

# Cálculo 3 - 2023.2

Aula 27: abertos e fechados em  $\mathbb{R}^2$

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.2-C3.html>

## Links

3fT86 (2022.2) Versão anterior destes slides

## Introdução

Dê uma olhada no capítulo 4 do Bortolossi...

Comece pela seção 4.1, “Por que funções contínuas são importantes”, depois leia a seção 4.3, sobre o Teorema de Weirstrass em  $n$  variáveis, e relembre a definição de distância euclidiana na p.139.

Nós vamos começar entendendo as definições das páginas 142 até 148, e vamos reescrevê-las de um jeito bem mais curto.

Nós vamos ver como fazer hipóteses sobre os exercícios dos próximos dois slides, como testar essas hipóteses, e como descartar as hipóteses erradas.

## Nove subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

(Compare com a p.130 do Bortolossi...)

Sejam:

$$C_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < y \leq 3 \},$$

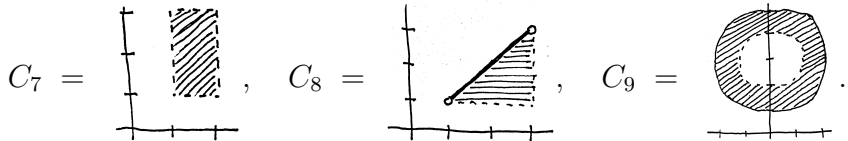
$$C_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < y \leq 3 \text{ e } 1 \leq x < 4 \},$$

$$C_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (1, 2)) \leq 2 \},$$

$$C_4 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < d((x, y), (1, 2)) \leq 2 \},$$

$$C_5 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (1, 2)) \leq 2 \text{ e } 1 < x \},$$

$$C_6 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x \},$$



**Exercício 1.**

Represente graficamente os conjuntos  $C_1, \dots, C_6$ .

**Exercício 2.**

Represente os conjuntos  $C_7, C_8, C_9$  em “notação de conjuntos” — isto é, na forma  $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dots \}$ .

## Bolas abertas e fechadas

Se  $P$  é um ponto de  $\mathbb{R}^n$  então a bola fechada de raio  $\varepsilon$  em torno de  $P$ ,  $\overline{B}_\varepsilon(P)$ , e a bola aberta de raio  $\varepsilon$  em torno de  $P$ ,  $B_\varepsilon(P)$ , são definidas assim:

$$\begin{aligned}\overline{B}_\varepsilon(P) &= \{ Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P, Q) \leq \varepsilon \} \\ B_\varepsilon(P) &= \{ Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P, Q) < \varepsilon \}\end{aligned}$$

Por exemplo, se  $P = 6 \in \mathbb{R}^1$  então:

$$\begin{aligned}\overline{B}_2(6) &= \{ Q \in \mathbb{R}^1 \mid d(6, Q) \leq 2 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid d(6, x) \leq 2 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(6-x)^2} \leq 2 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid |x-6| \leq 2 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x-6 \leq 2 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid -2+6 \leq x \leq 2+6 \} \\ &= [4, 8]\end{aligned}$$

**Exercício 3.**

Represente graficamente:

- a)  $\overline{B}_1((2, 2))$ ,
- b)  $B_1((2, 2))$ .

Dica: estes conjuntos vão parecer muito mais com “bolas de verdade” do que o conjunto  $\overline{B}_2(6)$  do slide anterior.

Lembre que a gente desenha a fronteira de um conjunto tracejada quando a gente quer indicar que os pontos da fronteira não pertencem ao conjunto e a gente desenha ela sólida quando quer indicar que os pontos dela pertencem ao conjunto. Veja os desenhos dos conjuntos  $C_8$  e  $C_9$ .

**Exercício 4.**

Aqui você vai ter que ser capaz de visualizar bolas sobrepostas a conjuntos que você já desenhou sem desenhar estas bolas.

Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

a)  $B_{0.1}((0, 2.5)) \subseteq C_1$

b)  $B_{0.5}((0, 2.5)) \subseteq C_1$

c)  $\overline{B}_{0.5}((0, 2.5)) \subseteq C_1$

d)  $B_{0.1}((1, 3)) \subseteq C_2$

e)  $B_{0.1}((2.5, 2.5)) \subseteq C_2$

f)  $B_1((2, 2)) \subseteq C_3$

g)  $\overline{B}_1((2, 2)) \subseteq C_3$

h)  $B_{0.5}((1, 0.5)) \subseteq C_4$

i)  $B_{0.1}((0.5, 2)) \subseteq C_5$

j)  $B_{0.001}((1.1, 1.01)) \subseteq C_8$



## O interior de um conjunto (e conjuntos abertos)

Def: o *interior* de um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\text{Int}(A)$ , é definido como:

$$\text{Int}(A) = \{ P \in A \mid \exists \varepsilon > 0. \mathbf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \}.$$

Note que isto sempre é verdade:  $\text{Int}(A) \subset A$ .

Dizemos que um conjunto  $A$  é *aberto* quando  $A \subset \text{Int}(A)$ .

## Infinitas operações / seja com o Bob

Pra entender a definição de interior e as próximas você vai precisar fazer um número infinito de operações pra chegar no resultado, e pra isso você vai ter que usar algumas técnicas que nós vimos em Cálculo 2 no semestre passado. Os links abaixo vão pras versões deste semestre do material sobre essas técnicas, que ficou bem melhor do que o do semestre passado.

Veja este PDF, a partir da página 11 dele:

<http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-somas-de-riemann.pdf>

e relembre as definições de inf e sup daqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-TFC1-e-TFC2.pdf>

**Exercício 5.**

Seja  $A = [2, 4] \subset \mathbb{R}^1$ .

Verifique que  $A$  não é aberto usando a definição do slide anterior.

Dica: como  $A = [2, 4]$ , dá pra começar por:

$$\begin{aligned}
 & A \text{ não é aberto} \\
 \Leftrightarrow & A \not\subseteq \text{Int}(A) \\
 \Leftrightarrow & A \not\subseteq \{ P \in A \mid \exists \varepsilon > 0. B_\varepsilon(P) \subseteq A \} \\
 \Leftrightarrow & [2, 4] \not\subseteq \{ P \in [2, 4] \mid \exists \varepsilon > 0. B_\varepsilon(P) \subseteq [2, 4] \}
 \end{aligned}$$

Pros passos seguintes você vai precisar usar muitas das “traduções” dos próximos dois slides.

## Algumas traduções

$$\begin{aligned}
 A \subset B &= \forall a \in A. a \in B \\
 A = B &= (A \subset B) \wedge (B \subset A) \\
 \neg(P \wedge Q) &= \neg P \vee \neg Q \\
 \neg(P \vee Q) &= \neg P \wedge \neg Q \\
 \neg(\forall a \in A. P(a)) &= \exists a \in A. \neg P(a) \\
 \neg(\exists a \in A. P(a)) &= \forall a \in A. \neg P(a) \\
 x \in \{a \in A \mid P(a)\} &= x \in A \wedge P(x) \\
 \neg(P \rightarrow Q) &= P \wedge \neg Q \\
 [20, 42) &= \{x \in \mathbb{R} \mid 20 \leq x < 42\} \\
 20 \leq x < 42 &= 20 \leq x \wedge x < 42
 \end{aligned}$$

Lembra que ‘ $\wedge$ ’ é “e”, ‘ $\vee$ ’ é “ou”, ‘ $\neg$ ’ é “não”, ‘ $\rightarrow$ ’ é “implica”.

## Alguns exemplos de traduções

$$\begin{aligned}
 & [a, b] \subset [20, 42) \\
 & = \forall x \in [a, b]. x \in [20, 42) \\
 & = \forall x \in [a, b]. 20 \leq x < 42 \\
 & = \forall x \in \mathbb{R}. x \in [a, b] \rightarrow 20 \leq x < 42 \\
 & = \forall x \in \mathbb{R}. a \leq x \leq b \rightarrow 20 \leq x < 42
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \neg([a, b] \subset [20, 42)) \\
 & = \neg(\forall x \in \mathbb{R}. a \leq x \leq b \rightarrow 20 \leq x < 42) \\
 & = \exists x \in \mathbb{R}. \neg(a \leq x \leq b \rightarrow 20 \leq x < 42) \\
 & = \exists x \in \mathbb{R}. \neg(a \leq x \leq b) \wedge (20 \leq x < 42) \\
 & = \exists x \in \mathbb{R}. \neg(a \leq x \wedge x \leq b) \wedge (20 \leq x < 42) \\
 & = \exists x \in \mathbb{R}. (\neg(a \leq x) \vee \neg(x \leq b)) \wedge (20 \leq x < 42) \\
 & = \exists x \in \mathbb{R}. (x < a \vee b < x) \wedge (20 \leq x < 42)
 \end{aligned}$$

**Exercício 6.**

Represente graficamente:

- a)  $\text{Int}(C_8)$ ,
- b)  $\text{Int}(C_4)$ ,
- c)  $\text{Int}(C_5)$ ,
- d)  $\text{Int}(\mathbf{B}_1((2, 2)))$ .

## O fecho de um conjunto (e conjuntos fechados)

Def: o *fecho* de um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\bar{A}$ ,  
é definido como:

$$\bar{A} = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0. \mathbf{B}_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset \}$$

Compare com a definição do interior:

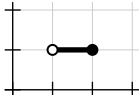
$$\text{Int}(A) = \{ P \in A \mid \exists \varepsilon > 0. \mathbf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \}.$$

Isto aqui sempre é verdade:  $A \subset \bar{A}$ .

Quando  $\bar{A} \subset A$  dizemos que  $A$  é um conjunto *fechado*.

**Exercício 7.**

Digamos que:

$$D_1 = \text{---}$$


Represente graficamente:

a)  $\overline{C_8}$

b)  $\overline{D_1}$

c)  $\text{Int}(D_1)$



## **Um aviso sobre a P2 (de 2021.2)**

Em quase todos os problemas deste PDF é muito mais fácil mostrar que uma resposta está errada do que mostrar que ela está certa... e o método pra mostrar que uma resposta está errada vai ser um dos assuntos principais da P2.

## Imagem inversa

Algumas das igualdades abaixo são definições, as outras são exemplos.

$$\begin{aligned}
 H(x, y) &= xy \\
 H_I &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) \in I \} \\
 H_{[a,b]} &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) \in [a, b] \} \\
 H_{[0,1]} &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) \in [0, 1] \} \\
 H^{-1}(a) &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = a \} \\
 H^{-1}(I) &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) \in I \} \\
 H^{-1}([0, 1]) &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) \in [0, 1] \} \\
 &= H_{[0,1]}
 \end{aligned}$$

### Exercício 8.

Represente graficamente:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= H^{-1}(0) \\
 C_2 &= H^{-1}(1) \\
 C_3 &= H^{-1}([0, 1]) \\
 C_4 &= H^{-1}((0, 1)) \\
 C_5 &= \text{Int}(C_3) \\
 C_6 &= \overline{C_4} \\
 C_7 &= H^{-1}(4) \\
 C_8 &= H^{-1}([0, 4]) \\
 C_9 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \text{ e } 1 \leq y \} \\
 C_{10} &= C_8 \cap C_9
 \end{aligned}$$

### Conjuntos limitados e compactos

Um conjunto  $C \in \mathbb{R}^2$  é *limitado* quando ele obedece isto:

$$\exists r \in \mathbb{R}. C \subset B_r((0, 0))$$

Um conjunto  $C \in \mathbb{R}^2$  é *compacto* quando ele é fechado e limitado.

### Exercício 9.

Preencha a tabela abaixo com 'V's e 'F's.

$C_1$   $C_2$   $C_3$   $C_4$   $C_5$   $C_6$   $C_7$   $C_8$   $C_{10}$

é aberto  
 é fechado  
 é limitado  
 é compacto

## Máximos numa elipse

Dê uma olhada nas figuras das páginas 355 e 356 do Bortolossi, no capítulo 10 dele:

<http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-10.pdf#page=5>

<http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-10.pdf#page=6>

Ele usa:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 \\ g(x, y) &= \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \\ D_2 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) \leq 1 \} \\ D_3 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 1 \} \end{aligned}$$

$D_2$  é uma elipse “cheia” incluindo o interior dela, e

$D_3$  é só a fronteira de  $D_2$ .

Note que  $(-2, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(0, -3) \in D_3$ .

### Exercício 10.

- Desenhe algumas curvas de nível de  $f(x, y)$ .
- Na página 354 o Bortolossi desenha curvas de nível dentro de um quadrado. Desenhe algumas curvas de nível de  $f(x, y)$  dentro da “elipse cheia”  $D_2$ .
- Tente descobrir *no olhómetro* quais são os máximos e mínimos de  $f(x, y)$  em  $D_2$ . Dica: o Bortolossi leva várias páginas fazendo isso — leia o texto dele!

**Dica:** o objetivo do item (c) é você aprender a resolver só com curvas de nível as idéias que o Bortolossi apresenta usando figuras em 3D. Se você não conseguir fazer a tradução das figuras 3D pra curvas de nível direto você pode começar desenhando “cortes” sobre as figuras 3D, como na questão do mini-teste 1 de 2020.2:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-tudo.pdf#page=83>

...e repare que quando o Bortolossi chega no capítulo 12 ele passa a usar quase só curvas de nível e gradientes — ele praticamente abandona as figuras 3D:

<http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-12.pdf>