Cálculo C2 - 2023.1

Aulas 4 até 9: o macaco integrador
e integração por partes

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

Links

2fT2 PDF de 2022.2 sobre o '[:=]'
2dT8 PDF de 2021.2 sobre o '[:=]' e justificativas
Leit2p15 (p.68): Dois exemplos de contas com justificativas

CalcEasy14:08 até 18:18: como o macaco deriva funções elementares
2gQ7 Quadros de 2022.2 sobre isto ↑

2fT23 Outra definição para integral indefinida
2fT26 Integração por partes em 2022.2: pedaços do quadro

O macaco substituidor: banana

Os quadros da aula de 25/abril/2023 estão aqui:

2gQ13

O objetivo deste slide é fazer você entender muito bem que a operação de *substituição*, '[:=]', é uma operação MUITO diferente da *igualdade*, '='. Você provavelmente já sabe lidar bastante bem com igualdades. Leia este slide aqui várias vezes,

2gT13 Banana

até você entender bastante bem como o programa de substituir letras descrito nele funciona. Digamos que a notação abaixo

$$\text{banona}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{bonono}$$

Seja uma *abreviação* pra isto aqui:

> o resultado de substituir todas as letras 'a' por 'o' na palavra "banona" é a palavra "bonono".

Dica pro exercício
Lembre que em C `"123"` é um string de comprimento 3 e `123` é um número; `100+23` é igual a `123` mas `"100+23"` não é igual a `"123"`.

Em Cálculo 2 a gente vai ter algo parecido com essa distinção entre strings e números – a gente vai distinguir entre *expressões* e *resultados de expressões*. Por exemplo, 2+5, 3+4 e 7 são três expressões diferentes mas com o mesmo resultado... e em alguns itens do exercício abaixo você vai ter que considerar que, por exemplo, bana+na é uma palavra com 7 caracteres, banana é uma palavra com 6 caracteres, e que em nenhum momento o exercício pede pra você tratar bana+na como uma expressão cujo resultado vai ser banana se você definir o '+' como concatenação.

Exercício
Quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

a) $\text{banana}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{bonono}$
b) $\text{bonono}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{banana}$
c) $\text{banana}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{bono}$
d) $\text{banana}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{bonono}$
e) $\text{banana}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{bono+no}$
f) $\text{banana}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{bononono}$
g) $\text{bonono}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{banona}$
h) $\text{banona}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{bonono}$

Péssima notícia
Em Cálculo 2 a gente vai trabalhar o tempo todo com expressões que são transformadas passo a passo. *Talvez isto seja algo completamente novo pra você.*

O macaco e as contas formais

Na aula de 25/abril nós passamos muito tempo revendo coisas que deveriam ser básicas – já vou dizer quais – e eu passei um dever de casa bem grande: *leia o que você conseguir das seções do Miranda e do Leithold sobre a regra da cadeia e faça todos os exercícios que você puder.* Aqui tem links pra elas:

Miranda87 Seção 3.5: regra da cadeia
Miranda228 Seção 7.5.1: TFC2
Leit3p45 (p.181) Seção 3.6: regra da cadeia
Leit5p61 (p.344) Seção 5.8: Os teoremas fundamentais do Cálculo

Lembre que: 1) um dos objetivos do curso é fazer vocês se tornarem capazes de estudar pelos livros, 2) as provas vão ter várias questões que vocês só vão conseguir fazer se vocês tiverem muita prática de fazer contas, e 3) o livro do Leithold é difícil em alguns lugares mas ele é INCRIVELMENTE bom – estudem por ele sempre que puderem!

Outra coisa: dê uma olhada na seção do Miranda sobre a regra da cadeia – você vai ver que essa fórmula tem uma demonstração, e que a fórmula e a demonstração só funcionam quando certas hipóteses são obedecidas. Aliás, uma questão da P1 do semestre passado foi sobre situações em que a fórmula do TFC2 dá resultados errados. Dê uma olhada nela:

2fT110 A fórmula do TFC2 nem sempre vale

A P1 deste semestre vai ter uma questão parecida com essa.

Em algumas situações nós vamos primeiro aplicar a fórmula como se ela valesse sempre, e só depois que nós fizermos todas as contas nós vamos descobrir quais são as hipóteses necessárias pra aquelas contas valerem. O nome "oficial" pra essas contas sem a verificação das hipóteses é "contas formais", mas eu vou usar a terminologia do Mathologer... ele fala muito no macaco que faz contas automaticamente sem fazer a menor idéia do que aquelas contas querem dizer, então eu vou usar expressões como "aqui vamos fazer contas como o macaco".

Exercício
Use o que você lembra de Cálculo 1 pra obter boas fórmulas pras derivadas abaixo:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} & \frac{d}{dx}\, e^{g(x)} \\
\text{b)} & \frac{d}{dx}\, g(x)^{1/2} \\
\text{c)} & \frac{d}{dx}\, \sqrt{g(x)} \\
\text{c)} & \frac{d}{dx}\, f(4x)
\end{array}$$

No próximo slide nós vamos ver como o macaco faz esssas contas usando a operação '[:=]'.

O macaco substituidor: EDOs, RC, TFC2

Sejam:

$$
\begin{array}{rcl}
[4] &=& \left(f'(x) = x^4\right) \\
[5] &=& \left(f'(x) = 2f(x)\right) \\
[6] &=& \left(f''(x) + f'(x) = 6f(x)\right) \\
[7] &=& \left(f'(x) = -\frac{1}{f(x)}\right) \\
[8] &=& \left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \\
[RC] &=& \left(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)\right) \\
[TFC2] &=& \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = f(b) - f(a)\right)
\end{array}
$$

Note que as expressões [4], [5], [6], [7], [8], são as EDOs deste problema aqui: 2dT13 EDOs por chutar e testar.

Exercício
Calcule o resultado de cada uma das substituições à direita. Lembre que o resultado de uma substituição é sempre uma *expressão* – *não simplifique ela*. Deixa eu fazer uma comparação com C: o resultado de substituir cada ocorrência do caracter `'a'` pelo caracter `'2'` no string `"a+5"` é o string `"2+5"`, não o string `"7"`, e nem o número 7.

$$
\begin{array}{rl}
\text{a)} & f(g(x))\,\left[x := 42\right] \\
\text{b)} & f(g(x))\,\left[g(x) := 200\cdot x\right] \\
\text{c)} & f(g(x))\,\left[f(y) := y^2 + y^3\right] \\
\text{d)} & f(g(x))\,\left[f(y) := e^y\right] \\
\text{e)} & f(g(x))\,\left[g(x) := 4\cdot x\right] \\
\text{f)} & f(g(x))\,\left[\begin{array}{c} f(y) := e^y \\ g(x) := 4\cdot x \end{array}\right] \\
\text{g)} & f(g(x))\,\left[f(y) := y^{1/2}\right] \\
\text{h)} & f(g(x))\,\left[f(y) := \sqrt{y}\right] \\
\text{i)} & f(g(x))\,\left[f(y) := \sqrt{y}\right] \\
\text{j)} & f(g(x))\,\left[\begin{array}{c} g(x) := e^x \\ g'(x) := e^x \end{array}\right] \\
\text{k)} & f(g(x))'\,\left[\begin{array}{c} g(x) := e^x \\ g'(x) := e^x \end{array}\right] \\
\text{l)} & [RC]\,\left[\begin{array}{c} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \end{array}\right] \\
\text{m)} & [RC]\,\left[\begin{array}{c} f(y) := y^{1/2} \\ f'(y) := \frac{1}{2}y^{-1/2} \end{array}\right] \\
\text{n)} & [RC]\,\left[\begin{array}{c} f(y) := \sqrt{y} \\ f'(y) := \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{array}\right] \\
\text{o)} & [6]\,\left[\begin{array}{c} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \\ f''(x) := 4e^{2x} \end{array}\right] \\
\text{p)} & [6]\,\left[\begin{array}{c} f(x) := e^{3x} \\ f'(x) := 3e^{3x} \\ f''(x) := 9e^{3x} \end{array}\right] \\
\text{q)} & [TFC2]\,\left[\begin{array}{c} f(x) := \frac{1}{2}x^2 \\ f'(x) := x \\ a := 0 \\ b := 2 \end{array}\right] \\
\text{r)} & [8]\,\left[\begin{array}{c} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \end{array}\right]
\end{array}
$$

Diferença

Lembre que esta notação aqui

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

tem várias pronúncias:
"a integral da função $f(x)$ entre $x=a$ e $x=b$",
"a área sob a curva $f(x)$ entre $x=a$ e $x=b$",
"a área sob a curva $f(x)$ desde $x=a$ até $x=b$",
etc...

A pronúncia desta operação daqui

$$f(x)\big|_{x=a}^{x=b}$$

vai ser "a diferença da $f(x)$ entre $x=a$ e $x=b$", e a definição formal dela vai ser esta:

$$f(x)\big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a)$$

Exercício
O Leithold e o Miranda usam notações ligeiramente diferentes da minha para a operação diferença. Dê uma olhada nestas páginas aqui,

Leit5p65 p.348
Miranda344

e traduza a expressão

$$(\sin 2x)\big|_{x=3}^{x=4}$$

da minha notação para

a) a notação do Miranda,
b) a notação do Leithold.

Integral indefinida

Tanto o Leithold quanto o Miranda explicam a *integral indefinida* antes da *integral definida*. Dê uma olhada:

Miranda181 6. Integral Indefinida
Miranda207 7. Integração definida
Leit5p3 (p.286) 5.1. Antidiferenciação
Leit5p41 (p.324) 5.5. A integral definida

Todos os modos fáceis de atribuir um significado intuitivo para expressões como esta aqui

$$\int f(x)\,dx$$

são gambiarras que funcionam mal.

Eu vou usar esta definição aqui,
2fT23 (p.4) Outra definição para a integral indefinida
e aqui tem um caso em que a definição usual quebra:
2fT24 (p.5) Meme: expanding brain, versão ln

Nós vamos começar usando a integral indefinida como o macaco que faz contas sem ter idéia do significado do que está fazendo, e só depois que tivermos bastante prática nós vamos discutir os vários jeitos de atribuir significados intuitivos para

A regra básica vai ser esta aqui:

$$[\mathrm{II}] = \left(\int f'(x)\,dx = f(x) \right)$$

Exercícios

Calcule:

a) $[\mathrm{II}] \begin{bmatrix} f(x) := x+42 \\ f'(x) := 1 \end{bmatrix}$

b) $[\mathrm{II}] \begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{2}x^2 \\ f'(x) := x \end{bmatrix}$

c) Resolva os exercícios 1 a 10 daqui por chutar e testar:
Miranda185 Exercícios 6.1

d) Entenda tudo que esta nesta página:
Leit5p6 (p.289) 5.1.8. Teorema

Integração por partes

Ainda não digitei as contas daqui!

Vou usar isto, de 2022.2:
2fT25 (p.6) Pedaços do quadro

E:
Leit9 9. Técnicas de integração
Leit9p4 (p.531) 9.1. Integração por partes
Miranda182 6.1.1 Regras Básicas de Integração
Miranda199 6.3 Integração por partes