

# Cálculo 2 - 2024.1

Todos os PDFs do semestre  
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF  
<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

# Cálculo 2 - 2024.1

Aula 0: introdução ao curso

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

# Índice

Links .....	3	Justificativas .....	17
“Meu objetivo...” .....	4	Atirei o Pau no Gato: seja como o Bob .....	18
“Meu objetivo é reprovar pessoas como você” .....	5	Imagens de intervalos .....	19
Árvores caem na prova? .....	6	Sobre Português .....	20
Como perder pontos na vista de prova .....	7	Sobre Português (e generalizar) .....	21
(Strang: p.1) .....	8	Banana .....	22
(Strang: p.3) .....	9	Unexpected end of input .....	23
Pedaço de semicírculo: seja como o Bob .....	10	“Faz um vídeo explicando o PDF” .....	24
“Releia a Dica 7” .....	11	Um post da Ana Leticia de Fiori .....	25
Linguagem formal, gramática, sintaxe .....	12	Retas reversas .....	26
Linguagem formal, gramática, sintaxe: figura .....	13	Contexto .....	27
A linguagem formal de Cálculo 2 .....	14	Fórmulas e hipóteses .....	28
(Sempre e nunca) .....	15	Sobre aulas expositivas .....	29
Sintaxe .....	16	Formal vs. coloquial .....	30

## Links

## “Meu objetivo é...”

Cálculo 2 tem vários assuntos que funcionam assim: se você tentar aprender o assunto B direto ele é muito, muito, muito difícil, e você vai gastar – digamos – 200 horas de estudo pra aprender ele... mas se você aprender o assunto A primeiro você consegue aprender os dois assuntos, A e B, em 20 horas ao invés de 200.

O caso mais extremo disso é **nomear objetos**. Nas primeiras aulas do curso nós vamos fazer um monte de exercícios de desenhar funções definidas por casos, como essa aqui:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{se } x < 2, \\ x - 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

A maioria das pessoas chega em Cálculo 2 achando isso incrivelmente difícil. Elas acham que isso aí não é uma função, são duas, e aí elas fazem um desenho errado, e quando a gente vai discutir pra elas descobrirem os erros eu vejo que elas chamam  $f(x)$  de “a função”, o gráfico delas de “a função”,  $3 - x$  de “a função”, e  $x - 2$  de “a função”.

Se elas aprenderem a “nomear objetos” elas vão conseguir fazer algo como isso aqui,

Sejam:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{se } x < 2, \\ x - 2 & \text{se } x \geq 2, \end{cases}$$

$$f_1(x) = 3 - x$$

$$f_2(x) = x - 2$$



Então  $f(x) = f_5(x)$  para todo  $x$ .

...e aí vai ser super rápido ajudar elas a verificarem tudo, e encontrarem o erro.

Aqui – usando os meus número inventados – se uma pessoa gastar 19 horas aprendendo a nomear objetos ela consegue aprender todo o resto em 1 hora, e se ela resolver não aprender a nomear objetos ela vai levar 200 horas pra aprender a desenhar funções definidas por casos.

## “Meu objetivo é reprovar pessoas como você”

Aprender a nomear objetos **dá um trabalho**, então a maior parte das pessoas resolve que vai deixar pra depois, e aí deixa pra véspera da prova, e se ferra.

*Dá pra passar em Cálculo 2 sem aprender a nomear objetos?* Dá, você só vai perder 4 pontos na P2, então dá pra passar raspando sim... mas eu já passei da fase em que eu achava ok só avisar as pessoas um montão de vezes e depois dizer “hahaha, se ferrou, eu avisei!!!”...

...então agora eu vou fazer o seguinte: mesmo que você tenha um motivo muito bom pra não aprender a nomear objetos – tipo: você apostou 50000 reais com um grupo de colegas seus que você consegue passar em Cálculo 2 sem aprender a nomear objetos, então vale a pena correr o risco – *eu não vou ajudar as pessoas que resolveram que não vão aprender a nomear objetos*. Se você resolveu que não vai aprender a nomear objetos **AGORA**, então toda vez que você vier me pedir ajuda eu só vou repetir isso aqui...

Um dos meus objetivos nesse curso é reprovar as pessoas que não aprenderam a nomear objetos. Se você ainda não sabe nomear objetos então vire uma pessoa que sabe nomear objetos **URGENTE!!!**

...só que isso é muito comprido, então às vezes eu vou abreviar pra:

**MEU OBJETIVO É REPROVAR  
PESSOAS COMO VOCÊ!!!**

e vou mandar a pessoa reler estes slides.

TÁ???????

## Árvores caem na prova?

*Tem vários assuntos que a gente vai ver em Cálculo 2 que vão ser importantes não porque eles vão cair explicitamente na prova, mas porque eles vão te ajudar a estudar pra prova.*

Já teve alguma vez em que você tentou estudar algo de Matemática, não entendeu nada, e ficou paralisado? Sim, né? Acontece com todo mundo, principalmente em assuntos mais avançados...

A gente vai aprender a ver expressões como árvores porque isso vai nos ajudar a não ficar paralisado. Árvores não vão nos ajudar em *todos* os casos de “caraca, não tou entendendo nada” – *mas vão nos ajudar em muitos casos.*

(Explicar nomear e apontar)

(Explicar conectivos omitidos: multiplicação, aplicação, listas, matrizes...)

## Como perder pontos na vista de prova

Cálculo 2 (“C2”) é **MUITO** diferente de Cálculo 1 (“C1”).

As técnicas que você aprendeu em C1 vão te ajudar em C2, mas você **VAI TER QUE** aprender um monte de técnicas novas. Os critérios de correção de provas em C2 vão ser bem diferentes dos de C1, e as vistas de prova em C2 vão funcionar de um jeito bem diferente das vistas de C1, principalmente por isso aqui:

Se você vier numa vista de prova de C2 e tentar me explicar o que você *pensou* quando você escreveu a resposta de uma questão **eu vou considerar que você não entendeu nada do curso de C2, não leu nada do material do curso, e que você merece um zero.**

Isso é porque C2 é um curso *bem* mais avançado que C1. Em C1 não dá pra ensinar as pessoas a escreverem direito – isso acontece em C2.

Nas provas de C2 eu vou avaliar se vocês treinaram certas coisas bastante. Sob um ponto de vista o que eu vou avaliar é se vocês conseguem escrever as respostas de vocês de modo que cada passo seja fácil de justificar; sob outro ponto de vista o que eu vou avaliar é *se vocês já têm muita prática em reler as respostas de vocês como se vocês fossem uma outra pessoa e em ver o que pode ser melhorado.*

(%i1) eq1 : 1\*x + 2\*y = 3;  
(%o1)

$$2y + x = 3$$

(%i2) eq2 : 4\*x + 5\*y = 6;  
(%o2)

$$5y + 4x = 6$$

(%i3) 4\*eq1;  
(%o3)

$$4(2y + x) = 12$$

(%i4) expand(4\*eq1);  
(%o4)

$$8y + 4x = 12$$

(%i5) eq3 : expand(4\*eq1);  
(%o5)

$$8y + 4x = 12$$

(%i6) eq4 : eq2 - eq3;  
(%o6)

$$-(3y) = -6$$

(%i7) eq5 : eq4 / -3;  
(%o7)

$$y = 2$$

(%i8) eq5;  
(%o8)

$$y = 2$$

(%i9) eq1;  
(%o9)

$$2y + x = 3$$

(%i10) eq6 : subst(eq5, eq1);  
(%o10)

$$x + 4 = 3$$

(%i11) eq7 : eq6 - 4;  
(%o11)

$$x = -1$$

(%i12) [eq7, eq5];  
(%o12)

$$[x = -1, y = 2]$$

(%i13) eq1;  
(%o13)

$$2y + x = 3$$

(%i14) eq2;  
(%o14)

$$5y + 4x = 6$$

(%i15) eq8 : subst([eq7, eq5], eq1);  
(%o15)

$$3 = 3$$

(%i16) eq9 : subst([eq7, eq5], eq2);  
(%o16)

$$6 = 6$$

(%i17) matrix(['eq1, ", eq1],  
['eq2, ", eq2],  
['eq3, ", eq3],  
['eq4, ", eq4],  
['eq5, ", eq5],  
['eq6, ", eq6],  
['eq7, ", eq7],  
['eq8, ", eq8],  
['eq9, ", eq9]);

(%o17)

$$\begin{pmatrix} \text{eq1} & : & 2y + x = 3 \\ \text{eq2} & : & 5y + 4x = 6 \\ \text{eq3} & : & 8y + 4x = 12 \\ \text{eq4} & : & -(3y) = -6 \\ \text{eq5} & : & y = 2 \\ \text{eq6} & : & x + 4 = 3 \\ \text{eq7} & : & x = -1 \\ \text{eq8} & : & 3 = 3 \\ \text{eq9} & : & 6 = 6 \end{pmatrix}$$

(%i18)

(%i1) eq1 : 1\*x + 2\*y = 3;

(%o1)

$$2y + x = 3$$

(%i2) eq2 : 4\*x + 8\*y = 6;

(%o2)

$$8y + 4x = 6$$

(%i3)

$$4*eq1;$$

(%o3)

$$4(2y + x) = 12$$

(%i4)

expand(4\*eq1);

(%o4)

$$8y + 4x = 12$$

(%i5) eq3 : expand(4\*eq1);

(%o5)

$$8y + 4x = 12$$

(%i6) eq4 : eq2 - eq3;

(%o6)

$$0 = -6$$

(%i7) matrix(['eq1, ":", eq1],

['eq2, ":", eq2],

['eq3, ":", eq3],

['eq4, ":", eq4]);

(%o7)

$$\begin{pmatrix} \text{eq1} & : & 2y + x = 3 \\ \text{eq2} & : & 8y + 4x = 6 \\ \text{eq3} & : & 8y + 4x = 12 \\ \text{eq4} & : & 0 = -6 \end{pmatrix}$$

(%i8)

## Pedaço de semicírculo: seja como o Bob

Imagina que você está numa turma de Cálculo 2 que tem dois “Alex”es – vou chamar eles de Alex 1 e Alex 2 – e um Bob. Numa das provas dessa turma cai uma questão assim, sobre uma fórmula que calcula a área de um pedaço de um semicírculo:

Calcule:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

Tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 respondem essa questão dizendo só isso aqui,

$$\frac{1}{2} \left( \arcsen(x) + x\sqrt{1-x^2} \right)$$

e o Bob entrega uma resposta que tem uma página inteira de contas. Aí na vista de prova o Bob está feliz porque ganhou todos os pontos dessa questão e tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 estão putíssimos porque ganharam 0, e porque não conseguiram me convencer a aumentar as notas deles.

O argumento do Alex 1 foi “pô, professor, a resposta tá certa, eu vi num livro e eu lembrava a fórmula, e eu até conferi ela no computador depois”, o argumento do Alex 2 foi “pô, professor, a resposta tá certa, eu fiz as contas de cabeça e pensei tudo direito, eu só não escrevi”...

**Seja como o Bob!**

Porque é que os Alexes tiraram 0?

Que critério de correção eu usei aí?

Que critério de correção eu vou usar no curso?

Que nível de detalhe eu espero nas respostas?

Eu vou precisar de várias páginas pra responder tudo isso.

## “Releia a Dica 7”

<http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html>

<http://anggtwu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=5>

1) Aprenda a testar tudo: contas, possíveis soluções de equações, representações gráficas de conjuntos...

2) Cada “seja” ou “sejam” que aparece nestas folhas é uma definição, e você pode usá-los como exemplos de definições bem-escritas (ééé!!!!) pra aprender jeitos de escrever as suas definições.

3) Em “matematiqûes” a gente quase não usa termos como “ele”, “ela”, “isso”, “aquilo” e “lá” — ao invés disso a gente dá nomes curtos pros objetos ou usa expressões matemáticas pra eles cujo resultado é o objeto que a gente quer... mas *quando a gente está discutindo problemas no papel ou no quadro* a gente pode ser referir a determinados objetos *apontando pra eles com o dedo* e dizendo “esse aqui”.

4) Se você estiver em dúvida sobre o que um problema quer dizer tente escrever as suas várias hipóteses — a prática de escrever as suas idéias é o que vai te permitir aos poucos conseguir resolver coisas de cabeça.

5) Muitas coisas aparecem nestas folhas escritas primeiro de um jeito detalhado, e depois aos poucos de jeitos cada vez mais curtos. Você vai ter que aprender a completar os detalhes.

6) Alguns exercícios destas folhas têm muitos subcasos. Nos primeiros subcasos você provavelmente vai precisar fazer as contas com todos os detalhes e verificá-las várias vezes pra não errar, depois você vai aprender a fazê-las cada vez mais rápido, depois vai poder fazê-las de cabeça, e depois você vai começar a visualizar o que as contas “querem dizer” e vai conseguir chegar ao resultado graficamente, sem contas; e se você estiver em dúvida se o seu “método gráfico” está certo você vai poder conferir se o “método gráfico” e o “método contas” dão aos mesmos resultados.

7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática*: se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

## Linguagem formal, gramática, sintaxe

Veja se você consegue entender a figura da próxima página...

Eu peguei ela daqui, com pequenas adaptações:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Context-free\\_grammar](https://en.wikipedia.org/wiki/Context-free_grammar)

A parte à esquerda dela é a “gramática” de uma certa linguagem formal, e a parte à direita dela mostra como uma certa expressão é “parseada” nessa linguagem formal.

Todas as linguagens de programação têm gramáticas bem definidas. Quando a gente está trabalhando numa linguagem com uma gramática bem definida é fácil definir quais expressões são válidas nela – uma expressão é válida quando ela é “parseável” – e quais expressões têm erros de sintaxe – as que não são “parseáveis”.

Em Prog 1 você aprendeu C, e você viu que o compilador podia rejeitar os seus programas por vários motivos... por exemplo:

1. erros de sintaxe,
2. erros de tipo,
3. símbolos não declarados.

Se você quiser entender direito como compiladores detectam erros dos tipos 2 e 3, dê uma olhada na página 99 do livro do Thain:

<https://www3.nd.edu/~dthain/compilerbook/compilerbook.pdf#page=113>



## A linguagem formal de Cálculo 2

### Péssima notícia 1:

Nenhum livro define precisamente a gramática da “linguagem” de Cálculo 2. Você vai ter que deduzir quais expressões são válidas lendo os livros do curso – principalmente o Leithold e o Miranda – e os meus slides com muita atenção, escrevendo a beça, checando se as suas expressões seguem as mesmas regras que as deles, e discutindo com os seus colegas, comigo, e com o monitor.

### Péssima notícia 2:

Cálculo 2 não tem uma linguagem só, tem várias! Por exemplo, em alguns momentos do curso a gente vai permitir a “notação de Leibniz”, na qual expressões como  $\frac{dy}{dx}dx = dy$  fazem sentido... mas a gente só vai conseguir entender a notação de Leibniz direito se a gente considerar que “Cálculo 2 sem notação de Leibniz” e “Cálculo 2 com notação de Leibniz” são duas linguagens diferentes, como, sei lá, C e C++, e se a gente entender como *traduzir* expressões em “Cálculo 2 com notação de Leibniz” para “Cálculo 2 sem notação de Leibniz”.

$2 + 3 = 5$	sempre
$2 + 3 \rightarrow 5$	<b>NUNCA</b>
$\underbrace{2 + 3}_5$	sempre

$\frac{dy}{dx} dx = dy$	às vezes
$\int \text{sen } x dx$	sempre
$\int \text{sen } x$	<b>NUNCA</b>

$\int f dx = \int f(x) dx$	às vezes
$y = y(x)$	às vezes

$(a \cdot 10)[a := 4] = 4 \cdot 10$	sempre
$(a \cdot 10)[a := 4] = 40$	<b>NUNCA</b>

Quando $x = 3$ temos $f(x)=42$	sempre
Quando $x = 3$ temos $f=42$	<b>NUNCA</b>

## Sintaxe

Em Prog 1 você aprendeu a usar uma linguagem – o C – com uma sintaxe que era totalmente nova pra você, e a cada aula você aprendia mais algumas construções sintáticas – ou, pra encurtar, “sintaxes” – que o compilador entendia. E você deve ter dado uma olhada de relance, durante poucos segundos, na sintaxe completa do C em BNF, que é o apêndice A do Kernighan & Ritchie... na versão do K&R que eu tenho esse apêndice A tem 9 páginas. É algo parecido com isso aqui:

<http://www.csci-snc.com/ExamplesX/C-Syntax.pdf>  
<https://www2.cs.arizona.edu/~debray/Teaching/CSc453/DOCS/cminusminuspec.html>

O pessoal de computação tem duas matérias sobre isso. Em Linguagens Formais eles aprendem a definir matematicamente as linguagens que um computador possa entender, e em Compiladores ele aprendem a fazer programas que entendem certas “linguagens formais” e “compilam” “programas” escritos nessas linguagens.

Quase tudo nessas duas matérias é bem difícil de entender, mas algumas poucas idéias são fáceis e a gente vai usar elas pra entender algumas sintaxes que vão ser usadas em C2 e que devem ser novas pra quase todo mundo... por exemplo estas,

$$\sum_{\langle \text{var} \rangle = \langle \text{expr} \rangle}^{\langle \text{expr} \rangle} \langle \text{expr} \rangle$$

$$\int_{\langle \text{var} \rangle = \langle \text{expr} \rangle}^{\langle \text{var} \rangle = \langle \text{expr} \rangle} \langle \text{expr} \rangle d\langle \text{var} \rangle$$

$$\langle \text{expr} \rangle \Big|_{\langle \text{var} \rangle = \langle \text{expr} \rangle}^{\langle \text{var} \rangle = \langle \text{expr} \rangle}$$

$$\forall \langle \text{var} \rangle \in \langle \text{expr} \rangle. \langle \text{expr} \rangle$$

$$\exists \langle \text{var} \rangle \in \langle \text{expr} \rangle. \langle \text{expr} \rangle$$

e as notações de “set comprehensions” daqui:  
 Mpg8



## Atirei o Pau no Gato: seja como o Bob

Imagina que você está fazendo aula de flauta doce junto com o Alex e o Bob, e na prova vocês vão ter que tocar Atirei o Pau no Gato. O Alex demora um tempão pra encontrar cada nota, e ele leva meia hora pra tocar a música toda.

O Bob toca a música toda certinha em menos de 30 segundos.

Quando saem as notas o Alex tirou uma nota baixa e o Bob tirou 10.

Aí o Alex vai chorar pontos e diz “*pôxa, profe, eu me esforcei muito!*”

Quando o Bob tocou Atirei o Pau no Gato ele fez a música *parecer fácil*. O esforço dele ficou *invisível*.

Seja como o Bob!

O curso vai ter uma parte em que você vai ter que aprender a desenhar figuras com dezenas de retângulos e trapézios *em poucos segundos* – como o Bob tocando Atirei o pau no gato.

Se você for como o Alex, e levar mais de meia hora pra desenhar cada figura dessas, eu vou considerar que você não aprendeu os padrões que essas figuras seguem – e você não aprendeu a coisa mais importante.

Logo depois dessa parte do curso vai vir uma parte em que você vai ter que visualizar mentalmente (limites de) figuras feitas de infinitos retângulos e trapézios, e desenhar essas figuras. Se você for como o Alex você vai levar tempo **infinito** pra desenhar cada uma dessas figuras; **se você for como o Bob você vai levar segundos**.

Seja como o Bob!

## Imagens de intervalos

Veja as páginas 5 e 7 daqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-somas-3.pdf#page=5>

Digamos que na sua turma de Cálculo 2 tem dois Alexes diferentes, um Bob, um Carlos e um Daniel, e todo mundo tá tentando resolver um exercício que é o seguinte: “seja  $f$  a função da página 5 do link acima. Calcule  $f([1, 3])$ ”.

Todo mundo reconhece que o intervalo  $[1, 3]$  é um conjunto com infinitos pontos, e cada pessoa tenta resolver esse exercício de um jeito diferente.

O Alex 1 decide começar listando todos os pontos do intervalo  $[1, 3]$ . Ele vai primeiro obter uma lista de pontos que ele vai escrever nesse formato aqui,

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$$

e depois ele vai simplificar esse conjunto daqui,

$$\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \dots\}$$

transformando ele numa lista de números, pondo os números dessa lista em ordem e deletando as repetições... **só que como o conjunto  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$  é infinito ele nunca consegue terminar o primeiro passo.**

O Alex 2 decide que ele vai pegar uma sequência de conjuntos finitos cada vez maiores, e “cada vez mais parecidos” com o conjunto  $[1, 3]$ . Ele escolhe essa sequência aqui...

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 3\}, \\ A_2 &= \{1, 2, 3\}, \\ A_3 &= \{1, 1.5, 2, 2.5, 3\}, \\ A_4 &= \{1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5, 2.75, 3\}, \dots \end{aligned}$$

Ele calcula  $f(A_1)$ ,  $f(A_2)$ ,  $f(A_3)$ ,  $f(A_4)$  pelo gráfico usando o “jeito esperto” – como nas figuras da página 5 do link – e ele deduz, **por um argumento informal e olhométrico**, que  $f([1, 3])$  **deve ser** o intervalo  $[3, 4]$ .

O Bob faz algo parecido como o Alex 2, mas ele encontra um modo de “levantar” todo o intervalo  $[1, 3]$  pro gráfico da função  $y = f(x)$  de uma vez só, e de depois “projetar” pro eixo  $y$  esse “intervalo levantado”. Ele obtém uma figura bem parecida com a última figura da página 5 do link, e ele descobre – **também meio no olhometro** – que  $f([1, 3]) = [3, 4]$ .

O Carlos vê que **é óbvio que**  $f([1, 3]) = [f(1), f(3)] = \{3, 3\} = \{3\}$ , e **portanto** a imagem do intervalo  $[1, 3]$  pela função  $f$  é um conjunto com um ponto só. =(

O Daniel resolve que tudo isso é informal demais pra ele, e que ele precisa aprender um modo 100% preciso e formal de calcular  $f([1, 3])$  sem o gráfico. Ele descobre que vai ter que estudar uma coisa chamada “Análise Matemática”, baixa o “*Elementary Analysis: The Theory of Calculus*” do Kenneth Ross, começa a estudar por ele e aprende coisa incríveis – **mas ele leva um ano nisso.**

**Seja como o Bob!**

## Sobre Português

Muita gente aprende no Ensino Médio e nas matérias de primeiro período que “entender uma fórmula” quer dizer 1) traduzí-la pra português e 2) generalizá-la. Então é BEM comum uma pessoa ficar em dúvida se pode fazer um passo como este aqui numa conta,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99$$

e aí a pessoa me perguntar isso aqui:

Professor, a raiz quadrada de um número ao quadrado mais outro número ao quadrado é o número mais o outro número?

É bem mais fácil discutir essa dúvida se a pessoa me fizer essa pergunta em notação matemática, ou me mostrando a igualdade acima e perguntando “isso aqui é verdade?”, ou me mostrando isso aqui,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} \stackrel{?}{=} 42 + 99$$

que é bem mais bacana porque o ‘?’ deixa super claro que isso é uma igualdade que a pessoa não sabe se é verdade...

Se a pessoa me pergunta se isso aqui é verdade,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99 \quad (*)$$

eu posso mostrar pra ela essa outra igualdade aqui – note que eu estou dando nomes como (\*) e (\*\*) pras igualdades

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + y \quad (**)$$

e aí eu pergunto “você quer saber se a (\*\*) é algo que vale sempre, né?”, e aí a pessoa responde “É! É isso!”, e aí eu consigo responder: se a (\*\*) valer sempre ela também vai valer no caso em que  $x = 3$  e  $y = 4$ . Quando  $x = 3$  e  $y = 4$  a (\*\*) vira isso aqui:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 \quad (***)$$

e aí temos:

$$\sqrt{\underbrace{x^2}_{3} + \underbrace{y^2}_{4}} = \underbrace{3 + 4}_{7}$$

$$\underbrace{\underbrace{9}_{3} \quad \underbrace{16}_{4}}_{25} = \underbrace{7}_{5}$$

$$\underbrace{\quad}_{5} \quad \mathbf{F}$$

Ou seja, a igualdade (\*\*\*) é falsa, e portanto a (\*\*) não vale sempre.

## Sobre Português (e generalizar)

Repara que eu não descobri se a igualdade (\*) era verdade ou não... eu convenci a pessoa a discutir a igualdade (\*\*) ao invés disso, porque eu “adivinhaei” que na verdade o que a pessoa queria saber era se a (\*\*) era verdade ou não. Além disso eu desmontei a pergunta original da pessoa – aliás, a pergunta sobre a (\*\*) – em várias perguntas menores.

Até alguns semestres atrás eu achava que todo chegava na universidade sabendo “generalizar” e “particularizar” (ou: “especializar”) bastante bem... eu achava que as pessoas aprendiam isso assim que aprendiam a fazer “contas com letras” no Ensino Médio.

Vocês provavelmente vão ouvir histórias sobre como os meus cursos de Cálculo em 2022.1 – logo depois do fim da quarentena – foram os piores cursos *do universo*. Uma boa parte da razão pra isso foi que eu fiquei tentando encontrar modos de ensinar as pessoas a generalizarem e particularizarem, e fui descobrindo que essas coisas são muito mais difíceis de aprender e de ensinar do que eu pensava.

A pessoa do slide anterior achava que só podia fazer uma pergunta se ela 1) generalizasse a pergunta dela, e 2) traduzisse a pergunta dela pra Português. Acho que ela achava que tinha que tratar essas duas coisas como se fossem fáceis e óbvias – *mas não são*, e eu recomendo que a gente trate particularização/especialização como algo difícil em que é muito comum as pessoas terem dúvidas muito importantes que vale a pena discutir, “encontrar a generalização certa” como algo BEM difícil e BEM importante que a gente vai treinar explicitamente em vários exercícios difíceis e importantes do curso, e a gente vai ver que “traduzir pra português” é uma ferramenta bem menos útil do que parece. Quase todas as expressões matemáticas que a gente vai ver têm uma pronúncia padrão, mas vai ser bem comum a “tradução pra português” não nos ajudar nada, ou até nos atrapalhar, porque a gente vai ter que entender algumas palavras e expressões “como matemáticos” e não no sentido usual delas...

(Veja o próximo slide!)

# Banana

Considere as quatro perguntas abaixo:

1. Qual é o resultado de substituir na palavra “banana” todas as letras ‘a’ por ‘w’?
2. Qual é o resultado de substituir na palavra “banana” todas as letras ‘o’ por ‘u’?
3. Qual é o resultado de substituir na palavra “banana” todas as letras ‘A’ por ‘W’?
4. Qual é o resultado de substituir na palavra “blitiri” todas as letras ‘2’ por ‘3’?

O resultado da 1 é bem fácil: “bwnwnw”, mas a maioria das pessoas fica em dúvida nos outros itens... muitas pessoas respondem coisas como “não dá pra fazer o 2 porque “banana” não tem ‘o’”, “não sei se o 3 tem que dar “bWn-WnW” ou “bwnwnw””, ou “não dá pra fazer o 4 porque “blitiri” não é uma palavra e ‘2’ e ‘3’ não são letras”...

Neste curso, e em todos os cursos de matemática que vão vir depois dele, **você vai ter que aprender a interpretar certas definições “como matemático”**: você vai ter que descobrir a interpretação mais simples possível que faça sentido, e essa idéia de “mais simples possível” vai ser bem **parecida** com *fazer o programa mais simples possível que obedeça uma certa especificação...*

Por exemplo:

o programa que responde “banana” no item 2 é bem mais simples do que o programa que primeiro testa se a palavra original tem alguma letra ‘o’, e dá erro se não tem;

o programa que responde “banana” no item 3 – porque ele considera que ‘a’ e ‘A’ são letras completamente diferentes, e “banana” não tem ‘A’ – é muito mais simples do que os programas que consideram que ‘a’ e ‘A’ são “letras parecidas”;

o programa que responde “blitiri” no item 4 é muito mais simples do que os programas que testam se a palavra original é uma palavra válida e se as duas letras dadas são caracteres considerados como “letras”.

Links:

Sobre áreas negativas e retângulos degenerados:

[2cT185](#), [2cT185](#)

[2fT63](#), [2fT64](#)

[2gT20](#) Contexto / Sabemos que  $2 = 3$ . Então...

[2gT38](#) O macaco substituidor: banana

## Unexpected end of input

Uma coisa que me desesperava bastante era quando um aluno me mostrava algo como isso aqui,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot$$

e me perguntava “isso aqui tá certo?”, ou: “é isso?”...

Aqui a pergunta mais precisa seria “esse início tá certo?”, ou “como é que eu continuo?”... eu aqui eu poderia responder ou “não!” ou isto,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot \beta(x) + \alpha(x) \cdot \beta'(x)$$

só que a resposta que funciona melhor *didaticamente* é a seguinte:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot \quad (*)$$

não é nem mesmo uma expressão válida, e um compilador que for analisar essa expressão vai abortar no meio do parsing e dizer “Unexpected end of input”, que é um tipo específico de erro de sintaxe...

O melhor modo de discutir a dúvida da pessoa que perguntou o “isso aqui tá certo?” é ir consertando com ela a expressão dela passo a passo, e – **JURO** – o melhor modo de fazer isso é primeiro transformar a expressão dela em uma expressão que compile, como essa aqui:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot 42 \quad (**)$$

que é uma igualdade – no sentido de que tem uma representação em árvore com o ‘=’ no topo – é aí a gente pode começar a discutir coisas como:

- a igualdade (\*\*) é verdadeira para todas as funções  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$ ?
- a igualdade (\*\*) é um caso particular da regra do produto?

## “Faz um vídeo explicando o PDF”

Em 2021 eu fiz um vídeo – que ficou bem bom – pra responder os alunos que estavam dizendo “professor, faz um vídeo explicando o PDF”, e em 2023 eu legendei esse vídeo. Dá pra acessar as legendas e o vídeo nos links abaixo,

<http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html>

e o trecho mais importante das legendas é esse aqui:

Então, cada PDF tem vários exercícios e muitas dezenas de idéias. Se vocês disserem só “faz um vídeo explicando o PDF” eu vou fazer um vídeo de 5 minutos explicando tudo de um PDF por alto porque eu não sei direito onde estão as dúvidas de vocês... mas vocês fizerem perguntas mais específicas aí eu consigo fazer vídeos bem mais detalhado sobre aquelas perguntas ou sobre aqueles exercícios... gente, vocês não estão discutindo para descobrir como resolver os problemas? O próximo passo, já que vocês estão empacados, é vocês passarem a discutir pra encontrar a boas perguntas pra fazer... aqui tem um outro trecho que eu não copieei, e deixa eu só ler isso aqui em voz alta também...

gente, a matéria de matemática fica cada vez mais difícil à medida que as matérias ficam mais avançadas, e passa a ser comum ter trechos uma linha ou de um parágrafo nos livros-texto que vocês vão passar muitas horas tentando decifrar aquilo. Isso vai acontecer O TEMPO TODO... praticamente toda aula, toda página, todo vídeo vai acontecer isso, até o a última matéria de matemática na vida de vocês, então a questão é: como é que vocês podem fazer para não ficarem perdidos com isso, para não ficarem paralisados... voltando pro que eu escrevi aqui, o meu objetivo aqui é fazer vocês aprenderem se virar com isso, e a técnica para isso e vocês aprenderem a escrever as hipóteses de vocês e aprenderem a fazer perguntas. A maioria das perguntas vocês vão conseguir responder sozinhos, algumas vocês vão conseguir descobrir a resposta conversando com amigos – faltou um “s” aqui... – que também não sabiam a resposta, que vão descobrir junto com vocês, e umas poucas vocês vão empacar mesmo e não vão conseguir resolver sozinhos. Me mandem as dúvidas de vocês!

## Um post da Ana Leticia de Fiori

Em 19/fev/2023 a Ana Leticia de Fiori postou [isso aqui](#) no Facebook:

**AL:** Um fenômeno curioso que tenho observado entre estudantes que declaram ter “travas de escrita”, ficarem “empacados” ao desenvolver trabalhos de conclusão de disciplinas ou de curso. Frequentemente, a alegação é de que o “perfeccionismo” faz com que travem.

Eu tenho provocado, perguntado sobre quais são os gatilhos, quais os momentos em que eles sentem que o bloqueio vem. Uma resposta é o confronto com o material coletado, sejam os dados sejam as referências levantadas. Materiais com os quais eles não conseguem lidar, no sentido radical da palavra lida. Não sabem trabalhar com as referências e com os dados. Porque não estão acostumados a ler.

Um dos efeitos disso são trabalhos bastante declaratórios, que clamam ter feito “revisões bibliográficas”, “levantamentos”, “análises de discurso”, etc. que, na verdade, jamais ocorreram. Ao finalmente escrever, despreza-se o que consta na literatura e se escreve de cabeça, com alguma citação aqui ou acolá utilizada como argumento de autoridade. Claro que o texto sai confuso, raso, impreciso.

Passa longe de um problema de perfeccionismo. Mas é assim que se mascara a falta de perícia no ofício acadêmico.

E, recentemente, numa reunião entre pares, ouvi dizerem que para evitar os eternos problemas de plágio e os novos problemas dos softwares de IA, vão só realizar atividades orais e de escrita em sala de aula. Isso me apavora, porque o tempo de maturação de um trabalho acadêmico não é o tempo da sala de aula. E vai ser mais uma instância a sumir da experiência desses estudantes.

**E:** Nossa, eu tou exatamente tentando escrever sobre um outro tipo de “perfeccionismo” que alguns dos meus estudantes têm e que eu ainda não tenho um modo muito bom de lidar com isso... São estudantes que assim que vêem que algo que eles escreveram está errado eles ou apagam ou jogam foram. Eu até tenho um monte de material - e slogans - sobre como o modo mais rápido de aprender assuntos difíceis de matemática é você escrever “hipótese” ou “rascunho” antes das partes que você não tem certeza e **NÃO APAGAR NADA, NUNCA** - ...mas não adianta, eles entram em pânico quando vêem que algo que eles escreveram não está perfeito - e aí eles não conseguem estudar...

**AL:** Mas aí é que está, a que parâmetros de perfeição eles se referem?

Esse comportamento de escrever e apagar tem a ver em parte com a fantasia de que o texto se compõe de uma vez só. Tendem a pular as etapas de estruturação de um roteiro, de rascunhos e revisões.

Quase como se o texto fosse psicografado. Eu costumo brincar com meus alunos que ninguém é Chico Xavier da antropologia, eles riem, mas teimam.

De novo, falta a dimensão do trabalho com o texto. Perfeição, na fantasia dos alunos, é escrever sem esforço.

## Retas reversas

O Alex, o Bob e o Carlos fizeram GA juntos. Um dos últimos assuntos do curso era uma fórmula pra calcular a distância entre “retas reversas” – é uma fórmula bem complicada, que tem um determinante e um produto cruzado – e cada um deles estudou esse assunto de um modo diferente.

O Alex e o Carlos “sabem” que o objetivo de cada matéria de Matemática é fazer as pessoas aprenderem certos teoremas. Os dois decoraram a fórmula da distância entre retas reversas e tentaram aplicar ela na prova. O Alex conseguiu, mas a questão da prova tinha vários itens e em todos eles ela usava letras diferentes das da fórmula que ele tinha decorado, e aí ele levou MUITO tempo pra resolver um item, e não conseguiu fazer os outros... e o Carlos tinha decorado a fórmula errado, e aí num determinado ponto da questão ele precisava dividir um número negativo por um vetor, e ele não sabia como fazer isso.

*Tanto o Alex quanto o Carlos esqueceram a fórmula logo depois da prova.*

O Bob estudou essa parte da matéria de um outro jeito. Ao invés de pensar “toda vez que eu precisar calcular a distância entre duas retas é só usar a fórmula” ele considerou que tem muitos casos simples em que ele sabe calcular a distância entre as retas no olhometro – por exemplo, o caso em que uma das retas é paralela ao eixo  $x$  e a outra é paralela ao eixo  $y$ . Ele foi aprendendo como lidar com vários casos um pouco menos simples que esse, e aprendeu como visualizar o que aquela fórmula complicadíssima “quer dizer” – ela calcula a altura de um certo paralelepípedo.

O Bob tratou essa fórmula como algo que generaliza vários casos “simples” em que ele consegue calcular a distância entre duas retas por outros métodos, e ele usou esses casos simples pra testar se a fórmula realmente dá o resultado que ele esperava.

Tanto o Alex quanto o Bob quanto o Carlos “estudaram pelo livro”, mas existem vários modos de “estudar pelo livro” e o Bob usou modos que nem o Alex nem o Carlos conheciam.

*Neste curso você vai aprender – e treinar – vários modos de “estudar pelo livro” que provavelmente vão ser totalmente novos pra você.*

## Contexto

Quase todas as expressões matemáticas que usamos em C2 **dependem do contexto**. Por exemplo, a interpretação **default** pra esta expressão aqui:

$$f(x) = x - 9 = 2$$

é:

**Para toda** função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
e para todo  $x \in \mathbb{R}$  temos:  
 $f(x) = x - 9 = 2$

Se você só escreve “ $f(x) = x - 9 = 2$ ” e mostra isso pro “colega que seja seu amigo” ele vai levar meia hora tentando adivinhar qual foi o contexto que você estava pensando mas não escreveu...  
...e se ele descobrir em menos de, digamos, 50 tentativas, ele vai dizer “ok, jóia, tá certo!”.

O “colega que seja menos seu amigo” vai fazer menos tentativas, e os personagens “o monitor” e “o professor” da Dica 7 vão checar se o que você escreveu vai ser entendido corretamente por qualquer pessoa que saiba as convenções de como escrever matemática.

Lembre que **quase todo mundo** pára de ler um texto matemático quando vê uma besteira muito grande escrita nele. Imagine que um “colega que seja menos seu amigo” te mostra a solução dele pra um problema e te pergunta se está certa. A solução dele começa com:

Sabemos que  $2 = 3$ . Então...

O que você faria?

Dica: releia isto aqui:  
[Slogans27:07](#) até 32:45

## Fórmulas e hipóteses

Dê uma olhada no Teorema 4 da seção 3.1 do Miranda: [MirandaP80](#). Ele diz isso aqui:

Se  $f$  e  $g$  são funções diferenciáveis em  $x = a$  então a função  $f + g$  é diferenciável em  $a$  e:

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Nós vamos considerar que esse *teorema* pode ser decomposto em duas partes: *fórmula* e *hipóteses*. A *fórmula* dele é esta aqui,

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

e em muitas situações nós vamos querer usar só as fórmulas de certos teoremas e deixar pra verificar as hipóteses delas no final.

*Obs: falta acrescentar muita coisa aqui... explicar o que são contas formais, mostrar que o Mathologer só faz contas formais no vídeo dele sobre o “Calculus Made Easy”, mencionar que em Cálculo 3 nós vamos usar o “Calculus Made Easy” e que todas as contas dele são formais, falar sobre a introdução do Martin Gardner pro CME e como ele explica que o conceito de “função” foi mudando...*

*Obs 2: tem um slide sobre contas formais aqui: [2gT36](#) (p.4) O macaco e as contas formais*

## Sobre aulas expositivas

Muitos alunos acreditam que se eles assistirem uma aula expositiva eles vão ser capazes de resolver na prova questões sobre o que eles aprenderam – só que isso só passa a ser *mais ou menos* verdade depois que a pessoa aprende *muito bem* como estudar.

Muita coisa em matemática funciona como músculos. Os músculos mentais que você usa pra entender uma aula expositiva são bem diferentes dos músculos mentais que você usa pra resolver exercícios, e os músculos mentais que você exercita quando você relê uma explicação que você escreveu e procura jeitos de reescrevê-la de um modo mais claro são diferentes desses...

Leia isto aqui:

[Visaud39:09](#) até 46:06

## Formal vs. coloquial

Lembre que um dos meus objetivos principais *neste curso* é fazer as pessoas aprenderem a escrever suas idéias matemáticas de um jeito que seja claro e fácil de revisar, que elas gostem de reler depois (dica 7b) e que os colegas gostem de ler (dicas 7c e 7d)...

Algumas pessoas acham que textos matemáticos têm que ser escritos numa linguagem “formal” que seja a mais distante possível do português coloquial; outras pessoas preferem escrever de um modo bem próximo do coloquial. Por exemplo, o Jacir Venturi ([VenturiGA](#)), escreve num Português pomposo que eu acho horrível, e o Felipe Acker ([AckerGA1](#)) escreve de um modo bem próximo do coloquial que eu gosto bastante. E até hoje eu só tive acesso a bem pouco material do Reginaldo, mas eu tenho a impressão de que ele não gosta de usar linguagem coloquial em matemática... eu falo um pouquinho sobre isso neste trecho de um vídeo sobre didática: [Visaud59:49](#).

Na parte do curso sobre somas de Riemann você vai aprender a lidar com definições bem complicadas, e aos poucos – um pouquinho neste curso, e bastante nos seguintes – você vai aprender a fazer as suas próprias definições. E quando você souber fazer as suas próprias definições você vai ver que dá pra ser totalmente preciso usando tanto português coloquial quanto português pomposo...

...ah, e na parte final do curso, que é sobre equações diferenciais, você vai (ter que) aprender a usar corretamente um monte de “partículas”, como “seja”, “então”, “temos”, “isto é”, “queremos”, “sabemos que”, “lembre que”, “digamos que” e “vamos testar se”.

# Cálculo 2 - 2024.1

Aula 2: expressões e árvores

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

[2hT4](#) “Releia a dica 7”

[2iQ1](#) Quadros da aula 1 (18/mar/2023)

[2iQ3](#) Quadros da aula 2 (19/mar/2023)

[2iQ7](#) Quadros da aula 3 (20/mar/2023)

[2hT39](#) Justificativas no formato “... por ... com ...”

[2hT127](#) Músculos mentais, jogo colaborativo

[Leit1p37](#)  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

## Introdução

Na primeira aula nós fizemos um monte de exercícios de “set comprehensions”, e vocês viram – por exemplo, na página [Mpg10](#), nestes itens daqui,

$$\begin{aligned} G &:= \{x \in \{3, 4\}, y \in \{1, 2, 3\}; (y, x)\} \\ H &:= \{x \in \{3, 4\}, y \in \{1, 2, 3\}; (x, 2)\} \end{aligned}$$

que às vezes pra resolver um exercício a gente precisa “pensar como um computador”...

# Maxima vs. SymPy

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(g(u))g'(u) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du$$

```

=-----
|
| integrate----- integrate-----
| | | | | | | | | | | |
| *----- x a b fp u g g
| | | | | | | | | | |
| fp gp u a b
| |
| g x
|
| x

```

```

Equality-----
|
| Integral___ Integral___
| | | | | | | | | | |
| Mul___ Tuple----- fp Tuple-----
| | | | | | | | | | |
| fp gp x a b u u g g
| | | | | | | | | |
| g x a b
|
| x

```

(%i1) eq1 : 1\*x + 2\*y = 3;  
(%o1)

$$2y + x = 3$$

(%i2) eq2 : 4\*x + 5\*y = 6;  
(%o2)

$$5y + 4x = 6$$

(%i3) 4\*eq1;  
(%o3)

$$4(2y + x) = 12$$

(%i4) expand(4\*eq1);  
(%o4)

$$8y + 4x = 12$$

(%i5) eq3 : expand(4\*eq1);  
(%o5)

$$8y + 4x = 12$$

(%i6) eq4 : eq2 - eq3;  
(%o6)

$$-(3y) = -6$$

(%i7) eq5 : eq4 / -3;  
(%o7)

$$y = 2$$

(%i8) eq5;  
(%o8)

$$y = 2$$

(%i9) eq1;  
(%o9)

$$2y + x = 3$$

(%i10) eq6 : subst(eq5, eq1);  
(%o10)

$$x + 4 = 3$$

(%i11) eq7 : eq6 - 4;  
(%o11)

$$x = -1$$

(%i12) [eq7, eq5];  
(%o12)

$$[x = -1, y = 2]$$

(%i13) eq1;  
(%o13)

$$2y + x = 3$$

(%i14) eq2;  
(%o14)

$$5y + 4x = 6$$

(%i15) eq8 : subst([eq7, eq5], eq1);  
(%o15)

$$3 = 3$$

(%i16) eq9 : subst([eq7, eq5], eq2);  
(%o16)

$$6 = 6$$

(%i17) matrix(['eq1, "', eq1],  
['eq2, "', eq2],  
['eq3, "', eq3],  
['eq4, "', eq4],  
['eq5, "', eq5],  
['eq6, "', eq6],  
['eq7, "', eq7],  
['eq8, "', eq8],  
['eq9, "', eq9]);

(%o17)

$$\begin{pmatrix} \text{eq1} & : & 2y + x = 3 \\ \text{eq2} & : & 5y + 4x = 6 \\ \text{eq3} & : & 8y + 4x = 12 \\ \text{eq4} & : & -(3y) = -6 \\ \text{eq5} & : & y = 2 \\ \text{eq6} & : & x + 4 = 3 \\ \text{eq7} & : & x = -1 \\ \text{eq8} & : & 3 = 3 \\ \text{eq9} & : & 6 = 6 \end{pmatrix}$$

(%i18)

(%i1) eq1 : 1\*x + 2\*y = 3;

(%o1)

$$2y + x = 3$$

(%i2) eq2 : 4\*x + 8\*y = 6;

(%o2)

$$8y + 4x = 6$$

(%i3)

$$4*eq1;$$

(%o3)

$$4(2y + x) = 12$$

(%i4)

expand(4\*eq1);

(%o4)

$$8y + 4x = 12$$

(%i5) eq3 : expand(4\*eq1);

(%o5)

$$8y + 4x = 12$$

(%i6) eq4 : eq2 - eq3;

(%o6)

$$0 = -6$$

(%i7) matrix(['eq1, ":", eq1],

['eq2, ":", eq2],

['eq3, ":", eq3],

['eq4, ":", eq4]);

(%o7)

$$\begin{pmatrix} \text{eq1} & : & 2y + x = 3 \\ \text{eq2} & : & 8y + 4x = 6 \\ \text{eq3} & : & 8y + 4x = 12 \\ \text{eq4} & : & 0 = -6 \end{pmatrix}$$

(%i8)

## Subárvores

Cada bolinha de uma árvore “gera” uma subárvore – a subárvore formada por essa bolinha e todas as outras bolinhas abaixo dela.

A gente quer que cada subárvore corresponda a uma *subexpressão*. A definição formal de subexpressão é bem complicada, mas tente se virar usando só essas idéias daqui:

- subexpressões são trechos da expressão original que são expressões completas – por exemplo, ‘ $2/(x)$ ’ não é uma expressão completa,
- se a nossa expressão original for toda “horizontal” – como  $2/(x + y)$ , mas não como  $\frac{2}{x+y}$  – então a gente pode usar diagramas de “underbraces” pra indicar quais são as subexpressões, como nestes dois exemplos (que dão árvores diferentes):

$$\underbrace{f(\underbrace{a, b}) + c}$$

$$\underbrace{f(\underbrace{a, b}) + c}$$

### Exercício

Encontre uma boa representação em árvore para cada uma das expressões abaixo. Faça os diagramas de underbraces quando precisar, e lembre que você vai ter que improvisar em vários lugares, principalmente pra decidir que nomes pôr nas bolinhas!

- $2/5$
- $\frac{2}{5}$
- $2/(x + y)$
- $3x + 4y$
- $3x + 4y = z$
- $f(x) + g(x)$
- $2 + 3x$
- $2 + 3 \cdot x$
- $2 + (3 \cdot x)$
- $G := \{x \in \{3, 4\}, y \in \{1, 2, 3\}; (y, x)\}$
- $\{1, 2, 3\}$

Lembre que em Cálculo 1 você aprendeu a chegar direto na resposta certa, mas C2 é bem diferente de C1... aqui você vai ter que escrever várias idéias, e se você ficar apagando, rasgando e jogando fora os papéis em que você escreveu idéias que depois você achou ruins você vai progredir muito mais devagar do que as pessoas que têm coragem de guardar tudo!

## Subárvores (2)

Tente encontrar uma boa representação em árvore para esta expressão aqui:

$$\text{Seja } f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{quando } x < 2, \\ 2 & \text{quando } 2 \leq x \end{cases}$$

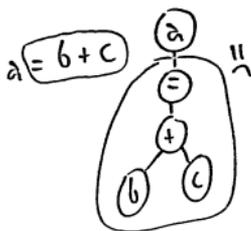
Depois **releia a dica 3** e veja se cada bolinha da sua árvore corresponde a um símbolo específico da expressão acima, e se quando você aponta pra esse símbolo os seus colegas conseguem entender qual é a menor subárvore – e a menor subexpressão – que contém esse símbolo.

## Subárvores (3)

Este quadro da aula de 19/mar/2023 -

2iQ4 Um quadro da aula de 19/mar/2023

tem um exemplo que a gente discutiu em sala, de uma representação em árvore que é ruim...



O problema dessa representação em árvore é que quando a gente 1) aponta pro '=' do " $a = b + c$ ", 2) a gente pega a bolinha da árvore que corresponde a esse '=', 3) a gente pega a subárvore gerada por essa bolinha, e 4) a gente volta pro " $a = b + c$ " e encontra a subexpressão correspondente a essa subárvore...

...a gente chega numa "subexpressão" que *não é uma expressão completa*.

Releia a dica 3 desta página:

2iT12 "Releia a Dica 7"

Ela tem este trecho:

(...) mas quando a gente está discutindo problemas no papel ou no quadro a gente pode ser referir a determinados objetos apontando pra eles com o dedo e dizendo "esse aqui".

No exemplo da coluna da esquerda se eu tou discutindo com um amigo e eu aponto pro '=' do " $a = b + c$ " e digo "essa subexpressão aqui" tudo vai dar errado se ele estiver considerando que a representação em árvore dessa expressão é a que eu marquei com o '=' (... ele vai achar que o meu "essa subexpressão aqui" se refere a isto:

$$= b + c$$

Péssimo! Péssimo!

# Cálculo 2 - 2024.1

Aulas 4 a 6: integração e derivação  
com o mathologermóvel

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF  
<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

Quadros destas aulas:

[2hQ1](#) Quadros da aula 1 (2a, 28/ago/2023)

[2hQ3](#) Quadros da aula 2 (3a, 29/ago/2023)

Links da aula 1:

[2gT4](#) Releia a dica 7

[2gT11](#) Atirei o pau no gato

[2gT19](#) Retas reversas

[2gT24](#) Integração e derivação com o Mathologermóvel

[2gT27](#) (p.4) Exercício 1

[2gT28](#) (p.5) Dicas pro exercício 1

[CalcEasy03:19](#) até 12:47

Links da aula 2:

[CalcEasy11:35](#) até 12:47

[2gT37](#) (p.5) O macaco substituidor: EDOs, RC, TFC2

[StewPtCap5p9](#) (p.330) Figuras 11 e 12

[StewPtCap5p16](#) (p.337) A integral definida

[StewPtCap5p33](#) (p.354) TFC, parte 2

[StewPtCap5p36](#) (p.357) Exercícios 19 a 26 (sobre o TFC2)

[2fT91](#) até [2fT93](#) (p.3 até p.5): A definição da integral

Os slides das próximas páginas são versões ligeiramente reescritas destes slides de outros semestres:

[2fT17](#) (mathologermovel, p.3) Item 3

[2fT18](#) (mathologermovel, p.4) Item 4

[2eT62](#) (TFC1, p.3) Algumas propriedades da integral

[2eT66](#) (TFC1, p.7) Exercício 1

[2eT69](#) (TFC1, p.10) A função  $G(x)$  é esta aqui

[2dT225](#) (MT3, p.4) Uma espécie de gabarito

[2eT199](#) (P1, p.7) eu defini as funções  $f$  e  $g$  desta forma

[2eT200](#) (P1, p.8) gabarito

## Introdução

Nesta parte do curso nós vamos tentar entender este trecho do vídeo do Mathologer,

[CalcEasy03:19](#) até 12:47

e vamos fazer alguns exercícios – que podem ser feitos em vários níveis de detalhe.

Leia estes trechos das legendas de uns vídeos meus:

[Slogans01:10](#) até 08:51: sobre chutar e testar

[Slogans07:17](#) até 07:48: ...do tamanho de um apartamento

[Visaud45:14](#) até 52:24: ajustar o nível de detalhe

[Slogans1:11:02](#) até 1:17:42: seja o seu próprio Geogebra

[Slogans1:39:46](#) até 1:45:02: ...com quem vale a pena estudar

Leia também estes slides:

[2gT4](#) (intro, p.3) “Releia a Dica 7”

[2gT13](#) (intro, p.12) Sobre Português

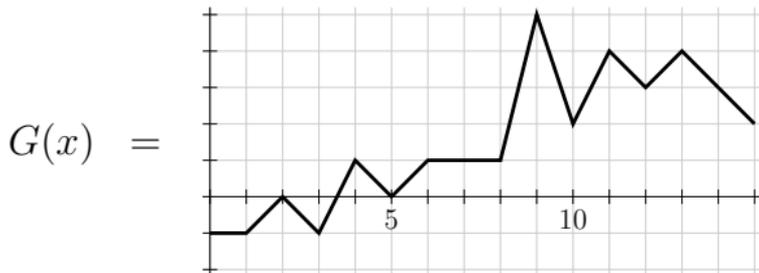
[2gT14](#) (intro, p.13) Sobre Português (2)

[2gT16](#) (intro, p.15) Unexpected end of input

[2gT19](#) (intro, p.18) Retas reversas

### Exercício 1.

Seja  $G(x)$  esta função:



Relembre como calcular coeficientes angulares e derivadas no olhômetro e faça um gráfico da função  $G'(x)$ .

Dica 1:  $G'(3.5) = 2$ .

Dica 2:  $G'(4)$  não existe — use uma bolinha vazia pra representar isso no seu gráfico.

## Exercício 1: mais dicas

Pra fazer o exercício 1 você provavelmente vai ter que lembrar algumas coisas sobre inclinação, coeficiente angular, limites laterais, derivadas laterais, e sobre o significado das bolinhas cheias e das bolinhas vazias nos gráficos... links:

[Leit1p18](#) (p.17: inclinação)

[Leit1p42](#) (p.41: bolinhas, domínio, imagem)

[StewPtCap1p10](#) (p.15: círculo cheio e círculo vazio)

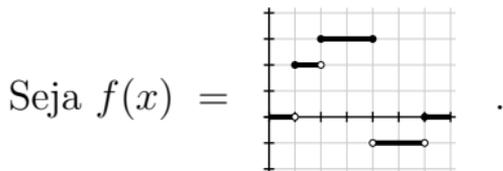
[Miranda66](#) (Capítulo 3: Derivadas)

[Miranda22](#) (Seção 1.4: Limites laterais)

[Miranda74](#) (Seção 3.2.3: Derivadas laterais)

[2eT70](#) (p.11) Dicas que eu preparei em 2022.1

## Exercício 2.



Note que:

$$\int_{x=1}^{x=2} f(x) dx = 2 \cdot (2 - 1),$$

$$\int_{x=3}^{x=4} f(x) dx = 3 \cdot (4 - 3),$$

$$\int_{x=4}^{x=6} f(x) dx = -1 \cdot (6 - 4),$$

Calcule:

a)  $\int_{x=1.5}^{x=2} f(x) dx$

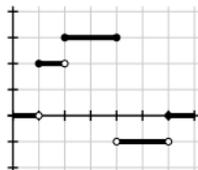
b)  $\int_{x=2}^{x=4} f(x) dx$

c)  $\int_{x=1.5}^{x=4} f(x) dx$

d)  $\int_{x=1.5}^{x=6} f(x) dx$

### Exercício 3.

Sejam  $f(x) =$



e  $F(\beta) = \int_{x=2}^{x=\beta} f(x) dx.$

- Calcule  $F(2), F(2.5), F(3), \dots, F(6).$
- Calcule  $F(1.5), F(1), F(0.5), F(0).$

### Exercício 4.

No exercício 3 você obteve alguns valores da função  $F(\beta)$ , mas não todos... por exemplo, você *ainda* não calculou  $F(2.1)$ .

a) Desenhe num gráfico só todos os pontos  $(x, F(x))$  que você calculou nos itens (a) e (b) do exercício 3.

Dica: o conjunto que você quer desenhar é este aqui:  
 $\{(0, F(0)), (0.5, F(0.5)), \dots, (6, F(6))\}$ .

b) Tente descobrir — lendo os próximos slides, assistindo o vídeo, e discutindo com os seus colegas — qual é o jeito certo de ligar os pontos do item (a).

## Exercício 5.

Seja



Faça os gráficos destas funções:

a)  $F(x) = \int_{t=2}^{t=x} f(t) dt$

b)  $G(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t) dt$

Dica: comece fazendo uma tabela como esta aqui,

$x$	$F(x)$
2	
3	
4	
5	
2.5	
3.5	
2.1	
3.1	

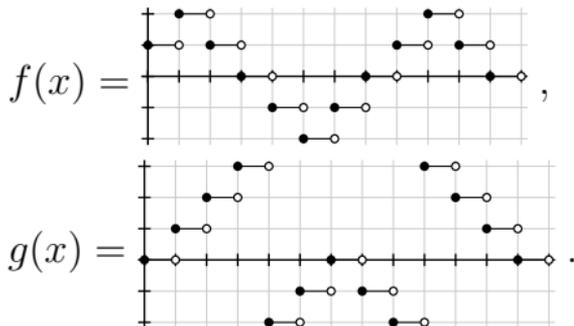
com um monte de pontos pros quais você consegue calcular o  $F(x)$  deles de cabeça só olhando pro gráfico, e depois plote estes pontos. Depois faça a mesma coisa pra  $G(x)$  *sem fazer a tabela* – desenhe um monte de “pontos fáceis de calcular” direto no seu gráfico.

Eu comecei o curso de Cálculo 3 deste semestre discutindo algumas técnicas pra descobrir “pontos fáceis de calcular”. Veja se os primeiros slides de C3 te ajudam:

**3iT4** Pontos mais fáceis de calcular

## Exercício 6.

Sejam:



Faça os gráficos destas funções:

$$\text{a) } F(x) = \int_{t=0}^{t=x} f(t) dt$$

$$\text{b) } G(x) = \int_{t=3}^{t=x} g(t) dt$$

## Algumas propriedades da integral

As três propriedades mais básicas da integral definida são estas:

$$k \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{x=a}^{x=b} k f(x) dx \quad (*)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x) dx = \int_{x=a}^{x=c} f(x) dx \quad (**)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = - \int_{x=b}^{x=a} f(x) dx \quad (***)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} k dx = k(b-a) \quad (****)$$

O melhor modo da gente visualizar o que essas propriedades “querem dizer” é comparando a fórmula pro caso geral com casos particulares. Olhe pra figura à direita; ela compara a (\*) com dois casos particulares dela – primeiro um caso “normal”, em que  $k = 2$ , e depois um caso “estranho” em que  $k = -1$ ...

No caso “estranho” aparecem uns números negativos, ó:

$$\underbrace{(-1) \cdot \int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{>0} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} (-1) \cdot f(x) dx}_{<0}$$

...e uma figura que tem “área negativa”!!!

Eu acho a abordagem do Mathologer genial – ele começa dizendo que a distância percorrida é a área (ou a integral) da velocidade, e com isso vários casos estranhos em que aparecem números negativos *começam* a fazer sentido.

**Slogan:** a gente quer que as quatro propriedades acima valham sempre – tanto nos casos “normais” quanto nos casos “estranhos”.

$$(*) : \quad k \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{x=a}^{x=b} k f(x) dx$$

$$(*) \begin{matrix} a:=0 \\ b:=4 \\ k=2 \end{matrix} : \quad 2 \cdot \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{\text{área positiva}} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} 2 \cdot f(x) dx}_{\text{área positiva}}$$



$$(*) \begin{matrix} a:=0 \\ b:=4 \\ k=-1 \end{matrix} : \quad (-1) \cdot \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{\text{área positiva}} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} (-1) \cdot f(x) dx}_{\text{área negativa}}$$



Links pros livros:

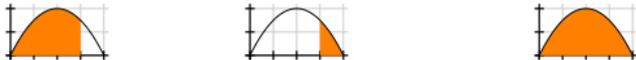
[StewPtCap5p22](#) (p.343)

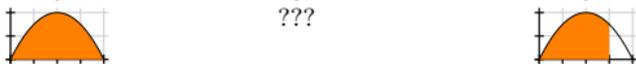
[Leit5p48](#) (p.331)

[MirandaP220](#)

A motivação pro (\*\*\*) é isso aqui:

$$(**) : \quad \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x) dx = \int_{x=a}^{x=c} f(x) dx$$

$$(**) \begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=3 \\ c:=4 \end{bmatrix} : \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x) dx}_{\text{gráfico}} + \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x) dx}_{\text{gráfico}} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{\text{gráfico}}$$


$$(**) \begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ c:=3 \end{bmatrix} : \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{\text{gráfico}} + \underbrace{\int_{x=4}^{x=3} f(x) dx}_{\text{???}} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x) dx}_{\text{gráfico}}$$


$$\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x) dx}_{\text{gráfico}} - \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x) dx}_{\text{gráfico}} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x) dx}_{\text{gráfico}}$$


## “Quase retângulos”

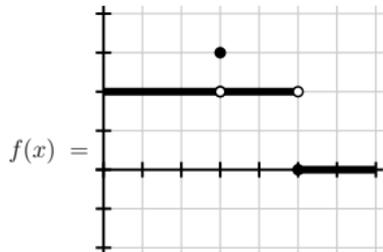
A quarta propriedade é essa aqui:

$$\int_{x=a}^{x=b} k dx = k(b-a) \quad (****)$$

A gente quer que ela valha pra todos os valores de  $k$ ,  $a$  e  $b$  – incluindo os casos em que  $k$  é negativo, que são “retângulos com altura negativa” e pros casos que  $a > b$ , que são “retângulos que têm base negativa”...

...e além disso a gente quer que ela valha pra casos como o da figura da direita, em que entre  $x = 2$  e  $x = 5$  o mathologermóvel anda com velocidade constante, 2, **exceto em dois instantes** – repare que no gráfico a gente tem  $f(3) = 3$  e  $f(5) = 0$ ...

Vamos pensar em termos de velocidades e distâncias. Entre  $x = 2$  e  $x = 5$  o mathologermóvel andou sempre com velocidade 2, exceto por dois instantes de um buzilionésimo de segundo cada um, em que ele andou com velocidades diferentes de 2... esses instantes mudam tão pouco a distância percorrida que a gente **vai considerar** que eles **não mudam** a distância percorrida.



$$\begin{aligned} \int_{x=2}^{x=5} f(x) dx &= \int_{x=2}^{x=5} 2 dx \\ &= 2 \cdot (5 - 2) \\ &= 2 \cdot 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

# Cálculo 2 - 2024.1

Aulas 7 a 9: exercícios de substituição

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

[2iQ12](#) Quadros da aula 6 (27/mar/2024)

[2iQ14](#) Quadros da aula 7 (01/abr/2024)

[2iQ16](#) Quadros da aula 8 (02/abr/2024)

[2iQ22](#) Quadros da aula 9 (03/abr/2024)

A regra da cadeia em vários livros:

[MirandaP87](#) 3.5 A regra da cadeia

[Leit3p45](#) (p.181) 3.6 A derivada de uma função composta e...

[StewPtCap3p26](#) (p.179) 3.4 A regra da cadeia

[CederjC1V1p115](#) (p.113) Aula 12: A regra da cadeia

[FlemmingP147](#) (p.139) 4.13 Derivada da função composta

A fórmula do TFC2 nem sempre vale:

[2dT231](#) (2021.2)  $F(x) = -x^{-1}$ ,  $F'(x) = x^{-2}$

[2fT107](#) (2022.2) Dicas pra P1

[2fT110](#) (2022.2) P1, questão 3

[2fT114](#) (2022.2) P1, questão 3, gabarito

[2gT108](#) (2023.1) Dicas pra P1

[2gT111](#) (2023.1) P1, questão 4

[2gT116](#) (2023.1) P1, questão 4, gabarito

[2hT179](#) (2023.2) Dicas pra P1

[2hT188](#) (2023.2) P1, questão 4

[2hT193](#) (2023.2) P1, questão 4, gabarito

## Introdução

Vários alunos – obs: eram alunos super dedicados, mas que tinham feito um Ensino Médio super precário, e que tavam tentando tirar o atraso correndo – já me contaram que quando eles tentavam tirar certas dúvidas com o Reginaldo ele respondia coisas como:

“Isso é matéria de ensino médio!  
Isso aí você já deveria saber. Vai estudar pelo livro.”

Eu vou chamar isso de “Método Reginaldo”.

Eu vou tentar fazer algo totalmente diferente. As pessoas *deveriam* estar chegando em Cálculo sabendo obter casos particulares de fórmulas e teoremas muito bem, mas não estão...

Eu *ácho* que o modo mais rápido de tirar as dúvidas dessas pessoas é usando a operação de substituição que nós vamos ver aqui, “[:=]”, que é uma versão **simplificada** das operações de substituição “de verdade” que são usadas em  $\lambda$ -cálculo e em programas como o Lean, e que lidam bem com variáveis livres e ligadas, com tipos dependentes, que usam índices de de-Bruijn nos lugares certos, etc... mas ainda falta! Eu já tenho bastante material sobre isso, mas ele está espalhado...

Ah, e um dia eu vou fazer uma versão desse PDF com um apêndice enorme com um monte de exemplos em que esse “[:=]” simplificado funciona bem e esclarece idéias complicadas (já tenho um monte no material do semestre passado!), e com um monte de exemplos em que esse “[:=]” simplificado funciona mal e a gente precisa das versões mais complicadas... mas ainda falta.

## Funções

Isso aqui é um exemplo de coisa que segundo o Reginaldo “vocês já deveriam saber”, porque é matéria de Ensino Médio:

Digamos que  $f(x) = x^2$ . Então:

$$\begin{aligned} f(200) &= 200^2 \\ f(3u + 4) &= (3u + 4)^2 \\ f(42x^3 + 99) &= (42x^3 + 99)^2 \\ f(a + b) &= (a + b)^2 \\ f(g(x)) &= g(x)^2 \\ 42 + f(200) &= 42 + 200^2 \\ h(f(200)) &= h(200^2) \\ h(f(x)) &= h(x^2) \\ h(f(a + b)) &= h((a + b)^2) \end{aligned}$$

### Exercício 1.

a) Calcule o resultado desta substituição:

$$(f(3u + 4)) [f(y) := y^5 + y^6]$$

Agora seja:

$$[S_1] = [f(y) := y^5 + y^6]$$

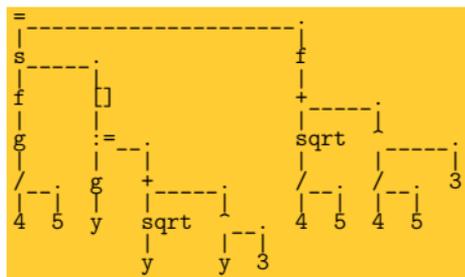
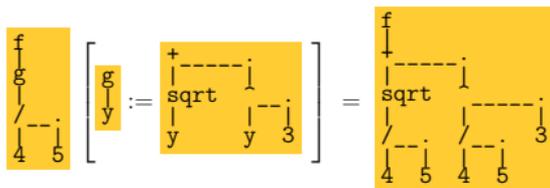
Calcule o resultado destas substituições:

- b)  $f(200) [S_1]$
- c)  $f(3u + 4) [S_1]$
- d)  $f(42x^3 + 99) [S_1]$
- e)  $f(a + b) [S_1]$
- f)  $f(g(x)) [S_1]$
- g)  $42 + f(200) [S_1]$
- h)  $h(f(200)) [S_1]$
- i)  $h(f(x)) [S_1]$
- j)  $h(f(a + b)) [S_1]$
- k)  $f(f(200)) [S_1]$
- l)  $h(x) [S_1]$
- m)  $h(y) [S_1]$

## Dica

Entenda isto aqui:

$$f(g(4/5)) [g(y) := \sqrt{y} + y^3] = f\left(\sqrt{4/5} + (4/5)^3\right)$$



## Mais sobre chutar e testar

Uma solução pra equação  $x^2 + 1 = 50$  é um modo de preencher os dois ‘?’s daqui que faça as duas igualdades externas serem verdadeiras:

$$(x^2 + 1 = 50) [x := ?] = ? = \mathbf{V}$$

As soluções são  $x = 7$  e  $x = -7$ . Olha:

$$\begin{aligned}(x^2 + 1 = 50) [x := 7] &= (7^2 + 1 = 50) = \mathbf{V} \\ (x^2 + 1 = 50) [x := -7] &= ((-7)^2 + 1 = 50) = \mathbf{V}\end{aligned}$$

Como é difícil chegar direto na solução eu costumo pedir pras pessoas começarem preenchendo os dois ‘?’s daqui,

$$(x^2 + 1 = 50) [x := ?] = ?$$

começando pelo da esquerda, pra fazer com que a igualdade externa seja verdadeira. Por exemplo:

$$(x^2 + 1 = 50) [x := 4] = (4^2 + 1 = 50)$$

Se a pessoa consegue pelo menos preencher o ‘?’ da esquerda daqui

$$(x^2 + 1 = 50) [x := ?] = ?$$

com uma expressão qualquer, como aqui,

$$(x^2 + 1 = 50) [x := a + b] = ?$$

...aí eu geralmente consigo convencer ela de que ela pode usar isto pra treinar substituições... por exemplo:

$$\begin{aligned}(x^2 + 1 = 50) [x := a + b] &= ((a + b)^2 + 1 = 50) \\ (x^2 + 1 = 50) [x := 2] &= (2^2 + 1 = 50) \\ (x^2 + 1 = 50) [x := 3] &= (3^2 + 1 = 50)\end{aligned}$$

Depois que ela treinou isso bastante eu posso pedir que ela faça algo parecido usando este molde aqui,

$$(x^2 + 1 = 50) [x := ?] = ? = ?$$

e substituindo o último ‘?’ por **V** ou **F**. Por exemplo:

$$\begin{aligned}(x^2 + 1 = 50) [x := 5] &= (5^2 + 1 = 50) = \mathbf{F} \\ (x^2 + 1 = 50) [x := 6] &= (6^2 + 1 = 50) = \mathbf{F} \\ (x^2 + 1 = 50) [x := 7] &= (7^2 + 1 = 50) = \mathbf{V}\end{aligned}$$

e aí *geralmente* as pessoas conseguem voltar pro problema original do início da coluna da esquerda e entender ele. Mas às vezes isso não funciona – e aí eu tenho que lembrar a pessoa que ela se comprometeu a ler essas coisas aqui pra entender a metodologia do curso:

Slogans01:10 até 08:51: duas histórias verídicas sobre GA 2iT5, 2iT6 “Meu objetivo é reprovar pessoas como você”

# Equações diferenciais

O Stewart define a solução de uma equação diferencial nesta página aqui,

StewPtCap9p8 (p.528) Equações diferenciais gerais e com estas frases (obs: a “equação 4” é  $y' = xy$ ):

Uma função  $f$  é denominada *solução* de uma equação diferencial se a equação é satisfeita quando  $y = f(x)$  e suas derivadas são substituídas na equação. Assim,  $f$  é uma solução da Equação 4 se

$$f(x) = xf(x)$$

para todos os valores de  $x$  em algum intervalo.

Eu vou ser um pouco mais porco que ele, e ao invés de falar “em algum intervalo” eu vou falar “sempre”.

Pra mim  $f(x) = e^{2x}$  é uma solução da equação diferencial  $f(x) = 2f'(x)$  porque isto aqui é verdade:

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \end{bmatrix} = (e^{2x} = e^{2x}) = \mathbf{V}$$

...e uma solução da equação diferencial  $f(x) = 2f'(x)$  é algo que a gente põe no primeiro ‘?’ daqui,

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ f'(x) := ? \end{bmatrix} = ? = \mathbf{V}$$

num modo de completar isso que faz com que todas as igualdades externas sejam verdadeiras.

Por exemplo, vamos testar se  $f(x) = 42$  é uma solução da equação diferencial  $f(x) = e^{2x}$ . Temos:

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := ? \end{bmatrix} = ? = ?$$

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{bmatrix} = ? = ?$$

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 42 \end{bmatrix} = (0 = 2 \cdot 42) = ?$$

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{bmatrix} = (0 = 2 \cdot 42) = \mathbf{F}$$

## Exercício 2.

a) Verifique que  $f(x) = 0$  é uma solução da equação diferencial  $f'(x) = 2f(x)$ .

b) Verifique que  $f(x) = 99x$  não é uma solução da equação diferencial  $f'(x) = 2f(x)$ . Dica: você vai ter que decifrar isto aqui: “ $(99 = 2 \cdot 99x) = \mathbf{F}$  porque  $99 = 2 \cdot 99x$  não é verdade sempre”.

## Antes de continuar...

Antes da gente continuar faça todos os itens da coluna da direita – são exercícios que eu preparei alguns semestres atrás.

Sejam:

$$[4] = \left( f'(x) = x^4 \right)$$

$$[5] = \left( f'(x) = 2f(x) \right)$$

$$[6] = \left( f''(x) + f'(x) = 6f(x) \right)$$

$$[7] = \left( f'(x) = -\frac{1}{f(x)} \right)$$

$$[8] = \left( f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \right)$$

$$[RC] = \left( f(g(x))' = f'(g(x))g'(x) \right)$$

$$[TFC2] = \left( \int_{x=a}^{x=b} f'(x) dx = f(b) - f(a) \right)$$

Note que as expressões [4], [5], [6], [7], [8], são as EDOs deste problema aqui: [2dT13](#) EDOs por chutar e testar.

### Exercício

Calcule o resultado de cada uma das substituições à direita. Lembre que o resultado de uma substituição é sempre uma expressão – não simplifique ela. Deixa eu fazer uma comparação com C: o resultado de substituir cada ocorrência do caracter 'a' pelo caracter '2' no string "a+5" é o string "2+5", não o string "7", e nem o número 7.

- a)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} x := 42 \end{array} \right]$   
 b)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} g(x) := 200 \cdot x \end{array} \right]$   
 c)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} f(y) := y^2 + y^3 \end{array} \right]$   
 d)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} f(y) := e^y \end{array} \right]$   
 e)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} g(x) := 4 \cdot x \end{array} \right]$   
 f)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} f(y) := e^y \\ g(x) := 4 \cdot x \end{array} \right]$   
 g)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} f(y) := y^{1/2} \end{array} \right]$   
 h)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} f(y) := \sqrt{y} \end{array} \right]$   
 i)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} f(y) := \sqrt{y} \end{array} \right]$   
 j)  $f(g(x))$   $\left[ \begin{array}{l} g(x) := e^x \\ g'(x) := e^x \end{array} \right]$   
 k)  $f(g(x))'$   $\left[ \begin{array}{l} g(x) := e^x \\ g'(x) := e^x \end{array} \right]$   
 l) [RC]  $\left[ \begin{array}{l} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \end{array} \right]$   
 m) [RC]  $\left[ \begin{array}{l} f(y) := y^{1/2} \\ f'(y) := \frac{1}{2} y^{-1/2} \end{array} \right]$   
 n) [RC]  $\left[ \begin{array}{l} f(y) := \sqrt{y} \\ f'(y) := \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{array} \right]$   
 o) [6]  $\left[ \begin{array}{l} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \\ f''(x) := 4e^{2x} \\ f(x) := e^{3x} \\ f'(x) := 3e^{3x} \\ f''(x) := 9e^{3x} \end{array} \right]$   
 p) [6]  $\left[ \begin{array}{l} f(x) := e^{3x} \\ f'(x) := 3e^{3x} \\ f''(x) := 9e^{3x} \end{array} \right]$   
 q) [TFC2]  $\left[ \begin{array}{l} f(x) := \frac{1}{2}x^2 \\ f'(x) := x \\ a := 0 \\ b := 2 \end{array} \right]$   
 r) [8]  $\left[ \begin{array}{l} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right]$

# Uma integral

Nas aulas 8 e 9 – links:

2iQ16 Quadros da aula 8 (2/abr/2024)

2iQ22 Quadros da aula 9 (3/abr/2024)

nós vimos um argumento visual que mostrava isto aqui,

$$\int_{x=1}^{x=2} x \, dx = 1.5$$

e depois o argumento mais formal abaixo, que dava o mesmo resultado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^2 &= 2x \\ \frac{d}{dx} \frac{x^2}{2} &= x \\ \int x \, dx &= \frac{x^2}{2} \\ \int_{x=a}^{x=b} x \, dx &= \frac{x^2}{2} \Big|_{x=a}^{x=b} \\ \int_{x=1}^{x=2} x \, dx &= \frac{x^2}{2} \Big|_{x=1}^{x=2} \\ &= \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \\ &= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 1.5 \end{aligned}$$

$$\text{por [III]} \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \end{bmatrix}$$

$$\text{por [TFC2]} \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \end{bmatrix}$$

$$\text{por [TFC2]} \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \\ a := 1 \\ b := 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{por [defdif]} \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \\ a := 1 \\ b := 2 \end{bmatrix}$$

Usamos estes nomes pras fórmulas:

$$\text{[III]} = \left( \int F'(x) \, dx = F(x) \right)$$

$$\text{[TFC2]} = \left( \int_{x=a}^{x=b} F'(x) \, dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

$$\text{[defdif]} = \left( F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \right)$$

## A regra da cadeia

Imagina que eu passo esse exercício aqui,

$$\frac{d}{dx} \text{sen } 42x = ?$$

e uma pessoa resolve ele desse jeito:

Queremos encontrar a derivada de  $f(x) = \text{sen } 42x$ . Para tal vamos usar a regra da cadeia. Aplicando o método chegamos ao resultado, que é  $f'(x) = \cos 42x$ .

Repara: essa pessoa gastou um bocadinho de tempo e energia escrevendo a parte em português da resposta dela, e isso não ajudou ela em nada, só atrapalhou... ela chegou no resultado errado, e a solução dela ficou num formato super difícil de debugar – não dá pra eu apontar pra um símbolo dela e dizer “confere isso aqui”!...

Compare a solução dela com esta aqui, em três passos:

$$\begin{aligned} \text{[RC]} &= \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ g(x) := ? \\ f'(x) := ? \\ g'(x) := ? \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x = ? \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := \text{sen } x \\ g(x) := 42x \\ f'(x) := \cos x \\ g'(x) := 42 \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x = \cos(42x) \cdot 42 \right) \end{aligned}$$

Se a pessoa não faz a menor idéia de como eu consegui descobrir o que pôr nos cinco ‘?’s da minha solução em três passos dali da esquerda eu posso expandir a minha solução deste jeito...

$$\begin{aligned} \text{[RC]} &= \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ g(x) := ? \\ f'(x) := ? \\ g'(x) := ? \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x = ? \right) \\ \text{[RCL]} &= \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) \right) \\ \text{[RCL]} \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ g(x) := ? \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x \right) \\ \text{[RCL]} \begin{bmatrix} f(x) := \text{sen } x \\ g(x) := 42x \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := \text{sen } x \\ g(x) := 42x \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x = f'(42x)g'(x) \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := \text{sen } x \\ g(x) := 42x \\ f'(x) := ? \\ g'(x) := ? \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x = ? \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} f(x) := \text{sen } x \\ g(x) := 42x \\ f'(x) := \cos x \\ g'(x) := 42 \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x = \cos(42x) \cdot 42 \right) \end{aligned}$$

repare que eu introduzi um monte de passos novos, e comecei resolvendo um problema menor que só tinha dois ‘?’s – este aqui:

$$\begin{aligned} \text{[RCL]} &= \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) \right) \\ \text{[RCL]} \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ g(x) := ? \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen } 42x \right) \end{aligned}$$

## Renomear

Note que:

$$\underbrace{\left(\frac{d}{dx}f(g(x))\right) \left[ \begin{array}{l} f := h \\ g := k \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} h := g \\ g := k \end{array} \right] [x := t]}_{\left(\frac{d}{dx}h(k(x))\right)} \\ \underbrace{\left(\frac{d}{dx}g(f(x))\right)}_{\left(\frac{d}{dt}g(f(t))\right)}$$

e portanto isto aqui

$$[\text{RC}] \left[ \begin{array}{l} f := h \\ f' := h' \\ g := k \\ g' := k' \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} h := f \\ h' := f' \\ k := g \\ k' := g' \end{array} \right] [x := t]$$

deve dar uma versão da regra da cadeia que usa letras diferentes das originais... você consegue descobrir o resultado da substituição acima de cabeça? Se não conseguir faça todos os passos à mão.

O Maxima tem uma operação de substituição, **subst**, em que as substituições são feitas em ordem, e uma outra, **psubst**, em que as substituições são feitas em paralelo. Veja:

[https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima\\_33.html#psubst](https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_33.html#psubst)

Se o nosso ‘[:=]’ for a substituição em paralelo então a gente pode fazer isto aqui:

$$\left(\frac{d}{dx}f(g(x))\right) \left[ \begin{array}{l} f := g \\ f' := g' \\ g := f \\ g' := f' \\ x := t \end{array} \right] = \left(\frac{d}{dt}g(f(t))\right)$$

só que uma vez – em 2022.1 – eu tentei definir formalmente a substituição em paralelo em sala e deu super errado, ninguém entendeu nada... e aí eu vi que era melhor evitar os casos em que a substituição simples e a substituição em paralelo se comportam de formas diferentes.

## Regra da cadeia: exercícios

### Exercícios do Miranda

Lembre que:

$$\text{[RC]} = \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Resolva os exercícios 1–6 e 8–12 daqui:

#### MirandaP89

usando os métodos que você quiser, e depois reescreva o resultado final de cada um neste formato com uma justificativa detalhada à direita, que nós vimos no slide 9:

$$\frac{d}{dt}(3t+4)^5 = 5(3t+4)^4 \cdot 3 \quad \text{por [RC]} \left[ \begin{array}{l} f(x):=x^5 \\ g(x):=3x+4 \\ f'(x):=5x^4 \\ g'(x):=3 \end{array} \right] [x := t]$$

## Muito importante

Cálculo 2 é cheio de fórmulas que parecem incompreensíveis à primeira vista, porque são abstratas demais...

Uma das utilidades mais importantes da operação ‘[:=]’ pra gente vai ser *transformar fórmulas nas quais a gente não entende nada em casos particulares dessas fórmulas, que têm vários pedaços que a gente consegue entender.*

Isso aqui é uma fórmula – ou melhor, um “método” – que vai ser um dos assuntos da P2:

$$[M] = \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y) dy = g(x) dx \\ \int h(y) dy = \int g(x) dx \\ \parallel \qquad \qquad \parallel \\ H(y) + C_1 \qquad G(x) + C_2 \\ H(y) = G(x) + C_2 - C_1 \\ \qquad \qquad = G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right)$$

### Exercício muito importante:

Calcule o resultado da substituição abaixo.

Você provavelmente vai conseguir entender as quatro igualdades de baixo do resultado, mas as cinco igualdades de cima ainda não vão fazer sentido nenhum pra você.

$$[M] \left[ \begin{array}{l} g(x) := -2x \\ h(y) := 2y \\ G(x) := -x^2 \\ H(y) := y^2 \\ H^{-1}(u) := \sqrt{u} \end{array} \right] = ?$$

# Cálculo 2 - 2024.1

Aula 9: teste de nivelamento  
(3/abril/2024 – duração: 15 mins)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF  
<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

[2iQ22](#) Quadros da aula 9 (3/abril/2024)

[2iQ24](#) Quadro em que aparece o enunciado do teste

[2hT65](#) Teste de nivelamento de 2023.2

## Por favor escrevam...

Por favor escrevam na folha:

- seu nome (legível),
- com quem você fez GA, C1 e Prog1 no semestre em que você passou em cada uma, e em qual semestre foi,
- a questão e tudo que você conseguir fazer pra resolver ela. A questão é:

$$\frac{d}{dx} f(\sin(x^4) + \ln x) = ?$$

## Uma solução

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(f(\sin(x^4) + \ln x)) &= f'(\sin(x^4) + \ln x) \left( \frac{d}{dx}(\sin(x^4) + \ln x) \right) \\
 &= f'(\sin(x^4) + \ln x) \left( \frac{d}{dx}(\sin(x^4)) + \frac{d}{dx}(\ln x) \right) \\
 &= f'(\sin(x^4) + \ln x) \left( (\cos(x^4) \cdot \frac{d}{dx}(x^4)) + \frac{d}{dx}(\ln x) \right) \\
 &= f'(\sin(x^4) + \ln x) \left( (\cos(x^4) \cdot \frac{d}{dx}(x^4)) + \frac{1}{x} \right) \\
 &= f'(\sin(x^4) + \ln x) \left( (\cos(x^4) \cdot 4x^3) + \frac{1}{x} \right)
 \end{aligned}$$

The image shows a vertical sequence of five yellow boxes illustrating the step-by-step differentiation of  $f(\sin(x^4) + \ln x)$ . Each box shows a portion of the expression with a red arrow indicating the derivative operation being performed on that part. The sequence starts with the full expression and ends with the final simplified result.

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dx} (f(\sin(x^4) + \ln x)) \\
 &= f'(\sin(x^4) + \ln x) \left( \frac{d}{dx}(\sin(x^4)) + \frac{d}{dx}(\ln x) \right) \\
 &= f'(\sin(x^4) + \ln x) \left( (\cos(x^4) \cdot \frac{d}{dx}(x^4)) + \frac{d}{dx}(\ln x) \right) \\
 &= f'(\sin(x^4) + \ln x) \left( (\cos(x^4) \cdot 4x^3) + \frac{1}{x} \right)
 \end{aligned}$$

## Outra solução

$$\begin{aligned} \text{[RC]} &= \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right) \\ \text{[RC]} \begin{bmatrix} g(x) := \sin(x^4) + \ln(x) \\ g'(x) := \cos(x^4) \cdot 4x^3 + \frac{1}{x} \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dx} f(\sin(x^4) + \ln(x)) = f'(\sin(x^4) + \ln(x)) (\cos(x^4) \cdot 4x^3 + \frac{1}{x}) \right) \end{aligned}$$

# Cálculo 2 - 2024.1

Aula 10: integral indefinida  
e integração por partes

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

[Miranda181](#) 6 Integral Indefinida

[Miranda182](#) Figura 6.1: antiderivadas de  $x^2$

[Miranda207](#) 7 Integração definida

[Miranda212](#) 7.2 Integral definida

[Leit5p2](#) (p.285) 5 Integração e integral definida

[Leit5p3](#) (p.286) 5.1 Antidiferenciação

[Leit5p4](#) (p.287) 5.1.3 Teorema: ...em um intervalo  $I$

[Leit5p41](#) (p.324) 5.5 A integral definida

[StewPtCap5p16](#) (p.337) 5.2 A Integral Definida

[StewPtCap5p39](#) (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas

[StewPtCap5p40](#) (p.361) primitiva geral da função  $f(x) = 1/x^2$

[Miranda199](#) 6.3 Integração por Partes

[Leit9p4](#) (p.531) 9.1. Integração por partes

[StewPtCap7p5](#) (p.420) 7.1 Integração por Partes

Um livro recente da Márcia Fusaro Pinto (da UFRJ):

[TLATOCp45](#) (p.34) ...fearlessly substituting variables...

[TLATOCp189](#) (p.178) 6 Interlude: the ordering of chapters...

## Integral indefinida

Tanto o Leithold quanto o Miranda explicam a *integral indefinida* antes da *integral definida*. Dê uma olhada na página de links.

*Todos os modos fáceis de atribuir um significado intuitivo para expressões como esta aqui*

$$\int f(x) dx$$

*são gambiarras que funcionam mal.*

Eu vou usar esta definição aqui,

[2fT23](#) (p.4) Outra definição para a integral indefinida e aqui tem um caso em que a definição usual quebra:

[2fT24](#) (p.5) Meme: expanding brain, versão ln

Nós vamos começar usando a integral indefinida como o macaco que faz contas sem ter idéia do significado do que está fazendo, e só depois que tivermos bastante prática nós vamos discutir os vários jeitos de atribuir significados intuitivos para

A regra básica vai ser esta aqui:

$$[II] = \left( \int f'(x) dx = f(x) \right)$$

### Exercícios

Calcule:

c) Resolva os exercícios 1 a 10 daqui por chutar e testar:

[Miranda185](#) Exercícios 6.1

d) Entenda tudo que esta nesta página:

[Leit5p6](#) (p.289) 5.1.8. Teorema

## A regra do quociente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} g(x)^k &= k g(x)^{k-1} g'(x) \\ \frac{d}{dx} g(x)^{-1} &= -g(x)^{-2} g'(x) \\ \frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} &= -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \\ \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \left( \frac{d}{dx} f(x) \right) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left( \frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} \right) \\ &= f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left( -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \right) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\ \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} g^k &= k g^{k-1} g' \\ \frac{d}{dx} g^{-1} &= -g^{-2} g' \\ \frac{d}{dx} \frac{1}{g} &= -\frac{g'}{g^2} \\ \frac{d}{dx} \frac{f}{g} &= \left( \frac{d}{dx} f \right) \frac{1}{g} + f \cdot \left( \frac{d}{dx} \frac{1}{g} \right) \\ &= f' \frac{1}{g} + f \cdot \left( -\frac{g'}{g^2} \right) \\ &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ \frac{d}{dx} \frac{f}{g} &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$

## A transitividade da igualdade

$$\left( \begin{array}{l} a + b = c + d \\ \phantom{a + b} = e + f \\ \phantom{a + b} = g + h \\ a + b = g + h \end{array} \right) \left[ \begin{array}{l} a:=2 \\ b:=9 \\ c:=3 \\ d:=8 \\ e:=4 \\ f:=7 \\ g:=5 \\ h:=6 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{l} 2 + 9 = 3 + 8 \\ \phantom{2 + 9} = 4 + 7 \\ \phantom{2 + 9} = 5 + 6 \\ 2 + 9 = 5 + 6 \end{array} \right)$$

## Linearidade da integral

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = F(x)$$

$$k \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = kF(x)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} kf(x) dx = kF(x)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} kf(x) dx = k \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = F(x)$$

$$\int_{x=b}^{x=a} g(x) dx = G(x)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x) dx = F(x) + G(x)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) + g(x) dx = F(x) + G(x)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) + g(x) dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x) dx$$

$$\int f dx = F$$

$$k \int f dx = kF$$

$$\int kf dx = kF$$

$$\int kf dx = k \int f dx$$

$$\int f dx = F$$

$$\int g dx = G$$

$$\int f dx + \int g dx = F + G$$

$$\int f + g dx = F + G$$

$$\int f + g dx = \int f dx + \int g dx$$

$$\begin{aligned}
 \text{[II]} &= \left( \int F'(x) dx = F(x) \right) \\
 \text{[IIC]} &= \left( \int F'(x) dx = F(x) + C \right) \\
 \text{[TFC2]} &= \left( \int_{x=a}^{x=b} F'(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
 \text{[defdif]} &= \left( F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \right)
 \end{aligned}$$

$$\int 0 dx = 42$$

$$\int 0 dx = 99$$

$$42 = 99$$

$$\int 0 dx = 42 + C$$

$$\int 0 dx = 99 + C$$

$$42 + C = 99 + C$$

$$\int_{x=2}^{x=3} 0 dx = 42 \Big|_{x=2}^{x=3}$$

$$\int_{x=2}^{x=3} 0 dx = 99 \Big|_{x=2}^{x=3}$$

$$42 \Big|_{x=2}^{x=3} = 99 \Big|_{x=2}^{x=3}$$

$$\int f'g + fg' dx = fg$$

$$\int f'g + fg' dx = \int f'g dx + \int fg' dx$$

$$\int f'g dx + \int fg' dx = fg$$

$$\int fg' dx = fg - \int f'g dx$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = \int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) dx + \int_{x=a}^{x=b} f(x)g'(x) dx$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) dx + \int_{x=a}^{x=b} f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) dx$$

## Integração por partes: um exemplo

Lembre que o Mathologer diz no vídeo dele que o melhor modo da gente aprender Cálculo é começar escrevendo idéias que a gente acha que devem ser verdade, e depois a gente vê se elas dão resultados certos e se elas fazem sentido... e se fizerem sentido a gente tenta formalizar elas.

Ele também diz – a partir daqui, na “lombada número 1”,

**CalcEasy20:27**

que a integral é a inversa da derivada, mas que  $\int \cos x \, dx$  pode retornar tanto  $\sin x$  quanto  $42 + \sin x$ . As contas à direita são bem improvisadas, mas como eu indiquei em cima que elas são só uma idéia que pode estar cheia de erros o “colega que seja menos meu amigo” não vai poder reagir deste jeito aqui...

**2gT20**

**Exercício 0:**

Calcule  $\frac{d}{dx}(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x)$ .

Idéia (que pode estar cheia de erros):

$$\begin{aligned} (gh)' &= g'h + gh' && \text{por} \\ \int (gh)' \, dx &= \int g'h + gh' \, dx && \\ gh &= \int g'h + gh' \, dx && \\ &= \int g'h \, dx + \int gh' \, dx && \text{por} \\ gh &= \int g'h \, dx + \int gh' \, dx && \text{por 3 e 4} \\ gh - \int g'h \, dx &= \int gh' \, dx && \text{por 5} \\ \int gh' \, dx &= gh - \int g'h \, dx && \text{por 6} \\ \int xe^x \, dx &= xe^x - \int 1 \cdot e^x \, dx && \text{por 7 com } \begin{bmatrix} g:=x \\ h:=e^x \end{bmatrix} \\ &= xe^x - \int e^x \, dx && \\ &= xe^x - e^x && \text{por } (e^x)' = e^x \\ \int xe^x \, dx &= xe^x - e^x && \text{por 8, 9 e 10} \\ \int x^2e^x \, dx &= x^2e^x - \int 2xe^x \, dx && \text{por 7 com } \begin{bmatrix} g:=x^2 \\ h:=e^x \end{bmatrix} \\ &= x^2e^x - 2 \int xe^x \, dx && \text{por} \\ &= x^2e^x - 2(xe^x - e^x) && \text{por 11} \\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x && \end{aligned}$$

# Cálculo 2 - 2024.1

Aulas 10 e 11: integração por partes

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

[Miranda199](#) 6.3 Integração por Partes

[Miranda205](#) Exercícios

[Leit9p4](#) (p.531) 9.1 Integração por partes

[Leit9p9](#) (p.536) Exercícios 9.1

[StewPtCap7p5](#) (p.420) 7.1 Integração por Partes

[StewPtCap7p8](#) (p.423) 7.1 Exercícios

[CederjC2V2p35](#) (p.33) 19 Integração por partes

[2iQ27](#) Quadros da aula 10 (08/abr/2024)

[2iQ31](#) Quadros da aula 10 (08/abr/2024) - definição do [IP]

[2iQ33](#) Quadros da aula 11 (09/abr/2024)

# Introdução

Lembre que:

$$\begin{aligned} \text{[TFC2]} &= \left( \int_{x=a}^{x=b} F'(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right) \\ \text{[II]} &= \left( \int F'(x) dx = F(x) \right) \\ \text{[II]} \left[ \begin{array}{l} F(x) := fg \\ F'(x) := f'g + fg' \end{array} \right] &= \left( \int f'g + fg' dx = fg \right) \end{aligned}$$

Vou definir:

$$\text{[IP]} = \left( \int fg' dx = fg - \int f'g dx \right)$$

Compare com:

StewPtCap7p5 (p.420) 7.1 Integração por Partes

A gente vai evitar usar diferenciais, e portanto a gente vai evitar usar essa fórmula aqui, que vários livros usam – a “fórmula da integração por partes com diferenciais”:

$$\text{[IPD]} = \left( \int u dv = uv - \int v du \right)$$

O meu truque preferido pra não me enrolar quando eu uso a fórmula [IP] é usar anotações em underbraces. Ao inves de usar só isso aqui,

$$\text{[IP]} = \left( \int fg' dx = fg - \int f'g dx \right)$$

$$\text{[IP]} \left[ \begin{array}{l} f := x \\ f' := 1 \\ g := e^x \\ g' := e^x \end{array} \right] = \left( \int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx \right)$$

eu vou acrescentar umas anotações, deste jeito:

$$\int \underbrace{x}_f \underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{x}_f \underbrace{e^x}_g - \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{e^x}_{g'} dx \quad \text{por [IP]} \left[ \begin{array}{l} f := x \\ f' := 1 \\ g := e^x \\ g' := e^x \end{array} \right]$$

## Exercício 1

Complete as igualdades e as justificativas.

Note que os exercícios a, b, c e d abaixo são baseados nos exercícios 3, 4, 6 e 7 desta página do Stewart:

StewPtCap7p8 (p.423) 7.1 Exercícios

- $\int \underbrace{x}_f \underbrace{\cos 5x}_{g'} dx = ?$  por [IP][?]
- $\int \underbrace{x}_f \underbrace{e^{-x}}_{g'} dx = ?$  por [IP][?]
- $\int \underbrace{t}_f \underbrace{\sin 2t}_{g'} dt = ?$  por [IP][?]
- $\int \underbrace{(x^2 + 2x)}_f \underbrace{\cos x}_{g'} dx = ?$  por [IP][?]

## Exercício 2

Calcule

$$\int x^2 e^x dx$$

e justifique cada um dos passos em que você usar a regra [IP].

Dica: aqui não é fácil encontrar o melhor modo de escrever a resposta... você vai precisar reescrever o seu desenvolvimento várias vezes usando os personagens a, b e c da Dica 7 e vai precisar nomear os seus objetos.

## **Aviso**

A P1 vai ter uma questão de integração por partes em que o resultado final vai valer 10% dos pontos e os itens de “complete as igualdades e as justificativas” vão valer 90% dos pontos.

Na “vida real” é bem raro aparecerem problemas que a gente resolve usando integração por partes, então a gente vai usar integração por partes mais pra treinar justificativas e modos de escrever.

# Cálculo 2 - 2024.1

Aulas 14 e 15: diferenciais  
e introdução às regras de  
mudança de variável na integral

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF  
<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

[Leit4p55](#) (p.269) 4.9 A diferencial

[Leit4p61](#) (p.275) reescritas (...) usando a notação de Leibniz

[Leit5p13](#) (p.296) Suponha que desejamos antiderivariar  $(1 + x^2)^9(2x)$

[Leit5p13](#) (p.296) 5.2.1 Regra da cadeia para a antiderivação

[Leit5p19](#) (p.302) Exercícios 5.2

[StewPtCap1p5](#) (p.10) variável dependente

[StewPtCap3p75](#) (p.228) Diferenciais

[StewPtCap5p39](#) (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas

[StewPtCap5p48](#) (p.369) 5.5 A Regra da Substituição

[StewPtCap5p51](#) (p.372) Regra da Substituição para as Integrais Definidas

[StewPtCap5p51](#) (p.372) Demonstração. Seja  $F$  uma primitiva de  $f...$

[StewPtCap5p53](#) (p.374) Exercícios

[Miranda117](#) 4.7 Aproximações Lineares e Diferencial

[Miranda119](#) Definição 7: a diferencial

[Miranda189](#) 6.2 Integração por Substituição

[Miranda191](#) Exercícios

[Miranda192](#) Exemplo 6.6

[Miranda193](#) Não podemos calcular uma integral que possui tanto um  $x$  e um  $u$  nela

[Miranda196](#) Exercícios

## ...reescritas usando a notação de Leibniz

O Leithold define diferenciais na p.269, e na p.275...

Leit4p55 (p.269) 4.9 A diferencial

Leit4p61 (p.275) ...usando a notação de Leibniz

ele tem esta tabela, em que ele mostra como as regras usuais de derivação podem ser traduzidas pra regras usando diferenciais:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{d(c)}{dx} = 0 & d(c) = 0 \\
 \frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1} & d(x^n) = nx^{n-1}dx \\
 \frac{d(cu)}{dx} = c \frac{du}{dx} & d(cu) = c du \\
 \frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} & d(u+v) = du + dv \\
 \frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} & d(uv) = u dv + v du \\
 \frac{d(\frac{u}{v})}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} & d(\frac{u}{v}) = \frac{v du - u dv}{v^2} \\
 \frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx} & d(u^n) = nu^{n-1} du
 \end{array}$$

quando eu seguia a ordem dos livros e ensinava diferenciais em C2 as pessoas cometiam tantos, tantos, tantos erros nas provas – principalmente na mudança de variável na integral, que vamos ver na próxima página – que as provas eram um massacre...

...aí eu resolvi **PROIBIR** diferenciais em C2. A gente vai usar elas só em alguns pontos muito específicos da matéria de C2, e vai deixar pra ver elas direito em C3.

## Introdução

A fórmula mais difícil de justificar de Cálculo 2 é essa aqui – a fórmula da mudança de variável na integral indefinida (“MVI”):

$$\int f'(g(x)) \underbrace{g'(x)}_u dx = \int f'(u) du$$

Tem dois modos da gente acreditar nela. O primeiro é assim: os livros dizem que a MVI é verdade, então se a gente decorar ela e algumas demonstrações curtas dela e a gente aprender a recitá-las com muita, muita, *muita* convicção então a gente

- vai se convencer de que ela é verdade,
- vai ser capaz de usar ela na prova sem errar,
- e a gente vai ser capaz de convencer outras pessoas de que ela é verdade.

Tem uma demonstração da MVI aqui,

**StewPtCap5p48** (p.369) 5.5 A Regra da Substituição mas eu até hoje não consigo acreditar direito nessa demonstração – me parece que faltam muitos detalhes nela, e eu não sei completar esses detalhes.

O segundo modo da gente acreditar na MVI é a gente aprender a usar isso aqui,

$$[\text{MVD4}] = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(g(b)) - f(g(a)) \\ = f(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right)$$

onde “MVD” quer dizer “mudança de variável na integral definida”, e o “4” quer dizer “versão com 4 igualdades”. Note que esse **[MVD4]** é uma demonstração – em que cada passo é fácil de justificar! – e não uma fórmula... a fórmula da MVD é essa aqui,

$$[\text{MVD1}] = \left( \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \right)$$

e a fórmula da MVI é esta:

$$[\text{MVI}] = \left( \int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right)$$

as abreviações são estas,

$$\begin{array}{ccc} [\text{MVD4}] & \rightarrow & [\text{MVI3}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\text{MVD1}] & \rightarrow & [\text{MVI1}] \end{array}$$

e a gente vai aprender a expandir cada aplicação da **[MVI1]** pra uma aplicação da **[MVD4]** – em que cada passo vai ser fácil de justificar.

## “Meu objetivo é...” (2)

Você já deve ter relido os slides da “Introdução ao curso” <http://anggtwu.net/LATEX/2024-1-C2-intro.pdf> várias vezes. A introdução tem um slide chamado “Meu objetivo é...”, que tem esse trecho aqui:

Cálculo 2 tem vários assuntos que funcionam assim: se você tentar aprender o assunto B direto ele é muito, muito, muito difícil, e você vai gastar – digamos – 200 horas de estudo pra aprender ele... mas se você aprender o assunto A primeiro você consegue aprender os dois assuntos, A e B, em 20 horas ao invés de 200.

e ela tem vários slides que falam de atividades que exercitam músculos mentais bem diferentes. O que importa agora é que “entender de cabeça” e “entender escrevendo as substituições por extenso no papel” são atividades que exercitam músculos mentais beem diferentes, e o modo rápido de aprender Cálculo 2 é nessa ordem aqui:

- A. aprender a fazer as substituições no papel
- B. aprender a fazer as substituições de cabeça
- C. entender o que os livros dizem

Você só vai conseguir aprender o B (“...de cabeça”) treinando bastante o A (“...no papel”), e pra conseguir entender o que os livros dizem (“C”) você muitas vezes vai ter que expandir uma frase misteriosa do livro em MUITOS passos mais simples. Aqui tem alguns exemplos de coisas super complicadas que os livros que nós estamos usando escreveram em poucas frases cada uma:

**StewPtCap5p51** (p.372) Seja  $F$  uma primitiva de  $f$ ...  
**Miranda193** ...que possui tanto um  $x$  e um  $u$ ...

*A matéria desse curso é gigantesca e nós temos muito pouco tempo. Se você ficar insistindo em tentar entender “de cabeça” o que os livros dizem sem tentar escrever as substituições no papel eu vou ter que usar esse slogan daqui,*

**MEU OBJETIVO É REPROVAR  
 PESSOAS COMO VOCÊ!!!**

que na verdade é uma versão abreviada de uma idéia bem maior – releia os slides da “Introdução ao curso” pra entender ela direito.

## MVDs e MVIs

$$[\text{MVD4}] = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(g(b)) - f(g(a)) \\ = f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD1}] = \left( \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \left( \begin{array}{l} \int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \\ = f(u) \\ = \int f'(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI1}] = \left( \int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right)$$

## MVDs e MVIs, versão colorida

$$[\text{MVD4}] = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(g(b)) - f(g(a)) \\ = f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD1}] = \left( \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \left( \begin{array}{l} \int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \\ = f(u) \\ = \int f'(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI1}] = \left( \int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right)$$

Um caso particular:  $\int \cos(2x) \cdot 2 dx$

$$\begin{aligned}
 \text{[MVD4]} &= \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(g(b)) - f(g(a)) \\ = f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right) \\
 \text{[MVD4]} \begin{bmatrix} f(x):=\text{sen}(x) \\ f'(x):=\text{cos}(x) \\ g(x):=2 \cdot x \\ g'(x):=2 \\ a:=3 \\ b:=4 \end{bmatrix} &= \left( \begin{array}{l} \int_{x=3}^{x=4} \text{cos}(2 \cdot x) \cdot 2 dx = \text{sen}(2 \cdot x)\Big|_{x=3}^{x=4} \\ = \text{sen}(2 \cdot 4) - \text{sen}(2 \cdot 3) \\ = \text{sen}(u)\Big|_{u=2 \cdot 3}^{u=2 \cdot 4} \\ = \int_{u=2 \cdot 3}^{u=2 \cdot 4} \text{cos}(u) du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

## Exercício 1

Lembre que:

$$[\text{MVD4}] = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = f(g(b)) - f(g(a)) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD1}] = \left( \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \right)$$

$$[\text{MVI1}] = \left( \int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right)$$

Sejam  $[\text{S1}] = \begin{bmatrix} f'(u):=u^{10} \\ f(u):=\frac{1}{11}u^{11} \\ g(x):=x^2+4 \\ g'(x):=2x \end{bmatrix}$  e  $[\text{S2}] = \begin{bmatrix} f'(x):=\tan(x) \\ g(x):=x^2 \\ g'(x):=2x \end{bmatrix}$ .

Complete:

- $[\text{MVI1}][\text{S1}] = ?$
- $[\text{MVD4}][\text{S1}] = ?$
- $[\text{MVI1}][\text{S2}] = ?$
- $[\text{MVD1}][\text{S2}] = ?$
- $[\text{MVD4}][\text{S2}] = ?$

O item (e) vai ajudar a gente a entender isso aqui:

**StewPtCap5p51** (p.372) Demonstração. Seja  $F$  uma primitiva de  $f...$

## Expanda as justificativas

Na figura abaixo o [A] é um caso particular do [MVD4] com justificativas:

$$\begin{aligned}
 \text{[TFC2]} &= \left( \int_{x=a}^{x=b} F'(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
 \text{[defdif]} &= \left( F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \right) \\
 \text{[A]} &= \left( \begin{array}{l} \int_{x=3}^{x=4} \cos(2 \cdot x) \cdot 2 dx = \text{sen}(2 \cdot x) \Big|_{x=3}^{x=4} \\ \phantom{\int_{x=3}^{x=4}} = \text{sen}(2 \cdot 4) - \text{sen}(2 \cdot 3) \\ \phantom{\int_{x=3}^{x=4}} = \text{sen}(u) \Big|_{u=2 \cdot 3}^{u=2 \cdot 4} \\ \phantom{\int_{x=3}^{x=4}} = \int_{u=2 \cdot 3}^{u=2 \cdot 4} \cos(u) du \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{por [TFC2]} \left[ \begin{array}{l} F(x) := \text{sen}(2 \cdot x) \\ F'(x) := \cos(2 \cdot x) \cdot 2 \\ a := 3 \\ b := 4 \end{array} \right] \\ \text{por [defdif]} \left[ \begin{array}{l} F(x) := \text{sen}(2 \cdot x) \\ a := 3 \\ b := 4 \end{array} \right] \\ \text{por [defdif]} [x:=u] \left[ \begin{array}{l} F(u) := \text{sen}(u) \\ a := 2 \cdot 3 \\ b := 2 \cdot 4 \end{array} \right] \\ \text{por [TFC2]} [x:=u] \left[ \begin{array}{l} F(u) := \cos(u) \\ F'(u) := \text{sen}(u) \\ a := 2 \cdot 3 \\ b := 2 \cdot 4 \end{array} \right] \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

### Exercício 2.

Expanda cada uma das justificativas,

- [TFC2]  $\left[ \begin{array}{l} F(x) := \text{sen}(2 \cdot x) \\ F'(x) := \cos(2 \cdot x) \cdot 2 \\ a := 3 \\ b := 4 \end{array} \right] = ?$
- [defdif]  $\left[ \begin{array}{l} F(x) := \text{sen}(2 \cdot x) \\ a := 3 \\ b := 4 \end{array} \right] = ?$
- [defdif]  $[x:=u] \left[ \begin{array}{l} F(u) := \text{sen}(u) \\ a := 2 \cdot 3 \\ b := 2 \cdot 4 \end{array} \right] = ?$
- [TFC2]  $[x:=u] \left[ \begin{array}{l} F(u) := \text{sen}(u) \\ F'(u) := \cos(u) \\ a := 2 \cdot 3 \\ b := 2 \cdot 4 \end{array} \right] = ?$

e veja que nem sempre a justificativa dá exatamente a igualdade à esquerda dela – às vezes ela dá só algo que, arrãm, *justifica* a igualdade.

## Complete as justificativas

Na figura abaixo o [B] é um outro caso particular do [MVD4] com justificativas,

$$\begin{aligned}
 \text{[TFC2]} &= \left( \int_{x=a}^{x=b} F'(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
 \text{[defdif]} &= \left( F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \right) \\
 \text{[B]} &= \left( \begin{array}{ll} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} & \text{por ?}_1 \\ & = f(g(b)) - f(g(a)) & \text{por ?}_2 \\ & = f(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & \text{por ?}_3 \\ & = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du & \text{por ?}_4 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

### Exercício 3.

Encontre justificativas que podem ser postas nas posições ?<sub>1</sub>, ?<sub>2</sub>, ?<sub>3</sub> e ?<sub>4</sub>.

#### Dica:

É **BEEEM** difícil encontrar os ?<sub>1</sub>, ?<sub>2</sub>, ?<sub>3</sub> e ?<sub>4</sub> direto de cabeça...

Use o chutar e testar e não apague nenhum dos seus chutes e testes!

#### Dica 2:

“Resolver por chutar e testar” e “resolver de cabeça” são técnicas que usam músculos mentais diferentes, e quase sempre quando a gente encontra um problema “com cara de Cálculo 2” o modo mais rápido de descobrir como resolver ele “de cabeça” é começar tentando resolver ele “por chutar e testar”! Vou tentar fazer umas animações explicando a idéia geral por trás disso quando der. Isso tem a ver com uma das minhas áreas de pesquisa... um link:

<http://anggtwu.net/math-b.html#2022-md>

Resumindo: *treine chutar e testar!!!*

## Mais um exemplo de chutar e testar

Isto é uma versão melhorada de...

2iQ34 um quadro da aula de 9/abril/2024.

Lembre que:

$$[\text{RC}] = \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Digamos que queremos resolver isto,

$$\int \frac{2}{3x+4} + \frac{5}{6x+7} dx = ?$$

mas nós vamos começar por este problema mais simples,

$$\int \frac{2}{3x+4} dx = ?$$

que é equivalente a:

$$\frac{d}{dx} ? = \frac{2}{3x+4}$$

Tente entender a solução por chutar e testar da direita. Muita gente acha que não pode fazer chutes e testes com números – porque, sei lá, talvez o Reginaldo tenha dito pra elas que isso é coisa de gente burra... mas repare que à direita eu fiz alguns chutes e testes usando números, e logo depois eu transformei esses chutes e testes com números em chutes e testes com variáveis, que viraram fórmulas novas... e acho que todo mundo concorda que inventar fórmulas e demonstrá-las é algo bem chique.

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} 2 \ln x = \frac{2}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln(g(x)) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{g(x)} g'(x)$$

$$\stackrel{(2)}{=} \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \ln(g(x)) \stackrel{(3)}{=} \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \ln(6x+7) = \frac{6}{6x+7}$$

$$\frac{d}{dx} \ln(ax+b) \stackrel{(4)}{=} \frac{a}{ax+b}$$

$$\frac{d}{dx} (c \ln(ax+b)) \stackrel{(5)}{=} c \frac{a}{ax+b}$$

$$\frac{d}{dx} (c \ln(3x+4)) \stackrel{(6)}{=} c \frac{3}{3x+4}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{3} \ln(3x+4) \right) \stackrel{(6)}{=} \frac{1}{3} \frac{3}{3x+4}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{3} \ln(3x+4) \right) = \frac{1}{3x+4}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{2}{3} \ln(3x+4) \right) = \frac{2}{3x+4}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{a}{b} \ln(bx+c) \right) = \frac{a}{b} \frac{b}{bx+c}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{a}{b} \ln(bx+c) \right) \stackrel{(7)}{=} \frac{a}{bx+c}$$

$$\int \frac{a}{bx+c} dx \stackrel{(8)}{=} \frac{a}{b} \ln(bx+c)$$

$$\int \frac{2}{3x+4} dx \stackrel{(9)}{=} \frac{2}{3} \ln(3x+4)$$

$$\int \frac{5}{6x+7} dx \stackrel{(10)}{=} \frac{5}{6} \ln(6x+7)$$

$$\int \frac{2}{3x+4} + \frac{5}{6x+7} dx \stackrel{(11)}{=} \frac{2}{3} \ln(3x+4) + \frac{5}{6} \ln(6x+7)$$

por [RC]  $\left[ \begin{matrix} f(x):=\ln x \\ f'(x)=1/x \end{matrix} \right]$

por (1) e (2)

por (3)  $\left[ \begin{matrix} g(x):=6x+7 \\ g'(x):=6 \end{matrix} \right]$

por (3)

por (4)

por (5)

por (5)

por (7)

por (8)

por (8)

## Leithold, p.302

Leit5p19 (p.302) Exercícios 5.2

(%i1) items : [

```

["1.", sqrt(1-4*y),          u=1-4*y],
["2.", (3*x - 1/4)^(1/3),    u=3*x-1/4],
["3.", (6 - 2*x)^(1/3),     u=6-2*x],
["4.", sqrt(5*r + 1),       u=5*r+1],
["5.", x*sqrt(x^2 - 9),     u=x^2-9],
["6.", 3*x*sqrt(4 - x^2),   u=4-x^2],
["7.", x^2*(x^3-1)^10,     u=x^3-1],
["8.", x*(2*x^2+1)^6,      u=2*x^2+1],
["9.", 5*x*(9-4*x^2)^(2/3), u=9-4*x^2],
["10.", x/(x^2+1)^3,       u=x^2+1]
]

```

(%i2) lfc\_solve\_m (items);

(%o2)

$$\begin{pmatrix}
 1. & \int \sqrt{1-4y} dy & = & -\left(\frac{(1-4y)^{\frac{3}{2}}}{6}\right) \\
 2. & \int (3x - \frac{1}{4})^{\frac{1}{3}} dx & = & \frac{(3x - \frac{1}{4})^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \\
 3. & \int (6 - 2x)^{\frac{1}{3}} dx & = & -\left(\frac{3(6-2x)^{\frac{4}{3}}}{8}\right) \\
 4. & \int \sqrt{5r+1} dr & = & \frac{2(5r+1)^{\frac{3}{2}}}{15} \\
 5. & \int x \sqrt{x^2-9} dx & = & \frac{(x^2-9)^{\frac{3}{2}}}{3} \\
 6. & 3 \int x \sqrt{4-x^2} dx & = & -(4-x^2)^{\frac{3}{2}} \\
 7. & \int x^2 (x^3-1)^{10} dx & = & \frac{(x^3-1)^{11}}{33} \\
 8. & \int x (2x^2+1)^6 dx & = & \frac{(2x^2+1)^7}{28} \\
 9. & 5 \int x (9-4x^2)^{\frac{2}{3}} dx & = & -\left(\frac{3(9-4x^2)^{\frac{5}{3}}}{8}\right) \\
 10. & \int \frac{x}{(x^2+1)^3} dx & = & -\left(\frac{1}{4(x^2+1)^2}\right)
 \end{pmatrix}$$

(%i3) lfc\_change\_m(items);

(%o3)

$$\begin{pmatrix}
 1. & \int \sqrt{1-4y} dy & = & -\left(\frac{\int \sqrt{u} du}{4}\right) & u = 1 - 4y \\
 2. & \int (3x - \frac{1}{4})^{\frac{1}{3}} dx & = & \frac{\int u^{\frac{1}{3}} du}{3} & u = 3x - \frac{1}{4} \\
 3. & \int (6 - 2x)^{\frac{1}{3}} dx & = & -\left(\frac{\int u^{\frac{1}{3}} du}{2}\right) & u = 6 - 2x \\
 4. & \int \sqrt{5r+1} dr & = & \frac{\int \sqrt{u} du}{5} & u = 5r + 1 \\
 5. & \int x \sqrt{x^2-9} dx & = & \frac{\int \sqrt{u} du}{2} & u = x^2 - 9 \\
 6. & 3 \int x \sqrt{4-x^2} dx & = & -\left(\frac{3 \int \sqrt{u} du}{2}\right) & u = 4 - x^2 \\
 7. & \int x^2 (x^3-1)^{10} dx & = & \frac{\int u^{10} du}{3} & u = x^3 - 1 \\
 8. & \int x (2x^2+1)^6 dx & = & \frac{\int u^6 du}{4} & u = 2x^2 + 1 \\
 9. & 5 \int x (9-4x^2)^{\frac{2}{3}} dx & = & -\left(\frac{5 \int u^{\frac{2}{3}} du}{8}\right) & u = 9 - 4x^2 \\
 10. & \int \frac{x}{(x^2+1)^3} dx & = & \frac{\int \frac{1}{2} du}{2} & u = x^2 + 1
 \end{pmatrix}$$

(%i4)

# Cálculo 2 - 2024.1

Aulas 16 a 18: mudança de variáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

- [CederjC2V2p19](#) (p.17) 17. Substituição simples
- [CederjC2V2p27](#) (p.25) 18. Substituição simples - continuação
- [CederjC2V2p31](#) (p.29) ou escrevemos todo o integrando com a variável  $t$ ...
- [CederjC2V2p35](#) (p.33) 19. Integração por partes
- [CederjC2V2p45](#) (p.43) 20. Integração de potências e produtos de funções trigonométricas
- [CederjC2V2p55](#) (p.53) 21. Integração de potências e produtos de funções trigonométricas
- [CederjC2V2p65](#) (p.63) 22. Substituição trigonométrica
- [CederjC2V2p68](#) (p.66) Os três casos típicos
- [CederjC2V2p77](#) (p.75) 23. Frações parciais - primeira parte
- [CederjC2V2p93](#) (p.91) 24. Frações parciais - segunda parte
- [CederjC2V2p103](#) (p.101) 25. Aulas de exercícios

## Links

Links da aula 8:

[2hQ21](#) Quadros da aula 8 (4a, 12/set/2023)  
[StewPtCap5p39](#) (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas  
[StewPtCap5p48](#) (p.369) 5.5 A Regra da Substituição  
[StewPtCap7p5](#) (p.420) 7.1 Integração por Partes  
[2gT45](#) (2023.1) Mudança de variável: exemplo  
[2gT46](#) (2023.1) Mudança de variável: caixinhas

Mudança de variável na integral definida (MVD):

[2eT131](#) (t-ints, p.12) Uma figura pra mudança de variável  
[Thomas55p11](#) (p.376) Theorem 5: Substitution in definite integrals  
[2fT49](#) Meu PDF de 2022.2 sobre mudança de variáveis

Mudança de variável na integral indefinida (MVI):

[2eT133](#) (t-ints, p.14) Um exemplo com contas  
[2eT135](#) (t-ints, p.16) Outro exemplo com contas  
[Thomas55p3](#) (p.370) Theorem 5: The substitution rule  
[Leit5p13](#) (p.296) A regra da cadeia para a antidiferenciação  
[Leit9p10](#) (p.537) Integração de potências de sen e cos  
[Miranda189](#) 6.2. Integração por substituição  
[Miranda192](#) Exemplo 6.6  
[Miranda193](#) Não podemos  
[Miranda196](#) Exercícios  
[Miranda255](#) 8.3 Integrais Trigonométricas

Vídeo do Reginaldo:

<https://www.youtube.com/watch?v=PTCUjrEBc4g>

Alguns quadros de 2023.1:

[2gQ22](#) Quadros da aula 10 (05/maio/2023)  
[2gQ24](#) Quadros da aula 11 (09/maio/2023)  
[2gQ26](#) Quadros da aula 12 (12/maio/2023)  
[2gQ28](#) Quadros da aula 13 (16/maio/2023)

## Introdução

O Stewart explica o truque da mudança de variável na integral usando *variáveis dependentes* e *diferenciais*. Por exemplo, se  $x$  é a variável independente,  $u$  é a variável dependente, e a relação entre elas é  $u = g(x) = 2x$ , então temos

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}2x = 2$$

e:

$$\int \underbrace{\sin\left(\underbrace{2x}_u\right)}_u \underbrace{2}_{\frac{du}{dx}} dx = \int \sin(u) du$$

Dê uma olhada:

[StewPtCap1p5](#) (p.10) variável dependente

[StewPtCap3p75](#) (p.228) Diferenciais

[StewPtCap5p39](#) (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas

[StewPtCap5p48](#) (p.369) 5.5 A Regra da Substituição

Só que contas com variáveis dependentes e diferenciais são difíceis de justificar formalmente! A gente viu como expandir contas curtas em que certos passos têm justificativas complicadas em contas maiores mas em que cada passo tem uma justificativa bem simples... se a gente tenta fazer isso com a igualdade entre integrais acima a gente acaba descobrindo que as regras pra variáveis dependentes e diferenciais são bem complicadas.

Então eu vou fazer o seguinte. A regra da mudança de variável na integral definida, que o Stewart explica nesta página,

[StewPtCap5p51](#) (p.372) ...para as integrais definidas é bem fácil de demonstrar usando só o [\[TFC2\]](#).

Eu vou usar estas quatro definições aqui – onde [\[MVD\]](#) é a fórmula pra mudança de variável na integral definida, [\[MVI\]](#) é a fórmula pra mudança de variável na integral indefinida, [\[MVD4\]](#) é uma demonstração da [\[MVD\]](#) com 4 igualdades [\[MVI3\]](#) é uma demonstração da [\[MVI\]](#) com 3 igualdades,

$$\begin{aligned} \text{[MVD]} &= \left( \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \right) \\ \text{[MVI]} &= \left( \int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right) \\ \text{[MVD4]} &= \left( \begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx &= F(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= F(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{aligned} \right) \\ \text{[MVI3]} &= \left( \begin{aligned} \int f(g(x))g'(x) dx &= F(g(x)) \\ &= F(u) \\ &= \int f(u) du \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

e a gente vai ver que dá pra tratar algumas destas fórmulas e demonstrações como abreviações pras outras, e que dá pra expandir as versões mais abreviadas em outras em que os passos são mais fáceis de justificar.

## Um exemplo

Isto aqui é um exemplo de como contas com mudança de variável costumam ser feitas na prática:

$$\begin{aligned}
 & \int 2 \cos(3x + 4) dx \\
 &= \int 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 &= \frac{2}{3} \int \cos u du \\
 &= \frac{2}{3} \operatorname{sen} u \\
 &= \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x + 4)
 \end{aligned}$$

É necessário indicar em algum lugar que a relação entre a variável nova e a antiga é esta:  $u = 3x + 4$ .

Compare as contas acima, que não têm nem os limites de integração nem as barras de diferença, com as da coluna da direita:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=a}^{x=b} 2 \cos(3x + 4) dx \\
 &= \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 &= \frac{2}{3} \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} \cos u du \\
 &= \frac{2}{3} \left( (\operatorname{sen} u) \Big|_{u=3a+4}^{u=3b+4} \right) \\
 &= \frac{2}{3} \left( (\operatorname{sen}(3x + 4)) \Big|_{x=a}^{x=b} \right)
 \end{aligned}$$

Nós vamos tratar a versão à esquerda como uma abreviação pra versão da direita. Note que pra ir da versão “completa” pra “abreviada” é super fácil, é só apagar os limites de integração e as barras de diferença – mas pra ir da versão “abreviada” pra “completa” a gente precisa reconstruir os limites de integração e as barras de diferença, o que é bem mais difícil.

## Caixinhas de anotações

O meu truque preferido pra não me enrolar nas contas de uma mudança de variável é fazer uma caixinha de anotações como essa aqui,

$$\left[ \begin{array}{l} u = 3x + 4 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x + 4) = 3 \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ du = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} du \end{array} \right]$$

na qual: a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova – que nesse exemplo é  $u = 3x + 4$ , b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras como:

$$dx = 42 du$$

Durante quase todo o curso de C2 a gente vai tratar esse tipo de coisa como uma igualdade entre expressões incompletas – mais ou menos como se a gente estivesse dizendo isso aqui:

$$+20) = /99]$$

Na caixinha à esquerda eu colori as linhas que são gambiarras em vermelho.

Repare que se a gente soubesse usar diferenciais a gente saberia dar um sentido pras igualdades que envolvem diferenciais, e que eu marquei em vermelho... mas a gente não sabe, então a gente vai considerar que elas são gambiarras que a gente só vai entender direito em Cálculo 3.

Aqui tem um exemplo grande:

**2fT112** (C2-P1, p.5) Questão 1: gabarito

## Os detalhes horríveis

Nesta página aqui – [Miranda193](#) – o Miranda diz “Não podemos calcular uma integral que possui tanto um  $x$  e um  $u$  nela”, mas ele não explica porquê... se em

$$\int_{x=a}^{x=b} 2 \cos(u) dx$$

esse  $u$  fosse uma abreviação para  $3x + 4$  essa integral acima seria equivalente à do início do slide anterior, né?... =(

Neste slide eu vou tentar contar o que eu sei sobre como o método da substituição funciona – *pra convencer vocês de que não vale a pena vocês tentarem entender os detalhes agora.*

Toda mudança de variável numa integral definida é consequência da igualdade (13) do slide “Contas (2)”. Por exemplo, compare:

$$\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} g(h(x))h'(x) dx &= \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g(u) du \\ \int_{x=a}^{x=b} 2 \cos(3x+4) dx &= \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} du \end{aligned}$$

A gente pode tentar descobrir qual é a substituição certa passo a passo, começando pelas funções mais simples.... eu faria assim: olhando pra parte direita eu chuto que  $g(u) = 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3}$ ; olhando pra parte esquerda eu chuto que  $h(x) = 3x + 4$ , e daí  $h'(x) = 3$ ; aí eu testo esta substituição aqui,

$$(13) \begin{bmatrix} g(u) := 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} \\ h(x) := 3x + 4 \\ h'(x) := 3 \end{bmatrix}$$

e vejo que o resultado dela é *equivalente* (mas não igual!!!) à última igualdade da coluna da esquerda – não preciso nem substituir o  $a$  e o  $b$ .

**Preciso reescrever este slide!**

## Os detalhes horríveis (2)

Estas contas aqui,

$$\begin{aligned} u &= x^4 \\ \frac{du}{dx} &= 4x^3 \\ du &= \frac{du}{dx} dx \\ &= 4x^3 dx \end{aligned}$$

fazem sentido se a gente considerar que:

1.  $x$  é uma variável independente,
2.  $u$  é uma variável dependente, com  $u = u(x) = x^4$ ,
3.  $dx$  é uma variável independente,
4.  $du$  é uma variável dependente, com  $du = \frac{du}{dx} dx$ ,
5. estas regras sobre diferenciais valem: [Leit4p61](#) (p.275),
6. estas regras sobre variáveis dependentes valem: [Stew14p53](#) (p.951),
7. o  $dx$  num  $\int f(x) dx$  funciona como uma diferencial.

Eu já perguntei pra vários matemáticos fodões que eu conheço – incluindo os desenvolvedores do Maxima, na mailing list – onde eu posso encontrar alguma formalização das regras de como lidar com variáveis dependentes, diferenciais e mudança de variável na integral indefinida, e todos eles me responderam a mesma coisa: “*não faço a menor idéia! Eu sei algumas das regras mas não todas, e não sei onde você pode procurar...*” =(

Moral: é melhor a gente tratar o  $du = 4x^3 dx$  como uma gambiarra...

## Caixinhas com mais anotações

$$\begin{aligned}
 \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^7 d\theta &= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^6 \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 ((\cos \theta)^2)^3 \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (1 - (\operatorname{sen} \theta)^2)^3 \cos \theta d\theta \\
 &= \int s^4 (1 - s^2)^3 ds
 \end{aligned}
 \left[ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \theta = s \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \operatorname{sen} \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ \cos \theta d\theta = ds \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^7 d\theta &= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^6 \cos \theta d\theta \\
 &= \int s^4 (1 - s^2)^3 ds
 \end{aligned}
 \left[ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \theta = s \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \operatorname{sen} \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ \cos \theta d\theta = ds \\ (\cos \theta)^2 = 1 - (\operatorname{sen} \theta)^2 \\ (\cos \theta)^2 = 1 - s^2 \\ (\cos \theta)^6 = (1 - s^2)^3 \end{array} \right]$$

## Caixinhas com mais anotações (2)

$$\begin{aligned}
 \int s\sqrt{1-s^2} ds &= \int (\text{sen } \theta)\sqrt{1-(\text{sen } \theta)^2} \cos \theta d\theta && \left[ \begin{array}{l} s = \text{sen } \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \text{sen } \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \end{array} \right] \\
 &= \int (\text{sen } \theta)\sqrt{(\cos \theta)^2} \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\text{sen } \theta)(\cos \theta) \cos \theta d\theta \\
 &= \int (\text{sen } \theta)(\cos \theta)^2 d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int s\sqrt{1-s^2} ds &= \int (\text{sen } \theta)(\cos \theta) \cos \theta d\theta && \left[ \begin{array}{l} s = \text{sen } \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \text{sen } \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ s^2 = (\text{sen } \theta)^2 \\ 1 - s^2 = 1 - (\text{sen } \theta)^2 \\ 1 - s^2 = (\cos \theta)^2 \\ \sqrt{1-s^2} = \cos \theta \\ \arcsen s = \arcsen \text{sen } \theta \\ \arcsen s = \theta \\ \theta = \arcsen s \end{array} \right] \\
 &= \int (\text{sen } \theta)(\cos \theta)^2 d\theta \\
 \\ \\
 \int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds &= \int \frac{1}{\cos \theta} \cos \theta d\theta \\
 &= \int 1 d\theta \\
 &= \theta \\
 &= \arcsen s
 \end{aligned}$$

## Caso particular 1 (MVD)

$$[\text{MVD}] \quad = \left( \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left( \int_{x=a}^{x=b} f(2x) \cdot 2 dx = \int_{u=2a}^{u=2b} f(u) du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left( \int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = \int_{u=2a}^{u=2b} \text{sen } u du \right)$$

$$[\text{MVD4}] \quad = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(g(b)) - F(g(a)) \\ = F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f(2x) \cdot 2 dx = F(2x)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(2b) - F(2a) \\ = F(u)\Big|_{u=2a}^{u=2b} \\ = \int_{u=2a}^{u=2b} f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = F(2x)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(2b) - F(2a) \\ = F(u)\Big|_{u=2a}^{u=2b} \\ = \int_{u=2a}^{u=2b} \text{sen } u du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = (-\cos 2x)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = (-\cos 2b) - (-\cos 2a) \\ = (-\cos u)\Big|_{u=2a}^{u=2b} \\ = \int_{u=2a}^{u=2b} \text{sen } u du \end{array} \right)$$

## Caso particular 1 (MVI)

$$[\text{MVI}] \quad = \left( \int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left( \int f(2x) \cdot 2 dx = \int f(u) du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left( \int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = \int \text{sen } u du \right)$$

$$[\text{MVI3}] \quad = \left( \begin{array}{l} \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \\ \phantom{\int f(g(x))g'(x) dx} = F(u) \\ \phantom{\int f(g(x))g'(x) dx} = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int f(2x) \cdot 2 dx = F(2x) \\ \phantom{\int f(2x) \cdot 2 dx} = F(u) \\ \phantom{\int f(2x) \cdot 2 dx} = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = F(2x) \\ \phantom{\int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx} = F(u) \\ \phantom{\int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx} = \int \text{sen } u du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \text{sen } u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx = (-\cos 2x) \\ \phantom{\int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx} = (-\cos u) \\ \phantom{\int \text{sen}(2x) \cdot 2 dx} = \int \text{sen } u du \end{array} \right)$$

## Caso particular 2 (MVD)

$$[\text{MVD}] \quad = \left( \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left( \int_{x=a}^{x=b} f(x^2) \cdot 2x dx = \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u) du \right)$$

$$[\text{MVD}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left( \int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = \int_{u=a^2}^{u=b^2} \text{sen } u du \right)$$

$$[\text{MVD4}] \quad = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx = F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(g(b)) - F(g(a)) \\ = F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f(x^2) \cdot 2x dx = F(x^2)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(b^2) - F(a^2) \\ = F(u)\Big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ = \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = F(x^2)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = F(b^2) - F(a^2) \\ = F(u)\Big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ = \int_{u=a^2}^{u=b^2} \text{sen } u du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = (-\cos x^2)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ = (-\cos b^2) - (-\cos a^2) \\ = (-\cos u)\Big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ = \int_{u=a^2}^{u=b^2} \text{sen } u du \end{array} \right)$$

## Caso particular 2 (MVI)

$$[\text{MVI}] \quad = \left( \int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left( \int f(x^2) \cdot 2x dx = \int f(u) du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left( \int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = \int \text{sen } u du \right)$$

$$[\text{MVI3}] \quad = \left( \begin{array}{l} \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \\ \phantom{\int f(g(x))g'(x) dx} = F(u) \\ \phantom{\int f(g(x))g'(x) dx} = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int f(x^2) \cdot 2x dx = F(x^2) \\ \phantom{\int f(x^2) \cdot 2x dx} = F(u) \\ \phantom{\int f(x^2) \cdot 2x dx} = \int f(u) du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = F(x^2) \\ \phantom{\int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx} = F(u) \\ \phantom{\int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx} = \int \text{sen } u du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \text{sen } u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{l} \int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx = (-\cos x^2) \\ \phantom{\int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx} = (-\cos u) \\ \phantom{\int \text{sen}(x^2) \cdot 2x dx} = \int \text{sen } u du \end{array} \right)$$

### Caso particular 3 (MVI)

$$[\text{MVI}] \quad = \left( \int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := \text{sen } x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left( \int f(\text{sen } x) \cos x dx = \int f(u) du \right)$$

$$[\text{MVI}] \begin{bmatrix} g(x) := \text{sen } x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} = \left( \int (\text{sen } x)^3(1 - (\text{sen } x)^2)^2 \cos x dx = \int u^2(1-u^2)^2 du \right)$$

$$[\text{MVI3}] \quad = \begin{pmatrix} \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \\ = F(u) \\ = \int f(u) du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := \text{sen } x \\ g'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int f(\text{sen } x) \cos x dx = F(\text{sen } x) \\ = F(u) \\ = \int f(u) du \end{pmatrix}$$

$$[\text{MVI3}] \begin{bmatrix} g(x) := \text{sen } x \\ g'(x) := \cos x \\ f(u) := u^2(1-u^2)^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \int (\text{sen } x)^3(1 - (\text{sen } x)^2)^2 \cos x dx = F(\text{sen } x) \\ = F(u) \\ = \int u^2(1-u^2)^2 du \end{pmatrix}$$

## O macaco, de novo

Estas duas igualdades são falsas

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - (\operatorname{sen} \theta)^2} &= \cos \theta \\ \operatorname{arcsen} \operatorname{sen} \theta &= \theta\end{aligned}$$

quando  $\theta = \pi \dots$  confira!

Mas elas são verdadeiras para  $\theta = 0$ , e para todo  $\theta$  num certo intervalo em torno do 0 que eu não quero contar qual é.

Lembre quem em Cálculo 2 a gente vai primeiro fazer as contas como o macaco que faz todas as contas como se tudo funcionasse, e a gente vai deixar pra checar os detalhes, como se  $\theta$  estivesse no intervalo certo, só no final, depois de termos feito as contas todas.

O Leithold é super cuidadoso nas contas e nesses detalhes como os domínios das funções e o intervalo onde mora o  $\theta$ , mas a maioria dos outros livros de Cálculo 2 que eu conheço não são – eles são meio porcalhões com esses detalhes... e a gente também vai ser, senão não vai dar tempo de cobrir o suficiente da matéria.

## O truque dos intervalos

Dê uma olhada nas primeiras páginas daqui:

**Leit5p3** 5.1. Antidiferenciação

O Leithold usa expressões como “num intervalo  $I$ ”, “para todo  $x \in I$ ” e “definidas no mesmo intervalo” um montão de vezes. O truque de usar sempre intervalos resolve esse esse problema daqui super bem:

**2fT24** Meme: expanding brain, versão ln

A minha definição preferida pra integral indefinida,

**2fT23** Outra definição pra integral indefinida

também resolve o problema – de um modo bem mais simples, e que é suficiente pro tipo de conta que a gente tem que treinar em Cálculo 2.

## MVI

A nossa fórmula pra mudança de variável na integral indefinida vai ser esta aqui:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du = \left( \int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right)$$

Dá pra demonstrar ela deste jeito,

$$\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) = f(u) = \int f'(u) du$$

onde a primeira e a terceira igualdades são consequências do , e a igualdade do meio só vale se tivermos  $u = g(x)$ .

Os livros demonstram a  $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$  de um jeitos que eu nunca achei muito convincentes – ou fingindo que tudo é óbvio, ou “derivando tudo em  $x$ ”. As contas abaixo me ajudaram a entender o que acontece quando a gente “deriva tudo em  $x$ ”:

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \left( \int \underbrace{f'(g(x))g'(x)} \right)}_{f'(g(x))g'(x)} = \underbrace{\frac{d}{dx} f(g(x))}_{f'(g(x))g'(x)} = \frac{d}{dx} \underbrace{f(u)}_{f'(g(x))g'(x)} = \frac{d}{dx} \underbrace{\int \underbrace{f'(u)}_{f(u)} du}_{f(g(x))}_{f'(g(x))g'(x)}$$

## Simplificando raízes quadradas

Na aula de 16/maio/2023 você aprendeu – na prática, não vendo uma definição formal – o que é transformar uma integral mais difícil numa integral mais fácil, que nós sabemos integrar...

a) Digamos que você sabe integrar  $\int \sqrt{1-s^2} ds$ . Transforme  $\int \sqrt{1-(5x)^2} dx$  em algo que você sabe integrar.

b) Transforme  $\int \sqrt{1-(ax)^2} dx$  em algo que você sabe integrar.

c) Digamos que você sabe integrar  $\int \sqrt{1-s^{2k}} ds$  para qualquer valor de  $k$ .

Transforme  $\int \sqrt{1-(5x)^2}^{42} dx$  em algo que você sabe integrar.

d) Transforme  $\int \sqrt{1-(ax)^2}^{42} dx$  em algo que você sabe integrar.

e) Transforme  $\int \sqrt{1-(ax)^2}^k dx$  em algo que você sabe integrar.

f) Transforme  $\int \sqrt{1-(ax)^2}^k dx$  em algo que você sabe integrar.

g) Entenda este truque aqui:

$$\begin{aligned}\sqrt{3^2-x^2} &= \sqrt{3^2-3^2\frac{1}{3^2}x^2} \\ &= \sqrt{3^2-3^2\left(\frac{x}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{3^2\left(1-\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)} \\ &= \sqrt{3^2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2} \\ &= 3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}\end{aligned}$$

Use ele – com adaptações, óbvio – pra transformar  $\int \sqrt{25-x^2} dx$  em algo que você sabe integrar.

h) Use ele pra transformar  $\int \sqrt{25-x^2}^{42} dx$  em algo que você sabe integrar.

i) Use ele pra transformar  $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$  em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar  $\int \sqrt{a^2-x^2}^k dx$  em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar  $\int x^{20}\sqrt{a^2-x^2}^k dx$  em algo que você sabe integrar.

## Exercício 3

Slogan:

*Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável pode ser resolvida por uma mudança de variável só.*

Durante a quarentena eu dei algumas questões de prova sobre este slogan. Dê uma olhada:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4>

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=9>

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-P1.pdf#page=15>

a) Resolva a integral abaixo usando uma mudança de variável só (dica:  $u = g(h(x))$ ):

$$\int f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x) dx = ?$$

b) Resolva a integral acima usando duas mudanças de variável. Dica: comece com  $u = h(x)$ .

O Miranda e o Leithold preferem fazer em um passo só certas mudanças de variáveis que eu prefiro fazer em dois ou três passos. Entenda o exemplo 8.1 do Miranda – o da seção 8.4, na página 264...

<http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#263>

c) ...e descubra como resolver a integral dele fazendo duas mudanças de variáveis ao invés de uma só. A segunda mudança de variável vai ser  $s = \sin \theta$ , e a primeira eu prefiro não contar qual é – tente usar as idéias do exercício 1 pra descobrir qual ela tem que ser.

Ainda não atualizei este slide!

# Cálculo 2 - 2024.1

Aula 18: dicas pra greve

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

# Cálculo 2 - 2024.1

Dicas pra P1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

[2hT178](#) (2023.2) Dicas pra P1

[2hT186](#) (2023.2) P1

[2gT107](#) (2023.1) Dicas pra P1

[2gT109](#) (2023.1) P1

[2fT106](#) (2022.2) Dicas pra P1

[2fT108](#) (2022.2) P1

## Sobre as questões

A P1 vai ter uma questão sobre integração por partes que vai valer 2 pontos – só que ela vai ser principalmente sobre “complete as justificativas”. Você pode se preparar pra ela fazendo os exercícios daqui:

2iT81 Aulas 10 e 11: integração por partes

## Mais dicas

Leia todos os slides da introdução ao curso:

2:22 Aula 0: introdução ao curso

Nas provas de Cálculo 2 a gente corrige o que você escreveu, não o que você pensou. Nas matérias de matemática mais básicas você pode vir na vista de prova, mostrar que você pensou a coisa certa, e ganhar um monte de pontos com isso – mas em Cálculo 2 não dá pra fazer isso, porque um dos objetivos principais de Cálculo 2 é fazer as pessoas aprenderem a escrever e forçar as pessoas a treinarem jeitos de escrever...

Releia a Dica 7!!!

Alguns erros de sintaxe são considerados graves – como por exemplo escrever “ $\int_{x=2}^{x=3}$ ” ou “ $\int_{x=2}^{x=3} \cos x$ ” ao invés de “ $\int_{x=2}^{x=3} \cos x dx$ ”. Tratar essas abreviações informais como erros graves é um truque pra forçar as pessoas a aprenderem os jeitos certos de definir abreviações.

Por enquanto vocês estão começando a aprender a definir funções e conjuntos, e muitas pessoas já estão tendo uma dificuldade enorme pra escrever os “sejas” e pra nomear as funções e conjuntos; o jeito certo de definir abreviações envolve dificuldades conceituais ainda maiores, que a gente vai ver depois.

Os livros usam “ $\int_2^3 \cos x dx$ ” ao invés de “ $\int_{x=2}^{x=3} \cos x dx$ ” – e você pode usar isso também.

Não escrever os sinais de ‘=’ é um erro **GRAVÍSSIMO** que pode fazer você tirar **ZERO** na questão. Isso é porque eu vou interpretar cada ‘=’ como uma afirmação e analisar cada afirmação que você fez pra ver se ela faz sentido e se os detalhes dela estão certos, e se você não escrever os ‘=’s eu não consigo apontar pra afirmações que eu vou analisar... e aí fica muito mais difícil corrigir a questão e muitíssimo mais difícil discutir ela na vista de prova. *Releia a Dica 3!*

Alguns ‘=’s não são afirmações, são coisas como “queremos que”, “vamos testar se”. *Comece a treinar usar essas partículas em português, elas vão ser importantíssimas na P2!*

Usar ‘→’ ou ‘⇒’ **ao invés de ‘=’** é um erro grave mas não gravíssimo. Isso é porque eu sei que regras usar pra julgar se um ‘=’ está certo e se ele é fácil de justificar, mas eu não sei quais são as regras que os ‘→’s e ‘⇒’s devem obedecer... e eu nem sei onde encontrar livros e vídeos que usem ‘→’ e ‘⇒’ ao invés de ‘=’. *Se você conhecer algum me mande o link!*

## Trabalho?

As pessoas sempre me perguntam se eu não posso dar um trabalho valendo pontos extras... a resposta era sempre “não”, mas dessa vez eu vou dar uma “prova relâmpago” com duração de 10 minutos que *pode* valer um ponto extra na P1 pra quem quiser fazer ela. É a primeira vez que eu vou fazer isso, e a explicação abaixo ainda está bem incompleta...

Vários dos PDFzinhos que nós usamos até agora têm algumas páginas de código em Maxima no final, como estas aqui:

2iT9 Strang, p.1

2iT97 Leithold, p.302

Até o dia da prova relâmpago vocês vão ter acesso a mais um monte de exemplos em Maxima nesse formato com os inputs em azul e os outputs em vermelho, e ao código fonte deles em formato “anotações executáveis”, que tem esta cara aqui:

<http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#strang-p1>

[http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#](http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#leithold-pt-p302)

[leithold-pt-p302](http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#leithold-pt-p302)

Cada pessoa que decidir fazer a prova relâmpago vai receber questões diferentes que podem ser resolvidas com o Maxima, e que eu vou escolher dentre as que eu pus nos PDFzinhos.

Por exemplo, a pessoa pode receber questões como estas,

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int \cos(2x) \cdot 2 \, dx = ? \\ \text{b) } & \int \cos(2x) \cdot 2 \, dx = ? \quad \left[ \begin{array}{l} u = 2x \\ du = 2 \, dx \end{array} \right] \end{aligned}$$

e ela vai ter 10 minutos – no meu laptop, *sem internet*, mas podendo usar folhas que ela trouxe de casa e um arquivo de anotações que ela tenha mandado, pra escrever o código em Maxima que resolve essas questões.

O código em Maxima que resolve os dois itens acima é:

```
(%i1) f : cos(2*x)*2;
(%o1)
2 cos(2x)

(%i2) F : 'integrate(f, x);
(%o2)
2 ∫ cos(2x) dx

(%i3) integrate(f, x);
(%o3)
sin(2x)

(%i4) changevar(F, u=2*x, u, x);
(%o4)
∫ cos u du

(%i5)
```

## Trabalho? (2)

Se a pessoa acertar pelo menos um item ela ganha pontos extras na P1, até no máximo um ponto – e se a pessoa não acertar nada ela perde 0.1 pontos na nota da P1.

# Cálculo 2 - 2024.1

Aulas 19 até 22: Somas de Riemann

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

Umás figuras (minhas) que mostram como definir a integral como dois limites:

[2eT95](#) A integral como limite

Alguns slides da introdução ao curso:

[2iT19](#) Atirei o Pau no Gato

[2iT20](#) Imagens de intervalos

[StewPtCap5p8](#) (p.329) somas superiores e inferiores

[StewPtCap5p10](#) (p.331) pontos amostrais

[StewPtCap5p10](#) (p.331) notação de somatório

[StewPtCap5p16](#) (p.337) definição da integral definida

[Miranda207](#) 7.1 Áreas e somas de Riemann

[Miranda212](#) 7.2 Integral definida

[Miranda213](#) marcas;  $C = \{x_i^*\}$

[Miranda217](#) 7.3. Definição 3: soma superior e inferior

[Leit5p35](#) (p.313) Definição 5.4.1:  $\sum$

[Leit5p35](#) (p.318) Figura 3

[Leit5p36](#) (p.319) Figura 4

[Leit5p41](#) (p.324) 5.5. A integral definida

Livro de Análise do Ross:

[RossAp16](#) (p.269) The Riemann Integral

[2hT12](#) Imagens de intervalos: o Daniel leva um ano

[2iQ51](#) Quadros da aula 19 (2a, 01/jul/2024)

## Spoiler: descontinuidades

Digamos que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função qualquer.

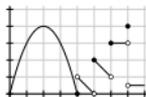
Vamos definir o conjunto dos pontos de descontinuidade da  $f$ , ou, pra abreviar, o “conjunto das descontinuidades da  $f$ ”, assim:

$$\text{desc}(f) = \{ x \in [a, b] \mid f \text{ é descontinua em } x \}$$

A expressão “ $f$  tem um número finito de pontos de descontinuidade”, que eu vou abreviar pra “ $f$  tem finitas descontinuidades” apesar disso soar bem estranho em português, vai querer dizer:

$\text{desc}(f)$  é um conjunto finito

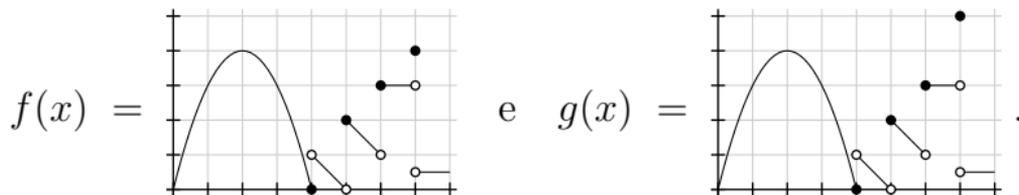
O conjunto vazio é finito, então toda  $f$  contínua “tem finitas descontinuidades”. Essa função aqui tem finitas descontinuidades:



A função de Dirichlet, que nós vimos aqui, [2dT104](#) (2021.2) A função de Dirichlet tem infinitas descontinuidades.

## Spoiler: descontinuidades (2)

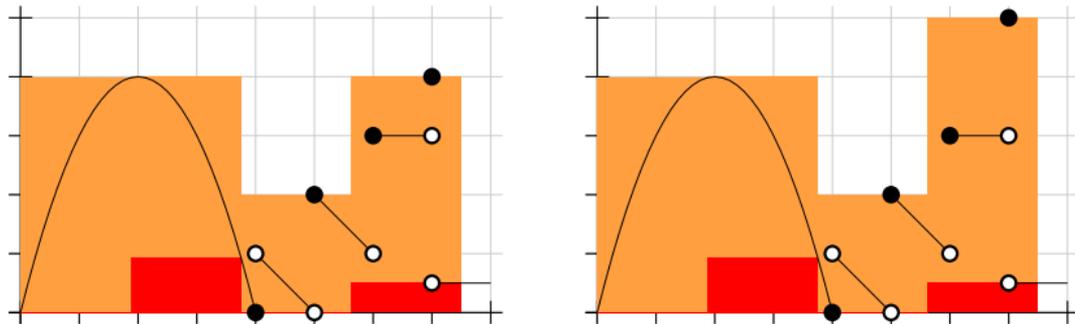
Sejam

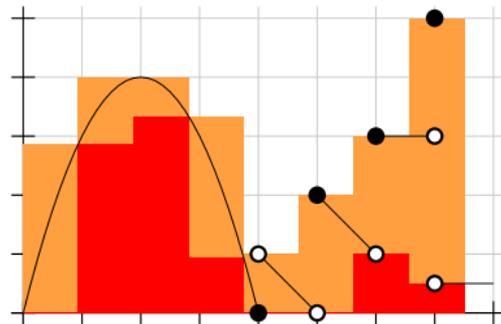
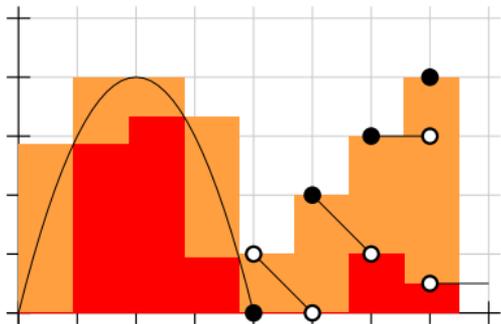


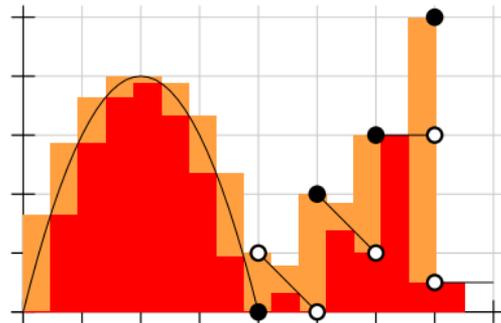
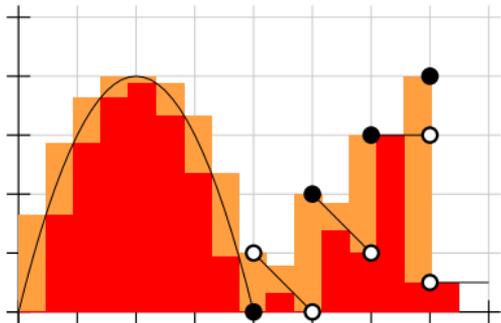
As figuras dos próximos slides mostram

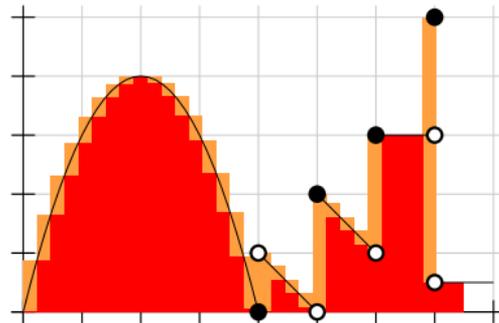
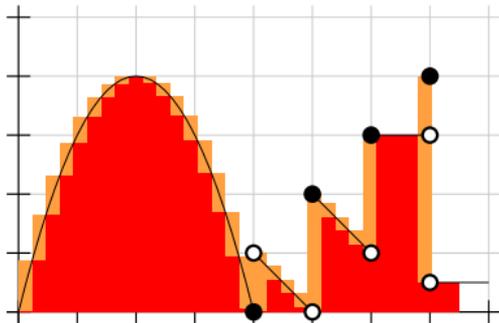
$$\overline{\int}_{[0,7.5]_{2k}} f(x) dx \quad \text{e} \quad \overline{\int}_{[0,7.5]_{2k}} g(x) dx$$

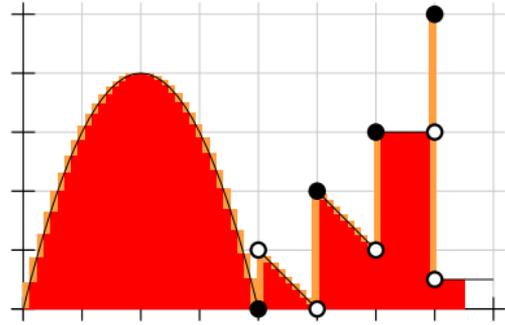
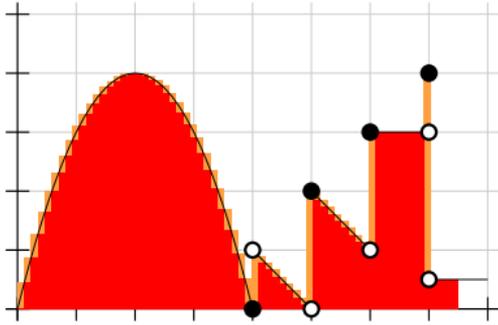
para vários valores de  $k$ . Use-as pra entender porque “na integral as descontinuidades não importam” — se só tivermos um número finito de descontinuidades.

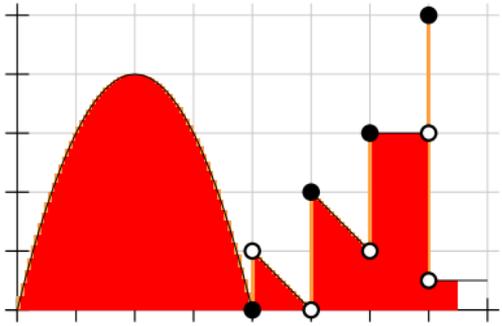
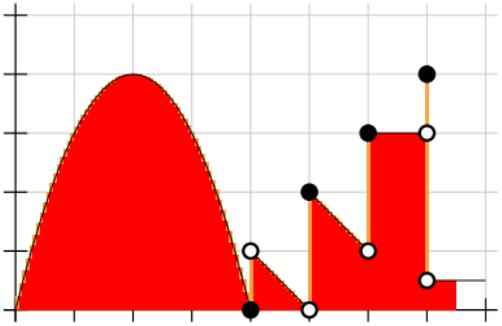












## Montanhas

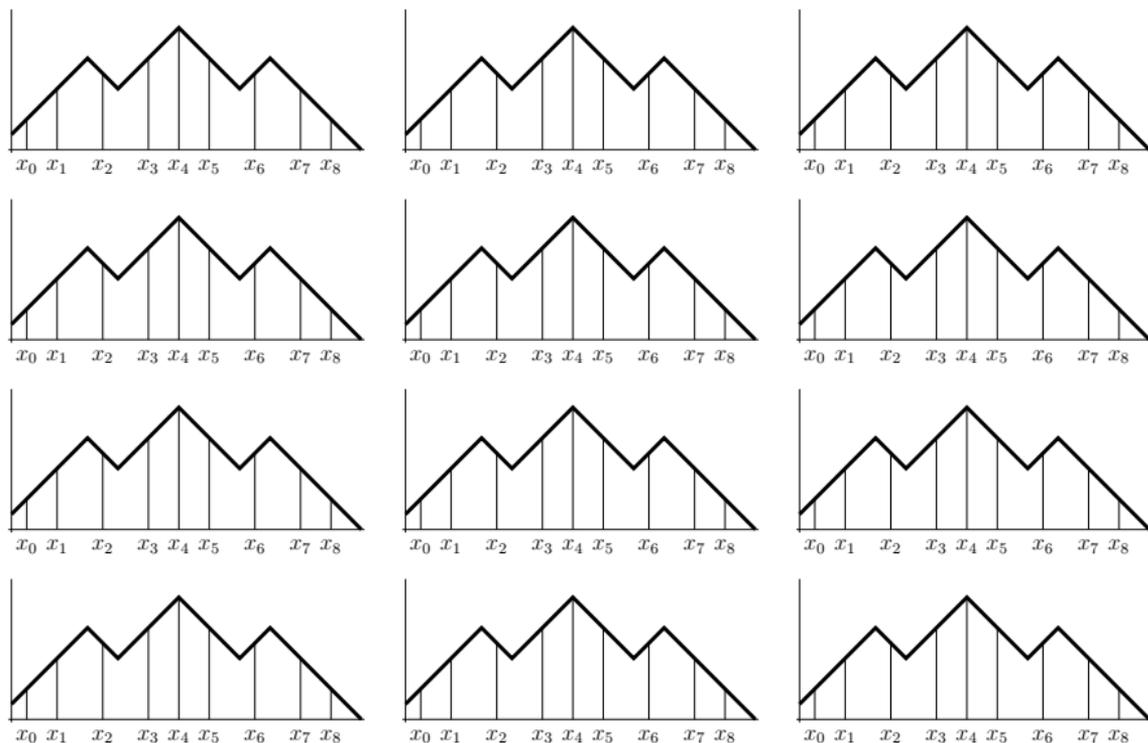
Seja  $f(x)$  a função da próxima página – “as montanhas”.  
 Você vai receber (pelo menos) uma cópia dessa página.  
 Faça cada item abaixo em um dos 12 gráficos da  $f(x)$ .

Represente graficamente cada um dos somatórios abaixo.  
 Se você tiver dificuldade com algum desses somatórios  
 faça ele em vários passos, como nestes slides:

2fT65 Somatórios

2gT85 Partições, informalmente

- $\sum_{i=1}^8 f(x_i)(x_i - x_{i-1})$
- $\sum_{i=1}^8 f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$
- $\sum_{i=1}^8 \max(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
- $\sum_{i=1}^8 \min(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
- $\sum_{i=1}^8 f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1})$
- $\sum_{i=1}^8 \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1})$



## Miranda: somas inferiores e superiores

Nas páginas 217 e 218 o Miranda define as notações  $I(f, P)$  e  $S(f, P)$ , e lá no meio dessas definições ele define

$$\min_{x \in I} f(x) \quad \text{e} \quad \max_{x \in I} f(x)$$

usando o truque do “vire-se”: ele mostra uma figura e o leitor tem que se virar pra entender o que essas notações querem dizer... veja: [Miranda217](#) (Definição 3)

### Mais itens pra fazer na figura das montanhas

a) Entenda o que essas notações do Miranda querem dizer e verifique que na figura das montanhas temos:

$$\max(f(x_1), f(x_2)) < \max_{x \in [x_1, x_2]} f(x)$$

$$\min_{x \in [x_2, x_3]} f(x) < \min(f(x_2), f(x_3))$$

e depois represente nas montanhas:

- b)  $\sum_{i=1}^8 (\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$   
 c)  $\sum_{i=1}^8 (\min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$

## Partições, informalmente

Informalmente uma partição de um intervalo  $[a, b]$  é um modo de decompor  $[a, b]$  em intervalos menores consecutivos. Por exemplo,

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

A definição “certa” é mais complicada... vamos vê-la daqui a pouco. O caso geral da igualdade acima é:

$$[a, b] = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \dots \cup [a_N, b_N],$$

onde:

$N$  é o número de intervalos,

$a = a_1, b = b_N$ , (“extremidades”)

$a_i < b_i$  para todo  $i$  em que isto faz sentido ( $i = 1, \dots, N$ )

$b_i = a_{i+1}$  para todo  $i$  e.q.i.f.s.; neste caso,  $i = 1, \dots, N - 1$

Um jeito prático de definir uma partição é usando uma tabela. Por exemplo, esta tabela

$i$	$a_i$	$b_i$	$I_i$
1	2	3.5	$[2, 3.5]$
2	3.5	4	$[3.5, 4]$
3	4	6	$[4, 6]$
4	6	7	$[6, 7]$

corresponde à partição de  $[2, 7]$  do início deste slide.

Compare com:

[Miranda212 7.2 Integral definida](#)

[Leit5p41 \(p.324\) 5.5 A integral definida](#)

[StewPtCap5p8 \(p.329\) somas superiores e inferiores](#)

[StewPtCap5p10 \(p.331\) pontos amostrais](#)

[StewPtCap5p16 \(p.337\) definição da integral definida](#)

Uma definição um pouco melhor de partição é a seguinte.

Digamos que  $P$  seja um subconjunto não-vazio e finito de  $\mathbb{R}$ , e que o menor elemento de  $P$  seja  $a$  e o maior seja  $b$ .

Então  $P$  é uma partição do intervalo  $[a, b]$ .

Exemplo: a partição  $P = \{2, 3.5, 4, 6, 7\}$  corresponde a:

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

Pra fazer a tradução da “versão conjunto” pra “versão tabela” ponha os elementos de  $P$  em ordem e chame-os de  $b_0, \dots, b_N$ ; defina cada  $a_i$  como sendo  $b_{i-1}$  – por exemplo,  $a_1 = b_0$  – e encontre  $a, b$ , e  $N$ . Depois que você tem a “versão tabela” é bem fácil obter a “versão união de intervalos”.

Quando dizemos algo como “Seja  $P$  a partição  $\{2.5, 4, 6\}$ ” estamos criando um contexto no qual há uma partição “default” definida... e neste contexto vamos ter valores definidos para  $N, a, b$ , e para cada  $a_i$  e  $b_i$ . Por exemplo...

Seja  $P$  a partição  $\{2.5, 4, 6\}$ . Então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N f(b_i) \cdot (b_i - a_i) &= \sum_{i=1}^2 f(b_i) \cdot (b_i - a_i) \\ &= f(b_1) \cdot (b_1 - a_1) \\ &\quad + f(b_2) \cdot (b_2 - a_2) \\ &= f(4) \cdot (4 - 2.5) \\ &\quad + f(6) \cdot (6 - 4) \end{aligned}$$

## A definição de partição

Se  $P$  é um subconjunto **finito** e **não-vazio** de  $\mathbb{R}$ , então podemos interpretar  $P$  como uma partição...

Por exemplo, se  $P = \{20, 20, 42, 99, 63, 33, 20, 20\}$  então  $P = \{20, 33, 42, 63, 99, 200\}$ , e aí vamos interpretar esse conjunto de 6 pontos – ordenados em ordem crescente – como uma partição do intervalo  $I = [a, b] = [20, 200]$  em 5 subintervalos (“ $N = 5$ ”), assim:

20	33	42	63	99	200	
$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$a_1$	$b_1$					$I_1 = [a_1, b_1]$
	$a_2$	$b_2$				$I_2 = [a_2, b_2]$
		$a_3$	$b_3$			$I_3 = [a_3, b_3]$
			$a_4$	$b_4$		$I_4 = [a_4, b_4]$
				$a_5$	$b_5$	$I_5 = [a_5, b_5]$
$a$					$b$	$I = [a, b] = [x_0, x_N]$

## Exercícios sobre partições

a) Converta esta “partição”

$$[4, 12] = [4, 5] \cup [5, 6] \cup [6, 9] \cup [9, 10] \cup [10, 12]$$

para uma tabela. Neste caso quem são  $a$ ,  $b$  e  $N$ ?

b) Seja  $P = \{2.5, 3, 4, 6, 10\}$ .

Converta  $P$  para o “formato tabela” e para o “formato união de subintervalos”, que é este aqui:

$$[a, b] = [a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_N, b_N].$$

c) Seja  $P = \{4, 2, 1, 1.5\}$ .

Interprete  $P$  como uma partição. Diga quem são o  $N$ , o  $a$  e o  $b$  dela e monte a tabela dos subintervalos dela.

d) Seja  $P = [2, 4]_6$ .

Diga quem são os pontos da partição  $P$ .

e) Seja  $P = [2, 5]_{23}$ .

Diga quem são os pontos da partição  $P$ .

### Uma dica sobre simplificação

No Ensino Médio às vezes convencem a gente de que uma fração como  $\frac{6}{4}$  **tem** que ser simplificada pra  $\frac{3}{2}$ , mas se a gente tem que listar uma sequência de números começando em 0 em que cada número novo é o anterior mais  $\frac{1}{4}$  eu acho bem melhor escrever essa sequência como

$$0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \dots$$

do que como:

$$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \dots$$

Lembre destes trechos da Dica 7: **2gT4**

“Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar”, e “Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal”.

## Aviso

As próximas páginas têm definições precisas de: partição, inf e sup, [inf] e [sup], integral definida, e um monte de definições intermediárias que a gente vai precisar pra entender as definições mais importantes...

*O objetivo desta parte do curso é fazer vocês aprenderem um monte de técnicas pra entenderem definições complicadas “visualizando o que elas querem dizer”. Estas técnicas vão ser uma das partes do curso que vão ser mais úteis pras matérias seguintes.*

Aparentemente cada um dos exercícios deste PDF tem um monte de “dicas” de como fazê-lo. A gente normalmente imagina que essas dicas sejam só sugestões de um modo de chegar até o resultado final, mas aqui não é bem assim...

Lembre que neste slide daqui, da “Introdução ao curso”,

2hT22 Sobre aulas expositivas

eu falei em “músculos mentais diferentes”. Essa idéia vai valer aqui também; por exemplo, nos slides sobre o “Jogo colaborativo” eu digo que é pro jogador  $P$  escrever as suas jogadas num determinado formato e pro jogador  $O$  escrever as suas respostas num outro formato, e digo que se o jogador  $P$  não entender imediatamente a resposta do jogador  $O$  é porque o jogador  $P$  tem que rever certos exercícios básicos de “set comprehensions”...

*Escrever as jogadas exatamente nesses formatos vai exercitar uma série de músculos mentais bem específicos.*

## Aviso (2)

Quando a gente vê um artista do Cirque de Soleil fazendo um número de aéreos a gente reconhece imediatamente que ele tem uma coordenação motora absurda e que ele tá usando um monte de músculos que a gente nunca usou e um monte de outros músculos que a gente nem sabia que existiam...

Quando a gente vê uma pessoa que entende bem – e que é capaz de explicar claramente – cada detalhe de uma definição bizarramente complicada como essa daqui, que o Stewart fez altos malabarismos pra ela caber em 9 linhas,

[StewPtCap5p16](#) (p.337)

é a mesma coisa, só que essa pessoa treinou músculos mentais. *Nos exercícios deste PDFzinho a gente vai treinar vários dos músculos mentais que essas pessoas mais usam – e pra isso a gente vai fazer devagar e por escrito e com desenhos muitas coisas que elas fazem de cabeça.*

Também dá pra comparar o que a gente vai fazer aqui com a historinha deste slide:

[2hT11](#) Atirei o pau no gato

Algumas mudanças de nota no Atirei o pau no gato exigem que a gente levante uns dedos da flauta ao mesmo tempo que a gente abaixa outros... a gente só consegue aprender isso treinando muitas vezes muito devagar, e enquanto a gente não treina bastante o som fica horrível.

## Um jogo colaborativo

...ou: como debugar representações gráficas.

Pense num jogo colaborativo. Os jogadores se chamam  $P$  (“proponente”), e  $O$  (“oponente”). O  $P$  quer encontrar uma representação gráfica pro conjunto  $A$ , e à primeira vista o  $O$  quer mostrar que o  $P$  está errado... mas na verdade o objetivo dos dois é fazer com que o  $P$  chegue numa representação gráfica que não tem erro nenhum.

Digamos que

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2), y \in [1, 2) \}.$$

O  $P$  desenha uma representação gráfica **com um nome diferente de  $A$**  e “propõe” ela — por exemplo, o  $P$  diz isso aqui:



O oponente  $O$  diz: “verifica o ponto  $(1, 1)$ ”. Os dois verificam o ponto  $(1, 1)$  do  $A'$  e vêem que o desenho do  $A'$  é ambíguo no ponto  $(1, 1)$ , já que esse é um ponto de fronteira e o  $P$  não desenhou ele nem como linha grossa sólida nem com linha tracejada... então a resposta pra pergunta “ $(1, 1) \in A'$ ?” não é nem **V** nem **F**, é “erro”, e portanto  $A \neq A'$ , e o  $P$  ainda não conseguiu a representação gráfica certa. O oponente  $O$  ganha essa rodada, e o  $P$  tem que propôr outra representação gráfica.

Aí o  $P$  propõe uma outra representação gráfica, **com um outro nome, diferente de  $A$  e de  $A'$** . Por exemplo,  $P$  propõe isso aqui:



O oponente  $O$  diz: “verifica o ponto  $(0, 0)$ ”. Os dois verificam, e vêem que:

$$(0, 0) \notin A, \quad (0, 0) \in A''$$

E portanto  $A \neq A''$ , e o  $P$  ainda não conseguiu a representação gráfica certa. O oponente  $O$  ganha mais essa rodada.

Quando o  $P$  propõe um desenho que o  $O$  não consegue mostrar que está errado o  $P$  ganha a rodada.

Até vocês terem prática vocês vão jogar como o  $P$ , vão me mostrar as representações gráficas de vocês, e eu vou jogar como o  $O$ . Quando vocês tiverem mais prática vocês vão conseguir chutar representações gráficas (como o jogador  $P$ ) e testá-las (fazendo o papel do jogador  $O$  vocês mesmos).

## Um jogo colaborativo (2)

Represente graficamente os seguintes conjuntos:

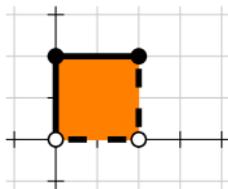
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2), y \in [1, 2)\}$$

$$B = \{(x, 2x) \mid x \in [1, 2)\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \wedge x + y < 2\}$$

Dica: todos eles vão dar subconjuntos do plano feitos de infinitos pontos, e você vai ter que adaptar as convenções que usamos pra desenhar intervalos pra desenhar regiões.

Use bolinhas cheias pra indicar “este ponto pertence ao conjunto”, bolinhas ocas pra indicar “este ponto não pertence ao conjunto”, linhas grossas contínuas pra indicar “esse trecho da fronteira pertence ao conjunto” e linhas tracejadas pra indicar “esse trecho da fronteira não pertence ao conjunto”. Por exemplo:



Dica: se você não tem nenhuma prática com as duas notações da forma  $\{\dots \mid \dots\}$  – por exemplo:

$$\underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}\}}_{\text{gerador}} \mid \underbrace{a \geq 3}_{\text{filtro}} = \{3, 4\}$$

$$\underbrace{\{10a\}}_{\text{expr}} \mid \underbrace{a \in \{1, 2, 3, 4\}}_{\text{gerador}} = \{10, 20, 30, 40\}$$

então comece fazendo alguns exercícios daqui:

**MpgP8** (até a p.12) Set Comprehensions

Todos os exercícios dessa parte do MPG dão conjuntos finitos, e os conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  da coluna da esquerda são infinitos.

## Imagens de intervalos

Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  então em princípio a expressão  $f(\{7, 8, 9\})$  deveria dar um erro, porque  $f$  é uma função que espera receber um número, e  $\{7, 8, 9\}$  é um conjunto... mas aí normalmente a gente define que o comportamento da  $f$  quando ela recebe um conjunto vai ser este aqui:

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

A gente diz que  $f(A)$  é a **imagem do conjunto  $A$** .

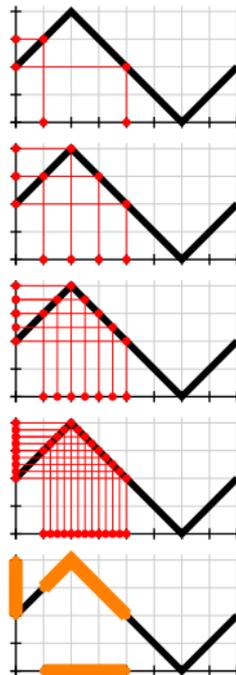
Algumas pessoas – como o Carlos, aqui: 2gT12 – acham que isto é sempre verdade:

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

**Não seja como o Carlos!!! Seja como o Bob!!!**

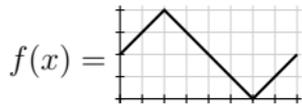
Nas figuras à direita temos:

$$\begin{aligned} f(\{1, 4\}) &= \{f(1), f(4)\} \\ &= \{3, 2\} \\ &= \{2, 3\} \\ f(\{1, 2, 3, 4\}) &= \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} \\ &= \{2, 3, 4, 3\} \\ &= \{2, 3, 4\} \\ f([1, 4]) &= [2, 4] \\ [f(1), f(4)] &= [3, 2] \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leq y \leq 2\} \\ &= \emptyset \\ &\neq f([1, 4]) \end{aligned}$$



## Imagens de intervalos: exercício

Seja  $f(x)$  esta função:



Calcule estas imagens de intervalos:

- |                |                 |
|----------------|-----------------|
| a) $f([0, 1])$ | a') $f((0, 1))$ |
| b) $f([1, 2])$ | b') $f((1, 2))$ |
| c) $f([0, 2])$ | c') $f((0, 2))$ |
| d) $f([2, 3])$ | d') $f((2, 3))$ |
| e) $f([1, 3])$ | e') $f((1, 3))$ |
| f) $f([0, 3])$ | f') $f((0, 3))$ |
| g) $f([0, 4])$ | g') $f((0, 4))$ |
| h) $f([4, 8])$ | h') $f((4, 8))$ |
| i) $f([0, 8])$ | i') $f((0, 8))$ |
| j) $f([1, 7])$ | j') $f((1, 7))$ |

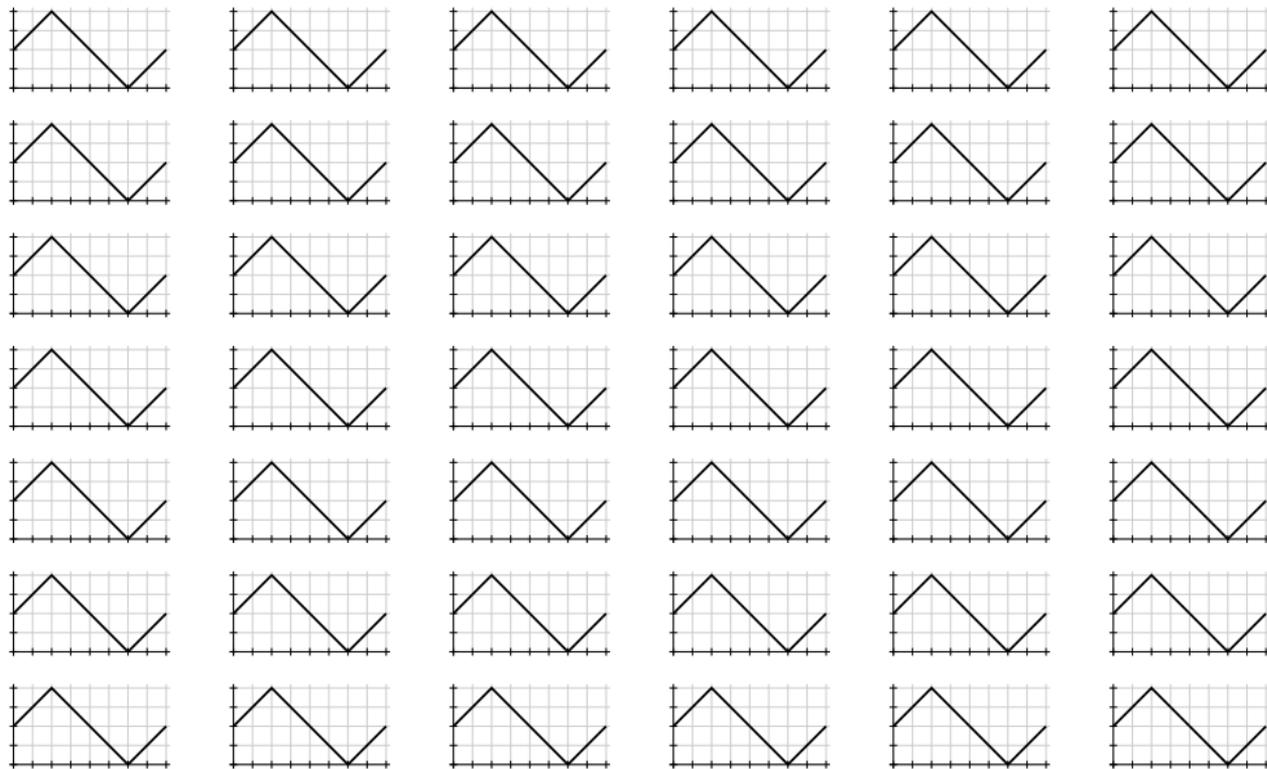
**Dicas:**

1) Faça os itens (a) até (j) primeiro. Os itens (a') até (j') são bem mais difíceis, e em alguns deles os resultados vão ser conjuntos fechados ou “semi-abertos”.

2) O Leithold define intervalos semi-abertos aqui: [Leit1p7](#)

3) Nos casos em que você tiver dificuldade de encontrar o  $f(I)$  desenhe num gráfico só:

a função  $f(x)$ ,  
o conjunto  $I$  (no eixo  $x$ ),  
o conjunto  $\{(x, f(x)) \mid x \in I\}$   
(sobre o gráfico da  $f$ ),  
e o conjunto  $f(I)$  (no eixo  $y$ ).





## As definições de inf e sup

Digamos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $B \subset \mathbb{R}$ .

Vamos definir  $\inf(f(B))$  e  $\sup(f(B))$  —  
e também  $\inf(D)$  e  $\sup(D)$ , pra  $D \subset \mathbb{R}$  —  
desta forma:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

$$C = \{(x, f(x)) \mid x \in B\}$$

$$D = \{f(x) \mid x \in B\}$$

$$E = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B. f(x) = y\}$$

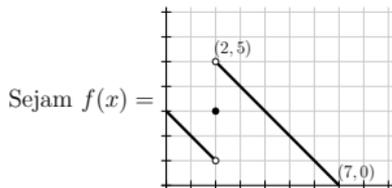
$$U = \{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D. d \leq y\}$$

$$L = \{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D. y \leq d\}$$

$$(\alpha = \sup(D)) = \alpha \in U \wedge (\forall u \in U. \alpha \leq u)$$

$$(\beta = \inf(D)) = \beta \in L \wedge (\forall \ell \in L. \ell \leq \beta)$$

## Agora uma função descontínua



e  $B = [1, 3]$ .

### Exercício

a) Represente graficamente estes conjuntos — as definições deles são as mesmas do slide anterior:

$$\begin{aligned} C &= \{ (x, f(x)) \mid x \in B \} \\ D &= \{ f(x) \mid x \in B \} \\ E &= \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B. f(x) = y \} \\ U &= \{ y \in \mathbb{R} \mid \forall d \in D. d \leq y \} \\ L &= \{ y \in \mathbb{R} \mid \forall d \in D. y \leq d \} \end{aligned}$$

Dica pro  $L$  e pro  $U$ : desenhe o infinito perto, como aqui:

2eT40 Uma figura

Lembre que

$$\begin{aligned} B &= [1, 3] \\ D &= f(B) \end{aligned}$$

e que definimos o inf e o sup desta forma:

$$\begin{aligned} (\alpha = \sup(D)) &= \alpha \in U \wedge (\forall u \in U. \alpha \leq u) \\ (\beta = \inf(D)) &= \beta \in L \wedge (\forall \ell \in L. \ell \leq \beta) \end{aligned}$$

Isso é uma definição estranha e indireta... pode ser que a gente calcule ( $42 = \inf(D)$ ) e ( $99 = \inf(D)$ ) por ela e os dois dêem verdadeiro – se isso acontecer então  $\inf(D)$  não vai um número!!!

### Exercício (cont.)

Calcule:

- $(6 = \sup(D))$
- $(5 = \sup(D))$
- $(4 = \sup(D))$
- $(2 = \sup(D))$
- $(1 = \sup(D))$
- $(0 = \sup(D))$

## “Para todo” ( $\forall$ ) e “existe” ( $\exists$ )

$$\begin{aligned}
 (\forall a \in \{2, 3, 5\}.a^2 < 10) &= (a^2 < 10)[a := 2] \wedge \\
 &\quad (a^2 < 10)[a := 3] \wedge \\
 &\quad (a^2 < 10)[a := 5] \\
 &= (2^2 < 10) \wedge (3^2 < 10) \wedge (5^2 < 10) \\
 &= (4 < 10) \wedge (9 < 10) \wedge (25 < 10) \\
 &= \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \\
 &= \mathbf{F}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\exists a \in \{2, 3, 5\}.a^2 < 10) &= (a^2 < 10)[a := 2] \vee \\
 &\quad (a^2 < 10)[a := 3] \vee \\
 &\quad (a^2 < 10)[a := 5] \\
 &= (2^2 < 10) \vee (3^2 < 10) \vee (5^2 < 10) \\
 &= (4 < 10) \vee (9 < 10) \vee (25 < 10) \\
 &= \mathbf{V} \vee \mathbf{V} \vee \mathbf{F} \\
 &= \mathbf{V}
 \end{aligned}$$

## Visualizando ‘ $\forall$ ’s e ‘ $\exists$ ’s

Dá pra *visualizar* o que a expressão

$$(\forall x \in \{1, \dots, 7\}. 2 \leq x < 4 \vee x = 6)$$

“quer dizer” visualizando os ‘**V**’s e ‘**F**’s de expressões mais simples, e combinando esses “mapas” de ‘**V**’s e ‘**F**’s. E digamos que:

$$\begin{aligned} F(x) &= (2 \leq x), \\ G(x) &= (x \leq 4), \\ H(x) &= (x = 6) \end{aligned}$$

Então temos:

$$\begin{aligned} &(\forall x \in \{1, \dots, 7\}. 2 \leq x < 4 \vee x = 6) \\ = &(\forall x \in \{1, \dots, 7\}. (2 \leq x \wedge x < 4) \vee x = 6) \\ = &(\forall x \in \{1, \dots, 7\}. (F(x) \wedge G(x)) \vee H(x)) \end{aligned}$$

Às vezes vamos ter que fazer figuras com muitos ‘**V**’s e ‘**F**’s, e vai ser mais fácil visualizar onde estão os ‘**V**’s e ‘**F**’s delas se usarmos sinais mais fáceis de distinguir...

Vou usar essa convenção aqui:

O **V** é uma bolinha preta, ou sólida: ●

O **F** é uma bolinha branca, ou oca: ○

Compare:

$$\begin{aligned} (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. 2 \leq x) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. x < 4) &= \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. 2 \leq x < 4) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. x = 6) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. 2 \leq x < 4 \vee x = 6) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. F(x)) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. G(x)) &= \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. F(x) \wedge G(x)) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. H(x)) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. F(x) \wedge G(x) \vee H(x)) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. F(x)) &= \circ \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. G(x)) &= \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. F(x) \wedge G(x)) &= \circ \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. H(x)) &= \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \bullet \wedge \circ \\ (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. F(x) \wedge G(x) \vee H(x)) &= \circ \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \circ \wedge \circ \wedge \bullet \wedge \circ \end{aligned}$$

É isso que a gente vai fazer pra analisar expressões como  $(\forall x \in A. \_\_\_\_)$  e  $(\exists x \in A. \_\_\_\_)$  e descobrir quais são verdadeiras e quais não — **mesmo quando o conjunto  $A$  é um conjunto infinito**, como  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $[2, 10]$ .

Você **pode** fazer as suas próprias definições — como o meu “● = **V** e ○ = **F**” — mas elas **têm** que ficar claras o suficiente... releia isto:

2gT4 “Releia a Dica 7”

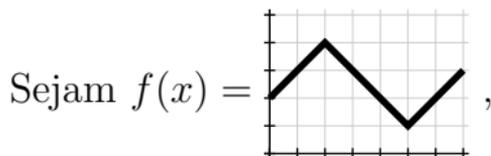
## Retângulos acima e abaixo

Lembre que eu contei que em cursos tradicionais de Cálculo 2 – aqueles em que as pessoas passam centenas de horas fazendo contas à mão, e mais outras centenas de horas estudando por aqueles livros que fingem que certas coisas difíceis são óbvias – as pessoas acabam aprendendo algumas coisas super úteis que não aparecem listadas explicitamente no programa do curso...

Uma dessas coisas é aprender a entender definições que *aparentemente* envolvem um número infinito de contas. Se a gente for como o Bob a gente consegue visualizar o que essas definições “querem dizer”.

As definições formais de “retângulo acima (ou abaixo) da curva” e “melhor retângulo acima (ou abaixo) da curva” são assim – elas aparentemente precisam de infinitas contas.

## Instruções de desenho (explícitas)



$$e \ P(y) = \forall x \in \{1, 2, 3\}. f(\underbrace{x}_{\text{em } (x,0)}) < y.$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{em } (0,y)}$$

As anotações sob as chaves são “instruções de desenho” que o Bob vai usar pra calcular cada  $P(y)$  de cabeça, e pra visualizar o que  $P(y)$  “quer dizer”...

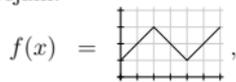
Na próxima página eu fiz as figuras pra  $P(3.5)$ .

$$\begin{aligned}
 P(3.5) &= \forall x \in \{1, 2, 3\}. \underbrace{f(x)}_{\text{em}(x,0)} < 3.5 \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{em}(x,f(x))} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{em}(0,3.5)} \\
 &= \underbrace{(f(1) < 3.5)}_{\text{em}(1,0)} \wedge \underbrace{(f(2) < 3.5)}_{\text{em}(2,0)} \wedge \underbrace{(f(3) < 3.5)}_{\text{em}(3,0)} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{em}(1,f(1))} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{em}(2,f(2))} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{em}(3,f(3))} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{em}(0,3.5)} \\
 &= \underbrace{(3 < 3.5)}_{\text{em}(1,3)} \wedge \underbrace{(4 < 3.5)}_{\text{em}(2,4)} \wedge \underbrace{(3 < 3.5)}_{\text{em}(3,3)} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{em}(1,3)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{em}(2,4)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{em}(3,3)} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{em}(0,3.5)} \\
 &= \underbrace{(\bullet)}_{\text{em}(1,3)} \wedge \underbrace{(\circ)}_{\text{em}(2,4)} \wedge \underbrace{(\bullet)}_{\text{em}(3,3)} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{em}(1,3)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{em}(2,4)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{em}(3,3)} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{em}(0,3.5)} \\
 &= \underbrace{(\circ)}_{\text{em}(0,3.5)}
 \end{aligned}$$



## Instruções de desenho: exercício

Sejam:



$$P(y) = \forall x \in \{1, 2, 3\}. f(x) < y,$$

$$Q(y) = \forall x \in \{1, 2, 3\}. f(x) \leq y,$$

$$R(y) = \forall x \in \{1, 2, 3\}. f(x) \geq y,$$

$$S(y) = \forall x \in \{1, 2, 3\}. f(x) > y,$$

$$P'(y) = \forall x \in [3, 5]. f(x) < y,$$

$$Q'(y) = \forall x \in [3, 5]. f(x) \leq y,$$

$$R'(y) = \forall x \in [3, 5]. f(x) \geq y,$$

$$S'(y) = \forall x \in [3, 5]. f(x) > y.$$

Para cada uma das expressões à direita visualize-a, represente-a graficamente numa das cópias do gráfico da  $f(x)$  da próxima página, e dê o resultado dela.

Note que aqui eu não estou dando instruções de desenho *explícitas* – você vai ter que escolher como você vai fazer pra visualizar cada expressão.

a)  $P(3.5), P(3.0), \dots, P(0.5)$

b)  $Q(3.5), Q(3.0), \dots, Q(0.5)$

c)  $R(3.5), R(3.0), \dots, R(0.5)$

d)  $S(3.5), S(3.0), \dots, S(0.5)$

e)  $P'(3.5), P'(3.0), \dots, P'(0.5)$

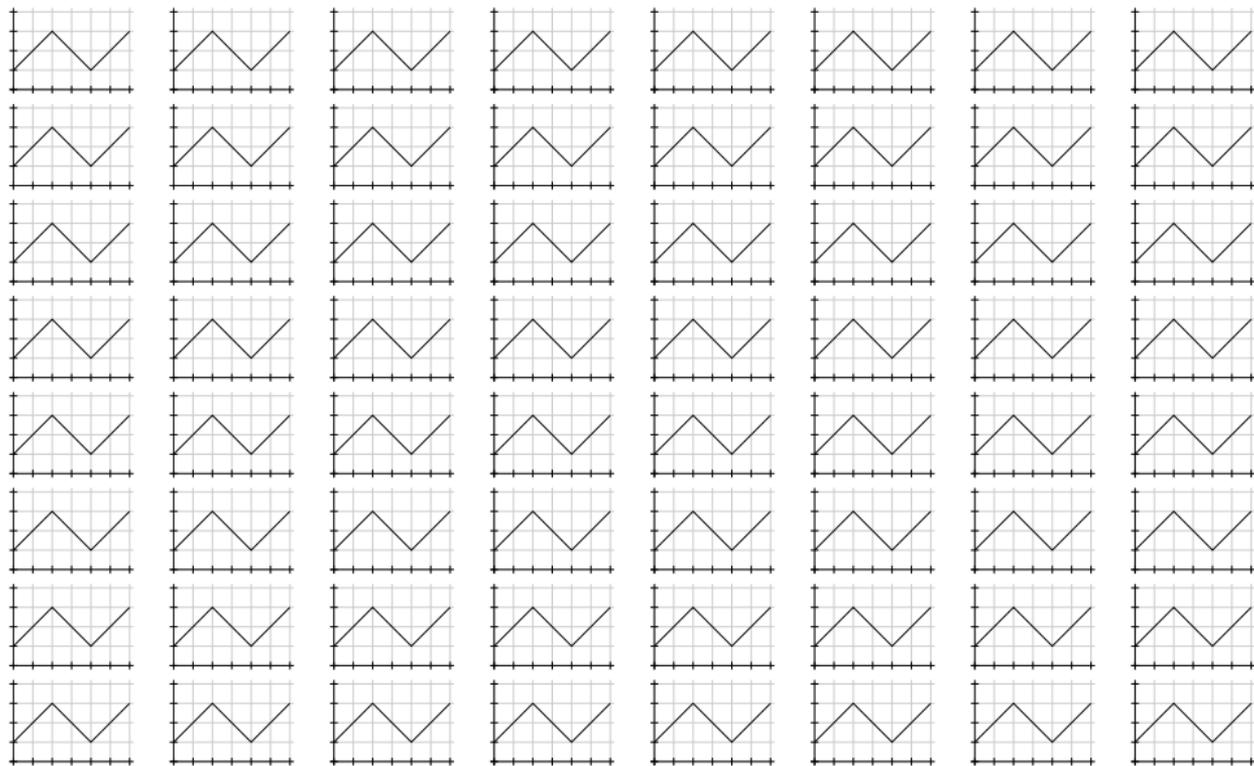
f)  $Q'(3.5), Q'(3.0), \dots, Q'(0.5)$

g)  $R'(3.5), R'(3.0), \dots, R'(0.5)$

h)  $S'(3.5), S'(3.0), \dots, S'(0.5)$

Nos itens (e) até (f) os seus desenhos vão ter infinitas bolinhas... aliás, você vai ter que fazer desenhos que *finjam* que têm infinitas bolinhas, e nos quais o leitor consiga entender o que você quis representar... veja este slide antigo:

2dT142 “E pra conjuntos infinitos?”



## Instruções de desenho: outro exercício

A seção “Mais sobre bolinhas” daqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2-4.pdf#page=29>

tem dicas sobre como visualizar subconjuntos “definidos por proposições”, como este aqui:

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

A gente primeiro marca cada ponto de  $A$  com uma bolinha ou preta ou branca, e depois a gente pega o conjunto das bolinhas pretas e interpreta ele como um outro conjunto – o resultado.

Use isto pra visualizar cada um dos conjuntos à direita e pra encontrar uma descrição mais simples para cada um deles. Geralmente essas “descrições mais simples” vão ser em notação de intervalos.

As funções  $P, \dots, S, P', \dots, S'$  são as do exercício 8. O símbolo  $\overline{\mathbb{R}}$  denota a “reta real estendida”:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{R}} &= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \\ &= (-\infty, +\infty) \cup \{-\infty, +\infty\} \\ &= [-\infty, +\infty]\end{aligned}$$

Para mais detalhes, veja:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Extended\\_real\\_number\\_line](https://en.wikipedia.org/wiki/Extended_real_number_line)

a)  $\{y \in [0, 3] \mid P(y)\}$

b)  $\{y \in [0, 3] \mid Q(y)\}$

c)  $\{y \in [0, 3] \mid R(y)\}$

d)  $\{y \in [0, 3] \mid S(y)\}$

a')  $\{y \in [0, 3] \mid P'(y)\}$

b')  $\{y \in [0, 3] \mid Q'(y)\}$

c')  $\{y \in [0, 3] \mid R'(y)\}$

d')  $\{y \in [0, 3] \mid S'(y)\}$

e)  $\{y \in \mathbb{R} \mid P(y)\}$

f)  $\{y \in \mathbb{R} \mid Q(y)\}$

g)  $\{y \in \mathbb{R} \mid R(y)\}$

h)  $\{y \in \mathbb{R} \mid S(y)\}$

i)  $\{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid P(y)\}$

j)  $\{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid Q(y)\}$

k)  $\{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid R(y)\}$

l)  $\{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid S(y)\}$

## Algumas somas de Riemann

Vou definir:

$$\begin{aligned}
 [L] &= \sum_{i=1}^N f(a_i)(b_i - a_i) \\
 [R] &= \sum_{i=1}^N f(b_i)(b_i - a_i) \\
 [\text{Trap}] &= \sum_{i=1}^N \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
 [M] &= \sum_{i=1}^N f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)(b_i - a_i) \\
 [\min] &= \sum_{i=1}^N \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
 [\max] &= \sum_{i=1}^N \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
 [\inf] &= \sum_{i=1}^N \inf(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
 [\sup] &= \sum_{i=1}^N \sup(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i)
 \end{aligned}$$

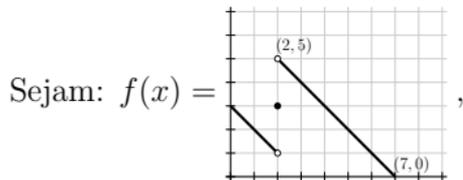
Compare com: os exercícios das montanhas, as páginas 208–210 do Miranda ([Miranda208](#)), e: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma\\_de\\_Riemann](https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann)

Nas duas últimas linhas o  $f([a_i, b_i])$  é a **imagem de um intervalo**. Temos:

$$\begin{aligned}
 f(A) &= \{f(a) \mid a \in A\} \\
 f(\{7, 8, 9\}) &= \{f(a) \mid a \in \{7, 8, 9\}\} \\
 &= \{f(7), f(8), f(9)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a, b]_N &= \{a + k(\frac{b-a}{N}) \mid k \in \{0, \dots, N\}\} \\
&= \{a + 0(\frac{b-a}{N}), a + 1(\frac{b-a}{N}), \dots, a + N(\frac{b-a}{N})\} \\
&= \{a, a + \frac{b-a}{N}, a + 2\frac{b-a}{N}, a + 3\frac{b-a}{N}, \dots, b\} \\
\overline{\int}_P f(x) dx &= [\sup]_P \\
&= \sum_{i=1}^N \sup(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
\underline{\int}_P f(x) dx &= [\inf]_P \\
&= \sum_{i=1}^N \inf(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
\overline{\int}_P f(x) dx &= \overline{\int}_P f(x) dx - \underline{\int}_P f(x) dx \\
\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\int}_{[a, b]_{2^k}} f(x) dx \\
\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{\int}_{[a, b]_{2^k}} f(x) dx \\
\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx &= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx - \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx \\
\left(\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx \text{ existe}\right) &= \left(\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx\right) \\
&= \left(\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx = 0\right) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx &= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx \quad (\text{se a integral existir}) \\
&= \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx \quad (\text{se a integral existir})
\end{aligned}$$

## Aproximações por cima e por baixo



$$P = \{3, 4, 5\},$$

$$Q = \{1, 3, 4, 5\},$$

e **por enquanto** considere que:

$$\sup(f(B)) = \max_{x \in B} f(x) \quad \text{e}$$

$$\inf(f(B)) = \min_{x \in B} f(x).$$

### Exercício.

Represente graficamente:

a)  $\overline{\int}_P f(x) dx$

b)  $\underline{\int}_P f(x) dx$

c)  $\overline{\int}_P f(x) dx$

d)  $\overline{\int}_Q f(x) dx$

e)  $\underline{\int}_Q f(x) dx$

f)  $\overline{\int}_Q f(x) dx$

g)  $\overline{\int}_{[1,5]_2} f(x) dx$

h)  $\underline{\int}_{[1,5]_4} f(x) dx$

(%i1) a : 2;

(%o1)

2

(%i2) b : 4;

(%o2)

4

(%i3) b[i] := a + i\*(b-a)/6;

(%o3)

$$b_i := a + \frac{i(b-a)}{6}$$

(%i4) a[i] := b[i-1];

(%o4)

$$a_i := b_{i-1}$$

(%i5) I[i] := [a[i], b[i]];

(%o5)

$$I_i := [a_i, b_i]$$

(%i6)

[I[1], I[2], I[3], I[4], I[5], I[6]];

(%o6)

$$\left[ \left[ 2, \frac{7}{3} \right], \left[ \frac{7}{3}, \frac{8}{3} \right], \left[ \frac{8}{3}, 3 \right], \left[ 3, \frac{10}{3} \right], \left[ \frac{10}{3}, \frac{11}{3} \right], \left[ \frac{11}{3}, 4 \right] \right]$$

(%i7) makelist(I[i], i, 1, 6);

(%o7)

$$\left[ \left[ 2, \frac{7}{3} \right], \left[ \frac{7}{3}, \frac{8}{3} \right], \left[ \frac{8}{3}, 3 \right], \left[ 3, \frac{10}{3} \right], \left[ \frac{10}{3}, \frac{11}{3} \right], \left[ \frac{11}{3}, 4 \right] \right]$$

(%i8)

# Cálculo 2 - 2024.1

Aula 23: a função de Dirichlet

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

[2iQ58](#) Quadros da aula de 2024jul09

[2hT145](#) Meu material de 2023.2 sobre a definição da integral

[2hT147](#) Meu material de 2023.2 sobre a função de Dirichlet

[2hT152](#) "A função de Dirichlet (3)"

# Cálculo 2 - 2024.1

Aula 22: o TFC1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

# Cálculo 2 - 2024.1

Aula 24: volumes

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

StewPtCap6p12 (p.389) 6.2 Volumes

StewPtCap6p13 (p.390) volume da esfera

StewPtCap6p18 (p.395) pirâmide de base quadrada

StewPtCap6p20 (p.397) Exercícios: **façam do 1 ao 5!**

StewPtCap8p17 (p.500) trombeta de Gabriel

StewPtCap13p18 (p.768) 13.3 Comprimento de Arco e Curvatura

StewPtCap15p6 (p.874) 15.1 Integrais múltiplas sobre retângulos

StewPtCap15p9 (p.877) aproximações do volume

Miranda285 9.3 Volume

Miranda288 O volume da esfera de raio  $r$  é  $\frac{4}{3}\pi r^3$

Miranda285 9.3.1 Secções transversais

Miranda289 9.3.2 Sólidos de revolução

Miranda292 **Façam os exercícios 2, 3, 4 e 5!**

Leit6p3 (p.374) 6.1 Volumes de sólidos por cortes

Leit6p17 (p.388) 6.3 Comprimento de arco

3cT75 Pirâmide (3D)

2gT105 Um jogo colaborativo

2gT137 P2 de 2023.1, questão sobre volumes

Quadros de 2023.2:

2hQ47 Quadros da aula 19 (09/out/2023)

2hQ49 Quadros da aula 21 (11/out/2023)

Quadros de 2023.1:

2gQ59 Quadros da aula 27 (4/julho/2023)

# Exercício 1

Sejam:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\} \\ C &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} \\ D &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x\} \\ E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x\} \\ [x = \alpha] &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \alpha\} \\ [y = \beta] &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \beta\} \\ [[x = \alpha]] &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \alpha\} \\ [[y = \beta]] &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = \beta\} \\ [[z = \gamma]] &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \gamma\} \end{aligned}$$

Lembre das técnicas do “jogo colaborativo”, e:

- Represente graficamente  $A$ .
- Represente graficamente  $B$ .
- Represente graficamente  $C$ .
- Represente graficamente  $D$ .
- Represente graficamente  $E$ .
- Represente num gráfico só  $A$  e  $A \cap [x = 0.5]$ . Qual é o comprimento de  $A \cap [x = 0.5]$ ?
- Represente num gráfico só  $B$  e  $B \cap [x = 0.5]$ . Qual é o comprimento de  $B \cap [x = 0.5]$ ?
- Represente num gráfico só  $D$  e  $D \cap [[x = 0.5]]$ . Qual é a área de  $D \cap [[x = 0.5]]$ ?
- Represente num gráfico só  $D$  e  $D \cap [[y = 0.5]]$ . Qual é a área de  $D \cap [[y = 0.5]]$ ?
- Represente num gráfico só  $D$  e  $D \cap [[z = 0.5]]$ . Qual é a área de  $D \cap [[z = 0.5]]$ ?
- Represente num gráfico só  $E$  e  $E \cap [[x = 0.5]]$ . Qual é a área de  $E \cap [[x = 0.5]]$ ?
- Represente num gráfico só  $E$  e  $E \cap [[y = 0.5]]$ . Qual é a área de  $E \cap [[y = 0.5]]$ ?
- Represente num gráfico só  $E$  e  $E \cap [[z = 0.5]]$ . Qual é a área de  $E \cap [[z = 0.5]]$ ?

Calcule:

- área( $E \cap [[x = 0.2]]$ )
  - área( $E \cap [[x = 0.8]]$ )
- p)  $\int_{t=0}^{t=1} \text{área}(E \cap [[x = t]]) dt$

## Dicas pro exercício 1

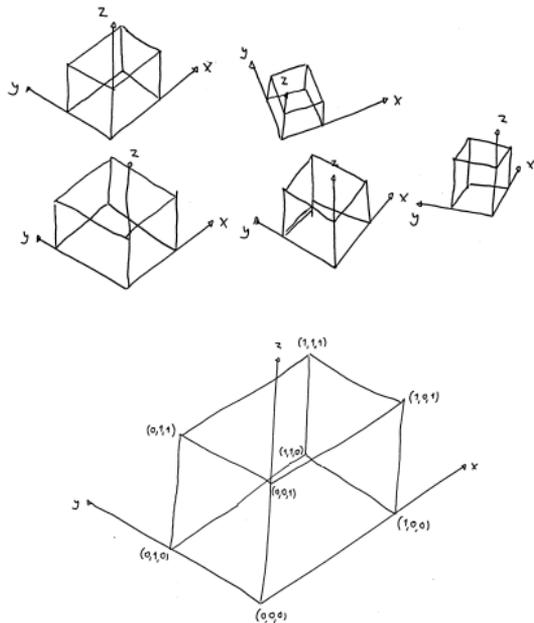
O conjunto  $C$  é um cubo e os conjuntos  $D$  e  $E$  vão ser pedaços do cubo  $C$ .

Existem 8 pontos de  $\mathbb{R}^3$  que obedecem isto aqui:  $x, y, z \in \{0, 1\}$ . Vou inventar um nome pra eles: eles vão ser os pontos “simples”. O conjunto  $C$  contém todos os pontos simples mas os conjuntos  $D$  e  $E$  só contém alguns pontos simples cada um... quais?

Pra fazer os itens que envolvem os conjuntos  $D$  e  $E$  comece fazendo um MONTE de desenhos de cubos à mão, SEM USAR RÉGUA – como eu fiz na figura de cima à direita. Se você não usar régua o seu ganho de velocidade vai ser tão grande que você não vai se incomodar muito pra descartar os desenhos que ficarem tortos demais, e você vai poder escolher quais são os desenhos nos quais os eixos estão numa posição melhor pra desenhar o conjunto  $E$ , que é meio complicado.

Quando você encontrar uma posição pros eixos que você ache que está boa faça uma versão ampliada do seu cubo naquela posição ocupando uma folha inteira, e depois escreva do lado de cada um dos pontos “simples” as coordenadas dele – como eu fiz na figura de baixo à direita. Use essa figura pra tentar entender os conjuntos  $D$  e  $E$ .

A melhor posição pra desenhar o conjunto  $E$  não é a da figura de baixo à direita.



## Aviso

Na aula 19 – que era pra ser a única aula sobre volumes – as pessoas tiveram tanta dificuldade pra desenhar os conjuntos  $C$ ,  $D$  e  $E$  em 3D que eu preferi considerar que elas não teriam condições de entender os trechos do Stewart em que ele faz cortes em figuras 3D e depois calcula as áreas desses cortes... então nós vamos ter uma segunda aula sobre isso.  
Slogans

# Cálculo 2 - 2024.1

Aula 28: EDOs com variáveis separáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

# Links

Quadros:

[2hQ53](#) Aula 26 de 2023.2: (24/out/2023): Campos de direções

[2hQ56](#) Aula 27 de 2023.2: (25/out/2023): EDOs com variáveis separáveis

[2gQ41](#) Aula 21 de 2023.1: (13/jun/2023)

[2gQ43](#) Aula 22 de 2023.1: (16/jun/2023)

[2dT293](#) Material sobre EDOVs de 2021.2

[2dT306](#) Slides sobre inversas de 2021.2

[2gT120](#) Slides sobre inversas de 2023.2

[Leit7](#) Funções inversas, logarítmicas e exponenciais

Questões sobre EDOVs nas provas de 2022.2:

[2fT123](#), [2fT126](#) P2, gabarito

[2fT135](#), [2fT137](#) VS, anexo

[StewPtCap9p11](#) (p.531) 9.2 Campos de Direções e Método de Euler

[StewPtCap9p18](#) (p.538) 9.3 Equações Separáveis

[StewPtCap14p10](#) (p.796) Curvas de nível

[ZillCullenInicioP13](#) (p.6) Soluções implícitas e explícitas

[ZillCullenInicioP16](#) (p.9) parâmetros, solução particular

[ZillCullenInicioP51](#) (p.44) 2.2 Variáveis separáveis

[ZillCullenInicioP57](#) (p.50) Exercícios

[ZillCullenEngCap2p17](#) (p.44) 2.2 Separable Variables

[ZillCullenEngCap2p23](#) (p.50) Exercises 2.2

[DiffyQsP27](#) 1.2 Slope fields

[Thomas11cap9](#) 9.1 Slope Fields and Separable Differential Equations

[2eT214](#) Algumas figuras de campos de direções

Questões sobre EDOVs nas provas de 2022.2:

[2fT123](#), [2fT126](#) P2, gabarito

[2fT135](#), [2fT137](#) VS, anexo

## EDOs por chutar-e-testar

Lembre que lá no início do curso eu mostrei – aqui: **2dT13** – que a gente podia resolver equações como esta

$$x + 2 = 5$$

por chutar-e-testar, e a gente podia escrever os chutes-e-testes usando o  $[:=]$ ... cada “chute” virava uma substituição e cada “teste” virava verificar se o resultado da substituição era uma igualdade verdadeira. Por exemplo:

$$\begin{aligned}(x + 2 = 5)[x := 42] &= (42 + 2 = 5) = (=) \\ (x + 2 = 5)[x := 3] &= (3 + 2 = 5) = (=)\end{aligned}$$

Eu costumo usar o ‘=)’ pra indicar “deu certo / chegamos numa igualdade verdadeira” e o ‘=(’ pra indicar “deu errado / chegamos numa igualdade falsa”. Os smileys ‘=)’ e ‘=(’ não tem cara de notações “sérias”, e isso é de propósito: é pra lembrar vocês de procurarem nos livros como eles fazem isso – usando português e supondo que o leitor vai ser capaz de fazer muitas contas de cabeça.

Uma outra notação pra isso – e que também não costuma ser usada em livros básicos, e que eu usei no gabarito da P1, – é esta aqui:

$$(x + 2 = 5)[x := 42] = \underbrace{(42 + 2 = 5)}_{\mathbf{F}}$$

Agora seja (\*) esta EDO (“equação diferencial ordinária”):

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \quad (*)$$

Podemos verificar que  $f(x) = x^4$  não é uma solução pra (\*), e que  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  é uma solução pra (\*), calculando os resultado das duas substituições abaixo e vendo que uma dá uma igualdade verdadeira e a outra dá uma igualdade falsa:

$$\begin{aligned}\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \left[ \begin{array}{l} f(x) := x^4 \\ f'(x) := 4x^3 \end{array} \right] &= ? \\ \left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \left[ \begin{array}{l} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right] &= ?\end{aligned}$$

## Campos de direções

StewPtCap9p11 (p.531) 9.2 Campos de Direções e Método de Euler

Os gráficos que usam tracinhos em certos pontos pra indicar coeficientes angulares naqueles pontos são gráficos de *campos de direções*.

### Exercício 1.

Represente graficamente os campos de direções abaixo desenhando tracinhos com os coeficientes angulares adequados nos pontos com  $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ; ou seja, em cada item você vai ter que desenhar 25 tracinhos. Quando  $\frac{dy}{dx} = \infty$  desenhe o tracinho na vertical, e quando  $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$  desenhe só um pontinho ao invés de um tracinho.

a)  $\frac{dy}{dx} = -1$

b)  $\frac{dy}{dx} = x$

c)  $\frac{dy}{dx} = 2x$

d)  $\frac{dy}{dx} = -x/y$

e)  $\frac{dy}{dx} = 1/y$

f)  $\frac{dy}{dx} = 2/y$

g)  $\frac{dy}{dx} = -y/x$

### Exercício 2.

Tente imaginar o resto de cada um dos 7 campos de direções que você desenhcou no exercício 1. Para cada um dos campos tente imaginar as curvas que você obteria se ligasse todos os tracinhos, e tente interpretar essas curvas como o conjunto de soluções da EDO que representamos graficamente como o campo de direções. Neste exercício você vai tentar encontrar soluções para EDOs no olhometro a partir dos campos de direções delas.

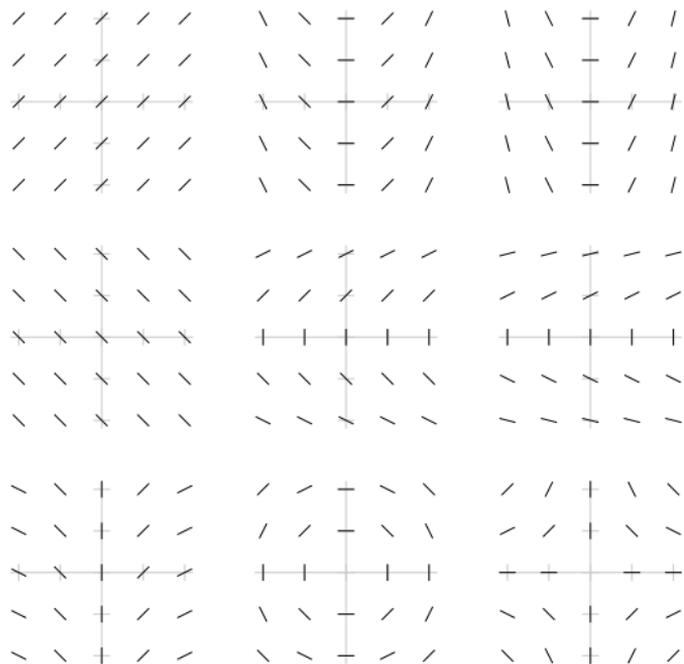
Para cada uma das funções abaixo diga quais das 7 EDOs do exercício 1 podem ter aquela função como solução.

a)  $y = x^2$

b)  $y = \sqrt{x}$

c)  $y = 1/x$

d)  $y = \sqrt{1-x^2}$



$$\begin{aligned}
 [\mathbf{M}] &= \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y) dy = g(x) dx \\ \int h(y) dy = \int g(x) dx \\ \parallel \\ H(y) + C_1 \qquad G(x) + C_2 \\ H(y) = G(x) + C_2 - C_1 \\ \qquad = G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right) & [\mathbf{M}][\mathbf{S}_1] &= \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \\ 2y dy = -2x dx \\ \int 2y dy = \int -2x dx \\ \parallel \\ y^2 + C_1 \qquad -x^2 + C_2 \\ y^2 = -x^2 + C_2 - C_1 \\ \qquad = -x^2 + C_3 \\ \sqrt{y^2} = \sqrt{-x^2 + C_3} \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \\
 [\mathbf{F}_3] &= \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right) & [\mathbf{F}_3][\mathbf{S}_1] &= \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \\ \sqrt{y^2} = \sqrt{-x^2 + C_3} \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \\
 [\mathbf{F}_2] &= \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ y = H^{-1}(G(x) + C_3) \end{array} \right) & [\mathbf{F}_2][\mathbf{S}_1] &= \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \\ y = \sqrt{-x^2 + C_3} \end{array} \right) \\
 [\mathbf{S}_1] &= \begin{bmatrix} g(x) := -2x \\ h(y) := 2y \\ G(x) := -x^2 \\ H(y) := y^2 \\ H^{-1}(u) := \sqrt{u} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## Funções inversas por chutar e testar

Digamos que

$$\begin{aligned} y &= 3 + \sqrt{x+4}, & \text{isto é,} \\ f(x) &= 3 + \sqrt{x+4}, \end{aligned}$$

e sejam:

$$\begin{aligned} g(y) &= (y-3)^2 + 4, \\ h(y) &= (y-4)^2 + 3. \end{aligned}$$

Eu acho difícil ver só fazendo contas de cabeça se  $f^{-1}(y) = g(y)$  ou se  $f^{-1}(y) = h(y)$ ... então é bom a gente saber testar se as inversas que a gente obteve de cabeça estão certas. O teste é:

$$\begin{aligned} (f^{-1}(f(x)) = x) \begin{bmatrix} f(x) := 3 + \sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y) := (y-3)^2 + 4 \end{bmatrix} &= ? \\ (f^{-1}(f(x)) = x) \begin{bmatrix} f(x) := 3 + \sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y) := (y-4)^2 + 3 \end{bmatrix} &= ? \end{aligned}$$

## Funções inversas por chutar e testar (2)

O modo tradicional de obter inversas é por uma série de passos, como:

$$\begin{aligned}f(x) &= 3 + \sqrt{x + 4} \\y &= 3 + \sqrt{x + 4} \\y - 3 &= \sqrt{x + 4} \\(y - 3)^2 &= x + 4 \\(y - 3)^2 - 4 &= x \\(y - 3)^2 - 4 &= f^{-1}(y)\end{aligned}$$

...mas é importante a gente saber testar se chegou na inversa certa.

**Exercício 4.**

Obtenha inversas para as seguintes funções:

$$f_1(x) = 2 + 3\sqrt{5x + 6}$$

$$f_2(x) = 2 + 3\sqrt[4]{5x + 6}$$

$$f_3(x) = 2 + 3(4x + 5)^6$$

$$f_4(x) = 2 + 3 \ln(4x + 5)$$

$$f_5(x) = 2 + 3e^{4x+5}$$

$$f_6(x) = \sqrt{2 + 3e^{4x+5}}$$

$$f_7(x) = \ln x$$

$$f_8(x) = \ln -x$$

$$f_9(x) = |x|$$

$$f_{10}(x) = \ln |x|$$

Porque é que  $f_9^{-1}(x)$  e  $f_{10}^{-1}(x)$  não existem?

## Inversas: introdução

Dê uma olhada nestes links:

[ZillCullenInicioP13](#) (p.6) Soluções implícitas e explícitas

[ZillCullenInicioP16](#) (p.9) parâmetros, solução particular

[ZillCullenInicioP51](#) (p.44) 2.2: Variáveis separáveis

O método pra resolver EDOs com variáveis separáveis nos dá primeiro “soluções implícitas”, como  $x^2 + y^2 = C$  or  $x^2 + y^2 = 42$ , e aí depois disso a gente tem que transformar essas soluções implícitas em “soluções explícitas”, em que  $y$  é uma função de  $x$ ... por exemplo:

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{C - x^2} &\Rightarrow f_1(x) &= \sqrt{C - x^2} \\x &= -\sqrt{C - x^2} &\Rightarrow f_2(x) &= -\sqrt{C - x^2} \\x &= \sqrt{42 - x^2} &\Rightarrow f_3(x) &= \sqrt{42 - x^2} \\x &= -\sqrt{42 - x^2} &\Rightarrow f_4(x) &= -\sqrt{42 - x^2}\end{aligned}$$

Praticamente todo mundo se enrola na hora de passar das “soluções implícitas” pras “soluções explícitas”, principalmente nos casos em que a gente tem “várias inversas”...

Eu vou usar uma terminologia que é meio errada, e vou dizer que  $g_1(y) = \sqrt{y}$  e  $g_2(y) = -\sqrt{y}$  são duas inversas diferentes para  $f(x) = x^2$ . Um bom lugar pra aprender a terminologia correta – que precisa que a gente especifique os domínios! – é o capítulo 7 do Leithold: [Leit7](#).

## Inversas: um exemplo complicado

Digamos que queremos inverter esta função:

$$f(x) = (x + 3)^4 + 5$$

O método é este aqui, mas repare que ele tem uma bifurcação...

$$\begin{aligned} y &= (x + 3)^4 + 5 \\ y - 5 &= (x + 3)^4 \\ \sqrt[4]{y - 5} &= \sqrt[4]{(x + 3)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{y - 5} &= x + 3 & \sqrt[4]{y - 5} &= -(x + 3) \\ -3 + \sqrt[4]{y - 5} &= x & \sqrt[4]{y - 5} &= -x - 3 \\ & & \sqrt[4]{y - 5} &= -x - 3 \\ & & 3 + \sqrt[4]{y - 5} &= -x \\ & & -(3 + \sqrt[4]{y - 5}) &= x \end{aligned}$$

Se a gente segue o caminho da esquerda a gente obtém

$$f^{-1}(y) = -3 + \sqrt[4]{y - 5},$$

e se a gente segue o caminho da direita a gente obtém

$$f^{-1}(y) = -(3 + \sqrt[4]{y - 5}).$$

Sabemos que  $\sqrt[4]{\alpha^4} = |\alpha|$ , e portanto:

$$\begin{aligned} \alpha \geq 0 &\Rightarrow \sqrt[4]{\alpha^4} = \alpha \\ \alpha \leq 0 &\Rightarrow \sqrt[4]{\alpha^4} = -\alpha \\ x + 3 \geq 0 &\Rightarrow \sqrt[4]{(x + 3)^4} = x + 3 \\ x + 3 \leq 0 &\Rightarrow \sqrt[4]{(x + 3)^4} = -(x + 3) \end{aligned}$$

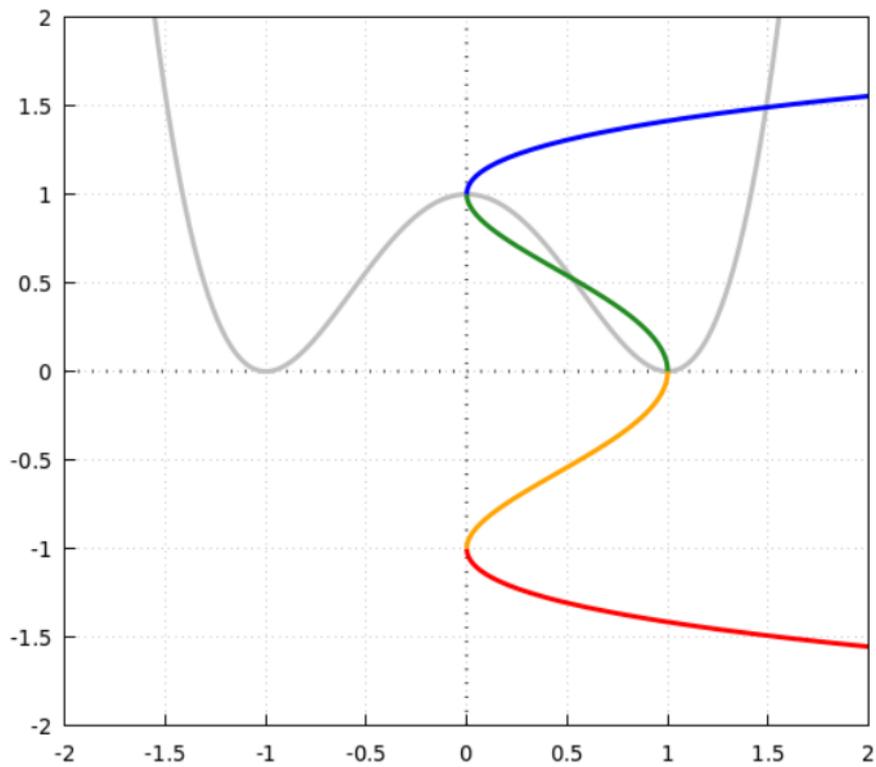
Ou seja, nas contas à esquerda se  $x + 3 \geq 0$  nós temos que seguir o caminho da esquerda, e se  $x + 3 \leq 0$  nós temos que seguir o caminho da direita.

O melhor modo da gente entender essas duas inversas é esse aqui. Considere estes três conjuntos de  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x + 3)^4 + 5\} \\ A_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x + 3)^4 + 5, x + 3 \geq 0\} \\ A_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x + 3)^4 + 5, x + 3 \leq 0\} \end{aligned}$$

Os conjuntos  $A_2$  e  $A_3$  são gráficos de funções inversíveis e  $A_1$  é o gráfico de uma função não-inversível. Os domínios dessas funções são relativamente fáceis de calcular – eles são  $\mathbb{R}$ ,  $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 \geq 0\}$  e  $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 \leq 0\}$  respectivamente – mas as imagens são um pouco mais complicadas...

...mas lembre que em C2 a gente costuma fazer as contas em duas etapas: na primeira etapa a gente finge que as hipóteses vão ser todas obedecidas e a gente nem escreve quais são essas hipóteses, e só na segunda etapa a gente escreve explicitamente quais são essas hipóteses e a gente vê se tudo realmente dá certo quando elas são obedecidas. *Em neste curso a gente raramente vai ter tempo pra segunda etapa.*



```
(%i1) f(x) := (x^2-1)^2;
```

```
(%o1)
```

$$f(x) := (x^2 - 1)^2$$

```
(%i2) sols : solve(y=f(x), x);
```

```
(%o2)
```

$$\left[ x = -\sqrt{\sqrt{y} + 1}, x = \sqrt{\sqrt{y} + 1}, x = -\sqrt{1 - \sqrt{y}}, x = \sqrt{1 - \sqrt{y}} \right]$$

```
(%i3) define(g1(y), rhs(sols[1]));
```

```
(%o3)
```

$$g1(y) := -\sqrt{\sqrt{y} + 1}$$

```
(%i7) f(g1(y));
```

```
(%o7)
```

*y*

```
(%i4) define(g2(y), rhs(sols[3]));
```

```
(%o4)
```

$$g2(y) := -\sqrt{1 - \sqrt{y}}$$

```
(%i8) f(g2(y));
```

```
(%o8)
```

*y*

```
(%i5) define(g3(y), rhs(sols[4]));
```

```
(%o5)
```

$$g3(y) := \sqrt{1 - \sqrt{y}}$$

```
(%i9) f(g3(y));
```

```
(%o9)
```

*y*

```
(%i6) define(g4(y), rhs(sols[2]));
```

```
(%o6)
```

$$g4(y) := \sqrt{\sqrt{y} + 1}$$

```
(%i10) f(g4(y));
```

```
(%o10)
```

*y*

```
(%i7)
```

```
(%i11)
```

```

(%i1) f(x) := (x^2-1)^2;
(%o1)
      f(x) := (x^2 - 1)^2
(%i2) e1 : y = (x^2-1)^2;
(%o2)
      y = (x^2 - 1)^2
(%i3) e2 : sqrt(e1);
(%o3)
      sqrt(y) = |x^2 - 1|
(%i4) assume(x^2-1 >= 0);
(%o4)
      [x^2 >= 1]
(%i5) e2 : sqrt(e1);
(%o5)
      sqrt(y) = x^2 - 1
(%i6) e3 : e2 + 1;
(%o6)
      sqrt(y) + 1 = x^2
(%i7) e4 : sqrt(e3);
(%o7)
      sqrt(sqrt(y) + 1) = |x|
(%i8) assume(x <= 0);
(%o8)
      [x <= 0]
(%i9) e4 : sqrt(e3);
(%o9)
      sqrt(sqrt(y) + 1) = -x
(%i10) e5 : - e4;
(%o10)
      -sqrt(sqrt(y) + 1) = x
(%i11) e6 : rhs(e5) = lhs(e5);
(%o11)
      x = -sqrt(sqrt(y) + 1)
(%i12) define(g1(y), rhs(e6));
(%o12)
      g1(y) := -sqrt(sqrt(y) + 1)
(%i13) g1(u);
(%o13)
      -sqrt(sqrt(u) + 1)
(%i14) simp : false;
(%o14)
      false
(%i15) g1(f(x));
(%o15)
      -1 (1 + ((x^2 - 1)^2)^(1/2))^(1/2)
(%i16) simp : true;
(%o16)
      true
(%i17) g1(f(x));
(%o17)
      x
(%i18)

```

# Cálculo 2 - 2024.1

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

**Questão 1****(Total: 4.0 pts)**

Resolva a integral abaixo por substituição trigonométrica e teste o seu resultado. Dica: você vai ter que começar com a mudança de variável  $u = 2x$ .

$$\int x^3 \sqrt{1 - 4x^2} dx .$$

**Questão 2****(Total: 4.0 pts)**

Lembre que:

$$[\text{IP}] = \left( \int fg' dx = fg - \int f'g dx \right)$$

Complete as contas abaixo. Use uma folha inteira. Adicione mais linhas se precisar. Vou dar algumas dicas no quadro.

$$\begin{aligned} \int hm'' dx &\stackrel{(1)}{=} ? \quad \text{Por } [\text{IP}] \left[ \begin{array}{l} f:=h \\ g:=m' \\ (\dots) \end{array} \right] \\ \int h'm' dx &\stackrel{(2)}{=} ? \quad \text{Por } [\text{IP}] [(\dots)] \\ \int hm'' dx &\stackrel{(3)}{=} ? \quad \text{Cópia da (1)} \\ &\stackrel{(4)}{=} ? \quad \text{Por (2)} \\ \int hm'' dx &\stackrel{(5)}{=} ? \quad \text{Por (3) e (4)} \\ \int (x-3)^2 e^x dx &\stackrel{(6)}{=} ? \quad \text{Por (5)} [(\dots)] \end{aligned}$$

**Dicas:**

1) Nestas questões o que vai contar mais pontos é você organizar as contas de modo que cada passo seja fácil de entender, de verificar, e de justificar – “chegar no resultado certo” vai valer relativamente pouco.

2) Recomento que vocês usem o método das “caixinhas de anotações” nas mudanças de variável... numa caixinha de anotações a primeira linha diz a relação entre a variável nova e a antiga, todas as outras linhas são consequências da primeira, e dentro da caixinha de anotações você pode usar as gambiarras com variáveis dependentes e diferenciáveis, como isto aqui:  $dx = 42 du...$

3) ...por exemplo:

$$\left[ \begin{array}{l} s = \sin \theta \\ \sqrt{1 - s^2} = \cos \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ \theta = \arcsen s \end{array} \right]$$

**Questão 3****(Total: 1.0 pts)**

No curso nós definimos que pra nós a “fórmula” do TFC2 seria esta aqui:

$$[\text{TFC2}] = \left( \int_{x=a}^{x=b} F'(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Mostre que quando  $a = 1$ ,  $b = 3$  e

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{quando } x < 2, \\ x & \text{quando } x \geq 2 \end{cases}$$

a fórmula [TFC2] é falsa.

Dicas: o melhor modo de fazer isto é representando graficamente  $F(x)$  e  $F'(x)$  e calculando certas coisas a partir dos gráficos. Considere que o leitor sabe calcular áreas de retângulos, triângulos e trapézios no olhómetro quando as coordenadas deles são números simples, mas complementemente os seus gráficos com um pouquinho de português quando nem tudo for óbvio só a partir dos gráficos.

**Questão 4****(Total: 1.0 pts)**

Seja  $f(t)$  a função no topo da página seguinte. Seja

$$F(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t) dt.$$

Desenhe o gráfico de  $F(x)$  em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.



# Questão 1: gabarito em Maxima

(%i1) f : x^3 \* sqrt(1-4\*x^2);

(%o1)

$$x^3 \sqrt{1-4x^2}$$

(%i2) F1 : 'integrate(f, x);

(%o2)

$$\int x^3 \sqrt{1-4x^2} dx$$

(%i3) F2 : changevar(F1, u=2\*x, u, x);

(%o3)

$$\frac{\int \sqrt{1-u} u^3 \sqrt{u+1} du}{16}$$

(%i4) F2 : rootscontract(F2);

(%o4)

$$\frac{\int u^3 \sqrt{1-u^2} du}{16}$$

(%i5) F3 : changevar(F2, u=sin(th), th, u);

(%o5)

$$\frac{\int \cos \theta \sqrt{1-\sin \theta} (\sin \theta)^3 \sqrt{\sin \theta+1} d\theta}{16}$$

(%i6) F3 : rootscontract(F3);

(%o6)

$$\frac{\int \cos \theta (\sin \theta)^3 \sqrt{1-(\sin \theta)^2} d\theta}{16}$$

(%i7) F3 : subst([sqrt(1-sin(th)^2)=cos(th)], F3);

(%o7)

$$\frac{\int (\cos \theta)^2 (\sin \theta)^3 d\theta}{16}$$

(%i8) F4 : changevar(F3, c=cos(th), c, th);

(%o8)

$$\frac{\int c^4 - c^2 dc}{16}$$

(%i9) F5 : ev(F4, 'integrate);

(%o9)

$$\frac{\frac{c^5}{5} - \frac{c^3}{3}}{16}$$

(%i10) F5 : expand(F5);

(%o10)

$$\frac{c^5}{80} - \frac{c^3}{48}$$

(%i11) F6 : subst([c=cos(th)], F5);

(%o11)

$$\frac{(\cos \theta)^5}{80} - \frac{(\cos \theta)^3}{48}$$

(%i12) F7 : subst([th=asin(u)], F6);

(%o12)

$$\frac{(1-u^2)^{\frac{5}{2}}}{80} - \frac{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}{48}$$

(%i13) F8 : subst([u=2\*x], F7);

(%o13)

$$\frac{(1-4x^2)^{\frac{5}{2}}}{80} - \frac{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}{48}$$

(%i14) align\_eqs([F1, F2, F3, F4,

F5, F6, F7, F8]);

(%o14)

$$\left( \begin{array}{l} \int x^3 \sqrt{1-4x^2} dx = \frac{\int u^3 \sqrt{1-u^2} du}{16} \\ = \frac{\int (\cos \theta)^3 (\sin \theta)^3 d\theta}{16} \\ = \frac{\int c^3 - c^2 dc}{16} \\ = \frac{\frac{c^5}{5} - \frac{c^3}{3}}{16} \\ = \frac{(\cos \theta)^5}{80} - \frac{(\cos \theta)^3}{48} \\ = \frac{(1-u^2)^{\frac{5}{2}}}{80} - \frac{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}{48} \\ = \frac{(1-4x^2)^{\frac{5}{2}}}{80} - \frac{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}{48} \end{array} \right)$$

(%i15)

## Questão 2: gabarito

Lembre que:

$$[\text{IP}] = \left( \int fg' dx = fg - \int f'g dx \right)$$

Então:

$$\int hm'' dx \stackrel{(1)}{=} hm' - \int h'm' dx$$

$$\text{Por } [\text{IP}] \left[ \begin{array}{l} f:=h \\ f':=h' \\ g:=m' \\ g':=m'' \end{array} \right]$$

$$\int h'm' dx \stackrel{(2)}{=} h'm - \int h''m dx$$

$$\text{Por } [\text{IP}] \left[ \begin{array}{l} f:=h' \\ f':=h'' \\ g:=m \\ g':=m' \end{array} \right]$$

$$\int hm'' dx \stackrel{(3)}{=} hm' - \int h'm' dx$$

Cópia da (1)

Por (2)

$$\stackrel{(4)}{=} hm' - (h'm - \int h''m dx)$$

$$\stackrel{(4b)}{=} hm' - h'm + \int h''m dx$$

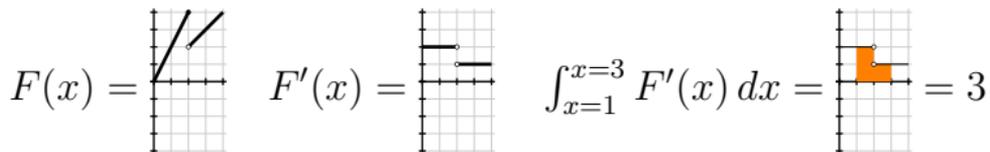
$$\int hm'' dx \stackrel{(5)}{=} hm' - h'm + \int h''m dx$$

Por (3), (4) e (4b)

$$\int (x-3)^2 e^x dx \stackrel{(6)}{=} (x-3)^2 e^x - 2(x-3)e^x + \int 2e^x dx$$

$$\text{Por (5)} \left[ \begin{array}{l} h:=(x-3)^2 \\ h':=2(x-3) \\ h'':=2 \\ m:=e^x \\ m':=e^x \\ m'':=e^x \end{array} \right]$$

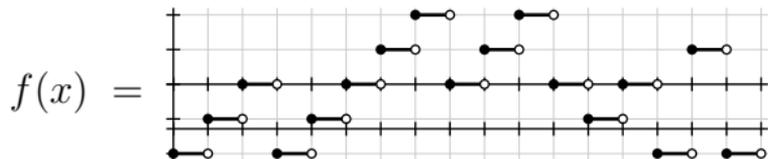
### Questão 3: gabarito



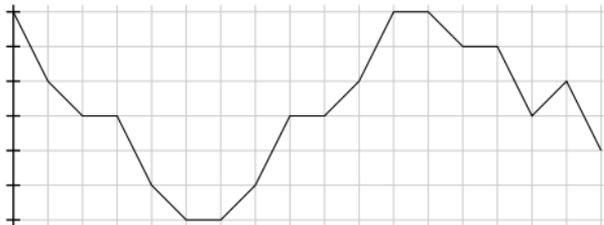
$$\underbrace{\int_{x=1}^{x=3} F'(x) dx}_3 = \underbrace{F(x)|_{x=1}^{x=3}}_{\underbrace{F(3)-F(1)}_{\underbrace{3-2}_1}}$$

**F**

### Questão 4: gabarito



$$F(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t) dt =$$



# Cálculo 2 - 2024.1

Aula 30: EDOLCCs

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

StewPtCap17p6 (p.1020) Equações diferenciais de 2ª ordem  
 StewPtCap17p20 (p.1034) Caso 3: subamortecimento  
 StewPtApendiceHp5 (p.A51) Apêndice H: Números complexos  
 Leit3p22 (p.158)  $D_x[c \cdot f(x)] = c \cdot D_x f(x)$   
 Leit3p22 (p.158)  $D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$   
 BoyceDip3p5 (p.105) Capítulo 3: Equações lineares de 2ª ordem  
 BoyceDip3p11 (p.111) Seção 3.2: o operador diferencial  $L$   
 BoyceDip3p13 (p.113) Teorema 3.2.2: o princípio da superposição  
 BoyceDip3p21 (p.121) 3.3. Raízes complexas da equação característica  
 BoyceDip3p23 (p.123) Figura 3.3.1  
 ZillCullenCap4p33 (p.173) 4.3. Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes  
 ZillCullenCap4p60 (p.196) Exemplo 1: ...pode ser fatorado...  $(D + 3)(D + 2)$   
 ZillCullenCap4p61 (p.197) Exemplo 3  
 ZillCullenCap4p64 (p.200) Exercícios  
 ZillCullenEngCap4p40 (p.150) Factoring operators ...  $(D + 3)(D + 2)$   
 BoyceDipEng3p4 (p.103) Chapter 3: Second-order linear ODEs  
 BoyceDipEng3p11 (p.110) Section 3.2: the differential operator  $L$   
 BoyceDipEng3p13 (p.112) Theorem 3.2.2: principle of superposition  
 BoyceDipEng3p21 (p.120) 3.3 Complex Roots of the Characteristic Equation  
 BoyceDipEng3p24 (p.123) Figure 3.3.1

Quadros:

2hQ61 Aula 30 de 2023.2 (01/nov/2023)

**Aviso:** falta digitar muita coisa! Veja os quadros!

Quadros antigos:

2gQ46 Aula 23 de 2023.1 (20/junho/2023)

2gQ50 Aula 24 de 2023.1 (23/junho/2023)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

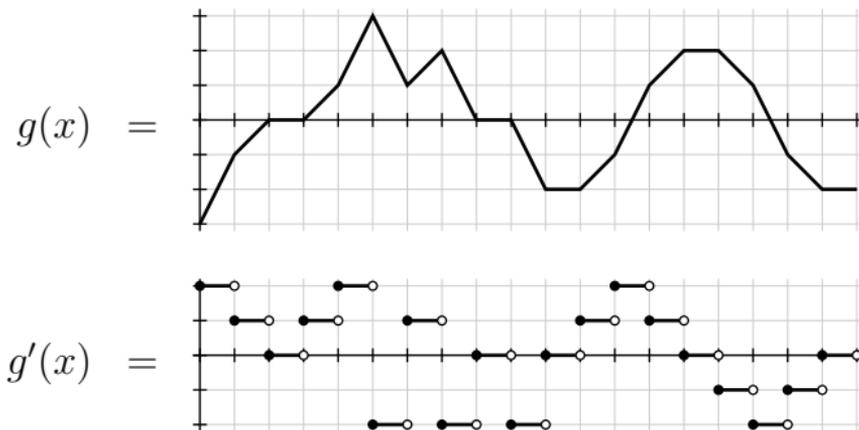
$$(a \ b) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (ac + bd)$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} (a \ b) = \begin{pmatrix} ac & bc \\ ad & bd \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad S - 1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \end{pmatrix} \quad Sf = \begin{pmatrix} f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (S - 1)f = \begin{pmatrix} f(2) - f(1) \\ f(3) - f(2) \\ f(4) - f(3) \\ f(5) - f(4) \\ 0 - f(5) \end{pmatrix}$$

Obs: não usei isso aqui –  
 não deu tempo de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xar tudo...



```

(%i1) D (f) := diff(f,x);
(%o1)          D (f) := diff (f,x)

(%i2) DD(f) := diff(f,x,2);
(%o2)          DD (f) := diff (f,x,2)

(%i3) L (f) := D(D(f)) + D(f) - 6*f;
(%o3)          L (f) := D(D(f)) + D(f) + (-6) f

(%i1) f : exp( 3*x);
(%o1)          e3x

(%i2) f : exp(-3*x);
(%o2)          e-3x

(%i3) f : exp( 2*x);
(%o3)          e2x

(%i4) fp : diff(f,x);
(%o4)          2 e2x

(%i5) fpp : diff(f,x,2);
(%o5)          4 e2x

(%i6) Lf : fpp + fp - 6*f;
(%o6)          0

(%i7)

(%i4) D(x^2);
(%o4)          2 x

(%i5) D(D(x^2));
(%o5)          2

(%i6) L(x^2);
(%o6)          -(6 x2) + 2 x + 2

(%i7) L(exp( 3*x));
(%o7)          6 e3x

(%i8) L(exp(-3*x));
(%o8)          0

(%i9) L(exp( 2*x));
(%o9)          0

(%i10)

```

## Soluções não-básicas

$$\begin{aligned} M(\alpha v + \beta w) &= M(\alpha v) + M(\beta w) \\ &= \alpha(Mv) + \beta(Mw) \end{aligned}$$

$$\underbrace{(D-2)(D+3)}_M \left( \underbrace{42}_\alpha \underbrace{e^{2x}}_v + \underbrace{99}_\beta \underbrace{e^{-3x}}_w \right)$$

$$\begin{aligned} &(D-2)(D+3)(42e^{2x} + 99e^{-3x}) \\ &= 42(D-2)(D+3)e^{2x} + 99(D-2)(D+3)e^{-3x} \\ &= 42 \underbrace{(D+3)(D-2)}_{\underbrace{De^{2x}-2e^{2x}}_{\underbrace{2e^{2x}-2e^{2x}}_0}} e^{2x} + 99 \underbrace{(D-2)(D+3)}_{\underbrace{De^{-3x}+3e^{-3x}}_{\underbrace{-3e^{-3x}+3e^{-3x}}_0}} e^{-3x} \\ &\quad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \quad \quad \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \\ &\quad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \quad \quad \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \end{aligned}$$

## Raízes por chutar-e-testar

```
(%i1) poly0 : (x-2)*(x+5);
(%o1)
      (x - 2) (x + 5)

(%i2) poly1 : expand(poly0);
(%o2)
      x^2 + 3x - 10

(%i3) b : ratcoef(poly1, x, 1); /* coeficiente do x^-1 */
(%o3)
      3

(%i4) c : ratcoef(poly1, x, 0); /* coeficiente do x^0 */
(%o4)
      -10

(%i5)
      divisors(c);
(%o5)
      {1, 2, 5, 10}

(%i6) divs0 : listify(divisors(c));
(%o6)
      [1, 2, 5, 10]

(%i7)
      reverse(divs0);
(%o7)
      [10, 5, 2, 1]

(%i8)
      -reverse(divs0);
(%o8)
      [-10, -5, -2, -1]

(%i9) divs1 : append(-reverse(divs0), divs0);
(%o9)
      [-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10]

(%i10) line(d1) := block([d2:c/d1], [d1,d2,d1*d2,d1+d2])$
(%i11) line(2);
(%o11)
      [2, -5, -10, -3]

(%i12) lines0 : makelist(line(d1), d1, divs1)$
(%i13) lines1 : append([["d1", "d2", "d1*d2", "d1+d2"]], lines0)$
(%i14) apply('matrix, lines1);
(%o14)
      ( d1  d2  d1*d2  d1+d2 )
      (-10  1   -10   -9 )
      (-5   2   -10   -3 )
      (-2   5   -10    3 )
      (-1  10   -10    9 )
      ( 1  -10  -10   -9 )
      ( 2   -5  -10   -3 )
      ( 5   -2  -10    3 )
      (10  -1  -10    9 )

(%i15)
```

# Cálculo 2 - 2024.1

Aula 31: revisão de números complexos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

StewPtCap17p6 (p.1020) Equações diferenciais de 2ª ordem

StewPtCap17p20 (p.1034) Caso 3: subamortecimento

StewPtApêndiceHp5 (p.A51) Apêndice H: Números complexos

BoyceDip3p5 (p.105) Capítulo 3: Equações lineares de 2ª ordem

BoyceDip3p11 (p.111) Seção 3.2: o operador diferencial  $L$

BoyceDip3p13 (p.113) Teorema 3.2.2: o princípio da superposição

BoyceDip3p21 (p.121) 3.3. Raízes complexas da equação característica

BoyceDip3p23 (p.123) Figura 3.3.1

BoyceDipEng3p4 (p.103) Chapter 3: Second-order linear ODEs

BoyceDipEng3p11 (p.110) Section 3.2: the differential operator  $L$

BoyceDipEng3p13 (p.112) Theorem 3.2.2: principle of superposition

BoyceDipEng3p21 (p.120) 3.3 Complex Roots of the Characteristic Equation

BoyceDipEng3p24 (p.123) Figure 3.3.1

[https://en.wikipedia.org/wiki/Complex\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number) (bom)

[https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero\\_complexo](https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complexo) (ruim, cheio de erros)

2yT12 (Gabarito da P1 de 2019.2) A questão 3 usa o truque do  $E$

HernandezP57 (p.47) principais identidades trigonométricas

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$z, w \in \mathbb{C}$$

$$\theta \in \mathbb{R}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

(ângulo)

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= a(c + di) + bi(c + di) \\ &= ac + adi + bic + bidi \\ &= ac + adi + bci + bd(i^2) \\ &= ac + adi + bci + bd(-1) \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= ac - bd + adi + bci \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(a + bi) = a$$

(parte real)

$$\operatorname{Im}(a + bi) = b$$

(parte imaginária)

$$z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i$$

(isto sempre vale)

$$\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)i$$

(conjugado: definição fácil)

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

(conjugado: definição difícil)

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$$

(módulo/norma: definição fácil)

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(módulo/norma: definição difícil)

$$\begin{aligned} (ae^{i\alpha})(be^{i\beta}) &= (ab)(e^{i\alpha} e^{i\beta}) \\ &= (ab)(e^{i\alpha+i\beta}) \\ &= (ab)(e^{i(\alpha+\beta)}) \\ &= (ab)(e^{i(\alpha+\beta)}) \end{aligned}$$

$$180^\circ = \pi$$

(← lembre)

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

(← lembre)

$$42^\circ = 42 \frac{\pi}{180}$$

$$^\circ = \frac{\pi}{180}$$

(podemos tratar o  $^\circ$  como uma constante)

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

(vamos entender isto aos poucos)

$$E = c + is$$

(abreviação pra igualdade acima)

$$z = |z| e^{i \operatorname{arg}(z)}$$

(vamos entender isto aos poucos)

$$1 + i = |1 + 1i| e^{i \operatorname{arg}(1+i)}$$

(← exemplo)

$$= \sqrt{1^2 + 1^2} e^{i45^\circ}$$

$$= \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

## “Partes de cima”

Fórmulas e definições:

$$\begin{aligned}
 e^{i\theta} &= \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta & E &= c + is \\
 e^{ik\theta} &= \cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta & e^{ik\theta} &= \cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta \\
 e^{-i\theta} &= \cos -\theta + i \operatorname{sen} -\theta & E^{-1} &= \cos -\theta + i \operatorname{sen} -\theta \\
 &= \cos \theta + i(-\operatorname{sen} \theta) & &= c + i(-s) \\
 &= \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta & &= c - i(s) \\
 e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta & E + E^{-1} &= c + is \\
 &+ \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta & &+ c - is \\
 &= 2 \cos \theta & &= 2c \\
 e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta & E - E^{-1} &= c + is \\
 &- (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) & &- (c - is) \\
 &= 2i \operatorname{sen} \theta & &= 2is \\
 \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \cos \theta & \frac{E + E^{-1}}{2} &= c \\
 \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} &= \operatorname{sen} \theta & \frac{E - E^{-1}}{2i} &= s \\
 \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2} &= \cos k\theta & \frac{E^k + E^{-k}}{2} &= \cos k\theta \\
 \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i} &= \operatorname{sen} k\theta & \frac{E^k - E^{-k}}{2i} &= \operatorname{sen} k\theta \\
 \operatorname{ccos} \theta &= e^{i\theta} + e^{-i\theta} & \operatorname{ccos} \theta &= E + E^{-1} \\
 \operatorname{csen} \theta &= e^{i\theta} - e^{-i\theta} & \operatorname{csen} \theta &= E - E^{-1} \\
 \operatorname{ccos} k\theta &= e^{ik\theta} + e^{-ik\theta} & \operatorname{ccos} k\theta &= E^k + E^{-k} \\
 \operatorname{csen} k\theta &= e^{ik\theta} - e^{-ik\theta} & \operatorname{csen} k\theta &= E^k - E^{-k}
 \end{aligned}$$

O seno e o cosseno “são” frações.

O **C**sen é a “parte de cima” do seno.

O **C**cos é a “parte de cima” do cosseno.

Um exemplo do método:

$$\begin{aligned}
 (\cos \theta)^3 &= \left(\frac{1}{2} \operatorname{ccos} \theta\right)^3 \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 (\operatorname{ccos} \theta)^3 \\
 (\operatorname{ccos} \theta)^3 &= (E + E^{-1})^3 \\
 &= E^3 + 3E + 3E^{-1} + E^{-3} \\
 &= (E^3 + E^{-3}) + (3E + 3E^{-1}) \\
 &= \operatorname{ccos} 3\theta + 3 \operatorname{ccos} \theta \\
 (\cos \theta)^3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 (\operatorname{ccos} \theta)^3 \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 (\operatorname{ccos} 3\theta + 3 \operatorname{ccos} \theta) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \operatorname{ccos} 3\theta + 3 \frac{1}{2} \operatorname{ccos} \theta\right) \\
 &= \frac{1}{4} (\operatorname{ccos} 3\theta + 3 \operatorname{ccos} \theta)
 \end{aligned}$$

Pra mim a parte do meio é a parte legal das contas, e as partes de cima e de baixo são as partes chatas (por causa das frações).

Compare com o gabarito da questão 3 daqui:

2yT12 (Gabarito da P1 de 2019.2)

### Exercício

Use a técnica acima pra integrar:

- $\int (\cos \theta)^2 d\theta$
- $\int (\operatorname{sen} \theta)^2 d\theta$
- $\int (\operatorname{sen} \theta)(\cos \theta) d\theta$
- $\int (\operatorname{sen} 2\theta)(\cos 3\theta) d\theta$

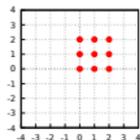
```
(%i1) as_33 : create_list(x%i*y, y, seqn(2,0,2), x, seqn(0,2,2));
(%o1) [2i,2i+1,2i+2,i,i+1,i+2,0,1,2]
```

```
(%i2) as_55 : create_list(x%i*y, y, seqn(2,0,4), x, seqn(0,2,4))$
```

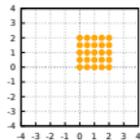
```
(%i3) as : as_33;
(%o3) [2i,2i+1,2i+2,i,i+1,i+2,0,1,2]
```

```
(%i4) xrange(r) := [xr(-r,r), yr(-r,r), more(proportional_axes=xy)];
(%o4) xrange(r) := [xr(-r,r), yr(-r,r), more(proportional_axes = xy)]
```

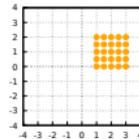
```
(%i5) myqdraw_nhr(n,h,r,[rest]) :=
myqdraw(format("complex--a",n), format("height--acm",h), xrange(r), rest);
(%i6) myqdraw_nhr(1,5,4, zpts(as_33, myps(4),pc(red)));
(%o6)
```



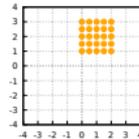
```
(%i7) myqdraw_nhr(2,5,4, zpts(as_55, myps(4),pc(orange)));
(%o7)
```



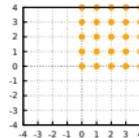
```
(%i8) myqdraw_nhr(3,5,4, zpts(as_55+1, myps(4),pc(orange)));
(%o8)
```



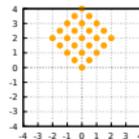
```
(%i9) myqdraw_nhr(4,5,4, zpts(as_55%i, myps(4),pc(orange)));
(%o9)
```



```
(%i10) myqdraw_nhr(5,5,4, zpts(as_55*2, myps(4),pc(orange)));
(%o10)
```

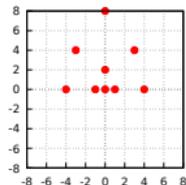


```
(%i11) myqdraw_nhr(6,5,4, zpts(as_55*(1+i), myps(4),pc(orange)));
(%o11)
```

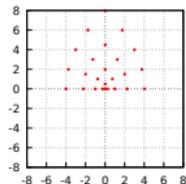


```
(%i12)
```

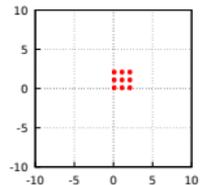
```
(%i12) asq_33 : makelist(z^2, z, as_33)$
(%i13) asq_55 : makelist(z^2, z, as_55)$
(%i14) myqdraw_nhr(7,5,8, zpts(asq_33, myps(4),pc(red)));
(%o14)
```



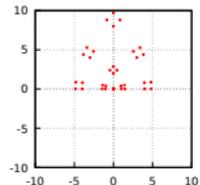
```
(%i15) myqdraw_nhr(8,5,8, zpts(asq_55, myps(1),pc(red)));
(%o15)
```



```
(%i16) as_22 : create_list(x+%i*y, y, seqn(0,1,1), x, seqn(0,1,1))$
(%i17) as_332 : create_list(z+w, z, as_33, w, as_22*0.2)$
(%i18) asq_332 : makelist(z^2, z, as_332)$
(%i19) myqdraw_nhr( 9,5,10, zpts(as_332, myps(1),pc(red)));
(%o19)
```



```
(%i20) myqdraw_nhr(10,5,10, zpts(asq_332, myps(1),pc(red)));
(%o20)
```



```
(%i21)
```

(%i1) p : 4\*x^2 + 5\*x^1 + 6\*x^0 + 7\*x^-1 + 8\*x^-2;  
 (%o1)

$$4x^2 + 5x + \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2} + 6$$

(%i2) q : 4\*E^2 + 5\*E^1 + 6\*E^0 + 7\*E^-1;  
 (%o2)

$$4E^2 + 5E + \frac{7}{E} + 6$$

(%i3) lpdot(p, x);  
 (%o3)

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & . & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

(%i4) lpdot(q, E);  
 (%o4)

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & . & 7 \end{pmatrix}$$

(%i5) f : cos(th)^3;  
 (%o5)

$$(\cos \theta)^3$$

(%i6) g : ccos(th)^3;  
 (%o6)

$$8 (\cos \theta)^3$$

(%i7) lpe(f);  
 (%o7)

$$\frac{\cos(3\theta)}{4} + \frac{3 \cos \theta}{4}$$

(%i8) lpe(g);  
 (%o8)

$$2 \cos(3\theta) + 6 \cos \theta$$

(%i9)

(%i9) exponentialize(f);  
 (%o9)

$$\frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3}{8}$$

(%i10) expand(exponentialize(f));  
 (%o10)

$$\frac{e^{3i\theta}}{8} + \frac{3e^{i\theta}}{8} + \frac{3e^{-i\theta}}{8} + \frac{e^{-3i\theta}}{8}$$

(%i11) demivre(expand(exponentialize(f)));  
 (%o11)

$$\frac{i \sin(3\theta) + \cos(3\theta)}{8} + \frac{\cos(3\theta) - i \sin(3\theta)}{8} + \frac{3(i \sin \theta + \cos \theta)}{8} + \frac{3(\cos \theta - i \sin \theta)}{8}$$

(%i12) expand(demivre(expand(exponentialize(f))));  
 (%o12)

$$\frac{\cos(3\theta)}{4} + \frac{3 \cos \theta}{4}$$

(%i13) subst(th\_E, expand(exponentialize(f)));  
 (%o13)

$$\frac{E^3}{8} + \frac{3E}{8} + \frac{3}{8E} + \frac{1}{8E^3}$$

(%i14) subst(th\_E, expand(exponentialize(g)));  
 (%o14)

$$E^3 + 3E + \frac{3}{E} + \frac{1}{E^3}$$

(%i15) lpe(f);  
 (%o15)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & . & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

(%i16) lpe(g);  
 (%o16)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & . & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i17) lpE( ccos(th)^3);

(%o17)

$$(1 \ 0 \ 3 \ 0 \ . \ 3 \ 0 \ 1)$$

(%i18) lpE( ccos(th));

(%o18)

$$(1 \ 0 \ . \ 1)$$

(%i19) lpE(3\*ccos(th));

(%o19)

$$(3 \ 0 \ . \ 3)$$

(%i20) lpE(ccos(3\*th));

(%o20)

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ . \ 0 \ 0 \ 1)$$

(%i21) lpE(ccos(3\*th)+3\*ccos(th));

(%o21)

$$(1 \ 0 \ 3 \ 0 \ . \ 3 \ 0 \ 1)$$

(%i22)

lpE( ccos(th) );

(%o22)

$$(1 \ 0 \ . \ 1)$$

(%i23) lpE( ccos(th)^2 );

(%o23)

$$(1 \ 0 \ 2 \ . \ 0 \ 1)$$

(%i24) lpE( ccos(th)^3 );

(%o24)

$$(1 \ 0 \ 3 \ 0 \ . \ 3 \ 0 \ 1)$$

(%i25) lpE( csin(th) );

(%o25)

$$(1 \ 0 \ . \ -1)$$

(%i26) lpE( csin(th)^2 );

(%o26)

$$(1 \ 0 \ -2 \ . \ 0 \ 1)$$

(%i27) lpE( csin(th)^3 );

(%o27)

$$(1 \ 0 \ -3 \ 0 \ . \ 3 \ 0 \ -1)$$

(%i28) lpE( csin(2\*th) );

(%o28)

$$(1 \ 0 \ 0 \ . \ 0 \ -1)$$

(%i29) lpE( csin(2\*th)^2 );

(%o29)

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

(%i30)

# Cálculo 2 - 2024.1

Aula 34: EDOs lineares

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

[StewPtCap9p37](#) (p.557) 9.5 Equações Lineares

[StewPtCap9p41](#) (p.561) 9.5 Exercícios

[BoyceDip2p5](#) (p.23) 2.1 Equações lineares; método dos fatores integrantes

[BoyceDip2p11](#) (p.29) Problemas

[BoyceDipEng2p4](#) (p.24) 2.1 Linear Differential Equations; Method of Integrating Factors

[BoyceDipEng2p11](#) (p.31) Problems

[ZillCullenCap2p33](#) (p.68) 2.5 Equações lineares

[ZillCullenCap2p42](#) (p.77) 2.5 Exercícios

[ZillCullenEngCap2p26](#) (p.53) 2.3 Linear equations

[ZillCullenEngCap2p33](#) (p.60) Exercises 2.3

[DiffyQsP40](#) 1.4 Linear equations and the integrating factor

[DiffyQsP43](#) 1.4.1 Exercises

[2hQ77](#) Quadros da aula 35 de 2023.2 (06/ago/2024)

[2iQ86](#) Quadros da aula 34 de 2024.1 (06/ago/2024)

## O método

Aqui a gente tem a explicação do Stewart de como resolver EDOs lineares com todas as partes em português deletadas:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad [1]$$

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' \quad [3]$$

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x) \quad [4]$$

$$I(x)y = \int I(x)Q(x) dx + C$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[ \int I(x)Q(x) dx + C \right] \quad [4]$$

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$

$$I(x)P(x) = I'(x)$$

$$\int \frac{1}{I} dI = \int P(x) dx$$

$$I(x) = Ae^{\int P(x) dx}$$

$$A = \pm e^C$$

$$A = 1$$

$$I(x) = e^{\int P(x) dx} \quad [5]$$

Repare que sem as partes em português ela vira algo que só gênios conseguem decifrar – e um dos nossos objetivos neste curso é aprender a organizar as contas de modo que elas fiquem fáceis de entender, de justificar e de verificar.

Se a gente deixa só as linhas [1], [4] e [5] e põe elas nesta ordem,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad [1]$$

$$I(x) = e^{\int P(x) dx} \quad [5]$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[ \int I(x)Q(x) dx + C \right] \quad [4]$$

o método fica bem claro: pra resolver uma EDO da forma [1] a gente define um fator integrante  $I(x)$  usando a definição da linha [5], e aí as nossas soluções vão ser as funções  $y(x)$  da linha [4], onde  $C$  é uma constante qualquer.

Agora se a gente precisar resolver EDOs lineares basta aplicar um método que cabe em três linhas. Eu prefiro escrever ele usando outras letras,

$$y(x) \Rightarrow f(x)$$

$$P(x) \Rightarrow g(x)$$

$$\int P(x) dx \Rightarrow G(x)$$

$$Q(x) \Rightarrow h(x)$$

$$I(x) \Rightarrow m(x)$$

o omitindo os ' $(x)$ ' na maioria dos lugares. A tradução é isto,

$$f' + gf = h$$

$$m = e^G$$

$$f = \frac{1}{m} \left( \int mh dx + C \right)$$

mas eu vou preferir escrever ela deste jeito:

$$[\text{EL}_3] = \begin{pmatrix} f' + fg = h \\ G' = g \\ f = e^{-G} \left( \int e^G h dx + C \right) \end{pmatrix}$$

### Exercício 0

O Stewart começa por este exemplo, que ele chama de [2]:

StewPtCap9p37 (p.557)  $y' + \frac{1}{x}y = 2$

Seja  $[S_1] = \begin{bmatrix} g := 1/x \\ h := 2 \\ G := \ln x \end{bmatrix}$ .

- Use  $[\text{EL}_3][S_1]$  pra obter a solução geral da EDO [2].
- Chame esta solução geral de  $f_1(x)$  – use um “seja”! – e teste-a.
- Encontre a solução particular que passa pelo ponto  $(2, 5)$ .
- Chame esta solução particular de  $f_2(x)$  – use um “seja”! – e teste-a.

## O que realmente importa

### Exercício importantíssimo!!!

Entenda isto aqui e reescreva num formato BEM mais fácil de entender:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + P(x)y &= Q(x) & [1] \\ I(x)(y' + P(x)y) &= (I(x)y)' & [3] \\ (I(x)y)' &= I(x)Q(x) \\ I(x)y &= \int I(x)Q(x) dx + C \\ y(x) &= \frac{1}{I(x)} \left[ \int I(x)Q(x) dx + C \right] & [4] \\ I(x)y' + I(x)P(x)y &= (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y' \\ I(x)P(x) &= I'(x) \\ \int \frac{1}{I} dI &= \int P(x) dx \\ I(x) &= Ae^{\int P(x) dx} \\ A &= \pm e^C \\ A &= 1 \\ I(x) &= e^{\int P(x) dx} & [5] \end{aligned}$$

(%i1) e1 : 'diff(y,x) + 1/x \* y = 2;

(%o1)

$$\frac{d}{dx}y + \frac{y}{x} = 2$$

(%i2) e2 : ode2(e1,y,x);

(%o2)

$$y = \frac{x^2 + \%c}{x}$$

(%i3) solve(e2, %c);

(%o3)

$$[\%c = x y - x^2]$$

(%i4) e3 : solve(e2, %c)[1];

(%o4)

$$\%c = x y - x^2$$

(%i5) e4 : subst([x=2,y=5], e2);

(%o5)

$$5 = \frac{\%c + 4}{2}$$

(%i6) solve(e4, %c);

(%o6)

$$[\%c = 6]$$

(%i7) e4 : solve(e4, %c)[1];

(%o7)

$$\%c = 6$$

(%i8) subst(e4,e2);

(%o8)

$$y = \frac{x^2 + 6}{x}$$

(%i9) define(f2(x), rhs(subst(e4,e2)));

(%o9)

$$f2(x) := \frac{x^2 + 6}{x}$$

(%i10) e5 : subst([y=f2(x)], e1);

(%o10)

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 + 6}{x} \right) + \frac{x^2 + 6}{x^2} = 2$$

(%i11) ev(e5, diff);

(%o11)

$$2 = 2$$

(%i12)

# Cálculo 2 - 2024.1

Aula 35: o método dos  
coeficientes a determinar

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF  
<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

- [BoyceDip3p33](#) (p.134) 3.5. Equações não-homogêneas; método dos coeficientes indeterminados
- [BoyceDip4p9](#) (p.176) 4.2. Equações homogêneas com coeficientes constantes
- [BoyceDip4p16](#) (p.183) 4.3. O método dos coeficientes indeterminados
- [BoyceDipEng3p34](#) (p.133) "3.5 Nonhomogeneous Equations; Method of Undetermined Coefficients
- [BoyceDipEng4p9](#) (p.174) 4.2 Homogeneous Differential Equations with Constant Coefficients
- [BoyceDipEng4p16](#) (p.181) 4.3 The Method of Undetermined Coefficients
- [ZillCullenCap4p46](#) (p.182) 4.4. Coeficientes indeterminados - abordagem por superposição
- [ZillCullenCap4p59](#) (p.195) 4.5. Operadores diferenciais
- [ZillCullenCap4p60](#) (p.196) Exemplo 1: ...pode ser fatorado...
- [ZillCullenCap4p65](#) (p.201) 4.6. Coeficientes indeterminados - abordagem por anuladores
- [ZillCullenEngCap4p30](#) (p.140) 4.4 Undetermined Coefficients - Superposition Approach
- [ZillCullenEngCap4p40](#) (p.150) 4.5 Undetermined Coefficients - Annihilator Approach
- [ZillCullenEngCap4p40](#) (p.150) Factoring operators
- [2hQ85](#) Aula 38 de 2023.2, sobre coeficientes a determinar (21/nov/2023)

## Questão 2 (da P2 de 2023.1)

**(Total: 4.0 pts)**

Lembre que nós vimos dois tipos de EDOs lineares com coeficientes constantes — “EDOLCCs” — no curso: o primeiro tipo tinha soluções básicas da forma  $e^{ax}$  e  $e^{bx}$ , onde  $a$  e  $b$  são reais, e o segundo tipo tinha “soluções básicas complexas” da forma  $e^{(a+ib)x}$  e  $e^{(a-ib)x}$  e “soluções básicas reais” da forma  $e^{\alpha x} \cos \beta x$  e  $e^{\alpha x} \sin \beta x$ ; as soluções básicas reais eram combinações lineares das soluções básicas complexas e vice-versa.

Sejam (\*\*) e (\*\*\*) as EDOs abaixo:

$$\begin{aligned} y'' + y' - 20y &= 0 & (**) \\ y'' + 4y' + 29y &= 0 & (***) \end{aligned}$$

A EDO (\*\*) é do primeiro tipo e a EDO (\*\*\*) é do segundo tipo.

Original aqui:

2gT135 (2023.1) P2, questão 2

a) **(0.5 pts)** Encontre as soluções básicas e a solução geral da EDO (\*\*). Dê um nome para cada uma delas.

b) **(1.5 pts)** Encontre uma solução da EDO (\*\*) – vou chamá-la de  $g(x)$  – que obedece  $g(0) = 4$  e  $g'(0) = 5$ , e teste-a. Dica: você vai ter que resolver um sistema pra descobrir a quantidade certa de cada “vetor” na combinação linear!

c) **(0.5 pts)** Diga quais são as “soluções básicas complexas” e as “soluções básicas reais” para a EDO (\*\*\*)

d) **(1.5 pts)** Escolha uma das suas “soluções básicas reais” do item anterior e verifique que ela realmente é uma solução da EDO (\*\*\*)

## Três exemplos

Na aula 38 – fotos do quadros: [2hQ85](#) – nós resolvemos três exemplos:

$$\text{(Ex1): } y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$$

$$\text{(Ex2): } y'' - 3y' - 4y = 2 \operatorname{sen} x$$

$$\text{(Ex2.5): } y'' - 3y' - 4y = 4x^2 - 1$$

Eu peguei esses exemplos daqui:

[BoyceDip3p33](#) 3.5 (...) coeficientes indeterminados

[BoyceDip3p35](#) Exemplo 1

[BoyceDipEng3p34](#) 3.5 (...) Undetermined Coefficients

[BoyceDipEng3p36](#) Example 1

# Cálculo 2 - 2024.1

Aulas 36 e 37: EDOs exatas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

StewPtCap14p25 (p.811) 14.3 Derivadas Parciais

StewPtCap14p45 (p.831) 14.5 A Regra da Cadeia

StewPtCap14p47 (p.833) A Regra da Cadeia (versão geral)

BoyceDip2p54 (p.72) 2.6 Equações Exatas e Fatores Integrantes

BoyceDip2p58 (p.76) Problemas

BoyceDipEng2p50 (p.70) 2.6 Exact Differential Equations and Integrating Factors

BoyceDipEng2p55 (p.75) Problems

ZillCullenCap2p25 (p.60) 2.4 Equações exatas

ZillCullenCap2p32 (p.67) Exercícios

ZillCullenEngCap2p35 (p.62) 2.4 Exact equations

ZillCullenEngCap2p41 (p.68) Exercises 2.4

DiffyQsP63 1.8 Exact Equations

DiffyQsP70 1.8.3 Exercises

2yT14 (2019.2) P2

<http://angq.twu.net/LATEX/2019-2-C2-P2.pdf>

2iQ93 (2024.1) Quadros das aulas sobre EDOs exatas

2hQ73 (2023.2) Quadros das aulas sobre EDOs exatas

2yQ106 (2019.2) Quadros das aulas sobre EDOs exatas

## Método e exemplo

$$[E_5] = \begin{pmatrix} dz = z_x dx + z_y dy = 0 \\ \frac{d}{dx} z = z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{pmatrix}$$

$$[E_5][S_1] = \begin{pmatrix} d(x^2 y^3) = (2xy^3)dx + (3x^2 y^2)dy = 0 \\ \frac{d}{dx}(x^2 y^3) = (2xy^3) + (3x^2 y^2) \frac{dy}{dx} = 0 \\ (x^2 y^3) = C \end{pmatrix}$$

$$[E_3] = \begin{pmatrix} z_x dx + z_y dy = 0 \\ z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{pmatrix}$$

$$[E_3][S_1] = \begin{pmatrix} (2xy^3)dx + (3x^2 y^2)dy = 0 \\ (2xy^3) + (3x^2 y^2) \frac{dy}{dx} = 0 \\ (x^2 y^3) = C \end{pmatrix}$$

$$[E_2] = \begin{pmatrix} z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{pmatrix}$$

$$[E_2][S_1] = \begin{pmatrix} (2xy^3) + (3x^2 y^2) \frac{dy}{dx} = 0 \\ (x^2 y^3) = C \end{pmatrix}$$

$$[S_1] = \begin{bmatrix} z := (x^2 y^3) \\ z_x := (2xy^3) \\ z_y := (3x^2 y^2) \end{bmatrix}$$

## Uma questão da P2 de 2019.2

4) Sejam (\*\*\*) e (\*\*\*\*) estas EDOs:

$$2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy = 0 \quad (***)$$

$$2x^2y^3 dx + 3x^3y^2 dy = 0 \quad (****)$$

- a) **(0.5 pts)** Mostre que (\*\*\*) é exata.  
 b) **(0.5 pts)** Encontre a solução geral de (\*\*\*)  
 c) **(1.0 pts)** Teste a sua solução geral da (\*\*\*)  
 d) **(0.5 pts)** Mostre que a solução geral da EDO (\*\*\*) também é solução da (\*\*\*\*).  
 e) **(0.5 pts)** Mostre que (\*\*\*\*) não é exata.  
 f) **(0.5 pts)** Mostre que o fator integrante obtido por

$$p(x) = (M_y - N_x)/N,$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

transforma (\*\*\*\*) em (\*\*\*)

Versão original:

<http://angg.twu.net/LATEX/2019-2-C2-P2.pdf>

# Cálculo 2 - 2024.1

P2 (segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

<http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#2024-1-C2-P2>  
(find-es "maxima" "2024-1-C2-P2")

## Questão 1

(Total: 4.0 pts)

Lembre que no curso eu mostrei que o meu modo preferido de escrever o “método” para resolver EDOs com variáveis separáveis — “EDOVs” — é o “método” [M] abaixo... eu pus o termo “método” entre aspas porque alguns dos passos da [M] são gambiarras nas quais a gente não pode confiar totalmente, e aí a gente precisa sempre testar as nossas soluções. O abaixo — a “fórmula” — é uma versão resumida do [M].

$$\begin{aligned}
 \text{[M]} &= \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y) dy = g(x) dx \\ \int h(y) dy = \int g(x) dx \\ \parallel \\ H(y) + C_1 \qquad G(x) + C_2 \\ H(y) = G(x) + C_2 - C_1 \\ \qquad = G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \\
 \text{[F3]} &= \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Seja  $(*)$  esta EDOVs:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2(x-1)}{2(y-1)} \quad (*)$$

a) (1.0 pts) Desenhe os tracinhos do campo de direções da EDO  $(*)$  nos pontos com  $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Aqui você vai ter que desenhar 25 tracinhos e vai ter que caprichar – um tracinho com coeficiente angular  $\frac{1}{2}$  tem que ser visualmente bem diferente de um com coeficiente angular 1 e de um com coeficiente angular 2.

b) (1.5 pts) Encontre as duas soluções gerais da EDO  $(*)$  – a solução “positiva” e a “negativa” e dê nomes para elas.

c) (0.5 pts) Teste a sua solução “negativa”.

d) (0.5 pts) Encontre a solução particular que passa pelo ponto  $(-3, 4)$ .

e) (0.5 pts) Encontre a solução particular que passa pelo ponto  $(-3, -2)$ .

**Muito importante:** em todas as questões desta prova eu vou corrigir as respostas de vocês como se eu fosse o “colega menos seu amigo e sem paciência pra adivinhar nada” da Dica 7 e do slide sobre contextos... por exemplo, se você escrever só “ $a = 42$ ” eu vou interpretar isso como “aquí essa pessoa tá dizendo que é óbvio que ‘ $a = 42$ ’ é sempre verdade – e isso é falso!!!”, e aí babau. Ou seja, a parte em português das questões de vocês vai ser MUUUUITO importante!

**Questão 2****(Total: 2.5 pts)**Sejam  $(*_2)$  e  $(*_3)$  as EDOs abaixo:

$$y'' - 3y' - 10y = 0 \quad (*_2)$$

$$y'' + 4y' + 29y = 0 \quad (*_3)$$

- a) **(0.5 pts)** Encontre as soluções básicas e a solução geral da EDO  $(*_2)$ . Dê um nome para cada uma delas.
- b) **(1.0 pts)** Encontre uma solução  $g(x)$  da EDO  $(*_2)$  que obedeça isto aqui:  $g(0) = 3$ ,  $g'(0) = -1$ .
- c) **(1.0 pts)** Encontre as soluções básicas complexas e as soluções básicas reais da EDO  $(*_3)$ .

**Questão 3****(Total: 1.5 pts)**Seja  $(*_4)$  esta EDO:

$$y' - \frac{2y}{x} = 3x$$

- a) **(0.5 pts)** Encontre a solução geral dela.
- b) **(1.0 pts)** Teste a sua solução.

Lembre que você pode usar este método:

$$[EL_3] = \left( \begin{array}{l} f' + fg = h \\ G' = g \\ f = e^{-G}(\int e^G h dx + C) \end{array} \right)$$

**Questão 4****(Total: 1.0 pts)**4) Sejam  $(*_5)$  e  $(*_6)$  estas EDOs:

$$2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy = 0 \quad (*_5)$$

$$2x^2y^3 dx + 3x^3y^2 dy = 0 \quad (*_6)$$

- a) **(0.1 pts)** Mostre que a  $(*_5)$  é exata.
- b) **(0.1 pts)** Mostre que  $(*_6)$  não é exata.
- c) **(0.4 pts)** Encontre a solução geral de  $(*_5)$ .
- d) **(0.4 pts)** Teste a sua solução geral da  $(*_5)$ .

Lembre que você pode usar este método:

$$[E_5] = \left( \begin{array}{l} dz = z_x dx + z_y dy = 0 \\ \frac{d}{dx} z = z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{array} \right)$$

**Questão 5****(Total: 1.0 pts)**

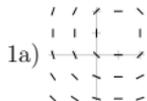
Seja

$$f(x) = 4 - 2x.$$

Rode o gráfico de  $f$  entre  $y = 0$  e  $y = 2$  em torno do eixo  $y$ , e chame a figura que você obteve de  $C$ . Chame de  $S$  o sólido de revolução que é o fecho convexo de  $C$  - vou explicar isso no quadro.

- a) **(0.5 pts)** Represente graficamente  $C$  e  $S$ .
- b) **(0.5 pts)** Calcule o volume de  $S$ .

# Mini-gabarito



(%i1) solpon;  
(%o1)

$$y = \sqrt{-x^2 + 2x - 2}c + 1 + 1$$

(%i2) solneg;  
(%o2)

$$y = 1 - \sqrt{-x^2 + 2x - 2}c + 1$$

(%i3) e1c : subst(solneg, star1);

(%o3)

$$\frac{d}{dx} \left( 1 - \sqrt{-x^2 + 2x - 2}c + 1 \right) = \frac{x-1}{\sqrt{-x^2 + 2x - 2}c + 1}$$

(%i4) ev(e1c, 'derivative);

(%o4)

$$-\left( \frac{2-2x}{2\sqrt{-x^2 + 2x - 2}c + 1} \right) = \frac{x-1}{\sqrt{-x^2 + 2x - 2}c + 1}$$

(%i5) e1d;

(%o5)

$$y = \sqrt{-x^2 + 2x + 24} + 1$$

(%i6) e1e;

(%o6)

$$y = 1 - \sqrt{-x^2 + 2x + 24}$$

(%i1) g : rhs(ode2(star2,y,x));

(%o1)

$$\%k1 e^{5x} + \%k2 e^{-2x}$$

(%i2) f1 : subst([[k1=1,%k2=0], g];

(%o2)

$$e^{5x}$$

(%i3) f2 : subst([[k1=0,%k2=1], g];

(%o3)

$$e^{-2x}$$

(%i4) h;

(%o4)

$$\frac{5e^{5x}}{7} + \frac{16e^{-2x}}{7}$$

(%i5) ode2(star3,y,x);

(%o5)

$$y = e^{-2x} (\%k1 \sin(5x) + \%k2 \cos(5x))$$

(%i1) exact5;

(%o1)

$$6x y^2 = 6x y^2$$

(%i2) notexact6;

(%o2)

$$6x^2 y^2 = 9x^2 y^2$$

(%i3) sol5;

(%o3)

$$y = \frac{\%c}{x^{\frac{3}{2}}}$$

(%i4) test5;

(%o4)

$$3\%c^2 \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{\%c}{x^{\frac{3}{2}}} \right) \right) x^{\frac{3}{2}} + \frac{2\%c^3}{x} = 0$$

(%i5) ev(test5, 'derivative);

(%o5)

$$0 = 0$$

(%i1) star4 : 'diff(y,x) - 2\*y/x - 3\*x;

(%o1)

$$\frac{d}{dx} y - \frac{2y}{x} = 3x$$

(%i2) sol : ode2(star4,y,x);

(%o2)

$$y = x^2 (3 \log x + \%c)$$

(%i3) e1 : subst(sol, star4);

(%o3)

$$\frac{d}{dx} (x^2 (3 \log x + \%c)) - 2x (3 \log x + \%c) = 3x$$

(%i4) e2 : ev(e1, 'derivative);

(%o4)

$$3x = 3x$$

(%i1) e1 : y = 4-2\*x;

(%o1)

$$y = 4 - 2x$$

(%i2) e2 : solve(e1,x)[1];

(%o2)

$$x = -\left( \frac{y-4}{2} \right)$$

(%i3) define(raio(y), rhs(e2));

(%o3)

$$\text{raio}(y) := -\left( \frac{y-4}{2} \right)$$

(%i4) define(area(y), %pi + raio(y)^2);

(%o4)

$$\text{area}(y) := \frac{\pi (y-4)^2}{4}$$

(%i5) integrate(area(y),y,0,2);

(%o5)

$$\frac{14\pi}{3}$$

# Cálculo 2 - 2024.1

Prova de reposição (VR)  
pra quem perdeu a P1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF  
<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

**Questão 1****(Total: 4.0 pts)**

Resolva a integral abaixo por substituição trigonométrica e teste o seu resultado. Dica: você vai ter que começar com a mudança de variável  $u = 3x$ .

$$\int x^3 \sqrt{1 - 9x^2} dx .$$

**Questão 2****(Total: 4.0 pts)**

Lembre que:

$$[\text{IP}] = \left( \int fg' dx = fg - \int f'g dx \right)$$

Complete as contas abaixo. Use uma folha inteira. Adicione mais linhas se precisar. Vou dar algumas dicas no quadro.

$$\begin{aligned} \int hm'' dx &\stackrel{(1)}{=} ? \quad \text{Por [IP]} \left[ \begin{array}{l} f:=h \\ g:=m' \\ (...) \end{array} \right] \\ \int h'm' dx &\stackrel{(2)}{=} ? \quad \text{Por [IP]} [(...)] \\ \int hm'' dx &\stackrel{(3)}{=} ? \quad \text{Cópia da (1)} \\ &\stackrel{(4)}{=} ? \quad \text{Por (2)} \\ \int hm'' dx &\stackrel{(5)}{=} ? \quad \text{Por (3) e (4)} \\ \int (x-4)^2 (100e^{10x}) dx &\stackrel{(6)}{=} ? \quad \text{Por (5)} [(...)] \end{aligned}$$

**Dicas:**

1) Nestas questões o que vai contar mais pontos é você organizar as contas de modo que cada passo seja fácil de entender, de verificar, e de justificar – “chegar no resultado certo” vai valer relativamente pouco.

2) Recomento que vocês usem o método das “caixinhas de anotações” nas mudanças de variável... numa caixinha de anotações a primeira linha diz a relação entre a variável nova e a antiga, todas as outras linhas são consequências da primeira, e dentro da caixinha de anotações você pode usar as gambiarras com variáveis dependentes e diferenciáveis, como isto aqui:  $dx = 42 du...$

3) ...por exemplo:

$$\left[ \begin{array}{l} s = \sin \theta \\ \sqrt{1 - s^2} = \cos \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ \theta = \arcsen s \end{array} \right]$$

**Questão 3****(Total: 1.0 pts)**

No curso nós definimos que pra nós a “fórmula” do TFC2 seria esta aqui:

$$[\text{TFC2}] = \left( \int_{x=a}^{x=b} F'(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Mostre que quando  $a = 1$ ,  $b = 3$  e

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{quando } x < 2, \\ x & \text{quando } x \geq 2 \end{cases}$$

a fórmula [TFC2] é falsa.

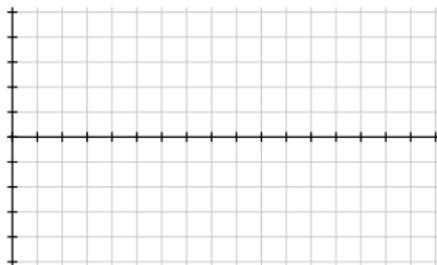
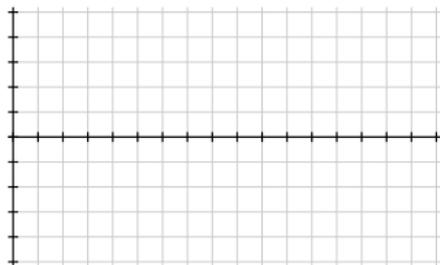
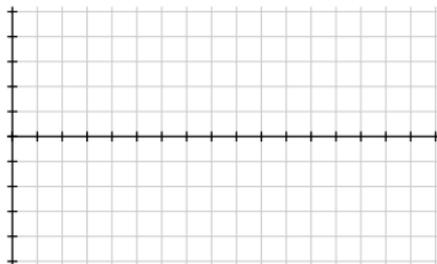
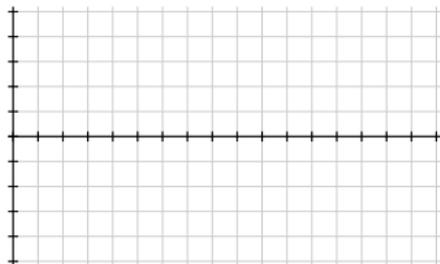
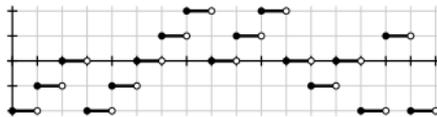
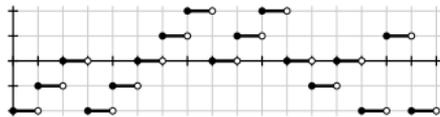
Dicas: o melhor modo de fazer isto é representando graficamente  $F(x)$  e  $F'(x)$  e calculando certas coisas a partir dos gráficos. Considere que o leitor sabe calcular áreas de retângulos, triângulos e trapézios no olhómetro quando as coordenadas deles são números simples, mas complementemente os seus gráficos com um pouquinho de português quando nem tudo for óbvio só a partir dos gráficos.

**Questão 4****(Total: 1.0 pts)**

Seja  $f(t)$  a função no topo da página seguinte. Seja

$$F(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t) dt.$$

Desenhe o gráfico de  $F(x)$  em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.



# Questão 1: gabarito em Maxima

(%i1) f : x^3 \* sqrt(1-4\*x^2);

(%o1)

$$x^3 \sqrt{1-4x^2}$$

(%i2) F1 : 'integrate(f, x);

(%o2)

$$\int x^3 \sqrt{1-4x^2} dx$$

(%i3) F2 : changevar(F1, u=2\*x, u, x);

(%o3)

$$\frac{\int \sqrt{1-u} u^3 \sqrt{u+1} du}{16}$$

(%i4) F2 : rootscontract(F2);

(%o4)

$$\frac{\int u^3 \sqrt{1-u^2} du}{16}$$

(%i5) F3 : changevar(F2, u=sin(th), th, u);

(%o5)

$$\frac{\int \cos \theta \sqrt{1-\sin \theta} (\sin \theta)^3 \sqrt{\sin \theta + 1} d\theta}{16}$$

(%i6) F3 : rootscontract(F3);

(%o6)

$$\frac{\int \cos \theta (\sin \theta)^3 \sqrt{1-(\sin \theta)^2} d\theta}{16}$$

(%i7) F3 : subst([sqrt(1-sin(th)^2)=cos(th)], F3);

(%o7)

$$\frac{\int (\cos \theta)^2 (\sin \theta)^3 d\theta}{16}$$

(%i8) F4 : changevar(F3, c=cos(th), c, th);

(%o8)

$$\frac{\int c^4 - c^2 dc}{16}$$

(%i9) F5 : ev(F4, 'integrate);

(%o9)

$$\frac{\frac{c^5}{5} - \frac{c^3}{3}}{16}$$

(%i10) F5 : expand(F5);

(%o10)

$$\frac{c^5}{80} - \frac{c^3}{48}$$

(%i11) F6 : subst([c=cos(th)], F5);

(%o11)

$$\frac{(\cos \theta)^5}{80} - \frac{(\cos \theta)^3}{48}$$

(%i12) F7 : subst([th=asin(u)], F6);

(%o12)

$$\frac{(1-u^2)^{\frac{5}{2}}}{80} - \frac{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}{48}$$

(%i13) F8 : subst([u=2\*x], F7);

(%o13)

$$\frac{(1-4x^2)^{\frac{5}{2}}}{80} - \frac{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}{48}$$

(%i14) align\_eqs([F1, F2, F3, F4,

F5, F6, F7, F8]);

(%o14)

$$\left( \begin{array}{l} \int x^3 \sqrt{1-4x^2} dx = \frac{\int u^3 \sqrt{1-u^2} du}{16} \\ = \frac{\int (\cos \theta)^3 (\sin \theta)^3 d\theta}{16} \\ = \frac{\int c^3 - c^2 dc}{16} \\ = \frac{\frac{c^5}{5} - \frac{c^3}{3}}{16} \\ = \frac{(\cos \theta)^5}{80} - \frac{(\cos \theta)^3}{48} \\ = \frac{(1-u^2)^{\frac{5}{2}}}{80} - \frac{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}{48} \\ = \frac{(1-4x^2)^{\frac{5}{2}}}{80} - \frac{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}{48} \end{array} \right)$$

(%i15)

## Questão 2: gabarito

Lembre que:

$$[\text{IP}] = \left( \int fg' dx = fg - \int f'g dx \right)$$

Então:

$$\int hm'' dx \stackrel{(1)}{=} hm' - \int h'm' dx$$

$$\text{Por } [\text{IP}] \left[ \begin{array}{l} f:=h \\ f':=h' \\ g:=m' \\ g':=m'' \end{array} \right]$$

$$\int h'm' dx \stackrel{(2)}{=} h'm - \int h''m dx$$

$$\text{Por } [\text{IP}] \left[ \begin{array}{l} f:=h' \\ f':=h'' \\ g:=m \\ g':=m' \end{array} \right]$$

$$\int hm'' dx \stackrel{(3)}{=} hm' - \int h'm' dx$$

Cópia da (1)

Por (2)

$$\stackrel{(4)}{=} hm' - (h'm - \int h''m dx)$$

$$\stackrel{(4b)}{=} hm' - h'm + \int h''m dx$$

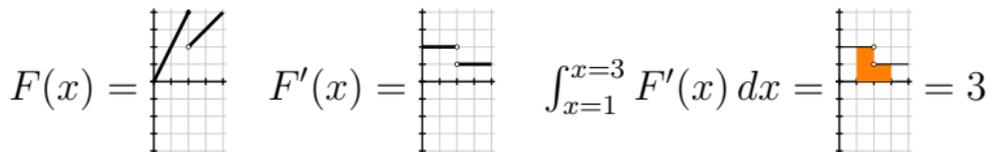
$$\int hm'' dx \stackrel{(5)}{=} hm' - h'm + \int h''m dx$$

Por (3), (4) e (4b)

$$\int (x-3)^2 e^x dx \stackrel{(6)}{=} (x-3)^2 e^x - 2(x-3)e^x + \int 2e^x dx$$

$$\text{Por (5)} \left[ \begin{array}{l} h:=(x-3)^2 \\ h':=2(x-3) \\ h'':=2 \\ m:=e^x \\ m':=e^x \\ m'':=e^x \end{array} \right]$$

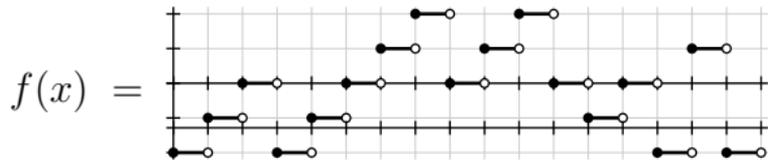
### Questão 3: gabarito



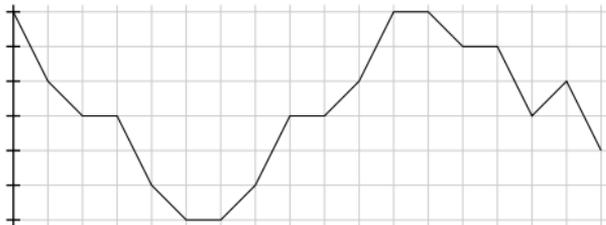
$$\underbrace{\int_{x=1}^{x=3} F'(x) dx}_3 = \underbrace{F(x)|_{x=1}^{x=3}}_{\underbrace{F(3)-F(1)}_{\underbrace{3-2}_1}}$$

**F**

### Questão 4: gabarito



$$F(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t) dt =$$



# Cálculo 2 - 2024.1

Prova de reposição (VR)  
pra quem perdeu a P2

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF  
<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

# Cálculo 2 - 2024.1

Prova suplementar (VS)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2024.1-C2.html>

## Links

# Questão 1

(Total: 4.0 pts) Sejam:

$$[\text{FP}_1] = \begin{pmatrix} A(x+b) + B(x+a) \\ Cx + D \end{pmatrix}$$

$$[\text{SCD}] = \begin{bmatrix} C := (A+B) \\ D := (Ab+Ba) \end{bmatrix}$$

$$[\text{FP}_4] = \left( \begin{array}{l} \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} = \frac{A(x+b) + B(x+a)}{(x+a)(x+b)} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{Cx + D}{(x+a)(x+b)} \\ \int \frac{Cx + D}{(x+a)(x+b)} dx = \int \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} dx \\ \qquad \qquad \qquad = A \ln(x+a) + B \ln(x+b) \end{array} \right)$$

$$\frac{\frac{10}{9}(x+4) + \frac{17}{9}(x-5)}{(x+4)(x-5)} = \frac{(\frac{10}{9} + \frac{17}{9})x + (\frac{68}{9} - \frac{50}{9})}{(x+4)(x-5)} \quad (*_1)$$

$$\sqrt{\underbrace{\underbrace{\underbrace{x^2}_{3} + \underbrace{y^2}_{4}}_{9}}_{16}} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{3} + \underbrace{y}_{4}}_{7}}_{5} \quad (*_2)$$

No curso nós vimos vários jeitos de mostrar bem passo a passo que certas igualdades não são verdadeiras. Algumas vezes nós usamos séries de igualdades, e em algumas outras vezes nós usamos diagramas com underbraces, como no  $(*_2)$ .

A igualdade  $(*_1)$  é um erro que muitas pessoas cometeram na P1 de 2023.2.

Mostre bem passo a passo que:

a) (0.1 pts)  $[\text{FP}_1]$   $\begin{bmatrix} A := 2 \\ B := 3 \\ a := 4 \\ b := 5 \\ C := 10 \\ D := 100 \end{bmatrix}$  é falsa,

b) (0.2 pts)  $[\text{FP}_1][\text{SCD}]$  é verdadeira,

c) (0.3 pts)  $(*_1)$  é falsa.

Calcule:

d) (0.4 pts)  $[\text{FP}_4][\text{SCD}]$ . Lembre de não simplificar!!!

e) (0.5 pts)

$$\int \frac{10x-7}{(x-2)(x+5)} dx.$$

f) (2.5 pts) Complete

$$[\text{FP}_4] \begin{bmatrix} A := ? \\ B := ? \\ a := -2 \\ b := 5 \\ C := 10 \\ D := -7 \end{bmatrix} = ?$$

pondo os números certos em  $A$  e  $B$  e fazendo a substituição corretamente. As quatro igualdades do seu resultado devem ser verdadeiras.

## Questão 2

(Total: 3.5 pts)

Lembre que no curso eu mostrei que o meu modo preferido de escrever o “método” para resolver EDOs com variáveis separáveis — “EDOVs” — é o “método” [M] abaixo... eu pus o termo “método” entre aspas porque alguns dos passos da [M] são gambiarras nas quais a gente não pode confiar totalmente, e aí a gente precisa sempre testar as nossas soluções. O abaixo — a “fórmula” — é uma versão resumida do [M].

$$\begin{aligned}
 \text{[M]} &= \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y) dy = g(x) dx \\ \int h(y) dy = \int g(x) dx \\ \parallel \\ H(y) + C_1 \qquad G(x) + C_2 \\ H(y) = G(x) + C_2 - C_1 \\ \qquad = G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \\
 \text{[F}_3\text{]} &= \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Seja  $(*_3)$  esta EDOVs:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{8(y-1)} \quad (*_3)$$

- a) (1.0 pts) Desenhe os tracinhos do campo de direções da EDO  $(*_3)$  nos pontos com  $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Aqui você vai ter que desenhar 25 tracinhos e vai ter que caprichar – um tracinho com coeficiente angular  $\frac{1}{2}$  tem que ser visualmente bem diferente de um com coeficiente angular 1 e de um com coeficiente angular 2.
- b) (0.5 pts) Encontre as duas soluções gerais da EDO  $(*_3)$  – a solução “positiva” e a “negativa” – e dê nomes para elas.
- c) (1.5 pts) Teste a sua solução “negativa”.
- d) (0.5 pts) Encontre a solução particular que passa pelo ponto  $(-3, 3)$ .
- e) (0.5 pts) Encontre a solução particular que passa pelo ponto  $(-3, -1)$ .

**Muito importante:** em todas as questões desta prova eu vou corrigir as respostas de vocês como se eu fosse o “colega menos seu amigo e sem paciência pra adivinhar nada” da Dica 7 e do slide sobre contextos... por exemplo, se você escrever só “ $a = 42$ ” eu vou interpretar isso como “aqui essa pessoa tá dizendo que é óbvio que ‘ $a = 42$ ’ é sempre verdade – e isso é falso!!!”, e aí babau. Ou seja, a parte em português das questões de vocês vai ser MUUUUITO importante!

## Questão 3

(Total: 2.5 pts)

a) (0.5 pts) Calcule

$$\int (2x + 3)\sqrt{4x + 5} dx.$$

b) (2.0 pts) Teste o seu resultado.