

Cálculo 2 - 2024.2

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.2-C2.html>

Links

Dicas:

1) Nestas questões o que vai contar mais pontos é você organizar as contas de modo que cada passo seja fácil de entender, de verificar, e de justificar – “chegar no resultado certo” vai valer relativamente pouco.

2) Recomendo que vocês usem o método das “caixinhas de anotações” nas mudanças de variável... numa caixinha de anotações a primeira linha diz a relação entre a variável nova e a antiga, todas as outras linhas são consequências da primeira, e dentro da caixinha de anotações você pode usar as gambiarras com variáveis dependentes e diferenciais, como isto aqui: $dx = 42 du...$

3) ...por exemplo:

$$\left[\begin{array}{l} s = \sin \theta \\ \sqrt{1 - s^2} = \cos \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ \theta = \arcsen s \end{array} \right]$$

4) Façam o requerimento de revisão de prova! Eu vou ser super rígido na correção mas a banca de revisão não costuma ser!

Anexo

Os meus critérios de correção vão ser os que estão no PDFzinho “Introdução ao curso”:

<http://anggtwu.net/LATEX/2024-2-C2-intro.pdf>

A gente já discutiu eles em sala muitas vezes, e vocês já devem ter relido eles muitas vezes também. *Esse PDFzinho tem várias páginas sobre as bancas de revisão de provas e sobre porque em muitos casos eu vou recomendar que as pessoas façam requerimentos de revisão de provas pra que as provas delas sejam recorrigidas com outros critérios.*

Eu avisei no dia da prova que depois eu iria escrever bem mais coisas sobre como essas bancas de revisão têm funcionado. Esse material que eu só consegui organizar depois da prova está neste link:

<http://anggtwu.net/2024-rev.html>

Vou copiar as seções 3 e 5 dessa página pra cá.

3. Para alinhar...

No processo administrativo contra mim apareceram várias frases como:

- Para alinhar o trabalho dos professores...
- Reprove todo os alunos que não souberem o suficiente

- Com respeito às boas práticas de ensino...
- Com base na experiência que os professores desta banca têm com as disciplinas...
- O seu material não está dando o resultado que você acha que está
- Peça ajuda

...mas eu *continuo* sem saber praticamente nada...

- sobre como eles dão os cursos deles,
- sobre o que eles consideram “suficiente” em cada matéria,
- sobre o que eles consideram “boas práticas”,
- sobre qual é “a experiência que os professores desta banca têm com as disciplinas”,
- sobre o material que eles usam nos cursos deles,
- sobre o que eles consideram que é “pedir ajuda”,
- e sobre o que eles consideram que é “ajudar”...

Anexo (cont.)

5. Isso me atrapalha?

Isso - das bancas de revisão usando critérios de correção que eu não consigo descobrir quais são - me atrapalha? Olha, *sim* - deixa eu explicar porquê.

Durante um certo tempo eu consegui convencer os meus alunos de que o meu curso de Cálculo 2 seria “muito presencial”: eu iria adaptar ele pro nível dos alunos, e os alunos que não sabiam o suficiente de Matemática do Ensino Médio iriam conseguir se virar bem - *se eles participassem das aulas, fizessem os exercícios, me mostrassem as dúvidas que eles estavam tendo, e treinassem um pouco em casa...* e os alunos que tentassem só aprender métodos de resolver integrais e EDOs em casa por vídeos que eles nunca me mostram quais são provavelmente iriam se dar mal nas provas, porque eles não iriam aprender as técnicas pra evitar erros que a gente iria aprender em sala, e além disso ia ser relativamente difícil colar nas provas...

Aí as bancas de revisão começaram a aprovar alunos que só mostravam que sabiam um pouquinho de como aplicar certos métodos, e resolveram não dar bola pros casos em que vários alunos cometiam exatamente o mesmo erro bobo exatamente no mesmo ponto das contas... e com isso a “moral da tropa” em sala caiu muito - antes muitos alunos faziam muitos exercícios em grupo na sala “porque não tem outro jeito”, mas agora esse “porque não tem outro jeito” não é mais verdade... aí com isso vários alunos desistem de participar ativamente das aulas, e resolvem que vão só tentar descobrir os critérios de correção da banca de revisão - e vão tentar descobrir a) os vídeos certos pra assistir em casa, e b) jeitos que colar que a banca de revisão aceite.

Várias páginas da minha “Introdução ao curso de Cálculo 2” de 2024.2 são sobre isso. Dê uma olhada:

<http://anggtwu.net/LATEX/2024-2-C2-intro.pdf>

Questão 1**(Total: 4.0 pts)**

Sejam (*) e (**) estas integrais:

$$\int x^3 \sqrt{1-x^2} dx \quad (*)$$

$$\int 4x^3 \sqrt{25-x^2} dx \quad (**)$$

- a) **(2.0 pts)** Suponha que a gente sabe integrar (*). Transforme a (**) em algo que a gente sabe integrar.
- b) **(1.0 pts)** Suponha que a gente não sabe integrar (*). Resolva (*) por substituição trigonométrica.
- c) **(1.0 pts)** Teste o resultado que você obteve no item (b).

Questão 2**(Total: 2.5 pts)**a) **(2.0 pts)** Transforme

$$\frac{x^3 + 6x^2 - 22x - 55}{x^2 + 4x - 21}$$

em algo fácil de integrar.

b) **(0.5 pts)** Integre:

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 - 22x - 55}{x^2 + 4x - 21} dx$$

Questão 3**(Total: 2.5 pts)**a) **(2.0 pts)** Transforme

$$(\cos x)(\cos 5x)^2$$

em algo fácil de integrar usando o “método do E”, que na terminologia do Maxima é o método do *exponentialize* e do *demoivre*. As dicas são essas aqui:

$$\begin{aligned} c &= \cos \theta & c^2 + s^2 &= 1 & \frac{ds}{d\theta} &= c & E &= c + is \\ s &= \sin \theta & z^2 = t^2 + 1 & & \frac{dt}{d\theta} &= -s & c &= \frac{E+E^{-1}}{2} \\ t &= \tan \theta & \sqrt{1-s^2} = c & & \frac{dt}{d\theta} &= z^2 & s &= \frac{E-E^{-1}}{2i} \\ z &= \sec \theta & \sqrt{t^2+1} = z & & \frac{dz}{d\theta} &= zt & e^{ik\theta} + e^{-ik\theta} &= 2 \cos k\theta \\ E &= e^{i\theta} & \sqrt{z^2-1} = t & & & & e^{ik\theta} - e^{-ik\theta} &= 2i \sin k\theta \end{aligned}$$

b) **(0.5 pts)** Integre:

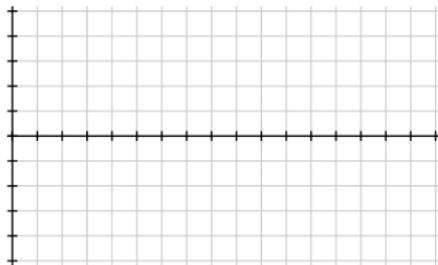
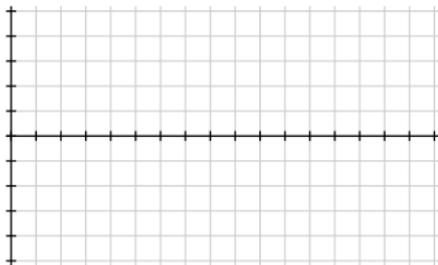
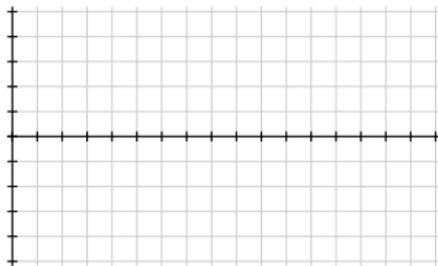
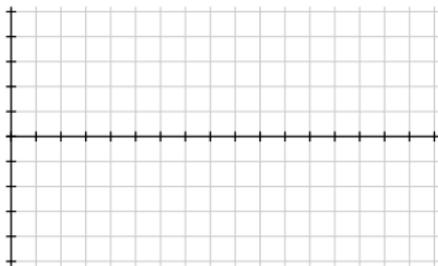
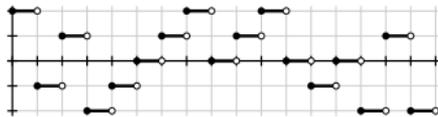
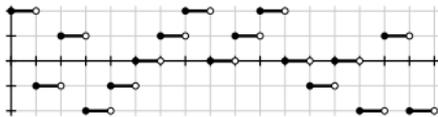
$$\int (\cos x)(\cos 5x)^2 dx$$

Questão 4**(Total: 1.0 pts)**Seja $f(t)$ a função no topo da página seguinte.

Seja

$$F(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t) dt.$$

Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.



Questão 1: gabarito

$$\begin{aligned}
 \text{1a) } & \int 4x^3 \sqrt{25 - x^2}^3 dx \\
 &= \int 4x^3 \sqrt{5^2 - x^2}^3 dx \\
 &= \int 4x^3 \sqrt{5^2 - \left(\frac{x}{5}\right)^2}^3 dx \\
 &= \int 4x^3 \sqrt{5^2 \left(1 - \frac{x^2}{5^2}\right)}^3 dx \\
 &= \int 4x^3 \left(\sqrt{5^2 \left(1 - \frac{x^2}{5^2}\right)}\right)^3 dx \\
 &= \int 4x^3 \left(\sqrt{5^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{5^2}}\right)^3 dx \\
 &= \int 4x^3 \cdot 5^3 \sqrt{1 - \frac{x^2}{5^2}}^3 dx \\
 &= 4 \cdot 5^3 \int x^3 \sqrt{1 - \frac{x^2}{5^2}}^3 dx \\
 &= 4 \cdot 5^3 \int x^3 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{5}\right)^2}^3 dx \\
 &= 4 \cdot 5^3 \int (5u)^3 \sqrt{1 - u^2}^3 \cdot 5 du \\
 &= 4 \cdot 5^3 \int 5^3 u^3 \cdot 5 \sqrt{1 - u^2}^3 du \\
 &= 4 \cdot 5^3 \int 5^4 u^3 \sqrt{1 - u^2}^3 du \\
 &= 4 \cdot 5^4 \cdot 5^3 \int u^3 \sqrt{1 - u^2}^3 du
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 u = x/5 \\
 x = 5u \\
 dx = 5du
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{1b) } & \int x^3 \sqrt{1 - x^2}^3 dx \\
 &= \int s^3 \sqrt{1 - s^2}^3 ds \\
 &= \int (\sin \theta)^3 (\cos \theta)^3 \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\sin \theta)^3 (\cos \theta)^4 d\theta \\
 &= \int (\cos \theta)^4 (\sin \theta)^3 d\theta \\
 &= \int (\cos \theta)^4 (\sin \theta)^2 \sin \theta d\theta \\
 &= \int (\cos \theta)^4 (1 - (\cos \theta)^2) \sin \theta d\theta \\
 &= \int c^4 (1 - c^2) (-1) dc \\
 &= \int c^4 (c^2 - 1) dc \\
 &= \int c^6 - c^4 dc \\
 &= \frac{c^7}{7} - \frac{c^5}{5} \\
 &= \frac{(\cos \theta)^7}{7} - \frac{(\cos \theta)^5}{5} \\
 &= \frac{(\sqrt{1-s^2})^7}{7} - \frac{5(\sqrt{1-s^2})^5}{5} \\
 &= \frac{(\sqrt{1-x^2})^7}{7} - \frac{5(\sqrt{1-x^2})^5}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 s = \sin \theta \\
 \sqrt{1 - s^2} = \cos \theta \\
 \frac{ds}{d\theta} = \cos \theta \\
 ds = \cos \theta d\theta \\
 \theta = \arcsen s
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 c = \cos \theta \\
 \frac{dc}{d\theta} = -\sin \theta \\
 \sin \theta d\theta = (-1)dc
 \end{cases}$$

Questão 2: gabarito

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 - 22x - 55 &= (x^2 + 4x - 21)(x + 2) - 9x - 13 \\ x^2 + 4x - 21 &= (x - 3)(x + 7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 6x^2 - 22x - 55}{x^2 + 4x - 21} &= \frac{(x^2 + 4x - 21)(x + 2) - 9x - 13}{x^2 + 4x - 21} \\ &= x + 2 + \frac{-9x - 13}{x^2 + 4x - 21} \\ &= x + 2 + \frac{-9x - 13}{(x - 3)(x + 7)} \\ &= x + 2 + \frac{-4}{x - 3} + \frac{-5}{x + 7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 6x^2 - 22x - 55}{x^2 + 4x - 21} dx &= \int x + 2 + \frac{-4}{x - 3} + \frac{-5}{x + 7} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x - 4 \log(x - 3) - 5 \log(x + 7) \end{aligned}$$

Questão 3: gabarito

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{1}{2}(E + E^{-1}) \\
 \cos 5\theta &= \frac{1}{2}(E^5 + E^{-5}) \\
 (\cos 5\theta)^2 &= \left(\frac{1}{2}(E^5 + E^{-5})\right)^2 \\
 &= \frac{1}{4}(E^{10} + 2 + E^{-10}) \\
 (\cos \theta)(\cos 5\theta)^2 &= \frac{1}{2}(E + E^{-1}) \cdot \frac{1}{4}(E^{10} + 2 + E^{-10}) \\
 &= \frac{1}{8}(E + E^{-1})(E^{10} + 2 + E^{-10}) \\
 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} E & (E^{10} + 2 + E^{-10}) \\ +E^{-1}(E^{10} + 2 + E^{-10}) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} E^{11} + 2E + E^{-9} \\ +E^9 + 2E^{-1} + E^{-11} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{8}((E^{11} + E^{-11}) + (E^9 + E^{-9}) + 2(E + E^{-1})) \\
 &= \frac{1}{8}(2 \cos 11\theta + 2 \cos 9\theta + 4 \cos \theta) \\
 &= \frac{1}{4} \cos 11\theta + \frac{1}{4} \cos 9\theta + \frac{1}{2} \cos \theta \\
 \int (\cos \theta)(\cos 5\theta)^2 d\theta &= \int \frac{1}{4} \cos 11\theta + \frac{1}{4} \cos 9\theta + \frac{1}{2} \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{4 \cdot 11} \text{sen } 11\theta + \frac{1}{4 \cdot 9} \text{sen } 9\theta + \frac{1}{2} \text{sen } \theta \\
 \int (\cos x)(\cos 5x)^2 dx &= \frac{1}{4 \cdot 11} \text{sen } 11x + \frac{1}{4 \cdot 9} \text{sen } 9x + \frac{1}{2} \text{sen } x
 \end{aligned}$$

Questão 4: gabarito

