

Cálculo 3 - 2025.2

Aula 17: funções homogêneas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.2-C3.html>

Links

https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_polynomial

https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_function

Quadros:

3jQ31 (2024.2) 17/jul/2024

3iQ36 (2024.1) 17/jul/2024

3hQ50 (2023.2) 25/out/2023

3fQ17 (2022.2) 04/nov/2022

Bort11p19 (p.383) 11.3 Formas quadráticas e matrizes definidas

StewPtCap14p64 (p.850) 14.7 Valores Máximo e Mínimo

StewPtCap14p65 (p.851) Teste da segunda derivada; $D(a, b)$

Primeiras definições

Sejam:

$$\begin{aligned} [A_k] &= (f(\lambda x) = \lambda^k f(x)) \\ [B_k] &= (f(x_0 + \lambda \Delta x) = \lambda^k f(x_0 + \Delta x)) \end{aligned}$$

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *homogênea de grau k* – abreviação: h.d.g. k – quando ela obedece isto,

$$\begin{aligned} \forall x, \lambda \in \mathbb{R}. f(\lambda x) &= \lambda^k f(x) \\ \forall x, \lambda \in \mathbb{R}. [A_k] \end{aligned}$$

onde a segunda linha é abreviação da primeira; e uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *homogênea de grau k em x_0* – abreviação: h.d.g. k em x_0 – quando ela obedece esta condição,

$$\begin{aligned} \forall x, \lambda \in \mathbb{R}. (f(x_0 + \lambda \Delta x) &= \lambda^k f(x_0 + \Delta x)) \\ \forall \Delta x, \lambda \in \mathbb{R}. [B_k] \end{aligned}$$

Vou definir $[A_2]$ da forma óbvia:

$$\begin{aligned} [A_2] &= [A_k][k := 2] \\ &= (f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)) \end{aligned}$$

$[A_0], [A_1], [A_3], \dots, [B_1], [B_0], [B_2], [B_3], \dots$, etc, vão ser todos definidos da mesma forma.

Digamos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *homogênea de grau 2* (“h.d.g.2”). Então ela obedece todos os casos particulares de $[A_2]$, incluindo estes aqui:

$$\begin{aligned} [A_2] \left[\begin{smallmatrix} \lambda := 3 \\ x := 4 \end{smallmatrix} \right] &= (f(3 \cdot 4) = 3^2 f(4)) \\ &= (f(12) = 9f(4)) \\ [A_2] \left[\begin{smallmatrix} \lambda := 1/2 \\ x := 12 \end{smallmatrix} \right] &= (f(\tfrac{1}{2}12) = (\tfrac{1}{2})^2 f(12)) \\ &= (f(6) = \tfrac{1}{4}f(12)) \end{aligned}$$

...e aí se a gente souber o valor de $f(x)$ pra algum x a gente consegue descobrir $f(x)$ para todos os outros ‘ x ’zes!

Primeiras definições (2)

Lembre que definimos:

$$\begin{aligned} [A_k] &= (f(\lambda x) = \lambda^k f(x)) \\ [B_k] &= (f(x_0 + \lambda \Delta x) = \lambda^k f(x_0 + \Delta x)) \end{aligned}$$

e que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *homogênea de grau k* (“h.d.g. k ”) – quando ela obedece isto,

$$\forall x, \lambda \in \mathbb{R}. [A_k]$$

E uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *homogênea de grau k em x_0* (“h.d.g. k em x_0 ”) quando ela obedece esta outra condição:

$$\forall \Delta x, \lambda \in \mathbb{R}. [B_k]$$

Exercícios

a) Digamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é h.d.g.2 e que $f(4) = 32$. Descubra os valores de $f(x)$ para $x = 1, 2, 3, -4, 0, -1, -2, -3$.

b) Digamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é h.d.g.1 e que $f(4) = 32$. Faça uma tabela com os valores de $f(x)$ para $x \in \{-4, \dots, 4\}$.

c) Digamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é h.d.g.0 e que $f(4) = 32$. Faça uma tabela com os valores de $f(x)$ para $x \in \{-4, \dots, 4\}$.

d) Digamos que $x_0 = 10$, que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é h.d.g.1 em x_0 , e que $f(10 + 4) = 32$. Faça uma tabela com os valores de $f(x)$ para $x \in \{10 - 4, \dots, 10 + 4\}$.

Segundas definições

Sejam:

$$\begin{aligned} [A_k] &= (f(\lambda x) = \lambda^k f(x)) \\ [B_k] &= (f(x_0 + \lambda \Delta x) = \lambda^k f(x_0 + \Delta x)) \\ [C_k] &= (g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k g(x, y)) \\ [D_k] &= \left(\begin{aligned} g(x_0 + \lambda \Delta x, y_0 + \lambda \Delta y) \\ = \lambda^k g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

As definições $[A_k]$ e $[B_k]$ são as mesmas de antes.

Vou dizer que uma função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é *homogênea de grau k* (“h.d.g. k ”) quando ela obedece isto,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \forall \lambda \in \mathbb{R}. [C_k]$$

e vou dizer que uma função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é *homogênea de grau k* (“h.d.g. k em (x_0, y_0) ”) quando ela obedece isto:

$$\forall (\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2. \forall \lambda \in \mathbb{R}. [D_k]$$

Por exemplo, se $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é h.d.g.2 em $(10, 20)$ então ela obedece isto...

$$\begin{aligned} g(10 + 5 \cdot 3, 20 + 5 \cdot 4) \\ = 5^2 g(10 + 3, 20 + 4) \end{aligned}$$

Você consegue ver quem são λ , Δx e Δy neste caso?

Exercício

a) Digamos que $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é h.d.g.2 em $(10, 20)$ e que $g(10 + 3, 20 + 4) = 6$. Descubra os valores de

$$g(10 + \lambda \cdot 3, 20 + \lambda \cdot 4)$$

para $\lambda \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

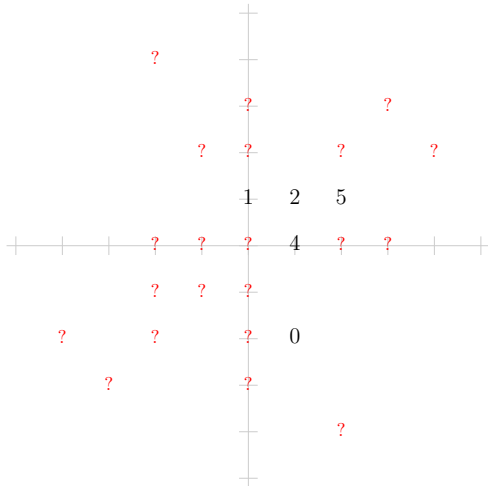
b) Faça a mesma coisa que no item anterior, mas supondo que $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é h.d.g.1 em $(10, 20)$ ao invés de h.d.g.2 em $(10, 20)$.

c) Idem, mas agora supondo que a g é h.d.g.0 em $(10, 20)$.

Exercício 1

Na figura da direita cada numerozinho representa alguma coisa que *sabemos* sobre uma certa função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ homogênea de grau 1 e cada ‘?’ representa alguma coisa que *queremos saber* sobre ela; por exemplo, o 5 na posição (2,1) quer dizer que sabemos que $g(2, 1) = 5$ e o ‘?’ na posição (4,2) quer dizer que você vai ter que descobrir o valor de $g(4, 2)$ e escrever esse valor sobre a interrogação.

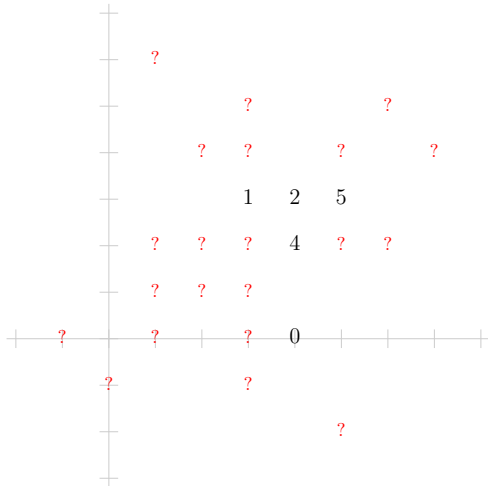
Complete a figura à direita escrevendo os valores certos sobre as interrogações.



Exercício 2

Na figura da direita cada numerozinho representa alguma coisa que *sabemos* sobre uma certa função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ homogênea de grau **2** em **$(3, 2)$** – note que isto é bem diferente do exercício anterior! – e cada ‘?’ representa alguma coisa que *queremos saber* sobre ela; por exemplo, o 5 na posição $(3 + 2, 2 + 1)$ quer dizer que sabemos que $g(3 + 2, 2 + 1) = 5$ e o ‘?’ na posição $(3 + 4, 3 + 2)$ quer dizer que você vai ter que descobrir o valor de $g(3 + 4, 3 + 2)$ e escrever esse valor sobre a interrogação.

Complete a figura à direita escrevendo os valores certos sobre as interrogações.



Polinômios homogêneos

Normalmente a gente começa a ouvir falar de funções homogêneas por polinômios homogêneos, que são polinômios que todos os monômios deles têm o mesmo grau... por exemplo,

$$2x^3y^4 + 5x^4y^3 - 6x^7$$

é um polinômio em duas variáveis, x e y , que é homogêneo de grau 7, porque x^3y^4 , x^4y^3 , e x^7 são monômios de grau 7. Qualquer polinômio em duas variáveis pode ser decomposto em polinômios homogêneos; por exemplo:

$$\begin{array}{ll} F(x, y) = a & \leftarrow \text{parte homogênea de grau 0} \\ + bx + cy & \leftarrow \text{parte homogênea de grau 1} \\ + dx^2 + exy + fy^2 & \leftarrow \text{parte homogênea de grau 2} \\ + gx^3 + hxy^2 + jx^2y + ky^3 & \leftarrow \text{parte homogênea de grau 3} \\ + \dots & \end{array}$$

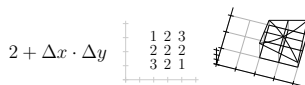
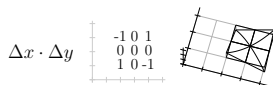
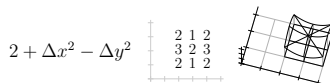
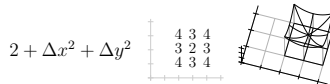
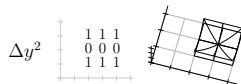
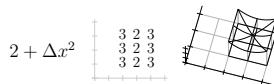
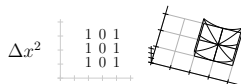
Repare que fica implícito que $a, b, \dots, k, \dots$ são constantes.

Veja estas páginas da Wikipedia:

https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_polynomial

https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_function

Nas figuras da próxima página a coluna da esquerda mostra vários polinômios h.d.g.2 em (3, 2).



```

(%i1) /* f:R->R, homogeneous of degree k */
      f(x) := a * x^k;
(%o1)

$$f(x) := a x^k$$


(%i2) f(x0);
(%o2)

$$a x_0^k$$


(%i3) f(m*x0);
(%o3)

$$a (m x_0)^k$$


(%i4) o : f(m*x0) = m^k * f(x0);
(%o4)

$$a (m x_0)^k = a m^k x_0^k$$


(%i5) o2 : radcan(o);
(%o5)

$$a m^k x_0^k = a m^k x_0^k$$


(%i6) is(o); /* false because "is" is dumb */
(%o6)
false

(%i7) is(o2); /* true */
(%o7)
true

(%i8)

```

```

(%i8) /* f:R->R, homogeneous of degree 2 */
(%i8) f( x, y) := a*x^2 + b*x*y + c*y^2;
(%o8)

$$f(x, y) := ax^2 + bxy + cy^2$$


(%i9) f( x0, y0);
(%o9)

$$cy_0^2 + bx_0y_0 + ax_0^2$$


(%i10) f(m*x0, m*y0);
(%o10)

$$cm^2y_0^2 + bm^2x_0y_0 + am^2x_0^2$$


(%i11) o : f(m*x0, m*y0) = m^2 * f(x0, y0);
(%o11)

$$cm^2y_0^2 + bm^2x_0y_0 + am^2x_0^2 = m^2 (cy_0^2 + bx_0y_0 + ax_0^2)$$


(%i12) o2 : radcan(o);
(%o12)

$$cm^2y_0^2 + bm^2x_0y_0 + am^2x_0^2 = cm^2y_0^2 + bm^2x_0y_0 + am^2x_0^2$$


(%i13) is(o); /* false because "is" is dumb */
(%o13)
false

(%i14) is(o2); /* true */
(%o14)
true

(%i15)

```

```

(%i15) /* f:R->R, homogeneous of degree 3 */
(%i15) f( x, y) := a*x^3 + b*x^2*y + c*x*y^2 + d*y^3;
(%o15)

$$f(x, y) := ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$


(%i16) f( x0, y0);
(%o16)

$$dy_0^3 + cx_0y_0^2 + bx_0^2y_0 + ax_0^3$$


(%i17) f(m*x0,m*y0);
(%o17)

$$dm^3y_0^3 + cm^3x_0y_0^2 + bm^3x_0^2y_0 + am^3x_0^3$$


(%i18) o : f(m*x0,m*y0) = m^3 * f(x0,y0);
(%o18)

$$dm^3y_0^3 + cm^3x_0y_0^2 + bm^3x_0^2y_0 + am^3x_0^3 = m^3 (dy_0^3 + cx_0y_0^2 + bx_0^2y_0 + ax_0^3)$$


(%i19) o2 : radcan(o);
(%o19)

$$dm^3y_0^3 + cm^3x_0y_0^2 + bm^3x_0^2y_0 + am^3x_0^3 = dm^3y_0^3 + cm^3x_0y_0^2 + bm^3x_0^2y_0 + am^3x_0^3$$


(%i20) is(o); /* false because "is" is dumb */
(%o20)
false

(%i21) is(o2); /* true */
(%o21)
true

(%i22)

```

Exercício 5.

Relembre o que era o “estudo do sinal de uma função” que você deve ter visto em Cálculo 1, e faça um diagramas indicando em que intervalos cada uma das funções abaixo é positiva, negativa, ou zero.

Dica: veja este vídeo, sobre diagramas de sinais em $\mathbb{R}^2$:

<http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-2.mp4>

<https://www.youtube.com/watch?v=noVh-RsK5Jo>

a) x

b) $x + 1$

c) $x(x + 1)$

d) $4 - x$

e) $x(x + 1)(4 - x)$

Exercício 6.

Agora adapte essa idéia do diagrama do sinal para $\mathbb{R}^2$, no quadrado com $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ e $y \in [y_0 - 1, y_0 + 1]$, e faça o diagrama do sinal para cada uma das funções abaixo. Dica: veja este vídeo, sobre diagramas de sinais em $\mathbb{R}^2$:

<http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-2.mp4>

<https://www.youtube.com/watch?v=noVh-RsK5Jo>

- | | |
|------------------------------|---|
| a) Δx | i) $(\Delta x + \Delta y)(\Delta x - \Delta y)$ |
| b) Δx^2 | j) $(\Delta x + \Delta y)\Delta x$ |
| c) Δy | k) $-(\Delta x + \Delta y)^2$ |
| d) $\Delta x \Delta y$ | |
| e) $\Delta x + \Delta y$ | |
| f) $\Delta x - \Delta y$ | |
| g) $(\Delta x + \Delta y)^2$ | |
| h) $(\Delta x - \Delta y)^2$ | |

Exercício 7.

A partir de agora vamos considerar que:

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\&= x(t_1) \\&= x_0 + \alpha \cdot (t_1 - t_0) \\&= x_0 + \alpha \Delta t \\y &= y(t) \\&= y(t_1) \\&= y_0 + \beta \cdot (t_1 - t_0) \\&= y_0 + \beta \Delta t\end{aligned}$$

Onde $t_0 = 5$; x_0 e y_0 continuam os mesmos de antes, e α e β são constantes cujos valores podem depender do contexto.

Exercício 7 (cont.)

A trajetória $(x(t), y(t))$ é sempre um movimento retilíneo uniforme pra quaisquer valores de α e β .

a) Calcule $\overrightarrow{(x_t, y_t)}$.

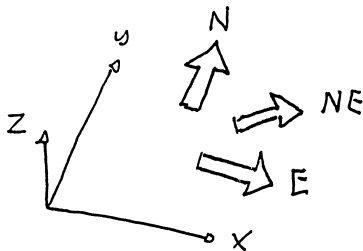
Cada escolha de valores para α e β dá uma trajetória diferente. Nos itens abaixo você vai visualizar algumas dessas trajetórias e vai desenhá-las no papel — desta forma aqui: você vai marcar no plano os pontos $(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t))$ para $\Delta t = -1, 0, 1$, vai escrever “ $\Delta t = -1$ ”, “ $\Delta t = 0$ ” e “ $\Delta t = 1$ ” do lado dos pontos correspondentes a esses valores de Δt , e ao lado de cada desenho você vai escrever os valores de α e β .

b) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 1, \beta = 0$.

c) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 0, \beta = 1$.

Exercício 7 (cont.)

...e além disso você vai escrever algo como “Leste” (ou “E”), “Noroeste” (ou “NW”) do lado de cada um dos seus desenhos de trajetórias pra indicar em que direção o ponto (x, y) está andando. Use a convenção que costuma ser usada em mapas, em que o Leste é pra direita e o Norte é pra cima:



Exercício 7 (cont.)

- d) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 0$, $\beta = -1$ e diga o nome da direção dela.
- e) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = -1$, $\beta = 1$. e diga o nome da direção dela.
- f) Quais são os valores mais simples de α e β — onde “simples” quer dizer “0, 1 ou -1 ” — que fazem a trajetória ir pro nordeste? E pro sudoeste?

Nos próximos exercícios eu vou me referir a essas trajetórias em que α e β são números “simples” pelos **nomes das direções** delas.

O significado geométrico de z_t

Nós sabemos calcular z , z_t e z_{tt} a partir de t ,
e sabemos calcular z , z_t e z_{tt} em t_0 .

Com um pouquinho de esforço você deve ser capaz de visualizar o que acontece perto de t_0 ...
o valor da primeira derivada, $(z_t)(t_0)$, diz o seguinte:

$$\begin{array}{ll} z \text{ aumenta quando } t \text{ aumenta ("crescente")} & \iff (z_t)(t_0) > 0 \\ z \text{ "fica horizontal" quando } t \text{ aumenta} & \iff (z_t)(t_0) = 0 \\ z \text{ diminui quando } t \text{ aumenta ("decrecente")} & \iff (z_t)(t_0) < 0 \end{array}$$

Veja o vídeo!!!

<http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-3.mp4>
<https://www.youtube.com/watch?v=VwowES6EM3Y>

O significado geométrico de z_{tt}

Nos casos em que z “fica horizontal” nós vamos usar a segunda derivada, $(z_{tt})(t_0)$, pra ver se o gráfico de $z(t)$ “parece uma parábola” ao redor de t_0 , e se essa parábola tem concavidade pra cima ou pra baixo:

concavidade pra cima $\iff (z_{tt})(t_0) > 0$

“parece horizontal” $\iff (z_{tt})(t_0) = 0$

concavidade pra baixo $\iff (z_{tt})(t_0) < 0$

Eu usei muitos termos informais de propósito.

No próximo exercício você vai tentar descobrir sem fazer contas qual é o comportamento da z em torno de t_0 , e no outro exercício você vai fazer as contas e vai ver se o seu olhometro funcionou direito.

Exercício 8.

Em cada um dos desenhos dos próximos slides diga o que acontece quando a trajetória $(x(t), y(t))$ anda em uma das oito direções simples, que são:

norte, nordeste, leste, sudeste,
sul, sudoeste, oeste, noroeste.

Use estas categorias na suas respostas:

z cresce

z decresce

z faz uma parábola com concavidade pra cima

z faz uma parábola com concavidade pra baixo

z é “muito horizontal”