Cálculo 3 - 2022.1

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C3.html

Cálculo 3 - 2022.1

Aulas 4 e 5: órbita

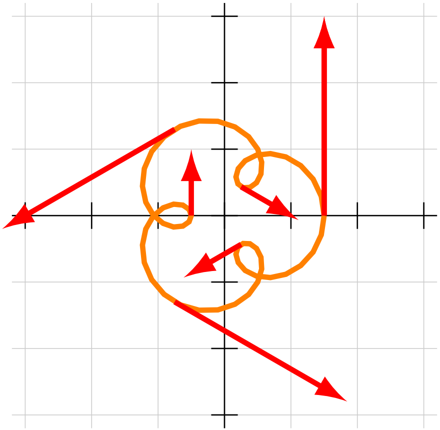
Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C3.html

Nós começamos o curso de C3 em 2022.1
usando este PDF aqui, de 2021.2:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-intro.pdf`

Depois de fazer os exercícios de desenhar
parábolas parametrizadas dele nós passamos pros
exercícios de "adivinhar trajetórias" daqui:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-vetor-tangente.pdf#page=7`

Logo depois disso, nas aulas de 8 e 13 de abril
de 2022, eu pedi pras pessoas "adivinharem" a
trajetória do exercício 4 daqui fazendo só contas
à mão e aproximações no olhômetro:
`http://angg.twu.net/2022.1-C3/C3-quadros.pdf#page=5`

Essa trajetória dá a órbita da próxima página.



Cálculo 3 - 2022.1

Aula 10: "notação de físicos"

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C3.html

Links

Links pro livro do Thompson e pro PDF do semestre passado:

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-notacao-de-fisicos.pdf

Vou acrescentar mais material aqui depois!

(2) Let x represent, in Fig. 5, the horizontal distance, from a wall, of the bottom end of a ladder, AB, of fixed length; and let y be the

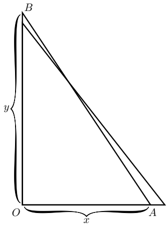


Fig. 5.

height it reaches up the wall. Now y clearly depends on x. It is easy to see that, if we pull the bottom end A a bit further from the wall, the top end B will come down a little lower. Let us state this in scientific language. If we increase x to $x+dx$, then y will become $y-dy$; that is, when x receives a positive increment, the increment which results to y is negative.

Yes, but how much? Suppose the ladder was so long that when the bottom end A was 19 inches from the wall the top end B reached just 15 feet from the ground. Now, if you were to pull the bottom end out 1 inch more, how much would the top end come down? Put it all into inches: $x = 19$ inches, $y = 180$ inches. Now the increment of x which we call dx, is 1 inch: or $x + dx = 20$ inches.

How much will y be diminished? The new height will be $y - dy$. If we work out the height by Euclid I. 47, then we shall be able to find how much dy will be. The length of the ladder is

$$\sqrt{(180)^2 + (19)^2} = 181 \text{ inches.}$$

Clearly then, the new height, which is $y - dy$, will be such that

$$\begin{aligned}(y - dy)^2 &= (181)^2 - (20)^2 = 32761 - 400 = 32361,\\ y - dy &= \sqrt{32361} = 179.89 \text{ inches.}\end{aligned}$$

Now y is 180, so that dy is $180 - 179.89 = 0.11$ inch.

So we see that making dx an increase of 1 inch has resulted in making dy a decrease of 0.11 inch.

And the ratio of dy to dx may be stated thus:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{0.11}{1}.$$

It is also easy to see that (except in one particular position) dy will be of a different size from dx.

Now right through the differential calculus we are hunting, hunting, hunting for a curious thing, a mere ratio, namely, the proportion which dy bears to dx when both of them are indefinitely small.

It should be noted here that we can only find this ratio $\dfrac{dy}{dx}$ when y and x are related to each other in some way, so that whenever x varies y does vary also. For instance, in the first example just taken, if the base x of the triangle be made longer, the height y of the triangle becomes greater also, and in the second example, if the distance x of the foot of the ladder from the wall be made to increase, the height y

Exercício 1.

As contas à direita são uma versão um pouco modernizada das contas das páginas 11 e 12 do livro do Thompson. Repare que estamos usando x_0 e y_0 pros valores “antes” e ‘x_1 e y_1 pros valores “depois”, e isso nos permite mencionar nas mesmas contas os valores de “antes” e de “depois” — o Thompson precisa mantê-los em blocos de contas separados, e precisa de explicações em inglês pra dizer o que é o quê.

a) Numere as linhas das páginas 11 e 12 do Thompson e escreva ao lado de cada igualdade à direita a que linha do Thompson ela corresponde.

b) Faça uma versão da Fig.5 do Thompson que tenha proporções (um pouco) mais coerentes com os dados das contas dele, e que indique quais distâncias são x_0, x_1, y_0 e y_1. Faça tudo no olhômetro - não use régua.

c) Nas minhas contas eu usei o símbolo ℓ pro comprimento da escada (“length”). Represente graficamente o círculo

$$\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2}=\ell\,\}$$

e represente os pontos (x_0,y_0) e (x_1,y_1) nele. Faça tudo à mão sem régua, mas incluindo informações suficientes pro leitor entender o seu gráfico.

d) O $\frac{dy}{dx}$ do Thompson corresponde à derivada de qual função, em que ponto? Diga que função é essa, calcule a derivada dela, calcule na calculadora o valor da derivada dela no ponto certo, e compare o seu resultado com o valor do Thompson.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x_0^2+y_0^2} &= \ell \\
x_0^2+y_0^2 &= \ell^2 \\
x_1^2+y_1^2 &= \ell^2 \\
(x_0+dx)^2+(y_0-dy)^2 &= \ell^2 \\
(y_0-dy)^2 &= \ell^2-x_1^2 \\
y_0-dy &= \sqrt{\ell^2-x_1^2} \\
&= \sqrt{181^2-20^2} \\
&= \sqrt{32761-400} \\
&= \sqrt{32361} \\
&\approx 179.89 \\
180-dy &= 179.89 \\
180-179.89 &= dy \\
dy &= 0.11 \\
dx &= 1 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{0.11}{1} = 0.11
\end{aligned}
$$

Exercício 2.

Leia a seção 4.7 do livro do Daniel Miranda:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=117

Os livros mais modernos:
i) distinguem dx e Δx,
ii) escrevem $y = f(x)$ ao invés de $y = y(x)$,
iii) evitam a convenção $x_1 = x_0 + \Delta x$.

a) Traduza o início da seção 4.7 do Miranda - até o fim da página 118 - pra notação do Thompson. Dicas:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \approx & f(p) + f'(p)(x-p) \\ L(x) & = & f(p) + f'(p)(x-p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} f(x_1) & \approx & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) & = & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

e a função L é exatamente a série de Taylor da função f truncada até grau 1... lembre que nós quase só vimos séries de Taylor no caso em que x_0 era 0, mas ficamos de ver depois o caso em que o "ponto base" não precisava mais ser 0...

Alguns truques de tradução

Truque 1: quando a gente escreve fórmulas "com o mesmo formato" perto uma da outra o leitor tende a ler a segunda ou como uma tradução da primeira pra outra notação ou como um caso particular da primeira...

Isto aqui é uma tradução de duas das fórmulas da p.117 do D. Miranda pra "notação de físicos":

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \approx & f(p) + f'(p)(x-p) \\ L(x) & = & f(p) + f'(p)(x-p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} f(x_1) & \approx & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) & = & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

E isto aqui é um caso particular da primeira fórmula:

$$f(4.02) \approx f(4) + f'(4)(4.02 - 4) \qquad (*)$$

Repare que a fórmula $(*)$ fica mais clara se escrevermos isto explicitamente:

$$x_1 = 4.02 \qquad x_0 = 4$$

...e repare que se a gente tentar escrever isto aqui direto

$$\sqrt{4.02} \approx \sqrt{4} + \sqrt{4}'(4.02 - 4)$$

fica confuso e péssimo — não existe uma notação padrão pra derivada de $\sqrt{x}$ em $x = 4$!!! Aqui a gente TEM que usar um truque novo — a gente tem que dar um nome pra função $\sqrt{x}$. Por exemplo...

Alguns truques de tradução (2)

Seja $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$.
Então $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, e

$$\begin{array}{rrcl} & f(4.02) & \approx & f(4) + f'(4)(4.02-4) \\ \Rightarrow & \sqrt{4.02} & \approx & \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02-4) \end{array}$$

Repare que acima eu só fiz as subtituições $f(x) := \sqrt{x}$ e $f'(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}}$ — eu acho que as contas mais mais fáceis de entender se a gente fizer as substituições e as simplificações em passos separados:

$$\begin{array}{rrcl} & f(4.02) & \approx & f(4) + f'(4)(4.02-4) \\ \Rightarrow & \sqrt{4.02} & \approx & \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02-4) \\ & & = & 2 + \frac{1}{4}(0.02) \\ & & = & 2 + 0.005 \\ & & = & 2.005 \\ & \sqrt{4.02} & = & 2.004993765576342... \end{array}$$

A última linha acima tem um '=' ao invés de um '≈', e eu calculei o resultado dela com a calculadora.

O exemplo 4.4 da página 120

$$\begin{array}{rcl}
V(x) &=& \frac{\pi}{3}(30x^2 - x^3) \\
V'(x) &=& \frac{\pi}{3}(60x - 3x^2) = \pi(20x - x^2) \\
V(x_1) &\approx& V(x_0) + V'(x_0)(x_1 - x_0) \\
V(x_1) - V(x_0) &\approx& V'(x_0)(x_1 - x_0) \\
V(x^*) - V(5) &\approx& V'(5)(x^* - 5)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
V(5) &=& \frac{\pi}{3}(30 \cdot 5^2 - 5^3) \\
&=& \frac{\pi}{3}625 \\
V'(5) &=& \pi(20 \cdot 5 - 5^2) \\
&=& 75\pi
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
V(x^*) - V(5) &\approx& V'(5)(x^* - 5) \\
\Delta V &\approx& V'(5)\Delta x \\
&=& 75\pi\Delta x
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
V(x^*) - V(5) &\approx& V'(5)(x^* - 5) \\
V(x^*) &\approx& V(5) + V'(5)(x^* - 5) \\
&=& \frac{\pi}{3}625 + 75\pi\Delta x
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
& \Delta x &=& 0.1 \\
\Rightarrow & V(x^*) &=& \frac{\pi}{3}625 + 75\pi \cdot 0.1 \\
& &=& \frac{\pi}{3}625 + 75\pi \cdot 0.1 \\
& &\approx& 654.5 + 23.56
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
& \Delta x &=& \pm 0.1 \\
\Rightarrow & V(x^*) &=& \frac{\pi}{3}625 \pm 75\pi \cdot 0.1 \\
& &=& \frac{\pi}{3}625 \pm 75\pi \cdot 0.1 \\
& &\approx& 654.5 \pm 23.56 \\
& V(x^*) &\in& [654.5 - 23.56, 654.5 + 23.56]
\end{array}$$

O exemplo 4.4 da página 120 (2)

No exemplo 4.4 o D. Miranda faz as contas o mais rápido possível — porque ele quer que os leitores passem meia hora reescrevendo as contas e checando os detalhes — e ele usa um monte de truques de físicos... por exemplo, ele fala em "erro de medida" e usa o '$\pm$' no sentido que os físicos costumam usar: pra matemáticos a frase "as soluções de $(x-17)(x+23)=0$ são da forma $x=20\pm 3$" quer dizer que $x=20-3$ ou $x=20+3$, mas pra físicos "$x=20\pm 3$" quer dizer $x\in[20-3,20+3]$...

Tem um monte de pessoas na turma que não fizeram Física.

Na página anterior eu escrevi as contas do exemplo 4.4 tentando fazer com que elas ficassem bem fáceis de verificar por pessoas que não fizeram Física. Eu fiz as contas com simplificações, como $V'(5)=75\pi$, bem passo a passo, e deixei as contas com aproximações, como $75\pi\cdot 0.1\approx 23.56$, pro final; além disso eu repeti algumas linhas, como a que diz

$$V(x^*)-V(5)\approx V'(5)(x^*-5)$$

várias vezes, e ao invés de tentar ver direto quais eram as consequências de $\Delta x=\pm 0.1$ eu comecei vendo as consequências de $\Delta x=0.1$ e só depois passei pra $\Delta x=\pm 0.1$... as contas com $\Delta x=\pm 0.1$ são parecidas com as pra $\Delta x=0.1$, mas com alguns detalhes complicados novos.

Exercício 3.
Faça as contas do Exemplo 4.5 do D. Miranda — o que é sobre uma esfera — de um jeito parecido com o que eu usei nas contas do Exemplo 4.4 — que era sobre uma tigela...

Faça tudo BEM passo a passo e deixe os truques "de físicos" pros passos finais das contas.

Exercício 4.
Faça a mesma coisa pro Exemplo 4.6.

“dy is always a dependent variable”
Agora vamos ver como vários livros
lidam com esta idéia aqui:

$$\frac{dy}{dx}dx = dy$$

Repare que temos $\frac{dy}{dx}\Delta x \approx \Delta y$ mas $\frac{dy}{dx}dx = dy$.
O livro do Thomas explica isso bem melhor que o
livro do D. Miranda. Leia a definição de diferenciais
na p.225 do Thomas e entenda os exemplos 4 e 5
das páginas 225 e 227 dele:
`http://angg.twu.net/2022.1-C3/thomas_secoes_3.7_e_3.8.pdf`

O truque das variáveis novas

No capítulo VI o Thompson calcula $\frac{d}{dx}((x^2+c)+(ax^4+b))$ organizando as contas mais ou menos desta forma:

$$\begin{array}{rcl} y &=& (x^2+c)+(ax^4+b) \\ \frac{dy}{dx} &=& \frac{d((x^2+c)+(ax^4+b))}{dx} \\ &=& \frac{d(x^2+c)}{dx}+\frac{d(ax^4+b)}{dx} \\ &=& 2x+4ax^3 \end{array}$$

No capítulo IX – “Introducing a useful dodge” –
o Thompson mostra como a gente pode simplificar contas
como essa introduzindo “variáveis dependentes” novas.

Exercício 5.
Entenda os exemplos (1)–(4) das páginas 66–68 do Thompson.

Exercício 6.
Faça os exercícios (1)–(4) da página 72 do Thompson.

Links:
https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=45
https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=83

Derivadas parciais no Thompson
Leia o início do capítulo XVI do Thompson —
"XVI. Partial Differentiation" — da p.172 até p.174.
Entenda os exemplos (1) até (3) dele.

Exercício 7.
Faça os exercícios (1)–(5) das páginas 177 e 178 do Thompson.
Obs: o (6) precisa de gráficos 3D, vamos fazer ele depois.

Exercício 8.
Digamos que $F(x, y) = x^3y^4$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, $h(t) = e^{2t}$.
Vamos usar esta notação aqui: $F_x = \frac{\partial}{\partial x}F$, $g_t = \frac{d}{dt}g$, etc.
a) Calcule $\frac{d}{dt}F(g(t), h(t))$ usando "notação de matemáticos".
b) Digamos que $x = g(t)$, $y = h(t)$, $z = F(x, y)$.
Calcule $\frac{d}{dt}z$ usando "notação de físicos".

Derivadas parciais e derivadas totais

Digamos que $z = z(x, y)$ e $y = y(x)$.

Vamos começar com um caso bem concreto — um que eu usei em EDOs com variáveis separáveis em C2... link:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-edovs.pdf

O nosso caso bem concreto vai ser:
$z = z(x, y) = x^2 + y^2$,
$y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
quando nós só consideramos o $z = z(x, y) = x^2 + y^2$
as derivadas parciais de z são $z_x = 2x$ e $z_y = 2y$,
mas quando também consideramos o $y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$
aí temos $z = z(x, y(x)) = x^2 + \sqrt{1 - x^2}^2 = 1$, e $\frac{dz}{dx} = 0$.

Esta derivada $\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} z(x, y(x))$ é chamada de derivada total de z com relação a y.

Exercício 9.
Digamos que $z = z(x, y) = (x + 2)(y + 3)$
e que $y = y(x) = \operatorname{sen} x$.
a) Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.
b) Calcule $\frac{dz}{dx}$.
c) Calcule $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}z$.

Convenção: quando uma expressão como z_x puder ser interpretada tanto como uma derivada parcial quanto como uma derivada total o default é interpretá-la como derivada parcial.

Exercício 10.
Digamos que $z = z(x, y)$ e $y = y(x)$.
(Isto é uma versão mais geral do exercício 9).
a) Calcule $\frac{d}{dx} z$.
b) Calcule $\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} z$.

Dica: siga as dicas dos próximos dois slides,
e escreva as suas contas em várias notações
diferentes "em paralelo".

Dicas pro exercício 10

Compare:

$$[\mathsf{A1}] = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(g(h(x))) \\ = f'(g(h(x))) \frac{d}{dx} g(h(x)) \\ = f'(g(h(x))) g'(h(x)) h'(x) \end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{A2}] = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \operatorname{sen}(\cos(\tan(x))) \\ = \operatorname{sen}'(\cos(\tan(x))) \frac{d}{dx} \cos(\tan(x)) \\ = \operatorname{sen}'(\cos(\tan(x))) \cos'(\tan(x)) \tan'(x) \end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{A3}] = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} w(z(y(x))) \\ = w'(z(y(x))) \frac{d}{dx} z(y(x)) \\ = w'(z(z(x))) z'(y(x)) y'(x) \end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{A4}] = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} w(z(y(x))) \\ = w_z(z(y(x))) \frac{d}{dx} z(y(x)) \\ = w_z(z(z(x))) z_y(y(x)) y_x(x) \end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{A5}] = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} w \\ = w_z \frac{d}{dx} z \\ = w_z z_y y_x \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} y = y(x) \\ z = z(y) = z(y(x)) \\ w = w(z) = w(z(y)) = w(z(y(z))) \end{array}$$

Dicas pro exercício 10 (cont.)

O [A1] é a versão em "notação de matemáticos".
O [A1] é a versão mais geral.
O [A2] é um caso particular do [A1].
O [A3] é uma "versão renomeada" do [A1].
O [A4] é uma "versão abreviada" do [A3].

Toda vez que a gente tiver dúvidas sobre como fazer contas
numa notação como a do [A5] a gente vai expandir ele pra notação do [A4], depois renomear as funções "que têm nomes de variáveis", como $y(x) \rightsquigarrow f(x)$, depois fazer as contas na "notação de matemáticos", e depois voltar pra "notação de físicos"...

Ou seja: se $y = y(x)$, $z = z(y)$ e $w = w(z)$,

$$\begin{array}{rl} & \frac{d}{dx}w =? \\ \rightsquigarrow & \frac{d}{dx}w(z(y(x))) =? \\ \rightsquigarrow & \frac{d}{dx}h(g(f(x))) =? \end{array}$$

e a gente tem que escrever os nomes novos...por exemplo:

$$\begin{aligned} y &= y(x) = h(x), \\ z &= z(y) = g(y), \\ w &= w(z) = f(z) \end{aligned}$$

e aí a gente calcula $\frac{d}{dx}h(g(f(x)))$ e depois traduz as contas de volta pra "notação de físicos".

Lembre que eu nunca vi esse método de tradução explicado direito, então o que está aqui é uma *tentativa* de explicá-lo...

Ah, e se a gente se perder nas contas na notação do [A1] a gente pode tentar fazer um caso particular, como o [A2], e depois voltar pro [A1]...

Uma pirâmide

(A gente viu isto na aula de 2022may20.)

O objetivo desta aula e das próximas é fazer vocês aprenderem a olhar pra algo como isso aqui...

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

...e verem uma pirâmide.

Uma pirâmide (2)

Note que isto é *muito* diferente da noção de função de Cálculo 1... não estamos dizendo o domínio da função $F(x,y)$ do slide anterior, não estamos dando uma fórmula pra ela, e só estamos dando o valor dela em alguns pontos...

A figura do slide anterior só define uma função se 1) a gente diz que ela representa a função mais simples possível que assume aqueles valores, 2) se todo mundo tem a mesma noção de "função mais simples possível", e 3) se não estamos num caso ambíguo.

Releia isto aqui, sobre "adivinhar trajetórias":

`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-vetor-tangente.pdf#page=7`

No diagrama de numerozinhos do slide anterior o leitor precisa "adivinhar" que a superfície $z = F(x,y)$ é feita de pedaços de planos.

Low Poly

Computadores preferem pensar que superfícies 3D são feitas de triângulos — veja o golfinho abaixo e a página da Wikipedia sobre “Low Poly”— mas humanos preferem imaginar que triângulos vizinhos que estão no mesmo plano em $\mathbb{R}^3$ são grudados e viram polígonos mais complicados... Além disso qualquer diagrama de numerozinhos pode ser triangulado de vários jeitos, e humanos costumam achar que a triangulação da pirâmide acima à direita é “mais natural” que a triangulação de baixo...

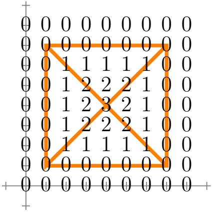
Assista o vídeo sobre “funções quadráticas” (a partir do 4:05) pra entender como nós vamos usar diagramas de numerozinhos pra superfícies que não precisam ser compostas de polígonos, e o vídeo sobre “cabos na diagonal” pra entender essa história das triangulações “mais naturais”.

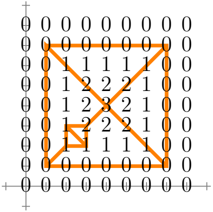
Links:

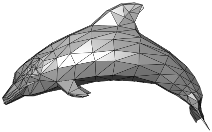
https://en.wikipedia.org/wiki/Low_poly

http://www.youtube.com/watch?v=2noSv8hyNIk
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas.mp4

http://www.youtube.com/watch?v=nxsIK0tPWAI
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-2-c3-cabos-na-diagonal.mp4

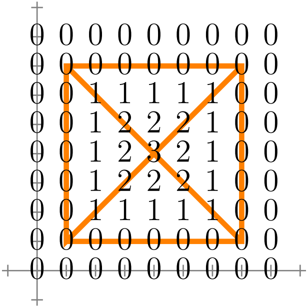






Regiões

No próximo exercício vamos considerar que o plano está divido nestas 5 regiões, que vamos chamar de N, W, E, S, e B — faces Norte, Oeste, Leste, Sul e “base”...



Regiões (2)

As definições do $f_1, f_2, \ldots, f_5$ à direita definem a mesma função, e a definição do $f_5(x)$ é uma tradução "pra notação com '$\in$'s" da definição do $f_4(x)$...

Muitos matemáticos — e livros, como por exemplo os do Guidorizzi — consideram que as definições do $f_4(x)$ e do $f_5(x)$ são ruins porque as condições, ou "regiões", depois dos "quando"s não são disjuntas, e aí essas definições "só fazem sentido" se a gente mostrar que quando $x \in (-\infty, 2] \cap [2, 4]$ temos $2 = x$, e que quando $x \in [2, 4] \cap [4, -\infty)$ temos $x = 4$...

A definição $f_1(x)$ por um gráfico nos permite pular certos detalhes. É "óbvio" que ela corresponde a uma definição por casos com três casos diferentes, mas com a definição pelo gráfico a gente não precisa definir se o ponto $x = 2$ pertence à primeira região ou à segunda, e nem se o ponto $x = 4$ pertence à segunda região ou à terceira...

Dá pra gente definir a pirâmide do slide anterior "de um jeito que deixaria o Guidorizzi feliz" por uma definição por casos como a definição do $F_P(x)$ à direita, em que cada uma das funções F_B, F_N, F_W, F_E, F_S é um "plano", isto é, é da forma $a + bx + cy$, e os conjuntos B, N, W, E, S são descritos formalmente de jeitos como este aqui...

$$S \;=\; \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y,\ 1 \leq y,\ x + y \leq 8 \,\}$$

Dê uma olhada nos slides 6 e 7 daqui:
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-infs-e-sups.pdf#page=6`
Daqui a algumas aulas nós vamos fazer um monte de exercícios de traduzir entre notação de conjuntos e representações gráficas — nós vamos precisar disso pra entender conjuntos abertos em fechados em $\mathbb{R}^2$ — mas por enquanto nós vamos definir regiões do plano por figuras.

$f_1(x) \;=$ 

$$f_2(x) \;=\; \begin{cases} 2 & \text{quando } x < 2, \\ x & \text{quando } 2 \leq x \leq 4, \\ 4 & \text{quando } 4 < x \end{cases}$$

$$f_3(x) \;=\; \begin{cases} 2 & \text{quando } x \leq 2, \\ x & \text{quando } 2 < x < 4, \\ 4 & \text{quando } 4 \leq x \end{cases}$$

$$f_4(x) \;=\; \begin{cases} 2 & \text{quando } x \leq 2, \\ x & \text{quando } 2 \leq x \leq 4, \\ 4 & \text{quando } 4 \leq x \end{cases}$$

$$f_5(x) \;=\; \begin{cases} 2 & \text{quando } x \in (-\infty, 2], \\ x & \text{quando } x \in [2, 4], \\ 4 & \text{quando } x \in [4, +\infty) \end{cases}$$

$$F_P(x) \;=\; \begin{cases} F_B(x, y) & \text{quando } (x, y) \in B, \\ F_N(x, y) & \text{quando } (x, y) \in N, \\ F_W(x, y) & \text{quando } (x, y) \in W, \\ F_E(x, y) & \text{quando } (x, y) \in E, \\ F_S(x, y) & \text{quando } (x, y) \in S, \end{cases}$$

Exercício 11.
Faça o diagrama de numerozinhos de cada uma das superfícies $z = F(x, y)$ abaixo. Desenhe os numerozinhos nos pontos com $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ — ou seja, 25 numerozinhos em cada item.

a) $F(x, y) = 2x$
b) $F(x, y) = 3y$
c) $F(x, y) = 2x + 3y$
d) $F(x, y) = 10 + 2x + 3y$

Exercício 12.
Mostre que se $z = F(x, y)$ é um plano com equação $F(x, y) = a + bx + cy$ então isto aqui vale:

$$\forall (x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2.\ \Delta z = b\Delta x + c\Delta y.$$

Exercício 13.

A pirâmide dos slides anteriores pode ser descrita formalmente por uma definição por casos como esta aqui,

$$z \quad = \quad F_P(x) \quad = \quad \begin{cases} F_B(x,y) & \text{quando } (x,y) \in B, \\ F_N(x,y) & \text{quando } (x,y) \in N, \\ F_W(x,y) & \text{quando } (x,y) \in W, \\ F_E(x,y) & \text{quando } (x,y) \in E, \\ F_S(x,y) & \text{quando } (x,y) \in S, \end{cases}$$

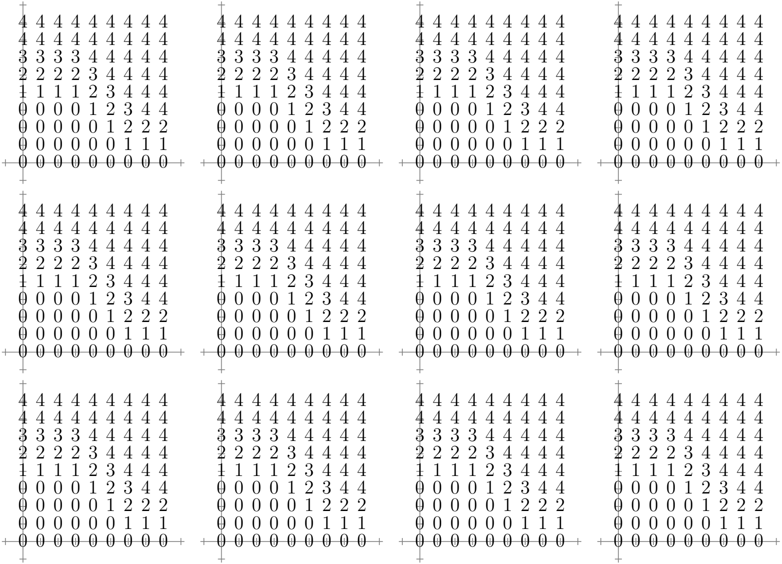
onde cada um dos $F_R(x,y)$, onde R é B, N, E, W ou S, é uma equação de um plano — ou seja, é "da forma $a+bx+cy$". Descubra quais são estas equações de planos e escreva a sua resposta neste formato aqui, mas com os números certos:

$$\begin{array}{rcl} F_B(x,y) & = & 2+3x+4y \\ F_N(x,y) & = & 5+6x+7y \\ F_W(x,y) & = & 8+9x+10y \\ F_E(x,y) & = & 11+12x+13y \\ F_S(x,y) & = & 14+15x+16y \end{array}$$

Exercício 14 (“barranco”).

No exemplo da pirâmide a gente começou com um diagrama de numerozinhos e aí encontrou um modo de dividir o plano em 5 regiões que fazia com que todos os numerozinhos numa mesma região ficassem no mesmo plano. Faça a mesma coisa com o diagrama de numerozinhos abaixo — você vai precisar de pelo menos 6 regiões.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

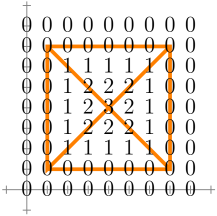

4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
3 3 3 3 4 4 4 4 4 3 3 3 3 4 4 4 4 4 3 3 3 3 4 4 4 4 4 3 3 3 3 4 4 4 4 4
2 2 2 2 3 4 4 4 4 2 2 2 2 3 4 4 4 4 2 2 2 2 3 4 4 4 4 2 2 2 2 3 4 4 4 4
1 1 1 1 2 3 4 4 4 1 1 1 1 2 3 4 4 4 1 1 1 1 2 3 4 4 4 1 1 1 1 2 3 4 4 4
0 0 0 0 1 2 3 4 4 0 0 0 0 1 2 3 4 4 0 0 0 0 1 2 3 4 4 0 0 0 0 1 2 3 4 4
0 0 0 0 0 1 2 2 2 0 0 0 0 0 1 2 2 2 0 0 0 0 0 1 2 2 2 0 0 0 0 0 1 2 2 2
0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
3 3 3 3 4 4 4 4 4 3 3 3 3 4 4 4 4 4 3 3 3 3 4 4 4 4 4 3 3 3 3 4 4 4 4 4
2 2 2 2 3 4 4 4 4 2 2 2 2 3 4 4 4 4 2 2 2 2 3 4 4 4 4 2 2 2 2 3 4 4 4 4
1 1 1 1 2 3 4 4 4 1 1 1 1 2 3 4 4 4 1 1 1 1 2 3 4 4 4 1 1 1 1 2 3 4 4 4
0 0 0 0 1 2 3 4 4 0 0 0 0 1 2 3 4 4 0 0 0 0 1 2 3 4 4 0 0 0 0 1 2 3 4 4
0 0 0 0 0 1 2 2 2 0 0 0 0 0 1 2 2 2 0 0 0 0 0 1 2 2 2 0 0 0 0 0 1 2 2 2
0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
3 3 3 3 4 4 4 4 4 3 3 3 3 4 4 4 4 4 3 3 3 3 4 4 4 4 4 3 3 3 3 4 4 4 4 4
2 2 2 2 3 4 4 4 4 2 2 2 2 3 4 4 4 4 2 2 2 2 3 4 4 4 4 2 2 2 2 3 4 4 4 4
1 1 1 1 2 3 4 4 4 1 1 1 1 2 3 4 4 4 1 1 1 1 2 3 4 4 4 1 1 1 1 2 3 4 4 4
0 0 0 0 1 2 3 4 4 0 0 0 0 1 2 3 4 4 0 0 0 0 1 2 3 4 4 0 0 0 0 1 2 3 4 4
0 0 0 0 0 1 2 2 2 0 0 0 0 0 1 2 2 2 0 0 0 0 0 1 2 2 2 0 0 0 0 0 1 2 2 2
0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Exercício 15.

Lembre que em planos a fórmula da aproximação linear

$$\begin{aligned} F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) &\approx F(x_0,y_0) \\ &+ F_x(x_0,y_0)\Delta x \\ &+ F_y(x_0,y_0)\Delta y \end{aligned}$$

dá resultados exatos...



Seja $z = F(x, y)$ a função que dá a superfície da pirâmide da figura à direita. Descubra os valores de:

a) F(1.5, 3)	e) F(5.2, 2.3)
b) F(1.1, 3)	f) F(5.2, 1.9)
c) F(5.1, 3)	g) F(3.1, 2.1)
d) F(5.1, 2)	h) F(2.9, 1.9)

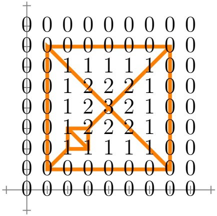
Tente fazer as contas de cabeça.
Se você se enrolar faça as contas todas explicitamente, e use os “truques de tradução” das páginas 6 e 7 pra fazer as contas da forma mais clara possível... depois esconda as suas contas e tente obter todos os resultados de novo de cabeça.

Exercício 16.

Seja $z = F(x, y)$ a função que dá a superfície da pirâmide com duas faces extras da figura à direita. Descubra os valores de:

a) F(2.1, 2.1)
b) F(2.5, 2.5)
c) F(2.6, 2.6)

fazendo as contas de cabeça.

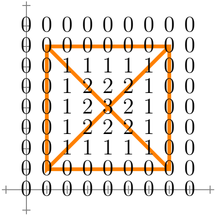


Derivada direcional (Bortolossi)

O Bortolossi define a derivada direcional deste jeito, na p.296 do capítulo 8 dele:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t}$$

Digamos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que os argumentos da f se chamem x e y, que $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$, que o vetor $\mathbf{v}$ seja (α, β), e que $z = z(x,y) = f(x,y)$.



Exercício 17.
Seja $f(x,y) = z(x,y) = F(x,y)$, onde $F(x,y)$ é a pirâmide do exercício 15 (figura à direita).
Sejam $\mathbf{p} = (x_0, y_0) = (2,3)$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{(\alpha, \beta)} = \overrightarrow{(2,0)}$.
Calcule $\frac{f(\mathbf{p}+t\cdot\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{t}$ para os seguintes valores de t:

a) $t = 1$
b) $t = 2$
c) $t = 3$
d) $t = 1/2$
e) $t = 1/4$
f) $t = -1$
g) $t = -1/2$
h) $t = -1/4$

Exercício 18.
A partir do que você obteve no exercício 17, qual você acha que deve ser o valor de $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{(2,0)}}((2,3))$?

Exercício 19.
...e o valor de $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{(1,0)}}((2,3))$?

O gradiente

Obs: esse exercício aqui vai ser totalmente reescrito depois! Leia a definição de gradiente na página p.298 do capítulo 8 do Bortolossi. Tente entendê-la usando as dicas abaixo.

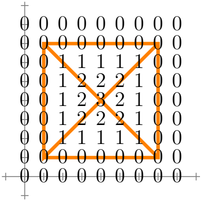
Se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, então:

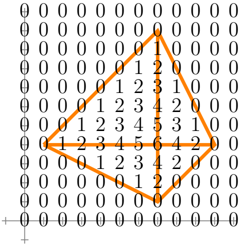
a) $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = F_x(x_0, y_0)$,

b) $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial \overrightarrow{(1,0)}}(x_0, y_0)$,

c) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial \overrightarrow{(0,1)}}(x_0, y_0)$

d) $\nabla F = \overrightarrow{(F_x, F_y)}$





Exercício 20.

a) Usando a F da pirâmide mais simples, calcule: $\nabla F(2,4), \nabla F(4,2), \nabla F(6,4), \nabla F(4,6)$.

b) Represente graficamente $(x_0, y_0) + \nabla F(x_0, y_0)$ para estes valores de (x_0, y_0): $(2,4), (4,2), (6,4), (4,6)$.

c) Seja G a função da pirâmide torta do mini-teste. Calcule: $\nabla G(5,3), \nabla G(8,3), \nabla G(8,6), \nabla G(5,6)$.

d) Represente graficamente $G(x,y) + \nabla G(x,y)$ para cada um dos 4 pontos do item (c).

Exercício 21.
Leia a definição de curvas de nível nas páginas 97 e 98 do capítulo 3 do Bortolossi.

a) Seja $F(x, y) = 2x + y$.

b) Faça o diagrama de numerozinhos da $F(x, y)$ para os pontos com $x, y \in \{0, 1, 2, 3\}$.

c) Desenhe quatro curvas de nível diferentes da $F(x, y)$ sobre o diagrama do item (b).

d) Represente graficamente $F + \nabla F$ para cada um destes 16 pontos do (b). Isto vai dar 16 vetores, cada um apoiado num dos numerozinhos.

Exercício 22.
Faça a mesma coisa que você fez no exercício 21, mas agora para $F(x,y) = 3x - 2y$.

Exercício 23.
Faça a mesma coisa que você fez nos exercício 21 e 22, mas agora para $F(x,y) = \frac{x^2+y^2}{10}$ e $x, y \in \{-2,-1,0,1,2\}$.

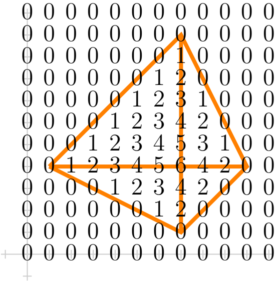
Exercício 24.
Faça a mesma coisa que você fez no exercício 23, mas agora para $F(x,y) = \frac{xy}{10}$.

Cálculo 3 - 2022.1

Mini-teste 1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C3.html

Seja $z = z(x,y) = F(x,y)$ a função que dá a superfície desta pirâmide:



Lembre que:

$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{p}+t\cdot\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{t}$

Digamos que $\mathbf{p} = (5,3)$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{(1,1)}$.

Calcule $\frac{f(\mathbf{p}+t\cdot\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{t}$ para $t = 4$, $t = 3$, $t = 2$, $t = 1$, $t = \frac{1}{2}$, $t = -1$, $t = -\frac{1}{2}$.

Seja $z = z(x,y) = F(x,y)$ a função que dá a superfície desta pirâmide:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	2	3	1	0	0	0
0	0	0	0	1	2	3	4	2	0	0	0
0	0	0	1	2	3	4	5	3	1	0	0
0	0	1	2	3	4	5	6	4	2	0	0
0	0	0	0	1	2	3	4	2	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Lembre que:

$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{p}+t\cdot\mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t}$

Digamos que $\mathbf{p} = (5,3)$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{(1,1)}$.

Calcule $\frac{f(\mathbf{p}+t\cdot\mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t}$ para $t = 4$, $t = 3$, $t = 2$, $t = 1$, $t = \frac{1}{2}$, $t = -1$, $t = -\frac{1}{2}$.

Gabarito:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(\mathbf{p}+4\cdot\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{4} &= \frac{f((5,3)+4\cdot\overrightarrow{(1,1)})-f((5,3))}{4} \\
&= \frac{f((9,7))-f((5,3))}{4} \\
&= \frac{0-2}{4} \\
&= -1/2 \\
\frac{f(\mathbf{p}+3\cdot\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{3} &= \frac{f((8,6))-f((5,3))}{3} \\
&= \frac{2-2}{3} \\
&= 0 \\
\frac{f(\mathbf{p}+2\cdot\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{2} &= \frac{f((7,5))-f((5,3))}{2} \\
&= \frac{5-2}{2} \\
&= 1 \\
\frac{f(\mathbf{p}+1\cdot\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{1} &= \frac{f((6,4))-f((5,3))}{1} \\
&= \frac{5-2}{1} \\
&= 3 \\
\frac{f(\mathbf{p}+0.5\cdot\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{0.5} &= \frac{f((5.5,3.5))-f((5,3))}{0.5} \\
&= \frac{3.5-2}{0.5} \\
&= 3 \\
\frac{f(\mathbf{p}+(-0.5)\cdot\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{(-0.5)} &= \frac{f((4.5,2.5))-f((5,3))}{-0.5} \\
&= \frac{0.5-2}{0.5} \\
&= 3 \\
\frac{f(\mathbf{p}+(-1)\cdot\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{(-1)} &= \frac{f((4,1))-f((5,3))}{-1} \\
&= \frac{0-2}{-1} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Obs:
Falta eu escrever como a gente descobre que
$f(5.5, 3.5) = 3.5$ e que $f(4.5, 2.5) = 0.5$...

Cálculo 3 - 2022.1

Aula 29: funções homogêneas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C3.html

Introdução

No semestre passado eu apresentei funções homogêneas de um jeito que demorou muito... esse aqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-funcoes-homogeneas.pdf

Vou tentar outro jeito agora.
Normalmente a gente começa a ouvir falar de funções homogêneas por polinômios homogêneos, que são polinômios que todos os monômios deles têm o mesmo grau... por exemplo,

$$2x^3y^4 + 5x^4y^3 - 6x^7$$

é um polinômio em duas variáveis, x e y, que é homogêneo de grau 7, porque x^3y^4, x^4y^3, e x^7 são monômios de grau 7. Qualquer polinômio em duas variáveis pode ser decomposto em polinômios homogêneos; por exemplo:

$$\begin{array}{rcll} F(x,y) & = & a & \leftarrow \text{parte homogênea de grau 0} \\ & + & bx+cy & \leftarrow \text{parte homogênea de grau 1} \\ & + & dx^2+exy+fy^2 & \leftarrow \text{parte homogênea de grau 2} \\ & + & gx^3+hxy^2+jx^2y+ky^3 & \leftarrow \text{parte homogênea de grau 3} \\ & + & \ldots & \end{array}$$

Repare que fica implícito que $a, b, \ldots, k, \ldots$ são constantes.

Uma função em duas variáveis, $F(x,y)$, homogênea de grau k, é uma que obedece isso aqui:

$$[\mathrm{H}_k] \quad = \quad \left(\; F(\lambda\cdot x_1, \lambda\cdot y_1) \quad = \quad \lambda^k \cdot F(x_1,y_1) \;\right)$$

ou, equivalentemente,

$$[\mathrm{H}'_k] \quad = \quad \left(\begin{array}{lrcl} \text{Se} & (x_2,y_2) & = & \lambda\cdot(x_1,y_1) \\ \text{então} & F(x_2,y_2) & = & \lambda^k \cdot F(x_1,y_1) \end{array} \right)$$

O "$\forall x_1, y_1, x_2, y_2, \lambda \in \mathbb{R}$" fica implícito. Veja estas páginas da Wikipedia:
https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_polynomial
https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_function

Eu inventei nomes curtos — $[\mathrm{H}_k]$ e $[\mathrm{H}'_k]$ — pra essas propriedades pra poder usar a operação '[:=]' de Cálculo 2,
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=11

pra obter casos particulares. Por exemplo, se a função $F(x,y)$ é homogênea de grau 2 então estes casos particulares valem:

$$[\mathrm{H}_k]\left[\begin{smallmatrix} x_1:=3 \\ y_1:=4 \\ x_2:=30 \\ y_2:=40 \\ \lambda:=10 \\ k:=2 \end{smallmatrix}\right] \quad = \quad \left(\; F(10\cdot 3, 10\cdot 4) \quad = \quad 10^2\cdot F(3,4) \;\right)$$

$$[\mathrm{H}'_k]\left[\begin{smallmatrix} x_1:=3 \\ y_1:=4 \\ x_2:=30 \\ y_2:=40 \\ \lambda:=10 \\ k:=2 \end{smallmatrix}\right] \quad = \quad \left(\begin{array}{lrcl} \text{Se} & (30,40) & = & 10\cdot(3,4) \\ \text{então} & F(30,40) & = & 10^2\cdot F(3,4) \end{array} \right)$$

Vamos definir $[\mathrm{H}_1], [\mathrm{H}_2], [\mathrm{H}_3], \ldots, [\mathrm{H}'_1], [\mathrm{H}'_2], [\mathrm{H}'_3], \ldots$ "do jeito óbvio" — $[\mathrm{H}_2] = [\mathrm{H}_k][k:=2]$, $[\mathrm{H}'_3] = [\mathrm{H}_k][k:=3]$, etc. No exercício abaixo você vai entender os detalhes disso.

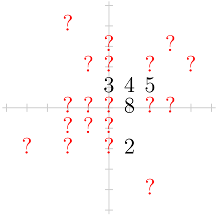
Exercício 1.
Complete:

a) $[\mathrm{H}_k][k:=2] \;=\; ?$

b) $[\mathrm{H}'_k][k:=3] \;=\; ?$

Exercício 2

Digamos que $F(x,y)$ é uma função de duas variáveis, que não precisa ser um polinômio em duas variáveis — ela pode ser algo bem mais esquisito.
Digamos que $F(x,y)$ seja homogênea de grau 2.
Digamos que a figura à direita diz coisas que a gente sabe sobre a função F e coisas que a gente quer descobrir sobre ela — por exemplo, o numerozinho 2 na posição $(1,1)$ diz que sabemos que $F(1,1)=4$, e o '?' na posição $(3,3)$ diz que queremos saber $F(3,3)$. Como F obedece $[\mathrm{H}_2']$, este caso particular do $[\mathrm{H}_2']$ tem que valer:



$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{lrcl} \text{Se} & (x_2,y_2) & = & \lambda\cdot(x_1,y_1) \\ \text{então} & F(x_2,y_2) & = & \lambda^2\cdot F(x_1,y_1) \end{array}\right)\begin{bmatrix} x_1:=1 \\ y_1:=1 \\ x_2:=3 \\ y_2:=3 \\ \lambda:=3 \end{bmatrix} \\
=&\left(\begin{array}{lrcl} \text{Se} & (3,3) & = & 3\cdot(1,1) \\ \text{então} & F(3,3) & = & 3^2\cdot F(1,1) \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

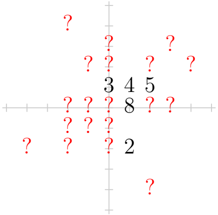
E portanto $F(3,3)=3^2\cdot F(1,1)=3^2\cdot 4=9\cdot 4=36$.

Exercício 2 (cont.)

a) O que você tem que pôr em cada '?' daqui

$$\left(\begin{array}{lrcl} \text{Se} & (x_2,y_2) & = & \lambda\cdot(x_1,y_1) \\ \text{então} & F(x_2,y_2) & = & \lambda^2\cdot F(x_1,y_1) \end{array}\right)\begin{bmatrix} x_1:=? \\ y_1:=? \\ x_2:=? \\ y_2:=? \\ \lambda:=? \end{bmatrix}$$

pra descobrir o valor de $F(3,0)$ a partir do valor de $F(1,0)$?



b) Qual vai ser o valor de $F(3,0)$?

c) O que você tem que pôr em cada '?' acima pra descobrir $F(-2,4)$ a partir de $F(1,-2)$?

d) Qual vai ser o valor de $F(-2,4)$?

e) Qual vai ser o valor de $F(-1,-1)$?

f) Escreva as contas do item (e) de forma que cada '=' seja fácil de justificar. Baseie-se neste jogo aqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-der-fun-inv.pdf#page=4

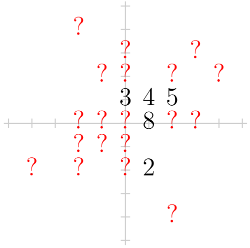
g) Descubra os valores da F nos outros '?'s da figura à direita.

Exercício 3.

No exercício 2 nós supusemos que a função $F(x,y)$ era homogênea de grau 2. Agora nós vamos usar a mesma figura, mas vamos supor que a $F(x,y)$ é homogênea de grau 1.

Digamos — como no exercício anterior — que os numerozinhos da figura à direita indicam coisas que a gente sabe sobre a função $F(x,y)$ e que os '?' indicam coisas que a gente quer descobrir.

Descubra o valor dessa $F(x,y)$ em cada '?' da figura.

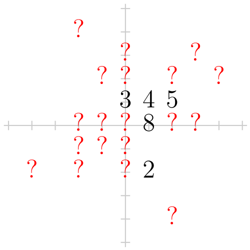


Exercício 4.

No exercício 2 nós supusemos que a função $F(x,y)$ era homogênea de grau 2, e no exercício 3 nós supusemos que ela era homogênea de grau 1. Agora nós vamos usar a mesma figura, mas vamos supor que a $F(x,y)$ é homogênea de grau 3.

Digamos — como no exercício anterior — que os numerozinhos da figura à direita indicam coisas que a gente sabe sobre a função $F(x,y)$ e que os '?' indicam coisas que a gente quer descobrir.

Descubra o valor dessa $F(x,y)$ em cada '?' da figura.



Exercício 5.

Vamos dizer que uma função $F(x,y)$ é *homogênea de grau k em torno do ponto* (x_0,y_0) quando ela obedece

$$\Big(\ F(x_0+\lambda y_0, \Delta x+\lambda\Delta y) \ = \ \lambda^k F(x_0+y_0, \Delta x+\Delta y)\ \Big)$$

-4	-2	0	2	4
-2	-1	0	1	2
0	0	0	0	0
2	1	0	-1	-2
4	2	0	-2	-4

Cálculo 3 - 2022.1

Mini-teste 2

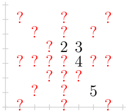
Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C3.html

Mini-teste 2

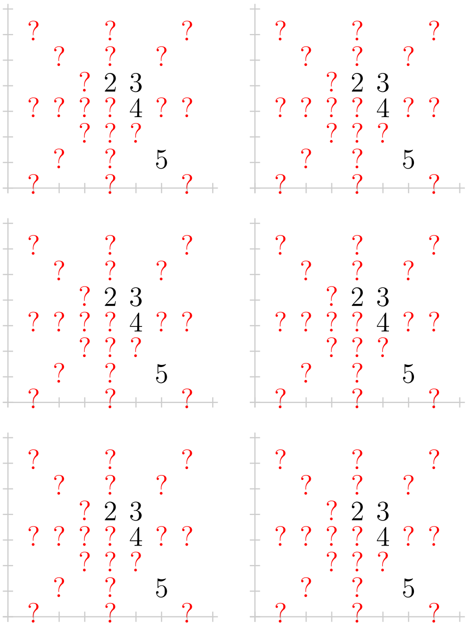
Digamos que $F(x,y)$ é uma função de duas variáveis, que não precisa ser um polinômio em duas variáveis — ela pode ser algo bem mais esquisito.
Digamos que $F(x,y)$ obedece isto aqui,

$$F(x_0+\lambda\Delta x, y_0+\lambda\Delta y) \;=\; \lambda^2 F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$$

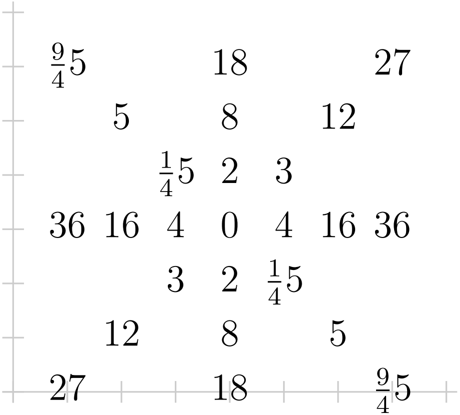
onde $x_0=4$ e $y_0=3$.
A figura abaixo diz o que sabemos sobre a $F(x,y)$ e o que queremos saber sobre ela.



Descubra o valor de $F(x,y)$ em cada um dos '?'s e escreva os seus resultados sobre alguma das figuras da direita.



Gabarito


$\frac{9}{4}5$ 18 27
5 8 12
$\frac{1}{4}5$ 2 3
36 16 4 0 4 16 36
3 2 $\frac{1}{4}5$
12 8 5
27 18 $\frac{9}{4}5$

Cálculo 3 - 2022.1

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C3.html

Questão 1.

(Total: 7.0 pts)
Quando nós fizemos os exercícios do barranco – reproduzido na próxima página – nós vimos que as duas faces mais complicadas dele eram a) a face que continha os pontos $(3,5,2)$, $(4,5,3)$ e $(3,6,3)$ e b) a face que continha os pontos $(7,2,2)$, $(8,2,2)$ e $(7,3,4)$. Vou chamar essas faces de F_a e F_b e usar os mesmos símbolos pras funções dos planos associados a elas: quando $(x,y) \in F_a$ temos $z(x,y) = F_a(x,y)$ e quando $(x,y) \in F_b$ temos $z(x,y) = F_b(x,y)$.

a) **(0.2 pts)** Dê a equação do plano $F_a(x,y)$.

b) **(0.2 pts)** Dê a equação do plano $F_b(x,y)$.

c) **(2.0 pts)** Mostre em qual região do barranco os numerozinhos obedecem $z = F_a(x,y)$ e em qual região eles obedecem $z = F_b(x,y)$. As faces F_a e F_b têm uma aresta em comum?

d) **(0.6 pts)** Sejam $P_0 = (6,2.5)$, $P_1 = (6.5,2.5)$ e $P_2 = (7,2.5)$. Descubra - no olhômetro mesmo - quem são z_x e z_y nos pontos P_0, P_1 e P_2.

e) **(2.0 pts)** O Bortolossi define a derivada direcional por essa fórmula aqui:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{p}+t\cdot\mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t}$$

Calcule

$$\frac{f(\mathbf{p}+t\cdot\mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t}$$

quando $\mathbf{p} = P_1$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{(0.5,-0.5)}$, para os seguintes valores de t: $t=3$, $t=2$, $t=1$, $t=0.5$, $t=-3$, $t=-2$, $t=-1$, $t=-0.5$.

f) **(2.0 pts)** Lembre que o gradiente de uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ é definido como $\vec{\nabla} G(x,y) = \overrightarrow{(G_x(x,y), G_y(x,y))}$. Em “notação de físicos” isso vira $\vec{\nabla} z = \overrightarrow{(z_x, z_y)}$, e a nossa convenção pra notação pra desenhar vetores gradientes é que cada $\vec{\nabla} G(x,y)$ é desenhado como $G(x,y) + \vec{\nabla} G(x,y)$. Represente em um dos diagramas de numerozinhos da próxima página $\vec{\nabla} F$ para estes valores de (x,y): $(2,1)$, $(2,5)$, $(5,3)$, $(6,6)$, $(7,1)$, $(7,2.5)$.

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

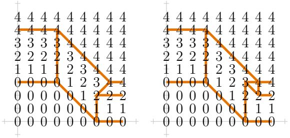
4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

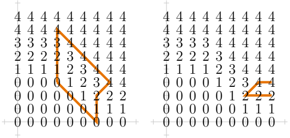
4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Questão 1: gabarito (muito incompleto)

Dois modos de dividir o barranco em faces:

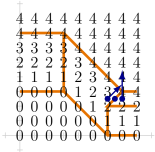


Eu prefiro o primeiro modo porque ele tem uma face a menos, mas vou aceitar respostas que usavam o segundo modo.
As faces F_a e F_b são:

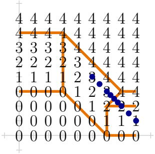


a) $F_a(x,y) = x + y - 6$
b) $F_b(x,y) = 2y - 2$
c) Veja as figuras acima.
d) Em $P_0 = (6, 2.5)$ temos $z = 2.5$, $z_x = 1$, $z_y = 1$;
Em $P_1 = (6.5, 2.5)$ temos $z = 3$, e nesse ponto z_x e z_y não existem;
Em $P_2 = (7, 2.5)$ temos $z = 3$, $z_x = 0$, $z_y = 2$.

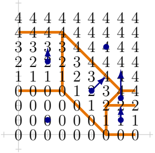
Item d:



Item e:



Item f:



Questão 2.

(Total: 3.0 pts)

No capítulo VI o Thompson calcula $\frac{d}{dx}((x^2+c)+(ax^4+b))$ organizando as contas mais ou menos desta forma:

$$\begin{array}{rcl} y & = & (x^2+c)+(ax^4+b) \\ \frac{dy}{dx} & = & \frac{d((x^2+c)+(ax^4+b))}{dx} \\ & = & \frac{d(x^2+c)}{dx}+\frac{d(ax^4+b)}{dx} \\ & = & 2x+4ax^3 \end{array}$$

E no capítulo IX – "Introducing a useful dodge" – o Thompson mostra como a gente pode simplificar contas como essa introduzindo "variáveis dependentes" novas... por exemplo, $w=x^2+c$. Além disso ele trata dy e dw como variáveis que dependem de x e dy.

Use estes truques pra calcular $\frac{dy}{dx}$ quando:

$$y=\sqrt{\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}}\sqrt[3]{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$$

Gabarito

Veja o livro do Thompson! Ó:

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=81

Cálculo 3 - 2022.1

P2 (Segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C3.html

Questão 1
(Total: 1.0 pts)
Digamos que:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= a \\ &+ bx + cy \\ &+ dx^2 + exy + fy^2 \end{aligned}$$

a) **(0.2 pts)** Calcule F_x, F_y, F_{xx}, F_{xy} e F_{yy} nos pontos (x,y) e $(0,0)$.

b) **(0.8 pts)** Mostre como reescrever $F(x,y)$ como

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \_\_\_ \\ &+ \_\_\_x + \_\_\_y \\ &+ \_\_\_x^2 + \_\_\_xy + \_\_\_y^2 \end{aligned}$$

onde em cada lacuna você vai pôr uma expressão que depende só das derivadas parciais de $F(x,y)$ no ponto $(0,0)$.

Questão 2
(Total: 3.0 pts)
Digamos que:

$$\begin{aligned} G(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) &= a \\ &+ b\Delta x + c\Delta y \\ &+ d(\Delta x)^2 + e\Delta x\Delta y + f(\Delta y)^2 \end{aligned}$$

a) **(0.6 pts)** Calcule G_x, G_y, G_{xx}, G_{xy} e G_{yy} nos pontos (x,y) e $(0,0)$.

b) **(2.4 pts)** Mostre como reescrever $G(x,y)$ como

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \_\_\_ \\ &+ \_\_\_\Delta x + \_\_\_\Delta y \\ &+ \_\_\_\Delta x^2 + \_\_\_\Delta x\Delta y + \_\_\_\Delta y^2 \end{aligned}$$

onde em cada lacuna você vai pôr uma expressão que depende só das derivadas parciais de $G(x,y)$ no ponto (x_0,y_0).

Gabarito das questões 1 e 2

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2 \\
F_x(x,y) &= b+2dx+ey \\
F_{xx}(x,y) &= 2d \\
F_{xy}(x,y) &= e \\
F_y(x,y) &= c+ex+2fy \\
F_{yx}(x,y) &= e \\
F_{yy}(x,y) &= 2f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) &= a+b\Delta x+c\Delta y+d\Delta x^2+e\Delta x\Delta y+f\Delta y^2 \\
F_x(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) &= b+2d\Delta x+e\Delta y \\
F_{xx}(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) &= 2d \\
F_{xy}(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) &= e \\
F_y(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) &= c+e\Delta x+2f\Delta y \\
F_{yx}(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) &= e \\
F_{yy}(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) &= 2f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(0,0) &= a \\
F_x(0,0) &= b \\
F_{xx}(0,0) &= 2d \\
F_{xy}(0,0) &= e \\
F_y(0,0) &= c \\
F_{yx}(0,0) &= e \\
F_{yy}(0,0) &= 2f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(x_0,y_0) &= a \\
F_x(x_0,y_0) &= b \\
F_{xx}(x_0,y_0) &= 2d \\
F_{xy}(x_0,y_0) &= e \\
F_y(x_0,y_0) &= c \\
F_{yx}(x_0,y_0) &= e \\
F_{yy}(x_0,y_0) &= 2f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= F(0,0) \\
&+ F_x(0,0)x+F_y(0,0)y \\
&+ \tfrac{1}{2}F_{xx}(0,0)x^2+F_{xy}(0,0)xy+\tfrac{1}{2}F_{yy}(0,0)y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) &= F(x_0,y_0) \\
&+ F_x(x_0,y_0)\Delta x+F_y(x_0,y_0)\Delta y \\
&+ \tfrac{1}{2}F_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2+F_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y+\tfrac{1}{2}F_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2
\end{aligned}$$

Se $(x_0,y_0)=(0,0)$,

$$\begin{aligned}
z(x,y) &= z \\
&+ z_x x+z_y y \\
&+ \tfrac{1}{2}z_{xx}x^2+z_{xy}xy+\tfrac{1}{2}z_{yy}y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) &= z \\
&+ z_x\Delta x+z_y\Delta y \\
&+ \tfrac{1}{2}z_{xx}\Delta x^2+z_{xy}\Delta x\Delta y+\tfrac{1}{2}z_{yy}\Delta y^2
\end{aligned}$$

Questão 3
(Total: 5.0 pts)
Seja $H(x,y) = \sqrt{x^2+3y^2}$ e seja $(x_0,y_0) = (1,1)$.
Encontre as aproximações de Taylor de ordem 1 e 2 para $H(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$.

Questão 4
(Total: 1.0 pts)
Seja $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = \Delta x(\Delta x+\Delta y)$.
Digamos que $(x_0,y_0) = (4,3)$.
Faça o diagrama de numerozinhos da $M(x,y)$ nos pontos com $\Delta x, \Delta y \in \{-2,-1,-0,1,2\}$.

Questão 3: gabarito

Seja $H(x,y) = \sqrt{x^2+3y^2} = S$.
Então:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
H(x,y) &=& S & H(x_0,y_0) &=& 2 \\
H_x(x,y) &=& x/S & H_x(x_0,y_0) &=& 1/2 \\
H_y(x,y) &=& 3y/S & H_y(x_0,y_0) &=& 3/2 \\
H_{xx}(x,y) &=& (S^2-x^2)/S^3 & H_{xx}(x_0,y_0) &=& 3/8 \\
H_{xy}(x,y) &=& -3xy/S^3 & H_{xy}(x_0,y_0) &=& -3/8 \\
H_{yy}(x,y) &=& (3S^2-9y^2)/S^3 & H_{yy}(x_0,y_0) &=& 3/8
\end{array}$$

Aproximação de Taylor de 1a ordem:

$$\begin{array}{rcl}
H(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) &\approx& H(x_0,y_0) \\
&+& H_x(x_0,y_0)\Delta x + H_y(x_0,y_0)\Delta y \\
&=& 2 \\
&+& \frac{1}{2}\Delta x + \frac{3}{2}\Delta y
\end{array}$$

Aproximação de Taylor de 2a ordem:

$$\begin{array}{rcl}
H(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) &\approx& H(x_0,y_0) \\
&+& H_x(x_0,y_0)\Delta x + H_y(x_0,y_0)\Delta y \\
&+& \frac{1}{2}H_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2 + H_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + \frac{1}{2}H_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2 \\
&=& 2 \\
&+& \frac{1}{2}\Delta x + \frac{3}{2}\Delta y \\
&+& \frac{3}{16}\Delta x^2 - \frac{3}{8}\Delta x\Delta y + \frac{3}{16}\Delta y^2
\end{array}$$

Questão 4: gabarito

0	-1	0	3	8
2	0	0	2	6
4	1	0	1	4
6	2	0	0	2
8	3	0	-1	0

Cálculo 3 - 2022.1

Prova de reposição (VR)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C3.html

Questão 1.
(Total: 5.0 pts)
Sejam:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \frac{\sqrt{x^2+y^3}}{y}\,, \\ (x_0,y_0) &= (1,1)\,. \end{aligned}$$

Lembre que a fórmula para a aproximação de Taylor de 2a ordem é:

$$\begin{aligned} z(x_1,y_1) &\approx z \\ &+ z_x\Delta x + z_y\Delta y \\ &+ \tfrac{z_{xx}\Delta x\Delta x}{2} + z_{xy}\Delta x\Delta y + \tfrac{z_{yy}\Delta y\Delta y}{2} \end{aligned}$$

Calcule as aproximações de Taylor de 1a e 2a ordem da função $F(x,y)$ em torno do ponto (x_0,y_0) e use-as para calcular duas aproximações para $F(1.1,1.1)$, uma usando Taylor de 1a ordem e outra usando Taylor de 2a ordem.

Pontuação:
a) **(2.0 pts)** Taylor de 1a ordem.
b) **(3.0 pts)** Taylor de 1a ordem.

Note que esta questão tem um monte de "subitens secretos" – um monte de coisas que você vai ter que calcular de forma organizada pra conseguir chegar até os resultados finais – e eu não estou dizendo quais são esses subitens... você vai ter que se virar!

Questão 2.
(Total: 5.0 pts)
Sejam $(x_0,y_0)=(4,3)$ e:

$$\begin{aligned} F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) &= \Delta y, \\ G(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) &= \Delta x(\Delta x+\Delta y), \\ H(x,y) &= F(x,y)+G(x,y). \end{aligned}$$

Faça os diagramas de numerozinhos das funções $F(x,y)$, $G(x,y)$ e $H(x,y)$ nos pontos com $\Delta x,\Delta y \in \{-2,-1,0,1,2\}$. Depois faça uma cópia (a caneta) do seu diagrama de numerozinhos para a função $z=H(x,y)$ e trace sobre essa cópia (a lápis) as curvas de nível dela em 5 valores de z diferentes. *Dica:* essas curvas de nível vão ser "curvas quádricas", como parábolas e elipses, que você deve ter visto no fim no curso de GA.

Pontuação:
a) **(2.0 pts)** Diagramas de numerozinhos.
b) **(3.0 pts)** Curvas de nível.

Cálculo 3 - 2022.1

Prova suplementar (VS)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C3.html

Questão 1

(Total: 10.0 pts)
O diagrama de numerozinhos abaixo corresponde a uma superfície $z = F(x, y)$ que tem 5 faces. Também é possível interpretá-lo como uma superfície com 7 ou mais faces, mas vamos considerar que a superfície com só 5 faces é que é a correta.

$$
\begin{array}{cccccccc}
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

a) **(2.0 pts)** Mostre como dividir o plano em 5 polígonos que são as projeções destas faces.

b) **(1.0 pts)** Chame estas faces de face C ("cima"), E ("esquerda"), M ("meio"), D ("direita"), e B ("baixo"), e chame as equações dos planos delas de $F_C(x, y)$, $F_E(x, y)$, $F_M(x, y)$, $F_D(x, y)$, e $F_B(x, y)$. Dê as equações destes planos.

c) **(2.0 pts)** O segmento de reta que é a fronteira entre as regiões M e D "corresponde à interseção entre os planos $F_M(x, y)$ e $F_D(x, y)$". Faça as contas e explique em português o que a expressão entre aspas quer dizer.

d) **(2.0 pts)** Para cada um dos 5 polígonos do item (a) escolha um ponto com coordenadas inteiras ue esteja dentro desse polígono e não na fronteira dele. Chame esses pontos de P_C, P_E, P_M, P_D e P_B. Para cada um destes 5 pontos represente graficamente $P + \vec{\nabla} F(P)$.

e) **(1.5 pts)** Seja $Q(t)$ a seguinte trajetória:

$$
Q(t) = \begin{cases} (t, 4) & \text{quando } t \leq 6, \\ (6, 10 - t) & \text{quando } 6 < t. \end{cases}
$$

Represente graficamente $Q(t) + Q'(t)$ para $t = 1, 3, 5, 7, 9$.

f) **(1.5 pts)** Digamos que $(x, y) = (x(y), y(t)) = Q(t)$ e que $z = z(x, y) = z(x(y), y(t))$. Faça o gráfico da função $z(t) = z(x(y), y(t))$.

4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

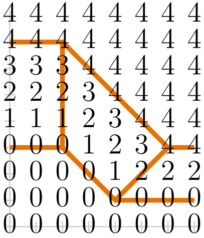
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Gabarito (muito incompleto)



Cálculo 3 - 2022.1

VS extra - 31/ago/2022

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C3.html

Questão 1

(Total: 7.0 pts)
O diagrama de numerozinhos da próxima folha corresponde a uma superfície $z = F(x, y)$ que tem 5 faces. Também é possível interpretá-lo como uma superfície com 7 ou mais faces, mas vamos considerar que a superfície com só 5 faces é que é a correta.

a) **(2.0 pts)** Mostre como dividir o plano em 5 polígonos que são as projeções destas faces.

b) **(1.0 pts)** Chame estas faces de face NW ("noroeste"), S ("sul"), C ("centro"), E ("leste"), e SE ("sudeste"), e chame as equações dos planos delas de $F_{NW}(x, y)$, $F_S(x, y)$, $F_C(x, y)$, $F_E(x, y)$, e $F_{SE}(x, y)$. Dê as equações destes planos.

c) **(1.0 pts)** Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
P_S &=& \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_S(x, y)\,\}, \\
P_C &=& \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_C(x, y)\,\}, \\
r &=& P_S \cap P_C.
\end{array}$$

Dê uma parametrização para a reta r.

d) **(2.0 pts)** Seja

$$A \;=\; \{0, 1, \ldots, 9\} \times \{0, 1, \ldots, 10\};$$

note que os numerozinhos do diagrama de numerozinhos estão todos sobre pontos de A. Para cada ponto $(x, y) \in A$ represente graficamente $(x, y) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}F(x, y)$.

Obs: quando $\vec{\nabla}F(x, y) = 0$ desenhe uma bolinha preta sobre o ponto (x, y), e quando $\vec{\nabla}F(x, y)$ não existir não desenhe nada.

e) **(1.0 pts)** Sejam

$$\begin{array}{rcl}
Q(t) &=& (1, 0) + t\overrightarrow{(1, 1)}, \\
(x(t), y(t)) &=& Q(t), \\
h(t) &=& F(x(t), y(t)).
\end{array}$$

Faça o gráfico da função $h(t)$. Considere que o domínio dela é o intervalo $[0, 8]$.

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	5	5	5
6	6	6	6	6	6	5	4	4	4
6	6	6	6	6	5	4	3	3	3
6	6	6	6	5	4	3	2	2	2
6	6	6	5	4	3	2	1	1	1
6	6	6	4	3	2	1	0	0	0
6	6	6	4	2	1	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	5	5	5
6	6	6	6	6	6	5	4	4	4
6	6	6	6	6	5	4	3	3	3
6	6	6	6	5	4	3	2	2	2
6	6	6	5	4	3	2	1	1	1
6	6	6	4	3	2	1	0	0	0
6	6	6	4	2	1	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	5	5	5
6	6	6	6	6	6	5	4	4	4
6	6	6	6	6	5	4	3	3	3
6	6	6	6	5	4	3	2	2	2
6	6	6	5	4	3	2	1	1	1
6	6	6	4	3	2	1	0	0	0
6	6	6	4	2	1	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	5	5	5
6	6	6	6	6	6	5	4	4	4
6	6	6	6	6	5	4	3	3	3
6	6	6	6	5	4	3	2	2	2
6	6	6	5	4	3	2	1	1	1
6	6	6	4	3	2	1	0	0	0
6	6	6	4	2	1	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	5	5	5
6	6	6	6	6	6	5	4	4	4
6	6	6	6	6	5	4	3	3	3
6	6	6	6	5	4	3	2	2	2
6	6	6	5	4	3	2	1	1	1
6	6	6	4	3	2	1	0	0	0
6	6	6	4	2	1	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	5	5	5
6	6	6	6	6	6	5	4	4	4
6	6	6	6	6	5	4	3	3	3
6	6	6	6	5	4	3	2	2	2
6	6	6	5	4	3	2	1	1	1
6	6	6	4	3	2	1	0	0	0
6	6	6	4	2	1	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0
6	6	6	4	2	0	0	0	0	0

Questão 2
(Total: 3.0 pts)

Seja $H(x, y) = \sqrt{x + ay}$.
Dê a aproximação de Taylor de ordem 2
para $H(x, y)$ em torno do ponto $(1, 1)$.

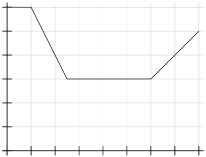
Questão 1: gabarito

a)
$$\begin{array}{cccccccccc}
6&6&6&6&6&6&6&6&6&6\\
6&6&6&6&6&6&6&6&6&6\\
6&6&6&6&6&6&6&5&5&5\\
6&6&6&6&6&6&5&4&4&4\\
6&6&6&6&6&5&4&3&3&3\\
6&6&6&6&5&4&3&2&2&2\\
6&6&6&5&4&3&2&1&1&1\\
6&6&6&4&3&2&1&0&0&0\\
6&6&6&4&2&1&0&0&0&0\\
6&6&6&4&2&0&0&0&0&0\\
6&6&6&4&2&0&0&0&0&0
\end{array}$$

b)
$$\begin{aligned}
F_{NW}(x,y) &= 6 \\
F_S(x,y) &= 10-2x \\
F_C(x,y) &= y-x+4 \\
F_E(x,y) &= y-3 \\
F_{SE}(x,y) &= 0
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
P_S &= \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=10-2x\,\}, \\
P_C &= \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=y-x+4\,\}, \\
r &= \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=10-2x=y-x+4\,\}, \\
&= \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=10-2x,\ y=6-x\,\}, \\
&= \{\,(x,6-x,10-2x) \mid x\in\mathbb{R}\,\}
\end{aligned}$$

d) No interior da região...
NW: temos $\vec\nabla(x,y) = \overrightarrow{(0,0)}$,
S: temos $\vec\nabla(x,y) = \overrightarrow{(-2,0)}$,
C: temos $\vec\nabla(x,y) = \overrightarrow{(-1,-1)}$,
E: temos $\vec\nabla(x,y) = \overrightarrow{(0,1)}$,
SE: temos $\vec\nabla(x,y) = \overrightarrow{(0,0)}$.
Nas fronteiras entre as regiões o gradiente não existe.
Vou fazer o desenho depois.

e) $h(t) =$ 

Questão 2: gabarito

Sejam $S = \sqrt{x+ay}$ e $S_0 = \sqrt{1+a}$. Então:

$$\begin{array}{rcl} H(x,y) & = & S \\ H_x(x,y) & = & 1/(2S) \\ H_y(x,y) & = & a/(2S) \\ H_{xx}(x,y) & = & -1/(4S^3) \\ H_{xy}(x,y) & = & -a/(4S^3) \\ H_{yy}(x,y) & = & -a^2/(4S^3) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} H(1,1) & = & S_0 \\ H_x(1,1) & = & 1/(2S_0) \\ H_y(1,1) & = & a/(2S_0) \\ H_{xx}(1,1) & = & -1/(4S_0^3) \\ H_{xy}(1,1) & = & -a/(4S_0^3) \\ H_{yy}(1,1) & = & -a^2/(4S_0^3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} H(1+\Delta x, 1+\Delta y) & = & H(1,1) \\ & + & H_x(1,1)\Delta x + H_y(1,1)\Delta y \\ & + & H_{xx}(1,1)\frac{\Delta x^2}{2} + H_{xy}(1,1)\Delta x \Delta y + H_{yy}(1,1)\frac{\Delta y^2}{2} \\ & = & S_0 \\ & + & \frac{1}{2S_0}\Delta x + \frac{a}{2S_0}\Delta x \Delta y \\ & + & \frac{-1}{4S_0^3}\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{-a}{4S_0^3}\Delta x \Delta y + \frac{-a^2}{4S_0^3}\frac{\Delta y^2}{2} \end{array}$$

Critérios de correção

Erros crassos exatamente iguais ao de colegas podem fazer a pessoa perder mais pontos.

Questão 1

Item 1a:
Já fizemos exercícios deste tipo muitas vezes, então aqui a correção é bem rigorosa. Se alguma das regiões da pessoa tem quatro pontos não-coplanares ela leva zero neste item.

Item 1b:
Aqui as funções F_{NW} e F_{SE} são triviais e não contam pontos. Se a pessoa obtiver três planos diferentes para F_S, F_C e F_E fazendo contas claras e legíveis pequenos erros de conta podem ser perdoados.

Item 1c:
Aqui a reta correta é a reta
$r = \{\,(x, 6-x, 10-2x) \mid x \in \mathbb{R}\,\}$.

Se a pessoa obteve a projeção desta reta no plano (x, y), que é $r = \{\,(x, 6-x, 10-2x) \mid x \in \mathbb{R}\,\}$. então ela ganha só 0.6 pontos.
Repostas com retas dadas por equações ao invés de retas parametrizadas são aceitas sem desconto de pontos.

Item 1d:
Nós fizemos exercícios deste tipo muitas vezes em sala — tanto a parte de calcular gradientes de regiões planas de diagramas de numerozinhos quanto a parte de representar graficamente somas de pontos e vetores seguindo esta convenção:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-tudo.pdf#page=8

então aqui a correção pode ser bem rigorosa. Eu esperava que os alunos mostrassem que sabiam que nas regiões NW e SE os gradientes são zero, que na região S ele aponta pra esquerda, que na região C ele aponta pra noroeste que e na região E ele aponta pra cima; erros nisso são considerados erros graves e descontam muitos pontos. Os erros que descontam poucos pontos são: 1) não reconhecer que nos pontos de fronteira entre os planos o gradiente não está definido e 2) não reconhecer que na região S o módulo do gradiente é o dobro do módulo na região E.

Critérios de correção (cont.)

Item 1e:
Se a pessoa conseguiu desenhar a reta $Q(t)$ ela ganha 0.1 pontos.
Se além disso ela conseguiu fazer um gráfico da função $h(t)$ em que o valor de $h(t)$ está correto em todos os valores de t inteiros ela ganha mais 0.5 pontos.
Se além disso a pessoa conseguiu ver que a inclinação da função $h(t)$ muda quando $t = 2.5$ ela ganha os 0.4 que faltam.

Questão 2
Aqui erros de conta no cálculo das derivadas parciais podem ser perdoados. O mais importante é que a pessoa ponha o resultado final numa destas formas:

$$\begin{array}{rcl}
G(1+\Delta x, 1+\Delta y) & \approx & \underline{\quad\;} \\
& + & \underline{\quad\;}\Delta x + \underline{\quad\;}\Delta y \\
& + & \underline{\quad\;}\Delta x^2 + \underline{\quad\;}\Delta x\Delta y + \underline{\quad\;}\Delta y^2 \\
\\
\text{ou:} & & \\
G(x,y) & \approx & \underline{\quad\;} \\
& + & \underline{\quad\;}(x-1) + \underline{\quad\;}(y-1) \\
& + & \underline{\quad\;}(x-1)^2 + \underline{\quad\;}(x-1)(y-1) + \underline{\quad\;}(y-1)^2
\end{array}$$

e manipule os coeficientes de forma coerente.