

Cálculo 2 - 2025.1

Aulas 26 e 27: mais mudanças de variáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

[CederjC2V2p19](#) (p.17) 17. Substituição simples
[CederjC2V2p27](#) (p.25) 18. Substituição simples - continuação
[CederjC2V2p31](#) (p.29) ou escrevemos todo o integrando com a variável $t...$
[CederjC2V2p35](#) (p.33) 19. Integração por partes
[CederjC2V2p45](#) (p.43) 20. Integração de potências e produtos de funções trigonométricas
[CederjC2V2p55](#) (p.53) 21. Integração de potências e produtos de funções trigonométricas
[CederjC2V2p65](#) (p.63) 22. Substituição trigonométrica
[CederjC2V2p68](#) (p.66) Os três casos típicos
[CederjC2V2p103](#) (p.101) 25. Aulas de exercícios

Links da aula 8:

[2hQ21](#) Quadros da aula 8 (4a, 12/set/2023)
[StewPtCap5p39](#) (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas
[StewPtCap5p48](#) (p.369) 5.5 A Regra da Substituição
[StewPtCap7p5](#) (p.420) 7.1 Integração por Partes
[2gT45](#) (2023.1) Mudança de variável: exemplo
[2gT46](#) (2023.1) Mudança de variável: caixinhas

Mudança de variável na integral definida (MVD):

[2eT131](#) (t-ints, p.12) Uma figura pra mudança de variável
[2fT49](#) Meu PDF de 2022.2 sobre mudança de variáveis

Mudança de variável na integral indefinida (MVI):

[2eT133](#) (t-ints, p.14) Um exemplo com contas
[2eT135](#) (t-ints, p.16) Outro exemplo com contas
[Leit5p13](#) (p.296) A regra da cadeia para a antidiferenciação
[Leit9p10](#) (p.537) Integração de potências de sen e cos
[Miranda189](#) 6.2. Integração por substituição
[Miranda192](#) Exemplo 6.6
[Miranda193](#) Não podemos
[Miranda196](#) Exercícios
[Miranda255](#) 8.3 Integrais Trigonométricas

[Thomas55p11](#) (p.376) Theorem 5: Substitution in definite integrals

[Thomas55p3](#) (p.370) Theorem 5: The substitution rule

Video do Reginaldo:

<https://www.youtube.com/watch?v=PTCujrEBc4g>

Introdução

O Stewart explica o truque da mudança de variável na integral usando *variáveis dependentes* e *diferenciais*. Por exemplo, se x é a variável independente, u é a variável dependente, e a relação entre elas é $u = g(x) = 2x$, então temos

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}2x = 2$$

e:

$$\int \underbrace{\sin(\underbrace{2x}_u)}_{\underbrace{\frac{du}{dx}}_{du}} dx = \int \sin(u) du$$

Dê uma olhada:

[StewPtCap1p5](#) (p.10) variável dependente

[StewPtCap3p75](#) (p.228) Diferenciais

[StewPtCap5p39](#) (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas

[StewPtCap5p48](#) (p.369) 5.5 A Regra da Substituição

Só que contas com variáveis dependentes e diferenciais são difíceis de justificar formalmente! A gente viu como expandir contas curtas em que certos passos têm justificativas complicadas em contas maiores mas em que cada passo tem uma justificativa bem simples... se a gente tenta fazer isso com a igualdade entre integrais acima a gente acaba descobrindo que as regras pra variáveis dependentes e diferenciais são bem complicadas.

Então eu vou fazer o seguinte. A regra da mudança de variável na integral definida, que o Stewart explica nesta página,

[StewPtCap5p51](#) (p.372) ...para as integrais definidas é bem fácil de demonstrar usando só o [\[TFC2\]](#).

Eu vou usar estas quatro definições aqui – onde [\[MVD\]](#) é a fórmula pra mudança de variável na integral definida, [\[MVI\]](#) é a fórmula pra mudança de variável na integral indefinida, [\[MVD4\]](#) é uma demonstração da [\[MVD\]](#) com 4 igualdades [\[MVI3\]](#) é uma demonstração da [\[MVI\]](#) com 3 igualdades,

$$\begin{aligned} \text{[MVD]} &= \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \right) \\ \text{[MVI]} &= \left(\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right) \\ \text{[MVD4]} &= \left(\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx &= F(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= F(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{aligned} \right) \\ \text{[MVI3]} &= \left(\begin{aligned} \int f(g(x))g'(x) dx &= F(g(x)) \\ &= F(u) \\ &= \int f(u) du \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

e a gente vai ver que dá pra tratar algumas destas fórmulas e demonstrações como abreviações pras outras, e que dá pra expandir as versões mais abreviadas em outras em que os passos são mais fáceis de justificar.

Um exemplo

Isto aqui é um exemplo de como contas com mudança de variável costumam ser feitas na prática:

$$\begin{aligned}
 & \int 2 \cos(3x + 4) dx \\
 &= \int 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 &= \frac{2}{3} \int \cos u du \\
 &= \frac{2}{3} \sin u \\
 &= \frac{2}{3} \sin(3x + 4)
 \end{aligned}$$

É necessário indicar em algum lugar que a relação entre a variável nova e a antiga é esta: $u = 3x + 4$.

Compare as contas acima, que não têm nem os limites de integração nem as barras de diferença, com as da coluna da direita:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=a}^{x=b} 2 \cos(3x + 4) dx \\
 &= \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 &= \frac{2}{3} \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} \cos u du \\
 &= \frac{2}{3} \left((\sin u) \Big|_{u=3a+4}^{u=3b+4} \right) \\
 &= \frac{2}{3} \left((\sin(3x + 4)) \Big|_{x=a}^{x=b} \right)
 \end{aligned}$$

Nós vamos tratar a versão à esquerda como uma abreviação pra versão da direita. Note que pra ir da versão “completa” pra “abreviada” é super fácil, é só apagar os limites de integração e as barras de diferença – mas pra ir da versão “abreviada” pra “completa” a gente precisa reconstruir os limites de integração e as barras de diferença, o que é bem mais difícil.

Caixinhas de anotações

O meu truque preferido pra não me enrolar nas contas de uma mudança de variável é fazer uma caixinha de anotações como essa aqui,

$$\left[\begin{array}{l} u = 3x + 4 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x + 4) = 3 \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ du = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} du \end{array} \right]$$

na qual: a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova – que nesse exemplo é $u = 3x + 4$, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras como:

$$dx = \frac{1}{3} du$$

Durante quase todo o curso de C2 a gente vai tratar esse tipo de coisa como uma igualdade entre expressões incompletas – mais ou menos como se a gente estivesse dizendo isso aqui:

$$+20) = /99]$$

Na caixinha à esquerda eu colori as linhas que são gambiarras em vermelho.

Repare que se a gente soubesse usar diferenciais a gente saberia dar um sentido pras igualdades que envolvem diferenciais, e que eu marquei em vermelho... mas a gente não sabe, então a gente vai considerar que elas são gambiarras que a gente só vai entender direito em Cálculo 3.

Aqui tem um exemplo grande:

2fT112 (C2-P1, p.5) Questão 1: gabarito

Os detalhes horríveis

Nesta página aqui – [Miranda193](#) – o Miranda diz “Não podemos calcular uma integral que possui tanto um x e um u nela”, mas ele não explica porquê... se em

$$\int_{x=a}^{x=b} 2 \cos(u) dx$$

esse u fosse uma abreviação para $3x + 4$ essa integral acima seria equivalente à do início do slide anterior, né?... =(

Neste slide eu vou tentar contar o que eu sei sobre como o método da substituição funciona – *pra convencer vocês de que não vale a pena vocês tentarem entender os detalhes agora.*

Toda mudança de variável numa integral definida é consequência da igualdade (13) do slide “Contas (2)”. Por exemplo, compare:

$$\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} g(h(x))h'(x) dx &= \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g(u) du \\ \int_{x=a}^{x=b} 2 \cos(3x+4) dx &= \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} du \end{aligned}$$

A gente pode tentar descobrir qual é a substituição certa passo a passo, começando pelas funções mais simples.... eu faria assim: olhando pra parte direita eu chuto que $g(u) = 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3}$; olhando pra parte esquerda eu chuto que $h(x) = 3x + 4$, e daí $h'(x) = 3$; aí eu testo esta substituição aqui,

$$(13) \begin{bmatrix} g(u) := 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} \\ h(x) := 3x + 4 \\ h'(x) := 3 \end{bmatrix}$$

e vejo que o resultado dela é *equivalente* (mas não igual!!!) à última igualdade da coluna da esquerda – não preciso nem substituir o a e o b .

Preciso reescrever este slide!

Os detalhes horríveis (2)

Estas contas aqui,

$$\begin{aligned} u &= x^4 \\ \frac{du}{dx} &= 4x^3 \\ du &= \frac{du}{dx} dx \\ &= 4x^3 dx \end{aligned}$$

fazem sentido se a gente considerar que:

1. x é uma variável independente,
2. u é uma variável dependente, com $u = u(x) = x^4$,
3. dx é uma variável independente,
4. du é uma variável dependente, com $du = \frac{du}{dx} dx$,
5. estas regras sobre diferenciais valem: [Leit4p61](#) (p.275),
6. estas regras sobre variáveis dependentes valem: [Stew14p53](#) (p.951),
7. o dx num $\int f(x) dx$ funciona como uma diferencial.

Eu já perguntei pra vários matemáticos fodões que eu conheço – incluindo os desenvolvedores do Maxima, na mailing list – onde eu posso encontrar alguma formalização das regras de como lidar com variáveis dependentes, diferenciais e mudança de variável na integral indefinida, e todos eles me responderam a mesma coisa: “*não faça a menor idéia! Eu sei algumas das regras mas não todas, e não sei onde você pode procurar...*” =(

Moral: **é melhor a gente tratar o $du = 4x^3 dx$ como uma gambiarra...**

Caixinhas com mais anotações

$$\begin{aligned}
 \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^7 d\theta &= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^6 \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 ((\cos \theta)^2)^3 \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (1 - (\operatorname{sen} \theta)^2)^3 \cos \theta d\theta \\
 &= \int s^4 (1 - s^2)^3 ds
 \end{aligned}
 \left[\begin{array}{l} \operatorname{sen} \theta = s \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \operatorname{sen} \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ \cos \theta d\theta = ds \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^7 d\theta &= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^6 \cos \theta d\theta \\
 &= \int s^4 (1 - s^2)^3 ds
 \end{aligned}
 \left[\begin{array}{l} \operatorname{sen} \theta = s \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \operatorname{sen} \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ \cos \theta d\theta = ds \\ (\cos \theta)^2 = 1 - (\operatorname{sen} \theta)^2 \\ (\cos \theta)^2 = 1 - s^2 \\ (\cos \theta)^6 = (1 - s^2)^3 \end{array} \right]$$

Caixinhas com mais anotações (2)

$$\begin{aligned}
 \int s\sqrt{1-s^2} ds &= \int (\text{sen } \theta) \sqrt{1 - (\text{sen } \theta)^2} \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\text{sen } \theta) \sqrt{(\cos \theta)^2} \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\text{sen } \theta)(\cos \theta) \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\text{sen } \theta)(\cos \theta)^2 d\theta
 \end{aligned}
 \quad \left[\begin{array}{l} s = \text{sen } \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \text{sen } \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \int s\sqrt{1-s^2} ds &= \int (\text{sen } \theta)(\cos \theta) \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\text{sen } \theta)(\cos \theta)^2 d\theta
 \end{aligned}
 \quad \left[\begin{array}{l} s = \text{sen } \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \text{sen } \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ s^2 = (\text{sen } \theta)^2 \\ 1 - s^2 = 1 - (\text{sen } \theta)^2 \\ 1 - s^2 = (\cos \theta)^2 \\ \sqrt{1 - s^2} = \cos \theta \\ \arcsen s = \arcsen \text{sen } \theta \\ \arcsen s = \theta \\ \theta = \arcsen s \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds &= \int \frac{1}{\cos \theta} \cos \theta d\theta \\
 &= \int 1 d\theta \\
 &= \theta \\
 &= \arcsen s
 \end{aligned}$$

Caso particular 1 (MVD)

$$[\text{MVD}] \quad \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du$$

$$[\text{MVD}] \quad \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} \quad \int_{x=a}^{x=b} f(2x) \cdot 2 dx = \int_{u=2a}^{u=2b} f(u) du$$

$$[\text{MVD}] \quad \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \sin u \end{bmatrix} \quad \int_{x=a}^{x=b} \sin(2x) \cdot 2 dx = \int_{u=2a}^{u=2b} \sin u du$$

$$[\text{MVD4}] \quad \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = \begin{pmatrix} F(g(x))|_{x=a}^{x=b} \\ = F(g(b)) - F(g(a)) \\ = F(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVD4}] \quad \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} \quad \int_{x=a}^{x=b} f(2x) \cdot 2 dx = \begin{pmatrix} F(2x)|_{x=a}^{x=b} \\ = F(2b) - F(2a) \\ = F(u)|_{u=2a}^{u=2b} \\ = \int_{u=2a}^{u=2b} f(u) du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVD4}] \quad \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \sin u \end{bmatrix} \quad \int_{x=a}^{x=b} \sin(2x) \cdot 2 dx = \begin{pmatrix} F(2x)|_{x=a}^{x=b} \\ = F(2b) - F(2a) \\ = F(u)|_{u=2a}^{u=2b} \\ = \int_{u=2a}^{u=2b} \sin u du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVD4}] \quad \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \sin u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} \quad \int_{x=a}^{x=b} \sin(2x) \cdot 2 dx = \begin{pmatrix} (-\cos 2x)|_{x=a}^{x=b} \\ = (-\cos 2b) - (-\cos 2a) \\ = (-\cos u)|_{u=2a}^{u=2b} \\ = \int_{u=2a}^{u=2b} \sin u du \end{pmatrix}$$

Caso particular 1 (MVI)

$$[\text{MVI}] \quad = \left(\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\int f(2x) \cdot 2 dx = \int f(u) du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \sin u \end{bmatrix} = \left(\int \sin(2x) \cdot 2 dx = \int \sin u du \right)$$

$$[\text{MVI3}] \quad = \begin{pmatrix} \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \\ = F(u) \\ = \int f(u) du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int f(2x) \cdot 2 dx = F(2x) \\ = F(u) \\ = \int f(u) du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \sin u \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int \sin(2x) \cdot 2 dx = F(2x) \\ = F(u) \\ = \int \sin u du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \sin u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int \sin(2x) \cdot 2 dx = (-\cos 2x) \\ = (-\cos u) \\ = \int \sin u du \end{pmatrix}$$

Caso particular 2 (MVD)

$$[\text{MVD}] \quad = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \right)$$

$$[\text{MVD}] \quad \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x^2) \cdot 2x dx = \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u) du \right)$$

$$[\text{MVD}] \quad \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \sin u \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} \sin(x^2) \cdot 2x dx = \int_{u=a^2}^{u=b^2} \sin u du \right)$$

$$[\text{MVD4}] \quad = \left(\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx &= F(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= F(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{aligned} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \quad \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} f(x^2) \cdot 2x dx &= F(x^2) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= F(b^2) - F(a^2) \\ &= F(u) \Big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ &= \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u) du \end{aligned} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \quad \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \sin u \end{bmatrix} = \left(\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} \sin(x^2) \cdot 2x dx &= F(x^2) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= F(b^2) - F(a^2) \\ &= F(u) \Big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ &= \int_{u=a^2}^{u=b^2} \sin u du \end{aligned} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \quad \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \sin u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} \sin(x^2) \cdot 2x dx &= (-\cos x^2) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= (-\cos b^2) - (-\cos a^2) \\ &= (-\cos u) \Big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ &= \int_{u=a^2}^{u=b^2} \sin u du \end{aligned} \right)$$

Caso particular 2 (MVI)

$$\text{[MVI]} \quad = \left(\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right)$$

$$\text{[MVI]} \quad \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\int f(x^2) \cdot 2x dx = \int f(u) du \right)$$

$$\text{[MVI]} \quad \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \sin u \end{bmatrix} = \left(\int \sin(x^2) \cdot 2x dx = \int \sin u du \right)$$

$$\text{[MVI3]} \quad = \left(\begin{array}{l} \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \\ = F(u) \\ = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVI3]} \quad \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int f(x^2) \cdot 2x dx = F(x^2) \\ = F(u) \\ = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVI3]} \quad \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \sin u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int \sin(x^2) \cdot 2x dx = F(x^2) \\ = F(u) \\ = \int \sin u du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVI3]} \quad \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \sin u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int \sin(x^2) \cdot 2x dx = (-\cos x^2) \\ = (-\cos u) \\ = \int \sin u du \end{array} \right)$$

Caso particular 3 (MVI)

$$\text{[MVI]} \quad = \left(\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right)$$

$$\text{[MVI]} \quad \begin{bmatrix} g(x) := \text{sen } x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left(\int f(\text{sen } x) \cos x dx = \int f(u) du \right)$$

$$\text{[MVI]} \quad \begin{bmatrix} g(x) := \text{sen } x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1 - u^2)^2 \end{bmatrix} = \left(\int (\text{sen } x)^3(1 - (\text{sen } x)^2)^2 \cos x dx = \int u^2(1 - u^2)^2 du \right)$$

$$\text{[MVI3]} \quad = \left(\begin{array}{l} \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \\ = F(u) \\ = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVI3]} \quad \begin{bmatrix} g(x) := \text{sen } x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int f(\text{sen } x) \cos x dx = F(\text{sen } x) \\ \phantom{\int f(\text{sen } x) \cos x dx} = F(u) \\ \phantom{\int f(\text{sen } x) \cos x dx} = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVI3]} \quad \begin{bmatrix} g(x) := \text{sen } x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1 - u^2)^2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int (\text{sen } x)^3(1 - (\text{sen } x)^2)^2 \cos x dx = F(\text{sen } x) \\ \phantom{\int (\text{sen } x)^3(1 - (\text{sen } x)^2)^2 \cos x dx} = F(u) \\ \phantom{\int (\text{sen } x)^3(1 - (\text{sen } x)^2)^2 \cos x dx} = \int u^2(1 - u^2)^2 du \end{array} \right)$$

O macaco, de novo

Estas duas igualdades são falsas

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - (\operatorname{sen} \theta)^2} &= \cos \theta \\ \operatorname{arcsen} \operatorname{sen} \theta &= \theta\end{aligned}$$

quando $\theta = \pi \dots$ confira!

Mas elas são verdadeiras para $\theta = 0$, e para todo θ num certo intervalo em torno do 0 que eu não quero contar qual é.

Lembre quem em Cálculo 2 a gente vai primeiro fazer as contas como o macaco que faz todas as contas como se tudo funcionasse, e a gente vai deixar pra checar os detalhes, como se θ estivesse no intervalo certo, só no final, depois de termos feito as contas todas.

O Leithold é super cuidadoso nas contas e nesses detalhes como os domínios das funções e o intervalo onde mora o θ , mas a maioria dos outros livros de Cálculo 2 que eu conheço não são – eles são meio porcalhões com esses detalhes... e a gente também vai ser, senão não vai dar tempo de cobrir o suficiente da matéria.

O truque dos intervalos

Dê uma olhada nas primeiras páginas daqui:

Leit5p3 5.1. Antidiferenciação

O Leithold usa expressões como “num intervalo I ”, “para todo $x \in I$ ” e “definidas no mesmo intervalo” um montão de vezes. O truque de usar sempre intervalos resolve esse esse problema daqui super bem:

2fT24 Meme: expanding brain, versão ln

A minha definição preferida pra integral indefinida,

2fT23 Outra definição pra integral indefinida

também resolve o problema – de um modo bem mais simples, e que é suficiente pro tipo de conta que a gente tem que treinar em Cálculo 2.

MVI

A nossa fórmula pra mudança de variável na integral indefinida vai ser esta aqui:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du = \left(\int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right)$$

Dá pra demonstrar ela deste jeito,

$$\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) = f(u) = \int f'(u) du$$

onde a primeira e a terceira igualdades são consequências do , e a igualdade do meio só vale se tivermos $u = g(x)$.

Os livros demonstram a $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$ de um jeitos que eu nunca achei muito convincentes – ou fingindo que tudo é óbvio, ou “derivando tudo em x ”. As contas abaixo me ajudaram a entender o que acontece quando a gente “deriva tudo em x ”:

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \left(\int f'(g(x))g'(x) dx \right)}_{f'(g(x))g'(x)} = \underbrace{\frac{d}{dx} f(g(x))}_{f'(g(x))g'(x)} = \frac{d}{dx} \underbrace{f(u)}_{f'(g(x))g'(x)} = \frac{d}{dx} \underbrace{\int \underbrace{f'(u)}_{f'(g(x))g'(x)} du}_{f'(g(x))g'(x)}$$

Simplificando raízes quadradas

Na aula de 16/maio/2023 você aprendeu – na prática, não vendo uma definição formal – o que é transformar uma integral mais difícil numa integral mais fácil, que nós sabemos integrar...

a) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2} ds$. Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2} dx$ em algo que você sabe integrar.

b) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2} dx$ em algo que você sabe integrar.

c) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2}^k ds$ para qualquer valor de k .

Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2}^{42} dx$ em algo que você sabe integrar.

d) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^{42} dx$ em algo que você sabe integrar.

e) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^k dx$ em algo que você sabe integrar.

f) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^k dx$ em algo que você sabe integrar.

g) Entenda este truque aqui:

$$\begin{aligned}\sqrt{3^2 - x^2} &= \sqrt{3^2 - 3^2 \frac{1}{3^2} x^2} \\ &= \sqrt{3^2 - 3^2 \left(\frac{x}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{3^2 \left(1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2\right)} \\ &= \sqrt{3^2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} \\ &= 3 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}\end{aligned}$$

Use ele – com adaptações, óbvio – pra transformar $\int \sqrt{25 - x^2} dx$ em algo que você sabe integrar.

h) Use ele pra transformar $\int \sqrt{25 - x^2}^{42} dx$ em algo que você sabe integrar.

i) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2 - x^2}^k dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int x^{20} \sqrt{a^2 - x^2}^k dx$ em algo que você sabe integrar.

Exercício 3

Slogan:

Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável pode ser resolvida por uma mudança de variável só.

Durante a quarentena eu dei algumas questões de prova sobre este slogan. Dê uma olhada:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4>

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=9>

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-P1.pdf#page=15>

a) Resolva a integral abaixo usando uma mudança de variável só (dica: $u = g(h(x))$):

$$\int f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x) dx = ?$$

b) Resolva a integral acima usando duas mudanças de variável. Dica: comece com $u = h(x)$.

O Miranda e o Leithold preferem fazer em um passo só certas mudanças de variáveis que eu prefiro fazer em dois ou três passos. Entenda o exemplo 8.1 do Miranda – o da seção 8.4, na página 264...

<http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#263>

c) ...e descubra como resolver a integral dele fazendo duas mudanças de variáveis ao invés de uma só. A segunda mudança de variável vai ser $s = \sin \theta$, e a primeira eu prefiro não contar qual é – tente usar as idéias do exercício 1 pra descobrir qual ela tem que ser.

Ainda não atualizei este slide!