Cálculo 2 - 2022.2

Aula 6: Integração por partes
(e integração por chutar e testar)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Links

Ainda não digitei tudo o que a gente fez nessa aula, só uma parte...

Link pras fotos do quadro desse dia:

http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=8

A gente vai começar entendendo as seções 5.1 e 5.2 do Leithold, mas vamos traduzir algumas coisas dele pra uma linguagem mais simples... principalmente isto,

$$\int df(x) \;\Rightarrow\; \int \frac{df(x)}{dx}\,dx \;\Rightarrow\; \int \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)dx \;\Rightarrow\; \int f'(x)\,dx$$

...e a definição de integral indefinida.

Outra definição pra integral indefinida

O Leithold, e a maioria dos livros, usam uma definição bem complicada pra $\int 2x\,dx$... pra eles $\int 2x\,dx$ é o conjunto de todas as 'f's que obedecem isto aqui:

$$f'(x) = 2x$$

e $x^2 + C$ é o conjunto de todas as 'g's que são "da forma $x^2 + C$" para algum $C \in \mathbb{R}$, e pra ele esta igualdade

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

quer dizer: o conjunto de funções $\int 2x\,dx$ é igual ao conjunto de funções $x^2 + C$.

Nós vamos usar uma outra definição pra igualdades como esta,

$$\int f(x)\,dx = g(x),$$

que é a seguinte: as três igualdades abaixo vão ser equivalentes pra nós,

$$\begin{array}{rcl}
\int f(x)\,dx & \overset{?}{=} & g(x) \\
\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx & \overset{?}{=} & g(x) \\
f(x) & \overset{?}{=} & \frac{d}{dx}g(x)
\end{array}$$

Essa tradução vai servir pra qualquer igualdade com integrais, e ela vai nos permitir testar facilmente se uma igualdade com integrais é verdadeira ou não. Por exemplo, digamos que o macaco integrador do Mathologer tem estas integrais na tabela de integrais dele:

$$\begin{array}{rcl}
\int x\,dx & = & \frac{1}{2}x^2 + 3 \\
\int 2x\,dx & = & x^2 + 42
\end{array}$$

Então dá pra testar esta igualdade

$$\int 2x\,dx \quad = \quad 2\int x\,dx + 99$$

assim:

$$\begin{array}{rcl}
\int 2x\,dx & \overset{?}{=} & 2\int x\,dx + 99 \\
\underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{\int 2x\,dx}_{x^2+42}}_{2x} & \overset{?}{=} & \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{(\underbrace{2\underbrace{\int x\,dx}_{\frac{1}{2}x^2+3}}_{x^2+6}+99)}_{x^2+105}}_{2x}
\end{array}$$

ou seja, a igualdade acima é verdadeira — e a gente conseguiu testar isso usando números "concretos" ao invés de '$+C$'s! Yesss!!! =)

Meme: expanding brain, versão ln

Na definição do Leithold a fórmula
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ é FALSA!!!
A fórmula certa é a que aparece na
quarta linha desse meme aqui:

$$\begin{array}{rcl}
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln x \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln|x| \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln|x| + C \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \begin{cases} \ln|x| + C_1 & \text{quando } x < 0, \\ \ln|x| + C_2 & \text{quando } x > 0 \end{cases}
\end{array}$$

Esse vídeo aqui mostra como é que o C_1
"ajusta a altura da parte esquerda" e o C_2
"ajusta a altura da parte direita" do gráfico:
http://www.youtube.com/watch?v=u4kex7hDC2o#t=5m25s

Pedaços do quadro

Os próximos slides têm alguns pedaços do que eu escrevi no quadro nessa aula, e que eu ainda não tive tempo de digitar...
Lembre que dá pra acessar as fotos do quadro aqui:
http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=8

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx = \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

$$[IP] = \boxed{\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx}$$

$$[\text{IP}]\begin{bmatrix} f := x \\ g := e^x \\ f' := 1 \\ g' := e^x \end{bmatrix}$$

$$= \left(\int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g'}\, dx = \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_{g}\, dx \right)$$

$$\int x e^x\, dx = x e^x - \int e^x\, dx \qquad \left(\text{POR } [\text{IP}] \text{ COM: } \begin{matrix} f(x) := x \\ g(x) := e^x \end{matrix}\right)$$

$$= x e^x - e^x$$

MINI-EXERCÍCIO:
VERIFIQUE SE ESTA IGUALDADE É VERDADE:

$$\int x e^x\, dx = x e^x - e^x$$

$$\int \underbrace{x^2}_{f}\,\underbrace{e^x}_{g'}\,dx = \underbrace{x^2}_{f}\cdot\underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'}\cdot\underbrace{e^x}_{g}\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x\,dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x\,dx \\
&= x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx \\
&= x^2 e^x - 2\left(x e^x - e^x\right) \\
&= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x \\
&= \left(x^2 - 2x + 1\right) e^x
\end{aligned}$$

$$\int \underbrace{x^2}_{f}\, \underbrace{e^{5x}}_{g'}\, dx \overset{(1)}{=} \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{5} e^{5x}}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{5} e^{5x}}_{g}\, dx$$

POR [IP] con: $f(x) := x^2$, $g(x) := \frac{1}{5} e^{5x}$

$$\overset{(2)}{=} x^2 \cdot \tfrac{1}{5} e^{5x} - 2 \cdot \tfrac{1}{5} \int \underbrace{x}_{f}\, \underbrace{e^{5x}}_{g'}\, dx$$

$$\overset{(3)}{=} x^2 \cdot \tfrac{1}{5} e^{5x} - 2 \cdot \tfrac{1}{5} \left(\underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{5} e^{5x}}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{5} e^{5x}}_{g}\, dx \right)$$

POR [IP] con $f(x) := x$, $g(x) := \frac{1}{5} e^{5x}$

$$\overset{(4)}{=} \tfrac{1}{5} x^2 e^{5x} - \tfrac{2}{25} x e^{5x} + \tfrac{2}{25} \int e^{5x}\, dx$$

$$\overset{(5)}{=} \tfrac{1}{5} x^2 e^{5x} - \tfrac{2}{25} x e^{5x} + \tfrac{2}{125} e^{5x}$$

$$\int \underbrace{x}_{f}\, \underbrace{e^{5x}}_{g'}\, dx = \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{5} e^{5x}}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{5} e^{5x}}_{g}\, dx$$

Exercícios pra casa
Como a gente generalizaria a conta da página 10?
Mais precisamente: você consegue fazer contas parecidas com as da página 10, mas que:

a) Integrem

$$\int x^2 h''(x)\,dx \;?$$

a) "Apliquem integração por partes duas vezes" em

$$\int m(x)h''(x)\,dx \;?$$