Cálculo 2 - 2023.2

Aula 4: contas com justificativas
(versão preliminar!!!)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

CalcEasy11:35 até 12:47: vídeo sobre o macaco derivador

StewPtCap3p5 (p.158) Derivada de uma função constante
StewPtCap3p5 (p.158) A Regra da Potência
StewPtCap3p7 (p.160) A Regra da Potência (versão geral)
StewPtCap3p8 (p.161) A Regra da Multiplicação por Constante
StewPtCap3p8 (p.161) A Regra da Soma
StewPtCap3p14 (p.167) A Regra do Produto
Stew2p31 (p.131) Example 6

Visaud01:00 até 02:52 “é óbvio sim”
Visaud37:17 até 46:06 reduzir e aumentar o nível de detalhe
Visaud48:53 até o final: vários níveis de detalhe lado a lado

Como estudar funções

Você lembra de quando você aprendeu a fazer "contas com letras" na escola? Você levou centenas de horas de estudo e desespero – né? – pra entender como é que letras como x e y podiam fazer o papel de números desconhecidos cujos valores você quer descobrir e como é que letras como a e b podiam fazer o papel de números quaisquer... e você teve que reler muitas vezes tudo que você já tinha visto sobre soma, multiplicação, etc, pra entender essas operações de um jeito novo – antes elas eram operações que somavam e multiplicavam números conhecidos e concretos, depois elas passaram a ser operações que também eram capazes de somar e multiplicar expressões com letras...

Agora a gente vai ter que fazer algo parecido, mas agora pra funções. Em algumas situações as letras f e g vão representar funções que a gente quer descobrir, em outras situações f e g vão representar funções "quaisquer" (abstratas), em outras situações f e g vão representar funções que a gente conhece os gráficos delas mas que a gente não tem uma expressão "algébrica" que calcule os valores delas... e pra entender isso direito você vai ter que reler tudo que você já viu sobre operações com funções pra entender aquelas operações de um jeito novo, como operações que funcionam tanto pra expressões em que f e g são funções "concretas" como nos casos em que f e g são funções "abstratas"...

Muita gente acha que essa coisa de lidar com funções abstratas "é simples", no sentido de que um dia você vai ler a explicação certa ou assistir o vídeo certo e *plim*, de um momento pro outro você vai se transformar em outra pessoa, vai deixar de ser a pessoa que achava isso difícil e vai virar a pessoa que acha isso fácil. NÃO É ASSIM... pra lidar com funções "abstratas" você vai ter que aprender centenas de detalhes, vai ter que aprender eles aos poucos, e eu nem sei quais são os livros que têm explicações mais ou menos completas sobre isso – eu tentei perguntar pra vários amigos matemáticos, por exemplo nessa série de reuniões onlines aqui, Sapt, e ninguém sabe onde tem material sobre isso... em teoria isso é algo anterior a Pré-Cálculo/Cálculo 0, que as pessoas deveria aprender no Ensino Médio mas que hoje em dia não aprendem mais.

Dicas:

1. Os músculos mentais que você exercita quando você lê algo ou assiste alguém falando são diferentes dos que você exercita quando você escreve as suas idéias, quando você relê o que você escreveu, e quando você reescreve de um jeito melhor o que você escreveu. O slogan/historinha sobre isto está aqui: 2gT22.

2. O melhor modo de estudar é escrever todas as suas hipóteses – até porque na maior parte dos casos só quem vai ler elas são os personagens (a) e (b) da Dica 7: 2gT4.

3. Leia o post da Ana Letícia de Fiori: 2gT18.

4. Tem um trecho do vídeo sobre slogans que é sobre indicar graus de certeza – leia as legendas dele. Ele vai de Slogans33:35 até 36:36.

5. Os livros de Cálculo 2 não definem precisamente a notação matemática que eles usam – você vai ter que aprender a notação certa por tentativa e erro, escrevendo as suas idéias do melhor modo que você conseguir e depois comparando a sua notação com as dos livros. Veja o slide 2gT7 sobre "A linguagem formal de Cálculo 2" e depois leia todos os slides de 2gT5 até 2gT10.

6. Pra muitas as pessoas a parte mais difícil do curso de C2 é a parte é que elas têm que aprender a usar "partículas em português", como "se", "então", "queremos que", "vamos testar se", etc... e se elas não souberem usar essas partículas direito as contas delas vão ficar não só ambíguas como também erradas. Não deixe pra aprender isso na última hora, porque NÃO DÁ! Comece a prestar atenção nas partículas em português desde agora!!! As dicas pra P2 do semestre passado estão aqui, 2gT126, e tem um exemplo de uso dessas partículas no anexo da P2, aqui: 2gT138.

"Example 6"

De: Stew2p31 (p.131)

$$\begin{array}{rcl}
F(x) &=& (6x^3)(7x^4) \\
F'(x) &=& (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3) \\
&=& (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) \\
&=& 168x^6 + 126x^6 \\
&=& 294x^6
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
[\text{RC}] &=& \left(\frac{d}{dx}c = 0\right) & \text{Veja StewPtCap3p5} \\
[\text{RPot}] &=& \left(\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\right) & \text{Veja StewPtCap3p7} \\
[\text{RMC}] &=& \left(\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)\right) & \text{Veja StewPtCap3p8} \\
[\text{RSoma}] &=& \left(\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)\right) & \text{Veja StewPtCap3p5} \\
[\text{RProd}] &=& \left(\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)\right) & \text{Veja StewPtCap3p14}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
F(x) &=& (6x^3)(7x^4) & \\
F'(x) &=& ((6x^3)(7x^4))' & \\
&=& \frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4)) & \\
&=& (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3) & \text{Por [RProd] com } f(x) = 6x^3, g(x) = 7x^4 \\
&=& (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\cdot 6\frac{d}{dx}x^3 & \text{Por [RMC] com } c = 6, f(x) = x^3 \\
&=& (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\cdot 6 \cdot 3x^2 & \text{Por [RPot] com } n = 3 \\
&=& (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)(18x^2) & \\
&=& (6x^3)\cdot 7\frac{d}{dx}x^4 + (7x^4)(18x^2) & \text{Por [RMC] com } c = 7, f(x) = x^4 \\
&=& (6x^3)\cdot 7 \cdot 4x^3 + (7x^4)(18x^2) & \text{Por [RPot] com } n = 4 \\
&=& (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) & \\
&=& (6x^3)(28x^3) + 126x^6 & \\
&=& 168x^6 + 126x^6 & \\
&=& 294x^6 &
\end{array}$$

O que quer dizer "Por … com …"?

$$
\begin{array}{rcll}
F(x) & = & (6x^3)(7x^4) & \\
F'(x) & = & ((6x^3)(7x^4))' & \\
 & = & \boxed{\frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4))} & \\
 & \boxed{=} & \boxed{(6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4)+(7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3)} & \text{Por [RProd] com } \boxed{f(x)} = \boxed{6x^3}, \boxed{g(x)} = \boxed{7x^4} \\
 & = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4)+(7x^4)\cdot 6\frac{d}{dx}x^3 & \text{Por [RMC] com } c=6,\ f(x)=x^3 \\
 & = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4)+(7x^4)\cdot 6\cdot 3x^2 & \text{Por [RPot] com } n=3 \\
 & = & (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4)+(7x^4)(18x^2) & \\
 & = & (6x^3)\cdot 7\frac{d}{dx}x^4+(7x^4)(18x^2) & \text{Por [RMC] com } c=7,\ f(x)=x^4 \\
 & = & (6x^3)\cdot 7\cdot 4x^3+(7x^4)(18x^2) & \text{Por [RPot] com } n=4 \\
 & = & (6x^3)(28x^3)+(7x^4)(18x^2) & \\
 & = & (6x^3)(28x^3)+126x^6 & \\
 & = & 168x^6+126x^6 & \\
 & = & 294x^6 &
\end{array}
$$

Compare: nós definimos [RProd] como esta igualdade,

$$
[\text{RProd}] \quad = \quad \left(\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)\right)
$$

e se substituirmos $f(x)$ por $6x^3$ e $g(x)$ por $7x^4$ na igualdade [RProd] nós obtemos isto aqui,

$$
\begin{array}{lcl}
[\text{RProd}] & = & \left(\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)\right) \\
[\text{RProd}]\begin{bmatrix} \boxed{f(x)} := \boxed{6x^3} \\ \boxed{g(x)} := \boxed{7x^4} \end{bmatrix} & = & \left(\boxed{\frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4))} \boxed{=} \boxed{(6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4)+(7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3)}\right)
\end{array}
$$

que é exatamente a igualdade que eu marquei lá em cima...

O que quer dizer "Por ... com ..."? (2)

$$
\begin{array}{rcll}
F(x) &=& (6x^3)(7x^4) \\
F'(x) &=& ((6x^3)(7x^4))' \\
&=& \frac{d}{dx}((6x^3)(7x^4)) \\
&=& (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4)+(7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3) & \text{Por [RProd] com } f(x)=6x^3, g(x)=7x^4 \\
&=& (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4)+(7x^4)\cdot 6\frac{d}{dx}x^3 & \text{Por [RMC] com } c=6, f(x)=x^3 \\
&=& (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4)+(7x^4)\cdot 6\cdot 3x^2 & \text{Por [RPot] com } n=3 \\
&=& (6x^3)\boxed{\frac{d}{dx}(7x^4)}+(7x^4)(18x^2) \\
&\boxed{=}& (6x^3)\cdot\boxed{7\frac{d}{dx}x^4}+(7x^4)(18x^2) & \text{Por [RMC] com } \boxed{c}=\boxed{7}, \boxed{f(x)}=\boxed{x^4} \\
&=& (6x^3)\cdot 7\cdot 4x^3+(7x^4)(18x^2) & \text{Por [RPot] com } n=4 \\
&=& (6x^3)(28x^3)+(7x^4)(18x^2) \\
&=& (6x^3)(28x^3)+126x^6 \\
&=& 168x^6+126x^6 \\
&=& 294x^6
\end{array}
$$

Lembre que a "regra da multiplicação por constante" é esta igualdade aqui,

$$\text{[RMC]} \quad = \quad \left(\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)\right)$$

e se substituirmos c por 7 e $f(x)$ por x^4 nela nós obtemos isto aqui,

$$
\begin{array}{rcl}
\text{[RMC]} &=& \left(\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)\right) \\
\text{[RMC]}\left[\begin{array}{rcl}\boxed{c} &:=& \boxed{7} \\ \boxed{f(x)} &:=& \boxed{x^4}\end{array}\right] &=& \left(\boxed{\frac{d}{dx}(7x^4)}\ \boxed{=}\ \boxed{7\frac{d}{dx}x^4}\right)
\end{array}
$$

O '$\boxed{=}$' logo acima desta frase justifica a parte que muda no '$\boxed{=}$' lá de cima!

Integração por chutar-e-testar

Por exemplo, digamos que queremos resolver isto aqui:

$$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx = {\color{red}?}$$

Eu começaria por estes chutes,

$$\begin{array}{lcl}
{\color{red}[\text{TFC2}]} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = f(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\text{TFC2}]}\,\big[f(x) := 42\big] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = 42\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\text{TFC2}]}\,\big[f'(x) := 99\big] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} 99\,dx = f(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\text{TFC2}]}\begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} \cos x\,dx = (\operatorname{sen} x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\text{TFC2}]}\begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := 4\cos 4x \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} 4\cos 4x\,dx = (\operatorname{sen} 4x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\text{TFC2}]}\begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := \cos 4x \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} \cos 4x\,dx = \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b} \right) \\
{\color{red}[\text{TFC2}]}\begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := \cos 4x \\ a := 0 \\ b := \pi/2 \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx = \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi/2} \right)
\end{array}$$

...e depois eu faria isto aqui:

$$\begin{array}{rcl}
\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx & \overset{(1)}{=} & \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi/2} \\
& = & \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\cdot 0\right) \\
& = & \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\pi\right) - \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 0\right) \\
& = & \left(\frac{1}{4}\cdot 0\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 0\right) \\
& = & 0
\end{array}$$

A justificativa pra igualdade '$\overset{(1)}{=}$' acima é a última substituição da coluna da esquerda. Eu raramente escrevo todas as substituições da coluna da esqueda explicitamente, mas elas são *praticamente* o método que eu uso pra encontrar a substituição certa de cabeça...

Integração por chutar-e-testar (2)

Na verdade o método que eu uso pra encontrar a substituição que resolve esta integral definida,

$$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x \, dx = ?$$

é este aqui...

$$\begin{array}{lcl}
[\text{TFC2}] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = f(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
[\text{TFC2L}] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx \right) \\
[\text{TFC2L}]\,[f(x) := 42] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx \right) \\
[\text{TFC2L}]\,[f'(x) := 99] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} 99\,dx \right) \\
[\text{TFC2L}] \begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} \cos x\,dx \right) \\
[\text{TFC2L}] \begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := 4\cos 4x \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} 4\cos 4x\,dx \right) \\
[\text{TFC2L}] \begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := \cos 4x \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} \cos 4x\,dx \right) \\
[\text{TFC2L}] \begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := \cos 4x \\ a := 0 \\ b := \pi/2 \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx \right) \\
[\text{TFC2}] \begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \\ f'(x) := \cos 4x \\ a := 0 \\ b := \pi/2 \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx = \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} \right)
\end{array}$$

...ou seja, eu começo encontrando a substituição certa.
Tem vários jeitos de definir o que é a "substituição certa".
Um jeito é dizer que a substituição que resolve esta problema aqui

$$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x \, dx = ?$$

é a que obedece isto:

$$[\text{TFC2L}] \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ f'(x) := ? \\ a := ? \\ b := ? \end{bmatrix} = \left(\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx \right)$$

Um outro jeito é a gente começar aprendendo os métodos que o Stewart ensina, e depois a gente escrever isto aqui:

$$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos 4x\,dx = \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2}$$

A "substituição certa" é a que a gente usa pra justificar essa igualdade. A justificativa dessa igualdade "Pelo [TFC2], com ...", e a "substituição certa" é o que vem depois do "com".

Todos os livros de Cálculo 2 que eu conheço supõem que os leitores são muito bons em "aplicar fórmulas complicadas em casos complicados"... Esse método super passo-a-passo de encontrar a substituição certa e aplicá-la é algo que eu inventei pra ajudar pessoas que tinham dificuldade com problemas de "aplicar fórmulas complicadas em casos complicados" – e eu só tive que inventar ele porque eu não encontrei nenhum livro que ensinasse como "aplicar fórmulas complicadas em casos complicados". Se você conhecer algum livro ou vídeo que ensine técnicas pra isso, PELAMORDEDEUS ME MOSTRE!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!