Cálculo 3 - 2022.1

VS extra - 31/ago/2022

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C3.html

Questão 1

(Total: 7.0 pts)
O diagrama de numerozinhos da próxima folha corresponde a uma superfície $z = F(x,y)$ que tem 5 faces. Também é possível interpretá-lo como uma superfície com 7 ou mais faces, mas vamos considerar que a superfície com só 5 faces é que é a correta.

a) **(2.0 pts)** Mostre como dividir o plano em 5 polígonos que são as projeções destas faces.

b) **(1.0 pts)** Chame estas faces de face NW ("noroeste"), S ("sul"), C ("centro"), E ("leste"), e SE ("sudeste"), e chame as equações dos planos delas de $F_{NW}(x,y)$, $F_S(x,y)$, $F_C(x,y)$, $F_E(x,y)$, e $F_{SE}(x,y)$. Dê as equações destes planos.

c) **(1.0 pts)** Sejam:

$$\begin{array}{rcl} P_S & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_S(x,y)\,\}, \\ P_C & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_C(x,y)\,\}, \\ r & = & P_S \cap P_C. \end{array}$$

Dê uma parametrização para a reta r.

d) **(2.0 pts)** Seja

$$A \;=\; \{0,1,\ldots,9\} \times \{0,1,\ldots,10\};$$

note que os numerozinhos do diagrama de numerozinhos estão todos sobre pontos de A. Para cada ponto $(x,y) \in A$ represente graficamente $(x,y) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}F(x,y)$.

Obs: quando $\vec{\nabla}F(x,y) = 0$ desenhe uma bolinha preta sobre o ponto (x,y), e quando $\vec{\nabla}F(x,y)$ não existir não desenhe nada.

e) **(1.0 pts)** Sejam

$$\begin{array}{rcl} Q(t) & = & (1,0) + t\overrightarrow{(1,1)}, \\ (x(t),y(t)) & = & Q(t), \\ h(t) & = & F(x(t),y(t)). \end{array}$$

Faça o gráfico da função $h(t)$. Considere que o domínio dela é o intervalo $[0,8]$.

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	5	5	5
6	6	6	6	6	6	5	4	4	4
6	6	6	6	6	5	4	3	3	3
6	6	6	6	5	4	3	2	2	2
6	6	6	5	4	3	2	1	1	1
6	6	6	4	3	2	1	0	0	0
6	6	6	4	2	1	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	5	5	5
6	6	6	6	6	6	5	4	4	4
6	6	6	6	6	5	4	3	3	3
6	6	6	6	5	4	3	2	2	2
6	6	6	5	4	3	2	1	1	1
6	6	6	4	3	2	1	0	0	0
6	6	6	4	2	1	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	5	5	5
6	6	6	6	6	6	5	4	4	4
6	6	6	6	6	5	4	3	3	3
6	6	6	6	5	4	3	2	2	2
6	6	6	5	4	3	2	1	1	1
6	6	6	4	3	2	1	0	0	0
6	6	6	4	2	1	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	5	5	5
6	6	6	6	6	6	5	4	4	4
6	6	6	6	6	5	4	3	3	3
6	6	6	6	5	4	3	2	2	2
6	6	6	5	4	3	2	1	1	1
6	6	6	4	3	2	1	0	0	0
6	6	6	4	2	1	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	5	5	5
6	6	6	6	6	6	5	4	4	4
6	6	6	6	6	5	4	3	3	3
6	6	6	6	5	4	3	2	2	2
6	6	6	5	4	3	2	1	1	1
6	6	6	4	3	2	1	0	0	0
6	6	6	4	2	1	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	5	5	5
6	6	6	6	6	6	5	4	4	4
6	6	6	6	6	5	4	3	3	3
6	6	6	6	5	4	3	2	2	2
6	6	6	5	4	3	2	1	1	1
6	6	6	4	3	2	1	0	0	0
6	6	6	4	2	1	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0

Questão 2
(Total: 3.0 pts)

Seja $H(x,y) = \sqrt{x + ay}$.
Dê a aproximação de Taylor de ordem 2
para $H(x,y)$ em torno do ponto $(1,1)$.

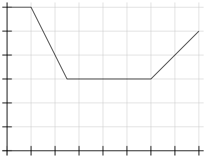
Questão 1: gabarito

a) $\begin{array}{cccccccccc}
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 5 & 5 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 4 & 4 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 3 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 \\
6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\
6 & 6 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 6 & 6 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 6 & 6 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 6 & 6 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$

b) $$\begin{array}{rcl}
F_{NW}(x,y) & = & 6 \\
F_S(x,y) & = & 10-2x \\
F_C(x,y) & = & y-x+4 \\
F_E(x,y) & = & y-3 \\
F_{SE}(x,y) & = & 0
\end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcl}
P_S & = & \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=10-2x\,\}, \\
P_C & = & \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=y-x+4\,\}, \\
r & = & \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=10-2x=y-x+4\,\}, \\
 & = & \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=10-2x,\ y=6-x\,\}, \\
 & = & \{\,(x,6-x,10-2x) \mid x\in\mathbb{R}\,\}
\end{array}$$

d) No interior da região...
NW: temos $\vec{\nabla}(x,y)=\overrightarrow{(0,0)}$,
S: temos $\vec{\nabla}(x,y)=\overrightarrow{(-2,0)}$,
C: temos $\vec{\nabla}(x,y)=\overrightarrow{(-1,-1)}$,
E: temos $\vec{\nabla}(x,y)=\overrightarrow{(0,1)}$,
SE: temos $\vec{\nabla}(x,y)=\overrightarrow{(0,0)}$.
Nas fronteiras entre as regiões o gradiente não existe.
Vou fazer o desenho depois.

e) $h(t) =$ 

Questão 2: gabarito

Sejam $S=\sqrt{x+ay}$ e $S_0=\sqrt{1+a}$. Então:

$$\begin{array}{rcl} H(x,y) &=& S \\ H_x(x,y) &=& 1/(2S) \\ H_y(x,y) &=& a/(2S) \\ H_{xx}(x,y) &=& -1/(4S^3) \\ H_{xy}(x,y) &=& -a/(4S^3) \\ H_{yy}(x,y) &=& -a^2/(4S^3) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} H(1,1) &=& S_0 \\ H_x(1,1) &=& 1/(2S_0) \\ H_y(1,1) &=& a/(2S_0) \\ H_{xx}(1,1) &=& -1/(4S_0^3) \\ H_{xy}(1,1) &=& -a/(4S_0^3) \\ H_{yy}(1,1) &=& -a^2/(4S_0^3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} H(1+\Delta x, 1+\Delta y) &=& H(1,1) \\ &+& H_x(1,1)\Delta x + H_y(1,1)\Delta y \\ &+& H_{xx}(1,1)\frac{\Delta x^2}{2} + H_{xy}(1,1)\Delta x\Delta y + H_{yy}(1,1)\frac{\Delta y^2}{2} \\ &=& S_0 \\ &+& \frac{1}{2S_0}\Delta x + \frac{a}{2S_0}\Delta x\Delta y \\ &+& \frac{-1}{4S_0^3}\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{-a}{4S_0^3}\Delta x\Delta y + \frac{-a^2}{4S_0^3}\frac{\Delta y^2}{2} \end{array}$$

Critérios de correção

Erros crassos exatamente iguais ao de colegas podem fazer a pessoa perder mais pontos.

Questão 1

Item 1a:
Já fizemos exercícios deste tipo muitas vezes, então aqui a correção é bem rigorosa. Se alguma das regiões da pessoa tem quatro pontos não-coplanares ela leva zero neste item.

Item 1b:
Aqui as funções F_{NW} e F_{SE} são triviais e não contam pontos. Se a pessoa obtiver três planos diferentes para F_S, F_C e F_E fazendo contas claras e legíveis pequenos erros de conta podem ser perdoados.

Item 1c:
Aqui a reta correta é a reta
$r = \{\, (x, 6-x, 10-2x) \mid x \in \mathbb{R} \,\}$.

Se a pessoa obteve a projeção desta reta no plano (x, y), que é $r = \{\, (x, 6-x, 10-2x) \mid x \in \mathbb{R} \,\}$.
então ela ganha só 0.6 pontos.
Repostas com retas dadas por equações ao invés de retas parametrizadas são aceitas sem desconto de pontos.

Item 1d:
Nós fizemos exercícios deste tipo muitas vezes em sala — tanto a parte de calcular gradientes de regiões planas de diagramas de numerozinhos quanto a parte de representar graficamente somas de pontos e vetores seguindo esta convenção:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-tudo.pdf#page=8`

então aqui a correção pode ser bem rigorosa. Eu esperava que os alunos mostrassem que sabiam que nas regiões NW e SE os gradientes são zero, que na região S ele aponta pra esquerda, que na região C ele aponta pra noroeste que e na região E ele aponta pra cima; erros nisso são considerados erros graves e descontam muitos pontos. Os erros que descontam poucos pontos são: 1) não reconhecer que nos pontos de fronteira entre os planos o gradiente não está definido e 2) não reconhecer que na região S o módulo do gradiente é o dobro do módulo na região E.

Critérios de correção (cont.)

Item 1e:
Se a pessoa conseguiu desenhar a reta $Q(t)$ ela ganha 0.1 pontos.
Se além disso ela conseguiu fazer um gráfico da função $h(t)$ em que o valor de $h(t)$ está correto em todos os valores de t inteiros ela ganha mais 0.5 pontos.
Se além disso a pessoa conseguiu ver que a inclinação da função $h(t)$ muda quando $t = 2.5$ ela ganha os 0.4 que faltam.

Questão 2
Aqui erros de conta no cálculo das derivadas parciais podem ser perdoados. O mais importante é que a pessoa ponha o resultado final numa destas formas:

$$\begin{array}{rcl}
G(1+\Delta x, 1+\Delta y) & \approx & ___ \\
 & + & ___\Delta x + ___\Delta y \\
 & + & ___\Delta x^2 + ___\Delta x \Delta y + ___\Delta y^2 \\
 & & \\
\text{ou:} & & \\
G(x,y) & \approx & ___ \\
 & + & ___(x-1) + ___(y-1) \\
 & + & ___(x-1)^2 + ___(x-1)(y-1) + ___(y-1)^2
\end{array}$$

e manipule os coeficientes de forma coerente.