

# Cálculo 2 - 2024.1

Aula 7: exercícios de substituição

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

[2iQ12](#) Quadros da aula 6 (27/mar/2024)

[2iQ14](#) Quadros da aula 7 (01/abr/2024)

[2iQ16](#) Quadros da aula 8 (02/abr/2024)

[2iQ22](#) Quadros da aula 9 (03/abr/2024)

A regra da cadeia em vários livros:

[MirandaP87](#) 3.5 A regra da cadeia

[Leit3p45](#) (p.181) 3.6 A derivada de uma função composta e...

[StewPtCap3p26](#) (p.179) 3.4 A regra da cadeia

[CederjC1V1p115](#) (p.113) Aula 12: A regra da cadeia

[FlemmingP147](#) (p.139) 4.13 Derivada da função composta

A fórmula do TFC2 nem sempre vale:

[2dT231](#) (2021.2)  $F(x) = -x^{-1}$ ,  $F'(x) = x^{-2}$

[2fT107](#) (2022.2) Dicas pra P1

[2fT110](#) (2022.2) P1, questão 3

[2fT114](#) (2022.2) P1, questão 3, gabarito

[2gT108](#) (2023.1) Dicas pra P1

[2gT111](#) (2023.1) P1, questão 4

[2gT116](#) (2023.1) P1, questão 4, gabarito

[2hT179](#) (2023.2) Dicas pra P1

[2hT188](#) (2023.2) P1, questão 4

[2hT193](#) (2023.2) P1, questão 4, gabarito

## Introdução

Vários alunos – obs: eram alunos super dedicados, mas que tinham feito um Ensino Médio super precário, e que tavam tentando tirar o atraso correndo – já me contaram que quando eles tentavam tirar certas dúvidas com o Reginaldo ele respondia coisas como:

“Isso é matéria de ensino médio!  
Isso aí você já deveria saber. Vai estudar pelo livro.”

Eu vou chamar isso de “Método Reginaldo”.

Eu vou tentar fazer algo totalmente diferente. As pessoas *deveriam* estar chegando em Cálculo sabendo obter casos particulares de fórmulas e teoremas muito bem, mas não estão...

Eu *ácho* que o modo mais rápido de tirar as dúvidas dessas pessoas é usando a operação de substituição que nós vamos ver aqui, “[:=]”, que é uma versão **simplificada** das operações de substituição “de verdade” que são usadas em  $\lambda$ -cálculo e em programas como o Lean, e que lidam bem com variáveis livres e ligadas, com tipos dependentes, que usam índices de de-Bruijn nos lugares certos, etc... mas ainda falta! Eu já tenho bastante material sobre isso, mas ele está espalhado...

Ah, e um dia eu vou fazer uma versão desse PDF com um apêndice enorme com um monte de exemplos em que esse “[:=]” simplificado funciona bem e esclarece idéias complicadas (já tenho um monte no material do semestre passado!), e com um monte de exemplos em que esse “[:=]” simplificado funciona mal e a gente precisa das versões mais complicadas... mas ainda falta.

## Funções

Isso aqui é um exemplo de coisa que segundo o Reginaldo “vocês já deveriam saber”, porque é matéria de Ensino Médio:

Digamos que  $f(x) = x^2$ . Então:

$$\begin{aligned} f(200) &= 200^2 \\ f(3u + 4) &= (3u + 4)^2 \\ f(42x^3 + 99) &= (42x^3 + 99)^2 \\ f(a + b) &= (a + b)^2 \\ f(g(x)) &= g(x)^2 \\ 42 + f(200) &= 42 + 200^2 \\ h(f(200)) &= h(200^2) \\ h(f(x)) &= h(x^2) \\ h(f(a + b)) &= h((a + b)^2) \end{aligned}$$

### Exercício 1.

a) Calcule o resultado desta substituição:

$$(f(3u + 4)) [f(y) := y^5 + y^6]$$

Agora seja:

$$[S_1] = [f(y) := y^5 + y^6]$$

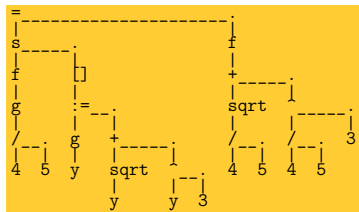
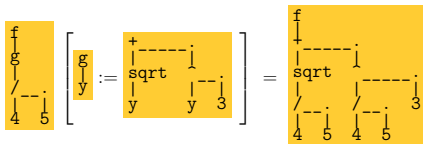
Calcule o resultado destas substituições:

- b)  $f(200) [S_1]$
- c)  $f(3u + 4) [S_1]$
- d)  $f(42x^3 + 99) [S_1]$
- e)  $f(a + b) [S_1]$
- f)  $f(g(x)) [S_1]$
- g)  $42 + f(200) [S_1]$
- h)  $h(f(200)) [S_1]$
- i)  $h(f(x)) [S_1]$
- j)  $h(f(a + b)) [S_1]$
- k)  $f(f(200)) [S_1]$
- l)  $h(x) [S_1]$
- m)  $h(y) [S_1]$

## Dica

Entenda isto aqui:

$$f(g(4/5)) [g(y) := \sqrt{y} + y^3] = f\left(\sqrt{4/5} + (4/5)^3\right)$$



## Mais sobre chutar e testar

Uma solução pra equação  $x^2+1 = 50$  é um modo de preencher os dois ‘?’s daqui que faça as duas igualdades externas serem verdadeiras:

$$(x^2 + 1 = 50) [x := ?] = ? = \mathbf{V}$$

As soluções são  $x = 7$  e  $x = -7$ . Olha:

$$\begin{aligned}(x^2 + 1 = 50) [x := 7] &= (7^2 + 1 = 50) = \mathbf{V} \\ (x^2 + 1 = 50) [x := -7] &= ((-7)^2 + 1 = 50) = \mathbf{V}\end{aligned}$$

Como é difícil chegar direto na solução eu costumo pedir pras pessoas começarem preenchendo os dois ‘?’s daqui,

$$(x^2 + 1 = 50) [x := ?] = ?$$

começando pelo da esquerda, pra fazer com que a igualdade externa seja verdadeira. Por exemplo:

$$(x^2 + 1 = 50) [x := 4] = (4^2 + 1 = 50)$$

Se a pessoa consegue pelo menos preencher o ‘?’ da esquerda daqui

$$(x^2 + 1 = 50) [x := ?] = ?$$

com uma expressão qualquer, como aqui,

$$(x^2 + 1 = 50) [x := a + b] = ?$$

...aí eu geralmente consigo convencer ela de que ela pode usar isto pra treinar substituições... por exemplo:

$$\begin{aligned}(x^2 + 1 = 50) [x := a + b] &= ((a + b)^2 + 1 = 50) \\ (x^2 + 1 = 50) [x := 2] &= (2^2 + 1 = 50) \\ (x^2 + 1 = 50) [x := 3] &= (3^2 + 1 = 50)\end{aligned}$$

Depois que ela treinou isso bastante eu posso pedir que ela faça algo parecido usando este molde aqui,

$$(x^2 + 1 = 50) [x := ?] = ? = ?$$

e substituindo o último ‘?’ por **V** ou **F**. Por exemplo:

$$\begin{aligned}(x^2 + 1 = 50) [x := 5] &= (5^2 + 1 = 50) = \mathbf{F} \\ (x^2 + 1 = 50) [x := 6] &= (6^2 + 1 = 50) = \mathbf{F} \\ (x^2 + 1 = 50) [x := 7] &= (7^2 + 1 = 50) = \mathbf{V}\end{aligned}$$

e aí *geralmente* as pessoas conseguem voltar pro problema original do início da coluna da esquerda e entender ele. Mas às vezes isso não funciona – e aí eu tenho que lembrar a pessoa que ela se comprometeu a ler essas coisas aqui pra entender a metodologia do curso:

Slogans01:10 até 08:51: duas histórias verídicas sobre GA 2iT5, 2iT6 “Meu objetivo é reprovar pessoas como você”

# Equações diferenciais

O Stewart define a solução de uma equação diferencial nesta página aqui,

StewPtCap9p8 (p.528) Equações diferenciais gerais e com estas frases (obs: a “equação 4” é  $y' = xy$ ):

Uma função  $f$  é denominada *solução* de uma equação diferencial se a equação é satisfeita quando  $y = f(x)$  e suas derivadas são substituídas na equação. Assim,  $f$  é uma solução da Equação 4 se

$$f(x) = xf(x)$$

para todos os valores de  $x$  em algum intervalo.

Eu vou ser um pouco mais porco que ele, e ao invés de falar “em algum intervalo” eu vou falar “sempre”.

Pra mim  $f(x) = e^{2x}$  é uma solução da equação diferencial  $f(x) = 2f'(x)$  porque isto aqui é verdade:

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \end{bmatrix} = (e^{2x} = e^{2x}) = \mathbf{V}$$

...e uma solução da equação diferencial  $f(x) = 2f'(x)$  é algo que a gente põe no primeiro ‘?’ daqui,

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ f'(x) := ? \end{bmatrix} = ? = \mathbf{V}$$

num modo de completar isso que faz com que todas as igualdades externas sejam verdadeiras.

Por exemplo, vamos testar se  $f(x) = 42$  é uma solução da equação diferencial  $f(x) = e^{2x}$ . Temos:

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := ? \end{bmatrix} = ? = ?$$

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{bmatrix} = ? = ?$$

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 42 \end{bmatrix} = (0 = 2 \cdot 42) = ?$$

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{bmatrix} = (0 = 2 \cdot 42) = \mathbf{F}$$

## Exercício 2.

a) Verifique que  $f(x) = 0$  é uma solução da equação diferencial  $f(x) = e^{2x}$ .

b) Verifique que  $f(x) = 99x$  não é uma solução da equação diferencial  $f(x) = e^{2x}$ . Dica: você vai ter que decifrar isto aqui: “ $(99 = 2 \cdot 99x) = \mathbf{F}$  porque  $99 = 2 \cdot 99x$  não é verdade sempre”.

## Antes de continuar...

Antes da gente continuar faça todos os itens da coluna da direita – são exercícios que eu preparei alguns semestres atrás.

Sejam:

$$[4] = \left( f'(x) = x^4 \right)$$

$$[5] = \left( f'(x) = 2f(x) \right)$$

$$[6] = \left( f''(x) + f'(x) = 6f(x) \right)$$

$$[7] = \left( f'(x) = -\frac{1}{f(x)} \right)$$

$$[8] = \left( f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \right)$$

$$[RC] = \left( f(g(x))' = f'(g(x))g'(x) \right)$$

$$[TFC2] = \left( \int_{x=a}^{x=b} f'(x) dx = f(b) - f(a) \right)$$

Note que as expressões [4], [5], [6], [7], [8], são as EDOs deste problema aqui: [2dT13](#) EDOs por chutar e testar.

### Exercício

Calcule o resultado de cada uma das substituições à direita. Lembre que o resultado de uma substituição é sempre uma expressão – não simplifique ela. Deixa eu fazer uma comparação com C: o resultado de substituir cada ocorrência do caracter 'a' pelo caracter '2' no string "a+5" é o string "2+5", não o string "7", e nem o número 7.

- a)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} x := 42 \end{array} \right]$   
 b)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} g(x) := 200 \cdot x \end{array} \right]$   
 c)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} f(y) := y^2 + y^3 \end{array} \right]$   
 d)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} f(y) := e^y \end{array} \right]$   
 e)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} g(x) := 4 \cdot x \end{array} \right]$   
 f)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} f(y) := e^y \\ g(x) := 4 \cdot x \end{array} \right]$   
 g)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} f(y) := y^{1/2} \end{array} \right]$   
 h)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} f(y) := \sqrt{y} \end{array} \right]$   
 i)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} f(y) := \sqrt{y} \end{array} \right]$   
 j)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} g(x) := e^x \\ g'(x) := e^x \end{array} \right]$   
 k)  $f(g(x))'$   $\left[ \begin{array}{l} g(x) := e^x \\ g'(x) := e^x \end{array} \right]$   
 l) [RC]  $\left[ \begin{array}{l} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \end{array} \right]$   
 m) [RC]  $\left[ \begin{array}{l} f(y) := y^{1/2} \\ f'(y) := \frac{1}{2}y^{-1/2} \end{array} \right]$   
 n) [RC]  $\left[ \begin{array}{l} f(y) := \sqrt{y} \\ f'(y) := \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{array} \right]$   
 o) [6]  $\left[ \begin{array}{l} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \\ f''(x) := 4e^{2x} \\ f(x) := e^{3x} \\ f'(x) := 3e^{3x} \\ f''(x) := 9e^{3x} \end{array} \right]$   
 p) [6]  $\left[ \begin{array}{l} f(x) := e^{3x} \\ f'(x) := 3e^{3x} \\ f''(x) := 9e^{3x} \end{array} \right]$   
 q) [TFC2]  $\left[ \begin{array}{l} f(x) := \frac{1}{2}x^2 \\ f'(x) := x \\ a := 0 \\ b := 2 \end{array} \right]$   
 r) [8]  $\left[ \begin{array}{l} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right]$



# Uma integral

Nas aulas 8 e 9 – links:

2iQ16 Quadros da aula 8 (2/abr/2024)

2iQ22 Quadros da aula 9 (3/abr/2024)

nós vimos um argumento visual que mostrava isto aqui,

$$\int_{x=1}^{x=2} x \, dx = 1.5$$

e depois o argumento mais formal abaixo, que dava o mesmo resultado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^2 &= 2x \\ \frac{d}{dx} \frac{x^2}{2} &= x \\ \int x \, dx &= \frac{x^2}{2} \\ \int_{x=a}^{x=b} x \, dx &= \frac{x^2}{2} \Big|_{x=a}^{x=b} \\ \int_{x=1}^{x=2} x \, dx &= \frac{x^2}{2} \Big|_{x=1}^{x=2} \\ &= \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \\ &= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 1.5 \end{aligned}$$

$$\text{por [III]} \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \end{bmatrix}$$

$$\text{por [TFC2]} \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \end{bmatrix}$$

$$\text{por [TFC2]} \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \\ a := 1 \\ b := 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{por [defdif]} \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \\ a := 1 \\ b := 2 \end{bmatrix}$$

Usamos estes nomes pras fórmulas:

$$\text{[III]} = \left( \int F'(x) \, dx = F(x) \right)$$

$$\text{[TFC2]} = \left( \int_{x=a}^{x=b} F'(x) \, dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

$$\text{[defdif]} = \left( F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \right)$$

## A regra da cadeia

Imagina que eu passo esse exercício aqui,

$$\frac{d}{dx} \text{sen } 42x = ?$$

e uma pessoa resolve ele desse jeito:

Queremos encontrar a derivada de  $f(x) = \text{sen } 42x$ . Para tal vamos usar a regra da cadeia. Aplicando o método chegamos ao resultado, que é  $f'(x) = \cos 42x$ .

Repara: essa pessoa gastou um bocadinho de tempo e energia escrevendo a parte em português da resposta dela, e isso não ajudou ela em nada, só atrapalhou... ela chegou no resultado errado, e a solução dela ficou num formato super difícil de debugar – não dá pra eu apontar pra um símbolo dela e dizer “confere isso aqui”!...

Compare a solução dela com esta aqui, em três passos:

$$\begin{aligned} \text{[RC]} &= \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ g(x) := ? \\ f'(x) := ? \\ g'(x) := ? \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x = ? \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := \text{sen } x \\ g(x) := 42x \\ f'(x) := \cos x \\ g'(x) := 42 \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x = \cos(42x) \cdot 42 \right) \end{aligned}$$

Se a pessoa não faz a menor idéia de como eu consegui descobrir o que pôr nos cinco ‘?’s da minha solução em três passos dali da esquerda eu posso expandir a minha solução deste jeito...

$$\begin{aligned} \text{[RC]} &= \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ g(x) := ? \\ f'(x) := ? \\ g'(x) := ? \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x = ? \right) \\ \text{[RCL]} &= \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) \right) \\ \text{[RCL]} \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ g(x) := ? \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x \right) \\ \text{[RCL]} \begin{bmatrix} f(x) := \text{sen } x \\ g(x) := 42x \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := \text{sen } x \\ g(x) := 42x \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x = f'(42x)g'(x) \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := \text{sen } x \\ g(x) := 42x \\ f'(x) := ? \\ g'(x) := ? \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x = ? \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := \text{sen } x \\ g(x) := 42x \\ f'(x) := \cos x \\ g'(x) := 42 \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x = \cos(42x) \cdot 42 \right) \end{aligned}$$

repare que eu introduzi um monte de passos novos, e comecei resolvendo um problema menor que só tinha dois ‘?’s – este aqui:

$$\begin{aligned} \text{[RCL]} &= \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) \right) \\ \text{[RCL]} \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ g(x) := ? \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x \right) \end{aligned}$$

## Renomear

Note que:

$$\underbrace{\left(\frac{d}{dx}f(g(x))\right) \left[ \begin{array}{l} f := h \\ g := k \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} h := g \\ g := k \end{array} \right] [x := t]}_{\left(\frac{d}{dx}h(k(x))\right)} \\ \underbrace{\left(\frac{d}{dx}g(f(x))\right)}_{\left(\frac{d}{dt}g(f(t))\right)}$$

e portanto isto aqui

$$[RC] \left[ \begin{array}{l} f := h \\ f' := h' \\ g := k \\ g' := k' \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} h := f \\ h' := f' \\ k := g \\ k' := g' \end{array} \right] [x := t]$$

deve dar uma versão da regra da cadeia que usa letras diferentes das originais... você consegue descobrir o resultado da substituição acima de cabeça? Se não conseguir faça todos os passos à mão.

O Maxima tem uma operação de substituição, **subst**, em que as substituições são feitas em ordem, e uma outra, **psubst**, em que as substituições são feitas em paralelo. Veja:

[https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima\\_33.html#psubst](https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_33.html#psubst)

Se o nosso ‘[:=]’ for a substituição em paralelo então a gente pode fazer isto aqui:

$$\left(\frac{d}{dx}f(g(x))\right) \left[ \begin{array}{l} f := g \\ f' := g' \\ g := f \\ g' := f' \\ x := t \end{array} \right] = \left(\frac{d}{dt}g(f(t))\right)$$

só que uma vez – em 2022.1 – eu tentei definir formalmente a substituição em paralelo em sala e deu super errado, ninguém entendeu nada... e aí eu vi que era melhor evitar os casos em que a substituição simples e a substituição em paralelo se comportam de formas diferentes.

## Regra da cadeia: exercícios

### Exercícios do Miranda

Lembre que:

$$\text{[RC]} = \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Resolva os exercícios 1–6 e 8–12 daqui:

#### MirandaP89

usando os métodos que você quiser, e depois reescreva o resultado final de cada um neste formato com uma justificativa detalhada à direita, que nós vimos no slide 9:

$$\frac{d}{dt}(3t+4)^5 = 5(3t+4)^4 \cdot 3 \quad \text{por [RC]} \left[ \begin{array}{l} f(x):=x^5 \\ g(x):=3x+4 \\ f'(x):=5x^4 \\ g'(x):=3 \end{array} \right] [x := t]$$

## Muito importante

Cálculo 2 é cheio de fórmulas que parecem incompreensíveis à primeira vista, porque são abstratas demais...

Uma das utilidades mais importantes da operação ‘ $[:=]$ ’ pra gente vai ser *transformar fórmulas nas quais a gente não entende nada em casos particulares dessas fórmulas, que têm vários pedaços que a gente consegue entender*.

Isso aqui é uma fórmula – ou melhor, um “método” – que vai ser um dos assuntos da P2:

$$[M] = \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y) dy = g(x) dx \\ \int h(y) dy = \int g(x) dx \\ \parallel \qquad \qquad \parallel \\ H(y) + C_1 \qquad G(x) + C_2 \\ H(y) = G(x) + C_2 - C_1 \\ \qquad \qquad = G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right)$$

### Exercício muito importante:

Calcule o resultado da substituição abaixo.

Você provavelmente vai conseguir entender as quatro igualdades de baixo do resultado, mas as cinco igualdades de cima ainda não vão fazer sentido nenhum pra você.

$$[M] \left[ \begin{array}{l} g(x) := -2x \\ h(y) := 2y \\ G(x) := -x^2 \\ H(y) := y^2 \\ H^{-1}(u) := \sqrt{u} \end{array} \right] = ?$$