Cálculo 2 - 2024.2

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

Dicas:

1) Nestas questões o que vai contar mais pontos é você organizar as contas de modo que cada passo seja fácil de entender, de verificar, e de justificar – "chegar no resultado certo" vai valer relativamente pouco.

2) Recomendo que vocês usem o método das "caixinhas de anotações" nas mudanças de variável... numa caixinha de anotações a primeira linha diz a relação entre a variável nova e a antiga, todas as outras linhas são consequências da primeira, e dentro da caixinha de anotações você pode usar as gambiarras com variáveis dependentes e diferenciais, como isto aqui: $dx = 42\,du$...

3) ...por exemplo:

$$\begin{bmatrix} s = \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\, d\theta \\ \theta = \operatorname{arcsen} s \end{bmatrix}$$

4) Façam o requerimento de revisão de prova! Eu vou ser super rígido na correção mas a banca de revisão não costuma ser!

Questão 1
(Total: 4.0 pts)
Sejam $(*)$ e $(**)$ estas integrais:

$$\int x^3 \sqrt{1-x^2}^3 \, dx \qquad (*)$$

$$\int 4x^3 \sqrt{25-x^2}^3 \, dx \qquad (**)$$

a) **(2.0 pts)** Suponha que a gente sabe integrar $(*)$. Transforme a $(**)$ em algo que a gente sabe integrar.
b) **(1.0 pts)** Suponha que a gente não sabe integrar $(*)$. Resolva $(*)$ por subtituição trigonométrica.
c) **(1.0 pts)** Teste o resultado que você obteve no item (b).

Questão 2
(Total: 2.5 pts)
a) **(2.0 pts)** Transforme

$$\frac{x^3+6\,x^2-22\,x-55}{x^2+4\,x-21}$$

em algo fácil de integrar.
b) **(0.5 pts)** Integre:

$$\int \frac{x^3+6\,x^2-22\,x-55}{x^2+4\,x-21} \, dx$$

Questão 3
(Total: 2.5 pts)
a) **(2.0 pts)** Transforme

$$(\cos x)(\cos 5x)^2$$

em algo fácil de integrar usando o "método do E", que na terminologia do Maxima é o método do `exponentialize` e do `demoivre`. As dicas são essas aqui:

$$\begin{array}{llll}
c = \cos\theta & c^2+s^2=1 & \frac{ds}{d\theta}=c & E=c+is \\
s = \operatorname{sen}\theta & z^2=t^2+1 & \frac{dc}{d\theta}=-s & c=\frac{E+E^{-1}}{2} \\
t = \tan\theta & \sqrt{1-s^2}=c & \frac{dt}{d\theta}=z^2 & s=\frac{E-E^{-1}}{2i} \\
z = \sec\theta & \sqrt{t^2+1}=z & \frac{dz}{d\theta}=zt & e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}=2\cos k\theta \\
E = e^{i\theta} & \sqrt{z^2-1}=t & & e^{ik\theta}-e^{-ik\theta}=2i\operatorname{sen} k\theta
\end{array}$$

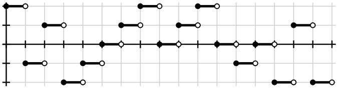
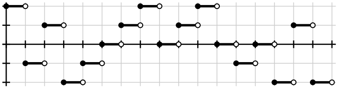
b) **(0.5 pts)** Integre:

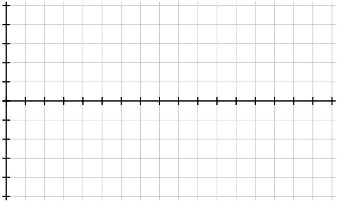
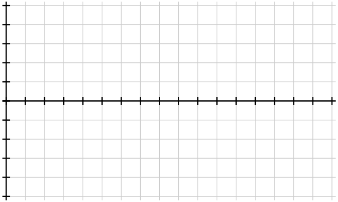
$$\int (\cos x)(\cos 5x)^2 \, dx$$

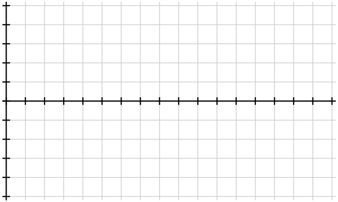
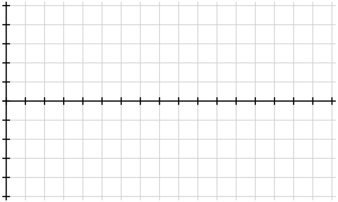
Questão 4
(Total: 1.0 pts)
Seja $f(t)$ a função no topo da página seguinte.
Seja

$$F(x) \;=\; \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt.$$

Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

Questão 1: gabarito

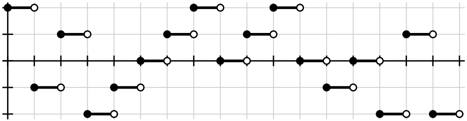
$$
\begin{aligned}
&\int 4x^3\sqrt{25-x^2}^3\,dx\\
&= \int 4x^3\sqrt{5^2-x^2}^3\,dx\\
&= \int 4x^3\sqrt{5^2-(5^2)\tfrac{x^2}{5^2}}^3\,dx\\
&= \int 4x^3\sqrt{5^2(1-\tfrac{x^2}{5^2})}^3\,dx\\
&= \int 4x^3\left(\sqrt{5^2(1-\tfrac{x^2}{5^2})}\right)^3\,dx\\
&= \int 4x^3\left(\sqrt{5^2}\sqrt{(1-\tfrac{x^2}{5^2})}\right)^3\,dx\\
&= \int 4x^3\sqrt{5^2}^3\sqrt{1-\tfrac{x^2}{5^2}}^3\,dx\\
&= \int 4x^3\cdot 5^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-\tfrac{x^2}{5^2}}^3\,dx\\
&= 4\cdot 5^{\frac{2}{3}}\int x^3\sqrt{1-\tfrac{x^2}{5^2}}^3\,dx\\
&= 4\cdot 5^{\frac{2}{3}}\int x^3\sqrt{1-(\tfrac{x}{5})^2}^3\,dx\\
&= 4\cdot 5^{\frac{2}{3}}\int (5u)^3\sqrt{1-u^2}^3\cdot 5\,du\\
&= 4\cdot 5^{\frac{2}{3}}\int 5^3u^3\cdot 5\sqrt{1-u^2}^3\,du\\
&= 4\cdot 5^{\frac{2}{3}}\int 5^4u^3\sqrt{1-u^2}^3\,du\\
&= 4\cdot 5^4\cdot 5^{\frac{2}{3}}\int u^3\sqrt{1-u^2}^3\,du
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} u = x/5\\ x = 5u\\ dx = 5du \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int x^3\sqrt{1-x^2}^3\,dx\\
&= \int s^3\sqrt{1-s^2}^3\,ds\\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)^3\cos\theta\,d\theta\\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)^4\,d\theta\\
&= \int (\cos\theta)^4(\operatorname{sen}\theta)^3\,d\theta\\
&= \int (\cos\theta)^4(\operatorname{sen}\theta)^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta\\
&= \int (\cos\theta)^4(1-(\cos\theta)^2)\operatorname{sen}\theta\,d\theta\\
&= \int c^4(1-c^2)(-1)\,dc\\
&= \int c^4(c^2-1)\,dc\\
&= \int c^6-c^4\,dc\\
&= \tfrac{c^7}{7}-\tfrac{c^5}{5}\\
&= \tfrac{(\cos\theta)^7}{7}-\tfrac{(\cos\theta)^5}{5}\\
&= \tfrac{(\sqrt{1-s^2})^7}{7}-\tfrac{(\sqrt{1-s^2})^5}{5}\\
&= \tfrac{(\sqrt{1-x^2})^7}{7}-\tfrac{(\sqrt{1-x^2})^5}{5}\\
&= \tfrac{(\sqrt{1-x^2})^2(\sqrt{1-x^2})^5}{7}-\tfrac{(\sqrt{1-x^2})^5}{5}\\
&= \tfrac{(1-x^2)(\sqrt{1-x^2})^5}{7}-\tfrac{(\sqrt{1-x^2})^5}{5}\\
&= \tfrac{5(1-x^2)(\sqrt{1-x^2})^5}{35}-\tfrac{7(\sqrt{1-x^2})^5}{35}\\
&= \tfrac{(\sqrt{1-x^2})^5}{35}(5(1-x^2)-7)\\
&= \tfrac{(\sqrt{1-x^2})^5}{35}(5-5x^2-7)\\
&= \tfrac{(\sqrt{1-x^2})^5}{35}(-2-5x^2)
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} s = \operatorname{sen}\theta\\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta\\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta\\ ds = \cos\theta\,d\theta\\ \theta = \operatorname{arcsen} s \end{bmatrix}
$$

Questão 1: gabarito

Questão 4: gabarito

$$f(x) \ =$$



$$F(x) \ = \ \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt \ =$$