Cálculo 2 - 2024.1

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C2.html

Cálculo 2 - 2024.1

Aula 0: introdução ao curso

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C2.html

Índice

Links

"Meu objetivo é..."

Cálculo 2 tem vários assuntos que funcionam assim: se você tentar aprender o assunto B direto ele é muito, muito, muito difícil, e você vai gastar – digamos – 200 horas de estudo pra aprender ele... mas se você aprender o assunto A primeiro você consegue aprender os dois assuntos, A e B, em 20 horas ao invés de 200.

O caso mais extremo disso é nomear objetos. Nas primeiras aulas do curso nós vamos fazer um monte de exercícios de desenhar funções definidas por casos, como essa aqui:

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{se } x < 2, \\ x-2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

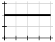
A maioria das pessoas chega em Cálculo 2 achando isso incrivelmente difícil. Elas acham que isso aí não é uma função, são duas, e aí elas fazem um desenho errado, e quando a gente vai discutir pra elas descobrirem os erros eu vejo que elas chamam $f(x)$ de "a função", o gráfico delas de "a função", $3-x$ de "a função", e $x-2$ de "a função".

Se elas aprenderem a "nomear objetos" elas vão conseguir fazer algo como isso aqui,

Sejam:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 3-x & \text{se } x < 2, \\ x-2 & \text{se } x \geq 2, \end{cases} \\ f_1(x) &= 3-x \\ f_2(x) &= x-2 \end{aligned}$$

$f_3(x) =$ 

$f_4(x) =$ 

$f_5(x) =$ 

Então $f(x) = f_5(x)$ para todo x.

...e aí vai ser super rápido ajudar elas a verificarem tudo, e encontrarem o erro.

Aqui – usando os meus número inventados – se uma pessoa gastar 19 horas aprendendo a nomear objetos ela consegue aprender todo o resto em 1 hora, e se ela resolver não aprender a nomear objetos ela vai levar 200 horas pra aprender a desenhar funções definidas por casos.

“Meu objetivo é reprovar pessoas como você”

Aprender a nomear objetos dá um trabalhão, então a maior parte das pessoas resolve que vai deixar pra depois, e aí deixa pra véspera da prova, e se ferra.

Dá pra passar em Cálculo 2 sem aprender a nomear objetos? Dá, você só vai perder 4 pontos na P2, então dá pra passar raspando sim... mas eu já passei da fase em que eu achava ok só avisar as pessoas um montão de vezes e depois dizer “hahaha, se ferrou, eu avisei!!!”...

...então agora eu vou fazer o seguinte: mesmo que você tenha um motivo muito bom pra não aprender a nomear objetos – tipo: você apostou 50000 reais com um grupo de colegas seus que você consegue passar em Cálculo 2 sem aprender a nomear objetos, então vale a pena correr o risco – *eu não vou ajudar as pessoas que resolveram que não vão aprender a nomear objetos*. Se você resolveu que não vai aprender a nomear objetos AGORA, então toda vez que você vier me pedir ajuda eu só vou repetir isso aqui...

> Um dos meus objetivos nesse curso é reprovar as pessoas que não aprenderam a nomear objetos. Se você ainda não sabe nomear objetos então vire uma pessoa que sabe nomear objetos URGENTE!!!

...só que isso é muito comprido, então às vezes eu vou abreviar pra:

> MEU OBJETIVO É REPROVAR PESSOAS COMO VOCÊ!!!

e vou mandar a pessoa reler estes slides.

TÁ???????

Árvores caem na prova?

Tem vários assuntos que a gente vai ver em Cálculo 2 que vão ser importantes não porque eles vão cair explicitamente na prova, mas porque eles vão te ajudar a estudar pra prova.

Já teve alguma vez em que você tentou estudar algo de Matemática, não entendeu nada, e ficou paralisado? Sim, né? Acontece com todo mundo, principalmente em assuntos mais avançados...

A gente vai aprender a ver expressões como árvores porque isso vai nos ajudar a não ficar paralisado. Árvores não vão nos ajudar em *todos* os casos de "caraca, não tou entendendo nada" – *mas vão nos ajudar em muitos casos.*
(Explicar nomear e apontar)
(Explicar comectivos omitidos: multiplicação, aplicação, listas, matrizes...)

Como perder pontos na vista de prova

Cálculo 2 ("C2") é MUITO diferente de Cálculo 1 ("C1").

As técnicas que você aprendeu em C1 vão te ajudar em C2, mas você VAI TER QUE aprender um monte de técnicas novas. Os critérios de correção de provas em C2 vão ser bem diferentes dos de C1, e as vistas de prova em C2 vão funcionar de um jeito bem diferente das vistas de C1, principalmente por isso aqui:

> Se você vier numa vista de prova de C2 e tentar me explicar o que você *pensou* quando você escreveu a resposta de uma questão eu vou considerar que você não entendeu nada do curso de C2, *não leu nada do material do curso*, e que você *merece um zero.*

Isso é porque C2 é um curso *bem* mais avançado que C1. Em C1 não dá pra ensinar as pessoas a escreverem direito – isso acontece em C2.

Nas provas de C2 eu vou avaliar se vocês treinaram certas coisas bastante. Sob um ponto de vista o que eu vou avaliar é se vocês conseguem escrever as respostas de vocês de modo que cada passo seja fácil de justificar; sob outro ponto de vista o que eu vou avaliar é *se vocês já têm muita prática em reler as respostas de vocês como se vocês fossem uma outra pessoa e em ver o que pode ser melhorado.*

```
(%i1) eq1 : 1*x + 2*y = 3;
(%o1)
```
$$2\,y+x=3$$
```
(%i2) eq2 : 4*x + 5*y = 6;
(%o2)
```
$$5\,y+4\,x=6$$
```
(%i3)             4*eq1;
(%o3)
```
$$4\,(2\,y+x)=12$$
```
(%i4)       expand(4*eq1);
(%o4)
```
$$8\,y+4\,x=12$$
```
(%i5) eq3 : expand(4*eq1);
(%o5)
```
$$8\,y+4\,x=12$$
```
(%i6) eq4 : eq2 - eq3;
(%o6)
```
$$-(3\,y)=-6$$
```
(%i7) eq5 : eq4 / -3;
(%o7)
```
$$y=2$$
```
(%i8)             eq5;
(%o8)
```
$$y=2$$
```
(%i9)                 eq1;
(%o9)
```
$$2\,y+x=3$$
```
(%i10) eq6 : subst(eq5, eq1);
(%o10)
```
$$x+4=3$$
```
(%i11) eq7 : eq6 - 4;
(%o11)
```
$$x=-1$$
```
(%i12)            [eq7,eq5];
(%o12)
```
$$[x=-1,y=2]$$
```
(%i13)                    eq1;
(%o13)
```
$$2\,y+x=3$$
```
(%i14)                        eq2;
(%o14)
```
$$5\,y+4\,x=6$$
```
(%i15) eq8 : subst([eq7,eq5], eq1);
(%o15)
```
$$3=3$$
```
(%i16) eq9 : subst([eq7,eq5],     eq2);
(%o16)
```
$$6=6$$
```
(%i17) matrix(['eq1, ":", eq1],
              ['eq2, ":", eq2],
              ['eq3, ":", eq3],
              ['eq4, ":", eq4],
              ['eq5, ":", eq5],
              ['eq6, ":", eq6],
              ['eq7, ":", eq7],
              ['eq8, ":", eq8],
              ['eq9, ":", eq9]);
(%o17)
```
$$\begin{pmatrix} \mathrm{eq1} & : & 2\,y+x=3 \\ \mathrm{eq2} & : & 5\,y+4\,x=6 \\ \mathrm{eq3} & : & 8\,y+4\,x=12 \\ \mathrm{eq4} & : & -(3\,y)=-6 \\ \mathrm{eq5} & : & y=2 \\ \mathrm{eq6} & : & x+4=3 \\ \mathrm{eq7} & : & x=-1 \\ \mathrm{eq8} & : & 3=3 \\ \mathrm{eq9} & : & 6=6 \end{pmatrix}$$
```
(%i18)
```

```
(%i1) eq1 : 1*x + 2*y = 3;
(%o1)
```

$$2\,y+x=3$$

```
(%i2) eq2 : 4*x + 8*y = 6;
(%o2)
```

$$8\,y+4\,x=6$$

```
(%i3)            4*eq1;
(%o3)
```

$$4\,(2\,y+x)=12$$

```
(%i4)      expand(4*eq1);
(%o4)
```

$$8\,y+4\,x=12$$

```
(%i5) eq3 : expand(4*eq1);
(%o5)
```

$$8\,y+4\,x=12$$

```
(%i6) eq4 : eq2 - eq3;
(%o6)
```

$$0=-6$$

```
(%i7) matrix(['eq1, ":", eq1],
             ['eq2, ":", eq2],
             ['eq3, ":", eq3],
             ['eq4, ":", eq4]);
(%o7)
```

$$\begin{pmatrix} \mathrm{eq1} & : & 2\,y+x=3 \\ \mathrm{eq2} & : & 8\,y+4\,x=6 \\ \mathrm{eq3} & : & 8\,y+4\,x=12 \\ \mathrm{eq4} & : & 0=-6 \end{pmatrix}$$

```
(%i8)
```

Pedaço de semicírculo: seja como o Bob

Imagina que você está numa turma de Cálculo 2 que tem dois "Alex"es – vou chamar eles de Alex 1 e Alex 2 – e um Bob. Numa das provas dessa turma cai uma questão assim, sobre uma fórmula que calcula a área de um pedaço de um semicírculo:

> Calcule:
>
> $$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 respondem essa questão dizendo só isso aqui,

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}(x) + x\sqrt{1-x^2}\right)$$

e o Bob entrega uma resposta que tem uma página inteira de contas. Aí na vista de prova o Bob está feliz porque ganhou todos os pontos dessa questão e tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 estão putíssimos porque ganharam 0, e porque não conseguiram me convencer a aumentar as notas deles.

O argumento do Alex 1 foi "pô, professor, a resposta tá certa, eu vi num livro e eu lembrava a fórmula, e eu até conferi ela no computador depois", o argumento do Alex 2 foi "pô, professor, a resposta tá certa, eu fiz as contas de cabeça e pensei tudo direito, eu só não escrevi"...

$\boxed{\text{Seja como o Bob!}}$

Porque é que os Alexes tiraram 0?
Que critério de correção eu usei aí?
Que critério de correção eu vou usar no curso?
Que nível de detalhe eu espero nas respostas?

Eu vou precisar de várias páginas pra responder tudo isso.

“Releia a Dica 7”

http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html
http://anggtwu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=5

1) Aprenda a testar tudo: contas, possíveis soluções de equações, representações gráficas de conjuntos...
2) Cada “seja” ou “sejam” que aparece nestas folhas é uma definição, e você pode usá-los como exemplos de definições bem-escritas (ééé!!!!) pra aprender jeitos de escrever as suas definições.
3) Em “matematiquês” a gente quase não usa termos como “ele”, “ela”, “isso”, “aquilo” e ”lá” — ao invés disso a gente dá nomes curtos pros objetos ou usa expressões matemáticas pra eles cujo resultado é o objeto que a gente quer... mas *quando a gente está discutindo problemas no papel ou no quadro* a gente pode ser referir a determinados objetos *apontando pra eles com o dedo* e dizendo “esse aqui”.
4) Se você estiver em dúvida sobre o que um problema quer dizer tente escrever as suas várias hipóteses — a prática de escrever as suas idéias é o que vai te permitir aos poucos conseguir resolver coisas de cabeça.
5) Muitas coisas aparecem nestas folhas escritas primeiro de um jeito detalhado, e depois aos poucos de jeitos cada vez mais curtos. Você vai ter que aprender a completar os detalhes.
6) Alguns exercícios destas folhas têm muitos subcasos. Nos primeiros subcasos você provavelmente vai precisar fazer as contas com todos os detalhes e verificá-las várias vezes pra não errar, depois você vai aprender a fazê-las cada vez mais rápido, depois vai poder fazê-las de cabeça, e depois você vai começar a visualizar o que as contas “querem dizer” e vai conseguir chegar ao resultado graficamente, sem contas; e se você estiver em dúvida se o seu “método gráfico” está certo você vai poder conferir se o “método gráfico” e o “método contas” dão aos mesmos resultados.
7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática:* se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

Linguagem formal, gramática, sintaxe

Veja se você consegue entender a figura da próxima página...
Eu peguei ela daqui, com pequenas adaptações:
https://en.wikipedia.org/wiki/Context-free_grammar

A parte à esquerda dela é a "gramática" de uma certa linguagem formal, e a parte à direita dela mostra como uma certa expressão é "parseada" nessa linguagem formal.

Todas as linguagens de programação têm gramáticas bem definidas. Quando a gente está trabalhando numa linguagem com uma gramática bem definida é fácil definir quais expressões são válidas nela – uma expressão é válida quando ela é "parseável" – e quais expressões têm erros de sintaxe – as que não são "parseáveis".

Em Prog 1 você aprendeu C, e você viu que o compilador podia rejeitar os seus programas por vários motivos... por exemplo:
1. erros de sintaxe,
2. erros de tipo,
3. símbolos não declarados.

Se você quiser entender direito como compiladores detectam erros dos tipos 2 e 3, dê uma olhada na página 99 do livro do Thain:
https://www3.nd.edu/~dthain/compilerbook/compilerbook.pdf#page=113

$$
\begin{array}{rcl}
\langle\text{Stmt}\rangle & \rightarrow & \langle\text{Id}\rangle\ =\ \langle\text{Expr}\rangle\ ; \\
\langle\text{Stmt}\rangle & \rightarrow & \{\ \langle\text{StmtList}\rangle\ \} \\
\langle\text{Stmt}\rangle & \rightarrow & \texttt{if}\ (\ \langle\text{Expr}\rangle\ )\ \langle\text{Stmt}\rangle \\
\langle\text{StmtList}\rangle & \rightarrow & \langle\text{Stmt}\rangle \\
\langle\text{StmtList}\rangle & \rightarrow & \langle\text{StmtList}\rangle\langle\text{Stmt}\rangle \\
\langle\text{Expr}\rangle & \rightarrow & \langle\text{Id}\rangle \\
\langle\text{Expr}\rangle & \rightarrow & \langle\text{Num}\rangle \\
\langle\text{Expr}\rangle & \rightarrow & \langle\text{Expr}\rangle\ \langle\text{Optr}\rangle\ \langle\text{Expr}\rangle \\
\langle\text{Id}\rangle & \rightarrow & \texttt{x} \\
\langle\text{Id}\rangle & \rightarrow & \texttt{y} \\
\langle\text{Num}\rangle & \rightarrow & \texttt{0} \\
\langle\text{Num}\rangle & \rightarrow & \texttt{1} \\
\langle\text{Num}\rangle & \rightarrow & \texttt{9} \\
\langle\text{Optr}\rangle & \rightarrow & > \\
\langle\text{Optr}\rangle & \rightarrow & +
\end{array}
$$

$$\underbrace{\texttt{if}\ (\ \underbrace{\underbrace{\underbrace{\texttt{x}}_{\langle\text{Id}\rangle}}_{\langle\text{Expr}\rangle}\ \underbrace{>}_{\langle\text{Optr}\rangle}\ \underbrace{\underbrace{\texttt{9}}_{\langle\text{Num}\rangle}}_{\langle\text{Expr}\rangle}}_{\langle\text{Expr}\rangle}\ )\ \underbrace{\underbrace{\{\ \underbrace{\underbrace{\underbrace{\texttt{x}}_{\langle\text{Id}\rangle} = \underbrace{\underbrace{\texttt{0}}_{\langle\text{Num}\rangle}}_{\langle\text{Expr}\rangle}\ ;}_{\langle\text{Stmt}\rangle}}_{\langle\text{StmtList}\rangle}\ \underbrace{\underbrace{\texttt{y}}_{\langle\text{Id}\rangle} = \underbrace{\underbrace{\texttt{y}}_{\langle\text{Expr}\rangle}\ \underbrace{+}_{\langle\text{Optr}\rangle}\ \underbrace{\texttt{1}}_{\langle\text{Expr}\rangle}}_{\langle\text{Expr}\rangle}\ ;}_{\langle\text{Stmt}\rangle}\ \}}_{\langle\text{StmtList}\rangle}}_{\langle\text{Stmt}\rangle}}_{\langle\text{Stmt}\rangle}$$

A linguagem formal de Cálculo 2

Péssima notícia 1:
Nenhum livro define precisamente a gramática da "linguagem" de Cálculo 2. Você vai ter que deduzir quais expressões são válidas lendo os livros do curso – principalmente o Leithold e o Miranda – e os meus slides com muita atenção, escrevendo a beça, checando se as suas expressões seguem as mesmas regras que as deles, e discutindo com os seus colegas, comigo, e com o monitor.

Péssima notícia 2:
Cálculo 2 não tem uma linguagem só, tem várias! Por exemplo, em alguns momentos do curso a gente vai permitir a "notação de Leibniz", na qual expressões como $\frac{dy}{dx}dx = dy$ fazem sentido... mas a gente só vai conseguir entender a notação de Leibniz direito se a gente considerar que "Cálculo 2 sem notação de Leibniz" e "Cálculo 2 com notação de Leibniz" são duas linguages diferentes, como, sei lá, C e C++, e se a gente entender como *traduzir* expressões em "Cálculo 2 com notação de Leibniz" para "Cálculo 2 sem notação de Leibniz".

$2+3=5$	sempre
$2+3 \to 5$	**NUNCA**
$\underbrace{2+3}_{5}$	sempre
$\frac{dy}{dx}dx = dy$	às vezes
$\int \operatorname{sen} x\,dx$	sempre
$\int \operatorname{sen} x$	**NUNCA**
$\int f\,dx = \int f(x)\,dx$	às vezes
$y = y(x)$	às vezes
$(a \cdot 10)[a := 4] = 4 \cdot 10$	sempre
$(a \cdot 10)[a := 4] = 40$	**NUNCA**
Quando $x = 3$ temos f(x)=42	sempre
Quando $x = 3$ temos f=42	**NUNCA**

Sintaxe

Em Prog 1 você aprendeu a usar uma linguagem – o C – com uma sintaxe que era totalmente nova pra você, e a cada aula você aprendia mais algumas construções sintáticas – ou, pra encurtar, "sintaxes" – que o compilador entendia. E você deve ter dado uma olhada de relance, durante poucos segundos, na sintaxe completa do C em BNF, que é o apêndice A do Kernighan & Ritchie... na versão do K&R que eu tenho esse apêndice A tem 9 páginas. É algo parecido com isso aqui:

http://www.csci-snc.com/ExamplesX/C-Syntax.pdf
https://www2.cs.arizona.edu/~debray/Teaching/CSc453/DOCS/cminusminusspec.html

O pessoal de computação tem duas matérias sobre isso. Em Linguagens Formais eles aprendem a definir matematicamente as linguagens que um computador possa entender, e em Compiladores ele aprendem a fazer programas que entendem certas "linguagens formais" e "compilam" "programas" escritos nessas linguagens.

Quase tudo nessas duas matérias é bem difícil de entender, mas algumas poucas idéias são fáceis e a gente vai usar elas pra entender algumas sintaxes que vão ser usadas em C2 e que devem ser novas pra quase todo mundo... por exemplo estas,

$$\sum_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{expr}\rangle} \langle\mathsf{expr}\rangle$$

$$\int_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle} \langle\mathsf{expr}\rangle \, d\langle\mathsf{var}\rangle$$

$$\langle\mathsf{expr}\rangle\Big|_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}$$

$$\forall\langle\mathsf{var}\rangle\in\langle\mathsf{expr}\rangle.\ \langle\mathsf{expr}\rangle$$

$$\exists\langle\mathsf{var}\rangle\in\langle\mathsf{expr}\rangle.\ \langle\mathsf{expr}\rangle$$

e as notações de "set comprehensions" daqui: Mpg8

Justificativas

A linguagem de Cálculo 2 não tem uma gramática totalmente definida, como o C. Cada livro usa convenções um pouco diferentes, e TODOS ELES supõem que o leitor vai aprender a sintaxe certa só lendo o livro e estudando – não há um compilador no qual a gente possa digitar expressões de Cálculo 2 e que vá dizer "Syntax error" onde a gente errar. O máximo que a gente tem são alguns programas que entendem *algumas* expressões de Cálculo 2 escritas em ascii e que sabem converter essas expressões pra formatos mais bonitos. Por exemplo:

`https://docs.sympy.org/latest/tutorial/printing.html`

Existem programas que entendem demonstrações e que são capazes de checar cada passo de uma demonstração pra ver se ele está correto. Eles geralmente precisam de um monte de dicas sobre qual é a justificativa de cada passo – essas dicas são *mais ou menos* como a parte à direita dessa demonstração aqui, que aparece na página 370 do livro do Thomas:

Using Substitution

$$\begin{aligned}
\int \cos(7\theta+5)\,d\theta &= \int \cos u \cdot \frac{1}{7}\,du && \text{Let } u = 7\theta+5,\ du = 7\,d\theta,\ (1/7)\,du = d\theta. \\
&= \frac{1}{7}\int \cos u\,du && \text{With the } (1/7) \text{ out front, the integral is now in standard form.} \\
&= \frac{1}{7}\sin u + C && \text{Integrate with respect to } u, \text{ Table 4.2.} \\
&= \frac{1}{7}\sin(7\theta+5) + C && \text{Replace } u \text{ by } 7\theta+5.
\end{aligned}$$

Eu comecei a aprender um desses "programas que entendem demonstrações" em 2021 – o Lean:

`https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/`

Ele é considerado muito mais fácil de usar que os "proof assistants" anteriores a ele mas ele ainda é bem difícil. Existem tutoriais pra ele nos quais os usuários têm que demonstrar na linguagem do Lean montes de exercícios de Matemática Discreta e Cálculo 1, mas acho que ainda falta bastante pra alunos de primeiro período conseguirem resolver os seus exercícios na linguagem do Lean.

Eu vou fazer algumas referências ao Lean no curso, meio como curiosidade e meio por conta de uma coisa cuja explicação é meio longa. Lá vai.

Uma das coisas que me dá mais ódio é ter que lidar com alunos que escrevem um monte de contas totalmente sem pé nem cabeça nas provas e depois juram que "tava tudo certo, caramba" e que eu só dei nota baixa pra eles porque eu tava de marcação com eles. E tem uma coisa que me dá tipo 1/100 desse ódio, que é lidar com alunos que fazem demonstrações nos quais eles pulam montes de passos e juram que tudo que eles fizeram "é óbvio".

Neste curso nós vamos ver as definições precisas de *alguns tipos* de "passos óbvios" que aparecem em demonstrações e contas que são comuns de Cálculo 2. A maioria das demonstrações que nós vamos ver são por sequências de igualdades, e vão ter este formato:

$$\begin{array}{rcll}
\langle\text{expr}\rangle & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
 & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
 & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
 & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle
\end{array}$$

A operação de substituição que eu vou explicar nos próximos slides vai servir pra ZILHÕES de coisas durante o curso – entre elas pra gente entender quais passos da forma abaixo são "óbvios":

$$\langle\text{expr}\rangle \quad = \quad \langle\text{expr}\rangle \qquad \langle\text{justificativa}\rangle$$

Obs: eu copiei o texto acima daqui: 2dT8
Falta revisá-lo!

Atirei o Pau no Gato: seja como o Bob

Imagina que você está fazendo aula de flauta doce junto com o Alex e o Bob, e na prova vocês vão ter que tocar Atirei o Pau no Gato.
O Alex demora um tempão pra encontrar cada nota, e ele leva meia hora pra tocar a música toda.
O Bob toca a música toda certinha em menos de 30 segundos.
Quando saem as notas o Alex tirou uma nota baixa e o Bob tirou 10.
Aí o Alex vai chorar pontos e diz "*pôxa, profe, eu me esforcei muito!*"

Quando o Bob tocou Atirei o Pau no Gato ele fez a música *parecer fácil*. O esforço dele *ficou invisível*.

Seja como o Bob!

O curso vai ter uma parte em que você vai ter que aprender a desenhar figuras com dezenas de retângulos e trapézios *em poucos segundos* – como o Bob tocando Atirei o pau no gato.

Se você for como o Alex, e levar mais de meia hora pra desenhar cada figura dessas, eu vou considerar que você não aprendeu os padrões que essas figuras seguem – e você não aprendeu a coisa mais importante.

Logo depois dessa parte do curso vai vir uma parte em que você vai ter que visualizar mentalmente (limites de) figuras feitas de infinitos retângulos e trapézios, e desenhar essas figuras. Se você for como o Alex você vai levar tempo infinito pra desenhar cada uma dessas figuras; se você for como o Bob você vai levar segundos.

Seja como o Bob!

Imagens de intervalos

Veja as páginas 5 e 7 daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-somas-3.pdf#page=5

Digamos que na sua turma de Cálculo 2 tem dois Alexes diferentes, um Bob, um Carlos e um Daniel, e todo mundo tá tentando resolver um exercício que é o seguinte: "seja f a função da página 5 do link acima. Calcule $f([1,3])$".
Todo mundo reconhece que o intervalo $[1,3]$ é um conjunto com infinitos pontos, e cada pessoa tenta resolver esse exercício de um jeito diferente.

O Alex 1 decide começar listando todos os pontos do intervalo $[1,3]$. Ele vai primeiro obter uma lista de pontos que ele vai escrever nesse formato aqui,

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$$

e depois ele vai simplificar esse conjunto daqui,

$$\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \ldots\}$$

transformando ele numa lista de números, pondo os números dessa lista em ordem e deletando as repetições... só que como o conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$ é infinito ele nunca consegue terminar o primeiro passo.

O Alex 2 decide que ele vai pegar uma sequência de conjuntos finitos cada vez maiores, e "cada vez mais parecidos" com o conjunto $[1,3]$. Ele escolhe essa sequência aqui...

$$\begin{array}{rcl} A_1 &=& \{1,3\}, \\ A_2 &=& \{1,2,3\}, \\ A_3 &=& \{1,1.5,2,2.5,3\}, \\ A_4 &=& \{1,1.25,1.5,1.75,2,2.25,2.5,2.75,3\}, \ldots \end{array}$$

Ele calcula $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f(A_3)$, $f(A_4)$ pelo gráfico usando o "jeito esperto" – como nas figuras da página 5 do link – e ele deduz, por um argumento informal e olhométrico, que $f([1,3])$ deve ser o intervalo $[3,4]$.

O Bob faz algo parecido como o Alex 2, mas ele encontra um modo de "levantar" todo o intervalo $[1,3]$ pro gráfico da função $y = f(x)$ de uma vez só, e de depois "projetar" pro eixo y esse "intervalo levantado". Ele obtém uma figura bem parecida com a última figura da página 5 do link, e ele descobre – também meio no olhômetro – que $f([1,3]) = [3,4]$.

O Carlos vê que é óbvio que $f([1,3]) = [f(1), f(3)] = \{3,3\} = \{3\}$, e portanto a imagem do intervalo $[1,3]$ pela função f é um conjunto com um ponto só. =(

O Daniel resolve que tudo isso é informal demais pra ele, e que ele precisa aprender um modo 100% preciso e formal de calcular $f([1,3])$ sem o gráfico. Ele descobre que vai ter que estudar uma coisa chamada "Análise Matemática", baixa o "*Elementary Analysis: The Theory of Calculus*" do Kenneth Ross, começa a estudar por ele e aprende coisa incríveis – mas ele leva um ano nisso.

Seja como o Bob!

Sobre Português

Muita gente aprende no Ensino Médio e nas matérias de primeiro período que “entender uma fórmula” quer dizer 1) traduzí-la pra português e 2) generalizá-la. Então é BEM comum uma pessoa ficar em dúvida se pode fazer um passo como este aqui numa conta,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99$$

e aí a pessoa me perguntar isso aqui:

> Professor, a raiz quadrada de um número ao quadrado mais outro número ao quadrado é o número mais o outro número?

É bem mais fácil discutir essa dúvida se a pessoa me fizer essa pergunta em notação matemática, ou me mostrando a igualdade acima e perguntando “isso aqui é verdade?”, ou me mostrando isso aqui,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} \stackrel{?}{=} 42 + 99$$

que é bem mais bacana porque o ‘$\stackrel{?}{=}$’ deixa super claro que isso é uma igualdade que a pessoa não sabe se é verdade...

Se a pessoa me pergunta se isso aqui é verdade,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99 \qquad (*)$$

eu posso mostrar pra ela essa outra igualdade aqui – note que eu estou dando nomes como $(*)$ e $(**)$ pras igualdades –

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + y \qquad (**)$$

e aí eu pergunto “você quer saber se a $(**)$ é algo que vale sempre, né?”, e aí a pessoa responde “É! É isso!”, e aí eu consigo responder: se a $(**)$ valer sempre ela também vai valer no caso em que $x = 3$ e $y = 4$. Quando $x = 3$ e $y = 4$ a $(**)$ vira isso aqui:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 \qquad (***)$$

e aí temos:

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt{\underbrace{\underbrace{{\underbrace{x}_{3}}^{2}}_{9} + \underbrace{{\underbrace{y}_{4}}^{2}}_{16}}_{25}}}_{5} = \underbrace{3+4}_{7}}_{\mathbf{F}}$$

Ou seja, a igualdade $(***)$ é falsa, e portanto a $(**)$ não vale sempre.

Sobre Português (e generalizar)

Repara que eu não descobri se a igualdade ($*$) era verdade ou não... eu convenci a pessoa a discutir a igualdade ($**$) ao invés disso, porque eu "adivinhei" que na verdade o que a pessoa queria saber era se a ($**$) era verdade ou não. Além disso eu desmontei a pergunta original da pessoa – aliás, a pergunta sobre a ($**$) – em várias perguntas menores.

Até alguns semestres atrás eu achava que todo chegava na universidade sabendo "generalizar" e "particularizar" (ou: "especializar") bastante bem... eu achava que as pessoas aprendiam isso assim que aprendiam a fazer "contas com letras" no Ensino Médio.

Vocês provavelmente vão ouvir histórias sobre como os meus cursos de Cálculo em 2022.1 – logo depois do fim da quarentena – foram os piores cursos *do universo*. Uma boa parte da razão pra isso foi que eu fiquei tentando encontrar modos de ensinar as pessoas a generalizarem e particularizarem, e fui descobrindo que essas coisas são muito mais difíceis de aprender e de ensinar do que eu pensava.

A pessoa do slide anterior achava que só podia fazer uma pergunta se ela 1) generalizasse a pergunta dela, e 2) traduzisse a pergunta dela pra Português. Acho que ela achava que tinha que tratar essas duas coisas como se fossem fáceis e óbvias – *mas não são*, e eu recomendo que a gente trate particularização/especialização como algo difícil em que é muito comum as pessoas terem dúvidas muito importantes que vale a pena discutir, "encontrar a generalização certa" como algo BEM difícil e BEM importante que a gente vai treinar explicitamente em vários exercícios difíceis e importantes do curso, e a gente vai ver que "traduzir pra português" é uma ferramenta bem menos útil do que parece. Quase todas as expressões matemáticas que a gente vai ver têm uma pronúncia padrão, mas vai ser bem comum a "tradução pra português" não nos ajudar nada, ou até nos atrapalhar, porque a gente vai ter que entender algumas palavras e expressões "como matemáticos" e não no sentido usual delas...

(Veja o próximo slide!)

Banana

Considere as quatro perguntas abaixo:

1. Qual é o resultado de substituir na palavra "banana" todas as letras 'a' por 'w'?
2. Qual é o resultado de substituir na palavra "banana" todas as letras 'o' por 'u'?
3. Qual é o resultado de substituir na palavra "banana" todas as letras 'A' por 'W'?
4. Qual é o resultado de substituir na palavra "blitiri" todas as letras '2' por '3'?

O resultado da 1 é bem fácil: "bwnwnw", mas a maioria das pessoas fica em dúvida nos outros itens... muitas pessoas respondem coisas como "não dá pra fazer o 2 porque "banana" não tem 'o' ", "não sei se o 3 tem que dar "bWnWnW" ou "bwnwnw" ", ou "não dá pra fazer o 4 porque "blitiri" não é uma palavra e '2' e '3' " não são letras"...

Neste curso, e em todos os cursos de matemática que vão vir depois dele, você vai ter que aprender a interpretar certas definições "como matemático": você vai ter que descobrir a interpretação mais simples possível que faça sentido, e essa idéia de "mais simples possível" vai ser bem parecida com *fazer o programa mais simples possível que obedeça uma certa especificação*...

Por exemplo:

o programa que responde "banana" no item 2 é bem mais simples do que o programa que primeiro testa se a palavra original tem alguma letra 'o', e dá erro se não tem;

o programa que responde "banana" no item 3 – porque ele considera que 'a' e 'A' são letras completamente diferentes, e "banana" não tem 'A' – é muito mais simples do que os programas que consideram que 'a' e 'A' são "letras parecidas";

o programa que responde "blitiri" no item 4 é muito mais simples do que os programas que testam se a palavra original é uma palavra válida e se as duas letras dadas são caracteres considerados como "letras".

Links:
Sobre áreas negativas e retângulos degenerados:
2cT185, 2cT185
2fT63, 2fT64

2gT20 Contexto / Sabemos que $2 = 3$. Então...
2gT38 O macaco substituidor: banana

Unexpected end of input

Uma coisa que me desesperava bastante era quando um aluno me mostrava algo como isso aqui,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot$$

e me perguntava "isso aqui tá certo?", ou: "é isso?"...
Aqui a pergunta mais precisa seria "esse início tá certo?", ou "como é que eu continuo?"... eu aqui eu poderia responder ou "não!" ou isto,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot \beta(x) + \alpha(x) \cdot \beta'(x)$$

só que a resposta que funciona melhor *didaticamente* é a seguinte:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot \qquad (*)$$

não é nem mesmo uma expressão válida, e um compilador que for analisar essa expressão vai abortar no meio do parsing e dizer "Unexpected end of input", que é um tipo específico de erro de sintaxe...

O melhor modo de discutir a dúvida da pessoa que perguntou o "isso aqui tá certo?" é ir consertando com ela a expressão dela passo a passo, e – **JURO** – o melhor modo de fazer isso é primeiro transformar a expressão dela em uma expressão que compile, como essa aqui:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot 42 \qquad (**)$$

que é uma igualdade – no sentido de que tem uma representação em árvore com o '=' no topo – é aí a gente pode começar a discutir coisas como:

- a igualdade $(**)$ é verdadeira para todas as funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$?
- a igualdade $(**)$ é um caso particular da regra do produto?

“Faz um vídeo explicando o PDF”

Em 2021 em fiz um vídeo – que ficou bem bom – pra responder os alunos que estavam dizendo “professor, faz um vídeo explicando o PDF”, e em 2023 eu legendei esse vídeo. Dá pra acessar as legendas e o vídeo nos links abaixo,

http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html

e o trecho mais importante das legendas é esse aqui:

Então, cada PDF tem vários exercícios e muitas dezenas de idéias. Se vocês disserem só “faz um vídeo explicando o PDF” eu vou fazer um vídeo de 5 minutos explicando tudo de um PDF por alto porque eu não sei direito onde estão as dúvidas de vocês... mas vocês fizerem perguntas mais específicas aí eu consigo fazer vídeos bem mais detalhado sobre aquelas perguntas ou sobre aqueles exercícios... gente, vocês não estão discutindo para descobrir como resolver os problemas? O próximo passo, já que vocês estão empacados, é vocês passarem a discutir pra encontrar a boas perguntas pra fazer... aqui tem um outro trecho que eu não copiei, e deixa eu só ler isso aqui em voz alta também... gente, a matéria de matemática fica cada vez mais difícil à medida que as matérias ficam mais avançadas, e passa a ser comum ter trechos uma linha ou de um parágrafo nos livros-texto que vocês vão passar muitas horas tentando decifrar aquilo. Isso vai acontecer O TEMPO TODO... praticamente toda aula, toda página, todo vídeo vai acontecer isso, até o a última matéria de matemática na vida de vocês, então a questão é: como é que vocês podem fazer para não ficarem perdidos com isso, para não ficarem paralisados... voltando pro que eu escrevi aqui, o meu objetivo aqui é fazer vocês aprenderem se virar com isso, e a técnica para isso e vocês aprenderem a escrever as hipóteses de vocês e aprenderem a fazer perguntas. A maioria das perguntas vocês vão conseguir responder sozinhos, algumas vocês vão conseguir descobrir a resposta conversando com amigos – faltou um “s” aqui... – que também não sabiam a resposta, que vão descobrir junto com vocês, e umas poucas vocês vão empacar mesmo e não vão conseguir resolver sozinhos. Me mandem as dúvidas de vocês!

Um post da Ana Leticia de Fiori

Em 19/fev/2023 a Ana Letícia de Fiori
postou isso aqui no Facebook:

AL: Um fenômeno curioso que tenho observado entre estudantes que declaram ter “travas de escrita”, ficarem “empacados” ao desenvolver trabalhos de conclusão de disciplinas ou de curso. Frequentemente, a alegação é de que o “perfeccionismo” faz com que travem.
Eu tenho provocado, perguntado sobre quais são os gatilhos, quais os momentos em que eles sentem que o bloqueio vem. Uma resposta é o confronto com o material coletado, sejam os dados sejam as referências levantadas. Materiais com os quais eles não conseguem lidar, no sentido radical da palavra lida. Não sabem trabalhar com as referências e com os dados. Porque não estão acostumados a ler.
Um dos efeitos disso são trabalhos bastante declaratórios, que clamam ter feito “revisões bibliográficas”, “levantamentos”, “análises de discurso”, etc. que, na verdade, jamais ocorreram. Ao finalmente escrever, despreza-se o que consta na literatura e se escreve de cabeça, com alguma citação aqui ou acolá utilizada como argumento de autoridade. Claro que o texto sai confuso, raso, impreciso.
Passa longe de um problema de perfeccionismo. Mas é assim que se mascara a falta de perícia no ofício acadêmico.
E, recentemente, numa reunião entre pares, ouvi dizerem que para evitar os eternos problemas de plágio e os novos problemas dos softwares de IA, vão só realizar atividades orais e de escrita em sala de aula. Isso me apavora, porque o tempo de maturação de um trabalho acadêmico não é o tempo da sala de aula. E vai ser mais uma instância a sumir da experiência desses estudantes.

E: Nossa, eu tou exatamente tentando escrever sobre um outro tipo de ”perfeccionismo” que alguns dos meus estudantes têm e que eu ainda não tenho um modo muito bom de lidar com isso...
São estudantes que assim que vêem que algo que eles escreveram está errado eles ou apagam ou jogam foram. Eu até tenho um monte de material - e slogans - sobre como o modo mais rápido de aprender assuntos difíceis de matemática é você escrever ”hipótese” ou ”rascunho” antes das partes que você não tem certeza e NÃO APAGAR NADA, NUNCA -
...mas não adianta, eles entram em pânico quando vêem que algo que eles escreveram não está perfeito - e aí eles não conseguem estudar...

AL: Mas aí é que está, a que parâmetros de perfeição eles se referem?
Esse comportamento de escrever e apagar tem a ver em parte com a fantasia de que o texto se compõe de uma vez só. Tendem a pular as etapas de estruturação de um roteiro, de rascunhos e revisões.
Quase como se o texto fosse psicografado. Eu costumo brincar com meus alunos que ninguém é Chico Xavier da antropologia, eles riem, mas teimam.
De novo, falta a dimensão do trabalho com o texto.
Perfeição, na fantasia dos alunos, é escrever sem esforço.

Retas reversas

O Alex, o Bob e o Carlos fizeram GA juntos. Um dos últimos assuntos do curso era uma fórmula pra calcular a distância entre "retas reversas" – é uma fórmula bem complicada, que tem um determinante e um produto cruzado – e cada um deles estudou esse assunto de um modo diferente.

O Alex e o Carlos "sabem" que o objetivo de cada matéria de Matemática é fazer as pessoas aprenderem certos teoremas. Os dois decoraram a fórmula da distância entre retas reversas e tentaram aplicar ela na prova. O Alex conseguiu, mas a questão da prova tinha vários itens e em todos eles ela usava letras diferentes das da fórmula que ele tinha decorado, e aí ele levou MUITO tempo pra resolver um item, e não conseguiu fazer os outros... e o Carlos tinha decorado a fórmula errado, e aí num determinado ponto da questão ele precisava dividir um número negativo por um vetor, e ele não sabia como fazer isso.

Tanto o Alex quanto o Carlos esqueceram a fórmula logo depois da prova.

O Bob estudou essa parte da matéria de um outro jeito. Ao invés de pensar "toda vez que eu precisar calcular a distância entre duas retas é só usar a fórmula" ele considerou que tem muitos casos simples em que ele sabe calcular a distância entre as retas no olhômetro – por exemplo, o caso em que uma das retas é paralela ao eixo x e a outra é paralela ao eixo y. Ele foi aprendendo como lidar com vários casos um pouco menos simples que esse, e aprendeu como visualizar o que aquela fórmula complicadíssima "quer dizer" – ela calcula a altura de um certo paralelepípedo.

O Bob tratou essa fórmula como algo que generaliza vários casos "simples" em que ele consegue calcular a distância entre duas retas por outros métodos, e ele usou esses casos simples pra testar se a fórmula realmente dá o resultado que ele esperava.

Tanto o Alex quanto o Bob quanto o Carlos "estudaram pelo livro", mas existem vários modos de "estudar pelo livro" e o Bob usou modos que nem o Alex nem o Carlos conheciam.

Neste curso você vai aprender – e treinar – vários modos de "estudar pelo livro" que provavelmente vão ser totalmente novos pra você.

Contexto

Quase todas as expressões matemáticas que usamos em C2 dependem do contexto. Por exemplo, a interpretação default pra esta expressão aqui:

$$f(x) = x - 9 = 2$$

é:

Para toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
e para todo $x \in \mathbb{R}$ temos:
$f(x) = x - 9 = 2$

Se você só escreve "$f(x) = x - 9 = 2$" e mostra isso pro "colega que seja seu amigo" ele vai levar meia hora tentando adivinhar qual foi o contexto que você estava pensando mas não escreveu...
...e se ele descobrir em menos de, digamos, 50 tentativas, ele vai dizer "ok, jóia, tá certo!".

O "colega que seja menos seu amigo" vai fazer menos tentativas, e os personagens "o monitor" e "o professor" da Dica 7 vão checar se o que você escreveu vai ser entendido corretamente por qualquer pessoa que saiba as convenções de como escrever matemática.

Lembre que quase todo mundo pára de ler um texto matemático quando vê uma besteira muito grande escrita nele. Imagine que um "colega que seja menos seu amigo" te mostra a solução dele pra um problema e te pergunta se está certa. A solução dele começa com:

Sabemos que $2 = 3$. Então...

O que você faria?

Dica: releia isto aqui:
Slogans27:07 até 32:45

Fórmulas e hipóteses

Dê uma olhada no Teorema 4 da seção 3.1 do Miranda: MirandaP80. Ele diz isso aqui:

> Se f e g são funções diferenciáveis em $x = a$ então a função $f + g$ é diferenciável em a e:
>
> $$(f+g)'(a) = f(a) + g(a).$$

Nós vamos considerar que esse *teorema* pode ser decomposto em duas partes: *fórmula* e *hipóteses*. A *fórmula* dele é esta aqui,

$$(f+g)'(a) = f(a) + g(a)$$

e em muitas situações nós vamos querer usar só as fórmulas de certos teoremas e deixar pra verificar as hipóteses delas no final.

Obs: falta acrescentar muita coisa aqui... explicar o que são contas formais, mostrar que o Mathologer só faz contas formais no vídeo dele sobre o "Calculus Made Easy", mencionar que em Cálculo 3 nós vamos usar o "Calculus Made Easy" e que todas as contas dele são formais, falar sobre a introdução do Martin Gardner pro CME e como ele explica que o conceito de "função" foi mudando...

Obs 2: tem um slide sobre contas formais aqui: 2gT36 (p.4) O macaco e as contas formais

Sobre aulas expositivas

Muitos alunos acreditam que se eles assistirem uma aula expositiva eles vão ser capazes de resolver na prova questões sobre o que eles aprenderam – só que isso só passa a ser *mais ou menos* verdade depois que a pessoa aprende *muito bem* como estudar.

Muita coisa em matemática funciona como músculos. Os músculos mentais que você usa pra entender uma aula expositiva são bem diferentes dos músculos mentais que você usa pra resolver exercícios, e os músculos mentais que você exercita quando você relê uma explicação que você escreveu e procura jeitos de reescrevê-la de um modo mais claro são diferentes desses...

Leia isto aqui:
Visaud39:09 até 46:06

Formal vs. coloquial

Lembre que um dos meus objetivos principais *neste curso* é fazer as pessoas aprenderem a escrever suas idéias matemáticas de um jeito que seja claro e fácil de revisar, que elas gostem de reler depois (dica 7b) e que os colegas gostem de ler (dicas 7c e 7d)...

Algumas pessoas acham que textos matemáticos têm que ser escritos numa linguagem "formal" que seja a mais distante possível do português coloquial; outras pessoas preferem escrever de um modo bem próximo do coloquial. Por exemplo, o Jacir Venturi (VenturiGA), escreve num Português pomposo que eu acho horrível, e o Felipe Acker (AckerGA1) escreve de um modo bem próximo do coloquial que eu gosto bastante. E até hoje eu só tive acesso a bem pouco material do Reginaldo, mas eu tenho a impressão de que ele não gosta de usar linguagem coloquial em matemática... eu falo um pouquinho sobre isso neste trecho de um vídeo sobre didática: Visaud59:49.

Na parte do curso sobre somas de Riemann você vai aprender a lidar com definições bem complicadas, e aos poucos – um pouquinho neste curso, e bastante nos seguintes – você vai aprender a fazer as suas próprias definições. E quando você souber fazer as suas próprias definições você vai ver que dá pra ser totalmente preciso usando tanto português coloquial quanto português pomposo...

...ah, e na parte final do curso, que é sobre equações diferenciais, você vai (ter que) aprender a usar corretamente um monte de "partículas", como "seja", "então", "temos", "isto é", "queremos", "sabemos que", "lembre que", "digamos que" e "vamos testar se".

Cálculo 2 - 2024.1

Aula 2: expressões e árvores

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.1-C2.html

Links

2hT4 “Releia a dica 7”
2iQ1 Quadros da aula 1 (18/mar/2023)
2iQ3 Quadros da aula 2 (19/mar/2023)
2iQ7 Quadros da aula 3 (20/mar/2023)
2hT39 Justificativas no formato “... por ... com ...”
2hT127 Músculos mentais, jogo colaborativo
Leit1p37 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Introdução

Na primeira aula nós fizemos um monte de exercícios de "set comprehensions", e vocês viram – por exemplo, na página Mpg10, nestes itens daqui,

$$\begin{array}{rcl} G & := & \{x \in \{3,4\}, y \in \{1,2,3\}; (y,x)\} \\ H & := & \{x \in \{3,4\}, y \in \{1,2,3\}; (x,2)\} \end{array}$$

que às vezes pra resolver um exercício a gente precisa "pensar como um computador"...

Maxima vs. SymPy

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(g(u))g'(u)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du$$

```
=___________________.
|                   |
integrate__.__.__.  integrate__.__.__.
|          |  |  |  |          |  |  |
*___.      x  a  b  fp         u  g  g
|   |               |             |  |
fp  gp              u             a  b
|   |
g   x
|
x
```

```
Equality_______________.
|                      |
Integral__.            Integral__.
|         |            |         |
Mul__.    Tuple__.__.  fp        Tuple__.__.
|    |    |      |  |  |         |      |  |
fp   gp   x      a  b  u         u      g  g
|    |                                  |  |
g    x                                  a  b
|
x
```

```
(%i1) eq1 : 1*x + 2*y = 3;
```
(%o1)
$$2\,y+x=3$$

```
(%i2) eq2 : 4*x + 5*y = 6;
```
(%o2)
$$5\,y+4\,x=6$$

```
(%i3)             4*eq1;
```
(%o3)
$$4\,(2\,y+x)=12$$

```
(%i4)       expand(4*eq1);
```
(%o4)
$$8\,y+4\,x=12$$

```
(%i5) eq3 : expand(4*eq1);
```
(%o5)
$$8\,y+4\,x=12$$

```
(%i6) eq4 : eq2 - eq3;
```
(%o6)
$$-(3\,y)=-6$$

```
(%i7) eq5 : eq4 / -3;
```
(%o7)
$$y=2$$

```
(%i8)              eq5;
```
(%o8)
$$y=2$$

```
(%i9)                  eq1;
```
(%o9)
$$2\,y+x=3$$

```
(%i10) eq6 : subst(eq5, eq1);
```
(%o10)
$$x+4=3$$

```
(%i11) eq7 : eq6 - 4;
```
(%o11)
$$x=-1$$

```
(%i12)           [eq7,eq5];
```
(%o12)
$$[x=-1,y=2]$$

```
(%i13)                          eq1;
```
(%o13)
$$2\,y+x=3$$

```
(%i14)                              eq2;
```
(%o14)
$$5\,y+4\,x=6$$

```
(%i15) eq8 : subst([eq7,eq5], eq1);
```
(%o15)
$$3=3$$

```
(%i16) eq9 : subst([eq7,eq5],      eq2);
```
(%o16)
$$6=6$$

```
(%i17) matrix(['eq1, ":", eq1],
              ['eq2, ":", eq2],
              ['eq3, ":", eq3],
              ['eq4, ":", eq4],
              ['eq5, ":", eq5],
              ['eq6, ":", eq6],
              ['eq7, ":", eq7],
              ['eq8, ":", eq8],
              ['eq9, ":", eq9]);
```
(%o17)
$$\begin{pmatrix}
\mathrm{eq1} & : & 2\,y+x=3\\
\mathrm{eq2} & : & 5\,y+4\,x=6\\
\mathrm{eq3} & : & 8\,y+4\,x=12\\
\mathrm{eq4} & : & -(3\,y)=-6\\
\mathrm{eq5} & : & y=2\\
\mathrm{eq6} & : & x+4=3\\
\mathrm{eq7} & : & x=-1\\
\mathrm{eq8} & : & 3=3\\
\mathrm{eq9} & : & 6=6
\end{pmatrix}$$

```
(%i18)
```

```
(%i1) eq1 : 1*x + 2*y = 3;
(%o1)
```

$$2\,y+x=3$$

```
(%i2) eq2 : 4*x + 8*y = 6;
(%o2)
```

$$8\,y+4\,x=6$$

```
(%i3)                  4*eq1;
(%o3)
```

$$4\,\left(2\,y+x\right)=12$$

```
(%i4)          expand(4*eq1);
(%o4)
```

$$8\,y+4\,x=12$$

```
(%i5) eq3 : expand(4*eq1);
(%o5)
```

$$8\,y+4\,x=12$$

```
(%i6) eq4 : eq2 - eq3;
(%o6)
```

$$0=-6$$

```
(%i7) matrix(['eq1, ":", eq1],
             ['eq2, ":", eq2],
             ['eq3, ":", eq3],
             ['eq4, ":", eq4]);
(%o7)
```

$$\begin{pmatrix}\mathrm{eq1} & : & 2\,y+x=3\\ \mathrm{eq2} & : & 8\,y+4\,x=6\\ \mathrm{eq3} & : & 8\,y+4\,x=12\\ \mathrm{eq4} & : & 0=-6\end{pmatrix}$$

```
(%i8)
```

Subárvores

Cada bolinha de uma árvore “gera” uma subárvore – a subárvore formada por essa bolinha e todas as outras bolinhas abaixo dela.

A gente quer que cada subárvore corresponda a uma *subexpressão*. A definição formal de subexpressão é bem complicada, mas tente se virar usando só essas idéias daqui:

- subexpressões são trechos da expressão original que são expressões completas – por exemplo, ‘$2/(x$’ não é uma expressão completa,
- se a nossa expressão original for toda “horizontal” – como $2/(x+y)$, mas não como $\frac{2}{x+y}$ – então a gente pode usar diagramas de “underbraces” pra indicar quais são as subexpressões, como nestes dois exemplos (que dão árvores diferentes):

$$\underbrace{\underbrace{f(\underbrace{a},\underbrace{b})} + \underbrace{c}}$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{f}\,(\underbrace{a},\underbrace{b})} + \underbrace{c}}$$

Exercício
Encontre uma boa representação em árvore para cada uma das expressões abaixo. Faça os diagramas de underbraces quando precisar, e lembre que você vai ter que improvisar em vários lugares, principalmente pra decidir que nomes pôr nas bolinhas!

a) $2/5$
b) $\frac{2}{5}$
c) $2/(x+y)$
d) $3x+4y$
e) $3x+4y=z$
f) $f(x)+g(x)$
g) $2+3x$
h) $2+3\cdot x$
i) $2+(3\cdot x)$
j) $G:=\{x\in\{3,4\}, y\in\{1,2,3\}; (y,x)\}$
k) $\{1,2,3\}$

Lembre que em Cálculo 1 você aprendeu a chegar direto na resposta certa, mas C2 é bem diferente de C1... aqui você vai ter que escrever várias idéias, e se você ficar apagando, rasgando e jogando fora os papéis em que você escreveu idéias que depois você achou ruins você vai progredir muito mais devagar do que as pessoas que têm coragem de guardar tudo!

Subárvores (2)

Tente encontrar uma boa representação em árvore para esta expressão aqui:

$$\text{Seja } f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{quando } x < 2, \\ 2 & \text{quando } 2 \leq x \end{cases}$$

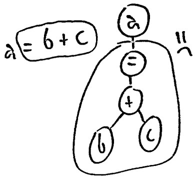
Depois releia a dica 3 e veja se cada bolinha da sua árvore corresponde a um símbolo específico da expressão acima, e se quando você aponta pra esse símbolo os seus colegas conseguem entender qual é a menor subárvore – e a menor subexpressão – que contém esse símbolo.

Subárvores (3)

Este quadro da aula de 19/mar/2023 -

2iQ4 Um quadro da aula de 19/mar/2023

tem um exemplo que a gente discutiu em sala, de uma representação em árvore que é ruim...



O problema dessa representação em árvore é que quando a gente 1) aponta pro '=' do "$a = b+c$", 2) a gente pega a bolinha da árvore que corresponde a esse '=', 3) a gente pega a subárvore gerada por essa bolinha, e 4) a gente volta pro "$a = b + c$" e encontra a subexpressão correspondente a essa subárvore...

...a gente chega numa "subexpressão" que *não é uma expressão completa*.

Releia a dica 3 desta página:

2iT12 "Releia a Dica 7"

Ela tem este trecho:

> (...) mas quando a gente está discutindo problemas no papel ou no quadro a gente pode ser referir a determinados objetos apontando pra eles com o dedo e dizendo "esse aqui".

No exemplo da coluna da esquerda se eu tou discutindo com um amigo e eu aponto pro '=' do "$a = b + c$" e digo "essa subexpressão aqui" tudo vai dar errado se ele estiver considerando que a representação em árvore dessa expressão é a que eu marquei com o '=('... ele vai achar que o meu "essa subexpressão aqui" se refere a isto:

$$= b + c$$

Péssimo! Péssimo!

Cálculo 2 - 2024.1

Aulas 4 a 6: integração e derivação
com o mathologermóvel

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C2.html

Links

Quadros destas aulas:
2hQ1 Quadros da aula 1 (2a, 28/ago/2023)
2hQ3 Quadros da aula 2 (3a, 29/ago/2023)

Links da aula 1:
2gT4 Releia a dica 7
2gT11 Atirei o pau no gato
2gT19 Retas reversas
2gT24 Integração e derivação com o Mathologermóvel
2gT27 (p.4) Exercício 1
2gT28 (p.5) Dicas pro exercício 1
CalcEasy03:19 até 12:47

Links da aula 2:
CalcEasy11:35 até 12:47
2gT37 (p.5) O macaco substituidor: EDOs, RC, TFC2
StewPtCap5p9 (p.330) Figuras 11 e 12
StewPtCap5p16 (p.337) A integral definida
StewPtCap5p33 (p.354) TFC, parte 2
StewPtCap5p36 (p.357) Exercícios 19 a 26 (sobre o TFC2)
2fT91 até 2fT93 (p.3 até p.5): A definição da integral

Os slides das próximas páginas são versões ligeiramente reescritas destes slides de outros semestres:

2fT17 (mathologermovel, p.3) Item 3
2fT18 (mathologermovel, p.4) Item 4
2eT62 (TFC1, p.3) Algumas propriedades da integral
2eT66 (TFC1, p.7) Exercício 1
2eT69 (TFC1, p.10) A função G(x) é esta aqui
2dT225 (MT3, p.4) Uma espécie de gabarito
2eT199 (P1, p.7) eu defini as funções f e g desta forma
2eT200 (P1, p.8) gabarito

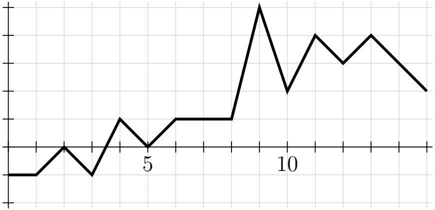
Introdução

Nesta parte do curso nós vamos tentar entender
este trecho do vídeo do Mathologer,
CalcEasy03:19 até 12:47

e vamos fazer alguns exercícios –
que podem ser feitos em vários níveis de detalhe.
Leia estes trechos das legendas de uns vídeos meus:
Slogans01:10 até 08:51: sobre chutar e testar
Slogans07:17 até 07:48: ...do tamanho de um apartamento
Visaud45:14 até 52:24: ajustar o nível de detalhe
Slogans1:11:02 até 1:17:42: seja o seu prório Geogebra
Slogans1:39:46 até 1:45:02: ...com quem vale a pena estudar

Leia também estes slides:
2gT4 (intro, p.3) "Releia a Dica 7"
2gT13 (intro, p.12) Sobre Português
2gT14 (intro, p.13) Sobre Português (2)
2gT16 (intro, p.15) Unexpected end of input
2gT19 (intro, p.18) Retas reversas

Exercício 1.
Seja $G(x)$ esta função:

$G(x) \quad =$ 

Relembre como calcular coeficientes angulares e derivadas no olhômetro e faça um gráfico da função $G'(x)$.

Dica 1: $G'(3.5) = 2$.
Dica 2: $G'(4)$ não existe — use uma bolinha vazia pra representar isso no seu gráfico.

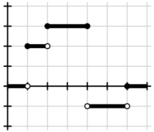
Exercício 1: mais dicas

Pra fazer o exercício 1 você provavelmente vai ter que relembrar algumas coisas sobre inclinação, coeficiente angular, limites laterais, derivadas laterais, e sobre o significado das bolinhas cheias e das bolinhas vazias nos gráficos... links:

Leit1p18 (p.17: inclinação)
Leit1p42 (p.41: bolinhas, domínio, imagem)
StewPtCap1p10 (p.15: círculo cheio e círculo vazio)
Miranda66 (Capítulo 3: Derivadas)
Miranda22 (Seção 1.4: Limites laterais)
Miranda74 (Seção 3.2.3: Derivadas laterais)

2eT70 (p.11) Dicas que eu preparei em 2022.1

Exercício 2.

Seja $f(x)$ =  .

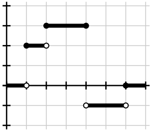
Note que:

$\int_{x=1}^{x=2} f(x)\,dx = 2 \cdot (2-1)$,
$\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx = 3 \cdot (4-3)$,
$\int_{x=4}^{x=6} f(x)\,dx = -1 \cdot (6-4)$,

Calcule:

a) $\int_{x=1.5}^{x=2} f(x)\,dx$
b) $\int_{x=2}^{x=4} f(x)\,dx$
c) $\int_{x=1.5}^{x=4} f(x)\,dx$
d) $\int_{x=1.5}^{x=6} f(x)\,dx$

Exercício 3.

Sejam $f(x) =$ 

e $F(\beta) = \int_{x=2}^{x=\beta} f(x)\,dx$.

a) Calcule $F(2), F(2.5), F(3), \ldots, F(6)$.

b) Calcule $F(1.5), F(1), F(0.5), F(0)$.

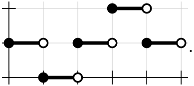
Exercício 4.
No exercício 3 você obteve alguns valores da função $F(\beta)$, mas não todos... por exemplo, você *ainda* não calculou $F(2.1)$.

a) Desenhe num gráfico só todos os pontos $(x, F(x))$ que você calculou nos itens (a) e (b) do exercício 3.
Dica: o conjunto que você quer desenhar é este aqui:
$\{(0, F(0)),\ (0.5, F(0.5)), \ldots, (6, F(6))\}$.

b) Tente descobrir — lendo os próximos slides, assitindo o vídeo, e discutindo com os seus colegas — qual é o jeito certo de ligar os pontos do item (a).

Exercício 5.

Seja

$f(x) \;=$  .

Faça os gráficos destas funções:

a) $F(x) = \displaystyle\int_{t=2}^{t=x} f(t)\,dt$

b) $G(x) = \displaystyle\int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt$

Dica: comece fazendo uma tabela como esta aqui,

x	$F(x)$
2	
3	
4	
5	
2.5	
3.5	
2.1	
3.1	

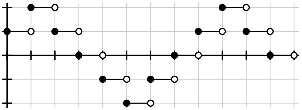
com um monte de pontos pros quais você consegue calcular o $F(x)$ deles de cabeça só olhando pro gráfico, e depois plote estes pontos. Depois faça a mesma coisa pra $G(x)$ *sem fazer a tabela* – desenhe um monte de “pontos fáceis de calcular” direto no seu gráfico.

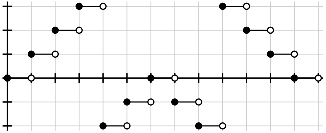
Eu comecei o curso de Cálculo 3 deste semestre discutindo algumas técnicas pra descobrir “pontos fáceis de calcular”. Veja se os primeiros slides de C3 te ajudam:

3iT4 Pontos mais fáceis de calcular

Exercício 6.

Sejam:

$f(x) =$  ,

$g(x) =$  .

Faça os gráficos destas funções:

a) $F(x) = \displaystyle\int_{t=0}^{t=x} f(t)\,dt$

b) $G(x) = \displaystyle\int_{t=3}^{t=x} g(t)\,dt$

Algumas propriedades da integral

As três propriedades mais básicas da integral definida são estas:

$$
\begin{array}{rcll}
k \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &=& \int_{x=a}^{x=b} k f(x)\,dx & (*) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx &=& \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx & (**) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &=& -\int_{x=b}^{x=a} f(x)\,dx & (***) \\
\int_{x=a}^{x=b} k\,dx &=& k(b-a) & (****)
\end{array}
$$

O melhor modo da gente visualizar o que esses propriedades "querem dizer" é comparando a fórmula pro caso geral com casos particulares. Olhe pra figura à direita; ela compara a $(*)$ com dois casos particulares dela – primeiro um caso "normal", em que $k=2$, e depois um caso "estranho" em que $k=-1$...

No caso "estranho" aparecem uns números negativos, ó:

$$
\underbrace{(-1)\cdot \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{>0}}_{<0} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4}(-1)\cdot f(x)\,dx}_{<0}
$$

...e uma figura que tem "área negativa"!!!

Eu acho a abordagem do Mathologer genial – ele começa dizendo que a distância percorrida é a área (ou a integral) da velocidade, e com isso vários casos estranhos em que aparecem números negativos *começam* a fazer sentido.

Slogan: a gente quer que as quatro propriedades acima valham sempre – tanto nos casos "normais" quanto nos casos "estranhos".

$$
(*): \quad k \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} k f(x)\,dx
$$

$$
(*)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ k=2 \end{bmatrix}: \quad 2\cdot \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} 2\cdot f(x)\,dx}
$$

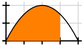
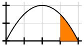
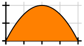

$$
(*)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ k=-1 \end{bmatrix}: \quad (-1)\cdot \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} (-1)\cdot f(x)\,dx}
$$


Links pros livros:
StewPtCap5p22 (p.343)
Leit5p48 (p.331)
MirandaP220

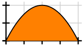
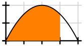
A motivação pro $(***)$ é isso aqui:

$$(**): \quad \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx \;=\; \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$$

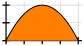
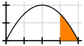
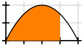
$$(**)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=3 \\ c:=4 \end{bmatrix}: \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx}_{} + \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx}_{} \;=\; \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{}$$

$$(**)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ c:=3 \end{bmatrix}: \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{} + \underbrace{\int_{x=4}^{x=3} f(x)\,dx}_{???} \;=\; \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx}_{}$$

$$\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{} - \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx}_{} \;=\; \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx}_{}$$

"Quase retângulos"

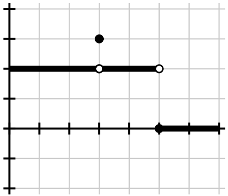
A quarta propriedade é essa aqui:

$$\int_{x=a}^{x=b} k\,dx \quad = \quad k(b-a) \quad (****)$$

A gente quer que ela valha pra todos os valores de k, a e b – incluindo os casos em que k é negativo, que são "retângulos com altura negativa" e pros casos que $a > b$, que são "retângulos que têm base negativa"...

...e além disso a gente quer que ela valha pra casos como o da figura da direita, em que entre $x = 2$ e $x = 5$ o mathologermóvel anda com velocidade constante, 2, exceto em dois instantes – repare que no gráfico a gente tem $f(3) = 3$ e $f(5) = 0$...

Vamos pensar em termos de velocidades e distâncias. Entre $x = 2$ e $x = 5$ o mathologermóvel andou sempre com velocidade 2, exceto por dois instantes de um buzilionésimo de segundo cada um, em que ele andou com velocidades diferentes de 2... esses instantes mudam tão pouco a distância percorrida que a gente vai considerar que eles não mudam a distância percorrida.

$f(x) =$ 

$$\begin{array}{rcl} \int_{x=2}^{x=5} f(x)\,dx & = & \int_{x=2}^{x=5} 2\,dx \\ & = & 2\cdot(5-2) \\ & = & 2\cdot 3 \\ & = & 6 \end{array}$$

Cálculo 2 - 2024.1

Aulas 7 a 9: exercícios de substituição

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2024.1-C2.html

Links

2iQ12 Quadros da aula 6 (27/mar/2024)
2iQ14 Quadros da aula 7 (01/abr/2024)
2iQ16 Quadros da aula 8 (02/abr/2024)
2iQ22 Quadros da aula 9 (03/abr/2024)

A regra da cadeia em vários livros:
MirandaP87 3.5 A regra da cadeia
Leit3p45 (p.181) 3.6 A derivada de uma função composta e...
StewPtCap3p26 (p.179) 3.4 A regra da cadeia
CederjC1V1p115 (p.113) Aula 12: A regra da cadeia
FlemmingP147 (p.139) 4.13 Derivada da função composta

A fórmula do TFC2 nem sempre vale:
2dT231 (2021.2) $F(x) = -x^{-1}$, $F'(x) = x^{-2}$

2fT107 (2022.2) Dicas pra P1
2fT110 (2022.2) P1, questão 3
2fT114 (2022.2) P1, questão 3, gabarito

2gT108 (2023.1) Dicas pra P1
2gT111 (2023.1) P1, questão 4
2gT116 (2023.1) P1, questão 4, gabarito

2hT179 (2023.2) Dicas pra P1
2hT188 (2023.2) P1, questão 4
2hT193 (2023.2) P1, questão 4, gabarito

Introdução

Vários alunos – obs: eram alunos super dedicados, mas que tinham feito um Ensino Médio super precário, e que tavam tentando tirar o atraso correndo – já me contaram que quando eles tentavam tirar certas dúvidas com o Reginaldo ele respondia coisas como:

> "Isso é matéria de ensino médio! Isso aí você já deveria saber. Vai estudar pelo livro."

Eu vou chamar isso de "Método Reginaldo".

Eu vou tentar fazer algo totalmente diferente. As pessoas *deveriam* estar chegando em Cálculo sabendo obter casos particulares de fórmulas e teoremas muito bem, mas não estão...

Eu *acho* que o modo mais rápido de tirar as dúvidas dessas pessoas é usando a operação de substituição que nós vamos ver aqui, "[:=]", que é uma versão simplificada das operações de substituição "de verdade" que são usadas em λ-cálculo e em programas como o Lean, e que lidam bem com variáveis livres e ligadas, com tipos dependentes, que usam índices de de-Bruijn nos lugares certos, etc... mas ainda falta! Eu já tenho bastante material sobre isso, mas ele está espalhado...

Ah, e um dia eu vou fazer uma versão desse PDF com um apêndice enorme com um monte de exemplos em que esse "[:=]" simplificado funciona bem e esclarece idéias complicadas (já tenho um monte no material do semestre passado!), e com um monte de exemplos em que esse "[:=]" simplificado funciona mal e a gente precisa das versões mais complicadas... mas ainda falta.

Funções

Isso aqui é um exemplo de coisa que segundo o Reginaldo "vocês já deveriam saber", porque é matéria de Ensino Médio:

Digamos que $f(x) = x^2$. Então:

$$\begin{array}{rcl}
f(200) &=& 200^2 \\
f(3u+4) &=& (3u+4)^2 \\
f(42x^3+99) &=& (42x^3+99)^2 \\
f(a+b) &=& (a+b)^2 \\
f(g(x)) &=& g(x)^2 \\
42+f(200) &=& 42+200^2 \\
h(f(200)) &=& h(200^2) \\
h(f(x)) &=& h(x^2) \\
h(f(a+b)) &=& h((a+b)^2)
\end{array}$$

Exercício 1.
a) Calcule o resultado desta substituição:

$$(f(3u+4)) \left[f(y) := y^5 + y^6 \right]$$

Agora seja:

$$[\mathrm{S}_1] = \left[f(y) := y^5 + y^6 \right]$$

Calcule o resultado destas substituições:

$$\begin{array}{lr}
\text{b)} & f(200)\ [\mathrm{S}_1] \\
\text{c)} & f(3u+4)\ [\mathrm{S}_1] \\
\text{d)} & f(42x^3+99)\ [\mathrm{S}_1] \\
\text{e)} & f(a+b)\ [\mathrm{S}_1] \\
\text{f)} & f(g(x))\ [\mathrm{S}_1] \\
\text{g)} & 42+f(200)\ [\mathrm{S}_1] \\
\text{h)} & h(f(200))\ [\mathrm{S}_1] \\
\text{i)} & h(f(x))\ [\mathrm{S}_1] \\
\text{j)} & h(f(a+b))\ [\mathrm{S}_1] \\
\text{k)} & f(f(200))\ [\mathrm{S}_1] \\
\text{l)} & h(x)\ [\mathrm{S}_1] \\
\text{m)} & h(y)\ [\mathrm{S}_1]
\end{array}$$

Dica

Entenda isto aqui:

$$f(g(4/5))\ \left[g(y)\ :=\ \sqrt{y}+y^3\right] = f\left(\sqrt{4/5}+(4/5)^3\right)$$

```
f
|
g
|
/--.
|  |
4  5
```

[

```
g
|
y
```

:=

```
+-----.
|     |
sqrt  ^--.
|     |  |
y     y  3
```

]

=

```
f
|
+-----.
|     |
sqrt  ^-----.
|     |     |
/--.  /--.  3
|  |  |  |
4  5  4  5
```

```
=---------------------.
|                     |
s-----.               f
|     |               |
f     []              +-----.
|     |               |     |
g     :=--.           sqrt  ^-----.
|     |   |           |     |     |
/--.  g   +-----.     /--.  /--.  3
|  |  |   |     |     |  |  |  |
4  5  y   sqrt  ^--.  4  5  4  5
          |     |  |
          y     y  3
```

Mais sobre chutar e testar

Uma solução pra equação $x^2+1=50$ é um modo de preencher os dois '?'s daqui que faça as duas igualdades externas serem verdadeiras:

$$(x^2+1=50)\big[x:=?\big]=?=\mathbf{V}$$

As soluções são $x=7$ e $x=-7$. Olha:

$$\begin{array}{c}(x^2+1=50)\big[x:=7\big]=(7^2+1=50)=\mathbf{V}\\(x^2+1=50)\big[x:=-7\big]=((-7)^2+1=50)=\mathbf{V}\end{array}$$

Como é difícil chegar direto na solução eu costumo pedir pras pessoas começarem preenchendo os dois '?'s daqui,

$$(x^2+1=50)\big[x:=?\big]=?$$

começando pelo da esquerda, pra fazer com que a igualdade externa seja verdadeira. Por exemplo:

$$(x^2+1=50)\big[x:=4\big]=(4^2+1=50)$$

Se a pessoa consegue pelo menos preencher o '?' da esquerda daqui

$$(x^2+1=50)\big[x:=?\big]=?$$

com uma expressão qualquer, como aqui,

$$(x^2+1=50)\big[x:=a+b\big]=?$$

...aí eu geralmente consigo convencer ela de que ela pode usar isto pra treinar substituições... por exemplo:

$$\begin{array}{c}(x^2+1=50)\big[x:=a+b\big]=((a+b)^2+1=50)\\(x^2+1=50)\big[x:=2\big]=(2^2+1=50)\\(x^2+1=50)\big[x:=3\big]=(3^2+1=50)\end{array}$$

Depois que ela treinou isso bastante eu posso pedir que ela faça algo parecido usando este molde aqui,

$$(x^2+1=50)\big[x:=?\big]=?=?$$

e substituindo o último '?' por **V** ou **F**. Por exemplo:

$$\begin{array}{c}(x^2+1=50)\big[x:=5\big]=(5^2+1=50)=\mathbf{F}\\(x^2+1=50)\big[x:=6\big]=(6^2+1=50)=\mathbf{F}\\(x^2+1=50)\big[x:=7\big]=(7^2+1=50)=\mathbf{V}\end{array}$$

e aí *geralmente* as pessoas conseguem voltar pro problema original do início da coluna da esquerda e entender ele. Mas às vezes isso não funciona – e aí eu tenho que lembrar a pessoa que ela se comprometeu a ler essas coisas aqui pra entender a metodologia do curso:

Slogans01:10 até 08:51: duas histórias verídicas sobre GA
2iT5, 2iT6 "Meu objetivo é reprovar pessoas como você"

Equações diferenciais

O Stewart define a solução de uma equação diferencial nesta página aqui,
StewPtCap9p8 (p.528) Equações diferenciais gerais
e com estas frases (obs: a "equação 4" é $y' = xy$):

> Uma função f é denominada *solução* de uma equação diferencial se a equação é satisfeita quando $y = f(x)$ e suas derivadas são substituídas na equação. Assim, f é uma solução da Equação 4 se
> $$f(x) = xf(x)$$
> para todos os valores de x em algum intervalo.

Eu vou ser um pouco mais porco que ele, e ao invés de falar "em algum intervalo" eu vou falar "sempre".

Pra mim $f(x) = e^{2x}$ é uma solução da equação diferencial $f(x) = 2f'(x)$ porque isto aqui é verdade:

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \end{bmatrix} = (e^{2x} = e^{2x}) = \mathbf{V}$$

...e uma solução da equação diferencial $f(x) = 2f'(x)$ é algo que a gente pôe no primeiro '?' daqui,

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ f'(x) := ? \end{bmatrix} = ? = \mathbf{V}$$

num modo de completar isso que faz com que todas as igualdades externas sejam verdadeiras.

Por exemplo, vamos testar se $f(x) = 42$ é uma solução da equação diferencial $f(x) = e^{2x}$. Temos:

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := ? \end{bmatrix} = ? = ?$$

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{bmatrix} = ? = ?$$

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{bmatrix} = (0 = 2 \cdot 42) = ?$$

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{bmatrix} = (0 = 2 \cdot 42) = \mathbf{F}$$

Exercício 2.
a) Verifique que $f(x) = 0$ é uma solução da equação diferencial $f(x) = e^{2x}$.
b) Verifique que $f(x) = 99x$ não é uma solução da equação diferencial $f(x) = e^{2x}$. Dica: você vai ter que decifrar isto aqui: "$(99 = 2 \cdot 99x) = \mathbf{F}$ porque $99 = 2 \cdot 99x$ não é verdade sempre".

Antes de continuar...

Antes da gente continuar faça todos os itens da coluna da direita – são exercícios que eu preparei alguns semestres atrás.

Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
[4] & = & \left(f'(x) = x^4\right) \\
[5] & = & \left(f'(x) = 2f(x)\right) \\
[6] & = & \left(f''(x) + f'(x) = 6f(x)\right) \\
[7] & = & \left(f'(x) = -\frac{1}{f(x)}\right) \\
[8] & = & \left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \\
[\mathrm{RC}] & = & \left(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)\right) \\
[\mathrm{TFC2}] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = f(b) - f(a)\right)
\end{array}$$

Note que as expressões [4], [5], [6], [7], [8], são as EDOs deste problema aqui: 2dT13 EDOs por chutar e testar.

Exercício
Calcule o resultado de cada uma das substituições à direita. Lembre que o resultado de uma substituição é sempre uma *expressão* – *não simplifique ela*. Deixa eu fazer uma comparação com C: o resultado de substituir cada ocorrência do caracter `'a'` pelo caracter `'2'` no string `"a+5"` é o string `"2+5"`, não o string `"7"`, e nem o número `7`.

a) $f(g(x))\left[x := 42\right]$

b) $f(g(x))\left[g(x) := 200 \cdot x\right]$

c) $f(g(x))\left[f(y) := y^2 + y^3\right]$

d) $f(g(x))\left[f(y) := e^y\right]$

e) $f(g(x))\left[g(x) := 4 \cdot x\right]$

f) $f(g(x))\begin{bmatrix} f(y) := e^y \\ g(x) := 4 \cdot x \end{bmatrix}$

g) $f(g(x))\left[f(y) := y^{1/2}\right]$

h) $f(g(x))\left[f(y) := \sqrt{y}\right]$

i) $f(g(x))\left[f(y) := \sqrt{y}\right]$

j) $f(g(x))\begin{bmatrix} g(x) := e^x \\ g'(x) := e^x \end{bmatrix}$

k) $f(g(x))'\begin{bmatrix} g(x) := e^x \\ g'(x) := e^x \end{bmatrix}$

l) $[\mathrm{RC}]\begin{bmatrix} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \end{bmatrix}$

m) $[\mathrm{RC}]\begin{bmatrix} f(y) := y^{1/2} \\ f'(y) := \frac{1}{2}y^{-1/2} \end{bmatrix}$

n) $[\mathrm{RC}]\begin{bmatrix} f(y) := \sqrt{y} \\ f'(y) := \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{bmatrix}$

o) $[6]\begin{bmatrix} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \\ f''(x) := 4e^{2x} \end{bmatrix}$

p) $[6]\begin{bmatrix} f(x) := e^{3x} \\ f'(x) := 3e^{3x} \\ f''(x) := 9e^{3x} \end{bmatrix}$

q) $[\mathrm{TFC2}]\begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{2}x^2 \\ f'(x) := x \\ a := 0 \\ b := 2 \end{bmatrix}$

r) $[8]\begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \end{bmatrix}$

Uma integral

Nas aulas 8 e 9 – links:

2iQ16 Quadros da aula 8 (2/abr/2024)
2iQ22 Quadros da aula 9 (3/abr/2024)

nós vimos um argumento visual que mostrava isto aqui,

$$\int_{x=1}^{x=2} x\,dx = 1.5$$

e depois o argumento mais formal abaixo,
que dava o mesmo resultado:

$$\begin{array}{rcll}
\frac{d}{dx}x^2 &=& 2x & \\
\frac{d}{dx}\frac{x^2}{2} &=& x & \\
\int x\,dx &=& \frac{x^2}{2} & \text{por [II]} \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \end{bmatrix} \\
\int_{x=a}^{x=b} x\,dx &=& \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=a}^{x=b} & \text{por [TFC2]} \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \end{bmatrix} \\
\int_{x=1}^{x=2} x\,dx &=& \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=1}^{x=2} & \text{por [TFC2]} \begin{bmatrix} F(x):=x^2/2 \\ F'(x):=x \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix} \\
&=& \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} & \text{por [defdif]} \begin{bmatrix} F(x):=x^2/2 \\ F'(x):=x \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix} \\
&=& \frac{4}{2} - \frac{1}{2} & \\
&=& 1.5 &
\end{array}$$

Usamos estes nomes pras fórmulas:

$$\begin{array}{rcl}
\text{[II]} &=& \left(\int F'(x)\,dx = F(x) \right) \\
\text{[TFC2]} &=& \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
\text{[defdif]} &=& \left(F(x)\big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \right)
\end{array}$$

A regra da cadeia

Imagina que eu passo esse exercício aqui,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 42x = {\color{red}?}$$

e uma pessoa resolve ele desse jeito:

> Queremos encontrar a derivada de $f(x) = \operatorname{sen} 42x$. Para tal vamos usar a regra da cadeia. Aplicando o método chegamos ao resultado, que é $f'(x) = \cos 42x$.

Repara: essa pessoa gastou um bocado de tempo e energia escrevendo a parte em português da resposta dela, e isso não ajudou ela em nada, só atrapalhou... ela chegou no resultado errado, e a solução dela ficou num formato super difícil de debugar – não dá pra eu apontar pra um símbolo dela e dizer "confere isso aqui"!...

Compare a solução dela com esta aqui, em três passos:

$$\begin{array}{rcl}
{\color{red}[\mathrm{RC}]} & = & \left(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right) \\
{\color{red}[\mathrm{RC}]}\begin{bmatrix} f(x){:=}{\color{red}?} \\ g(x){:=}{\color{red}?} \\ f'(x){:=}{\color{red}?} \\ g'(x){:=}{\color{red}?} \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 42x = {\color{red}?}\right) \\
{\color{red}[\mathrm{RC}]}\begin{bmatrix} f(x){:=}\operatorname{sen} x \\ g(x){:=}42x \\ f'(x){:=}\cos x \\ g'(x){:=}42 \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 42x = \cos(42x)\cdot 42\right)
\end{array}$$

Se a pessoa não faz a menor idéia de como eu consegui descobrir o que pôr nos cinco '?'s da minha solução em três passos dali da esquerda eu posso expandir a minha solução deste jeito...

$$\begin{array}{rcl}
{\color{red}[\mathrm{RC}]} & = & \left(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right) \\
{\color{red}[\mathrm{RC}]}\begin{bmatrix} f(x){:=}{\color{red}?} \\ g(x){:=}{\color{red}?} \\ f'(x){:=}{\color{red}?} \\ g'(x){:=}{\color{red}?} \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 42x = {\color{red}?}\right) \\
{\color{red}[\mathrm{RCL}]} & = & \left(\frac{d}{dx}f(g(x))\right) \\
{\color{red}[\mathrm{RCL}]}\begin{bmatrix} f(x) := {\color{red}?} \\ g(x) := {\color{red}?} \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 42x\right) \\
{\color{red}[\mathrm{RCL}]}\begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ g(x) := 42x \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 42x\right) \\
{\color{red}[\mathrm{RC}]}\begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ g(x) := 42x \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 42x = f'(42x)g'(x)\right) \\
{\color{red}[\mathrm{RC}]}\begin{bmatrix} f(x){:=}\operatorname{sen} x \\ g(x){:=}42x \\ f'(x){:=}{\color{red}?} \\ g'(x){:=}{\color{red}?} \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 42x = {\color{red}?}\right) \\
{\color{red}[\mathrm{RC}]}\begin{bmatrix} f(x){:=}\operatorname{sen} x \\ g(x){:=}42x \\ f'(x){:=}\cos x \\ g'(x){:=}42 \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 42x = \cos(42x)\cdot 42\right)
\end{array}$$

repare que eu introduzi um monte de passos novos, e comecei resolvendo um problema menor que só tinha dois '?'s – este aqui:

$$\begin{array}{rcl}
{\color{red}[\mathrm{RCL}]} & = & \left(\frac{d}{dx}f(g(x))\right) \\
{\color{red}[\mathrm{RCL}]}\begin{bmatrix} f(x) := {\color{red}?} \\ g(x) := {\color{red}?} \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 42x\right)
\end{array}$$

Renomear

Note que:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\left(\frac{d}{dx}f(g(x))\right)\begin{bmatrix}f:=h\\g:=k\end{bmatrix}}_{\left(\frac{d}{dx}h(k(x))\right)}\begin{bmatrix}h:=g\\g:=k\end{bmatrix}}_{\left(\frac{d}{dx}g(f(x))\right)}[x:=t]}_{\left(\frac{d}{dt}g(f(t))\right)}$$

e portanto isto aqui

$$\text{[RC]}\begin{bmatrix}f{:=}h\\f'{:=}h'\\g{:=}k\\g'{:=}k'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h{:=}f\\h'{:=}f'\\k{:=}g\\k'{:=}g'\end{bmatrix}[x:=t]$$

deve dar uma versão da regra da cadeia que usa letras diferentes das originais... você consegue descobrir o resultado da substituição acima de cabeça? Se não conseguir faça todos os passos à mão.

O Maxima tem uma operação de substituição, `subst`, em que as substituições são feitas em ordem, e uma outra, `psubst`, em que as substituições são feitas em paralelo. Veja:

`https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_33.html#psubst`

Se o nosso '[:=]' for a substituição em paralelo então a gente pode fazer isto aqui:

$$\left(\frac{d}{dx}f(g(x))\right)\begin{bmatrix}f{:=}g\\f'{:=}g'\\g{:=}f\\g'{:=}f'\\x{:=}t\end{bmatrix}=\left(\frac{d}{dt}g(f(t))\right)$$

só que uma vez – em 2022.1 – eu tentei definir formalmente a substituição em paralelo em sala e deu super errado, ninguém entendeu nada... e aí eu vi que era melhor evitar os casos em que a substituição simples e a substituição em paralelo se comportam de formas diferentes.

Regra da cadeia: exercícios

Exercícios do Miranda

Lembre que:

$$[\text{RC}] = \left(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)$$

Resolva os exercícios 1–6 e 8–12 daqui:

MirandaP89

usando os métodos que você quiser, e depois reescreva o resultado final de cada um neste formato com uma justificativa detalhada à direita, que nós vimos no slide 9:

$$\frac{d}{dt}(3t+4)^5 \quad = \quad 5(3t+4)^4 \cdot 3 \qquad \text{por } [\text{RC}] \begin{bmatrix} \scriptstyle f(x):=x^5 \\ \scriptstyle g(x):=3x+4 \\ \scriptstyle f'(x):=5x^4 \\ \scriptstyle g'(x):=3 \end{bmatrix} \left[x := t\right]$$

Muito importante

Cálculo 2 é cheio de fórmulas que parecem incompreensíveis à primeira vista, porque são abstratas demais...

Uma das utilidades mais importantes da operação '[:=]' pra gente vai ser *transformar fórmulas nas quais a gente não entende nada em casos particulares dessas fórmulas, que têm vários pedaços que a gente consegue entender.*

Isso aqui é uma fórmula – ou melhor, um "método" – que vai ser um dos assuntos da P2:

$$[\mathrm{M}] \;=\; \left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{g(x)}{h(y)} \\
h(y)\,dy & = & g(x)\,dx \\
\int h(y)\,dy & = & \int g(x)\,dx \\
\| & & \| \\
H(y)+C_1 & & G(x)+C_2 \\
H(y) & = & G(x)+C_2-C_1 \\
 & = & G(x)+C_3 \\
H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\
\| & & \\
y & &
\end{array}\right)$$

Exercício muito importante:
Calcule o resultado da substituição abaixo.
Você provavelmente vai conseguir entender as quatro igualdades de baixo do resultado, mas as cinco igualdades de cima ainda não vão fazer sentido nenhum pra você.

$$[\mathrm{M}] \left[\begin{array}{rcl}
g(x) & := & -2x \\
h(y) & := & 2y \\
G(x) & := & -x^2 \\
H(y) & := & y^2 \\
H^{-1}(u) & := & \sqrt{u}
\end{array}\right] = \;?$$

Cálculo 2 - 2024.1

Aula 9: teste de nivelamento
(3/abril/2024 – duração: 15 mins)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C2.html

Links

2iQ22 Quadros da aula 9 (3/abril/2024)
2iQ24 Quadro em que aparece o enunciado do teste
2hT65 Teste de nivelamente de 2023.2

Por favor escrevam...

Por favor escrevam na folha:

- seu nome (legível),
- com quem você fez GA, C1 e Prog1 no semestre em que você passou em cada uma, e em qual semestre foi,
- a questão e tudo que você conseguir fazer pra resolver ela. A questão é:

$$\frac{d}{dx} f(\operatorname{sen}(x^4) + \ln x) \;=\; ?$$

Uma solução

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f(\sin(x^4)+\ln x)) &= f'(\sin(x^4)+\ln x)(\tfrac{d}{dx}(\sin(x^4)+\ln x)) \\
&= f'(\sin(x^4)+\ln x)(\tfrac{d}{dx}(\sin(x^4)) + \tfrac{d}{dx}(\ln x)) \\
&= f'(\sin(x^4)+\ln x)((\cos(x^4)\cdot \tfrac{d}{dx}(x^4)) + \tfrac{d}{dx}(\ln x)) \\
&= f'(\sin(x^4)+\ln x)((\cos(x^4)\cdot \tfrac{d}{dx}(x^4)) + \tfrac{1}{x}) \\
&= f'(\sin(x^4)+\ln x)((\cos(x^4)\cdot 4x^3) + \tfrac{1}{x})
\end{aligned}
$$

```
ddx
|
f
|
+_____.
|     |
sin   ln
|     |
^__.  x
|  |
x  4
```

=

```
m_________.
|         |
f'        ddx
|         |
+_____.   +_____.
|     |   |     |
sin   ln  sin   ln
|     |   |     |
^__.  x   ^__.  x
|  |      |  |
x  4      x  4
```

=

```
m_________.
|         |
f'        +_____.
|         |     |
+_____.   ddx   ddx
|     |   |     |
sin   ln  sin   ln
|     |   |     |
^__.  x   ^__.  x
|  |      |  |
x  4      x  4
```

=

```
m_________.
|         |
f'        +___________.
|         |           |
+_____.   *_____.     ddx
|     |   |     |     |
sin   ln  cos   ddx   ln
|     |   |     |     |
^__.  x   ^__.  ^__.  x
|  |      |  |  |  |
x  4      x  4  x  4
```

=

```
m_________.
|         |
f'        +___________.
|         |           |
+_____.   *_____.     //__.
|     |   |     |     |   |
sin   ln  cos   ddx   1   x
|     |   |     |
^__.  x   ^__.  ^__.
|  |      |  |  |  |
x  4      x  4  x  4
```

=

```
m_________.
|         |
f'        +______________.
|         |              |
+_____.   *_____.        //__.
|     |   |     |        |   |
sin   ln  cos   m__.     1   x
|     |   |     |  |
^__.  x   ^__.  4  ^__.
|  |      |  |     |  |
x  4      x  4     x  3
```

Outra solução

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{RC}] & = & \left(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right) \\
[\mathrm{RC}]\left[\begin{smallmatrix} g(x):=\sin(x^4)+\ln(x) \\ g'(x):=\cos(x^4)\cdot 4x^3+\frac{1}{x} \end{smallmatrix}\right] & = & \left(\frac{d}{dx}f(\sin(x^4)+\ln(x)) = f'(\sin(x^4)+\ln(x))\left(\cos(x^4)\cdot 4x^3+\frac{1}{x}\right)\right)
\end{array}
$$

Cálculo 2 - 2024.1

Aula 10: integral indefinida
e integração por partes

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C2.html

Links

Miranda181 6 Integral Indefinida
Miranda182 Figura 6.1: antiderivadas de x^2
Miranda207 7 Integração definida
Miranda212 7.2 Integral definida

Leit5p2 (p.285) 5 Integração e integral definida
Leit5p3 (p.286) 5.1 Antidiferenciação
Leit5p4 (p.287) 5.1.3 Teorema: ...em um intervalo I
Leit5p41 (p.324) 5.5 A integral definida

StewPtCap5p16 (p.337) 5.2 A Integral Definida
StewPtCap5p39 (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas
StewPtCap5p40 (p.361) primitiva geral da função $f(x) = 1/x^2$

Miranda199 6.3 Integração por Partes
Leit9p4 (p.531) 9.1. Integração por partes
StewPtCap7p5 (p.420) 7.1 Integração por Partes

Um livro recente da Márcia Fusaro Pinto (da UFRJ):
TLATOCp45 (p.34) ...fearlessly substituting variables...
TLATOCp189 (p.178) 6 Interlude: the ordering of chapters...

Integral indefinida

Tanto o Leithold quanto o Miranda explicam a *integral indefinida* antes da *integral definida*. Dê uma olhada na página de links.

Todos os modos fáceis de atribuir um significado intuitivo para expressões como esta aqui

$$\int f(x)\,dx$$

são gambiarras que funcionam mal.

Eu vou usar esta definição aqui,

2fT23 (p.4) Outra definição para a integral indefinida

e aqui tem um caso em que a definição usual quebra:

2fT24 (p.5) Meme: expanding brain, versão ln

Nós vamos começar usando a integral indefinida como o macaco que faz contas sem ter idéia do significado do que está fazendo, e só depois que tivermos bastante prática nós vamos discutir os vários jeitos de atribuir significados intuitivos para

A regra básica vai ser esta aqui:

$$[\mathrm{II}] = \left(\int f'(x)\,dx = f(x)\right)$$

Exercícios

Calcule:

c) Resolva os exercícios 1 a 10 daqui por chutar e testar:
Miranda185 Exercícios 6.1

d) Entenda tudo que esta nesta página:
Leit5p6 (p.289) 5.1.8. Teorema

A regra do quociente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}g(x)^k &= kg(x)^{k-1}g'(x) \\
\frac{d}{dx}g(x)^{-1} &= -g(x)^{-2}g'(x) \\
\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} &= -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \\
\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} &= \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)}\right) \\
&= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right) \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\
\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}g^k &= kg^{k-1}g' \\
\frac{d}{dx}g^{-1} &= -g^{-2}g' \\
\frac{d}{dx}\frac{1}{g} &= -\frac{g'}{g^2} \\
\frac{d}{dx}\frac{f}{g} &= \left(\frac{d}{dx}f\right)\frac{1}{g} + f\cdot\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{g}\right) \\
&= f'\frac{1}{g} + f\cdot\left(-\frac{g'}{g^2}\right) \\
&= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\
\frac{d}{dx}\frac{f}{g} &= \frac{f'g - fg'}{g^2}
\end{aligned}$$

A transitividade da igualdade

$$\begin{pmatrix} a+b & = & c+d \\ & = & e+f \\ & = & g+h \\ a+b & = & g+h \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a:=2 \\ b:=9 \\ c:=3 \\ d:=8 \\ e:=4 \\ f:=7 \\ g:=5 \\ h:=6 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2+9 & = & 3+8 \\ & = & 4+7 \\ & = & 5+6 \\ 2+9 & = & 5+6 \end{pmatrix}$$

Linearidade da integral

$$\begin{aligned}
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= F(x) \\
k\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= kF(x) \\
\int_{x=a}^{x=b} kf(x)\,dx &= kF(x) \\
\int_{x=a}^{x=b} kf(x)\,dx &= k\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int f\,dx &= F \\
k\int f\,dx &= kF \\
\int kf\,dx &= kF \\
\int kf\,dx &= k\int f\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= F(x) \\
\int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx &= G(x) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx &= F(x)+G(x) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)+g(x)\,dx &= F(x)+G(x) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)+g(x)\,dx &= \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int f\,dx &= F \\
\int g\,dx &= G \\
\int f\,dx + \int g\,dx &= F+G \\
\int f+g\,dx &= F+G \\
\int f+g\,dx &= \int f\,dx + \int g\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
\text{[II]} & = & \left(\int F'(x)\,dx = F(x)\right) \\
\text{[IIC]} & = & \left(\int F'(x)\,dx = F(x)+C\right) \\
\text{[TFC2]} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = \, F(x)|_{x=a}^{x=b}\right) \\
\text{[defdif]} & = & \left(F(x)|_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a)\right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int 0\,dx & = & 42 \\
\displaystyle\int 0\,dx & = & 99 \\
42 & = & 99
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int 0\,dx & = & 42+C \\
\displaystyle\int 0\,dx & = & 99+C \\
42+C & = & 99+C
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_{x=2}^{x=3} 0\,dx & = & 42|_{x=2}^{x=3} \\
\displaystyle\int_{x=2}^{x=3} 0\,dx & = & 99|_{x=2}^{x=3} \\
42|_{x=2}^{x=3} & = & 99|_{x=2}^{x=3}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\int f'g + fg'\,dx &= fg \\
\int f'g + fg'\,dx &= \int f'g\,dx + \int fg'\,dx \\
\int f'g\,dx + \int fg'\,dx &= fg \\
\int fg'\,dx &= fg - \int f'g\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x)|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx &= \int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} f(x)g'(x)\,dx \\
\int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x)|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x)|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x)\,dx
\end{aligned}$$

Integração por partes: um exemplo

Lembre que o Mathologer diz no vídeo dele que o melhor modo da gente aprender Cálculo é começar escrevendo idéias que a gente acha que devem ser verdade, e depois a gente vê se elas dão resultados certos e se elas fazem sentido... e se fizerem sentido a gente tenta formalizar elas.

Ele também diz – a partir daqui, na "lombada número 1",

CalcEasy20:27

que a integral é a inversa da derivada, mas que $\int \cos x\,dx$ pode retornar tanto $\operatorname{sen} x$ quanto $42+\operatorname{sen} x$. As contas à direita são bem improvisadas, mas como eu indiquei em cima que elas são só uma idéia que pode estar cheia de erros o "colega que seja menos meu amigo" não vai poder reagir deste jeito aqui...

2gT20

Exercício 0:
Calcule $\frac{d}{dx}(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x)$.

Idéia (que pode estar cheia de erros):

$$\begin{array}{rcll}
(gh)' &=& g'h + gh' & \text{por} \\
\int (gh)'\,dx &=& \int g'h + gh'\,dx & \\
gh &=& \int g'h + gh'\,dx & \\
&=& \int g'h\,dx + \int gh'\,dx & \text{por} \\
gh &=& \int g'h\,dx + \int gh'\,dx & \text{por 3 e 4} \\
gh - \int g'h\,dx &=& \int gh'\,dx & \text{por 5} \\
\\
\int gh'\,dx &=& gh - \int g'h\,dx & \text{por 6} \\
\\
\int xe^x\,dx &=& xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx & \text{por 7 com } \left[\begin{smallmatrix} g:=x \\ h:=e^x \end{smallmatrix}\right] \\
&=& xe^x - \int e^x\,dx & \\
&=& xe^x - e^x & \text{por } (e^x)' = e^x \\
\int xe^x\,dx &=& xe^x - e^x & \text{por 8, 9 e 10} \\
\\
\int x^2e^x\,dx &=& x^2e^x - \int 2xe^x\,dx & \text{por 7 com } \left[\begin{smallmatrix} g:=x^2 \\ h:=e^x \end{smallmatrix}\right] \\
&=& x^2e^x - 2\int xe^x\,dx & \text{por} \\
&=& x^2e^x - 2\,(xe^x - e^x) & \text{por 11} \\
&=& x^2e^x - 2xe^x + 2e^x &
\end{array}$$

Cálculo 2 - 2024.1

Aulas 14 e 15: diferenciais e
introdução às regras de
mudança de variável na integral

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C2.html

Links

Leit4p55 (p.269) 4.9 A diferencial
Leit4p61 (p.275) reescritas (...) usando a notação de Leibniz
Leit5p13 (p.296) Suponha que desejamos antidiferenciar $(1+x^2)^9(2x)$
Leit5p13 (p.296) 5.2.1 Regra da cadeia para a antidiferenciação
Leit5p19 (p.302) Exercícios 5.2

StewPtCap1p5 (p.10) variável dependente
StewPtCap3p75 (p.228) Diferenciais
StewPtCap5p39 (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas
StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição
StewPtCap5p51 (p.372) Regra da Substituição para as Integrais Definidas
StewPtCap5p51 (p.372) Demonstração. Seja F uma primitiva de f...
StewPtCap5p53 (p.374) Exercícios

Miranda117 4.7 Aproximações Lineares e Diferencial
Miranda119 Definição 7: a diferencial
Miranda189 6.2 Integração por Substituição
Miranda191 Exercícios
Miranda192 Exemplo 6.6
Miranda193 Não podemos calcular uma integral que possui tanto um x e um u nela
Miranda196 Exercícios

...reescritas usando a notação de Leibniz

O Leithold define diferenciais na p.269, e na p.275...
Leit4p55 (p.269) 4.9 A diferencial
Leit4p61 (p.275) ...usando a notação de Leibniz
ele tem esta tabela, em que ele mostra como as regras usuais de derivação podem ser traduzidas pra regras usando diferenciais:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d(c)}{dx} &=& 0 \\
\frac{d(x^n)}{dx} &=& nx^{n-1} \\
\frac{d(cu)}{dx} &=& c\frac{du}{dx} \\
\frac{d(u+v)}{dx} &=& \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \\
\frac{d(uv)}{dx} &=& u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \\
\frac{d(\frac{u}{v})}{dx} &=& \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \\
\frac{d(u^n)}{dx} &=& nu^{n-1}\frac{du}{dx}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
d(c) &=& 0 \\
d(x^n) &=& nx^{n-1}dx \\
d(cu) &=& c\,du \\
d(u+v) &=& du + dv \\
d(uv) &=& u\,dv + v\,du \\
d(\frac{u}{v}) &=& \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \\
d(u^n) &=& nu^{n-1}du
\end{array}$$

quando eu seguia a ordem dos livros e ensinava diferenciais em C2 as pessoas cometiam tantos, tantos, tantos erros nas provas – principalmente na mudança de variável na integral, que vamos ver na próxima página – que as provas eram um massacre...

...aí eu resolvi $\boxed{\text{PROIBIR}}$ diferenciais em C2. A gente vai usar elas só em alguns pontos muito específicos da matéria de C2, e vai deixar pra ver elas direito em C3.

Introdução

A fórmula mais difícil de justificar de Cálculo 2 é essa aqui – a fórmula da mudança de variável na integral indefinida (“MVI”):

$$\int f'(\underbrace{g(x)}_{u})\, \underbrace{\underbrace{g'(x)}_{\frac{du}{dx}}\; dx}_{du} = \int f'(u)\, du$$

Tem dois modos da gente acreditar nela. O primeiro é assim: os livros dizem que a MVI é verdade, então se a gente decorar ela e algumas demonstrações curtas dela e a gente aprender a recitá-las com muita, muita, *muita* convicção então a gente

- vai se convencer de que ela é verdade,
- vai ser capaz de usar ela na prova sem errar,
- e a gente vai ser capaz de convencer outras pessoas de que ela é verdade.

Tem uma demonstração da MVI aqui,

StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição

mas eu até hoje não consigo acreditar direito nessa demonstração – me parece que faltam muitos detalhes nela, *e eu não sei completar esses detalhes*.

O segundo modo da gente acreditar na MVI é a gente aprender a usar isso aqui,

$$[\text{MVD4}] = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\, dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\, du \end{array} \right)$$

onde “MVD” quer dizer “mudança de variável na integral definida”, e o “4” quer dizer “versão com 4 igualdades”. Note que esse [MVD4] é uma demonstração – em que cada passo é fácil de justificar! – e não uma fórmula... a fórmula da MVD é essa aqui,

$$[\text{MVD1}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\, dx \quad = \quad \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\, du \right)$$

e a fórmula da MVI é esta:

$$[\text{MVI1}] = \left(\int f'(g(x))g'(x)\, dx \quad = \quad \int f'(u)\, du \right)$$

as abreviações são estas,

$$\begin{array}{ccc} [\text{MVD4}] & \to & [\text{MVI3}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\text{MVD1}] & \to & [\text{MVI1}] \end{array}$$

e a gente vai aprender a expandir cada aplicação da [MVI1] pra uma aplicação da [MVD4] – em que cada passo vai ser fácil de justificar.

"Meu objetivo é..." (2)

Você já deve ter relido os slides da "Introdução ao curso"

http://anggtwu.net/LATEX/2024-1-C2-intro.pdf

várias vezes. A introdução tem um slide chamado "Meu objetivo é...", que tem esse trecho aqui:

> Cálculo 2 tem vários assuntos que funcionam assim: se você tentar aprender o assunto B direto ele é muito, muito, muito difícil, e você vai gastar – digamos – 200 horas de estudo pra aprender ele... mas se você aprender o assunto A primeiro você consegue aprender os dois assuntos, A e B, em 20 horas ao invés de 200.

e ela tem vários slides que falam de atividades que exercitam músculos mentais bem diferentes. O que importa agora é que "entender de cabeça" e "entender escrevendo as subtituições por extenso no papel" são atividades que exercitam músculos mentais beeem diferentes, e o modo rápido de aprender Cálculo 2 é nessa ordem aqui:

A. aprender a fazer as substituições no papel

B. aprender a fazer as substituições de cabeça

C. entender o que os livros dizem

Você só vai conseguir aprender o B ("...de cabeça") treinando bastante o A ("...no papel"), e pra conseguir entender o que os livros dizem ("C") você muitas vezes vai ter que expandir uma frase misteriosa do livro em MUITOS passos mais simples. Aqui tem alguns exemplos de coisas super complicadas que os livros que nós estamos usando escreveram em poucas frases cada uma:

StewPtCap5p51 (p.372) Seja F uma primitiva de f...
Miranda193 ...que possui tanto um x e um u...

A matéria desse curso é gigantesca e nós temos muito pouco tempo. Se você ficar insistindo em tentar entender "de cabeça" o que os livros dizem sem tentar escrever as substituições no papel eu vou ter que usar esse slogan daqui,

MEU OBJETIVO É REPROVAR
PESSOAS COMO VOCÊ!!!

que na verdade é uma versão abreviada de uma idéia bem maior – releia os slides da "Introdução ao curso" pra entender ela direito.

MVDs e MVIs

$$[\text{MVD4}] = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD1}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \left(\begin{array}{rcl} \int f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x)) \\ & = & f(u) \\ & = & \int f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI1}] = \left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f'(u)\,du \right)$$

MVDs e MVIs, versão colorida

$$
[\text{MVD4}] = \left(\begin{array}{rcl}
\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx &=& f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\
&=& f(g(b)) - f(g(a)) \\
&=& f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\
&=& \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du
\end{array} \right)
$$

$$
[\text{MVD1}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)
$$

$$
[\text{MVI3}] = \left(\begin{array}{rcl}
\int f'(g(x))g'(x)\,dx &=& f(g(x)) \\
&=& f(u) \\
&=& \int f'(u)\,du
\end{array} \right)
$$

$$
[\text{MVI1}] = \left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du \right)
$$

Um caso particular: $\int \cos(2x) \cdot 2\,dx$

$$[\text{MVD4}] = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} f(x){:=}\text{sen}(x) \\ f'(x){:=}\cos(x) \\ g(x){:=}2{\cdot}x \\ g'(x){:=}2 \\ a{:=}3 \\ b{:=}4 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=3}^{x=4} \cos(2 \cdot x) \cdot 2\,dx & = & \text{sen}(2 \cdot x)\big|_{x=3}^{x=4} \\ & = & \text{sen}(2 \cdot 4) - \text{sen}(2 \cdot 3) \\ & = & \text{sen}(u)\big|_{u=2\cdot 3}^{u=2\cdot 4} \\ & = & \int_{u=2\cdot 3}^{u=2\cdot 4} \cos(u)\,du \end{array} \right)$$

Exercício 1

Lembre que:

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{MVD4}] & = & \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right) \\
[\text{MVD1}] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right) \\
[\text{MVI1}] & = & \left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f'(u)\,du \right)
\end{array}
$$

Sejam $[\text{S1}] = \begin{bmatrix} f'(u):=u^{10} \\ f(u):=\frac{1}{11}u^{11} \\ g(x):=x^2+4 \\ g'(x):=2x \end{bmatrix}$ e $[\text{S2}] = \begin{bmatrix} f'(x):=\tan(x) \\ g(x):=x^2 \\ g'(x):=2x \end{bmatrix}$.

Complete:
a) $[\text{MVI1}][\text{S1}] = ?$
b) $[\text{MVD4}][\text{S1}] = ?$
c) $[\text{MVI1}][\text{S2}] = ?$
d) $[\text{MVD1}][\text{S2}] = ?$
e) $[\text{MVD4}][\text{S2}] = ?$

O item (e) vai ajudar a gente a entender isso aqui:
StewPtCap5p51 (p.372) Demonstração. Seja F uma primitiva de f...

Expanda as justificativas

Na figura abaixo o [A] é um caso particular do [MVD4] *com justificativas*:

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{TFC2}] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
[\text{defdif}] & = & \left(F(x)\big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \right) \\
[\text{A}] & = & \left(\begin{array}{lcll}
\int_{x=3}^{x=4} \cos(2\cdot x)\cdot 2\,dx & = & \operatorname{sen}(2\cdot x)\big|_{x=3}^{x=4} & \text{por } [\text{TFC2}] \begin{bmatrix} F(x):=\operatorname{sen}(2{\cdot}x) \\ F'(x):=\cos(2{\cdot}x){\cdot}2 \\ a:=3 \\ b:=4 \end{bmatrix} \\
 & = & \operatorname{sen}(2\cdot 4) - \operatorname{sen}(2\cdot 3) & \text{por } [\text{defdif}] \begin{bmatrix} F(x):=\operatorname{sen}(2{\cdot}x) \\ a:=3 \\ b:=4 \end{bmatrix} \\
 & = & \operatorname{sen}(u)\big|_{u=2\cdot 3}^{u=2\cdot 4} & \text{por } [\text{defdif}] \begin{bmatrix} x:=u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(u):=\operatorname{sen}(u) \\ a:=2{\cdot}3 \\ b:=2{\cdot}4 \end{bmatrix} \\
 & = & \int_{u=2\cdot 3}^{u=2\cdot 4} \cos(u)\,du & \text{por } [\text{TFC2}] \begin{bmatrix} x:=u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(u):=\operatorname{sen}(u) \\ F'(u):=\cos(u) \\ a:=2{\cdot}3 \\ b:=2{\cdot}4 \end{bmatrix}
\end{array} \right)
\end{array}
$$

Exercício 2.
Expanda cada uma das justificativas,

a) $[\text{TFC2}] \begin{bmatrix} F(x):=\operatorname{sen}(2{\cdot}x) \\ F'(x):=\cos(2{\cdot}x){\cdot}2 \\ a:=3 \\ b:=4 \end{bmatrix} = ?$

b) $[\text{defdif}] \begin{bmatrix} F(x):=\operatorname{sen}(2{\cdot}x) \\ a:=3 \\ b:=4 \end{bmatrix} = ?$

c) $[\text{defdif}] \begin{bmatrix} x:=u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(u):=\operatorname{sen}(u) \\ a:=2{\cdot}3 \\ b:=2{\cdot}4 \end{bmatrix} = ?$

d) $[\text{TFC2}] \begin{bmatrix} x:=u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(u):=\operatorname{sen}(u) \\ F'(u):=\cos(u) \\ a:=2{\cdot}3 \\ b:=2{\cdot}4 \end{bmatrix} = ?$

e veja que nem sempre a justificativa dá exatamente a igualdade à esquerda dela – às vezes ela dá só algo que, arrãm, *justifica* a igualdade.

Complete as justificativas

Na figura abaixo o [B] é um outro caso particular do [MVD4] com justificativas,

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{TFC2}] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\big|_{x=a}^{x=b}\right) \\
[\mathrm{defdif}] & = & \left(F(x)\big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)\right) \\
[\mathrm{B}] & = & \left(\begin{array}{rcll}
\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & \text{por } ?_1 \\
& = & f(g(b)) - f(g(a)) & \text{por } ?_2 \\
& = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & \text{por } ?_3 \\
& = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du & \text{por } ?_4
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Exercício 3.
Encontre justificativas que podem ser postas nas posições $?_1$, $?_2$, $?_3$ e $?_4$.

Dica:
É $\boxed{\text{BEEEM}}$ difícil encontrar os $?_1$, $?_2$, $?_3$ e $?_4$ direto de cabeça...
Use o chutar e testar e não apague nenhum dos seus chutes e testes!

Dica 2:
"Resolver por chutar e testar" e "resolver de cabeça" são técnicas que usam músculos mentais diferentes, e quase sempre quando a gente encontra um problema "com cara de Cálculo 2" o modo mais rápido de descobrir como resolver ele "de cabeça" é começar tentando resolver ele "por chutar e testar"! Vou tentar fazer umas animações explicando a idéia geral por trás disso quando der. Isso tem a ver com uma das minhas áreas de pesquisa... um link:

`http://anggtwu.net/math-b.html#2022-md`

Resumindo: *treine chutar e testar!!!*

Mais um exemplo de chutar e testar

Isto é uma versão melhorada de...
2iQ34 um quadro da aula de 9/abril/2024.
Lembre que:

$$[\text{RC}] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Digamos que queremos resolver isto,

$$\int \frac{2}{3x+4} + \frac{5}{6x+7} \, dx \;=\; ?$$

mas nós vamos começar por este problema mais simples,

$$\int \frac{2}{3x+4} \, dx \;=\; ?$$

que é equivalente a:

$$\frac{d}{dx} \, ? \;=\; \frac{2}{3x+4}$$

Tente entender a solução por chutar e testar da direita. Muita gente acha que não pode fazer chutes e testes com números – porque, sei lá, talvez o Reginaldo tenha dito pra elas que isso é coisa de gente burra... mas repare que à direita eu fiz alguns chutes e testes usando números, e logo depois *eu transformei esses chutes e testes com números em chutes e testes com variáveis, que viraram fórmulas novas...* e acho que todo mundo concorda que inventar fórmulas e demonstrá-las é algo bem chique.

$$\begin{array}{rcll}
\frac{d}{dx} \ln x &=& \frac{1}{x} & \\
\frac{d}{dx} 2\ln x &=& \frac{2}{x} & \\
\frac{d}{dx} \ln(g(x)) &\overset{(1)}{=}& \frac{1}{g(x)} g'(x) & \text{por [RC]} \left[\begin{smallmatrix} f(x):=\ln x \\ f'(x)=1/x \end{smallmatrix} \right] \\
&\overset{(2)}{=}& \frac{g'(x)}{g(x)} & \\
\frac{d}{dx} \ln(g(x)) &\overset{(3)}{=}& \frac{g'(x)}{g(x)} & \text{por (1) e (2)} \\
\frac{d}{dx} \ln(6x+7) &=& \frac{6}{6x+7} & \text{por (3)} \left[\begin{smallmatrix} g(x):=6x+7 \\ g'(x):=6 \end{smallmatrix} \right] \\
\frac{d}{dx} \ln(ax+b) &\overset{(4)}{=}& \frac{a}{ax+b} & \text{por (3)} \\
\frac{d}{dx} (c\ln(ax+b)) &\overset{(5)}{=}& c\frac{a}{ax+b} & \text{por (4)} \\
\frac{d}{dx} (c\ln(3x+4)) &\overset{(6)}{=}& c\frac{3}{3x+4} & \text{por (5)} \\
\frac{d}{dx} (\frac{1}{3}\ln(3x+4)) &\overset{(6)}{=}& \frac{1}{3}\frac{3}{3x+4} & \\
\frac{d}{dx} (\frac{1}{3}\ln(3x+4)) &=& \frac{1}{3x+4} & \\
\frac{d}{dx} (\frac{2}{3}\ln(3x+4)) &=& \frac{2}{3x+4} & \\
\frac{d}{dx} (\frac{a}{b}\ln(bx+c)) &=& \frac{a}{b}\frac{b}{bx+c} & \text{por (5)} \\
&=& \frac{a}{bx+c} & \\
\frac{d}{dx} (\frac{a}{b}\ln(bx+c)) &\overset{(7)}{=}& \frac{a}{bx+c} & \\
\int \frac{a}{bx+c} \, dx &\overset{(8)}{=}& \frac{a}{b}\ln(bx+c) & \text{por (7)} \\
\int \frac{2}{3x+4} \, dx &\overset{(9)}{=}& \frac{2}{3}\ln(3x+4) & \text{por (8)} \\
\int \frac{5}{6x+7} \, dx &\overset{(10)}{=}& \frac{5}{6}\ln(6x+7) & \text{por (8)} \\
\int \frac{2}{3x+4} + \frac{5}{6x+7} \, dx &\overset{(11)}{=}& \frac{2}{3}\ln(3x+4) + \frac{5}{6}\ln(6x+7) &
\end{array}$$

Leithold, p.302

Leit5p19 (p.302) Exercícios 5.2

```
(%i1) items : [
        ["1.", sqrt(1-4*y),          u=1-4*y],
        ["2.", (3*x - 1/4)^(1/3),    u=3*x-1/4],
        ["3.", (6   - 2*x)^(1/3),    u=6-2*x],
        ["4.", sqrt(5*r + 1),        u=5*r+1],
        ["5.", x*sqrt(x^2 - 9),      u=x^2-9],
        ["6.", 3*x*sqrt(4 - x^2),    u=4-x^2],
        ["7.", x^2*(x^3-1)^10,       u=x^3-1],
        ["8.", x*(2*x^2+1)^6,        u=2*x^2+1],
        ["9.", 5*x*(9-4*x^2)^(2/3), u=9-4*x^2],
        ["10.", x/(x^2+1)^3,         u=x^2+1]
       ]$
(%i2) lfc_solve_m (items);
(%o2)
```

$$\begin{pmatrix}
1. & \int \sqrt{1-4\,y}\;dy & = & -\left(\frac{(1-4\,y)^{\frac{3}{2}}}{6}\right) \\
2. & \int \left(3\,x-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\;dx & = & \frac{\left(3\,x-\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}}}{4} \\
3. & \int (6-2\,x)^{\frac{1}{3}}\;dx & = & -\left(\frac{3\,(6-2\,x)^{\frac{4}{3}}}{8}\right) \\
4. & \int \sqrt{5\,r+1}\;dr & = & \frac{2\,(5\,r+1)^{\frac{3}{2}}}{15} \\
5. & \int x\,\sqrt{x^2-9}\;dx & = & \frac{(x^2-9)^{\frac{3}{2}}}{3} \\
6. & 3\,\int x\,\sqrt{4-x^2}\;dx & = & -(4-x^2)^{\frac{3}{2}} \\
7. & \int x^2\,(x^3-1)^{10}\;dx & = & \frac{(x^3-1)^{11}}{33} \\
8. & \int x\,(2\,x^2+1)^6\;dx & = & \frac{(2\,x^2+1)^7}{28} \\
9. & 5\,\int x\,(9-4\,x^2)^{\frac{2}{3}}\;dx & = & -\left(\frac{3\,(9-4\,x^2)^{\frac{5}{3}}}{8}\right) \\
10. & \int \frac{x}{(x^2+1)^3}\;dx & = & -\left(\frac{1}{4\,(x^2+1)^2}\right)
\end{pmatrix}$$

```
(%i3) lfc_change_m(items);
(%o3)
```

$$\begin{pmatrix}
1. & \int \sqrt{1-4\,y}\;dy & = & -\left(\frac{\int \sqrt{u}\;du}{4}\right) & u=1-4\,y \\
2. & \int \left(3\,x-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\;dx & = & \frac{\int u^{\frac{1}{3}}\;du}{3} & u=3\,x-\frac{1}{4} \\
3. & \int (6-2\,x)^{\frac{1}{3}}\;dx & = & -\left(\frac{\int u^{\frac{1}{3}}\;du}{2}\right) & u=6-2\,x \\
4. & \int \sqrt{5\,r+1}\;dr & = & \frac{\int \sqrt{u}\;du}{5} & u=5\,r+1 \\
5. & \int x\,\sqrt{x^2-9}\;dx & = & \frac{\int \sqrt{u}\;du}{2} & u=x^2-9 \\
6. & 3\,\int x\,\sqrt{4-x^2}\;dx & = & -\left(\frac{3\,\int \sqrt{u}\;du}{2}\right) & u=4-x^2 \\
7. & \int x^2\,(x^3-1)^{10}\;dx & = & \frac{\int u^{10}\;du}{3} & u=x^3-1 \\
8. & \int x\,(2\,x^2+1)^6\;dx & = & \frac{\int u^6\;du}{4} & u=2\,x^2+1 \\
9. & 5\,\int x\,(9-4\,x^2)^{\frac{2}{3}}\;dx & = & -\left(\frac{5\,\int u^{\frac{2}{3}}\;du}{8}\right) & u=9-4\,x^2 \\
10. & \int \frac{x}{(x^2+1)^3}\;dx & = & \frac{\int \frac{1}{u^3}\;du}{2} & u=x^2+1
\end{pmatrix}$$

```
(%i4)
```

Cálculo 2 - 2024.1

Aulas 16 a 18: mudança de variáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C2.html

Links

Links

Links da aula 8:
2hQ21 Quadros da aula 8 (4a, 12/set/2023)
StewPtCap5p39 (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas
StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição
StewPtCap7p5 (p.420) 7.1 Integração por Partes
2gT45 (2023.1) Mudança de variável: exemplo
2gT46 (2023.1) Mudança de variável: caixinhas

Mudança de variável na integral definida (MVD):
2eT131 (t-ints, p.12) Uma figura pra mudança de variável
Thomas55p11 (p.376) Theorem 5: Substitution in definite integrals
2fT49 Meu PDF de 2022.2 sobre mudança de variáveis

Mudança de variável na integral indefinida (MVI):
2eT133 (t-ints, p.14) Um exemplo com contas
2eT135 (t-ints, p.16) Outro exemplo com contas
Thomas55p3 (p.370) Theorem 5: The substitution rule
Leit5p13 (p.296) A regra da cadeia para a antidiferenciação
Leit9p10 (p.537) Integração de potências de sen e cos
Miranda189 6.2. Integração por substituição
Miranda192 Exemplo 6.6
Miranda193 Não podemos
Miranda196 Exercícios
Miranda255 8.3 Integrais Trigonométricas

Vídeo do Reginaldo:
`https://www.youtube.com/watch?v=PTCUjrEBc4g`

Alguns quadros de 2023.1:
2gQ22 Quadros da aula 10 (05/maio/2023)
2gQ24 Quadros da aula 11 (09/maio/2023)
2gQ26 Quadros da aula 12 (12/maio/2023)
2gQ28 Quadros da aula 13 (16/maio/2023)

Introdução

O Stewart explica o truque da mudança de variável na integral usando *variáveis dependentes* e *diferenciais*. Por exemplo, se x é a variável independente, u é a variável dependente, e a relação entre elas é $u = g(x) = 2x$, então temos

$$\frac{du}{dx} \;=\; \frac{d}{dx}u \;=\; \frac{d}{dx}g(x) \;=\; \frac{d}{dx}2x \;=\; 2$$

e:

$$\int \operatorname{sen}(\underbrace{2x}_{u})\,\underbrace{\underbrace{2}_{\frac{du}{dx}}\,dx}_{du} \;=\; \int \operatorname{sen}(u)\,du$$

Dê uma olhada:
StewPtCap1p5 (p.10) variável dependente
StewPtCap3p75 (p.228) Diferenciais
StewPtCap5p39 (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas
StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição

Só que contas com variáveis dependentes e diferenciais são difíceis de justificar formalmente! A gente viu como expandir contas curtas em que certos passos têm justificativas complicadas em contas maiores mas em que cada passo tem uma justificativa bem simples... se a gente tenta fazer isso com a igualdade entre integrais acima a gente acaba descobrindo que as regras pra variáveis dependentes e diferenciais são bem complicadas.

Então eu vou fazer o seguinte. A regra da mudança de variável na integral definida, que o Stewart explica nesta página,
StewPtCap5p51 (p.372) ...para as integrais definidas
é bem fácil de demonstrar usando só o [TFC2].

Eu vou usar estas quatro definições aqui – onde [MVD] é a fórmula pra mudança de variável na integral definida, [MVI] é a fórmula pra mudança de variável na integral indefinida, [MVD4] é uma demonstração da [MVD] com 4 igualdades [MVI3] é uma demonstração da [MVI] com 3 igualdades,

$$\begin{array}{rcl}
[\text{MVD}] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right) \\
[\text{MVI}] & = & \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f(u)\,du \right) \\
[\text{MVD4}] & = & \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(g(b)) - F(g(a)) \\ & = & F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right) \\
[\text{MVI3}] & = & \left(\begin{array}{rcl} \int f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x)) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{array} \right)
\end{array}$$

e a gente vai ver que dá pra tratar algumas destas fórmulas e demonstrações como abreviações pras outras, e que dá pra expandir as versões mais abreviadas em outras em que os passos são mais fáceis de justificar.

Um exemplo

Isto aqui é um exemplo de como contas com mudança de variável costumam ser feitas na prática:

$$\begin{aligned}
&\int 2\cos(3x+4)\,dx \\
&= \int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\
&= \frac{2}{3}\int \cos u\,du \\
&= \frac{2}{3}\operatorname{sen} u \\
&= \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x+4)
\end{aligned}$$

É necessário indicar em algum lugar que a relação entre a variável nova e a antiga é esta: $u = 3x+4$.

Compare as contas acima, que não têm nem os limites de integração nem as barras de diferença, com as da coluna da direita:

$$\begin{aligned}
&\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(3x+4)\,dx \\
&= \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\
&= \frac{2}{3}\int_{u=3a+4}^{u=3b+4} \cos u\,du \\
&= \frac{2}{3}\left((\operatorname{sen} u)\big|_{u=3a+4}^{u=3b+4}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left((\operatorname{sen}(3x+4))\big|_{x=a}^{x=b}\right)
\end{aligned}$$

Nós vamos tratar a versão à esquerda como uma abreviação pra versão da direita. Note que pra ir da versão “completa” pra “abreviada” é super fácil, é só apagar os limites de integração e as barras de diferença – mas pra ir da versão “abreviada” pra “completa” a gente precisa reconstruir os limites de integração e as barras de diferença, o que é bem mais difícil.

Caixinhas de anotações

O meu truque preferido pra não me enrolar nas contas de uma mudança de variável é fazer uma caixinha de anotações como essa aqui,

$$\left[\begin{array}{c} u = 3x+4 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x+4) = 3 \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ du = 3\,dx \\ dx = \frac{1}{3}\,du \end{array}\right]$$

na qual: a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova – que nesse exemplo é $u = 3x + 4$, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras como:

$$dx = 42\,du$$

Durante quase todo o curso de C2 a gente vai tratar esse tipo de coisa como uma igualdade entre expressões incompletas – mais ou menos como se a gente estivesse dizendo isso aqui:

$$+20) = /99]$$

Na caixinha à esquerda eu colori as linhas que são gambiarras em vermelho.

Repare que se a gente soubesse usar diferenciais a gente saberia dar um sentido pras igualdades que envolvem diferenciais, e que eu marquei em vermelho... mas a gente não sabe, então a gente vai considerar que elas são gambiarras que a gente só vai entender direito em Cálculo 3.

Aqui tem um exemplo grande:
2fT112 (C2-P1, p.5) Questão 1: gabarito

Os detalhes horríveis

Nesta página aqui – Miranda193 – o Miranda diz "Não podemos calcular uma integral que possui tanto um x e um u nela", mas ele não explica porquê... se em

$$\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(u)\,dx$$

esse u fosse uma abreviação para $3x+4$ essa integral acima seria equivalente à do início do slide anterior, né?... =(

Neste slide eu vou tentar contar o que eu sei sobre como o método da substituição funciona – *pra convencer vocês de que não vale a pena vocês tentarem entender os detalhes agora*.

Toda mudança de variável numa integral definida é consequência da igualdade (13) do slide "Contas (2)". Por exemplo, compare:

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} g(h(x))h'(x)\,dx &=& \displaystyle\int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g(u)\,du \\
\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(3x+4)\,dx &=& \displaystyle\int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du
\end{array}$$

A gente pode tentar descobrir qual é a substituição certa passo a passo, começando pelas funções mais simples.... eu faria assim: olhando pra parte direita eu chuto que $g(u)=2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}$; olhando pra parte esquerda eu chuto que $h(x)=3x+4$, e daí $h'(x)=3$; aí eu testo esta substituição aqui,

$$(13)\begin{bmatrix} g(u) := 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3} \\ h(x) := 3x+4 \\ h'(x) := 3 \end{bmatrix}$$

e vejo que o resultado dela é *equivalente* (mas não igual!!!) à última igualdade da coluna da esquerda – não preciso nem substituir o a e o b.

Preciso reescrever este slide!

Os detalhes horríveis (2)

Estas contas aqui,

$$\begin{array}{rcl} u & = & x^4 \\ \frac{du}{dx} & = & 4x^3 \\ du & = & \frac{du}{dx} dx \\ & = & 4x^3\,dx \end{array}$$

fazem sentido se a gente considerar que:

1. x é uma variável independente,
2. u é uma variável dependente, com $u = u(x) = x^4$,
3. dx é uma variável independente,
4. du é uma variável dependente, com $du = \frac{du}{dx} dx$,
5. estas regras sobre diferenciais valem: Leit4p61 (p.275),
6. estas regras sobre variáveis dependentes valem: Stew14p53 (p.951),
7. o dx num $\int f(x)\,dx$ funciona como uma diferencial.

Eu já perguntei pra vários matemáticos fodões que eu conheço – incluindo os desenvolvedores do Maxima, na mailing list – onde eu posso encontrar alguma formalização das regras de como lidar com variáveis dependentes, diferenciais e mudança de variável na integral indefinida, e todos eles me responderam a mesma coisa: "*não faço a menor idéia! Eu sei algumas das regras mas não todas, e não sei onde você pode procurar...*" =(

Moral: é melhor a gente tratar o $du = 4x^3\,dx$ como uma gambiarra...

Caixinhas com mais anotações

$$\begin{array}{rcl} \int (\operatorname{sen}\theta)^4 (\cos\theta)^7 \, d\theta & = & \int (\operatorname{sen}\theta)^4 (\cos\theta)^6 \cos\theta \, d\theta \\ & = & \int (\operatorname{sen}\theta)^4 ((\cos\theta)^2)^3 \cos\theta \, d\theta \\ & = & \int (\operatorname{sen}\theta)^4 (1 - (\operatorname{sen}\theta)^2)^3 \cos\theta \, d\theta \\ & = & \int s^4 (1 - s^2)^3 \, ds \end{array} \quad \left[\begin{array}{c} \operatorname{sen}\theta = s \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\ ds = \cos\theta \, d\theta \\ \cos\theta \, d\theta = ds \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{rcl} \int (\operatorname{sen}\theta)^4 (\cos\theta)^7 \, d\theta & = & \int (\operatorname{sen}\theta)^4 (\cos\theta)^6 \cos\theta \, d\theta \\ & = & \int s^4 (1 - s^2)^3 \, ds \end{array} \quad \left[\begin{array}{c} \operatorname{sen}\theta = s \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\ ds = \cos\theta \, d\theta \\ \cos\theta \, d\theta = ds \\ (\cos\theta)^2 = 1 - (\operatorname{sen}\theta^2) \\ (\cos\theta)^2 = 1 - s^2 \\ (\cos\theta)^6 = (1 - s^2)^3 \end{array} \right]$$

Caixinhas com mais anotações (2)

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int s\sqrt{1-s^2}\,ds &=& \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}\cos\theta\,d\theta \\
&=& \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)\sqrt{(\cos\theta)^2}\cos\theta\,d\theta \\
&=& \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta \\
&=& \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)^2\,d\theta
\end{array}
\qquad
\left[\begin{array}{c}
s = \operatorname{sen}\theta \\
\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\
ds = \cos\theta\,d\theta
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int s\sqrt{1-s^2}\,ds &=& \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta \\
&=& \displaystyle\int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)^2\,d\theta
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds &=& \displaystyle\int \frac{1}{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta \\
&=& \displaystyle\int 1\,d\theta \\
&=& \theta \\
&=& \operatorname{arcsen} s
\end{array}
\qquad
\left[\begin{array}{c}
s = \operatorname{sen}\theta \\
\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\
ds = \cos\theta\,d\theta \\
s^2 = (\operatorname{sen}\theta)^2 \\
1-s^2 = 1-(\operatorname{sen}\theta)^2 \\
1-s^2 = (\cos\theta)^2 \\
\sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\
\operatorname{arcsen} s = \operatorname{arcsen}\operatorname{sen}\theta \\
\operatorname{arcsen} s = \theta \\
\theta = \operatorname{arcsen} s
\end{array}\right]$$

Caso particular 1 (MVD)

$$\text{[MVD]} = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right)$$

$$\text{[MVD]}\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(2x)\cdot 2\,dx = \int_{u=2a}^{u=2b} f(u)\,du \right)$$

$$\text{[MVD]}\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx = \int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$\text{[MVD4]} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx &=& F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& F(g(b)) - F(g(a)) \\ &=& F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &=& \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVD4]}\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(2x)\cdot 2\,dx &=& F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& F(2b) - F(2a) \\ &=& F(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ &=& \int_{u=2a}^{u=2b} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVD4]}\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx &=& F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& F(2b) - F(2a) \\ &=& F(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ &=& \int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVD4]}\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx &=& (-\cos 2x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& (-\cos 2b) - (-\cos 2a) \\ &=& (-\cos u)\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ &=& \int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

Caso particular 1 (MVI)

$$[\text{MVI}] = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\int f(2x)\cdot 2\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\int \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx = \int \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \left(\begin{array}{rcl} \int f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x)) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int f(2x)\cdot 2\,dx & = & F(2x) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx & = & F(2x) \\ & = & F(u) \\ & = & \int \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx & = & (-\cos 2x) \\ & = & (-\cos u) \\ & = & \int \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

Caso particular 2 (MVD)

$$[\text{MVD}] \quad = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} \quad = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x^2)\cdot 2x\,dx \;=\; \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} \quad = \left(\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx \;=\; \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$[\text{MVD4}] \quad = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(g(b)) - F(g(a)) \\ & = & F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} \quad = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(b^2) - F(a^2) \\ & = & F(u)\big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ & = & \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} \quad = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(b^2) - F(a^2) \\ & = & F(u)\big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ & = & \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} \quad = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & (-\cos x^2)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & (-\cos b^2) - (-\cos a^2) \\ & = & (-\cos u)\big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ & = & \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

Caso particular 2 (MVI)

$$[\text{MVI}] = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\int f(x^2)\cdot 2x\,dx \;=\; \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\int \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx \;=\; \int \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \begin{pmatrix} \int f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x)) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int f(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2) \\ & = & F(u) \\ & = & \int \operatorname{sen} u\,du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & (-\cos x^2) \\ & = & (-\cos u) \\ & = & \int \operatorname{sen} u\,du \end{pmatrix}$$

Caso particular 3 (MVI)

$$\text{[MVI]} = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$\text{[MVI]} \begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left(\int f(\operatorname{sen} x)\cos x\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$\text{[MVI]} \begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} = \left(\int (\operatorname{sen} x)^3(1-(\operatorname{sen} x)^2)^2\cos x\,dx = \int u^2(1-u^2)^2\,du \right)$$

$$\text{[MVI3]} = \left(\begin{array}{rcl} \int f(g(x))g'(x)\,dx &=& F(g(x)) \\ &=& F(u) \\ &=& \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVI3]} \begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int f(\operatorname{sen} x)\cos x\,dx &=& F(\operatorname{sen} x) \\ &=& F(u) \\ &=& \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVI3]} \begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen} x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int (\operatorname{sen} x)^3(1-(\operatorname{sen} x)^2)^2\cos x\,dx &=& F(\operatorname{sen} x) \\ &=& F(u) \\ &=& \int u^2(1-u^2)^2\,du \end{array} \right)$$

O macaco, de novo

Estas duas igualdades são falsas

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2} &=& \cos\theta \\ \operatorname{arcsen}\operatorname{sen}\theta &=& \theta \end{array}$$

quando $\theta = \pi$... confira!

Mas elas são verdadeiras para $\theta = 0$, e para todo θ num certo intervalo em torno do 0 que eu não quero contar qual é.

Lembre quem em Cálculo 2 a gente vai primeiro fazer as contas como o macaco que faz todas as contas como se tudo funcionasse, e a gente vai deixar pra checar os detalhes, como se θ está no intervalo certo, só no final, depois de termos feito as contas todas.

O Leithold é super cuidadoso nas contas e nesses detalhes como os domínios da funções e o intervalo onde mora o θ, mas a maioria dos outros livros de Cálculo 2 que eu conheço não são – eles são meio porcalhões com esses detalhes... e a gente também vai ser, senão não vai dar tempo de cobrir o suficiente da matéria.

O truque dos intervalos

Dê uma olhada nas primeiras páginas daqui:

Leit5p3 5.1. Antidiferenciação

O Leithold usa expressões como "num intervalo I", "para todo $x \in I$" e "definidas no mesmo intervalo" um montão de vezes. O truque de usar sempre intervalos resolve esse esse problema daqui super bem:

2fT24 Meme: expanding brain, versão ln

A minha definição preferida pra integral indefinida,

2fT23 Outra definição pra integral indefinida

também resolve o problema – de um modo bem mais simples, e que é suficiente pro tipo de conta que a gente tem que treinar em Cálculo 2.

MVI

A nossa fórmula pra mudança de variável na integral indefinida vai ser esta aqui:

$$\textstyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad \int f(u)\,du \quad = \left(\displaystyle\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f'(u)\,du\right)$$

Dá pra demonstrar ela deste jeito,

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; f(g(x)) \;=\; f(u) \;=\; \int f'(u)\,du$$

onde a primeira e a terceira igualdades são consequências do , e a igualdade do meio só vale se tivermos $u = g(x)$.

Os livros demonstram a $\int f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f(u)\,du$ de um jeitos que eu nunca achei muito convincentes – ou fingindo que tudo é óbvio, ou "derivando tudo em x". As contas abaixo me ajudaram a entender o que acontece quando a gente "deriva tudo em x":

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx\right)}_{f'(g(x))g'(x)} = \underbrace{\frac{d}{dx}f(g(x))}_{f'(g(x))g'(x)} = \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{f(u)}_{f(g(x))}}_{f'(g(x))g'(x)} = \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{\underbrace{\int f'(u)\,du}_{f(u)}}_{f(g(x))}}_{f'(g(x))g'(x)}$$

Simplificando raizes quadradas

Na aula de 16/maio/2023 você aprendeu – na prática, não vendo uma definição formal – o que é transformar uma integral mais difícil numa integral mais fácil, que nós sabemos integrar...

a) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2}\,ds$. Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

b) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

c) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2}^k\,ds$ para qualquer valor de k. Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

d) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

e) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

f) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

g) Entenda este truque aqui:

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{3^2-x^2} & = & \sqrt{3^2-3^2\frac{1}{3^2}x^2} \\
 & = & \sqrt{3^2-3^2(\frac{x}{3})^2} \\
 & = & \sqrt{3^2(1-(\frac{x}{3})^2)} \\
 & = & \sqrt{3^2}\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2} \\
 & = & 3\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}
\end{array}$$

Use ele – com adaptações, óbvio – pra transformar $\int \sqrt{25-x^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

h) Use ele pra transformar $\int \sqrt{25-x^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

i) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int x^{20}\sqrt{a^2-x^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

Exercício 3

Slogan:

> *Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável pode ser resolvida por uma mudança de variável só.*

Durante a quarentena eu dei algumas questões de prova sobre este slogan. Dê uma olhada:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=9
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-P1.pdf#page=15

a) Resolva a integral abaixo usando uma mudança de variável só (dica: $u = g(h(x))$):

$$\int f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)\,dx = ?$$

b) Resolva a integral acima usando duas mudanças de variável. Dica: comece com $u = h(x)$.

O Miranda e o Leithold preferem fazer em um passo só certas mudanças de variáveis que eu prefiro fazer em dois ou três passos. Entenda o exemplo 8.1 do Miranda – o da seção 8.4, na página 264...

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#263

c) ...e descubra como resolver a integral dele fazendo duas mudanças de variáveis ao invés de uma só. A segunda mudança de variável vai ser $s = \operatorname{sen}\theta$, e a primeira eu prefiro não contar qual é – tente usar as idéias do exercício 1 pra descobrir qual ela tem que ser.

Ainda não atualizei este slide!

Cálculo 2 - 2024.1

Aula 18: dicas pra greve

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C2.html

Links