Cálculo 2 - 2024.1

Aula 10: integral indefinida
e integração por partes

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C2.html

Links

Miranda181 6 Integral Indefinida
Miranda182 Figura 6.1: antiderivadas de x^2
Miranda207 7 Integração definida
Miranda212 7.2 Integral definida

Leit5p2 (p.285) 5 Integração e integral definida
Leit5p3 (p.286) 5.1 Antidiferenciação
Leit5p4 (p.287) 5.1.3 Teorema: ...em um intervalo I
Leit5p41 (p.324) 5.5 A integral definida

StewPtCap5p16 (p.337) 5.2 A Integral Definida
StewPtCap5p39 (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas
StewPtCap5p40 (p.361) primitiva geral da função $f(x) = 1/x^2$

Miranda199 6.3 Integração por Partes
Leit9p4 (p.531) 9.1. Integração por partes
StewPtCap7p5 (p.420) 7.1 Integração por Partes

Um livro recente da Márcia Fusaro Pinto (da UFRJ):
TLATOCp45 (p.34) ...fearlessly substituting variables...
TLATOCp189 (p.178) 6 Interlude: the ordering of chapters...

Integral indefinida

Tanto o Leithold quanto o Miranda explicam a *integral indefinida* antes da *integral definida*. Dê uma olhada na página de links.

Todos os modos fáceis de atribuir um significado intuitivo para expressões como esta aqui

$$\int f(x)\,dx$$

são gambiarras que funcionam mal.

Eu vou usar esta definição aqui,
2fT23 (p.4) Outra definição para a integral indefinida

e aqui tem um caso em que a definição usual quebra:
2fT24 (p.5) Meme: expanding brain, versão ln

Nós vamos começar usando a integral indefinida como o macaco que faz contas sem ter idéia do significado do que está fazendo, e só depois que tivermos bastante prática nós vamos discutir os vários jeitos de atribuir significados intuitivos para

A regra básica vai ser esta aqui:

$$[\mathrm{II}] = \left(\int f'(x)\,dx = f(x)\right)$$

Exercícios

Calcule:

c) Resolva os exercícios 1 a 10 daqui por chutar e testar:
Miranda185 Exercícios 6.1

d) Entenda tudo que esta nesta página:
Leit5p6 (p.289) 5.1.8. Teorema

A regra do quociente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} g(x)^k &= k g(x)^{k-1} g'(x) \\
\frac{d}{dx} g(x)^{-1} &= -g(x)^{-2} g'(x) \\
\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} &= -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \\
\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \left(\frac{d}{dx} f(x)\right) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)}\right) \\
&= f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right) \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\
\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} g^k &= k g^{k-1} g' \\
\frac{d}{dx} g^{-1} &= -g^{-2} g' \\
\frac{d}{dx} \frac{1}{g} &= -\frac{g'}{g^2} \\
\frac{d}{dx} \frac{f}{g} &= \left(\frac{d}{dx} f\right) \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{g}\right) \\
&= f' \frac{1}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2}\right) \\
&= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\
\frac{d}{dx} \frac{f}{g} &= \frac{f'g - fg'}{g^2}
\end{aligned}$$

A transitividade da igualdade

$$\begin{pmatrix} a+b & = & c+d \\ & = & e+f \\ & = & g+h \\ a+b & = & g+h \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a:=2 \\ b:=9 \\ c:=3 \\ d:=8 \\ e:=4 \\ f:=7 \\ g:=5 \\ h:=6 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2+9 & = & 3+8 \\ & = & 4+7 \\ & = & 5+6 \\ 2+9 & = & 5+6 \end{pmatrix}$$

Linearidade da integral

$$\begin{aligned}
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= F(x) \\
k\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= kF(x) \\
\int_{x=a}^{x=b} kf(x)\,dx &= kF(x) \\
\int_{x=a}^{x=b} kf(x)\,dx &= k\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int f\,dx &= F \\
k\int f\,dx &= kF \\
\int kf\,dx &= kF \\
\int kf\,dx &= k\int f\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int f\,dx &= F \\
\int g\,dx &= G \\
\int f\,dx + \int g\,dx &= F+G \\
\int f+g\,dx &= F+G \\
\int f+g\,dx &= \int f\,dx + \int g\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= F(x) \\
\int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx &= G(x) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx &= F(x)+G(x) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)+g(x)\,dx &= F(x)+G(x) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)+g(x)\,dx &= \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{II}] & = & \left(\int F'(x)\,dx = F(x)\right) \\
[\mathrm{IIC}] & = & \left(\int F'(x)\,dx = F(x) + C\right) \\
[\mathrm{TFC2}] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)|_{x=a}^{x=b}\right) \\
[\mathrm{defdif}] & = & \left(F(x)|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)\right)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int 0\,dx & = & 42 \\
\displaystyle\int 0\,dx & = & 99 \\
42 & = & 99
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int 0\,dx & = & 42 + C \\
\displaystyle\int 0\,dx & = & 99 + C \\
42 + C & = & 99 + C
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_{x=2}^{x=3} 0\,dx & = & 42|_{x=2}^{x=3} \\
\displaystyle\int_{x=2}^{x=3} 0\,dx & = & 99|_{x=2}^{x=3} \\
42|_{x=2}^{x=3} & = & 99|_{x=2}^{x=3}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\int f'g + fg'\,dx &= fg \\
\int f'g + fg'\,dx &= \int f'g\,dx + \int fg'\,dx \\
\int f'g\,dx + \int fg'\,dx &= fg \\
\int fg'\,dx &= fg - \int f'g\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x)\big|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx &= \int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} f(x)g'(x)\,dx \\
\int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x)\big|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x)\big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x)\,dx
\end{aligned}
$$

Integração por partes: um exemplo

Lembre que o Mathologer diz no vídeo dele que o melhor modo da gente aprender Cálculo é começar escrevendo idéias que a gente acha que devem ser verdade, e depois a gente vê se elas dão resultados certos e se elas fazem sentido... e se fizerem sentido a gente tenta formalizar elas.

Ele também diz – a partir daqui, na "lombada número 1",

CalcEasy20:27

que a integral é a inversa da derivada, mas que $\int \cos x\,dx$ pode retornar tanto $\operatorname{sen} x$ quanto $42+\operatorname{sen} x$. As contas à direita são bem improvisadas, mas como eu indiquei em cima que elas são só uma idéia que pode estar cheia de erros o "colega que seja menos meu amigo" não vai poder reagir deste jeito aqui...

2gT20

Exercício 0:
Calcule $\frac{d}{dx}(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x)$.

Idéia (que pode estar cheia de erros):

$$\begin{array}{rcll}
(gh)' & = & g'h + gh' & \text{por} \\
\int (gh)'\,dx & = & \int g'h + gh'\,dx & \\
gh & = & \int g'h + gh'\,dx & \\
 & = & \int g'h\,dx + \int gh'\,dx & \text{por} \\
gh & = & \int g'h\,dx + \int gh'\,dx & \text{por 3 e 4} \\
gh - \int g'h\,dx & = & \int gh'\,dx & \text{por 5} \\
\\
\int gh'\,dx & = & gh - \int g'h\,dx & \text{por 6} \\
\\
\int xe^x\,dx & = & xe^x - \int 1 \cdot e^x\,dx & \text{por 7 com } \left[\begin{smallmatrix} g:=x \\ h:=e^x \end{smallmatrix}\right] \\
 & = & xe^x - \int e^x\,dx & \\
 & = & xe^x - e^x & \text{por } (e^x)' = e^x \\
\int xe^x\,dx & = & xe^x - e^x & \text{por 8, 9 e 10} \\
\\
\int x^2e^x\,dx & = & x^2e^x - \int 2xe^x\,dx & \text{por 7 com } \left[\begin{smallmatrix} g:=x^2 \\ h:=e^x \end{smallmatrix}\right] \\
 & = & x^2e^x - 2\int xe^x\,dx & \text{por} \\
 & = & x^2e^x - 2\,(xe^x - e^x) & \text{por 11} \\
 & = & x^2e^x - 2xe^x + 2e^x &
\end{array}$$