

Cálculo 3 - 2025.1

Aulas 9 e 10: Seja o seu próprio GeoGebra

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C3.html>

Links

3hQ1 Quadros da aula 1

3hQ3 Quadros da aula 2

2gT105 (C2, 2023.1) Um jogo colaborativo

2gT19 (C2, 2023.1) Retas reversas: seja como o Bob!

4gT5 (C4, 2023.1) Seja o seu próprio GeoGebra

4gQ1 (C4, 2023.1) Quadros

MpgP8 (GA, 2018) “Set comprehensions”

MpgP11 (GA, 2018) Exercícios sobre força bruta: 5N, 5O, 6N', 6O'

MpgP17 (GA, 2018) Interseções de retas parametrizadas

6gQ1 (GA, 2023.1) Comece pelos pontos mais fáceis de calcular

Visaud01:00 até 02:52 “é óbvio sim”

Visaud37:17 até 46:06 reduzir e aumentar o nível de detalhe

Visaud48:53 até o final: vários níveis de detalhe lado a lado

“GeoGebra: All About Sliders” (video):

<http://www.youtube.com/watch?v=Q9p-0z80yFY#t=4m55s>



Pontos mais fáceis de calcular

Muito importante:

Se você for uma pessoa pra quem

12345 + 9675 é tão fácil de calcular de cabeça quanto 12000 + 345,

e $4 + 5x = 6$ é tão fácil de resolver de cabeça quanto $1 + x = 2$,

...então **tente** pensar como uma pessoa pra quem

12345 + 9675 é muito mais difícil de calcular que 12000 + 345,

e $4 + 5x = 6$ é muito mais difícil de resolver quanto $1 + x = 2$...

...e além disso considere que somas são mais fáceis de calcular de cabeça do que subtrações – e que, por exemplo, dá pra calcular $34 + 45$ de cabeça mas dá um trabalhão, e que calcular $34 - 45$ de cabeça é quase impossível.

Sejam:

$$f_1(t) = 34 + t \cdot 45$$

$$f_2(t) = 34 + (t - 56) \cdot 45$$

$$f_3(t) = 34 + (t + 56) \cdot 45$$

$$f_4(t) = 34 + ((t - 56)/4) \cdot 45$$

$$f_5(t) = 34 + ((t + 56)/4) \cdot 45$$

$$P_1(t) = (12, 23) + t \overrightarrow{(4, 5)}$$

$$P_2(t) = (12, 23) + (t - 8) \overrightarrow{(4, 5)}$$

$$P_3(t) = (12, 23) + (t + 8) \overrightarrow{(4, 5)}$$

$$P_4(t) = (12, 23) + ((t - 8)/34) \overrightarrow{(4, 5)}$$

$$P_5(t) = (12, 23) + ((t + 8)/34) \overrightarrow{(4, 5)}$$

Os pontos mais fáceis de calcular do $f_4(t)$ são estes aqui.

O caso mais fácil de todos é este,

$$34 + \underbrace{((t - 56)/4)}_0 \cdot 45$$

em que temos:

$$f(56) = 34 + \underbrace{\underbrace{\underbrace{(t - 56)}_{56}}_0}_0 / 4 \cdot 45$$

E o segundo caso mais fácil é este,

$$34 + \underbrace{((t - 56)/4)}_1 \cdot 45$$

em que temos:

$$f(56 + 4) = 34 + \underbrace{\underbrace{\underbrace{(t - 56)}_{60}}_4}_1 / 4 \cdot 45$$

Pontos mais fáceis de calcular (2)

Sejam:

$$f_1(t) = 34 + t \cdot 45$$

$$f_2(t) = 34 + (t - 56) \cdot 45$$

$$f_3(t) = 34 + (t + 56) \cdot 45$$

$$f_4(t) = 34 + ((t - 56)/4) \cdot 45$$

$$f_5(t) = 34 + ((t + 56)/4) \cdot 45$$

$$P_1(t) = (12, 23) + t \overrightarrow{(4, 5)}$$

$$P_2(t) = (12, 23) + (t - 8) \overrightarrow{(4, 5)}$$

$$P_3(t) = (12, 23) + (t + 8) \overrightarrow{(4, 5)}$$

$$P_4(t) = (12, 23) + ((t - 8)/34) \overrightarrow{(4, 5)}$$

$$P_5(t) = (12, 23) + ((t + 8)/34) \overrightarrow{(4, 5)}$$

Exercício

Complete a tabela à direita com os dois pontos mais fáceis de calcular de cada uma das 10 funções acima. *Faça todas as contas de cabeça e escreva só os resultados finais!* O segundo ponto mais fácil de calcular sempre pode ser escrito nestes dois formatos, $f_4(56 + 4) = 34 + 45$ e $f_4(60) = 79 - e$ você pode escolher qual dos formatos usar.

$$f_1(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_1(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_2(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_2(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_3(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_3(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_4(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_4(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_5(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$f_5(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_1(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_1(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_2(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_2(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_3(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_3(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_4(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_4(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_5(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_5(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

$$P_5(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

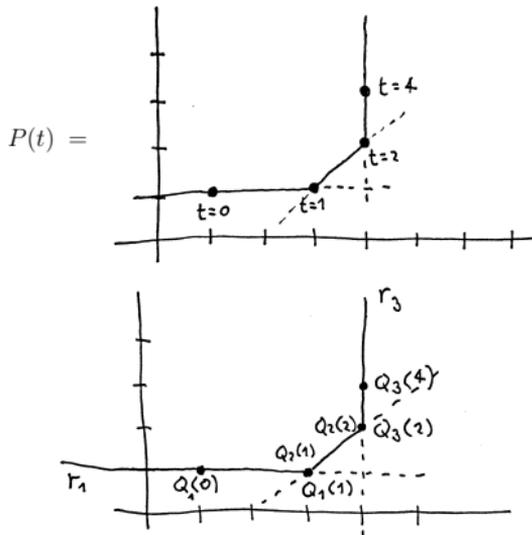
$$P_5(\underline{\quad}) = \underline{\quad}$$

Uma trajetória em três partes

Agora você vai tentar encontrar uma descrição “formal”, “algébrica”, da trajetória $P(t)$ que eu desenhei à direita. Uma descrição informal dela seria assim: um corpo (pra usar terminologia de físicos...) se move em movimento retilíneo uniforme na horizontal pra direita desde $t = -\infty$ até $t = 1$, depois ele muda pra um outro movimento retilíneo uniforme e anda em diagonal na direção nordeste até $t = 2$, e a partir de $t = 3$ ele muda pra um outro movimento retilíneo uniforme, dessa vez na vertical. Temos $P(0) = (1, 1)$, $P(1) = (3, 1)$, $P(2) = (4, 2)$, e $P(3) = (4, 3)$ – dá pra ver isso pelo gráfico – e a gente pode começar definindo três trajetórias mais simples, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, e $Q_3(t)$, que são movimentos retilíneos uniformes, e depois montar a definição da trajetória $P(t)$ a partir delas.

Note que:

$$\begin{aligned} (1, 1) &= P(0) = Q_1(0) \\ (3, 1) &= P(1) = Q_1(1) = Q_2(1) \\ (4, 2) &= P(2) = Q_2(2) = Q_3(2) \\ (4, 3) &= P(4) = Q_3(4) \end{aligned}$$



Uma trajetória em três partes (2)

Agora complete todas as lacunas abaixo:

$$\begin{aligned}
 Q_1(t) &= (_, _) + t(\overrightarrow{_, _}) \\
 Q_2(t) &= (_, _) + (t - _)(\overrightarrow{_, _}) \\
 Q_3(t) &= (_, _) + ((t - _)/_)(\overrightarrow{_, _}) \\
 r_1 &= \{Q_1(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \\
 r_2 &= \{Q_2(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \\
 r_3 &= \{Q_3(t) \mid t \in \mathbb{R}\}
 \end{aligned}$$

$$P(x) = \begin{cases} (_, _) + t(\overrightarrow{_, _}) & \text{quando } x \leq 1, \\ (_, _) + (t - _)(\overrightarrow{_, _}) & \text{quando } 1 \leq x \leq 2, \\ (_, _) + ((t - _)/_)(\overrightarrow{_, _}) & \text{quando } 2 \leq x, \end{cases}$$

Importante: faça todas as contas de cabeça e calcule só os “pontos mais fáceis de calcular” que eu expliquei alguns slides atrás. Você pode fazer quantos chutes-e-testes você precisar, desde que você marque eles com “se” e “então”. *Não apague nenhum dos seus chutes-e-testes!*

Dê uma olhada em como as pessoas fizeram isso no quadro na aula 2:

3hQ5 Quadros de 01/set/2023

