Cálculo 4 - 2023.1

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C4.html

Cálculo 4 - 2023.1

Aulas 1 e 4: Introdução ao curso,
revisão de Cálculo 2 e Cálculo 3

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C4.html

Links

Página do curso:
http://anggtwu.net/2023.1-C4.html

4gQ1 quadros da primeira aula
Slogans01:10 até 08:51: sobre chutar e testar
Slogans07:17 até 07:48: ...do tamanho de um apartamento
Slogans1:11:02 até 1:17:42: seja o seu prório Geogebra
3fT16 (tipos, p.4): Tipos

Leit6p17 (p.388: 6.3 Comprimento de arco)
MirandaP301 (p.301: 9.5 Comprimento de arco)
Stew8p3 (p.562: 8.1 Arc Length)
Stew10p15 (p.672: 10.2, fig.4: Arc Length)
Stew13p16 (p.877: 13.3 Arc Length and Curvature)

Exercício 1.

Digamos que a função $F(t)$ é a que eu desenhei no quadro na primeira aula. Ela obedecia

$$\begin{array}{rcl} F(0) & = & (1,1) \\ F(1) & = & (2,1) \\ F(2) & = & (3,2) \\ F(3) & = & (3,3) \end{array}$$

e o gráfico dela era formado por três segmentos de reta.

a) Encontre uma definição por casos pra $F(x)$ que "tenha a forma da função $F_1(t)$ da coluna da direita". Note que você vai ter que mudar todos os números da $F_1(t)$, e note que o modo normal, usual, correto e formal de enunciar este problema seria usando variáveis ao invés dos números $2, 3, \ldots, 17$... mas se eu disser "troque todos os números da definição pelos números corretos" todo mundo entende.

b) Faça a mesma coisa para a função $F_2(t)$.

c) Faça a mesma coisa para a função $F_3(t)$. Aqui há muitas soluções possíveis; encontre uma na qual os números 4, 5, 6, 10, 11, 12, 17, 18 e 19 sejam trocados por números que tenham um significado geométrico e olhométrico claro.

$$F_1(t) = \begin{cases} (2t+3, 4t+5) & t < 6, \\ (7t+8, 9t+10) & 11 \le t \le 12, \\ (13t+14, 15t+16) & 17 < t \end{cases}$$

$$F_2(t) = \begin{cases} (2,3) + t\overrightarrow{(4,5)} & t < 6, \\ (7,8) + t\overrightarrow{(9,10)} & 11 \le t \le 12, \\ (13,14) + t\overrightarrow{(15,16)} & 17 < t \end{cases}$$

$$F_3(t) = \begin{cases} (2,3) + (t-4)\overrightarrow{(5,6)} & t < 7, \\ (8,9) + (t-10)\overrightarrow{(11,12)} & 13 \le t \le 14, \\ (15,16) + (t-17)\overrightarrow{(18,19)} & 20 < t \end{cases}$$

Seja o seu próprio GeoGebra

Na aula de 14/abril/2023 eu descobri que nenhuma das pessoas que veio sabia os truques do "Seja o seu próprio GeoGebra"... a idéia está explicada por alto neste trecho de um vídeo:

Slogans1:11:02 até 1:17:42

Exercício 2.

a) Relembre como usar esta notação de "underbraces" para escrever os resultados intermediários de uma expressão:

$$\underbrace{(1,2) + \underbrace{3\overrightarrow{(4,5)}}_{\overrightarrow{(12,15)}}}_{\overrightarrow{(13,17)}}$$

Dica: releia este slide:

3fT14 (p.2: C)

b) Tente calcular de cabeça os pontos da reta r – definida à direita – para estes valores de t: $t = 0$, $t = 1$, $t = 4$, $t = 5$, $t = 1.23$. Para quais destes valores as contas são mais fáceis de fazer de cabeça?

$$\begin{array}{rcl}
r &=& \{\, (0,3) + (t-4)\overrightarrow{(2,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\
r_1 &=& \{\, (\alpha,3) + (t-4)\overrightarrow{(2,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\
r_2 &=& \{\, (0,\beta) + (t-4)\overrightarrow{(2,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\
r_3 &=& \{\, (0,3) + (t-\gamma)\overrightarrow{(2,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\
r_4 &=& \{\, (0,3) + (t-4)\overrightarrow{(\delta,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\
r_5 &=& \{\, (0,3) + (t-4)\overrightarrow{(2,\varepsilon)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}
\end{array}$$

c) Digamos que $\alpha = 5$ e que queremos desenhar a reta r_1 desenhando dois pontos fáceis de calcular dela e escrevendo do lado de cada um deles o t correspondente a eles. É fácil ver que o ponto com $t = 1.23$ é difícil de calcular de cabeça. *Descubra quais são os dois 't's em que as contas são mais fáceis, desenhe estes dois pontos no plano, e desenhe o resto da reta.*

d) Use este truque dos pontos mais fáceis pra desenhar r_1 quando $\alpha = 0$, quando $\alpha = 1$, e quando $\alpha = 2$. *Descubra o que muda no desenho da r_1 quando o α varia.*

Seja o seu próprio GeoGebra (2)

(Continuação do exercício 2...)

e) Use este truque dos pontos mais fáceis pra desenhar r_2 quando $\beta = 0$, quando $\beta = 1$, e quando $\beta = 2$. *Descubra o que muda no desenho da r_2 quando o β varia.*

f) Use este truque dos pontos mais fáceis pra desenhar r_3 quando $\gamma = 0$, quando $\gamma = 1$, e quando $\gamma = 2$. *Descubra o que muda no desenho da r_3 quando o γ varia. IMPORTANTE: aqui os 't's mais fáceis vão ser diferentes para cada valor de γ.*

g) Use o truque dos pontos mais fáceis pra desenhar r_4 para três valores de δ diferentes – mas aqui você é que vai ter que escolher os valores de δ. IMPORTANTE: descubre três valores de δ que deixam as contas e os desenhos bem fáceis de fazer, e use estes valores. Depois que você tiver feito os desenhos descubra o que no desenho da r_4 varia quando o δ varia.

h) Use estes mesmos truques – todos eles! – pra desenhar a reta r_5 para três valores fáceis de ε e para descobrir o que muda no desenho da r_5 quando o ε varia.

Digamos que a reta r_6 tem esta definição aqui,

$$r_6 \quad = \quad \{\, (\alpha, \beta) + (t - \gamma)\overrightarrow{(\delta, \varepsilon)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$$

e imagine que cada um dos parâmetros α, β, γ, δ e ε pode ser controlado por um slider, como neste trecho do vídeo:

Slogans1:11:32 até 1:11:59

i) Releia tudo o que você fez até agora várias vezes, até você conseguir visualizar mentalmente, *sem escrever nada e (quase?) sem fazer contas de cabeça*, como a reta r_6 muda quando você varia os parâmetros α, β, γ, δ e ε.

j) Descubra, *sem escrever nada e quase sem fazer contas de cabeça*, qual é a reta desta forma aqui

$$r_7 \quad = \quad \{\, (\alpha, \beta) + (t - \gamma)\overrightarrow{(\delta, \varepsilon)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$$

que passa pelo ponto $(2, 5)$ quando $t = 6$ e pelo ponto $(2 + 20, 5 + 42)$ quando $t = 7$; quando você conseguir uma hipótese bastante boa escreva-a e teste-a.

Exercício 3.

Seja $F(t)$ a função do exercício 1, e digamos que $F(t) = (x(t), y(t))$.

a) Faça o gráfico da função $x(t)$.
b) Faça o gráfico da função $y(t)$.

c) Dê definições por casos das funções $x(t)$ e $y(t)$ em formatos parecidos com o da $F_3(t)$ do exercício 1, em que cada número tinha um significado geométrico e olhométrico claro.

d) Calcule $\int_{t=0}^{t=3} x(t)\,dt$ e $\int_{t=0}^{t=3} y(t)\,dt$ só olhando pros gráficos delas e contando quadrados e triângulos.

Agora reveja as definições de somas de Riemann, partições, e dos métodos [L] e [R] nestes links aqui...

2dT178 (def-integral, p.14) Partição preferida
2fT67 (somas-de-riemann, p.8) métodos a e b
2fT91 (TFC1-e-TFC2, p.3) A definição de partição
2eT34 (somas-3, p.13) Métodos L e R
2fT125 (P2, p.4) Métodos L e R

...e represente graficamente cada uma destas somas de retângulos:

e) $[L]_{\{0,1,2,3\}}$
f) $[L]_{\{0,1,1.5,2,3\}}$
g) $[R]_{\{0,1,2,3\}}$
h) $[R]_{\{0,1,1.5,2,3\}}$
i) $[L]_{\{0,0.25,0.5,\ldots,3\}}$
j) $[R]_{\{0,0.25,0.5,\ldots,3\}}$

Exercício 4.

Leia isto aqui:
Stew10p15 (p.672: Arc Length)

a) Calcule o comprimento de arco da curva $F(t)$ entre $t = 0$ e $t = 3$ no olhômetro.

b) Faça um desenho parecido com o da figura 4 dessa página para a curva $F(t)$. Considere que $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ e $t_3 = 3$.

c) Escreva a sua idéia do item (a) como uma soma de três raizes quadradas – como se você tivesse pego o somatório da última linha dessa página e expandido ele.

d) Agora reescreva o que você fez no item (c) usando o '$\sum$'.

Cálculo 4 - 2023.1

Dicas pra P1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C4.html

Dicas de 30/maio

Dica 1. A prova vai ter uma questão bem grande – no sentido de "vale muitos pontos" – com um problema parecido com o de 19/maio, em que $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ são polinômios em x e y, R é um retângulo com coordenadas simples, e vocês vão ter que calcular essa integral de linha aqui:

$$\oint_{\partial R} F \cdot \overrightarrow{(dx, dy)},$$

onde $F(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$.

Dica 2. A prova vai ter uma questão bem pequena de integrais iteradas em coordenadas cartesianas numa região retangular. Ela vai ter essa cara aqui: calcule

$$\iint_R F(x,y)\,dx\,dy,$$

onde esse R é um retângulo simples. Essa questão vai valer poucos pontos porque ela vai ser uma preparação para a questão da dica 3.

Dica 3. A prova vai ter uma questão grande na qual B é uma região tipo pedaço de bolo – como as que eu apresentei nas aulas de 23/maio e 29/maio – e F vai ser uma função de x e y que fica bem simples quando é expressa como função de r e θ. Um dos itens dessa questão vai ser tipo calcule isto:

$$\iint_B F\,dr\,d\theta$$

mas pra vocês conseguirem fazer esta questão vocês vão ter que parametrizar a fronteira dessa região usando coordenadas polares...

Links pros quadros:
4gQ21: 23/maio
4gQ22: 29/maio
4gQ24: 30/maio

Material pra consulta

Eu vou levar pra cada uma das (duas!) pessoas que têm vindo nas aulas uma cópia em papel de todos os quadros do curso – isto aqui:

http://anggtwu.net/2023.1-C4/C4-quadros.pdf

e algumas folhas do meu material de Cálculo 2 sobre as técnicas de integração que talvez vocês precisem usar em algumas questões.

Vocês não vão poder consultar nenhum livro, nenhum material de vocês, e nenhum aparelho eletrônico.

Cálculo C4 - 2023.1

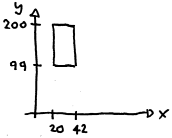
Primeira prova (P1)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C4.html

Questão 1.
(Total: 1.0 pts)
Seja R o retângulo da direita.
Calcule:

$$\iint_R x^3 y^5 \, dx \, dy.$$

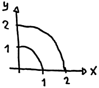
Dica: neste caso tanto faz você integrar primeiro em x e depois em y quanto integrar primeiro em y e depois em x; os dois modos são igualmente fáceis.

$R =$ 

Questão 2.
(Total: 5.0 pts)
Seja B a região tipo "pedaço de bolo" à direita – ela é um quarto de um bolo de raio 2 com furo de raio 1. Calcule

$$\iint_B x \, dx \, dy.$$

Pra resolver isso você vai ter que mudar a integral pra coordenadas polares.

$B =$ 

Questão 3.
(Total: 6.0 pts)
Seja S este retângulo: $S = [1,2] \times [1,2]$. Calcule esta integral de linha:

$$\oint_{\partial S} \overrightarrow{(xy^2, x^3y^4)} \cdot \overrightarrow{(dx, dy)}.$$

Dica: Pra "calcular" $x^3\big|_{x=23}^{x=45}$ basta fazer isso aqui:

$$x^3\Big|_{x=23}^{x=45} \;=\; 45^3 - 23^3$$

com isso você chega em algo que dá pra transformar num número usando só uma calculadora que só saiba fazer operações básicas. Você não precisa destes passos extras:

$$45^3 - 23^3 \;=\; 91125 - 12167 \;=\; 78958$$

A explicação está em um dos slides de Cálculo 2 do material anexo – procure por "dicas sobre simplificação".

Outra dica. Nas questões desta prova o que vai contar mais pontos é você organizar as contas de modo que cada passo seja fácil de entender, de verificar, e de justificar – "chegar no resultado certo" vai valer relativamente pouco.

Questão 1: gabarito

$$
\begin{aligned}
&\iint_R x^3y^5\,dx\,dy \\
&= \int_{x=20}^{x=42}\int_{y=99}^{y=200} x^3y^5\,dy\,dx \\
&= \int_{x=20}^{x=42} x^3\left(\int_{y=99}^{y=200} y^5\,dy\right)\,dx \\
&= \left(\int_{x=20}^{x=42} x^3\,dx\right)\left(\int_{y=99}^{y=200} y^5\,dy\right) \\
&= \left(\frac{x^4}{4}\Bigg|_{x=20}^{x=42}\right)\left(\frac{y^6}{6}\Bigg|_{x=99}^{x=200}\right) \\
&= \frac{42^4-20^4}{4}\;\frac{200^6-99^6}{6}
\end{aligned}
$$

Questão 2: gabarito

Vamos usar esta mudança de variáveis:

$$
\begin{aligned}
(x,y) &= (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \\
\left|\begin{smallmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{smallmatrix}\right| &= \left|\begin{smallmatrix} \cos\theta & r(-\mathrm{sen}\,\theta) \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{smallmatrix}\right| = r \\
dx\,dy &= \left|\begin{smallmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{smallmatrix}\right| dr\,d\theta \\
&= r\,dr\,d\theta
\end{aligned}
$$

Então:

$$
\begin{aligned}
&\iint_B x\,dx\,dy \\
&= \int_{r=1}^{r=2}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta)\,r\,d\theta\,dr \\
&= \int_{r=1}^{r=2}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} r^2\cos\theta\,d\theta\,dr \\
&= \left(\int_{r=1}^{r=2} r^2\,dr\right)\left(\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta\right) \\
&= \left(\frac{r^3}{3}\Bigg|_{r=1}^{r=2}\right)\left(\mathrm{sen}\,\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{8-1}{3}(1-0)
\end{aligned}
$$

Questão 3: gabarito

Vou decompor ∂S em C_1, C_2, C_3, C_4 – as paredes direita, de cima, esquerda, e de baixo do quadrado – e vou parametrizar C_1, C_2, C_3, C_4 desta forma:

Em C_1: $(x(t), y(t)) = (2, t)$, com t indo de 1 até 2; aqui $(x_t, y_t) = (0, 1)$.

Em C_2: $(x(t), y(t)) = (-t, 2)$, com t indo de -2 até -1; aqui $(x_t, y_t) = (-1, 0)$.

Em C_3: $(x(t), y(t)) = (1, -t)$, com t indo de -2 até -1; aqui $(x_t, y_t) = (0, -1)$.

Em C_4: $(x(t), y(t)) = (t, 1)$, com t indo de 1 até 2; aqui $(x_t, y_t) = (1, 0)$.

Temos:

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{C_1} (P, Q) \cdot (dx, dy) \\ =\ &\textstyle\int_{t=1}^{t=2} (P, Q) \cdot (x_t, y_t)\, dt \\ =\ &\textstyle\int_{t=1}^{t=2} (P, Q) \cdot (0, 1)\, dt \\ =\ &\textstyle\int_{t=1}^{t=2} Q(x(t), y(t))\, dt \\ =\ &\textstyle\int_{t=1}^{t=2} Q(2, t)\, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{C_2} (P, Q) \cdot (dx, dy) \\ =\ &\textstyle\int_{t=-2}^{t=-1} (P, Q) \cdot (x_t, y_t)\, dt \\ =\ &\textstyle\int_{t=-2}^{t=-1} (P, Q) \cdot (-1, 0)\, dt \\ =\ &\textstyle\int_{t=-2}^{t=-1} -P(x(t), y(t))\, dt \\ =\ &\textstyle\int_{t=-2}^{t=-1} -P(-t, 2)\, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{C_3} (P, Q) \cdot (dx, dy) \\ =\ &\textstyle\int_{t=-2}^{t=-1} (P, Q) \cdot (x_t, y_t)\, dt \\ =\ &\textstyle\int_{t=-2}^{t=-1} (P, Q) \cdot (0, -1)\, dt \\ =\ &\textstyle\int_{t=-2}^{t=-1} -Q(x(t), y(t))\, dt \\ =\ &\textstyle\int_{t=-2}^{t=-1} -Q(1, -t)\, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{C_4} (P, Q) \cdot (dx, dy) \\ =\ &\textstyle\int_{t=1}^{t=2} (P, Q) \cdot (x_t, y_t)\, dt \\ =\ &\textstyle\int_{t=1}^{t=2} (P, Q) \cdot (1, 0)\, dt \\ =\ &\textstyle\int_{t=1}^{t=2} P(x(t), y(t))\, dt \\ =\ &\textstyle\int_{t=1}^{t=2} P(t, 1)\, dt \end{aligned}$$

Como nesse problema temos $P(x, y) = xy^2$ e $Q(x, y) = x^3y^4$, isso vira:

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{C_1} (P, Q) \cdot (dx, dy) \\ =\ &\textstyle\int_{t=1}^{t=2} Q(2, t)\, dt \\ =\ &\textstyle\int_{t=1}^{t=2} 2^3 t^4\, dt \\ =\ &\textstyle 2^3 \int_{t=1}^{t=2} t^4\, dt \\ =\ &8 \left(\frac{t^5}{5} \Big|_{t=1}^{t=2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{C_2} (P, Q) \cdot (dx, dy) \\ =\ &\textstyle\int_{t=-2}^{t=-1} -P(-t, 2)\, dt \\ =\ &\textstyle\int_{t=-2}^{t=-1} -(-t)2^2\, dt \\ =\ &\textstyle 4 \int_{t=-2}^{t=-1} t\, dt \\ =\ &4 \left(\frac{t^2}{2} \Big|_{t=-2}^{t=-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{C_3} (P, Q) \cdot (dx, dy) \\ =\ &\textstyle\int_{t=-2}^{t=-1} -Q(1, -t)\, dt \\ =\ &\textstyle\int_{t=-2}^{t=-1} -1^3(-t)^4\, dt \\ =\ &\textstyle -\int_{t=-2}^{t=-1} t^4\, dt \\ =\ &4 \left(\frac{t^5}{5} \Big|_{t=-2}^{t=-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{C_4} (P, Q) \cdot (dx, dy) \\ =\ &\textstyle\int_{t=1}^{t=2} P(t, 1)\, dt \\ =\ &\textstyle\int_{t=1}^{t=2} t \cdot 1^2\, dt \\ =\ &\textstyle\int_{t=1}^{t=2} t\, dt \\ =\ &\left(\frac{t^2}{2} \Big|_{t=1}^{t=2} \right) \end{aligned}$$

E aí:

$$\begin{aligned} &\textstyle\oint_{\partial S} (xy^2, x^3y^4) \cdot (dx, dy) \\ =\ &\textstyle\int_{C_1} (xy^2, x^3y^4) \cdot (dx, dy) \\ +\ &\textstyle\int_{C_2} (xy^2, x^3y^4) \cdot (dx, dy) \\ +\ &\textstyle\int_{C_3} (xy^2, x^3y^4) \cdot (dx, dy) \\ +\ &\textstyle\int_{C_4} (xy^2, x^3y^4) \cdot (dx, dy) \\ =\ &8 \left(\frac{t^5}{5} \Big|_{t=1}^{t=2} \right) \\ +\ &4 \left(\frac{t^2}{2} \Big|_{t=-2}^{t=-1} \right) \\ +\ &4 \left(\frac{t^5}{5} \Big|_{t=-2}^{t=-1} \right) \\ +\ &\left(\frac{t^2}{2} \Big|_{t=1}^{t=2} \right). \end{aligned}$$

Cálculo 4 - 2023.1

Aula 27: dicas pra P2

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C4.html

StewPtCap15p8 Definição 5: $dA = dx\,dy$
StewPtCap15p61 Fórmula 3: $dV = dx\,dy\,dz = \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$
StewPtCap16p41 16.6 Superfícies parametrizadas e suas áreas
StewPtCap16p43 Exemplo 4: $\mathbf{r}(\phi,\theta) = \ldots$
StewPtCap16p47 Definição 6: $\mathbf{r}(u,v) = \ldots$
StewPtCap16p51 16.7 Integrais de superfície
StewPtCap16p51 Superfícies parametrizadas: $\mathbf{r}(u,v) = \ldots$
StewPtCap16p55 Figura 7: as duas orientações de uma superfície orientável
StewPtCap16p55 $\mathbf{r}(\phi,\theta) = \ldots$
StewPtCap16p56 Definição 8: $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$
StewPtCap16p57 Exemplo 4
StewPtCap16p66 16.9 O teorema do divergente
StewPtCap16p67 Exemplo 1
StewPtCap16p69 Exercício 3
StewPtCap16p70 Exercício 8

Cálculo 4 - 2023.1

Segunda prova (P2)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C4.html

Questão 1 (e única)
(Total: 10.0 pts)

O objetivo desta questão é mostrar que esta igualdade

$$\iint_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \;=\; \iiint_B \operatorname{div}\, \mathbf{F}(x,y,z)\, dV$$

é verdadeira quando B é a esfera de raio 2 centrada na origem e:

$$\mathbf{F}(x,y,z) \;=\; (x^3+y^3)\mathbf{i} + (y^3+z^3)\mathbf{j} + (z^3+x^3)\mathbf{k}$$

a) **(1.0 pts)** Calcule div F.

b) **(4.5 pts)** Calcule o lado esquerdo da igualdade.

c) **(4.5 pts)** Calcule o lado direito da igualdade.

Algumas fórmulas:

$$\begin{array}{rcll}
(x,y,z) & = & (\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, & \\
 & & \;\rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, & \\
 & & \;\rho \cos\phi) & (p.927) \\
dV & = & dx\, dy\, dz & \\
 & = & \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta & (p.929) \\
\operatorname{div}\mathbf{F} & = & \nabla\cdot\mathbf{F} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})\cdot\mathbf{F} & (p.979) \\
\iint_S f(x,y,z)\, dS & = & \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA & (p.994) \\
\mathbf{n} & = & \dfrac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} & (p.997) \\
\dfrac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|} & = & \dfrac{1}{a}\, \mathbf{r}(\phi,\theta) & (p.998) \\
\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} & = & \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS & (p.998) \\
 & = & \iint_S \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA & (p.999) \\
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS & = & \iiint_E \operatorname{div}\, \mathbf{F}(x,y,z)\, dV & (p.1008)
\end{array}$$

Algumas das fórmulas acima só fazem sentido no contexto certo. Você vai receber cópias de algumas páginas do Stewart (7ª ed) em português pra consulta; “(p.42)” quer dizer que aquela fórmula aparece na página 42.