

Cálculo 3 - 2024.1

Aula 17: séries de Taylor e Maclaurin
(para funções de \mathbb{R} em \mathbb{R})

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
<http://anggtwu.net/2024.1-C3.html>

Links

StewPtCap3p73 (p.226) 3.10 Aproximações Lineares e Diferenciais

StewPtCap11p61 (p.679) 11.10 Séries de Taylor e Maclaurin

StewPtCap11p63 (p.681) polinômio de Taylor de n-ésimo grau

StewPtCap11p67 (p.685) Exemplo 7: ...em colunas

Leit3p9 (p.145) Notações para “at”: $f'(x_1)$ e $\frac{d}{dx}]_{x=x_1}$

Leit11p29 (p.677) 11.5. A fórmula de Taylor

Leit11p32 (p.680) Figura 6: seno ... MacLaurin de graus 1, 3, 5 e 7

Miranda117 4.7 Aproximações Lineares e Diferencial

Miranda168 5.9 Polinômio de Taylor

<http://anggtwu.net/MAXIMA/mkmatrix1.mac.pyg.html>

<http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#2024.1-taylor-1>

(find-es "maxima" "2024.1-taylor-1")

A idéia básica

Digamos que $f(x)$ é um polinômio.

Digamos que o grau dele é 4, pra simplificar.

Digamos que $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$.

Então:

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 & f(0) = a & a = f(0) \\
 f'(x) = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 & f'(0) = b & b = f'(0) \\
 f''(x) = 2c + 6dx + 12ex^2 & f''(0) = 2c & c = f''(0)/2 \\
 f'''(x) = 6d + 24ex & f'''(0) = 6d & d = f'''(0)/6 \\
 f''''(x) = 24e & f''''(0) = 24e & e = f''''(0)/24
 \end{array}$$

E portanto:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f''''(0)}{24}x^4$$

A idéia básica (2)

Agora vamos tentar generalizar isso.

Digamos que $f(x)$ é um polinômio.

Digamos que o grau dele é k , e que **por enquanto** $k = 4$.

Digamos que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$.

A notação $f^{(k)}$, como o (k) entre parênteses, quer dizer “ f derivada k vezes”. Por exemplo, $f^{(4)} = f''''$, e $f^{(0)} = f$.

Então:

$$\begin{array}{llll}
 f^{(0)}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 & f^{(0)}(0) = 0! a_0 & a_0 = f^{(0)}(0)/0! \\
 f^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 & f^{(1)}(0) = 1! a_1 & a_1 = f^{(1)}(0)/1! \\
 f^{(2)}(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 & f^{(2)}(0) = 2! a_2 & a_2 = f^{(2)}(0)/2! \\
 f^{(3)}(x) = 6a_3 + 24a_4x & f^{(3)}(0) = 3! a_3 & a_3 = f^{(3)}(0)/3! \\
 f^{(4)}(x) = 24a_4 & f^{(4)}(0) = 4! a_4 & a_4 = f^{(4)}(0)/4!
 \end{array}$$

E portanto:

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Exercício 1.

A fórmula do slide anterior também funciona pra polinômios com grau menor que 4.

Verifique o que ela faz quando

$$f(x) = 42x^2 + 99x + 200.$$

Lembre que no ensino médio você era obrigado a “simplificar” $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 999$ para 119880, mas em Cálculo 2 você tem que encontrar jeitos de escrever que sejam mais simples de ler e de verificar... pra gente **em certos contextos** $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 999$ é mais “simples” que 119880.

Exercício 2.

Tente aplicar a fórmula (*) abaixo

$$f(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad (*)$$

a esta f aqui: $f(x) = 200x^5$.

a) O que acontece?

b) Tente escrever em detalhes o que dá errado.

Você vai precisar de notação matemática **E** português.

Tente aprender as convenções que eu usei nos PDFs

e as convenções que os livros usam, e lembre que se

você começar escrevendo uma igualdade qualquer leitor

que não seja muito seu amigo vai interpretá-la

como uma **afirmação**.

As operações derivs e derivs_0

Sejam derivs e derivs_0 as seguintes operações – que vão nos ajudar muito nas contas:

$$\begin{aligned}\text{derivs}(f) &= (f, f', f'', f''', \dots) \\ \text{derivs}_0(f) &= (f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \dots)\end{aligned}$$

Repare que $\text{derivs}(f)$ retorna uma sequência infinita de **funções** e $\text{derivs}_0(f)$ retorna uma sequência infinita de **números**.

Um exemplo: se $f(x) = ax^2 + bx + c$, então:

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^2 + bx + c, & f(0) &= c, \\ f'(x) &= 2ax + b, & f'(0) &= b, \\ f''(x) &= 2a, & f''(0) &= 2a, \\ f'''(x) &= 0, & f'''(0) &= 0,\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}\text{derivs}(f) &= (ax^2 + bx + c, 2ax + b, 2a, 0, 0, 0, \dots) \\ \text{derivs}_0(f) &= (c, b, 2a, 0, 0, 0, \dots)\end{aligned}$$

Algumas definições

Isto aqui

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

é a *série de Taylor da função f no ponto 0 truncada até grau n* , e isto aqui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

ou:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

é a *série de Taylor da função f no ponto 0* .

Exercício 3.

Seja $f(x) = \text{sen } x$.

- Calcule as 8 primeiras componentes de $\text{derivs}(f)$.
- Calcule as 8 primeiras componentes de $\text{derivs}_0(f)$.
- Calcule a série de Taylor de $\text{sen } x$ truncada até grau 7.
- Seja $g(x)$ a série de Taylor de $\text{sen } x$ truncada até grau 7; Calcule $g(0.1)$ **na mão** e compare o seu resultado com o resultado de calcular $\text{sen } 0.1$ na calculadora ou no computador.

Exercício 4.

Calcule $\text{deriv}_s(f)$ e $\text{deriv}_0(f)$ para cada uma das 'f's abaixo, até o grau pedido.

a) $f(x) = e^x$, até grau 4

b) $f(x) = e^{2x}$, até grau 4

c) $f(x) = e^{ix}$, até grau 8

d) $f(x) = \cos x$, até grau 8

e) $f(x) = \text{sen } x$, até grau 8

f) $f(x) = i \text{sen } x$, até grau 8

g) $f(x) = \cos x + i \text{sen } x$, até grau 8

A notação com ‘ \approx ’

O sinal ‘ \approx ’ que dizer “é aproximadamente igual a”,
mas ele não diz quão boa é a aproximação...

Estas duas afirmações são ambas verdadeiras:

$$f(0.42) \approx f(0) + f'(0) \cdot 0.42 + \frac{f''(0)}{2}(0.42)^2$$

$$f(0.42) \approx f(0) + f'(0) \cdot 0.42 + \frac{f''(0)}{2}(0.42)^2 + \frac{f'''(0)}{6}(0.42)^3$$

Até dá pra formalizar essa igualdade aqui embaixo
usando um limite - veja a página 4 deste PDF:

<https://people.math.sc.edu/girardi/m142/handouts/10sTaylorPolySeries.pdf>

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

Mas eu não sei como formalizar precisamente
a versão com 0.42 no lugar do x ... = (

As versões truncadas de derivs , derivs_0 e derivs_p

Vamos definir derivs^n e derivs_0^n como as versões “truncadas até grau n ” de derivs e derivs_0 ...

$\text{derivs}^n(f)$ vai ser a lista com as primeiras $n + 1$ entradas de $\text{derivs}(f)$, e $\text{derivs}_0^n(f)$ vai ser a lista com as primeiras $n + 1$ entradas de $\text{derivs}_0(f)$.

Além disso $\text{derivs}_p(f)$ vai ser a lista infinita $(f(p), f'(p), f''(p), \dots)$, e $\text{derivs}_p^n(f)$ vai ser a lista com as primeiras $n + 1$ entradas de $\text{derivs}_p(f)$.

Exemplo:

$$\text{derivs}_{42}^2(f) = (f(42), f'(42), f''(42)).$$

Vamos nos referir a $\text{derivs}_p^n(f)$ como “as derivadas de f até grau n no ponto p ”. Repare que $f(42)$ é a “derivada de f de grau 0 no ponto 42”, $f'(42)$ é a “derivada de f de grau 1 no ponto 42”, etc...

Antes o termo “grau” não servia pra falar de número de vezes que uma função foi derivada, mas agora passou a servir. \Rightarrow

Notação de físicos: introdução

Links:

<https://people.math.sc.edu/girardi/m142/handouts/10sTaylorPolySeries.pdf>

<http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-5.pdf> (páginas 171–173)

<https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf> “Calculus Made Easy” (1914)

<http://angg.twu.net/mathologer-calculus-easy.html>

<http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-notacao-de-fisicos.pdf> (p.5: linearizações)

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-notacao-de-fisicos.pdf>

<http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=117>

Na aula de 2022sep23 a gente usou os links acima
e eu escrevi um montão de coisas no quadro –
que eu vou digitar assim que der!!!

Exercício 5.

Leia a seção 4.7 do livro do Daniel Miranda:

<http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=117>

Os livros mais modernos:

- i) distinguem dx e Δx ,
- ii) escrevem $y = f(x)$ ao invés de $y = y(x)$,
- iii) evitam a convenção $x_1 = x_0 + \Delta x$.

a) Traduza o início da seção 4.7 do Miranda - até o fim da página 118 - pra notação do Thompson. Dicas:

$$\begin{array}{l} f(x) \approx f(p) + f'(p)(x - p) \\ L(x) = f(p) + f'(p)(x - p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

e a função L é exatamente a série de Taylor da função f truncada até grau 1... lembre que nós quase só vimos séries de Taylor no caso em que x_0 era 0, mas ficamos de ver depois o caso em que o “ponto base” não precisava mais ser 0...

Alguns truques de tradução

Truque 1: quando a gente escreve fórmulas “com o mesmo formato” perto uma da outra o leitor tende a ler a segunda ou como uma **tradução** da primeira pra outra notação ou como um **caso particular** da primeira...

Isto aqui é uma tradução de duas das fórmulas da p.117 do D. Miranda pra “notação de físicos”:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(p) + f'(p)(x - p) & \Rightarrow & & f(x_1) &\approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ L(x) &= f(p) + f'(p)(x - p) & & & L(x_1) &= f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \end{aligned}$$

E isto aqui é um caso particular da primeira fórmula:

$$f(4.02) \approx f(4) + f'(4)(4.02 - 4) \quad (*)$$

Repare que a fórmula (*) fica mais clara se escrevermos isto explicitamente:

$$x_1 = 4.02 \quad x_0 = 4$$

...e repare que se a gente tentar escrever isto aqui direto

$$\sqrt{4.02} \approx \sqrt{4} + \sqrt{4}'(4.02 - 4)$$

fica confuso e péssimo — não existe uma notação padrão pra derivada de \sqrt{x} em $x = 4$!!! Aqui a gente TEM que usar um truque novo — a gente tem que dar um nome pra função \sqrt{x} . Por exemplo...

Alguns truques de tradução (2)

Seja $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$.

Então $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, e

$$\begin{aligned} f(4.02) &\approx f(4) + f'(4)(4.02 - 4) \\ \Rightarrow \sqrt{4.02} &\approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02 - 4) \end{aligned}$$

Repare que acima eu só fiz as substituições $f(x) := \sqrt{x}$ e $f'(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}}$ — eu acho que as contas mais mais fáceis de entender se a gente fizer as substituições e as simplificações em passos separados:

$$\begin{aligned} f(4.02) &\approx f(4) + f'(4)(4.02 - 4) \\ \Rightarrow \sqrt{4.02} &\approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02 - 4) \\ &= 2 + \frac{1}{4}(0.02) \\ &= 2 + 0.005 \\ &= 2.005 \\ \sqrt{4.02} &= 2.004993765576342... \end{aligned}$$

A última linha acima tem um '=' ao invés de um '≈', e eu calculei o resultado dela com a calculadora.

A tradução pra notação de físicos

Temos:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

Acho que vocês devem conseguir acreditar nisso aqui...
(a gente pode checar os detalhes depois!)

$$\begin{aligned}g(x_0 + \Delta x) &\approx g(x_0) + g'(x_0)\Delta x + \frac{g''(x_0)}{2}(\Delta x)^2 \\h(x + \Delta x) &\approx h(x) + h'(x)\Delta x + \frac{h''(x)}{2}(\Delta x)^2\end{aligned}$$

E se $y = y(x)$ então:

$$\begin{aligned}y(x + \Delta x) &\approx y + y_x \Delta x + \frac{y_{xx}}{2}(\Delta x)^2 \\y(x + \Delta x) &\approx y + y_x \Delta x + \frac{y_{xx}}{2}(\Delta x)^2 + \frac{y_{xxx}}{6}(\Delta x)^3\end{aligned}$$

Exercício 5.

Digamos que $x_0 = 10$, $f(x) = x^3$, $y_0 = f(x_0)$, $g(y) = \sin y$.

- a) Calcule $\text{deriv}_{x_0}^1(f(x))$.
- b) Calcule $\text{deriv}_{y_0}^1(g(y))$.
- c) Calcule $\text{deriv}_{x_0}^1(g(f(x)))$.

Seja $h(x) = g(f(x))$ — ou seja, $h = g \circ f$.

- d) Calcule $\text{deriv}_{x_0}^2(h(x))$.

Exercício 6.

Este exercício é uma versão mais geral do exercício 4.

Digamos que f e g são funções suaves de \mathbb{R} em \mathbb{R} .

(Uma função é “suave” quando ela pode ser derivada infinitas vezes. A função $|x|$ não é suave).

Digamos que $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = f(x_0)$, e $h = g \circ f$.

a) Calcule $\text{deriv}_{x_0}^2(h(x))$.

Repare que neste caso “calcule” quer dizer algo como “expanda e simplifique a expressão que você obtiver”...

Existem vários tipos de expansão e simplificação, e os programas de computação simbólica dão um nome pra cada tipo e permitem que você escolha quais vão ser aplicadas.

Exercício 7

Agora sejam $y = y(x) = f(x)$ e $z = z(y) = g(y)$.

b) Traduza o seu $\text{deriv}_{x_0}^2(h(x))$ do item (a) pra notação de físicos.

Dica (pequena): $\frac{d}{dx}g(f(x_0)) = z_y y_x$.

c) Calcule $\text{deriv}_{x_0}^3(z)$ usando notação de físicos.

```

(%i1) load      (" /MAXIMA/mkmatrix1.mac")$
(%i2) derivs   (maxn, f) := mklist ([n,0,maxn], diff(f, x, n))$
(%i3) derivs_h (maxn, f) := mkhmatrix([n,0,maxn], diff(f, x, n))$
(%i4) derivs_v (maxn, f) := mkvmatrix([n,0,maxn], diff(f, x, n))$
(%i5) derivs0  (maxn, f) := mklist ([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=0))$
(%i6) derivs0_h (maxn, f) := mkhmatrix([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=0))$
(%i7) derivs0_v (maxn, f) := mkvmatrix([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=0))$
(%i8) derivsx0 (maxn, f) := mklist ([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=x0))$
(%i9) derivsx0_h (maxn, f) := mkhmatrix([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=x0))$
(%i10) derivsx0_v (maxn, f) := mkvmatrix([n,0,maxn], at(diff(f, x, n), x=x0))$

(%i11) derx    (k, f) := diff(f, x, k)$
(%i12) derxat0 (k, f) := at(diff(f, x, k), x=0)$
(%i13) derxatx0 (k, f) := at(diff(f, x, k), x=x0)$
(%i14) derxat0div (k, f) := at(diff(f, x, k), x=0) / k!$
(%i15) derxatx0div (k, f) := at(diff(f, x, k), x=x0) / k!$
(%i16) derxat0divmul (k, f) := at(diff(f, x, k), x=0) / k! * x^k$
(%i17) derxatx0divmul (k, f) := at(diff(f, x, k), x=x0) / k! * (x-x0)^k$
(%i18) at0reconstruct (n, f) := sum(derxat0divmul (k, f), k,0,n)$
(%i19) atx0reconstruct (n, f) := sum(derxatx0divmul (k, f), k,0,n)$

(%i20)
derivs (5, f(x));
(%o20)

$$\left[ f(x), \frac{d}{dx} f(x), \frac{d^2}{dx^2} f(x), \frac{d^3}{dx^3} f(x), \frac{d^4}{dx^4} f(x), \frac{d^5}{dx^5} f(x) \right]$$

(%i21) derivs_h (5, f(x));
(%o21)

$$\left( f(x) \frac{d}{dx} f(x) \frac{d^2}{dx^2} f(x) \frac{d^3}{dx^3} f(x) \frac{d^4}{dx^4} f(x) \frac{d^5}{dx^5} f(x) \right)$$

(%i22) derivs_h (5, sin(x));
(%o22)

$$(\sin x \cos x - \sin x - \cos x \sin x \cos x)$$

(%i23) derivs0_h(5, sin(x));
(%o23)

$$(0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1)$$

(%i24) derivs_v (5, f(x));
(%o24)

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ \frac{d}{dx} f(x) \\ \frac{d^2}{dx^2} f(x) \\ \frac{d^3}{dx^3} f(x) \\ \frac{d^4}{dx^4} f(x) \\ \frac{d^5}{dx^5} f(x) \end{pmatrix}$$

(%i25) p(x) := a + b*x + c*x^2 + d*x^3 + e*x^4;
(%o25)

$$p(x) := a + b x + c x^2 + d x^3 + e x^4$$

(%i26) derx    (3, p(x));
(%o26)

$$24 e x + 6 d$$

(%i27) derxat0 (3, p(x));
(%o27)

$$6 d$$

(%i28) derxat0div (3, p(x));
(%o28)

$$d$$

(%i29) derxat0divmul (3, p(x));
(%o29)

$$d x^3$$

(%i30) derxat0divmul (4, p(x));
(%o30)

$$e x^4$$

(%i31) at0reconstruct(4, p(x));
(%o31)

$$e x^4 + d x^3 + c x^2 + b x + a$$

(%i32) at0reconstruct(3, p(x));
(%o32)

$$d x^3 + c x^2 + b x + a$$

(%i33) p(x) - at0reconstruct(3, p(x));
(%o33)

$$e x^4$$

(%i34) at0reconstruct(7, sin(x));
(%o34)

$$-\left(\frac{x^7}{5040}\right) + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$$


```

```
(%i35) q(x) := a + b*(x-x0) + c*(x-x0)^2 + d*(x-x0)^3 + e*(x-x0)^4;
```

```
(%o35)
```

$$q(x) := a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + d(x - x_0)^3 + e(x - x_0)^4$$

```
(%i36) derivs_v (5, q(x));
```

```
(%o36)
```

$$\begin{pmatrix} b(x-x_0) + e(x-x_0)^4 + d(x-x_0)^3 + c(x-x_0)^2 + a \\ 2c(x-x_0) + 4e(x-x_0)^3 + 3d(x-x_0)^2 + b \\ 6d(x-x_0) + 12e(x-x_0)^2 + 2c \\ 24e(x-x_0) + 6d \\ 24e \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i37) derivsx0_v(5, q(x));
```

```
(%o37)
```

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 2c \\ 6d \\ 24e \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i38) atx0reconstruct(4, q(x));
```

```
(%o38)
```

$$b(x - x_0) + e(x - x_0)^4 + d(x - x_0)^3 + c(x - x_0)^2 + a$$

```
(%i39) atx0reconstruct(3, q(x));
```

```
(%o39)
```

$$b(x - x_0) + d(x - x_0)^3 + c(x - x_0)^2 + a$$

```
(%i40) q(x) - atx0reconstruct(3, q(x));
```

```
(%o40)
```

$$e(x - x_0)^4$$

```

(%i1) load(" /MAXIMA/mkmatrix1.mac")$
(%i2) mkmatrix([x,2,5], x);
(%o2)
(2 3 4 5)

(%i3) mkvmatrix([y,2,5], y);
(%o3)
(2
 3
 4
 5)

(%i4) mkvmatrix([y,5,2,-1], y);
(%o4)
(5
 4
 3
 2)

(%i5) mkmatrix ([x,0,2], [y,5,4,-1], [x,y]);
(%o5)
(0,5] [1,5] [2,5]
[0,4] [1,4] [2,4]

(%i6) diffxyn(f, xn, yn) := diff(diff(f, x, xn), y, yn)$
(%i7) mkmatrix([xn,0,4], [yn,3,0,-1], [xn,yn]);
(%o7)
(0,3] [1,3] [2,3] [3,3] [4,3]
(0,2] [1,2] [2,2] [3,2] [4,2]
(0,1] [1,1] [2,1] [3,1] [4,1]
(0,0] [1,0] [2,0] [3,0] [4,0]

(%i8) mkmatrix([xn,0,2], [yn,2,0,-1], diffxyn(F(x,y), xn, yn));
(%o8)
(∂² F(x,y) ∂² F(x,y) ∂² F(x,y)
 ∂² F(x,y) ∂² F(x,y) ∂² F(x,y)
 F(x,y) F(x,y) F(x,y))

(%i9) mkmatrix([xn,0,3], [yn,3,0,-1], diffxyn(x^2*y^2, xn, yn));
(%o9)
(0 0 0 0)
(2x² 4x 4 0)
(2x²y 4xy 4y 0)
(x²y² 2xy² 2y² 0)

(%i10) mkmatrix([xn,0,3], [yn,3,0,-1], at(diffxyn(x^2*y^2, xn, yn), [x=0,y=0]));
(%o10)
(0 0 0 0)
(0 0 4 0)
(0 0 0 0)
(0 0 0 0)

(%i11) mkmatrix([xn,0,3], [yn,3,0,-1], diffxyn((x-x0)^2*(y-y0)^2, xn, yn));
(%o11)
(0 0 0)
(2(x-x0)² 4(x-x0) 4)
(2(x-x0)²(y-y0) 4(x-x0)(y-y0) 4(y-y0) 0)
(2(x-x0)²(y-y0)² 2(x-x0)(y-y0)² 2(y-y0)² 0)

(%i12) mkmatrix([xn,0,3], [yn,3,0,-1], at(diffxyn((x-x0)^2*(y-y0)^2, xn, yn), [x=0,y=y0]));
(%o12)
(0 0 0 0)
(0 0 4 0)
(0 0 0 0)
(0 0 0 0)

(%i13) aroundx0y0(expr) ::= mkmatrix0([x,2,4], [y,3,1,-1], expr);
(%o13)
aroundx0y0(expr) ::= mkmatrix0([x,2,4],[y,3,1,-1],expr)

(%i14) aroundx0y0([x,y]);
(%o14)
(2,3] [3,3] [4,3]
(2,2] [3,2] [4,2]
(2,1] [3,1] [4,1]

(%i15) [x0,y0] : [3, 2];
(%o15)
[3,2]

(%i16) [Dx,Dy] : [x-x0, y-y0];
(%o16)
[x-3,y-2]

(%i17) aroundx0y0(ev(Dx));
(%o17)
(-1 0 1)
(-1 0 1)
(-1 0 1)

(%i18) mkmatrix([x,0,4], [y,3,0,-1], [x,y]);
(%o18)
(0,3] [1,3] [2,3] [3,3] [4,3]
(0,2] [1,2] [2,2] [3,2] [4,2]
(0,1] [1,1] [2,1] [3,1] [4,1]
(0,0] [1,0] [2,0] [3,0] [4,0]

(%i19) mkmatrix([x,2,4], [y,3,1,-1], [x,y]);
(%o19)
(2,3] [3,3] [4,3]
(2,2] [3,2] [4,2]
(2,1] [3,1] [4,1]

(%i20) aroundx0y0(ev([x,y]));
(%o20)
(2,3] [3,3] [4,3]
(2,2] [3,2] [4,2]
(2,1] [3,1] [4,1]

```

(%i21) aroundx0y0(ev(Dx^2));

(%o21)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i22) aroundx0y0(ev(Dy^2));

(%o22)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i23) aroundx0y0(ev(Dx^2+Dy^2));

(%o23)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(%i24) aroundx0y0(ev(Dx^2-Dy^2));

(%o24)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i25) aroundx0y0(ev(Dx*Dy));

(%o25)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(%i26) aroundx0y0(ev(2+Dx^2));

(%o26)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(%i27) aroundx0y0(ev(2+Dy^2));

(%o27)

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(%i28) aroundx0y0(ev(2+Dx^2+Dy^2));

(%o28)

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(%i29) aroundx0y0(ev(2+Dx^2-Dy^2));

(%o29)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(%i30) aroundx0y0(ev(2+Dx*Dy));

(%o30)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$