Cálculo 2 - 2025.1

P2 (segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2025.1-C2.html

Links

Questão 1

(Total: 5.0 pts)
Lembre que no curso eu mostrei que o meu modo preferido de escrever o "método" para resolver EDOs com variáveis separáveis — "EDOVSs" — é o "método" [M] abaixo... eu pus o termo "método" entre aspas porque alguns dos passos da [M] são gambiarras nas quais a gente não pode confiar totalmente, e aí a gente precisa sempre testar as nossas soluções. O $[\mathrm{F}_3]$ abaixo — a "fórmula" — é uma versão resumida do [M].

$$[\mathrm{M}] \;=\; \left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{g(x)}{h(y)} \\
h(y)\,dy & = & g(x)\,dx \\
\int h(y)\,dy & = & \int g(x)\,dx \\
\| & & \| \\
H(y)+C_1 & & G(x)+C_2 \\
H(y) & = & G(x)+C_2-C_1 \\
 & = & G(x)+C_3 \\
H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\
\| & & \\
y & &
\end{array}\right)$$

$$[\mathrm{F}_3] \;=\; \left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{g(x)}{h(y)} \\
H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\
\| & & \\
y & &
\end{array}\right)$$

Seja $(*_1)$ esta EDOVSs:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x+1)}{2(y-1)} \qquad (*_1)$$

a) **(1.0 pts)** Desenhe os tracinhos do campo de direções da EDO (*) nos pontos com $x, y \in \{-2,-1,0,1,2\}$. Aqui você vai ter que desenhar 25 tracinhos e vai ter que caprichar – um tracinho com coeficiente angular $\frac{1}{2}$ tem que ser visualmente bem diferente de um com coeficiente angular 1 e de um com coeficiente angular 2.

b) **(0.5 pts)** Encontre as duas soluções gerais da EDO $(*)$ – a solução "positiva" e a "negativa" – e dê nomes para elas.

c) **(0.5 pts)** Teste a sua solução "negativa".

d) **(1.0 pts)** Sejam $P_1 = (-1,0)$ e $P_2 = (3,4)$. Encontre a solução particular que passa pelo ponto P_1 e a que passa pelo ponto P_2. Dê nomes pra elas e teste-as.

e) **(1.0 pts)** Verifique que a solução que você encontrou que passa por P_1 não passa por P_2 e que a solução que você encontrou que passa por P_2 não passa por P_1.

f) **(1.0 pts)** Faça os gráficos das soluções que você encontrou no item (d). Dica: as funções que você deve ter encontrado passam por vários pontos com coordenadas inteiras; comece desenhando esses pontos.

Muito importante: leia a página do "Lembre que..."!

Questão 2
(Total: 4.0 pts)

Sejam $(*_2)$ e $(*_3)$ as EDOs abaixo:

$$\begin{array}{rcll} y'' - 3y' - 10y & = & 0 & (*_2) \\ y'' - 4y' + 13y & = & 0 & (*_3) \end{array}$$

a) **(0.5 pts)** Encontre as soluções básicas e a solução geral da EDO $(*_2)$. Dê um nome para cada uma delas.

b) **(1.0 pts)** Encontre uma solução $g(x)$ da EDO $(*_2)$ que obedeça isto aqui: $g(0) = 2$, $g'(0) = 3$.

c) **(0.5 pts)** Encontre as solução básicas complexas e as soluções básicas reais da EDO $(*_3)$. Dê um nome para cada uma delas.

d) **(2.0 pts)** Escolha uma das soluções básicas reais que você obteve no item (c) e verifique que ela realmente é solução da EDO $(*_3)$. Além disso verifique que $e^{4x}\cos(5x)$ não é solução da EDO $(*_3)$.

Lembre que eu disse nas dicas pra P2 que a prova teria um item em que as contas ficariam bem curtas se vocês soubessem definir funções intermediárias e sem definir funções intermediárias as contas ficariam gigantescas... é o item (d) acima.

Questão 3
(Total: 2.0 pts)

4) Sejam $(*_4)$, $(*_5)$ e $(*_6)$ estas EDOs:

$$\begin{array}{rl} 20xy^3\,dx + 30x^2y^2\,dy = 0 & (*_5) \\ 20x^2y^3\,dx + 30x^3y^2\,dy = 0 & (*_6) \\ (8xy^2 + 14x)\,dx + (8x^2y + 5)\,dy = 0 & (*_7) \end{array}$$

a) **(0.1 pts)** Mostre que a $(*_5)$ é exata.
b) **(0.1 pts)** Mostre que $(*_6)$ não é exata.
c) **(0.4 pts)** Encontre a solução geral de $(*_5)$.
d) **(0.4 pts)** Teste a sua solução geral da $(*_5)$.
e) **(0.1 pts)** Mostre que $(*_7)$ é exata.
f) **(0.9 pts)** Encontre a solução geral *implícita* da $(*_7)$. Aqui você não precisa encontrar a solução geral explícita – as contas pra encontrar a solução geral explícita são grandes demais.

Lembre que você pode usar este método:

$$[\mathrm{E}_5] = \left(\begin{array}{rcrcl} dz & = & z_x dx + z_y dy & = & 0 \\ \frac{d}{dx} z & = & z_x + z_y \frac{dy}{dx} & = & 0 \\ z & = & C & & \end{array} \right)$$

Lembre que... mangas

Lembre que:

- nós estamos usando o termo "mangas" pra palavras ou símbolos que podem ter vários significados diferentes,
- o '=' é uma manga,
- NO MEU CRITÉRIO DE CORREÇÃO distinguir os vários tipos de '=' vale boa parte dos pontos de cada questão,
- a gente geralmente usa partículas em português pra distinguir os vários tipos de '='s,
- as partículas que nós usamos mais vezes no curso são "então", "lembre que", "sabemos que" – sendo que estas às vezes são omitidas – e "seja", "queremos que", "vamos supor que", "vamos testar se",
- nós usamos testes e chutar-e-testar bastante no curso, mas nos livros eles aparecem pouquíssimo – os livros costumam mostrar só o que dá certo,
- no curso eu muitas vezes usava '=)' e '=(' pra indicar "deu certo" e "deu errado".
- uma das minhas desculpas pra usar o Maxima no curso é que quando a gente traduz as contas de C2 pra Maxima os '='s com significados diferentes têm traduções totalmente diferentes.

Um exemplo em Maxima:

```
(%i1) edo  : 'diff(y,x) = -x/y;
(%o1)
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y=-\left(\frac{x}{y}\right)$$

```
(%i2) imp  : ode2(edo,y,x);
(%o2)
```

$$-\left(\frac{y^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}+\%c$$

```
(%i3) exps : solve(imp,y);
(%o3)
```

$$\left[y=-\sqrt{-x^2-2\,\%c},y=\sqrt{-x^2-2\,\%c}\right]$$

```
(%i4) exps : subst(%c=-C3/2, %);
(%o4)
```

$$\left[y=-\sqrt{\mathrm{C3}-x^2},y=\sqrt{\mathrm{C3}-x^2}\right]$$

```
(%i5) define(f1(x), rhs(exps[1]));
(%o5)
```

$$\mathrm{f1}\left(x\right):=-\sqrt{\mathrm{C3}-x^2}$$

```
(%i6) define(f2(x), rhs(exps[2]));
(%o6)
```

$$\mathrm{f2}\left(x\right):=\sqrt{\mathrm{C3}-x^2}$$

```
(%i7) define(f3(x), subst(C3=25, f2(x)));
(%o7)
```

$$\mathrm{f3}\left(x\right):=\sqrt{25-x^2}$$

```
(%i8)    3=f3(4);
(%o8)
```

$$3=3$$

```
(%i9) is(3=f3(4));
(%o9)
```

$$\mathbf{true}$$

Questão 1: gabarito em Maxima

(%i1) [transpose(matrix(S5p)),
 transpose(matrix(S5n))];
(%o1)
$$\left[\begin{pmatrix} g(x) = -(2\,(x+1)) \\ h(y) = 2\,(y-1) \\ G(x) = -(x+1)^2 \\ H(y) = (y-1)^2 \\ \mathrm{Hinv}(y) = \sqrt{y}+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(x) = -(2\,(x+1)) \\ h(y) = 2\,(y-1) \\ G(x) = -(x+1)^2 \\ H(y) = (y-1)^2 \\ \mathrm{Hinv}(y) = 1-\sqrt{y} \end{pmatrix}\right]$$

(%i2) EDOVS_M _s_ S5p;
(%o2)
$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}\,y & = & \frac{-(2\,(x+1))}{2\,(y-1)} \\ 2\,(y-1)\,dx & = & -(2\,(x+1)\,dx) \\ \int 2\,(y-1)\,dy & = & \int -(2\,(x+1))\,dx \\ \| & & \| \\ (y-1)^2+\mathrm{C1} & = & -(x+1)^2+\mathrm{C2} \\ (y-1)^2 & = & -(x+1)^2+\mathrm{C3} \\ |y-1|+1 & = & \sqrt{-(x+1)^2+\mathrm{C3}}+1 \\ \| & & \\ y & & \end{pmatrix}$$

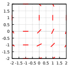
(%i3) EDOVS_edo _s_ S5p;
(%o3)
$$\frac{d}{d\,x}\,y = -\left(\frac{x+1}{y-1}\right)$$

(%i4) EDOVS_imp _s_ S5p;
(%o4)
$$(y-1)^2 = \mathrm{C3}-(x+1)^2$$

(%i5) EDOVS_exp _s_ S5p;
(%o5)
$$y = \sqrt{\mathrm{C3}-(x+1)^2}+1$$

(%i6) EDOVS_f _s_ S5p;
(%o6)
$$\sqrt{\mathrm{C3}-(x+1)^2}+1$$

(%i7) item_1a();
(%o7)



(%i8) item_1b();
(%o8)
$$\begin{pmatrix} \mathrm{fp}(x) := \sqrt{\mathrm{C3}-(x+1)^2}+1 \\ \mathrm{fn}(x) := 1-\sqrt{\mathrm{C3}-(x+1)^2} \end{pmatrix}$$

(%i9) item_1c();
(%o9)
$$\frac{d}{d\,x}\left(1-\sqrt{\mathrm{C3}-(x+1)^2}\right) = \frac{x+1}{\sqrt{\mathrm{C3}-(x+1)^2}}$$

(%i10) ev(%, diff);
(%o10)
$$\frac{x+1}{\sqrt{\mathrm{C3}-(x+1)^2}} = \frac{x+1}{\sqrt{\mathrm{C3}-(x+1)^2}}$$

(%i11) item_1d();
(%o11)
$$\begin{pmatrix} \mathrm{f\_P1}(x) := 1-\sqrt{1-(x+1)^2} \\ \mathrm{f\_P2}(x) := \sqrt{25-(x+1)^2}+1 \end{pmatrix}$$

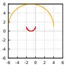
(%i12) subst(P1, y=f_P1(x));
(%o12)
$$0 = 0$$

(%i13) subst(P2, y=f_P2(x));
(%o13)
$$4 = 4$$

(%i14) "item 1e"$
(%i15) subst(P1, y=f_P2(x));
(%o15)
$$0 = 6$$

(%i16) subst(P2, y=f_P1(x));
(%o16)
$$4 = 1-\sqrt{15}\,i$$

(%i17) item_1f();
(%o17)



Questão 2: gabarito em Maxima

```
(%i1) load("~/MAXIMA/2025-1-C2-P2.mac")$
(%i2) star2;
(%o2)
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y-3\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-10\,y=0$$

```
(%i3) star3;
(%o3)
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y-4\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+13\,y=0$$

```
(%i4) sol_star2 : ode2(star2,y,x);
(%o4)
```

$$y=\%k1\,e^{5\,x}+\%k2\,e^{-2\,x}$$

```
(%i5) sol_star3 : ode2(star3,y,x);
(%o5)
```

$$y=e^{2\,x}\,\left(\%k1\,\sin\left(3\,x\right)+\%k2\,\cos\left(3\,x\right)\right)$$

```
(%i6)       EDOLCC;
(%o6)
```

$$\begin{pmatrix} f\text{''}\ +(-b-a)\ f\text{'}\ +a\,b\,f & = & 0 \\ D^2\,f+(-b-a)\ D\,f+a\,b\,f & = & 0 \\ (D^2+(-b-a)\ D+a\,b)\ f & = & 0 \\ (D-a)\ (D-b)\ f & = & 0 \\ (D-a)\ (D-b)\ e^{b\,x} & = & 0 \\ (D-a)\ (D-b)\ e^{a\,x} & = & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i7)       EDOLCC _s_ Sstar2;
(%o7)
```

$$\begin{pmatrix} f\text{''}\ +(-3)\ f\text{'}\ +(-(10\,f)) & = & 0 \\ D^2\,f+(-3)\ D\,f+(-(10\,f)) & = & 0 \\ (D^2+(-3)\ D+(-10))\ f & = & 0 \\ (D-5)\ (D+2)\ f & = & 0 \\ (D-5)\ (D+2)\ e^{-2\,x} & = & 0 \\ (D-5)\ (D+2)\ e^{5\,x} & = & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i8) expand(EDOLCC _s_ Sstar3);
(%o8)
```

$$\begin{pmatrix} f\text{''}\ +(-4)\ f\text{'}\ +13\,f & = & 0 \\ D^2\,f+(-4)\ D\,f+13\,f & = & 0 \\ (D^2+(-4)\ D+13)\ f & = & 0 \\ (D-3\,i-2)\ (D+3\,i-2)\ f & = & 0 \\ (D-3\,i-2)\ (D+3\,i-2)\ e^{2\,x-3\,i\,x} & = & 0 \\ (D-3\,i-2)\ (D+3\,i-2)\ e^{3\,i\,x+2\,x} & = & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i9) item_2a();
(%o9)
```

$$\begin{pmatrix} \mathrm{f1}\left(x\right):=e^{5\,x} \\ \mathrm{f2}\left(x\right):=e^{-2\,x} \\ \mathrm{f3}\left(x\right):=a\,e^{5\,x}+b\,e^{-2\,x} \end{pmatrix}$$

```
(%i10) item_2b();
(%o10)
```

$$g\left(x\right):=e^{5\,x}+e^{-2\,x}$$

```
(%i11) item_2c();
(%o11)
```

$$\begin{pmatrix} \mathrm{f4}\left(x\right):=e^{(3\,i+2)\,x} \\ \mathrm{f5}\left(x\right):=e^{(2-3\,i)\,x} \\ \mathrm{f6}\left(x\right):=e^{2\,x}\ \sin\left(3\,x\right) \\ \mathrm{f7}\left(x\right):=e^{2\,x}\ \cos\left(3\,x\right) \end{pmatrix}$$

```
(%i12) "2d (f6):"$
(%i13) gradef(h,x, 2*h)$
(%i14) gradef(s,x, 3*c)$
(%i15) gradef(c,x,-3*s)$
(%i16) f6 : h*s;
(%o16)
```

$$h\,s$$

```
(%i17) diff(f6,x);
(%o17)
```

$$2\,h\,s+3\,c\,h$$

```
(%i18) diff(f6,x,2);
(%o18)
```

$$12\,c\,h-5\,h\,s$$

```
(%i19) Lstar3(f6);
(%o19)
```

$$-(4\ (2\,h\,s+3\,c\,h))+8\,h\,s+12\,c\,h$$

```
(%i20) expand(%);
(%o20)
```

$$0$$

```
(%i21) "2d (f8):"$
(%i22) gradef(h,x, 4*h);
(%o22)
```

$$h$$

```
(%i23) gradef(s,x, 5*c);
(%o23)
```

$$s$$

```
(%i24) gradef(c,x,-5*s);
(%o24)
```

$$c$$

```
(%i25) f8 : h*s;
(%o25)
```

$$h\,s$$

```
(%i26) diff(h*s,x);
(%o26)
```

$$4\,h\,s+5\,c\,h$$

```
(%i27) diff(h*c,x);
(%o27)
```

$$4\,c\,h-5\,h\,s$$

```
(%i28) diff(f8,x);
(%o28)
```

$$4\,h\,s+5\,c\,h$$

```
(%i29) diff(f8,x,2);
(%o29)
```

$$40\,c\,h-9\,h\,s$$

```
(%i30) Lstar3(f8);
(%o30)
```

$$-(4\ (4\,h\,s+5\,c\,h))+4\,h\,s+40\,c\,h$$

```
(%i31) expand(%);
(%o31)
```

$$20\,c\,h-12\,h\,s$$

Questão 2d: gabarito

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Sejam:} & L & = & D^2-4D+13, \\
& f_6 & = & f_6(x) \\
& & = & e^{2x}\operatorname{sen}3x, \\
& f_8 & = & e^{4x}\operatorname{sen}5x.
\end{array}$$

Vamos calcular $L(f_6)$.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Sejam:} & h & = & e^{2x}, \\
& s & = & \operatorname{sen}3x, \\
& c & = & \cos 3x. \\
\text{Então:} & h' & = & 2h \\
& s' & = & 3c \\
& c' & = & -3s \\
& f_6 & = & hs \\
& f_6' & = & (hs)' \\
& & = & h's+hs' \\
& & = & 2hs+h\cdot -3c \\
& & = & 2hs-3hc \\
& f_6'' & = & (f_6')' \\
& & = & (2hs-3hc)' \\
& & = & 2(hs)'-3(hc)' \\
& & = & 2(2hs-3hc)-3(h'c+hc') \\
& & = & 2(2hs-3hc)-3(2hc+h\cdot 3s) \\
& & = & 2(2hs-3hc)-3(2hc+3hs) \\
& & = & 4hs-6hc-6hc-9hs \\
& & = & -5hs-12hc \\
& Lf_6 & = & (D^2-4D+13)f_6 \\
& & = & f_6''-4f_6'+13f_6 \\
& & = & (-5hs-12hc)-4(2hs-3hc)+13hs \\
& & = & -5hs-12hc-8hs+12hc+13hs \\
& & = & (-5-8+13)hs+(-12+12)hc \\
& & = & 0
\end{array}$$

Agora vamos calcular $L(f_8)$.

$$\begin{array}{lrcll}
\text{Sejam:} & h & = & e^{4x}, & \boxed{\leftarrow \text{redefinição!}} \\
& s & = & \operatorname{sen}5x, & \boxed{\leftarrow \text{redefinição!}} \\
& c & = & \cos 6x. & \boxed{\leftarrow \text{redefinição!}} \\
\text{Então:} & h' & = & 4h \\
& s' & = & 5c \\
& c' & = & -5s \\
& (hs)' & = & h's+hs' \\
& & = & 4hs+h\cdot 5c \\
& & = & 4hs+5hc \\
& (hc)' & = & h'c+hc' \\
& & = & 4hc+h\cdot -5s \\
& & = & 4hc-5hs \\
& f_8' & = & (hs)' \\
& & = & 4hs+5hc \\
& f_8'' & = & (f_8')' \\
& & = & (4hs+5hc)' \\
& & = & 4(hs)'+5(hc)' \\
& & = & 4(4hs+5hc)+5(4hc-5hs) \\
& & = & 16hs+20hc+20hc-25hs \\
& & = & (16-25)hs+(20+20)hc \\
& & = & -9hs+40hc \\
& Lf_8 & = & (D^2-4D+13)f_8 \\
& & = & f_8''-4f_8'+13f_8 \\
& & = & (-9hs+40hc)-4(4hs+5hc)+13hs \\
& & = & -9hs+40hc-16hs-20hc+13hs \\
& & = & (-9-16+13)hs+(40-20)hc \\
& & = & -12hs+20hc
\end{array}$$

Questão 3: gabarito em Maxima

```
(%i1) load("~/MAXIMA/2025-1-C2-P2.mac")$
(%i2) "3a:"$
(%i3) z_x : 20 * x   * y^3;
(%o3)
```

$$20\,x\,y^3$$

```
(%i4) z_y : 30 * x^2 * y^2;
(%o4)
```

$$30\,x^2\,y^2$$

```
(%i5) z_x _y = z_y _x;
(%o5)
```

$$60\,x\,y^2=60\,x\,y^2$$

```
(%i6) [maxxp,maxyp] : [2,3];
(%o6)
```

$$[2,3]$$

```
(%i7) [ca(z_x), ca(z_y), ca(z_x _y)];
(%o7)
```

$$\left[\begin{pmatrix}0&20&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&30\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&60&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]$$

```
(%i8) "3b:"$
(%i9) z_x : 20 * x^2 * y^3;
(%o9)
```

$$20\,x^2\,y^3$$

```
(%i10) z_y : 30 * x^3 * y^2;
(%o10)
```

$$30\,x^3\,y^2$$

```
(%i11) z_x _y = z_y _x;
(%o11)
```

$$60\,x^2\,y^2=90\,x^2\,y^2$$

```
(%i12) [maxxp,maxyp] : [3,3];
(%o12)
```

$$[3,3]$$

```
(%i13) [ca(z_x), ca(z_y), ca(z_x _y), ca(z_y _x)];
(%o13)
```

$$\left[\begin{pmatrix}0&0&20&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&30\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&60&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&90&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right]$$

```
(%i14) "3c:"$
(%i15) z_x : 20 * x   * y^3;
(%o15)
```

$$20\,x\,y^3$$

```
(%i16) z_y : 30 * x^2 * y^2;
(%o16)
```

$$30\,x^2\,y^2$$

```
(%i17) [z_x _intx, z_y _inty];
(%o17)
```

$$[10\,x^2\,y^3,10\,x^2\,y^3]$$

```
(%i18) z : z_x _intx;
(%o18)
```

$$10\,x^2\,y^3$$

```
(%i19) [maxxp,maxyp] : [2,3];
(%o19)
```

$$[2,3]$$

```
(%i20) S   : ['z=z,     'z_x=z_x,     'z_y=z_y];
(%o20)
```

$$[z=10\,x^2\,y^3,z_x=20\,x\,y^3,z_y=30\,x^2\,y^2]$$

```
(%i21) Sca  : ['z=ca(z), 'z_x=ca(z_x), 'z_y=ca(z_y)];
(%o21)
```

$$\left[z=\begin{pmatrix}0&0&10\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},z_x=\begin{pmatrix}0&20&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},z_y=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&30\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]$$

```
(%i22) E5     _s_ S;
(%o22)
```

$$\begin{pmatrix}d\,(10\,x^2\,y^3)&=&20\,x\,y^3\,\mathrm{dx}+30\,x^2\,y^2\,\mathrm{dy}&=&0\\\frac{d}{d\,x}\,(10\,x^2\,y^3)&=&20\,x\,y^3+30\,x^2\,y^2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)&=&0\\10\,x^2\,y^3&=&C&&\end{pmatrix}$$

```
(%i23) E5     _s_ Sca;
(%o23)
```

$$\begin{pmatrix}d\,\begin{pmatrix}0&0&10\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}&=&\begin{pmatrix}0&20&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\mathrm{dx}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&30\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\mathrm{dy}&=&0\\\frac{d}{d\,x}\,\begin{pmatrix}0&0&10\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}&=&\begin{pmatrix}0&20&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&30\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)&=&0\\\begin{pmatrix}0&0&10\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}&=&C&&\end{pmatrix}$$

```
(%i24) imp  : z = C;
(%o24)
```

$$10\,x^2\,y^3=C$$

```
(%i25) exps : solve(imp, y);
(%o25)
```

$$\left[y=\frac{\left(\sqrt{3}\,i-1\right)\,C^{\frac{1}{3}}}{2\,10^{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{2}{3}}},y=-\left(\frac{\left(\sqrt{3}\,i+1\right)\,C^{\frac{1}{3}}}{2\,10^{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{2}{3}}}\right),y=\frac{C^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{2}{3}}}\right]$$

```
(%i26) exp  : exps[3];
(%o26)
```

$$y=\frac{C^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{2}{3}}}$$

```
(%i27) "3d:"$
(%i28) edo  : E5_edo _s_ S;
(%o28)
```

$$30\,x^2\,y^2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+20\,x\,y^3=0$$

```
(%i29) test : subst(exp, edo);
(%o29)
```

$$3\,10^{\frac{1}{3}}\,C^{\frac{2}{3}}\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\left(\frac{C^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{2}{3}}}\right)\right)\,x^{\frac{2}{3}}+\frac{2\,C}{x}=0$$

```
(%i30) ev(test,diff);
(%o30)
```

$$0=0$$

```
(%i31) "3e:"$
(%i32) z_x : 8*x*y^2 + 14*x;
(%o32)
```

$$8\,x\,y^2+14\,x$$

```
(%i33) z_y : 8*x^2*y + 5;
(%o33)
```

$$8\,x^2\,y+5$$

```
(%i34) z_x _y = z_y _x;
(%o34)
```

$$16\,x\,y=16\,x\,y$$

Questão 3: gabarito em Maxima (cont.)

```
(%i35) "3f:"$
(%i36) [maxxp,maxyp] : [2,3];
(%o36)
```
$$[2,3]$$

```
(%i37) [z_x, z_y, z_x _intx, z_y _inty];
(%o37)
```
$$\left[8\,x\,y^2+14\,x,8\,x^2\,y+5,4\,x^2\,y^2+7\,x^2,4\,x^2\,y^2+5\,y\right]$$

```
(%i38) [ca(z_x), ca(z_y), ca(z_x _intx), ca(z_y _inty)];
(%o38)
```
$$\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&8&0\\0&0&0\\0&14&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&8\\5&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&4\\0&0&0\\0&0&7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&4\\5&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]$$

```
(%i39) z : 4*x^2*y^2 + 5*y + 7*x^2;
(%o39)
```
$$4\,x^2\,y^2+5\,y+7\,x^2$$

```
(%i40) ca(z);
(%o40)
```
$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&4\\5&0&0\\0&0&7\end{pmatrix}$$

```
(%i41) S    : ['z=z,     'z_x=z_x,     'z_y=z_y];
(%o41)
```
$$\left[z=4\,x^2\,y^2+5\,y+7\,x^2,z_x=8\,x\,y^2+14\,x,z_y=8\,x^2\,y+5\right]$$

```
(%i42) Sca  : ['z=ca(z), 'z_x=ca(z_x), 'z_y=ca(z_y)];
(%o42)
```
$$\left[z=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&4\\5&0&0\\0&0&7\end{pmatrix},z_x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&8&0\\0&0&0\\0&14&0\end{pmatrix},z_y=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&8\\5&0&0\end{pmatrix}\right]$$

```
(%i43) E5     _s_ Sca;
(%o43)
```
$$\begin{pmatrix}d\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&4\\5&0&0\\0&0&7\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&8&0\\0&0&0\\0&14&0\end{pmatrix}\mathrm{dx}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&8\\5&0&0\end{pmatrix}\mathrm{dy} & = & 0\\ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&4\\5&0&0\\0&0&7\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&8&0\\0&0&0\\0&14&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&8\\5&0&0\end{pmatrix}\left(\frac{d}{dx}y\right) & = & 0\\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&4\\5&0&0\\0&0&7\end{pmatrix} & = & C & & \end{pmatrix}$$

```
(%i44) imp  : z = C;
(%o44)
```
$$4\,x^2\,y^2+5\,y+7\,x^2=C$$