# Cálculo 2 - 2024.1

Aulas 19 até 22: Somas de Riemann

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C2.html

# Links

Umas figuras (minhas) que mostram como
definir a integral como dois limites:
2eT95 A integral como limite

Alguns slides da introdução ao curso:
2iT19 Atirei o Pau no Gato
2iT20 Imagens de intervalos

StewPtCap5p8 (p.329) somas superiores e inferiores
StewPtCap5p10 (p.331) pontos amostrais
StewPtCap5p10 (p.331) notação de somatório
StewPtCap5p16 (p.337) definição da integral definida

Miranda207 7.1 Áreas e somas de Riemann
Miranda212 7.2 Integral definida
Miranda213 marcas; $C = \{x_i^*\}$
Miranda217 7.3. Definição 3: soma superior e inferior

Leit5p35 (p.313) Definição 5.4.1: $\sum$
Leit5p35 (p.318) Figura 3
Leit5p36 (p.319) Figura 4
Leit5p41 (p.324) 5.5. A integral definida

Livro de Análise do Ross:
RossAp16 (p.269) The Riemann Integral
2hT12 Imagens de intervalos: o Daniel leva um ano

# Spoiler: descontinuidades

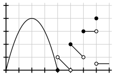
Digamos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função qualquer.
Vamos definir o conjunto dos pontos de descontinuidade da $f$,
ou, pra abreviar, o "conjunto das descontinuidades da $f$", assim:

$$\mathsf{desc}(f) \quad = \quad \{\, x\in[a,b] \mid f \text{ é descontinua em } x \,\}$$

A expressão "$f$ tem um número finito de pontos de descontinuidade",
que eu vou abreviar pra "$f$ tem finitas descontinuidades" apesar
disso soar bem estranho em português, vai querer dizer:

$$\mathsf{desc}(f) \;\text{ é um conjunto finito}$$

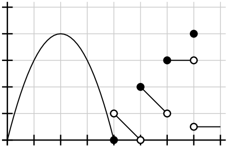
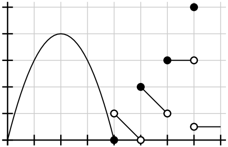
O conjunto vazio é finito, então toda $f$ contínua "tem finitas
descontinuidades". Essa função aqui tem finitas descontinuidades:



A função de Dirichlet, que nós vimos aqui,
2dT104 (2021.2) A função de Dirichlet
tem infinitas descontinuidades.

**Spoiler: descontinuidades (2)**

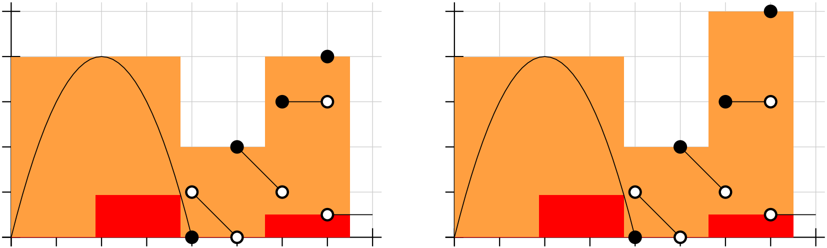
Sejam

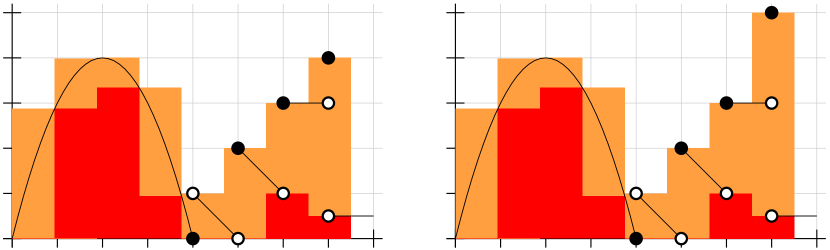
$f(x) =$  e $g(x) =$  .

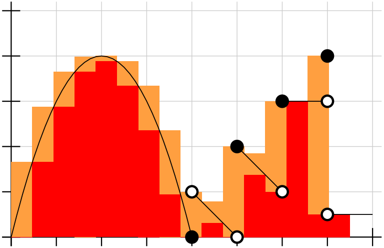
As figuras dos próximos slides mostram

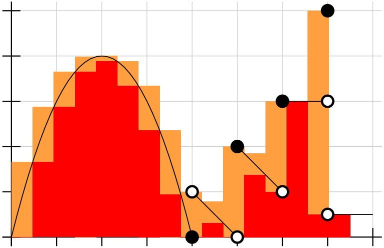
$$\overline{\int}_{[0,7.5]_{2^k}} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \overline{\int}_{[0,7.5]_{2^k}} g(x)\,dx$$

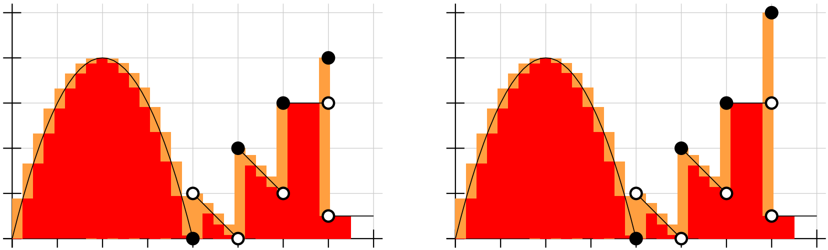
para vários valores de $k$. Use-as pra entender porque "na integral as descontinuidades não importam" — se só tivermos um número finito de descontinuidades.

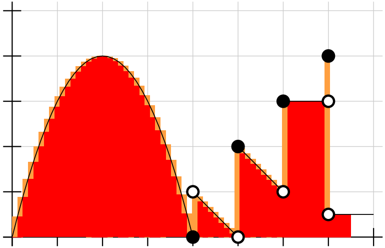


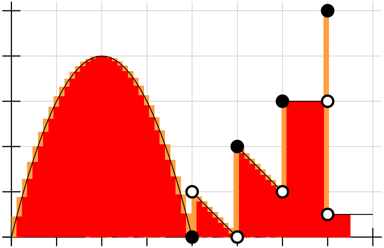


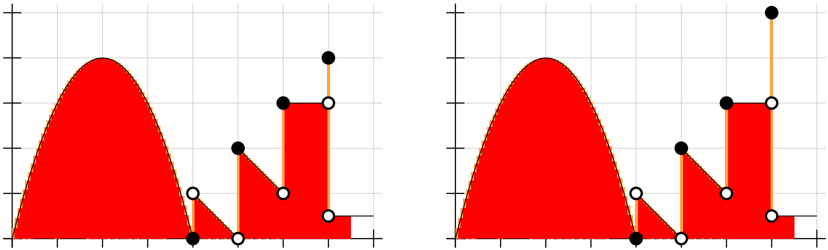










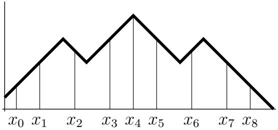


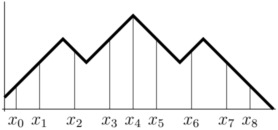
## Montanhas

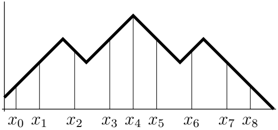
Seja $f(x)$ a função da próxima página – "as montanhas".
Você vai receber (pelo menos) uma cópia dessa página.
Faça cada item abaixo em um dos 12 gráficos da $f(x)$.

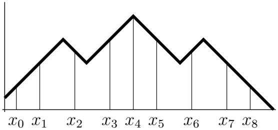
Represente graficamente cada um dos somatórios abaixo.
Se você tiver dificuldade com algum desses somatórios
faça ele em vários passos, como nestes slides:
2fT65 Somatórios
2gT85 Partições, informalmente

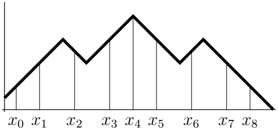
a) $\sum_{i=1}^{8} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$
b) $\sum_{i=1}^{8} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$
c) $\sum_{i=1}^{8} \max(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
d) $\sum_{i=1}^{8} \min(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
e) $\sum_{i=1}^{8} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})(x_i - x_{i-1})$
f) $\sum_{i=1}^{8} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1})$

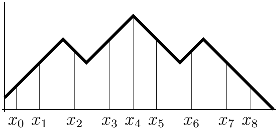

$x_0$ $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$ $x_6$ $x_7$ $x_8$

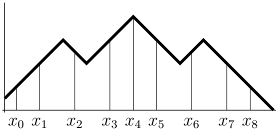

$x_0$ $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$ $x_6$ $x_7$ $x_8$

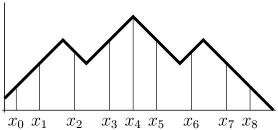

$x_0$ $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$ $x_6$ $x_7$ $x_8$

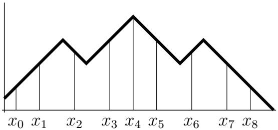

$x_0$ $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$ $x_6$ $x_7$ $x_8$

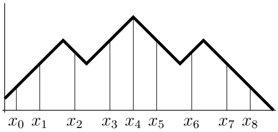

$x_0$ $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$ $x_6$ $x_7$ $x_8$

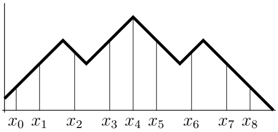

$x_0$ $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$ $x_6$ $x_7$ $x_8$

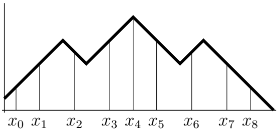

$x_0$ $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$ $x_6$ $x_7$ $x_8$


$x_0$ $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$ $x_6$ $x_7$ $x_8$


$x_0$ $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$ $x_6$ $x_7$ $x_8$


$x_0$ $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$ $x_6$ $x_7$ $x_8$


$x_0$ $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$ $x_6$ $x_7$ $x_8$


$x_0$ $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$ $x_6$ $x_7$ $x_8$

# Miranda: somas inferiores e superiores

Nas páginas 217 e 218 o Miranda define as notações $I(f,P)$ e $S(f,P)$, e lá no meio dessas definições ele define

$$\min_{x\in I} f(x) \qquad \text{e} \qquad \max_{x\in I} f(x)$$

usando o truque do "vire-se": ele mostra uma figura e o leitor tem que se virar pra entender o que essas notações querem dizer... veja: Miranda217 (Definição 3)

**Mais itens pra fazer na figura das montanhas**

a) Entenda o que essas notações do Miranda querem dizer
e verifique que na figura das montanhas temos:

$$\begin{array}{rcl} \max(f(x_1), f(x_2)) & < & \max\limits_{x\in[x_1,x_2]} f(x) \\ \min\limits_{x\in[x_2,x_3]} f(x) & < & \min(f(x_2), f(x_3)) \end{array}$$

e depois represente nas montanhas:

b) $\sum_{i=1}^{8}(\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$

c) $\sum_{i=1}^{8}(\min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$

# Partições, informalmente

Informalmente uma partição de um intervalo $[a,b]$ é um modo de decompor $[a,b]$ em intervalos menores consecutivos. Por exemplo,

$$[2,7]=[2,3.5]\cup[3.5,4]\cup[4,6]\cup[6,7]$$

A definição "certa" é mais complicada... vamos vê-la daqui a pouco. O caso geral da igualdade acima é:

$$[a,b]=[a_1,b_1]\cup[a_2,b_2]\cup\ldots\cup[a_N,b_N],$$

onde:
$N$ é o número de intervalos,
$a=a_1$, $b=b_N$, ("extremidades")
$a_i<b_i$ para todo $i$ em que isto faz sentido ($i=1,\ldots,N$)
$b_i=a_{i+1}$ para todo $i$ e.q.i.f.s.; neste caso, $i=1,\ldots,N-1$

Um jeito prático de definir uma partição é usando uma tabela.
Por exemplo, esta tabela

| $i$ | $a_i$ | $b_i$ | $I_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3.5 | $[2,3.5]$ |
| 2 | 3.5 | 4 | $[3.5,4]$ |
| 3 | 4 | 6 | $[4,6]$ |
| 4 | 6 | 7 | $[6,7]$ |

corresponde à partição de $[2,7]$ do início deste slide.

Compare com:
Miranda212 7.2 Integral definida
Leit5p41 (p.324) 5.5 A integral definida
StewPtCap5p8 (p.329) somas superiores e inferiores
StewPtCap5p10 (p.331) pontos amostrais
StewPtCap5p16 (p.337) definição da integral definida

Uma definição um pouco melhor de partição é a seguinte.
Digamos que $P$ seja um subconjunto não-vazio e finito de $\mathbb{R}$, e que o menor elemento de $P$ seja $a$ e o maior seja $b$.
Então $P$ é uma partição do intervalo $[a,b]$.

Exemplo: a partição $P=\{2,3.5,4,6,7\}$ corresponde a:

$$[2,7]=[2,3.5]\cup[3.5,4]\cup[4,6]\cup[6,7]$$

Pra fazer a tradução da "versão conjunto" pra "versão tabela" ponha os elementos de $P$ em ordem e chame-os de $b_0,\ldots,b_N$; defina cada $a_i$ como sendo $b_{i-1}$ – por exemplo, $a_1=b_0$ – e encontre $a$, $b$, e $N$. Depois que você tem a "versão tabela" é bem fácil obter a "versão união de intervalos".

Quando dizemos algo como "Seja $P$ a partição $\{2.5,4,6\}$" estamos criando um contexto no qual há uma partição "default" definida... e neste contexto vamos ter valores definidos para $N$, $a$, $b$, e para cada $a_i$ e $b_i$. Por exemplo...

Seja $P$ a partição $\{2.5,4,6\}$. Então

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=1}^{N} f(b_i)\cdot(b_i-a_i) & = & \sum_{i=1}^{2} f(b_i)\cdot(b_i-a_i) \\
 & = & f(b_1)\cdot(b_1-a_1) \\
 & + & f(b_2)\cdot(b_2-a_2) \\
 & = & f(4)\cdot(4-2.5) \\
 & + & f(6)\cdot(6-4)
\end{array}$$

## A definição de partição

Se $P$ é um subconjunto finito e não-vazio de $\mathbb{R}$,
então podemos interpretar $P$ como uma partição...
Por exemplo, se $P = \{200, 20, 42, 99, 63, 33, 20, 20\}$
então $P = \{20, 33, 42, 63, 99, 200\}$, e aí vamos interpretar
esse conjunto de 6 pontos – ordenados em ordem crescente –
como uma partição do intervalo $I = [a, b] = [20, 200]$ em
5 subintervalos (“$N = 5$”), assim:

$$\begin{array}{cccccccl}
20 & 33 & 42 & 63 & 99 & 200 & & \\
x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \\
a_1 & b_1 & & & & & & I_1 = [a_1, b_1] \\
& a_2 & b_2 & & & & & I_2 = [a_2, b_2] \\
& & a_3 & b_3 & & & & I_3 = [a_3, b_3] \\
& & & a_4 & b_4 & & & I_4 = [a_4, b_4] \\
& & & & a_5 & b_5 & & I_5 = [a_5, b_5] \\
a & & & & & b & & I = [a, b] = [x_0, x_N]
\end{array}$$

# Exercícios sobre partições

a) Converta esta "partição"

$$[4, 12] = [4, 5] \cup [5, 6] \cup [6, 9] \cup [9, 10] \cup [10, 12]$$

para uma tabela. Neste caso quem são $a$, $b$ e $N$?

b) Seja $P = \{2.5, 3, 4, 6, 10\}$.
Converta $P$ para o "formato tabela" e para o "formato união de subintervalos", que é este aqui:

$$[a, b] = [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_N, b_N].$$

c) Seja $P = \{4, 2, 1, 1.5\}$.
Interprete $P$ como uma partição. Diga quem são o $N$, o $a$ e o $b$ dela e monte a tabela dos subintervalos dela.

d) Seja $P = [2, 4]_6$.
Diga quem são os pontos da partição $P$.

e) Seja $P = [2, 5]_{2^3}$.
Diga quem são os pontos da partição $P$.

**Uma dica sobre simplificação**
No Ensino Médio às vezes convencem a gente de que uma fração como $\frac{6}{4}$ tem que ser simplificada pra $\frac{3}{2}$, mas se a gente tem que listar uma sequência de números começando em 0 em que cada número novo é o anterior mais $\frac{1}{4}$ eu acho bem melhor escrever essa sequência como

$$\frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \ldots$$

do que como:

$$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$$

Lembre destes trechos da Dica 7: 2gT4
"Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar", e "Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal".

## Aviso

As próximas páginas têm definições precisas de: partição, inf e sup, [inf] e [sup], integral definida, e um monte de definições intermediárias que a gente vai precisar pra entender as definições mais importantes...

*O objetivo desta parte do curso é fazer vocês aprenderem um monte de* $\boxed{\textit{técnicas}}$ *pra entenderem definições complicadas "visualizando o que elas querem dizer". Estas técnicas vão ser uma das partes do curso que vão ser mais úteis pras matérias seguintes.*

Aparentemente cada um dos exercícios deste PDF tem um monte de "dicas" de como fazê-lo. A gente normalmente imagina que essas dicas sejam só sugestões de um modo de chegar até o resultado final, mas aqui não é bem assim...

Lembre que neste slide daqui, da "Introdução ao curso",

2hT22 Sobre aulas expositivas

eu falei em "músculos mentais diferentes". Essa idéia vai valer aqui também; por exemplo, nos slides sobre o "Jogo colaborativo" eu digo que é pro jogador $P$ escrever as suas jogadas num determinado formato e pro jogador $O$ escrever as suas respostas num outro formato, e digo que se o jogador $P$ não entender imediatamente a resposta do jogador $O$ é porque o jogador $P$ tem que rever certos exercícios básicos de "set comprehensions"...

*Escrever as jogadas exatamente nesses formatos vai exercitar uma série de músculos mentais bem específicos.*

# Aviso (2)

Quando a gente vê um artista do Cirque de Soleil fazendo um número de aéreos a gente reconhece imediatamente que ele tem uma coordenação motora absurda e que ele tá usando um monte de músculos que a gente nunca usou e um monte de outros músculos que a gente nem sabia que existiam...

Quando a gente vê uma pessoa que entende bem – *e que é capaz de explicar claramente* – cada detalhe de uma definição bizarramente complicada como essa daqui, que o Stewart fez altos malabarismos pra ela caber em 9 linhas,

StewPtCap5p16 (p.337)

é a mesma coisa, só que essa pessoa treinou músculos mentais. *Nos exercícios deste PDFzinho a gente vai treinar vários dos músculos mentais que essas pessoas mais usam – e pra isso a gente vai fazer devagar e por escrito e com desenhos muitas coisas que elas fazem de cabeça.*

Também dá pra comparar o que a gente vai fazer aqui com a historinha deste slide:

2hT11 Atirei o pau no gato

Algumas mudanças de nota no Atirei o pau no gato exigem que a gente levante uns dedos da flauta ao mesmo tempo que a gente abaixa outros... a gente só consegue aprender isso treinando muitas vezes muito devagar, e enquanto a gente não treina bastante o som fica horrível.