T$  são matrizes simétricas e que têm todos os autovalores não negativos.*

**Exercício 22.7** *Sejam  $A$  matriz  $m \times n$  e  $u$  autovetor de  $A^T A$ . Mostre que*

$$\langle v, u \rangle = 0 \Rightarrow \langle Av, Au \rangle = 0.$$

**Teorema da Decomposição em Valores Singulares:** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais reais com produto interno, de dimensão finita,  $k$ , e  $T : E \rightarrow F$  linear e bijetiva. Existem bases ortonormais,  $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $E$  e  $\beta = \{u_1, \dots, u_m\}$  de  $F$ , e escalares  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ , com  $p = \min \{m, n\}$ , tais que*

$$Tv_i = \begin{cases} \sigma_i u_i, & i = 1, \dots, p \\ 0, & p < i \leq n \end{cases}.$$

*Demonstração :* Comece fazendo o exercício que define a adjunta de uma transformação linear, página 104. Considere, então, a transformação  $T^*T : E \rightarrow E$ ; note que  $T^*T$  é autoadjunta. Note que, se  $|u| = 1$  e  $T^*Tu = \mu u$ , então

$$\mu = \langle T^*Tu, u \rangle = \langle Tu, Tu \rangle \geq 0.$$

Defina, em  $E$   $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$  como base ortonormal de autovetores de  $T^*T$ , de forma que  $T^*Tv_i = \sigma_i^2 v_i$ ,  $\sigma_i \geq \sigma_{i+1} \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Note que, como  $\alpha$  é ortonormal, temos, se  $i \neq j$ ,

$$\langle Tv_i, Tv_j \rangle = \langle T^*Tv_i, v_j \rangle = \sigma_i^2 \langle v_i, v_j \rangle = 0.$$

Seja  $k$  o maior índice tal que  $\sigma_k > 0$  e defina  $\beta_o = \{u_i = \sigma_i^{-1}Tv_i, i = 1 \dots, k\}$ . Complete  $\beta_o$  de forma a obter base ortonormal  $\beta$  de  $F$ . ■

# Capítulo 23

## Polinômios

### a O polinômio mínimo

Os resultados desta seção se aplicam, indistintamente, a espaços vetoriais reais e complexos.

Consideremos uma transformação linear  $T : E \rightarrow E$ . As potências de  $T$  são definidas por:  $T^0u = u$ ,  $T^1u = Tu$ ,  $T^2u = T(Tu)$ , ...,  $T^{k+1}u = T(T^k u)$ ... (ou seja,  $T^0 = I$ ,  $T^{k+1} = TT^k$ ). Mais geralmente, se  $p$  é o polinômio (a coeficientes reais, se o espaço é real, mas a coeficientes complexos, se  $E$  é complexo) dado por  $p(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$ , então  $p(T)$  é a transformação linear (de  $E$  em  $E$ ) dada por

$$p(T)u = a_k T^k u + \dots + a_1 Tu + a_0 u.$$

Suponhamos que  $E$  seja  $n$ -dimensional. É claro, então, que o espaço das transformações lineares de  $E$  em  $E$  é de dimensão  $n^2$  (a maneira mais simples de ver isso talvez seja pensar que esse espaço é isomorfo ao das matrizes  $n \times n$ ). Uma consequência imediata é a proposição a seguir.

**Proposição:** Se  $T : E \rightarrow E$  é linear e  $\dim E = n$ , então existe um polinômio  $p$ , de grau não superior a  $n^2$ , tal que  $p(T) = 0$  (isto é,  $p(T)u = 0$  para todo  $u$  em  $E$ ).

Demonstração : Seja  $\mathcal{L}(E) = \{A : E \rightarrow E \mid A \text{ linear}\}$  o espaço vetorial das transformações lineares de  $E$  em  $E$ . Como acabamos de ver, a dimensão de  $\mathcal{L}(E)$  é  $n^2$ . Logo, o conjunto (de  $n^2 + 1$  vetores de  $\mathcal{L}(E)$ )

$$\{I, T, T^2, \dots, T^{n^2}\}$$

é linearmente dependente. Ora, isso significa que existem escalares  $a_{n^2}, \dots, a_0$ , nem todos nulos, tais que

$$a_{n^2} T^{n^2} + \dots + a_0 I = 0.$$

Mias isto quer dizer que o polinômio  $p$ , dado por  $p(x) = a_{n^2} x^{n^2} + \dots + a_0 I$  é tal que  $p(T) = 0$ . ■

Suponhamos, pois, que  $E$  é espaço vetorial de dimensão finita e que  $T : E \rightarrow E$  é linear. Garantida a existência de um polinômio não nulo,  $p$ , tal que  $p(T) = 0$ , podemos tomar, dentre os polinômios não nulos que anulam  $T$ , um de grau mínimo. Dividindo tal polinômio pelo coeficiente do termo de maior grau, obtemos um polinômio,  $p_T$ , cujo termo de maior grau tem coeficiente 1. Vamos chamá-lo de **polinômio mínimo** de  $T$ . O polinômio mínimo tem, portanto, as seguintes propriedades:

- (i)  $p_T$  é não nulo e o coeficiente de seu termo de maior grau é 1;
- (ii)  $p_T(T) = 0$ ;
- (iii) se  $q$  é polinômio não nulo e  $q(T) = 0$ , então o grau de  $q$  não é inferior ao de  $p_T$ .

Observemos que, caso houvesse um segundo polinômio,  $p$ , com as três propriedades acima, seu grau seria, forçosamente, igual ao de  $p_T$ . Mas então o polinômio  $q = p - p_T$ , de grau inferior ao de  $p_T$ , seria não nulo e satisfaria a  $q(T) = 0$ , o que contrariaria a propriedade (iii). Isso justifica o artigo definido, "o", antes de polinômio mínimo.

## b Fatoração de polinômios

Começamos com polinômios a coeficientes complexos. Chamaremos de  $\mathbb{C}[x]$  o conjunto dos polinômios a coeficientes complexos e de  $\mathbb{R}[x]$  o dos a coeficientes reais. O **Teorema Fundamental da Álgebra** garante que todo polinômio não constante em  $\mathbb{C}[x]$  tem, pelo menos, uma raiz complexa. Um resultado mais básico, válido para polinômios a coeficientes em  $\mathbb{R}$  ou em  $\mathbb{C}$  (e, na verdade, em um corpo qualquer), é apresentado na proposição a seguir (o resultado é também chamado **algoritmo da divisão**, embora o algoritmo propriamente dito fique implícito na demonstração). Não vamos considerar a divisão por polinômios de grau zero, que é trivial.

**Proposição 1:** Se  $a$  e  $b$  são polinômios em  $K[x]$  ( $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ ), sendo  $b$  não constante, então existem  $q$  e  $r$  em  $K[x]$  tais que  $a = qb + r$ , com grau de  $r$  estritamente inferior ao de  $b$  ou  $r$  nulo.

Demonstração : Se o grau de  $a$  é inferior ao de  $b$ , ou  $a = 0$ , basta fazer  $q = 0$  e  $r = a$ . Supondo que o grau de  $a$  não seja inferior ao de  $b$ , procedemos por indução. Escrevendo

$$a(x) = a_n x^n + \dots + a_0, \quad b(x) = b_m x^m + \dots + b_0,$$

com  $a_n$  e  $b_m$  não nulos,  $n \geq m$ , podemos escrever

$$a(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} b(x) + \alpha(x),$$

com o grau de  $\alpha$  inferior ao de  $a$  (o termo de grau  $n$  de  $\alpha$  é claramente nulo). Usando a hipótese de indução, tomamos  $\beta$  e  $r$  tais que  $\alpha = \beta b + r$ , com grau de  $r$  menor do que grau de  $b$ , e obtemos

$$a(x) = \left[ \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \beta(x) \right] b(x) + r(x) = q(x)b(x) + r(x).$$

■

**Corolário:** Se  $p$  é polinômio em  $K[x]$  ( $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ ) e  $a$  é um elemento de  $K$  tal que  $p(a) = 0$ , então existe  $q$  em  $K[x]$  tal que  $p(x) = (x - a)q(x)$ .

Demonstração : Pela proposição anterior, podemos escrever  $p(x) = (x - a)q(x) + r(x)$ , com grau de  $r$  inferior ao de  $(x - a)$  (que é 1), ou  $r = 0$ . Logo,  $r$  é constante. Fazendo  $x = a$ , concluímos que  $r$  é nulo. ■

**Exercício 23.1** *Mostre que, nas condições da Proposição 1, o quociente,  $q$ , e o resto,  $r$ , são únicos, ou seja: se  $q_1$  e  $r_1$  são tais que  $a = q_1b + r_1$ , com grau de  $r_1$  estritamente inferior ao de  $b$  ou  $r_1$  nulo, então  $q_1 = q$  e  $r_1 = r$ .*

O próximo resultado relaciona, finalmente, as raízes do polinômio mínimo aos autovalores de  $T$ .

**Proposição 2:** Suponha que  $E$  é um espaço vetorial sobre  $K$ , com  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ . O escalar  $\lambda$  de  $K$  é autovalor da transformação linear  $T : E \rightarrow E$  se, e somente se,  $\lambda$  é raiz do polinômio mínimo de  $T$ . Em particular, se  $K = \mathbb{C}$  e  $E$  é não trivial, então toda transformação linear  $T : E \rightarrow E$  tem autovetor.

Demonstração : Se  $p_T$  é de grau 1, o resultado é imediato (se  $p_T$  é de grau 0, então  $E$  é trivial, caso em que nem  $p_T$  tem raízes, nem  $T$  tem autovalores). Se o grau é maior, podemos, caso  $\lambda$  seja raiz de  $p_T$ , escrever  $p_T(x) = (x - \lambda)q(x)$ . Como  $q$  é de grau inferior ao de  $p_T$ , existe  $v$  em  $E$  tal que  $q(T)v = u \neq 0$ . Como  $p_T(T) = (T - \lambda I)q(T)$  (prove!) e  $p_T(T)v = 0$ , segue que  $Tu - \lambda u = 0$ , o que prova que  $\lambda$  é autovalor de  $T$ . Reciprocamente, se  $\lambda$  é autovalor de  $T$  e  $u$  é autovetor associado a  $\lambda$ , temos  $0 = p_T(T)u = p_T(\lambda)u$ ; como  $u$  é não nulo, segue que  $\lambda$  é raiz de  $p_T$ . A existência de autovetor, no caso complexo, decorre, então, do Teorema Fundamental da Álgebra ■

Vamos, ainda, extrair umas consequências mais da Proposição 1.

**Corolário:** Em  $\mathbb{C}[x]$ , todo polinômio não constante se fatora como produto de polinômios do primeiro grau.

Demonstração : Façamos a demonstração por indução sobre o grau de  $p$ . O caso de grau 1 é trivial. Suponhamos o resultado provado para grau de  $p$  inferior a  $n$  e passemos ao caso em que grau de  $p$  é  $n$ . Fixemos, pois,  $p$  de grau  $n$ . Pelo Teorema Fundamental da Álgebra,  $p$  tem, ao menos, uma raiz,  $a$ . Usando o corolário anterior, obtemos uma primeira fatoração,  $p(x) = (x - a)q(x)$ . Como o grau de  $q$  é inferior a  $n$ , a hipótese de indução se aplica a  $q$ . ■

**Observação:** Se o grau de  $p$  é  $n$ , fatoração de  $p$  pode, sempre, ser escrita

$$p(x) = a_n(x - r_1) \cdots (x - r_n).$$

A substituição  $x = r_j$  mostra que os  $r_j$  são as raízes de  $p$  (algumas, eventualmente, repetidas). Dizemos que a raiz  $r$  de  $p$  é **simples** se não existe polinômio  $q$  tal que  $p(x) = (x - r)^2q(x)$ .

**Exercício 23.2** *Mostre que o espaço real  $E$  tem base de autovetores de  $T : E \rightarrow E$  se, e somente se, todas as raízes do polinômio mínimo de  $T$  são reais e simples. Dizemos, neste caso, que  $T$  é **diagonalizável**.*

No caso em que  $p$  é polinômio a coeficientes reais, podemos considerá-lo como elemento de  $\mathbb{C}[x]$ . Observemos que, nesse caso, se  $z$  é um número complexo, vale

$$\overline{p(z)} = p(\bar{z}).$$

Assim, se  $z = a + bi$  é uma raiz complexa de  $p$ , sua conjugada,  $\bar{z} = a - bi$ , também é raiz de  $p$ , já que

$$0 = \bar{0} = \overline{p(z)} = p(\bar{z}).$$

Daí resulta que, na fatoração de  $p$ , as raízes não reais, conjugadas, produzem fatores do tipo

$$(x - (a + bi))(x - (a - bi)) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2,$$

que estão em  $\mathcal{R}[x]$ . Moral da história:

**Corolário:** Todo polinômio não constante a coeficientes reais se fatora, em  $\mathcal{R}[x]$ , como produto de polinômios de graus no máximo iguais a dois (os fatores do primeiro grau correspondendo às raízes reais e os do segundo grau correspondendo aos pares de raízes não reais conjugadas).

Demonstração :     ■

## c Outra demonstração do Teorema Espectral

O resultado a seguir pode ser usado para uma demonstração alternativa do Teorema Espectral.

**Proposição:** Se  $E$  é espaço vetorial real de dimensão finita  $n$ ,  $n > 2$ , e  $T : E \rightarrow E$  é linear, então  $E$  tem ao menos um subespaço próprio invariante por  $T$  de dimensão, no máximo, 2.

Demonstração : Seja  $p_T$  o polinômio mínimo de  $T$ .

(i) Se  $p_T$  é de grau 1, então todo vetor não nulo é autovetor, e pronto: qualquer subespaço de dimensão 1 é invariante. Se o grau de  $p_T$  é 2, tomamos um vetor não nulo qualquer,  $u$ . Se  $u$  for autovetor, terminamos. Se não, então  $u$  e  $Tu$  são linearmente independentes. Além disso, escrevendo  $p_T(x) = x^2 + ax + b$ , temos

$$0 = p_T(u) = T(Tu) + aTu + bu,$$

o que mostra que o subespaço gerado por  $u$  e  $Tu$  é invariante por  $T$ .

(ii) Suponhamos, agora, que  $p_T$  seja de grau maior do que 2. Como  $p_T$  é a coeficientes reais, o Teorema Fundamental da Álgebra nos garante que podemos, ao menos, fatorá-lo como

$$p_T = pq$$

com grau de  $p$  igual a 1 ou 2. Como  $q$  não pode anular  $T$  (seu grau é inferior ao de  $p_T$ ), existe  $v$  tal que  $u = q(T)v$  é não nulo. Mas

$$0 = p_T(T)v = p(T)q(T)v = p(T)u$$

(exercício: mostre que  $p(T)q(T) = (pq)(T)$ ). Então, como no caso (i), ou bem  $u$  é autovetor de  $T$ , ou bem  $u$  e  $Tu$  geram subespaço bidimensional invariante por  $T$ . ■

Como já vimos (página 106), o Teorema Espectral, em dimensão 2, pode ser demonstrado sem referência ao polinômio característico (nem a determinantes, em geral), mas utilizando o Teorema do Valor Intermediário. O leitor não está proibido, é claro, de preferir a outra demonstração que fizemos, usando determinantes (página 111). Na demonstração abaixo, para o caso geral, lançaremos mão do polinômio mínimo e da Proposição acima.

**Teorema Espectral:** Se  $E$  é um espaço vetorial real, com produto interno, de dimensão finita e  $T : E \rightarrow E$  é uma transformação linear autoadjunta (isto é:  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle \forall u, v \in E$ ), então  $E$  tem base ortonormal de autovetores de  $T$ .

Demonstração : Os casos de dimensão até 2 estão feitos. Suponhamos, pois, que a dimensão de  $E$  é  $n > 2$  e que o Teorema vale para espaços de dimensões inferiores a  $n$ . Pela Proposição,  $E$  tem subespaço próprio,  $W$ , invariante por  $T$ .

Suponhamos que  $E$  tenha um subespaço próprio (isto é, diferente de  $\{0\}$  e do próprio  $E$ ) invariante por  $T$  - este é o pequeno detalhe. Fixemos e chamemos de  $W$  um tal subespaço.

Como estamos em dimensão finita,  $E$  é **soma direta** de  $W$  e  $W^\perp$  (isto é,  $E = W \oplus W^\perp$ , ou seja: todo elemento de  $E$  se escreve, de maneira única, como soma de um elemento de  $W$  com um de  $W^\perp$ ).

Pelo Lema da página 143,  $W^\perp$  também é invariante por  $T$ . Como  $W$  é próprio, tanto  $W$  como  $W^\perp$  são de dimensão inferior a  $n$ . Ora, a restrição de  $T$  a cada um dos dois é autoadjunta, de forma que, pela hipótese de indução, cada um tem base ortonormal de autovetores de  $T$ .

Juntando as duas bases, temos uma base ortonormal de  $E$  constituída apenas por autovetores de  $T$ . ■





# Capítulo 24

## Espaços Vetoriais Complexos

### a Passando de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{C}^n$

Se  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é linear, um dos caminhos para a busca de **autovalores** de  $T$  (isto é, números  $\lambda$  para os quais existe  $v$  em  $\mathbb{R}^n$ , não nulo, tal que  $Tv = \lambda v$ ) é o estudo do **polinômio característico** de  $T$ ,  $P_T(x) = \det(xI - T)$ . E aí, inevitavelmente, os números complexos fazem sua entrada em cena.

**Exercício 24.1** *Se ainda não fez: Mostre que, se  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é rotação de  $\theta$ , então as raízes de  $p_T$  são  $\cos \theta \pm i \sin \theta$ .*

Autovalores em  $\mathbb{C}$  podem ser desprezados ou vistos como uma questão: onde podem estar seus autovetores? Trabalhando com matrizes, a resposta vem sem muito esforço. Se  $A$  é matriz  $n \times n$ , podemos, mesmo que suas entradas sejam reais, multiplicá-la por vetores de  $\mathbb{C}^n$ . Assim, obtemos uma transformação linear,

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}z_1 + \cdots + a_{1n}z_n \\ \vdots \\ a_{n1}z_1 + \cdots + a_{nn}z_n \end{bmatrix},$$

de  $\mathbb{C}^n$  em  $\mathbb{C}^n$ . Podemos, pois, considerar que matrizes com entradas em  $\mathbb{R}$  são casos particulares de matrizes com entradas em  $\mathbb{C}$  (que, entre outras coisas, têm origem em sistemas lineares com coeficientes e incógnitas em  $\mathbb{C}$ ). Tudo funciona, algebricamente, como no caso real. Inclusive o **determinante**, com sua totalmente algébrica definição:

**Definição:** O **determinante** da matriz  $n \times n$   $[a_{ij}]$ , real ou complexa, é o número  $\det [a_{ij}]$ , também notado por  $|a_{ij}|$ , e definido por

$$\det [a_{ij}] = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}.$$

Embora não faça sentido, no caso complexo, falar em sinal do determinante,<sup>1</sup> as demais propriedades relevantes se mantêm:

<sup>1</sup>O que tem a ver com o seguinte fato: em  $\mathbb{C}^n$ , podemos deformar qualquer base em qualquer outra, continuamente, sem perder a independência linear

**Teorema<sup>2</sup>:** O determinante da matriz  $n \times n$   $[a_{ij}]$ , real ou complexa, é uma forma  $n$ -linear alternada dos vetores coluna de  $[a_{ij}]$  e satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\det [I] = 1$ , sendo  $[I]$  a matriz identidade;
2.  $\det ([A] [B]) = \det [A] \det [B]$ , para quaisquer matrizes  $n \times n$   $[A]$  e  $[B]$
3.  $\det [A]^T = \det [A]$ , para qualquer matriz  $n \times n$   $[A]$ .

**Observação:** Se  $z = (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$  é um elemento de  $\mathbb{C}^n$ , é usual (e perfeitamente correto) escrever  $z = x + iy$ , com  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  em  $\mathbb{R}^n$ . Assim, se  $c = a + bi$ , com  $a$  e  $b$  reais, temos  $cz = (ax - by) + i(ay + bx)$ , com  $ax - by$  e  $ay + bx$  em  $\mathbb{R}^n$ . Note, também, que, se  $x + iy = x' + iy'$ , com  $x, y, x'$  e  $y'$  em  $\mathbb{R}^n$ , então  $x = x'$  e  $y = y'$ .

## b Autovalores complexos

Assim como no caso real, para matrizes complexas quadradas,  $\det A \neq 0$  se, e somente se,  $z \mapsto Az$  é isomorfismo. Assim, para  $\lambda$  em  $\mathbb{C}$ ,

$$\det(\lambda I - A) = 0 \iff \exists z \in \mathbb{C}^n \mid (\lambda I - A)z = 0 \iff \exists z \in \mathbb{C}^n \mid Az = \lambda z.$$

**Definição:** O número complexo  $\lambda$  é dito um **autovalor** de  $A$  se satisfaz qualquer uma das três condições equivalentes acima. Se  $z$  é não nulo e  $Az = \lambda z$ ,  $z$  é dito **autovetor** associado a  $\lambda$ .

Se  $A$  é matriz real e  $\lambda = a + bi$ , com  $b \neq 0$ , é autovalor complexo de  $A$ , considerando um autovetor  $z = x + iy$  associado a  $\lambda$ , obtemos:

$$Ax + iAy = Az = \lambda z = (a + bi)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx),$$

o que nos dá

$$Ax = ax - by, \quad Ay = ay + bx.$$

**Exercício 24.2** Mostre que, nessas condições,  $x$  e  $y$  são linearmente independentes.

**Exercício 24.3** Conclua que o subespaço, bidimensional, gerado por  $x$  e  $y$  é invariante por  $A$ .

**Exercício 24.4** Note que, se  $x$  e  $y$  são ortogonais, então a restrição de  $A$  ao plano por eles gerado é uma rotação composta com homotetia. Escreva, em função de  $a$  e  $b$ , o seno e o cosseno do ângulo da rotação e a razão da homotetia.

**Exercício 24.5** Mostre que  $A(x - iy) = (a - bi)(x - iy) = \bar{\lambda}(x - iy)$ . Assim, obtemos, sem recorrer ao polinômio característico, que se  $A$  é matriz real e  $\lambda$  é autovalor complexo de  $A$ , então  $\bar{\lambda}$  também o é.

---

<sup>2</sup>veja o capítulo correspondente, no livro *O Espaço & outros espaços*, de onde a definição do determinante e este Teorema foram copiados e colados

## c O produto escalar

Começemos destacando que, para  $x$  em  $\mathbb{R}$ , temos  $|x| = \sqrt{xx}$ ; já para  $z$  em  $\mathbb{C}$ , temos  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ .

**Definição:** Se  $z = (z_1, \dots, z_n)$  e  $w = (w_1, \dots, w_n)$  estão em  $\mathbb{C}^n$ , seu **produto escalar** (também dito **produto interno**) é definido por

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k.$$

Note que, se  $z_k = x_k + iy_k$  e  $w_k = x'_k + iy'_k$ , então

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^n (x_k x'_k + y_k y'_k) + i \sum_{k=1}^n (y_k x'_k - x_k y'_k).$$

Assim, a parte real do produto escalar é o produto escalar em  $\mathbb{R}^{2n}$  (uma forma bilinear simétrica); já a parte imaginária é uma forma bilinear antissimétrica.<sup>3</sup>

**Exercício 24.6** Pense  $z$  e  $w$  como elementos de  $\mathbb{R}^{2n}$ , representados, respectivamente, por  $(x, y)$  e  $(x', y')$ . Escreva  $\langle z, w \rangle = \langle (x, y), (x', y') \rangle + \omega_o((x, y), (x', y'))$ . Note que  $\omega$  é uma soma de áreas:

$$\omega_o((x, y), (x', y')) = - \sum_{k=1}^n \det [(x_k, y_k), (x'_k, y'_k)].$$

**Exercício 24.7** Mostre que o produto escalar de  $\mathbb{C}^n$  satisfaz, para quaisquer  $z, \tilde{z}, w$  em  $\mathbb{C}^n$  e qualquer  $c$  em  $\mathbb{C}$ , as propriedades:

1.  $\langle w, z \rangle = \overline{\langle z, w \rangle}$ ;
2.  $\langle z + \tilde{z}, w \rangle = \langle z, w \rangle + \langle \tilde{z}, w \rangle$ ;
3.  $\langle cz, w \rangle = c \langle z, w \rangle$ ;
4.  $\langle z, z \rangle \geq 0$ ;  $\langle z, z \rangle = 0 \Rightarrow z = 0$ .

**Definição:** Se  $E$  é espaço vetorial sobre o corpo dos complexos e  $\langle \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  satisfaz as 4 propriedades acima,  $E$  é dito espaço vetorial (complexo) com **produto interno**.

**Exercício 24.8** Note que  $\langle z, cw \rangle = \bar{c} \langle z, w \rangle$ .

**Exercício 24.9** Suponha que  $A$  é matriz (complexa)  $m \times n$  e que  $u \in \mathbb{C}^n$ ,  $v \in \mathbb{C}^m$ . Mostre que

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle,$$

sendo  $A^*$  a **transposta conjugada** de  $A$ , isto é: se  $A = [a_{ij}]$ , então  $A^* = [\bar{a}_{ji}]$ .

<sup>3</sup>A parte imaginária é, a menos do sinal, a **forma simplética** canônica de  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $\omega_o = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k$

O **Teorema de Pitágoras** tem um pequeno detalhe novo. Como a norma, definida por  $|z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ , só depende da parte real do produto interno, basta que a parte real do produto interno de  $u$  e  $v$ ,  $Re \langle u, v \rangle$ , seja nula.

**Teorema de Pitágoras:** Sejam  $u$  e  $v$  vetores do espaço vetorial complexo  $E$ , com produto interno. Se a parte real do produto interno de  $u$  e  $v$ ,  $Re \langle u, v \rangle$ , é nula, então

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2.$$

Demonstração :  $|u + v|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle = |u|^2 + |v|^2 + \langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle} = |u|^2 + |v|^2 + 2Re \langle u, v \rangle = |u|^2 + |v|^2$ . ■

**Exercício 24.10** Dê um exemplo, em  $\mathbb{C}^2$ , de dois vetores,  $u$  e  $v$ , tais que  $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2$  sem que  $\langle u, v \rangle$  seja nulo.

**Exercício 24.11** Mostre que continuam valendo, em qualquer espaço vetorial complexo,  $E$ , com produto interno (mesmo de dimensão infinita):

1. **Projeção sobre vetor não nulo:** Se  $u \neq 0$ , então

$$\left\langle v - \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u, u \right\rangle = 0.$$

2. **Desigualdade de Cauchy-Schwarz-Buniacóvsqui:**

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u||v|.$$

3. **Truque de Fourier:** se  $v = x_1 \varepsilon_1 + \dots + x_n \varepsilon_n$ , com

$$\langle \varepsilon_j, \varepsilon_k \rangle = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases},$$

então  $x_k = \langle v, \varepsilon_k \rangle$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

4. **Projeção ortogonal:** se  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  formam base ortonormal do subespaço  $E_0$  de  $E$  e  $v$  é elemento de  $E$ , então

$$v_0 = \langle v, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \dots + \langle v, \varepsilon_n \rangle \varepsilon_n$$

é tal que

$$\langle v - v_0, u \rangle = 0 \quad \forall u \in E_0.$$

5. **Teorema de Gram-Schmidt:** todo subespaço de  $E$ ,  $E_0$ , de dimensão finita, tem base ortonormal. Se  $v_1, \dots, v_n$  formam base de  $E_0$ , então  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ , definidos por

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{|v_1|} v_1; \quad \bar{v}_{k+1} = v_{k+1} - (\langle v_{k+1}, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \dots + \langle v_{k+1}, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k), \quad \varepsilon_{k+1} = \frac{1}{|\bar{v}_{k+1}|} \bar{v}_{k+1},$$

formam base ortonormal para  $E_0$ .

**Exercício 24.12** *Mostre que vale também, o Teorema do Núcleo e da Imagem: Se  $E$  e  $F$  são de dimensão finita e  $T : E \rightarrow F$  é linear, então o núcleo de  $T^*$  é ortogonal à imagem de  $T$ ;  $T$  e  $T^*$  são isomorfismos entre  $N(T)^\perp$  (espaço ortogonal ao núcleo de  $T$ ) e  $Im(T)$  (imagem de  $T$ ).*



# Capítulo 25

## A Adjunta de Transformação Linear

### a A matriz transposta conjugada

**Proposição:** Sejam  $A = [a_{ij}]$  matriz complexa  $m \times n$ ,  $u$  em  $\mathbb{C}^n$  e  $v$  em  $\mathbb{C}^m$ . Então

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle,$$

sendo  $A^* = [\bar{a}_{ji}]$  a **transposta conjugada** de  $A$ , também dita **adjunta** de  $A$ .

Demonstração : Escrevendo por extenso e usando o ponto para representar produto escalar,, temos:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}u_1 + \cdots + \cdots + a_{1n}u_n \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots \\ a_{m1}u_1 + \cdots + \cdots + a_{mn}u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \\ & \begin{aligned} & (a_{11}u_1 + \cdots + \cdots + a_{1n}u_n) \bar{v}_1 \\ & + \\ & (a_{i1}u_1 + \cdots + \cdots + a_{in}u_n) \bar{v}_i \\ & + \\ & (a_{m1}u_1 + \cdots + \cdots + a_{mn}u_n) \bar{v}_m \end{aligned} = u_1 \begin{pmatrix} a_{11}\bar{v}_1 \\ + \\ a_{i1}\bar{v}_i \\ + \\ a_{m1}\bar{v}_m \end{pmatrix} + \cdots + \cdots + u_n \begin{pmatrix} a_{1n}\bar{v}_1 \\ + \\ a_{in}\bar{v}_i \\ + \\ a_{mn}\bar{v}_m \end{pmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{a}_{11}v_1 + \bar{a}_{i1}v_i + \bar{a}_{m1}v_m \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{a}_{1n}v_1 + \bar{a}_{in}v_i + \bar{a}_{mn}v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

Já temos, pois uma boa orientação para, caso a transformação linear  $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  seja dada pela matriz (complexa)  $A = [a_{ij}]$ : sua **adjunta** é  $T^* : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ , dada pela matriz  $A^* = [\bar{a}_{ji}]$ . Neste caso, vale, como acabamos de provar,

$$\forall u \in \mathbb{C}^n \forall v \in \mathbb{C}^m \langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle.$$

## b A adjunta

Como não é conveniente estarmos a depender da matriz (que é, como sabemos, apenas uma roupa para a transformação linear, fixadas as bases do domínio e do contradomínio), vale a pena, a exemplo do que fizemos no caso real, aprofundar um pouco.

**Lema:** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais complexos, de dimensão finita, com produto interno, e  $T : E \rightarrow F$  uma transformação linear. São equivalentes:

- (i)  $T^* : F \rightarrow E$  é a transformação dada pela matriz transposta conjugada da de  $T$  nas bases ortonormais  $\alpha$ , de  $E$ , e  $\beta$ , de  $F$ ;
- (ii)  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \forall u \in E, \forall v \in F$ ;
- (iii) a matriz de  $T^*$  em qualquer par de bases ortonormais (uma para  $E$ , outra para  $F$ ) é a transposta conjugada da de  $T$  nas mesmas bases.

Demonstração do Lema: Provaremos  $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$ .

$(i) \Rightarrow (ii)$ : Seja  $A = (a_{ij})$  a matriz de  $T$  na base ortonormais escolhidas,  $\alpha$  e  $\beta$ . Fixemos dois vetores,  $u$  e  $v$ , dados em coordenadas, nessa bases, por  $u = (u_i)$  e  $v = (v_j)$ . Temos, então ,

$$\langle Tu, v \rangle = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right) \bar{v}_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \bar{v}_i \right) = \sum_{j=1}^n \left( u_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \bar{v}_i \right) = \sum_{j=1}^n \left( u_j \overline{\sum_{i=1}^n \bar{a}_{ij} v_i} \right) \langle u, T^*v \rangle.$$

Assim,  $T^*$  satisfaz a identidade (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$ : Se  $T^* : F \rightarrow E$  satisfaz (ii),

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \forall u, v \in E,$$

então sua matriz,  $B^* = (b_{ij}^*)$ , em um par de bases ortonormais qualquer,  $\alpha = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ ,  $\beta = \{\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_m\}$ , é dada por

$$b_{ij}^* = \langle T^* \bar{\varepsilon}_j, \varepsilon_i \rangle = \overline{\langle \varepsilon_i, T^* \bar{\varepsilon}_j \rangle} = \overline{\langle T \varepsilon_i, \bar{\varepsilon}_j \rangle} = \bar{b}_{ji},$$

sendo  $B = (b_{ij})$  a matriz de  $T$  nas bases  $\alpha$  e  $\beta$ , o que mostra que  $T^*$  é dada pela transposta conjugada de  $B$ .

A implicação  $(iii) \Rightarrow (i)$  é uma tautologia. ■

Do lema concluímos que, dada uma transformação linear  $T : E \rightarrow F$ , a identidade

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \forall u \in E, \forall v \in F$$



define a transformação linear  $T^* : F \rightarrow E$ .

**Definição:** Sejam  $E, F$  espaços vetoriais complexos, de dimensão finita, com produto interno, e  $T : E \rightarrow F$  uma transformação linear. A transformação linear  $T^* : F \rightarrow E$ , definida por

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \quad \forall u \in E, \forall v \in F$$

é dita a **adjunta** de  $T$ . Alternativamente,  $T^*$  pode ser definida como a transformação associada à matriz transposta da de  $T$  nas bases  $\alpha$  e  $\beta$ , sendo  $\alpha$  uma base ortonormal qualquer de  $E$  e  $\beta$  uma base ortonormal qualquer de  $F$ . Se  $T^* = T$ ,  $T$  é dita **autoadjunta**.

**Exercício 25.1** Sejam  $E$  &  $F$  espaços vetoriais (reais ou complexos), com produto interno, de dimensão finita e seja  $T : E \rightarrow F$  linear.

(i) Mostre que existe uma única transformação linear  $T^* : F \rightarrow E$  tal que  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \quad \forall u \in E, \forall v \in F$ .

(ii) Mostre que, se a transformação  $R : F \rightarrow E$  é tal que  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Rv \rangle \quad \forall u \in E, \forall v \in F$ , então  $R$  é linear e  $R = T^*$ .

**Proposição:** Sejam  $E, F$  e  $G$  espaços vetoriais complexos, de dimensão finita, com produto interno. Sejam  $T : E \rightarrow F$  e  $S : F \rightarrow G$  transformações lineares. Então:

- $(T^*)^* = T$
- $(ST)^* = T^*S^*$
- Se  $\lambda$  é autovalor de  $T$ , então  $\bar{\lambda}$  é autovalor de  $T^*$ .

Demonstração : Vamos usar o fato de que, qualquer que seja a transformação linear  $R$ , a identidade  $\langle Ru, v \rangle = \langle u, R^*v \rangle$  define  $R^*$ . Então,

$$\langle u, (T^*)^*v \rangle = \langle T^*u, v \rangle = \overline{\langle v, T^*u \rangle} = \overline{\langle Tv, u \rangle} = \langle u, Tv \rangle, \quad \forall u \in E \forall v \in F$$

prova que  $(T^*)^* = T$ . Por outro lado,

$$\langle u, (ST)^*w \rangle = \langle (ST)u, w \rangle = \langle Tu, S^*w \rangle = \langle u, T^*S^*w \rangle$$

prova  $(ST)^* = T^*S^*$ . Se  $\lambda$  é autovalor de  $T$ , então  $\det(\lambda I - T) = 0$ . É fácil ver que  $(\lambda I)^* = \bar{\lambda}I$ . Logo,

$$\det(\bar{\lambda}I - T^*) = \det(\lambda I - T)^* = \overline{\det(\lambda I - T)^T} = \overline{\det(\lambda I - T)} = 0,$$

o que mostra que  $\bar{\lambda}$  é autovalor de  $T^*$ . Finalmente, ■

**Exercício 25.2** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais complexos, de dimensão finita, com produto interno. Seja  $T : E \rightarrow F$  transformação linear. mostre que a imagem de  $T^*$  é o espaço ortogonal ao núcleo de  $T$ .



## Capítulo 26

# Teorema Espectral com Autovalores Complexos

### a O Teorema Espectral para operadores simétricos e antissimétricos

Tanta trabalheira para estender nossa Álgebra Linear a espaços complexos...tem que dar algum lucro! A vantagem básica é: o Teorema Fundamental da Álgebra. Vejamos nosso velho e bom Teorema Espectral para operadores autoadjuntos.

**Definição:** Se  $E$  é espaço vetorial complexo, de dimensão finita, com produto interno, e  $T : E \rightarrow E$  é linear,  $T$  é dito **autoadjunto** se  $T^* = T$ . Usa-se, também, o termo **operador simétrico**.

**Observação:** Note que  $T$  é autoadjunto se, e somente se,

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle \quad \forall u, v \in E.$$

Exemplo: Se  $a, b, c$  e  $d$  são reais, é autoadjunto o operador  $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ , dado por

$$\begin{bmatrix} a & c + di \\ c - di & b \end{bmatrix}.$$

**Teorema:** Se  $E$  é espaço vetorial complexo, de dimensão finita, com produto interno, e  $T : E \rightarrow E$  é autoadjunto, então:

- Todos os autovalores de  $T$  são reais
- $E$  tem base ortonormal de autovetores.

Demonstração : Para provar a primeira afirmação, suponhamos que  $\lambda$  é autovalor de  $T$ , com autovetor  $v$ . Então

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = \langle v, Tv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle.$$

Como  $v$  é não nulo, temos  $\bar{\lambda} = \lambda$ , ou seja:  $\lambda$  é real.

Para provar a segunda afirmação, procedemos por indução sobre a dimensão de  $E$ . O Teorema é trivial para dimensão 1 (caso em que  $Tu = cu$ , obrigatoriamente com  $c$  real, já que  $T^* = T$ ). Se o teorema vale para dimensão inferior a  $n$  e  $E$  tem dimensão  $n$ , podemos, graças ao Teorema Fundamental da Álgebra, tomar um autovalor,  $\lambda$ , de  $T$ . Seja, também,  $\varepsilon_n$  um autovetor associado a  $\lambda$ , com  $|\varepsilon_n| = 1$ . Seja

$$E_o = \{u \in E \mid \langle u, \varepsilon_n \rangle = 0\}.$$

Temos, então

$$u \in E_o \Rightarrow \langle u, \varepsilon_n \rangle = 0 \Rightarrow \langle Tu, \varepsilon_n \rangle = \langle u, T\varepsilon_n \rangle = \langle u, \lambda\varepsilon_n \rangle = \bar{\lambda} \langle u, \varepsilon_n \rangle = 0 \Rightarrow Tu \in E_o.$$

Assim, podemos considerar  $T$  como operador linear de  $E_o$  em  $E_o$ . Como  $\dim(E_o) = n - 1$  e  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$  para quaisquer  $u$  e  $v$  em  $E_o$ , podemos, pela hipótese de indução, tomar uma base ortonormal de  $E_o$ ,  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$ , constituída apenas por autovetores de  $T$ . acrescentando-lhe nosso  $\varepsilon_n$ , concluímos a demonstração. ■

O fato de trabalharmos com autovalores complexos vai nos permitir, também, considerar o caso em que  $T^* = -T$  (neste caso,  $T$  costuma ser chamado de **antissimétrico**). É evidente que operadores antissimétricos também têm direito a um Teorema Espectral, com demonstração praticamente igual à de seus gêmeos simétricos.

**Teorema:** Se  $E$  é espaço vetorial complexo, de dimensão finita, com produto interno, e  $T : E \rightarrow E$  é antissimétrico, então:

- Todos os autovalores de  $T$  são imaginários
- $E$  tem base ortonormal de autovetores.

Demonstração : A maneira econômica é observar que  $T$  é antissimétrica se, e somente se,  $iT$  é simétrica; aplica-se, então, o Teorema anterior. Mas também é econômico simplesmente copiar e colar a demonstração anterior, fazendo pequenas alterações. O leitor está convidado a explorar a primeira alternativa; faremos a segunda.

Para provar a primeira afirmação, suponhamos que  $\lambda$  é autovalor de  $T$ , com autovetor  $v$ . Então

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = -\langle v, Tv \rangle = -\langle v, \lambda v \rangle = -\bar{\lambda} \langle v, v \rangle.$$

Como  $v$  é não nulo, temos  $\bar{\lambda} = -\lambda$ , ou seja:  $\lambda$  é imaginário.

Para provar a segunda afirmação, procedemos por indução sobre a dimensão de  $E$ . O Teorema é trivial para dimensão 1 (caso em que  $Tu = cu$ , obrigatoriamente com  $c$  real, já que  $T^* = T$ ). Se o teorema vale para dimensão inferior a  $n$  e  $E$  tem dimensão  $n$ , podemos, graças ao Teorema Fundamental da Álgebra, tomar um autovalor,  $\lambda$ , de  $T$ . Seja, também,  $\varepsilon_n$  um autovetor associado a  $\lambda$ , com  $|\varepsilon_n| = 1$ . Seja

$$E_o = \{u \in E \mid \langle u, \varepsilon_n \rangle = 0\}.$$

Temos, então

$$u \in E_o \Rightarrow \langle u, \varepsilon_n \rangle = 0 \Rightarrow \langle Tu, \varepsilon_n \rangle = -\langle u, T\varepsilon_n \rangle = -\langle u, \lambda\varepsilon_n \rangle = -\bar{\lambda} \langle u, \varepsilon_n \rangle = 0 \Rightarrow Tu \in E_o.$$

Assim, podemos considerar  $T$  como operador linear de  $E_o$  em  $E_o$ . Como  $\dim(E_o) = n - 1$  e  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, -Tv \rangle$  para quaisquer  $u$  e  $v$  em  $E_o$ , podemos, pela hipótese de indução, tomar uma base ortonormal de  $E_o$ ,  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$ , constituída apenas por autovetores de  $T$ . acrescentando-lhe nosso  $\varepsilon_n$ , concluímos a demonstração. ■

**Exercício 26.1** *Sejam  $E$  é espaço vetorial complexo, de dimensão finita, com produto interno, e  $T : E \rightarrow E$  linear e tal que vale, para subespaços  $F$  de  $E$ , a propriedade*

$$T(F) \subset F \implies T(F^\perp) \subset F^\perp,$$

( $F^\perp$  é o **subespaço ortogonal** a  $F$ ). *Mostre que  $E$  tem base ortonormal de autovetores de  $T$ .*

**Exercício 26.2** *Sejam  $E$  é espaço vetorial complexo, de dimensão finita, com produto interno, e  $T : E \rightarrow E$  linear e tal que todo autovetor de  $T$  é também autovetor de  $T^*$ . Mostre que  $E$  tem base ortonormal de autovetores de  $T$ .*

## b Teorema Espectral para Operadores Normais

Se  $E$  é espaço vetorial complexo, de dimensão finita, com produto interno, e  $T : E \rightarrow E$  é linear, podemos escrever  $T = S + A$ , com  $S$  simétrico e  $A$  antissimétrico:

$$S = \frac{T + T^*}{2}, \quad A = \frac{T - T^*}{2}.$$

Como acabamos de ver, tanto  $S$  como  $A$  são diagonalizáveis, por meio de bases ortonormais. É tentador pensar que qualquer  $T$  goze da mesma propriedade, mas há exemplos bem simples, em dimensão 2, para nos desiludir. No entanto, é claro que podemos ter operadores lineares com base ortonormal de autovetores e tendo por autovalores qualquer escolha de  $n$  números complexos (sendo  $n$  a dimensão do espaço). Tais operadores, entre outras propriedades, deverão comutar com seus adjuntos (basta olhar para as correspondentes matrizes, em uma base ortonormal de autovetores).

**Definição:** Se  $E$  é espaço vetorial complexo, de dimensão finita, com produto interno, e  $N : E \rightarrow E$  é linear e tal que  $N^*N = NN^*$ ,  $N$  é dito **normal**.

**Lema:** Se  $N$  é normal, então todo autovetor de  $N$  é também autovetor de  $N^*$ . Mais precisamente, se  $Nu = \lambda u$ , então  $N^*u = \bar{\lambda}u$ .

Demonstração : Vamos usar o fato de que, qualquer que seja  $T : E \rightarrow F$ , a imagem de  $T^*$  é ortogonal ao núcleo de  $T$  (se  $v \in F$ , então  $\langle u, T^*v \rangle = \langle Tu, v \rangle = 0$ , para todo  $u$  no núcleo de  $T$ ). Suponha que  $\lambda$  é autovalor de  $N$ , com autovetor  $u$ . Vamos mostrar que  $N^*u = \bar{\lambda}u$ . Ora,

$$(N - \lambda I)u = 0 \Rightarrow 0 = (N^* - \bar{\lambda}I)(N - \lambda I)u = (N - \lambda I)(N^* - \bar{\lambda}I)u.$$

Daí decorre que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (N - \lambda I)(N^* - \bar{\lambda}I)u, u \rangle = \langle (N^* - \bar{\lambda}I)u, (N - \lambda I)^*u \rangle = \\ &= \langle (N^* - \bar{\lambda}I)u, (N^* - \bar{\lambda}I)u \rangle = |(N^* - \bar{\lambda}I)u|^2. \end{aligned}$$

Logo,  $(N^* - \bar{\lambda}I)u = 0$ . ■

**Teorema Espectral:** Se  $E$  é espaço vetorial complexo, de dimensão finita, com produto interno, e  $N : E \rightarrow E$  é linear, então  $E$  tem base ortonormal de autovetores de  $N$  se, e somente se,  $N^*N = NN^*$ .

Demonstração : Começamos supondo que  $E$  tem base ortonormal de autovetores de  $N$ . Então a matriz de  $N$  numa tal base é diagonal. Tomando sua transposta conjugada, temos imediatamente que  $N$  e  $N^*$  comutam. Reciprocamente, suponha, agora, que  $N^*N = NN^*$ . A demonstração se faz, então, por indução sobre a dimensão de  $E$ . Como de hábito, o resultado é trivial em dimensão 1. Suponha que o resultado vale em dimensão inferior a  $n$  e seja  $\varepsilon_n$ , com  $|\varepsilon_n| = 1$ , tal que  $N\varepsilon_n = \lambda\varepsilon_n$ . Seja

$$E_o = \{u \in E \mid \langle u, \varepsilon_n \rangle = 0\}.$$

Temos, é claro,  $N^*(E) \subset E$ , pois

$$\langle u, \varepsilon_n \rangle = 0 \Rightarrow \langle N^*u, \varepsilon_n \rangle = \langle u, N\varepsilon_n \rangle = \langle u, \lambda\varepsilon_n \rangle = \bar{\lambda} \langle u, \varepsilon_n \rangle = 0.$$

Mas, pelo Lema acima,  $\varepsilon_n$  é também autovetor de  $N^*$  (associado a  $\bar{\lambda}$ ), de forma que  $N(E) \subset E$ , pois

$$\langle u, \varepsilon_n \rangle = 0 \Rightarrow \langle Nu, \varepsilon_n \rangle = \langle u, N^*\varepsilon_n \rangle = \langle u, \bar{\lambda}\varepsilon_n \rangle = \lambda \langle u, \varepsilon_n \rangle = 0.$$

Assim, podemos assegurar que, restrito a  $E_o$ , nosso  $N$  é normal.  $E_o$  tem, portanto, base ortonormal de autovetores de  $N$ , à qual acrescentamos  $\varepsilon_n$  e encerramos a demonstração. ■

Uma consequência interessante diz respeito aos **operadores unitários**, que são a versão complexa dos ortogonais.

**Definição:** Se  $E$  é espaço vetorial complexo, de dimensão finita, com produto interno, o operador linear  $U : E \rightarrow E$  é dito **unitário** se preserva o produto interno, ou seja:

$$\langle Uu, Uv \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in E.$$

É imediato que, se  $U$  é unitário,  $U$  leva base ortonormal em base ortonormal, de modo que  $U^*U = I$ . Em dimensão finita, isso é suficiente para garantir que  $U^{-1} = U^*$ . Em particular,  $UU^* = U^*U$ , ou seja, todo operador unitário é normal e, portanto, é tem base ortonormal de autovetores.

Uma demonstração alternativa do Teorema Espectral para operadores normais, baseada na identidade

$$N = \frac{N + N^*}{2} + \frac{N - N^*}{2},$$

é fornecida pelo seguinte resultado.

**Proposição:** Se  $A : E \rightarrow E$  e  $B : E \rightarrow E$  são autoadjuntos e tais que  $AB = BA$ , então  $E$  tem base ortonormal que diagonaliza, simultaneamente,  $A$  e  $B$ .

Demonstração : Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  os autovalores de  $A$  e faça, para  $i = 1, \dots, k$ ,

$$E_i = \{v \in E \mid Av = \lambda_i v\}.$$

Ocorre que cada  $E_i$  é invariante por  $B$ : se  $v \in E_i$ , temos  $A(Bv) = B(Av) = B(\lambda_i v) = \lambda_i(Bv)$ , o que mostra que  $Bv \in E_i$ . Assim, pelo Teorema Espectral, cada  $E_i$  tem base,  $\beta_i$ , de autovetores de  $B$  (que, por conta da própria definição de  $E_i$ , é também base de autovetores de  $A$ ). A base  $\beta = \cup_{i=1}^k \beta_i$ , de  $E$ , diagonaliza, simultaneamente,  $A$  e  $B$ . ■

**Exercício 26.3** *Faça uma nova demonstração do Teorema Espectral para operadores normais, enunciado acima, baseada na Proposição que acabamos de demonstrar.*





## Capítulo 27

### Quando o exemplo vem de cima

#### a Um exemplo

Até agora temos baseado boa parte do desenvolvimento da teoria em um princípio fundamental: para usarmos a intuição (geométrica) em  $\mathbb{R}^n$ , devemos *fazer de conta* que  $n = 2$  ou  $n = 3$ . Isso nos permite, como já dissemos anteriormente (capítulo 4), investir um problema "algébrico" de um significado geométrico. O propósito deste capítulo é chamar atenção para situações em que esse procedimento, embora valioso, deve, em muitas situações, ser substituído (ou complementado) por outro, que vai para o extremo oposto.

Começemos com um exemplo. Seja  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  a transformação linear definida pela matriz simétrica

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(nossa matriz tem todos os elementos da diagonal principal iguais a -2, os acima e abaixo destes iguais a 1 e dois uns perdidos em  $a_{1n}$  e em  $a_{n1}$ ; os demais são nulos).

#### b De onde veio?

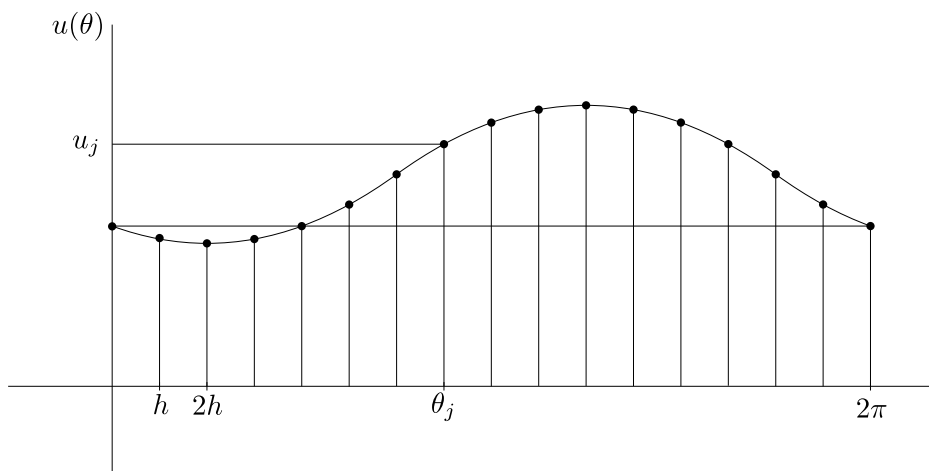
Esta é uma questão crucial, se quisermos recorrer, em algum momento, à intuição. Nossa transformação linear, pode não parecer, é uma versão discreta da segunda derivada em um espaço de funções periódicas. Funções periódicas surgem naturalmente, entre outras possibilidades, quando analisamos funções definidas em

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Como todo ponto de  $S^1$  pode ser posto na forma  $(\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , é razoável pensarmos nossas funções com domínio em  $\mathbb{R}$ . Se  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada, olhamos para  $u(\theta)$  como se fosse função, não de  $\theta$ , mas de  $(\cos \theta, \sin \theta)$ . É preciso, claro, que consideremos apenas funções  $u(\theta)$  que satisfaçam

$$u(\theta + 2\pi) = u(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Convencionaremos, pois, que nossas funções são periódicas, de período  $2\pi$ , e a elas nos referiremos chamando-as simplesmente de *funções periódicas*. Suponhamos, agora, que nos concentremos no intervalo  $[0, 2\pi]$  e façamos uma discretização: partimos  $[0, 2\pi]$  em  $n$  intervalos de mesmo comprimento  $h = 2\pi/n$ , por meio dos pontos  $\theta_j = jh$ ,  $h = 0, 1, \dots, n$ .



Os correspondentes valores  $u_j = u(\theta_j)$  nos fornecem um vetor  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  em  $\mathbb{R}^n$  (podemos deixar de fora  $u_0 = u(0)$ , já que, pela periodicidade,  $u_0 = u_n$ ). Assim, pensaremos um vetor  $\mathbf{u}$  de  $\mathbb{R}^n$  como uma função periódica em  $[0, 2\pi]$ , decodificado segundo os parâmetros que acabamos de estabelecer. Note que podemos, finalmente, VER um vetor em  $\mathbb{R}^n$ !

Como seria, então, a versão discreta da derivada? Calculando no ponto  $\theta_j$ , temos duas escolhas naturais. Olhando para a direita, temos

$$\frac{u(\theta_j + h) - u(\theta_j)}{h} = \frac{1}{h} (u_{j+1} - u_j);$$

olhando para a esquerda, temos

$$\frac{u(\theta_j) - u(\theta_j - h)}{h} = \frac{1}{h} (u_j - u_{j-1}).$$

**Exercício 27.1** Note que, no primeiro caso, teremos, quando  $j = n$ ,  $\frac{1}{h} (u_1 - u_n)$ ; no segundo, quando  $j = 1$ ,  $\frac{1}{h} (u_1 - u_n)$ .

Não vamos escolher uma das duas; estamos interessados na segunda derivada. Democráticamente, derivaremos uma vez olhando para um lado, outra vez olhando para o outro.

**Exercício 27.2** Mostre que o resultado, independente de para que lado olhemos primeiro, é, no ponto  $\theta_j$ ,

$$\frac{1}{h^2} (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}).$$

Note que, para  $j = n$ ,  $u_{j+1} = u_1$  e, para  $j = 1$ ,  $u_{j-1} = u_n$ .

Esquecendo as divisões por  $h$  ou por  $h^2$  (que podemos trazer de volta quando necessário) e usando a convenção  $u_{n+1} = u_1$ ,  $u_0 = u_n$ , definimos três operadores em  $\mathbb{R}^n$ :  $D_+$ ,  $D_-$  e  $A = D_+D_- = D_-D_+$ , dados, respectivamente, por

$$(D_+\mathbf{u})_j = u_{j+1} - u_j,$$

$$(D_-\mathbf{u})_j = u_j - u_{j-1},$$

$$(A\mathbf{u})_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}.$$

**Exercício 27.3** Mostre que, de fato,  $D_+D_- = D_-D_+$ .

**Exercício 27.4** Seja  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por  $(S\mathbf{u})_j = u_{j+1}$  (usando a convenção  $u_{n+1} = u_1$ ,  $u_0 = u_n$ ). Mostre que  $D_+ = S - I$  e que  $D_- = I - S^{-1}$ . Mostre que a matriz de  $S^{-1}$  é a transposta da de  $S$ .

**Exercício 27.5** Mostre que a matriz de  $A$  é

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

**Exercício 27.6** Mostre que  $A = S - 2I + S^{-1}$ .

## c De cima para baixo

O fato de que  $A$  represente uma versão  $\mathbb{R}^n$  da segunda derivada nos leva a esperar desse operador coisas que, olhando para dimensão mais baixa, talvez não aparecessem (ou, ao menos, talvez não tivessem apelo geométrico). Na realidade, a partir do trabalho de Fourier sobre a propagação de calor, no início do século XIX, o operador de segunda derivada no espaço das funções periódicas tem sido bastante estudado. Começemos com um primeiro resultado, obtido via integração por partes:

$$\int_0^{2\pi} u''u = (u'u)^2 \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (u')^2 = - \int_0^{2\pi} (u')^2.$$

O resultado acima pode ser lido

$$\langle d^2u, u \rangle = - \langle du, du \rangle,$$

sendo  $d$  o operador de derivação e

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(\theta)g(\theta)d\theta.$$

Nossa versão em  $\mathbb{R}^n$ , então, com o produto escalar usual, seria:

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = - \langle D_+\mathbf{u}, D_+\mathbf{u} \rangle,$$

ou

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = - \langle D_-\mathbf{u}, D_-\mathbf{u} \rangle.$$

**Exercício 27.7** Mostre que as duas opções são verdadeiras.

**Exercício 27.8** Note que, em contrapartida, ambos os resultados ( $\int_0^{2\pi} u''u = - \langle du, du \rangle$  e  $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = - \langle D_+\mathbf{u}, D_+\mathbf{u} \rangle$ ) podem ser interpretados, geometricamente: o vetor  $A\mathbf{u}$  (ou  $d^2u$ ) aponta para dentro da esfera de centro na origem e raio  $|\mathbf{u}|$  (ou  $|u|$ ).

**Exercício 27.9** Mostre que, para quaisquer  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , vale

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle.$$

Compare com

$$\int_0^{2\pi} u''v = \int_0^{2\pi} uv'',$$

para quaisquer  $u$  e  $v$  de período  $2\pi$ , de classe  $C^2$  (isto é, duas vezes deriváveis, com derivadas segundas contínuas).

Uma segunda questão, *vinda de cima*, é motivada pelo seguinte fato. A teoria de séries de Fourier nos leva a expressar cada função periódica  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (sob certas condições adicionais) como uma combinação linear *infinita* de soluções (periódicas) da seguinte equação diferencial:

$$u'' = \lambda u.$$

As coisas ficam mais simples se pensamos nossas funções periódicas tomando valores em  $\mathbb{C}$  (e isso tem, em certos contextos, um significado físico). As soluções da equação diferencial, tendo em conta a periodicidade de  $u$ , são (a menos de multiplicações por constantes) as funções

$$\varphi_k(\theta) = e^{ik\theta}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

às quais correspondem os autovalores  $\lambda_k = -k^2$ . Nesse contexto, temos (a justificativa, mesmo sob certas condições adicionais sobre  $u$ , não é simples o suficiente para ser posta em uma página):

$$u(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}.$$

**Exercício 27.10** Mostre que, se  $k \neq l$ , então

$$\int_0^{2\pi} \varphi_k(\theta) \bar{\varphi}_l(\theta) d\theta = 0.$$

Ao optar por funções a valores em  $\mathbb{C}$ , nossos vetores, que são discretizações destas, passam a viver em  $\mathbb{C}^n$ . Nosso interesse, porém, continua sendo encontrar funções que, embora a valores em  $\mathbb{C}$ , assumam apenas valores reais (suas discretizações, devem, portanto, cair em  $\mathbb{R}^n$ ). Afinal, nossa matriz é simétrica; o Teorema Espectral nos garante autovalores reais e a existência, em  $\mathbb{R}^n$ , de base ortonormal de autovetores.

**Exercício 27.11** *Pense nisso.*

Somos, assim, conduzidos às seguintes questões:

1. Quais são, em  $\mathbb{R}^n$  as possíveis soluções (não triviais) de

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

(o problema é achar  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  que satisfaçam a  $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ )?

2. Encontradas tais soluções, será que constituem uma base ortogonal para  $\mathbb{R}^n$ ?
3. Fazendo  $n$  tender a  $\infty$ , o que obtemos em  $\mathbb{R}^n$  tende, de alguma forma, ao que temos no espaço das funções periódicas?

**Exercício 27.12** Seja  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por  $(S\mathbf{u})_j = u_{j+1}$  (usando a convenção  $u_{n+1} = u_1$ ,  $u_0 = u_n$ ). Suponha que  $S\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ . Mostre que  $\lambda^n = 1$ . Note que  $\lambda^n = 1$  se, e somente se,  $\lambda = e^{ikh}$ , para algum  $k = 1, \dots, n$ , sendo  $h = 2\pi/n$ . Mostre que o mesmo vale para  $S^{-1}$ . Mostre que  $\lambda^n = 1 \Leftrightarrow \bar{\lambda}^n = 1$ . Troque  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  para  $S : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  e refaça.

**Exercício 27.13** Seja  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$  tal que  $S\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ . Mostre que  $S^{-1}\mathbf{u} = \bar{\lambda}\mathbf{u}$ . Mostre que, se  $\lambda = e^{ikh}$ , então, a menos de multiplicação por escalar, temos  $u_j = \lambda^j = e^{ik(jh)}$ .

**Exercício 27.14** Mostre que, se  $\lambda = e^{ikh}$  e  $u_j = \lambda^j = e^{ik(jh)}$ , então

$$\frac{1}{h^2} A\mathbf{u} = \frac{\lambda - 2 + \bar{\lambda}}{h^2} \mathbf{u}.$$

**Exercício 27.15** Mostre que os  $\mathbf{u}_k = (e^{ik(h)}, e^{ik(2h)}, \dots, e^{ik(n-1)h}, 1)$ ,  $k = 1, \dots, n$  formam uma base ortogonal para  $\mathbb{C}^n$ . Observe que esses  $\mathbf{u}_k$  são as discretizações das funções  $\varphi_k$  definidas acima.

**Exercício 27.16** Para dar uma ajeitada, mostre que, se  $n = 2m + 1$ , nossos lambdas podem ser tomados na forma

$$\lambda_k = e^{ikh}, \quad k = -m, -(m-1), \dots, 0, \dots, m.$$

Mostre que, se  $n = 2m$ , podemos fazer

$$\lambda_k = e^{ikh}, \quad k = -(m-1), \dots, 0, \dots, m.$$

**Exercício 27.17** Mostre que, fixando  $k$  e fazendo  $n$  tender a infinito, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k - 2 + \bar{\lambda}_k}{h^2} = -k^2.$$

**Exercício 27.18** No exercício acima, suponha fixado  $k$  e dado um  $\varepsilon$  positivo. Determine, em função de  $K$  e de  $\varepsilon$ , um inteiro  $n_0$  tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{\lambda_k - 2 + \bar{\lambda}_k}{h^2} + k^2 \right| < \varepsilon.$$

O que queremos destacar, com este exemplo, é o seguinte fato: não é preciso ter conhecimentos prévios sobre séries de Fourier (ou mesmo sobre derivadas e integrais) para resolver qualquer dos exercícios referentes ao operador  $A$  que apresentamos; no entanto, é pouco provável que, sem esses conhecimentos, fôssemos sequer capazes de formulá-los (ou, pelo menos, seria necessária uma dose bastante grande de talento para fazê-lo).

O caso que apresentamos é apenas um pequeno exemplo. Modelos matemáticos em ciência e tecnologia nos conduzem, com muita frequência, à busca de soluções que *vivem* em espaços de dimensão infinita e satisfazem equações envolvendo derivadas e/ou integrais (a distribuição de temperaturas em um sólido, o campo de velocidades na atmosfera, a trajetória de um satélite...). Tais espaços costumam congregam as funções que podem descrever o fenômeno em questão. A exemplo do que fizemos com as funções periódicas, é possível dar-lhes versões discretas (e, claro, há infinitas possibilidades de escolha). Tais versões discretas nos jogarão em algum espaço de dimensão finita, em que nosso problema possa ser tratado. Com alguma sorte (além de *engenho e arte*), nosso problema discretizado envolverá vetores e transformações lineares em algum  $\mathbb{R}^n$ , com  $n$  grande. Embora continue valendo a pena investir nosso  $\mathbb{R}^n$  de significado geométrico, pensando seus elementos como flechinhas ou pontos no espaço euclidiano (olhando *para baixo*), não devemos perder de vista o problema original e as informações e sugestões que a área do conhecimento de que é oriundo nosso modelo podem nos fornecer. Nessas situações, é sempre importante *olhar para cima*.

# Capítulo 28

## A forma de Schur e o Teorema de Cayley-Hamilton

### a A forma de Schur

Esta seção contém dois resultados adicionais, que aproveitaremos para demonstrar por que são importantes e estão ao alcance da mão.

Começemos observando que as propriedades gerais do determinante são válidas tanto para matrizes com entradas reais como para as com entradas complexas. Assim, consideraremos, nesta seção, matrizes reais como casos particulares de matrizes complexas. Recordemos que, em  $\mathbb{C}^n$ , o **produto escalar** é definido por

$$\langle u, v \rangle = u_1 \bar{v}_1 + \cdots + u_n \bar{v}_n.$$

**Exercício 28.1** *Mostre que*

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \quad \forall u, v \in \mathbb{C}^n.$$

O leitor está convidado, também, a observar que tanto o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt como a possibilidade de projetar ortogonalmente um vetor sobre um subespaço de dimensão finita continuam valendo no caso complexo.

**Proposição (Forma de Schur):** Se  $E$  é espaço vetorial complexo com produto interno, de dimensão finita, e  $T : E \rightarrow E$  é linear, existe base ortonormal de  $E$  na qual a matriz de  $T$  é diagonal superior, tendo na diagonal apenas autovalores de  $T$ .

*Demonstração :* Por indução finita, sobre a dimensão de  $E$ . O caso de dimensão 1 é trivial. Admitamos o resultado provado para dimensão menor que  $n$  e suponhamos que a dimensão de  $E$  seja  $n$ . Como estamos no caso complexo,  $T$  tem, pelo menos, um autovetor. Seja, pois,  $\mathbf{e}_1$  um autovetor de  $T$ . Sejam, também,  $V$  o subespaço gerado por  $\mathbf{e}_1$  e  $P : E \rightarrow E$  a projeção ortogonal sobre  $V$ . Então  $V^\perp$  é de dimensão  $n - 1$  e  $S : V^\perp \rightarrow E$ , dada por  $Sv = Tv - PTv$ , é tal que  $S(V^\perp) \subset V^\perp$ . Pela hipótese de indução, existe base ortonormal de  $V^\perp$ ,  $\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ , na qual a

matriz de  $S$  (vista como transformação de  $V^\perp$  em  $V^\perp$ ) é diagonal superior. Assim, como, para cada  $k = 2, \dots, n$ , vale

$$S\mathbf{e}_k = a_{2k}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{kk}\mathbf{e}_k,$$

e  $PT\mathbf{e}_k = a_{1k}\mathbf{e}_1$ , segue

$$T\mathbf{e}_k = PT\mathbf{e}_k + S\mathbf{e}_k = a_{1k}\mathbf{e}_1 + a_{2k}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{kk}\mathbf{e}_k,$$

o que mostra que a matriz de  $T$  na base (ortonormal)  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ , que chamaremos de  $M$ , é triangular superior. Como o determinante de  $T$  é igual ao de sua matriz em qualquer base e o determinante de matriz triangular superior é igual ao produto dos elementos da diagonal, então o polinômio característico de  $T$  é  $\det(xI - M) = (x - a_{11}) \cdots (x - a_{nn})$ . Logo, os autovalores de  $T$ , que são as raízes do polinômio característico, coincidem (inclusive quanto à multiplicidade) com os elementos da diagonal de  $M$ . ■

**Escólio:** A Forma de Schur é equivalente à existência de base ortonormal de  $E$ , dita **base de Schur**, formada pelos vetores  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ , e números complexos,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , tais que, sendo  $E_k$  o espaço gerado por  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , e  $E_0 = \{0\}$ , então

$$(T\mathbf{e}_k - \lambda_k\mathbf{e}_k) \in E_{k-1} \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

## b O Teorema de Cayley-Hamilton

Embora Cayley-Hamilton seja um teorema famoso, vamos, aqui, obtê-lo como corolário do de Schur,

**Teorema de Cayley-Hamilton:** Se  $A$  é matriz  $n \times n$  com entradas em  $\mathbb{C}$  e  $p$  é o polinômio característico de  $A$  (dado por  $p(x) = \det(xI - A)$ ), então  $p(A) = 0$ .

Demonstração : Começemos fixando uma base de Schur,  $\alpha = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , correspondente à transformação linear  $T$  dada por  $A$ . Se  $U$  é a matriz de mudança de base de  $\alpha$  para a base canônica, temos

$$p(x) = \det(xI - A) = \det(U^{-1}(xI - A)U) = \det(xI - M) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n).$$

Temos, também, que, sendo  $E_k$  o espaço gerado por  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , e  $E_0 = \{0\}$ , então

$$(T\mathbf{e}_k - \lambda_k\mathbf{e}_k) \in E_{k-1} \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Daí segue que

$$(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_k I)\mathbf{e}_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Logo,



$$p(T)\mathbf{e}_k = (T - \lambda_{k+1}) \cdots (T - \lambda_n)(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_k I)\mathbf{e}_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Como  $p(T)$  se anula em todos os elementos da base de Schur,  $p(T)$  é nula. ■

**Escólio:** Observe que, na demonstração do Teorema de Cayley-Hamilton, o fato de que a base de Schur é ortonormal não tem qualquer importância; o que realmente usamos foi o fato de existir uma base, não necessariamente ortogonal, em que a matriz da transformação  $T$  é triangular.



# Índice Remissivo

- adjunta
  - de matriz, 159
  - de transformação linear, 159
- algoritmo da divisão, 148
- Apolônio, 25, 40, 87, 88
  - círculo de, 18
- autovalor, 105, 153
  - complexo, 154
- autovetor, 105, 154
  
- base
  - de Schur, 176
  - ortonormal, 63
  
- cônica
  - vértices de, 90
- círculo, 17
  - de Apolônio, 18
- característico
  - polinômio, 138
- Cauchy-Schwarz-Buniacóvsqui
  - desigualdade de, 156
- cilindro, 121
- combinação linear
  - infinita, 172
- cone, 23, 25
  - eixo de, 25
  - elíptico, 118
  - geratrizes de, 25
  - vértice de, 25
- cônica, 23, 55, 78
  - casos degenerados, 25
  - degenerada, 75
  - degenerada em conjunto vazio, 25
  - degenerada em par de retas concorrentes, 25
  - degenerada em par de retas paralelas, 25
  - degenerada em plano, 26
  - degenerada em ponto, 25
  - degenerada em reta, 25
  - diretriz de, 26, 32, 55
  - eixo principal de, 34
  - excentricidade de, 26, 32, 34, 36, 55
  - foco de, 26, 32, 55
  - vértices de, 35
- cônicas, 25
- curva
  - conexa, 36
  
- decomposição
  - em valores singulares, 134, 135, 146
  - polar, 145
- degenerada
  - cônica, 37
- desigualdade
  - de Cauchy-Schwarz-Buniacóvsqui, 156
- determinante
  - de matriz, 153
- diâmetro
  - associado a direção, 91
  - associado a direção, 87
  - conjugado, 88, 91
- diagonal
  - matriz, 101
  - principal, 101
- dimensão, 17
- direção
  - conjugada, 90
- diretriz, 25
- distância focal, 35
  
- elipse, 20, 25
  - diâmetros de, 87
- elipsoide, 116
- esfera, 18
- espaço
  - projetivo, 14, 80
  - vetorial

- complexo, 155
- excentricidade, 38
- forma
  - de Schur, 175
  - polar, 146
  - simplética, 155
- Fourier
  - truque de, 156
- função
  - periódica, 170
- Geometria
  - Analítica, 17
  - Diferencial, 17
- geratriz, 25
- hipérbole, 20, 25
  - conjugada, 40
  - equilátera, 50
- hipérboles
  - conjugadas, 90
- hiperbólico
  - cosseno, 50
  - seno, 50
- hiperboloide
  - de duas folhas, 118
  - de uma folha, 118
- inversão
  - em relação a esfera, 13
  - em relação a círculo, 13
- isometria, 123
  - helicoidal, 129
  - imprópria, 129
  - própria, 129
- isomorfismo, 73, 128
- linear
  - operador, 145
- lugar geométrico, 17
- matriz
  - adjunta, 159
  - autovalor de, 105
  - diagonal, 101
  - ortogonal, 137
  - quadrada
    - polinômio característico de, 138
  - traço de, 138
  - simétrica, 101
  - transposta, 101, 104
    - conjugada, 159
  - transpostaconjugada, 155
- matrizes
  - produto interno de, 137, 138
- mediatriz, 18
- norma
  - de Fröbenius, 137
- operador
  - linear, 145
  - normal, 165
  - unitário, 166
- operador linear
  - antissimétrico, 164
  - autoadjunto, 163
  - simétrico, 163
- orientação, 129
- parábola, 20, 25
  - degenerada, 37
- paraboloide
  - elíptico, 119
  - hiperbólico, 120
- Perspectiva, 77
- perspectiva, 3
- plano
  - cego, 77
  - projetivo, 80
- polar
  - decomposição, 145
  - forma, 146
- polinômio
  - característico, 110, 138, 153
  - mínimo, 148
- ponto
  - de fuga, 7, 80
  - de vista, 3, 77
  - impróprio, 80
  - no infinito, 9–11, 13, 14, 80
- produto
  - escalar
    - complexo, 155
    - em  $\mathbb{C}^n$ , 175
  - interno

- complexo, 155
  - de matrizes, 137, 138
- projeção, 156
  - estereográfica, 11
  - ortogonal, 156
- quadro, 3, 77
- raiz
  - simples, 149
- reflexão, 125
  - com deslizamento, 129
- rotação, 125
  - refletida, 129
- Schmidt
  - Teorema de aproximação de, 138
- Schur
  - base de, 176
  - forma de, 175
- soma
  - direta, 151
- soma direta, 127
- subespaço
  - invariante, 143
  - ortogonal, 165
- superfície
  - regrada, 121
- tangente, 41
- Teorema
  - da bola cabeluda, 4
  - da Decomposição em Valores Singulares Apolônio, 133
  - em  $R^n$ , 134
  - de Aproximação de Schmidt, 138
  - de Cayley-Hamilton, 176
  - de Gram-Schmidt, 156
  - de Pitágoras
    - complexo, 156
  - do Núcleo e da Imagem, 157
  - Espectral, 105, 113, 143, 151, 163
    - em dimensão finita, caso real, 143
    - para operadores antissimétricos, 164
    - para operadores normais, 166
  - Fundamental da Álgebra, 148
- traço
  - de matriz quadrada, 138
- transformação
  - isométrica, 123
  - linear
    - adjunta, 159
    - adjunta de, 103, 104, 161
    - antissimétrica, 164
    - autoadjunta, 104, 143, 161, 163
    - diagonalizável, 149
    - não negativa, 145
    - ortogonal, 145
    - polinômio mínimo, 148
    - simétrica, 104
    - subespaço invariante por, 143
- truque
  - de Fourier, 156
- unitário
  - operador, 166
- vértice, 25
- vídeo
  - Decomposição em Valores Singulares, 134
  - Teorema Espectral, 144
- valor
  - característico, 105
  - próprio, 105
- valores singulares
  - decomposição, 134, 135, 146
- vetor
  - característico, 105
  - próprio, 105
- vetores
  - singulares, 135
- videogame, 4
- Zucóvsqui
  - função de, 45