# Cálculo 3 - 2025.1

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2025.1-C3.html

# Cálculo 3 - 2025.1

Aulas 1 a 6: trajetórias

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2025.1-C3.html

# Links

Felipe Acker:
AckerGA1p27 7.4 Soma de vetores
AckerGA1p29 7.5 Somando vetores a pontos
AckerGA1p53 9. Equações paramétricas

AckerGA1, AckerGA2, AckerGA3, AckerGA4
`http://anggtwu.net/acker/README.html`

Bortolossi:
Bort6 (p.187) 6. Curvas parametrizadas
Bort6p2 (p.188) traço de uma curva parametrizada
Bort6p9 (p.195) Figura 6.6. Traço da hélice
Bort6p11 (p.197) 6.2. O vetor tangente a uma curva parametrizada
Bort6p13 (p.199) Figura 6.8: ...como limite de vetores secantes

Stewart:
StewPtCap2p38 (p.109) 2.5 Continuidade
StewPtCap10p5 (p.575) 10 Equações paramétricas e coordenadas polares
StewPtCap10p6 (p.576) 10.1 Curvas Definidas por Equações Paramétricas
StewPtCap10p9 (p.579) Figuras 10, 11 e 12
StewPtCap10p14 (p.586) 10.2 Cálculo com Curvas Parametrizadas
StewPtCap13p5 (p.755) 13 Funções vetoriais
StewPtCap13p6 (p.756) 13.1 Funções vetoriais e curvas espaciais

Leithold:
Leit10 10. Seções cônicas e coordenadas polares
Leit10p43 (p.618) Limaçon

# Introdução (2025.1)

# Introdução antiga (2021.2)

Desta vez um dos objetivos principais do curso vai ser a gente aprender a visualizar muitas coisas em 3D ou de cabeça ou fazendo umas pouquinhas contas e desenhos no papel. Pra isso a gente vai treinar fazer "desenhos tortos que todo mundo entenda" – porque fazer desenhos à mão livre medindo tudo no olhômetro costuma ser bem mais rápido do que fazer desenhos com régua – e em TODOS os exercícios que eu vou passar durante o curso as contas são simples o suficiente pra poderem ser feitas meio de cabeça e meio no papel.

Em Cálculo 2 você muitas vezes teve que desenhar figuras feitas de 4, 8, ou 16 retângulos, e aí você levava 5 minutos pra entender como desenhar o primeiro retângulo, depois só um minuto pra desenhar o segundo, e aos poucos você entendia o padrão, e no final você desenhava cada retângulo em menos de 5 segundos – e aí você conseguia *visualizar* como seria a figura correspondente com 256, 512 ou 1024 retângulos, e você passava a conseguir visualizar certos somatórios a partir das fórmulas deles, sem precisar desenhar as figuras correspondentes a eles.

Nos exercícios deste PDF você vai desenhar parábolas a partir de 5 pontos delas, e você vai tentar "adivinhar" o resto da parábola a partir destes poucos pontos. O modo matematicamente correto de fazer isto seria como o Bortolossi faz em alguns exercícios; dê uma olhada nas páginas 113 e 114 dele. O exercício [24] da página 113 dá seis fórmulas e seis gráficos – os gráficos estão na página seguinte – e ele pede pra você descobrir qual fórmula corresponde a qual gráfico...

Bort3p35 (p.113) Exercício [24]
Bort3p37 (p.114) Figuras pro exercício 24

Neste curso eu vou passar um monte de exercícios com enunciados como "tente adivinhar o gráfico da equação tal". Eu vou usar a expressão "tente adivinhar" pra enfatizar que o que a gente vai fazer não é totalmente formal: a partir de 5 pontos a gente consegue fazer uma "hipótese razoável" de como é o formato de uma parábola, a partir de 20 pontos dessa parábola a gente conseguiria fazer uma hipótese melhor de como ela é, e calculando um milhão de pontos dela a gente conseguiria fazer um desenho bem mais preciso dela... só que a gente quer aprender a fazer desenhos bons o suficiente a partir de contas que a gente possa fazer na mão!...

**Introdução ao curso**
Cálculo 3 é principalmente sobre:

1. funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ – que o Bortolossi costuma chamar de curvas parametrizadas, mas nós vamos chamar de trajetórias, e
2. funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, que vão gerar superfícies.

Depois que nós aprendermos o suficiente sobre (1) e (2) nós vamos poder lidar com coisas um pouco mais gerais, como funções $F : A \to \mathbb{R}^n$, onde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

**Nossos primeiros objetivos vão ser:**

1. Aprender a representar graficamente algumas trajetórias, usando a idéia de traço do Bortolossi (cap.6, p.188), mas escrevendo algumas informações a mais, como "$t = 0$" e "$t = 1$" em alguns pontos,

2. Calcular e representar graficamente vetores tangentes a trajetórias ("vetores velocidade"),

3. Entender vetores secantes (cap.6, p.199),

4. Entender aproximações de primeira ordem pra trajetórias, que dão retas parametrizadas, e depois aproximações de segunda ordem, que vão dar parábolas parametrizadas.

...mas hoje nós vamos fazer uma revisão de algumas idéias de GA.

Você já deve ter visto estas duas convenções diferentes para representar pontos e vetores... am Álgebra Linear tanto pontos quanto vetores em $\mathbb{R}^2$ são representados como matrizes-coluna de altura 2:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 53 \end{pmatrix}$$

e em Geometria Analítica pontos e vetores são escritos de forma diferente – vetores têm uma seta em cima – e representados graficamente de formas diferentes...

$$(2,3) + \overrightarrow{(40,50)} = (42,53)$$

**Vetores como setas**

Um ponto $(a,b)$ é interpretado graficamente como um ponto $(a,b)$ de $\mathbb{R}^2$, e um vetor $\overrightarrow{(c,d)}$ é interpretado como um deslocamento, e desenhado como uma seta.

Se o vetor $\overrightarrow{(c,d)}$ aparece sozinho a representação gráfica dele é qualquer seta que anda $c$ unidades pra direita e $d$ unidades pra cima. Às vezes a gente pensa que $\overrightarrow{(c,d)}$ é o conjunto de *todas* as setas assim – o conjunto de todas as setas "equipolentes" a esta; veja a p.9 do livro do CEDERJ.

Link:

DFES1p10 CEDERJ, Geometria Analítica 1 (p.9)

**Uma convenção (temporária)**

O resultado da expressão $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)}$ é o ponto $(a+c,b+d)$, mas a representação gráfica dele vai ser:
1) o ponto $(a,b)$,
2) uma seta indo de $(a,b)$ para $(a+c,b+d)$,
3) o ponto $(a+c,b+d)$,
4) anotações dos lados dos pontos $(a,b)$ e $(a+c,b+d)$ dizendo os "nomes" destes pontos e uma anotação do lado da seta $\overrightarrow{(c,d)}$ dizendo o seu "nome" — como nos dois exemplos abaixo (oops! Falta fazer os desenhos!):

(pôr o desenho aqui)

Nesta aula vai ser obrigatório pôr todos os nomes, mas nas outras não.

A representação gráfica de

$$((1,1)+\overrightarrow{(2,0)})+\overrightarrow{(1,2)} = (1,1)+(\overrightarrow{(2,0)}+\overrightarrow{(1,2)})$$

Vai ser um triângulo feito de três pontos e três setas – os que estão em vermelho aqui:

$$\underbrace{(\underbrace{(1,1)+\overrightarrow{(2,0)}}_{(3,1)})+\overrightarrow{(1,2)}}_{(4,3)} = \underbrace{(1,1)+(\underbrace{\overrightarrow{(2,0)}+\overrightarrow{(1,2)}}_{\overrightarrow{(3,2)}})}_{(4,3)}$$

O objetivo do próximo exercício é você relembrar como representar graficamente certas expressões com pontos e vetores usando quase só o olhômetro, quase sem fazer contas.

**Desenhando parábolas (quase) no olhômetro**
Digamos que conhecemos $A$, $\vec{v}$, e $\vec{w}$. Então a trajetória

$$P(t) = A + t\vec{v} + t^2\vec{w}$$

é uma parábola – e queremos aprender a desenhar os 5 pontos mais fáceis dela, que são $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$, $P(-2)$, usando o máximo de olhômetro e o mínimo possível de contas...

**Exercício 1: desenhando parábolas (quase) no olhômetro**

1) Sejam $A = (3,1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,0)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(0,1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) $A$

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

**Exercício 2: desenhando parábolas (quase) no olhômetro, 2**

2) Sejam $A = (1,1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,-1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(1,1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) $A$

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

**Exercício 3: desenhando parábolas (quase) no olhômetro, 3**

3) Sejam $A = (1,1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,-1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(-1,1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) $A$

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

**Exercício 4: desenhando parábolas (quase) no olhômetro, 4**

4) Sejam $A = (2,6)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(2,-1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) $A$

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Obs: você vai precisar de um gráfico que contenha os pontos (0,0) e (12,8).

# Introdução (2022.2)

**Sobre a aula 1**
Na aula 1 nós usamos as idéias dos 8 primeiros slides daqui,

3dT2 Aulas 4 e 5: introdução ao curso

e do slide 10 daqui,

3bT93 ...usam um caso particular disfarçado

...pra desenhar casos particulares das figuras das seções 7.4 e 7.5 do "GA1" do Felipe Acker:

AckerGA1p43 (p.27) 7.4 Soma de vetores

**Introdução ao vetor velocidade**
Em cursos de Cálculo 3 "pra matemáticos" a gente normalmente começa definindo o vetor velocidade como um limite. O Felipe Acker faz isso muito bem nos capítulos 2 e 3 do "GA4",

AckerGA4p21 (p.13) Capítulo 2: Velocidade
AckerGA4p27 (p.19) Capítulo 3: Aceleração

Eu costumava fazer mais ou menos isso no curso de Cálculo 3, e a gente gastava uma aula inteira aprendendo a decifrar a fórmula daquele limite e visualizar o que ela queria dizer.

Dessa vez vamos tentar fazer algo diferente. Vamos começar com exemplos e animações. Assista este vídeo aqui até o 9:00,

3dT25 Aula 7: um vídeo sobre curvas de Bézier
`https://www.youtube.com/watch?v=aVwxzDHniEw`

...mas considere que tudo no vídeo até o 6:34 são idéias avançadas que a gente só vai entender nuns exercícios que a gente vai fazer daqui a algumas aulas. Por enquanto reserve praticamente toda a sua atenção pro trecho entre 6:34 e 9:00, que é o trecho que a Freya Holmér mostra os vetores velocidade e aceleração pra algumas curvas de Bézier.

A gente vai fazer o seguinte. Nós vamos acreditar que *em geral* quando temos uma trajetória $P(t) = (x(t), y(t))$ o vetor velocidade dessa trajetória é $P'(t) = (x'(t), y'(t))$. Nós vamos ver vários exemplos disso, e vamos deixar pra entender os detalhes desse "em geral" quando formos entender a definição "pra matemáticos" do vetor velocidade.

# Exercício 5: Traço

Comece entendendo a definição de traço de uma curva parametrizada do Bortolossi:
Bort6p2 (p.188) Definição 6.1
Agora sejam:

$$\begin{array}{rcl} P(t) & = & (4,0)+t\overrightarrow{(0,1)}, \\ Q(u) & = & (0,3)+u\overrightarrow{(2,0)}. \end{array}$$

**Exercício 5**

a) Represente num gráfico só o traço de $P(t)$ e o de $Q(u)$.

b) Marque o ponto $P(0)$ e escreva '$t=0$' do lado dele.

c) Faça o mesmo para os pontos $P(1)$ ('$t=1$') e $Q(0)$ e $Q(1)$ ('$u=0$' e '$u=1$').

d) Seja $r$ o traço de $P(t)$ e $s$ o traço de $Q(u)$.
Seja $X$ o ponto de interseção de $r$ e $s$.
Quais são as coordenadas de $X$?

e) Cada ponto de $r$ está "associado" a um valor de $t$ e cada ponto de $s$ a um valor de $u$. Quais são os valores de $t$ e $u$ associados ao ponto $X$? Chame-os de $t_0$ e $u_0$ e indique-os no seu gráfico – por exemplo, se $t_0 = 99$ e $u_0 = 200$ você vai escrever '$t = 99$' e '$u = 200$' do lado do ponto $X$. Note que "$t_0 = 99$" e "$t_{99}$" são coisas totalmente diferentes!

**Dica:**
MpgP17

Agora releia as dicas 1, 2 e 7 daqui:
2gT4 "Releia a dica 7"
e entenda a notação de "set comprehensions" daqui:
MpgP8 "Set comprehensions"

Se você aprender a definir os seus objetos em linguagem matemática você vai conseguir aprender (e fazer!) muitas coisas do curso MUITO mais rápido, e vai ter muito mais facilidade pra escrever elas de um jeito legível. Então:

**Exercício 5 (cont.)**

f) No item (d) a gente definiu $r$, $s$ e $X$ usando muitas palavras em português. Dá pra definir $r$, $s$ e $X$ com bem menos português se a gente usar a notação de "set comprehensions". Aprenda a usar essa notação e complete as lacunas abaixo:

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} P(t) & = & (4,0)+t\overrightarrow{(0,1)}, \\ Q(u) & = & (0,3)+u\overrightarrow{(2,0)}. \\ r & = & \{\underline{\quad\quad} \mid \underline{\quad\quad}\}, \\ s & = & \{\underline{\quad\quad} \mid \underline{\quad\quad}\}, \\ X & = & r \cap s \end{array}$$

# Exercício 6: um círculo

Seja:

$$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

**Exercício 6.**
Represente num gráfico só:

a) o traço de $P(t)$,

b) $P(\frac{\pi}{2}) + P'(\frac{\pi}{2})$, escrevendo '$P(\frac{\pi}{2})$' ao lado do ponto e '$P'(\frac{\pi}{2})$' ao lado da seta,

c) Idem para estes outros valores de $t$: $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi$.

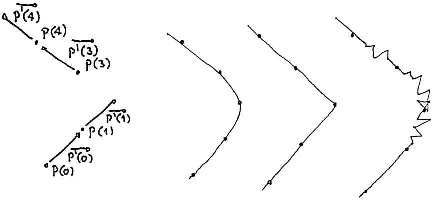
d) Seja $Q(u) = P(\pi) + uP'(\pi)$. Desenhe o traço de $Q(u)$ e anote '$Q(0)$' e '$Q(1)$' nos pontos adequados.

e) O traço de $Q(u)$ é uma reta tangente ao traço de $P(t)$ no ponto $P(\pi)$? Encontre no livro ou no resto da internet uma definição formal de reta tangente e descubra se isto é verdade ou não.

# Sobre "adivinhar trajetórias"

Nos próximos dois exercícios nós vamos *começar* a fazer uma coisa que vai ser muito comum aqui nesse curso de Cálculo 3, e que geralmente é inadmissível nos cursos de Cálculo 1: nós vamos tentar "advinhar" como certas trajetórias são a partir de umas poucas informações sobre elas.

Esse "adivinhar" na verdade é "fazer hipóteses razoáveis", e às vezes a gente precisa de mais informações pra descobrir qual hipótese é mais razoável. Na figura do próximo slide eu desenhei à esquerda $P(t) + P'(t)$ para a trajetória de um personagem de videogame em $t = 0, 1, 3, 4$, mas existem muitas trajetórias que se passam por esses pontos com essas velocidades. Na primeira figura à direita eu desenhei uma trajetória de uma nave no espaço; na segunda eu desenhei a trajetória de um personagem de um videogame do meu tempo — naquela época nada nos videogames obedecia as leis da Física, e nos meus jogos preferidos o meu personagem era um quadradinho — e na terceira o personagem é atingido por um raio em $t = 1.05$ e ele adquire superpoderes.



# Exercícios 7 e 8: Lissajous

Os exercícios desta página vão dar curvas de Lissajous, como as daqui:
https://en.wikipedia.org/wiki/Lissajous_curve

**Exercício 7**
Seja $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t)$.
Represente graficamente $P(t) + P'(t)$ para os seguintes valores de $t$:
$0, \frac{1}{4}\pi, \frac{2}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \ldots, 2\pi$.
Faça as anotações adequadas nos seu pontos e vetores pra lembrar qual é o $t$ associado a cada um.

Tente usar as informações deste gráfico pra desenhar o traço de $P(t)$. Isto não é nada óbvio – se inspire nas figuras das páginas 208 e 209 do capítulo 6 do Bortolossi e tente conseguir uma hipótese razoável.

Você pode pensar que $P(t)$ é a posição do Super Mario Kart no instante $t$ e $P'(t)$ é o *vetor velocidade* dele no instante $t$ (lembre que um vetor tem "direção", "orientação" e "módulo"!)... você só sabe a posição e a velocidade dele em alguns instantes, isto é, em alguns valores de $t$, e você vai ter que encontrar uma aproximação razoável, olhométrica, pra pista onde ele está correndo.

**Exercício 8**
Seja $P(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} t)$.
Represente graficamente $P(t) + P'(t)$ para os seguintes valores de $t$:
$0, \frac{1}{4}\pi, \frac{2}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \ldots, 2\pi$.
Faça as anotações adequadas nos seu pontos e vetores pra lembrar qual é o $t$ associado a cada um.

Tente usar as informações deste gráfico pra desenhar o traço de $P(t)$. Isto não é nada óbvio – se inspire nas figuras das páginas 208 e 209 do capítulo 6 do Bortolossi e tente conseguir uma hipótese razoável.

Links:
Bort6p22 Bortolossi, cap.6, p.208
Bort6p23 Bortolossi, cap.6, p.209

# Exercício 9: órbita

Este exercício vai dar uma figura que é a órbita de uma lua.
O resultado vai ser algo como a figura da última página daqui,
`http://anggtwu.net/LATEX/2022-1-C3-orbita.pdf`
mas olhe pra essa figura durante só uns poucos segundos.

Neste exercício você vai tentar redescobrir essa figura sozinho, e você vai tentar descobrir como desenhar uma aproximação bem razoável pra ela só somando uns vetores no olhômetro e sem fazer nenhuma conta complicada — por exemplo, você vai evitar usar uma aproximação numérica pra $(\cos(\frac{1}{12}\cdot 2\pi), \operatorname{sen}(\frac{1}{12}\cdot 2\pi))$; ao invés disso você vai usar a representação gráfica deste ponto no $\mathbb{R}^2$.

Seja $h = \frac{1}{12}\cdot 2\pi$.
Esse $h$ vai ser uma "hora". Vou explicar isso no quadro.
Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
P(t) & = & (\cos t, \operatorname{sen} t), \\
Q(t) & = & (\cos 4t, \operatorname{sen} 4t), \\
R(t) & = & \frac{1}{2}(\cos 4t, \operatorname{sen} 4t) = (\frac{1}{2}\cos 4t, \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4t), \\
S(t) & = & P(t) + R(t).
\end{array}$$

**Exercício 9.**
Represente graficamente:

a) $P(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
b) $P(t) + P'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

c) $Q(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
d) $Q(t) + Q'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

e) $R(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
f) $R(t) + R'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

g) $S(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
h) $S(t) + S'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

(Continua...)

# Exercício 9: órbita (cont.)

Nos itens a até f você deve ter obtido pontos sobre círculos e vetores tangentes aos círculos apoiados nestes pontos. Nos itens g e h você deve ter obtido algo bem mais complicado: pontos e vetores apoiados nestes pontos, mas você ainda não sabe direito sobre que curva eles estão.

Reveja o trecho entre 6:34 e 9:00 do vídeo da Freya Holmér. A trajetória que ela analisa é bem "suave", no sentido de que ela não bicos ou teleportes, e a derivada da aceleração dela é constante.

No item h você obteve alguns pontos e vetores velocidade *de uma trajetória que você não sabe direito qual é...* você só tem uma lembrança vaga do "traço" dessa trajetória, porque você viu a figura-spoiler durante uns poucos segundos.

i) Desenhe uma trajetória bem suave que nos instantes $t = 0h$, $1h$, $\ldots$, $12h$ passe pelos pontos que você obteve no item g. Aqui você vai conseguir uma aproximação bem tosca pro "traço" da trajetória $S(t)$.

j) Desenhe uma trajetória bem suave que nos instantes $t = 0h$, $1h$, $\ldots$, $12h$ passe pelos pontos que você obteve no item h, e que naqueles instantes tenha exatamente os vetores velocidade que você também desenhou no item h. Aqui você provavelmente vai conseguir uma aproximação bastante boa pro "traço" da trajetória $S(t)$.

k) Refaça o desenho do item j pra ele ficar mais caprichado e simétrico e tal. Quando você achar que conseguiu fazer uma versão caprichada boa olhe de novo a figura-spoiler e compare o seu desenho com ela.

# Exercícios 10 e 11: bico e teleporte

**Exercício 10: uma trajetória com um bico**
Seja:

$$Q(t) = \begin{cases} (t,4) & \text{quando } t \leq 6, \\ (6,10-t) & \text{quando } 6 < t. \end{cases}$$

Represente graficamente $Q(t) + Q'(t)$ para $t = 1,3,5,7,9$. depois represente graficamente $Q(t) + Q'(t)$ pra um monte de outros valores de $t$ — até você entender como essa trajetória se comporta. *Dica:* ela é um movimento retilíneo uniforme até um determinado instante, aí ela muda de vetor velocidade subitamente e vira um outro movimento retilíneo uniforme.

**Exercício 11: um trajetória com teleporte**
Represente graficamente a trajetória abaixo. Ela é parecida com a anterior, mas nessa tem um momento em que a partícula desaparece do ponto em que em estava e se teleporta pra outro lugar.

$$R(t) = \begin{cases} (t,4) & \text{quando } t \leq 6, \\ (5,11-t) & \text{quando } 6 < t. \end{cases}$$

**Dicas pro exercícios 10 e 11**
Este vídeo aqui tem algumas figuras sobre como desenhar trajetórias:
http://www.youtube.com/watch?v=3yWLubqHsic
http://anggtwu.net/eev-videos/2020.2-C3-intro.mp4

Quase todo mundo achou muito difícil desenhar a trajetória do exercício 11 — se a gente calcula $R(t)$ só pra valores inteiros de $t$ a gente não consegue descobrir como a $R(t)$ se comporta entre $t = 6$ e $t = 7$...

Um jeito de resolver isso é calcular $R(t)$ para $t = 6.1$, $t = 6.2$, …, $t = 6.9$, desenhar esses pontos no gráfico, e aí tentar descobrir qual é o comportamento da $R(t)$ pra todos os valores em $[6,7]$.

Um outro jeito é considerar que $R(t) = (x(t), y(t))$ e tentar entender as funções $x(t)$ e $y(t)$, que são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

# Exercício 12

Vamos reusar estas definições:

$$Q(t) \;=\; \begin{cases} (t,4) & \text{quando } t \leq 6, \\ (6,10-t) & \text{quando } 6 < t. \end{cases}$$

$$R(t) \;=\; \begin{cases} (t,4) & \text{quando } t \leq 6, \\ (5,11-t) & \text{quando } 6 < t. \end{cases}$$

Lembre que:

$$P'(t) \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{P(t+\varepsilon)-P(t)}{\varepsilon}$$

Se a gente faz esta definição aqui,

$$P'_\varepsilon(t) \;=\; \frac{P(t+\varepsilon)-P(t)}{\varepsilon}$$

então temos:

$$P'(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} P'_\varepsilon(t).$$

**Exercício.**
Represente graficamente $Q(t)+Q'_\varepsilon(t)$ para:
a) $t=6$ e $\varepsilon=2$, $\varepsilon=1$, $\varepsilon=0.5$, $\varepsilon=0.1$.
b) $t=6$ e $\varepsilon=-2$, $\varepsilon=-1$, $\varepsilon=-0.5$, $\varepsilon=-0.1$.

Represente graficamente $R(t)+R'_\varepsilon(t)$ para:
a) $t=6$ e $\varepsilon=2$, $\varepsilon=1$, $\varepsilon=0.5$, $\varepsilon=0.1$.
b) $t=6$ e $\varepsilon=-2$, $\varepsilon=-1$, $\varepsilon=-0.5$, $\varepsilon=-0.1$.

# Cálculo 3 - 2025.1

Aula 5: curvas de Bézier

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2025.1-C3.html

# Links

Versões anteriores deste PDFzinho:
3dT25 (2021.2) Curvas de Bézier

**O vídeo**

Assista este vídeo aqui,

`https://www.youtube.com/watch?v=aVwxzDHniEw`

*só no trecho entre 1:55 e 6:17.*

O vídeo foi feito pela Freya Holmér
e o título dele é "The Beauty of Bézier Curves".
As animações do vídeo foram feitas no Unity.

Ele não tem legendas em português, mas eu vou copiar
as legendas em inglês dele pra próxima página –
pergunte no Telegram o significado dos trechos
que você não entender.

00:01:56.160 –> 00:02:01.200
Let's say you have two points: P0 and P1
connected by a line segment

00:02:02.640 –> 00:02:06.160
Now imagine a third point P
between these two points

00:02:06.160 –> 00:02:09.680
The position of P could be described
by what is called a t-value

00:02:10.240 –> 00:02:13.520
a value between 0 to 1, similar to a percentage

00:02:13.520 –> 00:02:18.800
where t-values at 1 moves it to P1
and t-values at 0 moves it to P0

00:02:19.440 –> 00:02:22.480
and any values in between
are a blend between the two

00:02:23.440 –> 00:02:27.760
This function is called linear interpolation
or lerp for short

00:02:27.760 –> 00:02:30.320
Mathematically, you can write it as (1-t)P0*tP1

00:02:33.760 –> 00:02:35.840
Now, what if we add another point?

00:02:36.880 –> 00:02:40.800
We now have two interpolated points
one on each line segment

00:02:40.800 –> 00:02:45.120
"lerping" on their respective line
based on the same t-value we saw earlier

00:02:45.680 –> 00:02:50.240
We can then connect these two
points with another line segment

00:02:50.240 –> 00:02:54.880
If we then add a point on that line that
also lerps based on the same t-value

00:02:55.680 –> 00:02:58.080
you can see that it follows a very specific path

00:02:58.800 –> 00:03:03.840
This path is a quadratic bézier curve

00:03:06.320 –> 00:03:07.840
but we don't have to stop here

00:03:07.840 –> 00:03:09.120
what if we add another point?

00:03:09.760 –> 00:03:11.440
we repeat the same process

00:03:12.160 –> 00:03:13.600
add three points

00:03:13.600 –> 00:03:14.640
connect them

00:03:14.640 –> 00:03:15.920
add two points

00:03:15.920 –> 00:03:17.120
connect those

00:03:17.120 –> 00:03:18.320
and add the last point

00:03:20.000 –> 00:03:23.760
and this point will now follow
the path of the cubic bézier curve

00:03:25.440 –> 00:03:30.000
what's beautiful about this construction is that
it works no matter what points we use

00:03:30.560 –> 00:03:32.720
We can change the shape to anything

00:03:32.720 –> 00:03:36.000
and following the same rules it
will give us this smooth path

00:03:38.880 –> 00:03:42.800
We're going to focus mostly on the cubic
bézier curve for the rest of this video

00:03:42.800 –> 00:03:45.840
since it's the most common one

00:03:57.600 –> 00:04:00.800
This particular method of
getting a point in a bézier curve

00:04:00.800 –> 00:04:02.400
based on nested lerps

00:04:02.960 –> 00:04:08.320
where each point along the way is calculated
from lerps from the points that came before it

00:04:08.320 –> 00:04:10.480
eventually forming the path of the bézier curve

00:04:11.040 –> 00:04:14.320
is called De Casteljau's Algorithm

00:04:14.320 –> 00:04:17.360
I personally love it because
of its numerical stability

00:04:17.360 –> 00:04:19.600
and just how easy it is to remember

00:04:19.600 –> 00:04:22.000
it's just lerps all the way down

00:04:22.000 –> 00:04:24.720
But there is another way we can interpret this

00:04:25.840 –> 00:04:28.720
Let's start by writing out the math
for all of our lerps

00:04:33.280 –> 00:04:35.920
then, let's expand this formula entirely

00:04:37.120 –> 00:04:39.760
let's also color code the points for readability

00:04:40.800 –> 00:04:42.480
What you might be able to see is that

00:04:42.480 –> 00:04:45.600
we can rearrange this formula
in terms of each point

00:04:51.360 –> 00:04:55.840
First, each point can be visualized
as a vector from the origin

00:05:00.160 –> 00:05:02.240
But this is where it gets interesting

00:05:02.240 –> 00:05:06.640
Each of them are multiplied by four polynomials
based on our t-value

00:05:07.360 –> 00:05:10.640
This is what they look like
for all cubic bézier curves

00:05:12.560 –> 00:05:14.880
You might be able to tell
that the values are sort of

00:05:14.880 –> 00:05:24.000
trading off with each other
as weights as we change t

00:05:24.000 –> 00:05:26.400
in the beginning, the first weight is 1

00:05:26.400 –> 00:05:30.720
but as the t-value increases
the values shift across the points

00:05:30.720 –> 00:05:32.960
until the last weight has a value of 1

00:05:33.760 –> 00:05:35.520
This is called a weighted sum

00:05:35.520 –> 00:05:39.600
where each of these weights together add up to 1
at any given t value

00:05:40.960 –> 00:05:43.760
Let's apply these weights
to the vectors of the points

00:05:44.480 –> 00:05:47.760
As you can see, they trade off
weights exactly the same way

00:05:48.880 –> 00:05:51.840
so let's add them together

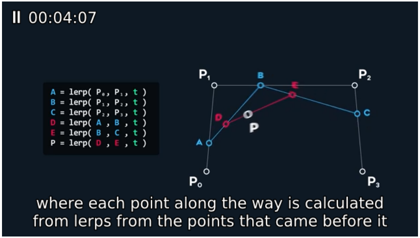
00:05:54.480 –> 00:05:57.840
What we get is exactly the
same behavior as with the lerps

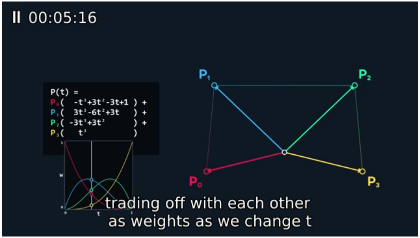
00:05:57.840 –> 00:06:00.720
but using a different
interpretation of the same math

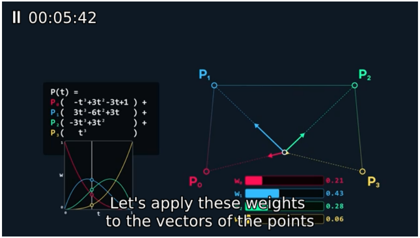
00:06:01.440 –> 00:06:05.840
This follows the very same bézier
curve we got with the lerps

00:06:14.160 –> 00:06:17.360
This is called
the Bernstein Polynomial Form of bézier curves

# Alguns frames



**Exercício 1**

Neste exercício vamos usar

$P_0 = (1,1)$, $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (3,2)$, $P_2 = (3,5)$.

Marque estes 4 pontos no $\mathbb{R}^2$ e escreva do lado de cada um dos pontos o nome dele. Neste exercício vamos chamar o gráfico com esses 4 pontos e os nomes dele de "diagrama básico", e você vai precisar de várias cópias do diagrama básico, uma pra cada item.

a) Seja $t = \frac{1}{2} = 0.5$. Encontre os pontos $A, B, C, D, E, P$ da construção do frame 4:07 usando este valor de $t$ e marque esses pontos na sua primeira cópia do diagrama básico. Escreva do lado de cada ponto o nome dele.

b) Idem, mas na segunda cópia do diagrama básico e com $t = \frac{1}{4}$.

c) Idem, mas na segunda cópia do diagrama básico e com $t = \frac{3}{4}$.

**Exercício 1 (cont.)**

d) Idem, mas em outra cópia, e usando $t = \frac{1}{8}$. Agora só escreva o nome do ponto $P$

e) Idem, mas usando $t = \frac{3}{8}$.

f) Idem, mas usando $t = \frac{5}{8}$.

g) Idem, mas usando $t = \frac{7}{8}$.

**Exercício 2**

Agora veja se você consegue refazer todos os exercícios anteriores num gráfico só sem desenhar os pontos auxiliares. Mais precisamente: comece com $t = \frac{1}{2}$, descubra no olho onde estão os pontos $A, B, C, D, E, P$ para este valor de $t$ sem desenhá-los, e desenhe só o ponto $P$, escrevendo "$P_{\frac{1}{2}}$" do lado dele. Depois faça a mesma coisa para $P_{\frac{1}{4}}$ e $P_{\frac{3}{4}}$, e depois para $P_{\frac{1}{8}}$, $P_{\frac{3}{8}}$, $P_{\frac{5}{8}}$, $P_{\frac{7}{8}}$. Dica: você pôr um dedo em cada um dos pontos $A, B, C, D, E$ se ajudar.

**Exercício 3.**

No PDF sobre vetores tangentes você fez três exercícios de desenhar trajetórias curvas e os vetores tangentes delas em certos pontos. Eram os exercícios 2, 3 e 4 daqui:

`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-vetor-tangente.pdf`

Agora que o seu olhômetro está bem melhor nós vamos ver um modo de desenhar aproximações pra esses trajetórias usando quase só desenhos e fazendo pouquíssimas contas.

**Exercício 3 (cont.)**

No exercício 2 do PDF de vetores tangentes nós tínhamos $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$; no exercício 3 tínhamos $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t)$, e no exercício 4 tínhamos $P(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} t)$. Vamos mudar os nomes para:

$$\begin{array}{ll}
P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), & P'(t) = \overrightarrow{(-\operatorname{sen} t, \cos t)} \\
Q(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t), & Q'(t) = \overrightarrow{(-\operatorname{sen} t, 2\cos 2t)} \\
R(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} t), & R'(t) = \overrightarrow{(-2\operatorname{sen} 2t, \cos t)}
\end{array}$$

Se usarmos quatro cores diferentes conseguimos representar pra cada trajetória as componentes $x$ e $y$ dela e as componentes $x$ e $y$ da derivada dela num gráfico só...

# Cálculo 3 - 2025.1

Aulas 9 e 10: Seja o seu próprio GeoGebra

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

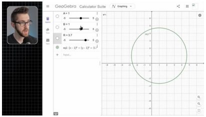
http://anggtwu.net/2025.1-C3.html

# Links

3hQ1 Quadros da aula 1
3hQ3 Quadros da aula 2
4gQ1 (C4, 2023.1) Quadros
2gT105 (C2, 2023.1) Um jogo colaborativo
2gT19 (C2, 2023.1) Retas reversas: seja como o Bob!
4gT5 (C4, 2023.1) Seja o seu próprio GeoGebra
MpgP8 (GA, 2018) "Set comprehensions"
MpgP11 (GA, 2018) Exercícios sobre força bruta: 5N, 5O, 6N', 6O'
MpgP17 (GA, 2018) Interseções de retas parametrizadas

Visaud01:00 até 02:52 "é óbvio sim"
Visaud37:17 até 46:06 reduzir e aumentar o nível de detalhe
Visaud48:53 até o final: vários níveis de detalhe lado a lado

"GeoGebra: All About Sliders" (video):
`http://www.youtube.com/watch?v=Q9p-Oz8OyfY#t=4m55s`



# Pontos mais fáceis de calcular

**Muito importante:**
Se você for uma pessoa pra quem
$12345 + 9675$ é tão fácil de calcular de cabeça quanto $12000 + 345$,
e $4 + 5x = 6$ é tão fácil de resolver de cabeça quanto $1 + x = 2$,

...então tente pensar como uma pessoa pra quem
$12345 + 9675$ é muito mais difícil de calcular que $12000 + 345$,
e $4 + 5x = 6$ é muito mais difícil de resolver que $1 + x = 2$...

...e além disso considere que somas são mais fáceis de calcular de cabeça do que subtrações – e que, por exemplo, dá pra calcular $34+45$ de cabeça mas dá um trabalhão, e que calcular $34 - 45$ de cabeça é quase impossível.

Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
f_1(t) & = & 34 + t \cdot 45 \\
f_2(t) & = & 34 + (t - 56) \cdot 45 \\
f_3(t) & = & 34 + (t + 56) \cdot 45 \\
f_4(t) & = & 34 + ((t - 56)/4) \cdot 45 \\
f_5(t) & = & 34 + ((t + 56)/4) \cdot 45 \\
P_1(t) & = & (12, 23) + t\overrightarrow{(4, 5)} \\
P_2(t) & = & (12, 23) + (t - 8)\overrightarrow{(4, 5)} \\
P_3(t) & = & (12, 23) + (t + 8)\overrightarrow{(4, 5)} \\
P_4(t) & = & (12, 23) + ((t - 8)/34)\overrightarrow{(4, 5)} \\
P_5(t) & = & (12, 23) + ((t + 8)/34)\overrightarrow{(4, 5)}
\end{array}$$

Os pontos mais fáceis de calcular do $f_4(t)$ são estes aqui.
O caso mais fácil de todos é este,

$$34 + \underbrace{((t - 56)/4)}_{0} \cdot 45$$

em que temos:

$$f(56) \;=\; \underbrace{34 + \underbrace{\underbrace{((\underbrace{\underbrace{t}_{56} - 56}_{0})/4)}_{0} \cdot 45}_{0}}_{34}$$

E o segundo caso mais fácil é este,

$$34 + \underbrace{((t - 56)/4)}_{1} \cdot 45$$

em que temos:

$$f(56+4) \;=\; \underbrace{34 + \underbrace{\underbrace{((\underbrace{\underbrace{t}_{60} - 56}_{4})/4)}_{1} \cdot 45}_{45}}_{34+45}$$

# Pontos mais fáceis de calcular (2)

Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
f_1(t) & = & 34 + t \cdot 45 \\
f_2(t) & = & 34 + (t-56) \cdot 45 \\
f_3(t) & = & 34 + (t+56) \cdot 45 \\
f_4(t) & = & 34 + ((t-56)/4) \cdot 45 \\
f_5(t) & = & 34 + ((t+56)/4) \cdot 45 \\
P_1(t) & = & (12,23) + t\overrightarrow{(4,5)} \\
P_2(t) & = & (12,23) + (t-8)\overrightarrow{(4,5)} \\
P_3(t) & = & (12,23) + (t+8)\overrightarrow{(4,5)} \\
P_4(t) & = & (12,23) + ((t-8)/34)\overrightarrow{(4,5)} \\
P_5(t) & = & (12,23) + ((t+8)/34)\overrightarrow{(4,5)}
\end{array}$$

**Exercício**
Complete a tabela à direita com os dois pontos mais fáceis de calcular de cada uma das 10 funções acima. *Faça todas as contas de cabeça e escreva só os resultados finais!* O segundo ponto mais fácil de calcular sempre pode ser escrito nestes dois formatos, $f_4(56+4) = 34+45$ e $f_4(60) = 79$ – e você pode escolher qual dos formatos usar.

$$\begin{array}{rcl}
f_1(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
f_1(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
f_2(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
f_2(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
f_3(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
f_3(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
f_4(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
f_4(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
f_5(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
f_5(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
P_1(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
P_1(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
P_2(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
P_2(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
P_3(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
P_3(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
P_4(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
P_4(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
P_5(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad} \\
P_5(\underline{\qquad}) & = & \underline{\qquad\qquad}
\end{array}$$

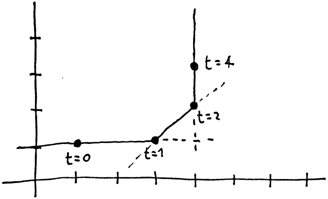
# Uma trajetória em três partes

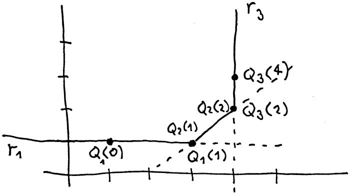
Agora você vai tentar encontrar uma descrição "formal", "algébrica", da trajetória $P(t)$ que eu desenhei à direita. Uma descrição informal dela seria assim: um corpo (pra usar terminologia de físicos...) se move em movimento retilíneo uniforme na horizonal pra direita desde $t = -\infty$ até $t = 1$, depois ele muda pra um outro movimento retilíneo uniforme e anda em diagonal na direção nordeste até $t = 2$, e a partir de $t = 3$ ele muda pra um outro movimento retilíneo uniforme, dessa vez na vertical. Temos $P(0) = (1, 1)$, $P(1) = (3, 1)$, $P(2) = (4, 2)$, e $P(3) = (4, 3)$ – dá pra ver isso pelo gráfico – e a gente pode começar definindo três trajetórias mais simples, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, e $Q_3(t)$, que são movimentos retilíneos uniformes, e depois montar a definição da trajetória $P(t)$ a partir delas.

Note que:

$$\begin{array}{l}(1,1) = P(0) = Q_1(0)\\ (3,1) = P(1) = Q_1(1) = Q_2(1)\\ (4,2) = P(2) = Q_2(2) = Q_3(2)\\ (4,3) = P(4) = Q_3(4)\end{array}$$

$P(t) \;=$



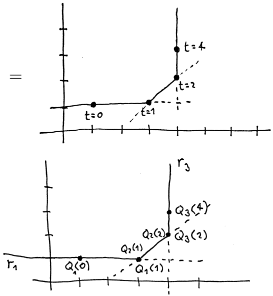
# Uma trajetória em três partes (2)

Agora complete todas as lacunas abaixo:

$$\begin{array}{rcl}
Q_1(t) & = & (\underline{\quad},\underline{\quad}) + t\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} \\
Q_2(t) & = & (\underline{\quad},\underline{\quad}) + (t-\underline{\quad})\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} \\
Q_3(t) & = & (\underline{\quad},\underline{\quad}) + ((t-\underline{\quad})/\underline{\quad})\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} \\
r_1 & = & \{\, Q_1(t) \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\
r_2 & = & \{\, Q_2(t) \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\
r_3 & = & \{\, Q_3(t) \mid t \in \mathbb{R} \,\}
\end{array}$$

$$P(t) = \begin{cases} (\underline{\quad},\underline{\quad}) + t\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} & \text{quando } t \leq 1, \\ (\underline{\quad},\underline{\quad}) + (t-\underline{\quad})\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} & \text{quando } 1 \leq t \leq 2, \\ (\underline{\quad},\underline{\quad}) + ((t-\underline{\quad})/\underline{\quad})\overrightarrow{(\underline{\quad},\underline{\quad})} & \text{quando } 2 \leq t, \end{cases}$$

$P(t) \;=$




Importante: faça todas as contas de cabeça e calcule só os "pontos mais fáceis de calcular" que eu expliquei alguns slides atrás. Você pode fazer quantos chutes-e-testes você precisar, desde que você marque eles com "se" e "então". *Não apague nenhum dos seus chutes-e-testes!*

Dê uma olhada em como as pessoas fizeram isso no quadro na aula 2:
3hQ5 Quadros de 01/set/2023

# Cálculo 3 - 2025.1

Aulas 12 a ??: “notação de físicos”

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2025.1-C3.html

# Links

3hQ26 Quadros da aula 10 (29/set/2023)

3fT118 (2022.2) P2, questão 2
3fT121 (2022.2) P2, questão 2, dicas
3fT122 (2022.2) P2, questão 2, gabarito

StewPtCap1p5 (p.10) variável dependente
StewPtCap3p35 (p.188) 3.5 derivação implícita
StewPtCap3p75 (p.226) 3.10 Aproximações Lineares e Diferenciais
StewPtCap3p75 (p.228) Diferenciais
StewPtCap5p48 (p.369) [4] Regra da substituição (MVI)
StewPtCap5p51 (p.372) [6] Regra da substituição (MVD)
StewPtCap11p61 (p.679) 11.10 Séries de Taylor e Maclaurin
StewPtCap14p25 (p.811) 14.3 Derivadas Parciais
StewPtCap14p47 (p.833) [4] A regra da cadeia (versão geral)
Leit4p61 (p.275) Leithold: regras para a notação de Leibniz
ThompsonP77 (p.66) IX. Introducing a useful dodge
ThompsonP183 (p.172) XVI. Partial differentiation

BortCalc1pt01p44 (p.44) Humberto Bortolossi - funções
BortCalc1pt13p9 (p.9) Humberto Bortolossi - regra da cadeia

BauerDawnP20 Elaboration in proof assistants

Total differentials and the chain rule (vídeo do MIT):
`http://www.youtube.com/watch?v=2bF6H_xu0ao`

# Derivação implícita

$$
\begin{array}{rcl}
y = y(x) & = & f(x) \\
y_x = y_x(x) & = & f'(x) \\
\frac{d}{dx}(y^3) & = & \frac{d}{dx}(f(x)^3) \\
 & = & 3f(x)^2 f'(x) \\
 & = & 3y^2 y_x
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
x^3 + y^3 & = & 6xy \\
\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) & = & \frac{d}{dx}(6xy) \\
\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) & = & 6y + 6y_x \\
\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) & = & 6y + 6y_x \\
3x^2 + 3y^2 y_x & = & 6y + 6y_x \\
x^2 + y^2 y_x & = & 2y + 2y_x \\
y^2 y_x - 2y_x & = & 2y - x^2 \\
(y^2 - 2)y_x & = & 2y - x^2 \\
y_x & = & \frac{2y - x^2}{y^2 - 2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
x^3 + y^3 & = & 6xy \\
d(x^3 + y^3) & = & d(6xy) \\
d(x^3) + d(y^3) & = & 6y\,dx + 6x\,dy \\
3x^2dx + 3y^2dy & = & 6y\,dx + 6x\,dy \\
x^2dx + y^2dy & = & 2y\,dx + 2x\,dy \\
y^2dy - 2x\,dy & = & 2y\,dx - x^2dx \\
(y^2 - 2x)dy & = & (2y - x^2)dx \\
\frac{dy}{dx} & = & \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
x^3 + f(x)^3 & = & 6xf(x) \\
\frac{d}{dx}(x^3 + f(x)^3) & = & \frac{d}{dx}(6xf(x)) \\
\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(f(x)^3) & = & 6f(x) + 6f'(x) \\
\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(f(x)^3) & = & 6f(x) + 6f'(x) \\
3x^2 + 3f(x)^2 f'(x) & = & 6f(x) + 6f'(x) \\
x^2 + f(x)^2 f'(x) & = & 2f(x) + 2f'(x) \\
f(x)^2 f'(x) - 2f'(x) & = & 2f(x) - x^2 \\
(f(x)^2 - 2)f'(x) & = & 2f(x) - x^2 \\
f'(x) & = & \frac{2f(x) - x^2}{f(x)^2 - 2}
\end{array}
$$

(2) Let $x$ represent, in Fig. 5, the horizontal distance, from a wall, of the bottom end of a ladder, $AB$, of fixed length; and let $y$ be the

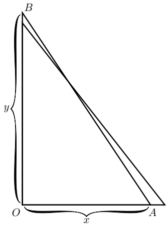



Fig. 5.

height it reaches up the wall. Now $y$ clearly depends on $x$. It is easy to see that, if we pull the bottom end $A$ a bit further from the wall, the top end $B$ will come down a little lower. Let us state this in scientific language. If we increase $x$ to $x+dx$, then $y$ will become $y-dy$; that is, when $x$ receives a positive increment, the increment which results to $y$ is negative.

Yes, but how much? Suppose the ladder was so long that when the bottom end $A$ was 19 inches from the wall the top end $B$ reached just 15 feet from the ground. Now, if you were to pull the bottom end out 1 inch more, how much would the top end come down? Put it all into inches: $x = 19$ inches, $y = 180$ inches. Now the increment of $x$ which we call $dx$, is 1 inch: or $x + dx = 20$ inches.



How much will $y$ be diminished? The new height will be $y - dy$. If we work out the height by Euclid I. 47, then we shall be able to find how much $dy$ will be. The length of the ladder is

$$\sqrt{(180)^2 + (19)^2} = 181 \text{ inches.}$$

Clearly then, the new height, which is $y - dy$, will be such that

$$(y - dy)^2 = (181)^2 - (20)^2 = 32761 - 400 = 32361,$$
$$y - dy = \sqrt{32361} = 179.89 \text{ inches.}$$

Now $y$ is 180, so that $dy$ is $180 - 179.89 = 0.11$ inch.

So we see that making $dx$ an increase of 1 inch has resulted in making $dy$ a decrease of 0.11 inch.

And the ratio of $dy$ to $dx$ may be stated thus:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{0.11}{1}.$$

It is also easy to see that (except in one particular position) $dy$ will be of a different size from $dx$.

Now right through the differential calculus we are hunting, hunting, hunting for a curious thing, a mere ratio, namely, the proportion which $dy$ bears to $dx$ when both of them are indefinitely small.

It should be noted here that we can only find this ratio $\frac{dy}{dx}$ when $y$ and $x$ are related to each other in some way, so that whenever $x$ varies $y$ does vary also. For instance, in the first example just taken, if the base $x$ of the triangle be made longer, the height $y$ of the triangle becomes greater also, and in the second example, if the distance $x$ of the foot of the ladder from the wall be made to increase, the height $y$

# Exercício 1.

As contas à direita são uma versão um pouco modernizada das contas das páginas 11 e 12 do livro do Thompson. Repare que estamos usando $x_0$ e $y_0$ pros valores "antes" e '$x_1$ e $y_1$ pros valores "depois", e isso nos permite mencionar nas mesmas contas os valores de "antes" e de "depois" — o Thompson precisa mantê-los em blocos de contas separados, e precisa de explicações em inglês pra dizer o que é o quê.

a) Numere as linhas das páginas 11 e 12 do Thompson e escreva ao lado de cada igualdade à direita a que linha do Thompson ela corresponde.

b) Faça uma versão da Fig.5 do Thompson que tenha proporções (um pouco) mais coerentes com os dados das contas dele, e que indique quais distâncias são $x_0$, $x_1$, $y_0$ e $y_1$. Faça tudo no olhômetro - não use régua.

c) Nas minhas contas eu usei o símbolo $\ell$ pro comprimento da escada ("length"). Represente graficamente o círculo

$$\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2}=\ell\,\}$$

e represente os pontos $(x_0,y_0)$ e $(x_1,y_1)$ nele. Faça tudo à mão sem régua, mas incluindo informações suficientes pro leitor entender o seu gráfico.

d) O $\frac{dy}{dx}$ do Thompson corresponde à derivada de qual função, em que ponto? Diga que função é essa, calcule a derivada dela, calcule na calculadora o valor da derivada dela no ponto certo, e compare o seu resultado com o valor do Thompson.

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\ell$$
$$x_0^2+y_0^2=\ell^2$$
$$x_1^2+y_1^2=\ell^2$$
$$(x_0+dx)^2+(y_0-dy)^2=\ell^2$$
$$(y_0-dy)^2=\ell^2-x_1^2$$
$$y_0-dy=\sqrt{\ell^2-x_1^2}$$
$$=\sqrt{181^2-20^2}$$
$$=\sqrt{32761-400}$$
$$=\sqrt{32361}$$
$$\approx 179.89$$
$$180-dy=179.89$$
$$180-179.89=dy$$
$$dy=0.11$$
$$dx=1$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{0.11}{1}=0.11$$

## Exercício 2.

Leia a seção 4.7 do livro do Daniel Miranda:
MirandaP117 Aproximações Lineares e Diferencial

Os livros mais modernos:
i) distinguem $dx$ e $\Delta x$,
ii) escrevem $y = f(x)$ ao invés de $y = y(x)$,
iii) evitam a convenção $x_1 = x_0 + \Delta x$.

a) Traduza o início da seção 4.7 do Miranda - até o fim da página 118 - pra notação do Thompson. Dicas:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \approx & f(p) + f'(p)(x-p) \\ L(x) & = & f(p) + f'(p)(x-p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} f(x_1) & \approx & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) & = & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

e a função $L$ é exatamente a série de Taylor da função $f$ truncada até grau 1... lembre que nós quase só vimos séries de Taylor no caso em que $x_0$ era 0, mas ficamos de ver depois o caso em que o "ponto base" não precisava mais ser 0...

# Alguns truques de tradução

Truque 1: quando a gente escreve fórmulas "com o mesmo formato" perto uma da outra o leitor tende a ler a segunda ou como uma tradução da primeira pra outra notação ou como um caso particular da primeira...

Isto aqui é uma tradução de duas das fórmulas da páginas 117 e 118 do Miranda – link:
Miranda117 4.7 Aproximações lineares e diferencial
...pra "notação de físicos":

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \approx & f(p)+f'(p)(x-p) \\ L(x) & = & f(p)+f'(p)(x-p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} f(x_1) & \approx & f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) & = & f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

E isto aqui é um caso particular da primeira fórmula:

$$f(4.02) \approx f(4)+f'(4)(4.02-4) \qquad (*)$$

Repare que a fórmula $(*)$ fica mais clara se escrevermos isto explicitamente:

$$x_1 = 4.02 \qquad x_0 = 4$$

...e repare que se a gente tentar escrever isto aqui direto

$$\sqrt{4.02} \approx \sqrt{4}+\sqrt{4}'(4.02-4)$$

fica confuso e péssimo — não existe uma notação padrão pra derivada de $\sqrt{x}$ em $x=4$!!! Aqui a gente TEM que usar um truque novo — a gente tem que dar um nome pra função $\sqrt{x}$. Por exemplo...

# Alguns truques de tradução (2)

Seja $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$.
Então $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, e

$$\begin{array}{rrcl} & f(4.02) & \approx & f(4) + f'(4)(4.02 - 4) \\ \Rightarrow & \sqrt{4.02} & \approx & \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02 - 4) \end{array}$$

Repare que acima eu só fiz as subtituições $f(x) := \sqrt{x}$ e $f'(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}}$ — eu acho que as contas mais mais fáceis de entender se a gente fizer as substituições e as simplificações em passos separados:

$$\begin{array}{rrcl} & f(4.02) & \approx & f(4) + f'(4)(4.02 - 4) \\ \Rightarrow & \sqrt{4.02} & \approx & \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02 - 4) \\ & & = & 2 + \frac{1}{4}(0.02) \\ & & = & 2 + 0.005 \\ & & = & 2.005 \\ & \sqrt{4.02} & = & 2.004993765576342\ldots \end{array}$$

A última linha acima tem um '$=$' ao invés de um '$\approx$', e eu calculei o resultado dela com a calculadora.

# O exemplo 4.4 da página 120

Miranda120 Exemplo 4.4: uma tigela...

$$\begin{array}{rcl}
V(x) &=& \frac{\pi}{3}(30x^2 - x^3) \\
V'(x) &=& \frac{\pi}{3}(60x - 3x^2) = \pi(20x - x^2) \\
V(x_1) &\approx& V(x_0) + V'(x_0)(x_1 - x_0) \\
V(x_1) - V(x_0) &\approx& V'(x_0)(x_1 - x_0) \\
V(x^*) - V(5) &\approx& V'(5)(x^* - 5)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
V(5) &=& \frac{\pi}{3}(30 \cdot 5^2 - 5^3) \\
&=& \frac{\pi}{3}625 \\
V'(5) &=& \pi(20 \cdot 5 - 5^2) \\
&=& 75\pi
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
V(x^*) - V(5) &\approx& V'(5)(x^* - 5) \\
\Delta V &\approx& V'(5)\Delta x \\
&=& 75\pi\Delta x
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
V(x^*) - V(5) &\approx& V'(5)(x^* - 5) \\
V(x^*) &\approx& V(5) + V'(5)(x^* - 5) \\
&=& \frac{\pi}{3}625 + 75\pi\Delta x
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
& \Delta x &=& 0.1 \\
\Rightarrow & V(x^*) &=& \frac{\pi}{3}625 + 75\pi \cdot 0.1 \\
& &=& \frac{\pi}{3}625 + 75\pi \cdot 0.1 \\
& &\approx& 654.5 + 23.56
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
& \Delta x &=& \pm 0.1 \\
\Rightarrow & V(x^*) &=& \frac{\pi}{3}625 \pm 75\pi \cdot 0.1 \\
& &=& \frac{\pi}{3}625 \pm 75\pi \cdot 0.1 \\
& &\approx& 654.5 \pm 23.56 \\
& V(x^*) &\in& [654.5 - 23.56, 654.5 + 23.56]
\end{array}$$

# O exemplo 4.4 da página 120 (2)

No exemplo 4.4 o D. Miranda faz as contas o mais rápido possível — porque ele quer que os leitores passem meia hora reescrevendo as contas e checando os detalhes — e ele usa um monte de truques de físicos... por exemplo, ele fala em "erro de medida" e usa o '$\pm$' no sentido que os físicos costumam usar: pra matemáticos a frase "as soluções de $(x-17)(x+23)=0$ são da forma $x=20\pm 3$" quer dizer que $x=20-3$ ou $x=20+3$, mas pra físicos "$x=20\pm 3$" quer dizer $x \in [20-3, 20+3]$...

*Tem um monte de pessoas na turma que não fizeram Física.*

Na página anterior eu escrevi as contas do exemplo 4.4 tentando fazer com que elas ficassem bem fáceis de verificar por pessoas que não fizeram Física. Eu fiz as contas com simplificações, como $V'(5) = 75\pi$, bem passo a passo, e deixei as contas com aproximações, como $75\pi \cdot 0.1 \approx 23.56$, pro final; além disso eu repeti algumas linhas, como a que diz

$$V(x^*) - V(5) \approx V'(5)(x^* - 5)$$

várias vezes, e ao invés de tentar ver direto quais eram as consequências de $\Delta x = \pm 0.1$ eu comecei vendo as consequências de $\Delta x = 0.1$ e só depois passei pra $\Delta x = \pm 0.1$... as contas com $\Delta x = \pm 0.1$ são parecidas com as pra $\Delta x = 0.1$, mas com alguns detalhes complicados novos.

**Exercício 3.**
Faça as contas do Exemplo 4.5 do D. Miranda — o que é sobre uma esfera — de um jeito parecido com o que eu usei nas contas do Exemplo 4.4 — que era sobre uma tigela...

Faça tudo BEM passo a passo e deixe os truques "de físicos" pros passos finais das contas.

**Exercício 4.**
Faça a mesma coisa pro Exemplo 4.6.

**“$dy$ is always a dependent variable”**
Agora vamos ver como vários livros
lidam com esta idéia aqui:

$$\frac{dy}{dx}dx = dy$$

Repare que temos $\frac{dy}{dx}\Delta x \approx \Delta y$ mas $\frac{dy}{dx}dx = dy$.
O livro do Thomas explica isso bem melhor que o
livro do D. Miranda. Leia a definição de diferenciais
na p.225 do Thomas e entenda os exemplos 4 e 5
das páginas 225 e 227 dele:
`http://angg.twu.net/2022.1-C3/thomas_secoes_3.7_e_3.8.pdf`

# O truque das variáveis novas

No capítulo VI o Thompson calcula $\frac{d}{dx}((x^2+c)+(ax^4+b))$ organizando as contas mais ou menos desta forma:

$$\begin{array}{rcl} y & = & (x^2+c)+(ax^4+b) \\ \frac{dy}{dx} & = & \frac{d((x^2+c)+(ax^4+b))}{dx} \\ & = & \frac{d(x^2+c)}{dx} + \frac{d(ax^4+b)}{dx} \\ & = & 2x+4ax^3 \end{array}$$

No capítulo IX – "Introducing a useful dodge" – o Thompson mostra como a gente pode simplificar contas como essa introduzindo "variáveis dependentes" novas.

**Exercício 5.**
Entenda os exemplos (1)–(4) das páginas 66–68 do Thompson.

**Exercício 6.**
Faça os exercícios (1)–(4) da página 72 do Thompson.

Links:
https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=45
https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=83

**Derivadas parciais no Thompson**

Leia o início do capítulo XVI do Thompson —
"XVI. Partial Differentiation" — da p.172 até p.174.
Entenda os exemplos (1) até (3) dele.

**Exercício 7.**

Faça os exercícios (1)–(5) das páginas 177 e 178 do Thompson.
Obs: o (6) precisa de gráficos 3D, vamos fazer ele depois.

**Exercício 8.**

Digamos que $F(x,y) = x^3y^4$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, $h(t) = e^{2t}$.
Vamos usar esta notação aqui: $F_x = \frac{\partial}{\partial x}F$, $g_t = \frac{d}{dt}g$, etc.

a) Calcule $\frac{d}{dt}F(g(t), h(t))$ usando "notação de matemáticos".

b) Digamos que $x = g(t)$, $y = h(t)$, $z = F(x,y)$.
Calcule $\frac{d}{dt}z$ usando "notação de físicos".

**Derivadas parciais e derivadas totais**

Digamos que $z = z(x, y)$ e $y = y(x)$.

Vamos começar com um caso bem concreto — um que eu usei em EDOs com variáveis separáveis em C2... link:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-edovs.pdf

O nosso caso bem concreto vai ser:
$z = z(x, y) = x^2 + y^2$,
$y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
quando nós só consideramos o $z = z(x, y) = x^2 + y^2$
as derivadas parciais de $z$ são $z_x = 2x$ e $z_y = 2y$,
mas quando também consideramos o $y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$
aí temos $z = z(x, y(x)) = x^2 + \sqrt{1 - x^2}^2 = 1$, e $\frac{dz}{dx} = 0$.

Esta derivada $\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} z(x, y(x))$ é chamada de derivada total de $z$ com relação a $y$.

**Exercício 9.**
Digamos que $z = z(x,y) = (x+2)(y+3)$
e que $y = y(x) = \operatorname{sen} x$.
a) Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.
b) Calcule $\frac{dz}{dx}$.
c) Calcule $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}z$.

Convenção: quando uma expressão como $z_x$ puder ser interpretada tanto como uma derivada parcial quanto como uma derivada total o default é interpretá-la como derivada parcial.

**Exercício 10.**
Digamos que $z = z(x,y)$ e $y = y(x)$.
(Isto é uma versão mais geral do exercício 9).
a) Calcule $\frac{d}{dx}z$.
b) Calcule $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}z$.

Dica: siga as dicas dos próximos dois slides,
e escreva as suas contas em várias notações
diferentes "em paralelo".

# Dicas pro exercício 10

Compare:

$$[\mathsf{A1}] \quad = \quad \left( \begin{array}{l} \frac{d}{dx} f(g(h(x))) \\ = f'(g(h(x)))\frac{d}{dx}g(h(x)) \\ = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x) \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{A2}] \quad = \quad \left( \begin{array}{l} \frac{d}{dx}\,\mathrm{sen}(\cos(\tan(x))) \\ = \mathrm{sen}'(\cos(\tan(x)))\frac{d}{dx}\cos(\tan(x)) \\ = \mathrm{sen}'(\cos(\tan(x)))\cos'(\tan(x))\tan'(x) \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{A3}] \quad = \quad \left( \begin{array}{l} \frac{d}{dx} w(z(y(x))) \\ = w'(z(y(x)))\frac{d}{dx}z(y(x)) \\ = w'(z(z(x)))z'(y(x))y'(x) \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{A4}] \quad = \quad \left( \begin{array}{l} \frac{d}{dx} w(z(y(x))) \\ = w_z(z(y(x)))\frac{d}{dx}z(y(x)) \\ = w_z(z(z(x)))z_y(y(x))y_x(x) \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{A5}] \quad = \quad \left( \begin{array}{l} \frac{d}{dx} w \\ = w_z\frac{d}{dx}z \\ = w_z z_y y_x \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} y = y(x) \\ z = z(y) = z(y(x)) \\ w = w(z) = w(z(y)) = w(z(y(z))) \end{array}$$

# Dicas pro exercício 10 (cont.)

O [A1] é a versão em "notação de matemáticos".
O [A1] é a versão mais geral.
O [A2] é um caso particular do [A1].
O [A3] é uma "versão renomeada" do [A1].
O [A4] é uma "versão abreviada" do [A3].

Toda vez que a gente tiver dúvidas sobre como fazer contas
numa notação como a do [A5] a gente vai expandir ele pra notação do [A4], depois renomear as funções "que têm nomes de variáveis", como $y(x) \rightsquigarrow f(x)$, depois fazer as contas na "notação de matemáticos", e depois voltar pra "notação de físicos"...

Ou seja: se $y = y(x)$, $z = z(y)$ e $w = w(z)$,

$$\begin{array}{rl} & \frac{d}{dx}w =? \\ \rightsquigarrow & \frac{d}{dx}w(z(y(x))) =? \\ \rightsquigarrow & \frac{d}{dx}h(g(f(x))) =? \end{array}$$

e a gente tem que escrever os nomes novos...por exemplo:

$$\begin{array}{l} y = y(x) = h(x), \\ z = z(y) = g(y), \\ w = w(z) = f(z) \end{array}$$

e aí a gente calcula $\frac{d}{dx}h(g(f(x)))$ e depois traduz as contas de volta pra "notação de físicos".

Lembre que eu nunca vi esse método de tradução explicado direito, então o que está aqui é uma *tentativa* de explicá-lo...

Ah, e se a gente se perder nas contas na notação do [A1] a gente pode tentar fazer um caso particular, como o [A2], e depois voltar pro [A1]...

**Uma pirâmide**

(A gente viu isto na aula de 2022may20.)

O objetivo desta aula e das próximas é fazer vocês aprenderem a olhar pra algo como isso aqui...

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

...e verem uma pirâmide.

## Uma pirâmide (2)

Note que isto é *muito* diferente da noção de função de Cálculo 1... não estamos dizendo o domínio da função $F(x,y)$ do slide anterior, não estamos dando uma fórmula pra ela, e só estamos dando o valor dela em alguns pontos...

A figura do slide anterior só define uma função se 1) a gente diz que ela representa a função mais simples possível que assume aqueles valores, 2) se todo mundo tem a mesma noção de "função mais simples possível", e 3) se não estamos num caso ambíguo.

Releia isto aqui, sobre "adivinhar trajetórias":

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-vetor-tangente.pdf#page=7

No diagrama de numerozinhos do slide anterior o leitor precisa "adivinhar" que a superfície $z = F(x,y)$ é feita de pedaços de planos.

# Low Poly

Computadores preferem pensar que superfícies 3D são feitas de triângulos — veja o golfinho abaixo e a página da Wikipedia sobre "Low Poly"— mas humanos preferem imaginar que triângulos vizinhos que estão no mesmo plano em $\mathbb{R}^3$ são grudados e viram polígonos mais complicados... Além disso qualquer diagrama de numerozinhos pode ser triangulado de vários jeitos, e humanos costumam achar que a triangulação da pirâmide acima à direita é "mais natural" que a triangulação de baixo...

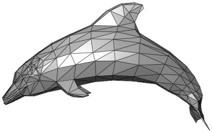
Assista o vídeo sobre "funções quadráticas" (a partir do 4:05) pra entender como nós vamos usar diagramas de numerozinhos pra superfícies que não precisam ser compostas de polígonos, e o vídeo sobre "cabos na diagonal" pra entender essa história das triangulações "mais naturais".

Links:

`https://en.wikipedia.org/wiki/Low_poly`

`http://www.youtube.com/watch?v=2noSv8hyNIk`
`http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas.mp4`

`http://www.youtube.com/watch?v=nxsIK0tPWAI`
`http://angg.twu.net/eev-videos/2021-2-c3-cabos-na-diagonal.mp4`



| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Regiões**

No próximo exercício vamos considerar que o plano está divido nestas 5 regiões, que vamos chamar de $N$, $W$, $E$, $S$, e $B$ — faces Norte, Oeste, Leste, Sul e “base”...

$$\begin{array}{ccccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&1&2&2&2&1&0&0\\
0&0&1&2&3&2&1&0&0\\
0&0&1&2&2&2&1&0&0\\
0&0&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}$$

# Regiões (2)

As definições do $f_1, f_2, \ldots, f_5$ à direita definem a mesma função, e a definição do $f_5(x)$ é uma tradução "pra notação com '$\in$'s" da definição do $f_4(x)$...

Muitos matemáticos — e livros, como por exemplo os do Guidorizzi — consideram que as definições do $f_4(x)$ e do $f_5(x)$ são ruins porque as condições, ou "regiões", depois dos "quando"s não são disjuntas, e aí essas definições "só fazem sentido" se a gente mostrar que quando $x \in (-\infty, 2] \cap [2, 4]$ temos $2 = x$, e que quando $x \in [2, 4] \cap [4, -\infty)$ temos $x = 4$...

A definição $f_1(x)$ por um gráfico nos permite pular certos detalhes. É "óbvio" que ela corresponde a uma definição por casos com três casos diferentes, mas com a definição pelo gráfico a gente não precisa definir se o ponto $x = 2$ pertence à primeira região ou à segunda, e nem se o ponto $x = 4$ pertence à segunda região ou à terceira...

Dá pra gente definir a pirâmide do slide anterior "de um jeito que deixaria o Guidorizzi feliz" por uma definição por casos como a definição do $F_P(x)$ à direita, em que cada uma das funções $F_B, F_N, F_W, F_E, F_S$ é um "plano", isto é, é da forma $a + bx + cy$, e os conjuntos $B, N, W, E, S$ são descritos formalmente de jeitos como este aqui...

$$S \quad = \quad \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y,\ 1 \leq y,\ x + y \leq 8 \,\}$$

Dê uma olhada nos slides 6 e 7 daqui:
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-infs-e-sups.pdf#page=6`
Daqui a algumas aulas nós vamos fazer um monte de exercícios de traduzir entre notação de conjuntos e representações gráficas — nós vamos precisar disso pra entender conjuntos abertos em fechados em $\mathbb{R}^2$ — mas por enquanto nós vamos definir regiões do plano por figuras.

$f_1(x) \quad =$ 

$$f_2(x) \quad = \quad \begin{cases} 2 & \text{quando } x < 2, \\ x & \text{quando } 2 \leq x \leq 4, \\ 4 & \text{quando } 4 < x \end{cases}$$

$$f_3(x) \quad = \quad \begin{cases} 2 & \text{quando } x \leq 2, \\ x & \text{quando } 2 < x < 4, \\ 4 & \text{quando } 4 \leq x \end{cases}$$

$$f_4(x) \quad = \quad \begin{cases} 2 & \text{quando } x \leq 2, \\ x & \text{quando } 2 \leq x \leq 4, \\ 4 & \text{quando } 4 \leq x \end{cases}$$

$$f_5(x) \quad = \quad \begin{cases} 2 & \text{quando } x \in (-\infty, 2], \\ x & \text{quando } x \in [2, 4], \\ 4 & \text{quando } x \in [4, +\infty) \end{cases}$$

$$F_P(x) \quad = \quad \begin{cases} F_B(x, y) & \text{quando } (x, y) \in B, \\ F_N(x, y) & \text{quando } (x, y) \in N, \\ F_W(x, y) & \text{quando } (x, y) \in W, \\ F_E(x, y) & \text{quando } (x, y) \in E, \\ F_S(x, y) & \text{quando } (x, y) \in S, \end{cases}$$

**Exercício 11.**
Faça o diagrama de numerozinhos de cada uma das superfícies $z = F(x, y)$ abaixo. Desenhe os numerozinhos nos pontos com $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ — ou seja, 25 numerozinhos em cada item.

a) $F(x, y) = 2x$
b) $F(x, y) = 3y$
c) $F(x, y) = 2x + 3y$
d) $F(x, y) = 10 + 2x + 3y$

**Exercício 12.**
Mostre que se $z = F(x, y)$ é um plano com equação $F(x, y) = a + bx + cy$ então isto aqui vale:

$$\forall (x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2.\ \Delta z = b\Delta x + c\Delta y.$$

## Exercício 13.

A pirâmide dos slides anteriores pode ser descrita formalmente por uma definição por casos como esta aqui,

$$z \;=\; F_P(x) \;=\; \begin{cases} F_B(x,y) & \text{quando } (x,y) \in B, \\ F_N(x,y) & \text{quando } (x,y) \in N, \\ F_W(x,y) & \text{quando } (x,y) \in W, \\ F_E(x,y) & \text{quando } (x,y) \in E, \\ F_S(x,y) & \text{quando } (x,y) \in S, \end{cases}$$

onde cada um dos $F_R(x,y)$, onde $R$ é $B, N, E, W$ ou $S$, é uma equação de um plano — ou seja, é "da forma $a+bx+cy$". Descubra quais são estas equações de planos e escreva a sua resposta neste formato aqui, mas com os números certos:

$$\begin{array}{rcl} F_B(x,y) &=& 2+3x+4y \\ F_N(x,y) &=& 5+6x+7y \\ F_W(x,y) &=& 8+9x+10y \\ F_E(x,y) &=& 11+12x+13y \\ F_S(x,y) &=& 14+15x+16y \end{array}$$

**Exercício 14 (“barranco”).**

No exemplo da pirâmide a gente começou com um diagrama de numerozinhos e aí encontrou um modo de dividir o plano em 5 regiões que fazia com que todos os numerozinhos numa mesma região ficassem no mesmo plano. Faça a mesma coisa com o diagrama de numerozinhos abaixo — você vai precisar de pelo menos 6 regiões.

$$\begin{array}{ccccccccc}
4&4&4&4&4&4&4&4&4\\
4&4&4&4&4&4&4&4&4\\
3&3&3&3&4&4&4&4&4\\
2&2&2&2&3&4&4&4&4\\
1&1&1&1&2&3&4&4&4\\
0&0&0&0&1&2&3&4&4\\
0&0&0&0&0&1&2&2&2\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}$$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

# Exercício 15.

Lembre que em planos a fórmula da aproximação linear

$$\begin{array}{rcl} F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) & \approx & F(x_0,y_0) \\ & + & F_x(x_0,y_0)\Delta x \\ & + & F_y(x_0,y_0)\Delta y \end{array}$$

dá resultados exatos...

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Seja $z = F(x,y)$ a função que dá a superfície da pirâmide da figura à direita. Descubra os valores de:

a) F(1.5, 3)
b) F(1.1, 3)
c) F(5.1, 3)
d) F(5.1, 2)
e) F(5.2, 2.3)
f) F(5.2, 1.9)
g) F(3.1, 2.1)
h) F(2.9, 1.9)

Tente fazer as contas de cabeça.
Se você se enrolar faça as contas todas explicitamente, e use os "truques de tradução" das páginas 6 e 7 pra fazer as contas da forma mais clara possível... depois esconda as suas contas e tente obter todos os resultados de novo de cabeça.

## Exercício 16.

Seja $z = F(x, y)$ a função que dá a superfície da pirâmide com duas faces extras da figura à direita. Descubra os valores de:

a) F(2.1, 2.1)
b) F(2.5, 2.5)
c) F(2.6, 2.6)

fazendo as contas de cabeça.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

# Derivada direcional (Bortolossi)

O Bortolossi define a derivada direcional deste jeito, na p.296 do capítulo 8 dele:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t}$$

Digamos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que os argumentos da $f$ se chamem $x$ e $y$, que $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$, que o vetor $\mathbf{v}$ seja $(\alpha, \beta)$, e que $z = z(x, y) = f(x, y)$.

**Exercício 17.**
Seja $f(x, y) = z(x, y) = F(x, y)$, onde $F(x, y)$ é a pirâmide do exercício 15 (figura à direita).
Sejam $\mathbf{p} = (x_0, y_0) = (2, 3)$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{(\alpha, \beta)} = \overrightarrow{(2, 0)}$.
Calcule $\frac{f(\mathbf{p}+t\cdot\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{t}$ para os seguintes valores de $t$:

a) $t = 1$
b) $t = 2$
c) $t = 3$
d) $t = 1/2$
e) $t = 1/4$
f) $t = -1$
g) $t = -1/2$
h) $t = -1/4$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

**Exercício 18.**
A partir do que você obteve no exercício 17, qual você acha que deve ser o valor de $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{(2,0)}}((2,3))$?

**Exercício 19.**
...e o valor de $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{(1,0)}}((2,3))$?

# O gradiente

Obs: esse exercício aqui vai ser totalmente reescrito depois! Leia a definição de gradiente na página p.298 do capítulo 8 do Bortolossi. Tente entendê-la usando as dicas abaixo.

Se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, então:

a) $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = F_x(x_0, y_0)$,

b) $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial \overrightarrow{(1,0)}}(x_0, y_0)$,

c) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial \overrightarrow{(0,1)}}(x_0, y_0)$

d) $\nabla F = \overrightarrow{(F_x, F_y)}$

**Exercício 20.**

a) Usando a $F$ da pirâmide mais simples, calcule: $\nabla F(2,4), \nabla F(4,2), \nabla F(6,4), \nabla F(4,6)$.

b) Represente graficamente $(x_0, y_0) + \nabla F(x_0, y_0)$ para estes valores de $(x_0, y_0)$: $(2,4), (4,2), (6,4), (4,6)$.

c) Seja $G$ a função da pirâmide torta do mini-teste. Calcule: $\nabla G(5,3), \nabla G(8,3), \nabla G(8,6), \nabla G(5,6)$.

d) Represente graficamente $G(x,y) + \nabla G(x,y)$ para cada um dos 4 pontos do item (c).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 4 | 2 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Exercício 21.**
Leia a definição de curvas de nível nas páginas 97 e 98 do capítulo 3 do Bortolossi.

a) Seja $F(x,y) = 2x + y$.

b) Faça o diagrama de numerozinhos da $F(x,y)$ para os pontos com $x,y \in \{0,1,2,3\}$.

c) Desenhe quatro curvas de nível diferentes da $F(x,y)$ sobre o diagrama do item (b).

d) Represente graficamente $F + \nabla F$ para cada um destes 16 pontos do (b). Isto vai dar 16 vetores, cada um apoiado num dos numerozinhos.

**Exercício 22.**
Faça a mesma coisa que você fez no exercício 21, mas agora para $F(x,y) = 3x - 2y$.

**Exercício 23.**
Faça a mesma coisa que você fez nos exercício 21 e 22, mas agora para
$F(x,y) = \frac{x^2+y^2}{10}$ e
$x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

**Exercício 24.**
Faça a mesma coisa que você fez no exercício 23, mas agora para
$F(x,y) = \frac{xy}{10}$.