Cálculo 2 - 2025.1

Aulas 2 a 4: integração e derivação
com o mathologermóvel

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2025.1-C2.html

Links

2fT63 $y \cdot (x_d - x_e)$ e "áreas negativas não existem"
2cT185 Retângulos degenerados

Quadros de algumas aulas:
2jQ3 (2024.2) 24/set/2024
2iQ9 (2024.1) 25/mar/2024
2hQ1 (2023.2) 28/ago/2023
2gQ1 (2023.1) 04/abr/2023
2fQ2 (2022.2) 25/ago/2022

Links da aula 1:
2gT4 Releia a dica 7
2gT11 Atirei o pau no gato
2gT19 Retas reversas
2gT24 Integração e derivação com o Mathologermóvel
2gT27 (p.4) Exercício 1
2gT28 (p.5) Dicas pro exercício 1
CalcEasy03:19 até 12:47

Links da aula 2:
CalcEasy11:35 até 12:47
2gT37 (p.5) O macaco substituidor: EDOs, RC, TFC2
StewPtCap5p9 (p.330) Figuras 11 e 12
StewPtCap5p16 (p.337) A integral definida
StewPtCap5p33 (p.354) TFC, parte 2
StewPtCap5p36 (p.357) Exercícios 19 a 26 (sobre o TFC2)
2fT91 até 2fT93 (p.3 até p.5): A definição da integral

Os slides das próximas páginas são versões ligeiramente reescritas destes slides de outros semestres:

2dT225 (p.4) Gabarito do mini-teste 3 de 2021.2
2eT199 (P1, p.7) eu defini as funções f e g desta forma
2eT200 (P1, p.8) gabarito

Introdução

Nesta parte do curso nós vamos tentar entender
este trecho do vídeo do Mathologer,
CalcEasy03:19 até 12:47

e vamos fazer alguns exercícios –
que podem ser feitos em vários níveis de detalhe.
Leia estes trechos das legendas de uns vídeos meus:
Slogans01:10 até 08:51: sobre chutar e testar
Slogans07:17 até 07:48: ...do tamanho de um apartamento
Visaud45:14 até 52:24: ajustar o nível de detalhe
Slogans1:11:02 até 1:17:42: seja o seu prório Geogebra
Slogans1:39:46 até 1:45:02: ...com quem vale a pena estudar

Leia também estes slides:
2gT4 (intro, p.3) "Releia a Dica 7"
2gT13 (intro, p.12) Sobre Português
2gT14 (intro, p.13) Sobre Português (2)
2gT16 (intro, p.15) Unexpected end of input
2gT19 (intro, p.18) Retas reversas

O que é um caso particular de uma figura?

Vou considerar que as cinco figuras da coluna da direita são numeradas assim: $\begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 4 & & 5 \end{pmatrix}$.

O Leithold usa duas figuras pra explicar o que é o coeficiente angular – ou a inclinação – de uma reta, a figura que á a minha figura 1 é a mais simples das duas figuras dele. Confira:

Leit1p17 (p.16) Discutiremos agora *retas* em $\mathbb{R}^2$

Ele usa uma notação que eu detesto e que eu vou evitar: ele escreve "$P_1(x_1, y_2)$" ao invés de "$P_1 = (x_1, y_2)$".

O Leithold não põe tracinhos nos eixos, e aí a gente não tem como descobrir quais são os valores de x_1, y_1, x_2 e y_2. Isso é de propósito – é pra obrigar a gente a tratar essa figura como um *caso geral*.

A gente pode transformar esse caso geral em casos particulares escolhendo valores para (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Por exemplo, se $(x_1, y_1) = (3, 2)$ e $(x_2, y_2) = (7, 8)$ a gente obtém as figuras 2 e 3 – na figura 3 eu substituí os x_1, y_1, x_2, y_2 nos labels pelos seus valores, e na figura 2 não – e se $(x_1, y_1) = (4, 3)$ e $(x_2, y_2) = (8, 6)$ a gente obtém as figuras 4 e 5.

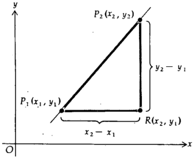
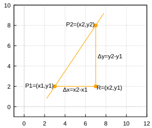
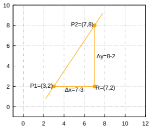
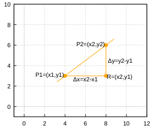
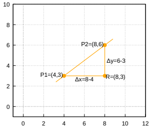


FIGURA 11





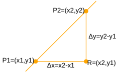




Exercício 0.

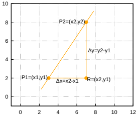
Seja:

[Fig6] $=$



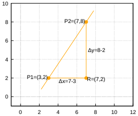
Então:

[Fig6] $\begin{bmatrix}(x_1,y_1) := (3,2)\\(x_2,y_2) := (7,8)\end{bmatrix} =$



ou:

[Fig6] $\begin{bmatrix}(x_1,y_1) := (3,2)\\(x_2,y_2) := (7,8)\end{bmatrix} =$



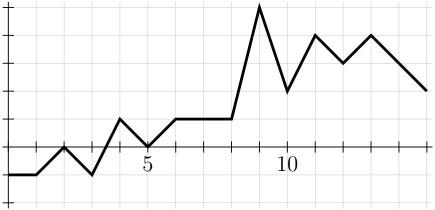
Represente graficamente e calcule $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ em cada um dos casos abaixo:

a) [Fig6] $\begin{bmatrix}(x_1,y_1) := (1,2)\\(x_2,y_2) := (3,4)\end{bmatrix}$

b) [Fig6] $\begin{bmatrix}(x_1,y_1) := (3,4)\\(x_2,y_2) := (1,2)\end{bmatrix}$

c) [Fig6] $\begin{bmatrix}(x_1,y_1) := (1,5)\\(x_2,y_2) := (3,2)\end{bmatrix}$

Exercício 1.
Seja $G(x)$ esta função:

$G(x) \quad =$ 

Relembre como calcular coeficientes angulares e derivadas no olhômetro e faça um gráfico da função $G'(x)$.

Dica 1: $G'(3.5) = 2$.
Dica 2: $G'(4)$ não existe — use uma bolinha vazia pra representar isso no seu gráfico.

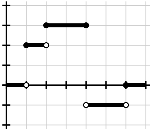
Exercício 1: mais dicas

Pra fazer o exercício 1 você provavelmente vai ter que relembrar algumas coisas sobre inclinação, coeficiente angular, limites laterais, derivadas laterais, e sobre o significado das bolinhas cheias e das bolinhas vazias nos gráficos... links:

Leit1p18 (p.17: inclinação)
Leit1p42 (p.41: bolinhas, domínio, imagem)
StewPtCap1p10 (p.15: círculo cheio e círculo vazio)
Miranda66 (Capítulo 3: Derivadas)
Miranda22 (Seção 1.4: Limites laterais)
Miranda74 (Seção 3.2.3: Derivadas laterais)

2eT70 (p.11) Dicas que eu preparei em 2022.1

Exercício 2.

Seja $f(x)$ =  .

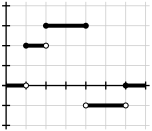
Note que:

$\int_{x=1}^{x=2} f(x)\,dx = 2\cdot(2-1)$,
$\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx = 3\cdot(4-3)$,
$\int_{x=4}^{x=6} f(x)\,dx = -1\cdot(6-4)$,

Calcule:

a) $\int_{x=1.5}^{x=2} f(x)\,dx$
b) $\int_{x=2}^{x=4} f(x)\,dx$
c) $\int_{x=1.5}^{x=4} f(x)\,dx$
d) $\int_{x=1.5}^{x=6} f(x)\,dx$

Exercício 3.

Sejam $f(x) =$ 

e $F(\beta) = \int_{x=2}^{x=\beta} f(x)\,dx$.

a) Calcule $F(2), F(2.5), F(3), \ldots, F(6)$.

b) Calcule $F(1.5), F(1), F(0.5), F(0)$.

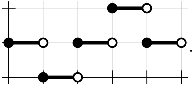
Exercício 4.
No exercício 3 você obteve alguns valores da função $F(\beta)$, mas não todos... por exemplo, você *ainda* não calculou $F(2.1)$.

a) Desenhe num gráfico só todos os pontos $(x, F(x))$ que você calculou nos itens (a) e (b) do exercício 3.
Dica: o conjunto que você quer desenhar é este aqui:
$\{(0, F(0)),\ (0.5, F(0.5)), \ldots, (6, F(6))\}$.

b) Tente descobrir — lendo os próximos slides, assitindo o vídeo, e discutindo com os seus colegas — qual é o jeito certo de ligar os pontos do item (a).

Exercício 5.

Seja

$f(x) \quad =$  .

Faça os gráficos destas funções:

a) $F(x) = \displaystyle\int_{t=2}^{t=x} f(t)\,dt$

b) $G(x) = \displaystyle\int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt$

Dica: comece fazendo uma tabela como esta aqui,

x	$F(x)$
2	
3	
4	
5	
2.5	
3.5	
2.1	
3.1	

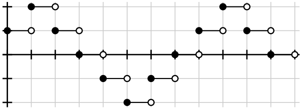
com um monte de pontos pros quais você consegue calcular o $F(x)$ deles de cabeça só olhando pro gráfico, e depois plote estes pontos. Depois faça a mesma coisa pra $G(x)$ *sem fazer a tabela* – desenhe um monte de "pontos fáceis de calcular" direto no seu gráfico.

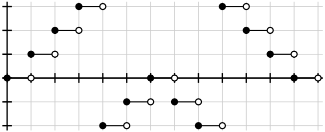
Eu comecei o curso de Cálculo 3 de 2024.1 discutindo algumas técnicas pra descobrir "pontos fáceis de calcular". Veja se os primeiros slides de C3 te ajudam:

3iT4 Pontos mais fáceis de calcular

Exercício 6.

Sejam:

$f(x) =$  ,

$g(x) =$  .

Faça os gráficos destas funções:

a) $F(x) = \int_{t=0}^{t=x} f(t)\,dt$

b) $G(x) = \int_{t=3}^{t=x} g(t)\,dt$

Algumas propriedades da integral

As três propriedades mais básicas da integral definida são estas:

$$\begin{array}{rcll}
k \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &=& \int_{x=a}^{x=b} kf(x)\,dx & (*) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx &=& \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx & (**) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &=& -\int_{x=b}^{x=a} f(x)\,dx & (***) \\
\int_{x=a}^{x=b} k\,dx &=& k(b-a) & (****)
\end{array}$$

$$(*):\qquad k \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} kf(x)\,dx$$

$$(*)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ k:=2 \end{bmatrix}:\qquad 2\cdot\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} 2\cdot f(x)\,dx}$$


$$(*)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ k:=-1 \end{bmatrix}:\qquad (-1)\cdot\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} (-1)\cdot f(x)\,dx}$$


O melhor modo da gente visualizar o que esses propriedades "querem dizer" é comparando a fórmula pro caso geral com casos particulares. Olhe pra figura à direita; ela compara a $(*)$ com dois casos particulares dela – primeiro um caso "normal", em que $k=2$, e depois um caso "estranho" em que $k=-1$...

No caso "estranho" aparecem uns números negativos, ó:

$$\underbrace{(-1)\cdot\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{>0}}_{<0} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4}(-1)\cdot f(x)\,dx}_{<0}$$

...e uma figura que tem "área negativa"!!!

Eu acho a abordagem do Mathologer genial – ele começa dizendo que a distância percorrida é a área (ou a integral) da velocidade, e com isso vários casos estranhos em que aparecem números negativos *começam* a fazer sentido.

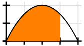
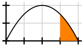
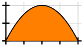
Slogan: a gente quer que as quatro propriedades acima valham sempre – tanto nos casos "normais" quanto nos casos "estranhos".

Links pros livros:
StewPtCap5p22 (p.343)
Leit5p48 (p.331)
MirandaP220

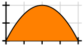
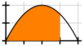
A motivação pro $(***)$ é isso aqui:

$$(**):\quad \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx \;=\; \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$$

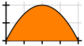
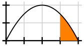
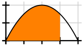
$$(**)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=3 \\ c:=4 \end{bmatrix}:\quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx} + \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx} \;=\; \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}$$

$$(**)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ c:=3 \end{bmatrix}:\quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} + \underbrace{\int_{x=4}^{x=3} f(x)\,dx}_{???} \;=\; \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx}$$

$$\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} - \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx} \;=\; \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx}$$

“Quase retângulos”

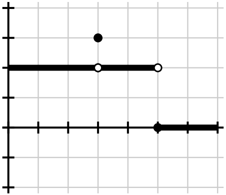
A quarta propriedade é essa aqui:

$$\int_{x=a}^{x=b} k\,dx \quad = \quad k(b-a) \quad (****)$$

A gente quer que ela valha pra todos os valores de k, a e b – incluindo os casos em que k é negativo, que são “retângulos com altura negativa” e pros casos que $a > b$, que são “retângulos que têm base negativa”...

...e além disso a gente quer que ela valha pra casos como o da figura da direita, em que entre $x = 2$ e $x = 5$ o mathologermóvel anda com velocidade constante, 2, exceto em dois instantes – repare que no gráfico a gente tem $f(3) = 3$ e $f(5) = 0$...

Vamos pensar em termos de velocidades e distâncias. Entre $x = 2$ e $x = 5$ o mathologermóvel andou sempre com velocidade 2, exceto por dois instantes de um buzilionésimo de segundo cada um, em que ele andou com velocidades diferentes de 2... esses instantes mudam tão pouco a distância percorrida que a gente vai considerar que eles não mudam a distância percorrida.

$f(x) \;=$ 

$$\begin{array}{rcl}
\int_{x=2}^{x=5} f(x)\,dx & = & \int_{x=2}^{x=5} 2\,dx \\
& = & 2 \cdot (5-2) \\
& = & 2 \cdot 3 \\
& = & 6
\end{array}$$