

Cálculo 2 - 2025.1

Prova suplementar (VS)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

Questão 1

(Total: 6.0 pts)

Lembre que no curso eu mostrei que o meu modo preferido de escrever o “método” para resolver EDOs com variáveis separáveis — “EDOVs” — é o “método” [M] abaixo... eu pus o termo “método” entre aspas porque alguns dos passos da [M] são gambiarras nas quais a gente não pode confiar totalmente, e aí a gente precisa sempre testar as nossas soluções. O [F3] abaixo — a “fórmula” — é uma versão resumida do [M].

$$\begin{aligned}
 \text{[M]} &= \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y) dy = g(x) dx \\ \int h(y) dy = \int g(x) dx \\ \parallel \\ H(y) + C_1 = G(x) + C_2 \\ H(y) = G(x) + C_2 - C_1 \\ = G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \\
 \text{[F3]} &= \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Seja $(*)_1$ esta EDOVS:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x+2)}{2(y-1)} \quad (*_1)$$

a) (0.5 pts) Desenhe os tracinhos do campo de direções da EDO $(*)$ nos pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Aqui você vai ter que desenhar 25 tracinhos e vai ter que caprichar — um tracinho com coeficiente angular $\frac{1}{2}$ tem que ser visualmente bem diferente de um com coeficiente angular 1 e de um com coeficiente angular 2.

b) (0.5 pts) Encontre as duas soluções gerais explícitas da EDO $(*)$ — a solução “positiva” e a “negativa” — e dê nomes para elas.

c) (0.5 pts) Teste a sua solução “negativa”.

d) (0.5 pts) Sejam $P_1 = (2, 4)$, $P_2 = (-2, 2)$, $P_3 = (-2, 0)$ e $P_4 = (-1, 1)$. Para cada desses pontos encontre uma solução particular explícita que passa por ele e dê um nome pra ela.

e) (0.5 pts) Faça os gráficos das soluções que você encontrou no item (d). Dica: as funções que você deve ter encontrado passam por vários pontos com coordenadas inteiras; comece desenhando esses pontos.

Muito importante: leia a página do “Lembre que...”!

Questão 1, continuação

No curso nós vimos um monte de partículas em português, como “seja”, que podem parecer óbvias à primeira vista, mas quando a gente vê a tradução delas pro Maxima a gente consegue reconhecer que elas são operações diferentes, com significados precisos, e que não são nada óbvias – tipo: se você explicar elas pra uma criança fazendo cara de “é óbvio, sua burra!” a criança vai berrar de desespero.

Nós também vimos vários personagens. Imagina que o Alex e o Bob têm que mostrar pro leitor sem nenhuma paciência que um certo ponto não está no gráfico de uma determinada função, e o Alex escreve só “ $6 \neq \sqrt{2+3}$ ”. O leitor sem paciência vai achar isso péssimo, porque não dá pra entender rápido nem qual é o ponto, nem qual é a função, nem quais foram as operações que o Alex usou, nem quais foram os passos. Mas o Bob escreveu uma solução que o leitor sem paciência achou claríssima – o leitor sem paciência conseguiu entender todos os passos dela num instante.

No próximo item “encontrar os resultados certos” vai valer 1.0 e “usar as partículas em português corretamente” vai valer 2.5. Improvise se precisar – se você não souber o modo curto de escrever alguma coisa escreva como der, e se você não souber detalhar algum passo faça ele sem detalhes mesmo. O ideal seria você fazer algo com o Padrão Bob de Qualidade, mas faça o que der e tente não empacar – lembre que o tempo é limitado!

f) (3.5 pts) No item (d) você tinha 4 pontos e 4 funções – ou 4 equações. Quais destes pontos obedecem quais destas equações? Ou, em outras palavras, quais destes pontos estão nos gráficos de quais destas funções?

Questão 2

(Total: 5.0 pts)

Seja:

$$F(x) = \int \frac{4 \cos(\log x)(\sin(\log x))^3}{x} dx.$$

a) (0.5 pts) Integre $F(x)$ pelo “método rápido” dos anexos – use duas mudanças de variável, cada uma com uma caixinha de anotações, e siga exatamente o modelo – alinhe os sinais de ‘=’, etc.

Chame a igualdade da primeira mudança de variável de ‘ $\underline{a}$ ’ e a da segunda mudança de variável de ‘ $\underline{b}$ ’.

b) (2.0 pts) Imagine que alguém te diz “eu não acredito no método rápido, você pode me mostrar justificativas pras igualdades ‘ $\underline{a}$ ’, e ‘ $\underline{b}$ ’, usando casos particulares da [MV1]?”

Traduza as suas justificativas do item (a) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (b).

c) (2.5 pts) Imagine que alguém te diz “eu não acredito na [MV1], você pode me mostrar justificativas pras igualdades ‘ $\underline{a}$ ’, e ‘ $\underline{b}$ ’, usando casos particulares da [MVD4]?”

Traduza as suas justificativas do item (b) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (c).

Anexo 1: lembre que... mangas

Lembre que:

- nós estamos usando o termo “mangas” pra palavras ou símbolos que podem ter vários significados diferentes,
- o ‘=’ é uma manga,
- NO MEU CRITÉRIO DE CORREÇÃO distinguir os vários tipos de ‘=’ vale boa parte dos pontos de cada questão,
- a gente geralmente usa partículas em português pra distinguir os vários tipos de ‘=’s,
- as partículas que nós usamos mais vezes no curso são “então”, “lembre que”, “sabemos que” – sendo que estas às vezes são omitidas – e “seja”, “queremos que”, “vamos supor que”, “vamos testar se”,
- nós usamos testes e chutar-e-testar bastante no curso, mas nos livros eles aparecem pouquíssimo – os livros costumam mostrar só o que dá certo,
- no curso eu muitas vezes usava ‘=)’ e ‘=(’ pra indicar “deu certo” e “deu errado”.
- uma das minhas desculpas pra usar o Maxima no curso é que quando a gente traduz as contas de C2 pra Maxima os ‘=’s com significados diferentes têm traduções totalmente diferentes.

Um exemplo em Maxima:

```
(%i1) edo : 'diff(y,x) = -x/y;
(%o1)

$$\frac{d}{dx} y = -\left(\frac{x}{y}\right)$$


(%i2) imp : ode2(edo,y,x);
(%o2)

$$-\left(\frac{y^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + \%c$$


(%i3) exps : solve(imp,y);
(%o3)

$$\left[ y = -\sqrt{-x^2 - 2\%c}, y = \sqrt{-x^2 - 2\%c} \right]$$


(%i4) exps : subst(%c=-C3/2, %);
(%o4)

$$\left[ y = -\sqrt{C3 - x^2}, y = \sqrt{C3 - x^2} \right]$$


(%i5) define(f1(x), rhs(exps[1]));
(%o5)

$$f1(x) := -\sqrt{C3 - x^2}$$


(%i6) define(f2(x), rhs(exps[2]));
(%o6)

$$f2(x) := \sqrt{C3 - x^2}$$


(%i7) define(f3(x), subst(C3=25, f2(x)));
(%o7)

$$f3(x) := \sqrt{25 - x^2}$$


(%i8) 3=f3(4);
(%o8)

$$3 = 3$$


(%i9) is(3=f3(4));
(%o9)

$$\text{true}$$

```

Anexo 2: contexto

Quase todas as expressões matemáticas que usamos em C2 **dependem do contexto**. Por exemplo, a interpretação **default** pra esta expressão aqui:

$$f(x) = x - 9 = 2$$

é:

Para toda função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
e para todo $x \in \mathbb{R}$ temos:
 $f(x) = x - 9 = 2$

Se você só escreve “ $f(x) = x - 9 = 2$ ” e mostra isso pro “colega que seja seu amigo” ele vai levar meia hora tentando adivinhar qual foi o contexto que você estava pensando mas não escreveu...
...e se ele descobrir em menos de, digamos, 50 tentativas, ele vai dizer “ok, jóia, tá certo!”.

O “colega que seja menos seu amigo” vai fazer menos tentativas, e os personagens “o monitor” e “o professor” da Dica 7 vão checar se o que você escreveu vai ser entendido corretamente por qualquer pessoa que saiba as convenções de como escrever matemática.

Lembre que **quase todo mundo** pára de ler um texto matemático quando vê uma besteira muito grande escrita nele. Imagine que um “colega que seja menos seu amigo” te mostra a solução dele pra um problema e te pergunta se está certa. A solução dele começa com:

Sabemos que $2 = 3$. Então...

O que você faria?

Dica: releia isto aqui:
Slogans27:07 até 32:45

Anexo 3: um gabarito de 2022.2

A substituição é:

$$[S] = \begin{bmatrix} G(x) := x^4 + 5 \\ H(y) := y^2 + 3 \\ g(x) := 4x^3 \\ h(y) := 2y \\ H^{-1}(x) := \sqrt{x-3} \end{bmatrix}$$

a) Seja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{2y} \quad (*)$$

b) Seja:

$$\begin{aligned} H^{-1}(x) &= \sqrt{x-3}. \\ \text{Temos: } H^{-1}(H(y)) &= \sqrt{H(y)-3} \\ &= \sqrt{(y^2+3)-3} \\ &= y. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} y &= H^{-1}(G(x) + C_3) \\ &= \sqrt{(G(x) + C_3) - 3} \\ &= \sqrt{((x^4 + 5) + C_3) - 3} \\ &= \sqrt{x^4 + 2 + C_3} \end{aligned}$$

$$\text{Seja: } f(x) = \sqrt{x^4 + 2 + C_3}.$$

d) Será que $f(x)$ obedece $(*)$?

Temos $f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}}$, e com isso:

$$\begin{aligned} \left(f'(x) = \frac{4x^3}{2f(x)} \right) & \left[\begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x^4+2+C_3} \\ f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}} \end{array} \right] \\ &= \left(\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}} = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+2+C_3}} \right) = \end{aligned}$$

e) Se

$$f(x_1) = y_1,$$

$$\text{i.e., } f(1) = 2,$$

$$\text{então } f(1) = \sqrt{1^4 + 2 + C_3}$$

$$= \sqrt{3 + C_3}$$

$$2 = \sqrt{3 + C_3}$$

$$2^2 = \sqrt{3 + C_3}^2$$

$$4 = 3 + C_3$$

$$C_3 = 1$$

$$f(x) = \sqrt{x^4 + 2 + C_3}$$

$$= \sqrt{x^4 + 3}$$

$$\text{Seja: } f_1(x) = \sqrt{x^4 + 3}.$$

f) Será que $f_1(x_1) = y_1$,

$$\text{i.e., } f_1(1) = 2?$$

$$\sqrt{1^4 + 3} = \sqrt{4}$$

$$= 2 \quad =)$$

Anexo 4: O que quer dizer “Por ... com ...”?

$$\begin{aligned}
 F(x) &= (6x^3)(7x^4) \\
 F'(x) &= ((6x^3)(7x^4))' \\
 &= \frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4)) \\
 &\equiv (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3) \quad \text{Por [RProd] com } f(x) = 6x^3, g(x) = 7x^4 \\
 &= (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4) \cdot 6\frac{d}{dx}x^3 \quad \text{Por [RMC] com } c = 6, f(x) = x^3 \\
 &= (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4) \cdot 6 \cdot 3x^2 \quad \text{Por [RPot] com } n = 3 \\
 &= (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)(18x^2) \\
 &= (6x^3) \cdot 7\frac{d}{dx}x^4 + (7x^4)(18x^2) \quad \text{Por [RMC] com } c = 7, f(x) = x^4 \\
 &= (6x^3) \cdot 7 \cdot 4x^3 + (7x^4)(18x^2) \quad \text{Por [RPot] com } n = 4 \\
 &= (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) \\
 &= (6x^3)(28x^3) + 126x^6 \\
 &= 168x^6 + 126x^6 \\
 &= 294x^6
 \end{aligned}$$

Compare: nós definimos [RProd] como esta igualdade,

$$[\text{RProd}] = \left(\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x) \right)$$

e se substituirmos $f(x)$ por $6x^3$ e $g(x)$ por $7x^4$ na igualdade [RProd] nós obtemos isto aqui,

$$\begin{aligned}
 [\text{RProd}] &= \left(\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x) \right) \\
 [\text{RProd}] \left[\begin{array}{l} f(x) := 6x^3 \\ g(x) := 7x^4 \end{array} \right] &= \left(\frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4)) \equiv (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3) \right)
 \end{aligned}$$

que é exatamente a igualdade que eu marquei lá em cima...

Anexo 5: o que quer dizer “Por ... com ...”? (2)

$$\begin{aligned}
 F(x) &= (6x^3)(7x^4) \\
 F'(x) &= ((6x^3)(7x^4))' \\
 &= \frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4)) \\
 &= (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3) \quad \text{Por [RProd] com } f(x) = 6x^3, g(x) = 7x^4 \\
 &= (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4) \cdot 6\frac{d}{dx}x^3 \quad \text{Por [RMC] com } c = 6, f(x) = x^3 \\
 &= (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4) \cdot 6 \cdot 3x^2 \quad \text{Por [RPot] com } n = 3 \\
 &= (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)(18x^2) \\
 \Rightarrow &= (6x^3) \cdot \left[7\frac{d}{dx}x^4\right] + (7x^4)(18x^2) \quad \text{Por [RMC] com } c = 7, f(x) = x^4 \\
 &= (6x^3) \cdot 7 \cdot 4x^3 + (7x^4)(18x^2) \quad \text{Por [RPot] com } n = 4 \\
 &= (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) \\
 &= (6x^3)(28x^3) + 126x^6 \\
 &= 168x^6 + 126x^6 \\
 &= 294x^6
 \end{aligned}$$

Lembre que a “regra da multiplicação por constante” é esta igualdade aqui,

$$[\text{RMC}] = \left(\frac{d}{dx}(cf(x)) = c \frac{d}{dx}f(x) \right)$$

e se substituirmos c por 7 e $f(x)$ por x^4 nela nós obtemos isto aqui,

$$\begin{aligned}
 [\text{RMC}] &= \left(\frac{d}{dx}(cf(x)) = c \frac{d}{dx}f(x) \right) \\
 [\text{RMC}] \left[\begin{array}{l} c := 7 \\ f(x) := x^4 \end{array} \right] &= \left(\frac{d}{dx}(7x^4) = 7\frac{d}{dx}x^4 \right)
 \end{aligned}$$

O ‘ $\Rightarrow$ ’ logo acima desta frase justifica a parte que muda no ‘ $\Rightarrow$ ’ lá de cima!

Anexo 6: método rápido, [MVI1], [MVD4]

Lembre que o “método rápido” tem essa cara aqui:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x} dx && \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \end{array} \right] \\
 &= \int (\ln x)^3 \cos((\ln x)^4) \frac{1}{x} dx \\
 &= \int u^3 \cos(u^4) du \\
 &= \int \cos(u^4) u^3 du && \left[\begin{array}{l} v = u^4 \\ \frac{dv}{du} = 4u^3 \\ \frac{1}{4} dv = u^3 du \end{array} \right] \\
 &= \int \cos v \cdot \frac{1}{4} dv \\
 &= \frac{1}{4} \int \cos v dv \\
 &= \frac{1}{4} \sin v \\
 &= \frac{1}{4} \sin(u^4) \\
 &= \frac{1}{4} \sin((\ln x)^4)
 \end{aligned}$$

e em cada caixinha de anotações a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras com diferenciais.

E lembre que:

$$\begin{aligned}
 \text{[MVI1]} &= \left(\int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right) \\
 \text{[MVD4]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(g(b)) - f(g(a)) \\ = f(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Anexo 7: como justificar uma MV de cabeça

Por exemplo...

$$\begin{aligned}
 \int t^2 \cos(t^3) dt &= ? \\
 \int x^2 \cos(x^3) dx &= ? \quad \left[\begin{array}{l} u = x^3 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} u = \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2 \end{array} \right] \\
 \int \underbrace{\cos(\underbrace{x^3}_u)} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3x^2}_{\frac{du}{dx}} dx &= \int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 \int \underbrace{\cos(\underbrace{x^3}_{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3x^2}_{g'(x)} dx &= \int \underbrace{\cos(u)}_{f'(u)} \cdot \frac{1}{3} du \\
 \underbrace{\int f'(g(x))g'(x) dx}_{\int \cos(x^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3x^2 dx} &= \underbrace{\int f'(u) du}_{\int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du} \left[\begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \cos(u) \cdot \frac{1}{3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right] \\
 \underbrace{\int \cos(x^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3x^2 dx}_{\int \cos(t^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3t^2 dt} &= \underbrace{\int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du}_{\int \cos(w) \cdot \frac{1}{3} dw} \\
 \int t^2 \cos(t^3) dt &= \int \frac{1}{3} \cos(w) dw \quad \text{Por [MVII]} \left[\begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \frac{1}{3} \cos(u) \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Dicas:

Repere que no exemplo à esquerda o problema original era este,

$$\int t^2 \cos(t^3) dt = ?$$

e eu resolvi ele nesta ordem: 1) eu mudei a variável dele pra x pra ficar com algo mais parecido com a [MVII], 2) eu escolhi a mudança de variável certa, que era $u = x^3$, 3) eu calculei o $\frac{du}{dx}$, 4) eu rearrumei o problema original pro $\frac{du}{dx}$ ficar colado no dx , 5) eu fiz a mudança de variável pelo método rápido, 6) eu reescrevi as anotações do método rápido pra obter $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$, 7) eu transformei essas $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$ numa substituição, 8) eu calculei os resultados parciais dessa substituição e da $\left[\begin{array}{l} x=t \\ u=w \end{array} \right]$, 9) eu reescrevi a substituição que eu tinha obtido e testado pra fingir que eu primeiro tinha resolvido o problema original de cabeça e depois eu escrevi a justificativa porque alguém me perguntou como eu tinha chegado naquele resultado.

Questão 1: gabarito em Maxima

```
(%i1) [transpose(matrix(S5p)),
transpose(matrix(S5n))];
```

```
(%o1) [ (g(x) = -(2(x+2)), h(y) = 2(y-1), G(x) = -(x+2)^2, H(y) = (y-1)^2,
Hiniv(y) = sqrt(y)+1), (g(x) = -(2(x+2)), h(y) = 2(y-1), G(x) = -(x+2)^2, H(y) = (y-1)^2,
Hiniv(y) = 1 - sqrt(y)) ]
```

```
(%i2) EDOVS_M _s_ S5p;
```

```
(%o2) ( d/dx y = -(2(x+2))/(2(y-1))
2(y-1) dx = -(2(x+2) dx)
int 2(y-1) dy = int -(2(x+2)) dx
||
(y-1)^2 + C1 = -(x+2)^2 + C2
(y-1)^2 = -(x+2)^2 + C3
|y-1| + 1 = sqrt(-(x+2)^2 + C3 + 1)
||
y
```

```
(%i3) EDOVS_edo _s_ S5p;
```

```
(%o3) d/dx y = -(x+2)/(y-1)
```

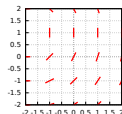
```
(%i4) EDOVS_imp _s_ S5p;
```

```
(%o4) (y-1)^2 = C3 - (x+2)^2
```

```
(%i5) EDOVS_exp _s_ S5p;
```

```
(%o5) y = sqrt(C3 - (x+2)^2) + 1
```

```
(%i6) item_1a();
(%o6)
```



```
(%i7) item_1b();
(%o7)
```

$$\begin{aligned} \text{fp}(x) &:= \sqrt{C3 - (x+2)^2 + 1} \\ \text{fn}(x) &:= 1 - \sqrt{C3 - (x+2)^2} \end{aligned}$$

```
(%i8) item_1c();
```

```
(%o8) d/dx (1 - sqrt(C3 - (x+2)^2)) = (x+2)/sqrt(C3 - (x+2)^2)
```

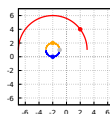
```
(%i9) ev(% , diff);
```

```
(%o9) (x+2)/sqrt(C3 - (x+2)^2) = (x+2)/sqrt(C3 - (x+2)^2)
```

```
(%i10) item_1d();
```

```
(%o10) ( P1 = [2, 4] f1(x) = sqrt(25 - (x+2)^2 + 1)
P2 = [-2, 2] f2(x) = sqrt(1 - (x+2)^2 + 1)
P3 = [-2, 0] f3(x) = 1 - sqrt(1 - (x+2)^2)^2
P4 = [-1, 1] f4(x) = 1 - sqrt(1 - (x+2)^2)^2 )
```

```
(%i11) item_1e();
(%o11)
```



Questão 2: mini-gabarito

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx \\
 &= \int 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &\stackrel{(a)}{=} \int 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \quad \left[\begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &= \int 4 (\sin(u))^3 \cos(u) du \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int 4 v^3 dv \quad \left[\begin{array}{l} v = \sin u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u du \end{array} \right] \\
 &= v^4 \\
 &= (\sin u)^4 \\
 &= (\sin(\log x))^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[S3a]} &= \left[\begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := 4 \cos(x) (\sin(u))^3 \end{array} \right] \\
 \text{[S4a]} &= \left[\begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := 4 \cos(x) (\sin(u))^3 \\ f(u) := (\sin u)^4 \end{array} \right] \\
 \text{[MVI1][S3a]} &= \left(\int 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \int 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \right) \\
 \text{[MVD4][S3a]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = f(\log x) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(\log b) - f(\log a) \\ = f(u) \Big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ = \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \end{array} \right) \\
 \text{[MVD4][S4a]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = (\sin(\log x))^4 \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = (\sin(\log b))^4 - (\sin(\log a))^4 \\ = (\sin(u))^4 \Big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ = \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Questão 2: mini-gabarito (cont.)

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3}{x} dx \\
 &= \int 4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &\stackrel{(a)}{=} \int 4 \cos(u) (\operatorname{sen}(u))^3 du \quad \left[\begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int 4v^3 dv \quad \left[\begin{array}{l} v = \operatorname{sen} u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u du \end{array} \right] \\
 &= v^4 \\
 &= (\operatorname{sen} u)^4 \\
 &= (\operatorname{sen}(\log x))^4
 \end{aligned}$$

$$[\text{S2b}] = \left[\begin{array}{l} x := u \\ u := v \end{array} \right]$$

$$[\text{S3b}] = \left[\begin{array}{l} g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \\ f'(u) := 4u^3 \\ g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \\ f'(u) := 4u^3 \\ f(u) := u^4 \end{array} \right]$$

$$[\text{S4b}] = \left[\begin{array}{l} f(u) := u^4 \end{array} \right]$$

$$[\text{MVI1}][\text{S3b}] = \left(\int 4(\operatorname{sen}(x))^3 \cos(x) dx = \int 4u^3 du \right)$$

$$[\text{MVI1}][\text{S3b}][\text{S2b}] = \left(\int 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = \int 4v^3 dv \right)$$

$$[\text{MVD4}][\text{S3b}][\text{S2b}] = \left(\begin{array}{l} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = f(\operatorname{sen}(u)) \Big|_{u=a}^{u=b} \\ = f(\operatorname{sen}(b)) - f(\operatorname{sen}(a)) \\ = f(v) \Big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ = \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3 dv \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}][\text{S4b}][\text{S2b}] = \left(\begin{array}{l} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = (\operatorname{sen}(u))^4 \Big|_{u=a}^{u=b} \\ = (\operatorname{sen}(b))^4 - (\operatorname{sen}(a))^4 \\ = v^4 \Big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ = \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3 dv \end{array} \right)$$